Benemérita Universidad
Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico
Matemáticas

Partícula Relativista Disipativa.

T E S I S

para obtener el título de:

licenciado en física

P R E S E N T A :

Mario Alexis Ramírez Bautista

ASESOR:

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero

junio 2020

Título: Partícula relativista disipativa.
Estudiante: MARIO ALEXIS RAMÍREZ BAUTISTA.

COMITÉ:

Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada.
Presidente.

Dr. Roberto Cartas Fuentevilla.
Secretario.

M. C. Nephtalí Eliceo Martínez Pérez.
Vocal

Dr. Víctor Manuel Vázquez Báez.
Suplente

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero.
Asesor

Agradecimientos

A mis hermanos M.A.R.B. por el ejemplo que me muestran día con día y por la complicidad que siempre ha existido.

A mi mamá por la disciplina y responsabilidad que me inculcó durante todos mis estudios.

A mis amigos de la carrera, muchas gracias por todo lo que hemos compartido.

Le agradezco mucho al Dr. Cupatitzio Ramírez por todo el apoyo, consejos y paciencia que me brindó tanto en este trabajo como en los anteriores.

A mis profesores de la licenciatura por sus consejos y enseñanzas.

Resumen

En la mecánica clásica se resuelven sistemas conservativos de diferentes niveles de complejidad, por otro lado, existen también en la naturaleza muchos ejemplos de sistemas que disipan energía, de ahí la importancia de buscar una forma de resolverlos. Se han hecho trabajos sobre sistemas disipativos clásicos con formulaciones lagrangianas o hamiltonianas que ayudan a determinar la dinámica, para hacer esto, se hacen diferentes consideraciones tanto en las formulaciones como en la resolución de las ecuaciones de movimiento. El objetivo de este trabajo es determinar cómo se ven afectados los sistemas con pérdida de energía en la relatividad, centrando la atención en la partícula libre disipativa. Para este sistema se construye una lagrangiana con invariancia de Lorentz y se trabaja también con invariancia bajo reparametrizaciones del tiempo, se obtienen y se resuelven las ecuaciones de movimiento utilizando las dos invariancias, posteriormente se hace la formulación hamiltoniana y finalmente, se hace un análisis de otros sistemas relativistas, candidatos a agregar la parte disipativa ya sea con invariancia de Lorentz o invariancia bajo reparametrizaciones del tiempo.

Palabras clave: *disipativos*, *dinámica*, *relativista*, *invariancia*.

Índice General

Resumen **v**

Introducción **ix**

1 Sistemas disipativos en la mecánica clásica. **1**
1.1 Principio de Hamilton. 2
1.2 Formulación Lagrangiana de Galley para sistemas no conservativos. 2
1.2.1 Ejemplo del oscilador armónico. 3
1.2.2 Partícula libre clásica con disipación de energía . 5

2 Relatividad especial. **7**
2.1 Postulados 8
2.2 Transformaciones de Lorentz 8
2.3 Notación de Índices. 11

3 Partícula relativista. **17**
3.1 Lagrangiana de la partícula relativista libre. 18
3.2 Extensión del potencial disipativo a la mecánica relativista 20
3.3 Lagrangiano de una partícula disipativa. 22
3.4 Ecuaciones de movimiento de la partícula relativista con disipación. 27
3.5 Solución del sistema de ecuaciones 30
3.6 Comprobación de las soluciones halladas. 34
3.6.1 Posible solución real y dependencia temporal de las soluciones. 35

4 Sistemas relativistas con invariancia de reparametrizaciones del tiempo. 37
4.1 Definición de sistemas relativistas 38
4.2 Invariancia de la acción bajo reparametrizaciones del tiempo. 38
4.3 Sistemas disipativos 40
4.4 Ecuaciones de movimiento. 41
4.5 Partícula relativista. 41
4.5.1 Partícula relativista con una e. 41
4.5.2 Partícula relativista con e_1 y e_2. 42
4.6 Propuesta alternativa. 44
4.7 Formalismo Hamiltoniano. 49
4.8 Partícula libre relativista. 49

5 Partícula en una circunferencia de radio constante. 51
5.1 Lagrangiana del sistema clásico. 52
5.2 Lagrangiano con invariancia bajo reparametrizaciones del tiempo. 54
5.2.1 Sistema con $e_1(t)$ y $e_2(t)$ y la masa en el término cinético. 56
5.2.2 Sistema con $e_1(t)$ y $e_2(t)$ y las masas fuera del término cinético. 57

6 Oscilador Armónico Relativista 59
6.1 Cambiando el signo del segundo término de la lagrangiana. 62
6.2 Oscilador armónico disipativo. 63

7 Conclusiones 65

Bibliografía 68

Introducción

En la mecánica clásica aparecen los formalismos Lagrangiano y Hamiltoniano, mismos que se desarrollaron para resolver problemas físicos cuya energía total se conserva, por ejemplo, el oscilador armónico, partícula libre, partícula en caída libre, fuerzas centrales, etc. Para tratar sistemas clásicos en los que la energía no se conserva, se han realizado trabajos en los que es posible agregar al lagrangiano un potencial disipativo, con la ayuda del principio de acción estacionaria de Hamilton, que es muy útil para hallar las ecuaciones de movimiento de sistemas con diferentes grados de complejidad y para hallar la formulación hamiltoniana. El principio de Hamilton se basa en una formulación lagrangiana o hamiltoniana de un sistema; está formulado con condiciones en el tiempo y no con condiciones iniciales (a diferencial de las interacciones no conservativas), aquí es donde aparece el problema de agregarle las condiciones iniciales de las interacciones no conservativas al principio de Hamilton para que éste sea capaz de abarcar también sistemas con disipación. Para las fuerzas de disipación simples locales en el tiempo y lineales en las velocidades, se puede usar la función de disipación de Rayleigh [5]. Sin embargo, esta función no es lo suficientemente completa como para describir sistemas con características disipativas más generales como la no-localidad y la no-linealidad, que pueden surgir en los sistemas abiertos.

Como ya se mencionó, la evolución dinámica de los sistemas no con-

servativos está determinada por las condiciones iniciales, por este motivo, es natural esperar que estos datos iniciales sean usados para una formulación del principio de Hamilton para sistemas no conservativos.

Galley [1] propone algunas condiciones de frontera tanto en los tiempos iniciales como finales que ayudan a dar una acción para sistemas no conservativos.

A pesar de conocer el principio de conservación de la energía, se puede notar que hay cuerpos que pierden energía, pues de alguna manera se detienen en un determinado momento; como un péndulo que oscila, un trompo o una moneda que cae al suelo y rueda, si la energía no se perdiera entonces estos sistemas deberían continuar sus ciclos sin detenerse y no es que la energía no se conserve sino que hay una pérdida de energía que pasa al medio (si se considera un sistema completo de cuerpo y el medio que lo rodea). El principal interés en estos sistemas es la descripción cuántica [11], en este caso se pretende estudiar la descripción de sistemas relativistas no conservativos, considerando sistemas con invariancia de Lorentz, como la partícula relativista, así como sistemas con invariancia bajo transformaciones generales del tiempo, es interesante estudiar estos últimos debido a que la partícula libre resulta ser también invariante bajo transformaciones generales del tiempo lo que permitiría en dado caso, estudiar sistemas disipativos sin necesidad de recurrir a la relatividad especial.

La Relatividad Especial dentro de la física es una teoría muy importante, aparece cuando se observa un mismo suceso desde diferentes marcos de referencia inerciales; lo que se ve en un marco no necesariamente es lo mismo que lo que se observa desde otros, particularmente si se trata de tiempo y longitud, es por eso que en este trabajo se debe tener mucho cuidado con las cantidades que se utilizan ya que se puede confundir lo que se observa desde dos observadores en diferentes sistemas de referencia. Para conocer lo que ocurre en un marco de referencia si se observa desde otro, es necesario utilizar las transformaciones de Lorentz, las cuales proporcionaron una base para el desarrollo de la relatividad especial. Fueron obtenidas por Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928), físico neerlandés, pero no fue él quien introdujo las conse-

cuencias importantes de esta teoría, debido a que sus trabajos sobre este tema quedaron inexplicados durante un año hasta que, en 1905, Albert Einstein, tomó lo que Lorentz había trabajado y fue capaz de darles una interpretación considerando el carácter relativo del tiempo y el espacio. La "Teoría de la Relatividad Especial" describe muy bien la relación que existe entre las medidas de una magnitud física cuando estas se toman por dos observadores diferentes moviéndose a velocidades altas, relativo a la velocidad de la luz, de ahí el interés por la partícula relativista.

La partícula libre con disipación se puede tratar en la mecánica clásica utilizando la formulación lagrangiana de Galley. Sin embargo, esta formulación no se ha dado para sistemas relativistas. En este trabajo se pretende encontrar en primer lugar, una lagrangiana invariante bajo transformaciones de Lorentz, para lo cual se busca una extensión de un potencial disipativo clásico a la relatividad; se busca construir el lagrangiano covariante de la partícula relativista con disipación para posteriormente hallar las ecuaciones de movimiento covariantes y ver si en el límite clásico se reducen a las ecuaciones de la partícula clásica con disipación de energía que es lo que se espera, además de llegar a la solución de dichas ecuaciones de movimiento, se espera que en este proceso aparezcan dificultades debido a la invariancia relativista.

En segundo lugar, se propone estudiar el mismo sistema mediante la invariancia bajo reparametrizaciones del tiempo y hacer una comparación con las ecuaciones obtenidas de ambos métodos.

Finalmente, tras obtener las soluciones del sistema de la partícula libre, se pretende hacer la formulación hamiltoniana y explorar si se puede dar una extensión de otros sistemas también disipativos a la relatividad; como oscilador armónico relativista y una partícula ligada a moverse en una circunferencia.

Un artículo publicado en 2017, "Oscilador Armónico Relativista" por Miguel Barriuso Gutiérrez [9], sobre el oscilador armónico relativista sin pérdida de energía da pie a pensar en las complicaciones que se pueden tener cuando se incluya la disipación, pues en ese artículo se plantea una

solución numérica y unidimensional del problema.

CAPÍTULO 1

Sistemas disipativos en la mecánica clásica.

En este capítulo se presenta el principio de mínima acción conocido en la mecánica clásica y las consideraciones que se le hacen para poder usarlo en la descripción de sistemas no conservativos, aparece también la formulación lagrangiana y su aplicación en la partícula clásica con disipación de energía.

1.1. Principio de Hamilton.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange se pueden obtener a partir del principio de D'Alembert pero también es posible obtenerlas a partir del principio que considera el movimiento completo de un sistema entre los tiempos inicial y final, y pequeñas variaciones del movimiento completo alrededor del movimiento real.

Se define la acción a partir del movimiento desde un tiempo t_i hasta el tiempo t_f y está dada por la integral de la función lagrangiana a lo largo del tiempo:

$$S(q_i, \dot{q}_i, t) = \int_{t_i}^{t_f} L(q_i, \dot{q}_i, t)dt \tag{1.1}$$

El sistema puede viajar desde la posición en el tiempo inicial hasta la posición en el tiempo final de tal modo que la trayectoria recorrida sea un punto extremo, entonces la variación de la integral de línea es cero suponiendo que los puntos inicial y final son fijos, es decir, que la variación de las coordenadas en esos puntos es cero.

$$\delta S(q_i, \dot{q}_i, t) = \int_{t_i}^{t_f} \delta L(q_i, \dot{q}_i, t)dt = 0 \tag{1.2}$$

esto conduce a las ecuaciones de movimiento del sistema conservativo cuyas restricciones son únicamente que los extremos sean fijos, como ya se mencionó. Vamos ahora a la siguiente sección donde se va a tratar un sistema cuya energía no es conservada, para lo cual se hace una modificación a las condiciones del principio de Hamilton [1].

1.2. Formulación Lagrangiana de Galley para sistemas no conservativos.

Galley propuso una forma para el tratamiento de sistemas clásicos con pérdida de energía [1, 2] utilizando una acción ahora conocida en la literatura como acción de Galley [10], la cual consta de la duplicación

de las coordenadas generalizadas así como las velocidades generalizadas, es decir, si se tiene una función lagrangiana de un sistema conservativo con n grados de libertad $L(q, \dot{q})$, la lagrangiana no conservativa correspondiente constará de $2n$ grados de libertad y se define de la siguiente manera:

$$L(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) \equiv L(q_1, \dot{q}_1) - L(q_2, \dot{q}_2) + K(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) \tag{1.3}$$

donde K es un potencial no conservativo y es antisimétrico bajo el cambio de variables $q_1 \leftrightarrow q_2$ como se verá más adelante.

A partir de este lagrangiano se define la acción de Galley de la siguiente forma [10].

$$S(q_1, q_2) = \int_{t_i}^{t_f} L(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) dt \tag{1.4}$$

Las ecuaciones de movimiento se pueden obtener mediante el principio de acción estacionaria compatible con los valores iniciales de Galley. Este principio establece que la evolución de la dinámica del sistema es tal que hace que la acción sea un punto extremal $\delta_q S = 0$, las ecuaciones de movimiento se hallan imponiendo las siguientes condiciones, mismas que sirven para eliminar los términos de frontera que surgen al realizar la variación.

$$\begin{array}{ccc} \delta q_1(t_i) = 0, & \delta q_2(t_i) = 0, & \\ q_1(t_f) = q_2(t_f), & \dot{q}_1(t_f) = \dot{q}_2(t_f), & \delta q_1(t_f) = \delta q_2(t_f) \end{array}$$

dado que este procedimiento para hallar ecuaciones de movimiento aumenta los grados de libertad, para n grados de libertad iniciales, se obtendrán $2n$ ecuaciones diferenciales.

1.2.1. Ejemplo del oscilador armónico.

Se parte del ejemplo de la formulación lagrangiana para un oscilador armónico amortiguado, este es uno de los paradigmas de la formulación de Bateman para este sistema [11] cuyo lagrangiano es:

$$L = 2[\dot{x}\dot{y} - \kappa xy + \Gamma(x\dot{y} - y\dot{x})] \tag{1.5}$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para este lagrangiano en la variable "x", con $\Gamma > 0$ describen el oscilador armónico amortiguado, "y" es un grado de libertad asociado con el ambiente cuya dinámica es descartada. El término cinético de (1.5) puede ser diagonalizado mediante la transformación $q_1 = x + y, q_2 = x - y$, entonces $x = \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$ y $y = \frac{1}{2}(q_1 - q_2)$.

Así, en términos de las coordenadas q_1 y q_2 :

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 - \kappa q_1^2) - \frac{1}{2}(\dot{q}_2^2 - \kappa q_2^2) + \Gamma(q_2\dot{q}_1 - q_1\dot{q}_2) \tag{1.6}$$

Este lagrangiano es antisimétrico bajo el cambio de variables[1]y se construyó mediante las formulaciones de Galley y Polonyi [7, 1].

Los dos primeros términos de esta acción se pueden escribir como:

$$S = \int_{t_i}^{t_f} L(q_1, \dot{q}_1)dt - \int_{t_i}^{t_f} L(q_2, \dot{q}_2)dt = \int_{t_i}^{t_f} L(q_1, \dot{q}_1)dt + \int_{t_f}^{t_i} L(q_2, \dot{q}_2)dt \tag{1.7}$$

a esta acción se le agrega una función potencial $K(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)$, el cual depende de ambas coordenadas y velocidades y que además es antisimétrico bajo el cambio de variables $1 \leftrightarrow 2$, es decir, $K(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) = -K(q_2, \dot{q}_2, q_1, \dot{q}_1)$.

Así, la acción es:

$$S = \int_{t_i}^{t_f} \Lambda(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)dt = \int_{t_i}^{t_f} [L(q_1, \dot{q}_1) - L(q_2, \dot{q}_2) + K(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)]dt \tag{1.8}$$

La variación de esta acción puede ser hecha a partir del principio de Hamilton usual, con las variables fijas en t_i y t_f, llegando a las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Estas ecuaciones también se pueden obtener por una variación que se basa en condiciones iniciales y en el tiempo final, solamente se igualan las dos coordenadas.

[1] $q_1 \leftrightarrow q_2$

Estas condiciones de frontera también obedecen los problemas de causalidad como lo son los procesos disipativos que son determinados por condiciones iniciales.

Este método se basa en la duplicación de las coordenadas y velocidades generalizadas para obtener un lagrangiano como en (1.6)

Para reducir los grados de libertad y regresar al sistema original, Bateman propuso variables tipo $\pm$, que como ya se expuso al inicio de esta sección, están expresadas en términos de las variables q_1 y q_2, y se definen de la siguiente forma:

$$q_{\pm} = \frac{1}{2}(q_1 \pm q_2)$$

En los siguientes ejemplos se va a ejemplificar lo anterior.

1.2.2. Partícula libre clásica con disipación de energía

El lagrangiano de la partícula libre con disipación es:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{q_1}^2 - \dot{q_2}^2) + \frac{m\gamma}{2}(\dot{q_1}q_2 - \dot{q_2}q_1) \tag{1.9}$$

las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes a este lagrangiano, forman un conjunto de ecuaciones diferenciales simétrico bajo $(q_1, \dot{q_1}, \ddot{q_1}, q_2, \dot{q_2}, \ddot{q_2}) \rightarrow (q_2, \dot{q_2}, \ddot{q_2}, q_1, \dot{q_1}, \ddot{q_1})$

$$\ddot{q_1} + \gamma\dot{q_2} = 0 \tag{1.10}$$
$$\ddot{q_2} + \gamma\dot{q_1} = 0 \tag{1.11}$$

La solución de este sistema de ecuaciones diferenciales acopladas es:

$$q_1(t) = Ae^{-\gamma t} + Be^{\gamma t} + C + D \tag{1.12}$$
$$q_2(t) = Ae^{-\gamma t} - Be^{\gamma t} + C - D \tag{1.13}$$

Ahora, imponiendo $q_1(t_f) = q_2(t_f)$, como requiere el principio variacional, se obtiene:

$$D = -Be^{\gamma t_f} \tag{1.14}$$

Por otro lado, la condición $\dot{q_1}(t_f) = \dot{q_2}(t_f)$ conduce a $B = 0$, entonces $D = 0$ y:

$$q_1(t) = q_2(t) = Ae^{-\gamma t} + C \equiv q(t) \tag{1.15}$$

Una desventaja que podría surgir al intentar resolver un problema de esta forma es la complejidad del sistema porque se tienen $2n$ ecuaciones acopladas. Es conveniente utilizar una transformación para desacoplar las ecuaciones obtenidas. En este caso se pueden usar las coordenadas $\pm$.

$$q^I_{\pm} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(q^I_1 \pm q^I_2) \tag{1.16}$$

En particular, las ecuaciones de Euler-Lagrange del problema que estamos usando como ejemplo serían

$$m\frac{d}{dt}(\dot{q}_+ + \gamma q_+) = 0 \tag{1.17}$$

$$m\frac{d}{dt}(\dot{q}_- - \gamma q_-) = 0 \tag{1.18}$$

La ecuación de q_+ se puede identificar inmediatamente con la de una partícula con amortiguamiento lineal. La ecuación de q_- bien podría describir a $q_+(-t)$ pero, en concordancia con el hecho de que $q_1(t) = q_2(t_f)$, se le debe asignar la solución trivial.

CAPÍTULO 2

Relatividad especial.

En este capítulo se pretende dar los conceptos básicos de la relatividad especial que son necesarios para llevar a cabo los cálculos posteriores, como lo son los postulados, las transformaciones de Lorentz, los conceptos de invariante, cuadrivector, métrica y la forma en la que se trabaja con los índices de los conceptos que en este capítulo se definen.

2.1. Postulados

La Relatividad Especial es una teoría que permite describir los fenómenos físicos que ocurren en diferentes sistemas de referencia inerciales, fue publicada por Albert Einstein el 1905 y está basada en dos postulados:

- Todos los sistemas de referencia inerciales son equivalentes entre sí.

- La velocidad de la luz en el vacío es independiente del movimiento de la fuente.

El primer postulado es básicamente una forma de decir que ningún experimento (mecánico, electromagnético, etc.) es capaz de medir un movimiento inercial absoluto. El segundo postulado se refiere a la constancia la velocidad de la luz en el vacío, pues es la misma para todos los observadores.

2.2. Transformaciones de Lorentz

La relación que existe entre las coordenadas de los sucesos medidos por dos sistemas de referencia inerciales, es una transformación de Lorentz. Cada suceso tiene coordenadas (x, y, z, t) respecto a S y (x', y', z', t') respecto a S', estamos interesados en conocer la relación que existe entre las coordenadas (x, y, z, t) y (x', y', z', t'). Las transformaciones de Lorentz nos dicen cómo calcular las coordenadas de un cierto suceso en las coordenadas de un sistema S' a partir de las coordenadas en otro sistema S. Para la configuración estándar (sistema S' con ejes paralelos al eje S, moviéndose a lo largo del eje x y que se aleja del sistema S con velocidad constante $\vec{v}$).

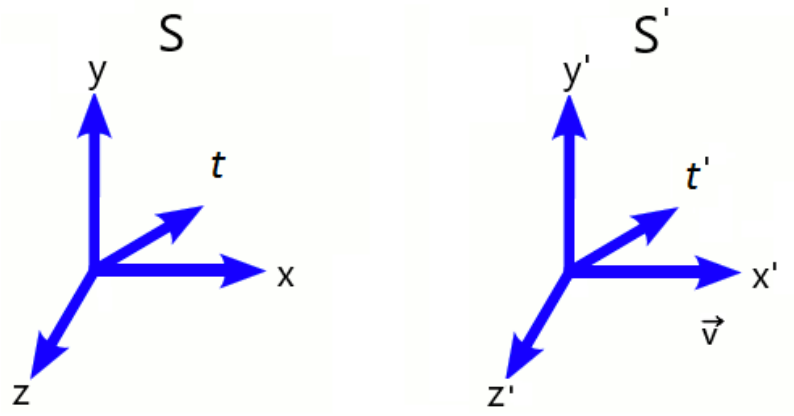

Figura 2.1: Configuración estándar , sistemas S y S', el segundo se mueve a una velocidad v respecto al primero en la dirección x

En la figura se muestra un esquema de la forma en la que los marcos de referencia se colocan para formar la configuración estándar, a partir de la cual se construyen las transformaciones de Lorentz:

$$ct' = \gamma(ct - \frac{v}{c}x) \tag{2.1}$$

$$x' = \gamma(x - \frac{v}{c}ct) \tag{2.2}$$

$$y' = y \tag{2.3}$$

$$z' = z \tag{2.4}$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.5}$$

c es la velocidad de la luz y v es la velocidad relativa entre los sistemas S y S'

Así mismo, se pueden ver las transformaciones inversas que evidentemente nos darán las coordenadas de un suceso que ocurrió en el marco S a partir de las coordenadas del mismo suceso en el marco S':

$$ct = \gamma(ct' + \frac{v}{c}x') \tag{2.6}$$

$$x = \gamma(x' + \frac{v}{c}ct') \tag{2.7}$$

$$y = y' \tag{2.8}$$

$$z = z' \tag{2.9}$$

En esta parte es importante mencionar el concepto de invariante $(\Delta S)^2$, se trata de una cantidad que vista desde distintos marcos de referencia inerciales tiene el mismo valor. Para visualizar este concepto retomemos la idea de rotaciones de ejes cartesianos en el plano, se sabe que la cantidad $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$, es decir, la cantidad es invariante bajo rotaciones.

En el caso de las transformaciones de Lorentz:

Proposición: Sean $\Delta x \equiv x_B - x_A; \Delta y \equiv y_B - y_A; \Delta z \equiv z_B - z_A; \Delta t \equiv t_B - t_A$, donde (x_A, y_A, z_A, t_A) y (x_B, y_B, z_B, t_B) representan sucesos.

Las Δ indican qué tan distantes están los sucesos en el espacio y en el tiempo.

Entonces,

$$(\Delta S)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (c\Delta t)^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 - (c\Delta t')^2 = (\Delta S')^2$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\Delta x' \equiv x_{B'} - x_{A'} &= \gamma(x_B - \beta c t_B) - \gamma(x_A - \beta c t_A) \Rightarrow \Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta c \Delta t) \\
\Delta y' \equiv y_{B'} - y_{A'} &= y_B - y_A \Rightarrow \Delta y' = \Delta y \\
\Delta z' \equiv z_{B'} - z_{A'} &= z_B - z_A \Rightarrow \Delta z' = \Delta z \\
c\Delta t' \equiv ct_{B'} - ct_{A'} &= \gamma(ct_B - \beta x_B) - \gamma(ct_A - \beta x_A) \Rightarrow c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta \Delta x)
\end{aligned}$$

Entonces.

$$\begin{aligned}
(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 - (c\Delta t')^2 &= \gamma^2[(\Delta x - \beta c\Delta t)^2 - (c\Delta t - \beta \Delta x)^2] + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \\
&= \gamma^2[1 - \beta^2][\Delta x^2 - (c\Delta t)^2] + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \\
&= (\Delta x)^2 - (c\Delta t)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \qquad \textit{l.c.q.d.}
\end{aligned}$$

De hecho,

$$(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 - (c\Delta t')^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (c\Delta t)^2 \tag{2.10}$$

puede ser tomado como definición de las transformaciones de Lorentz.

2.3. Notación de Índices.

De las transformaciones de Lorentz (2.1), (2.2), (2.3) y (2.4) se definen:

$$x^0 \equiv ct, \qquad x^1 \equiv x, \qquad x^2 \equiv y, \qquad x^3 \equiv z$$

Así, las transformaciones de Lorentz se pueden sintetizar de la siguiente manera y desarrollando la suma sobre índices repetidos (uno arriba y uno abajo o viceversa).

Por definición:

$$x^{\alpha'} = a^{\alpha'}_{\beta} x^{\beta} \equiv a^{\alpha'}_0 x^0 + a^{\alpha'}_1 x^1 + a^{\alpha'}_2 x^2 + a^{\alpha'}_3 x^3 \tag{2.11}$$

donde $(a^{\alpha'}_{\beta})$ es una matriz llamada "matriz de Lorentz", cuyas entradas son constantes, en general tiene 16 entradas debido a que cada

índice corre de 0 a 3; para la configuración estándar muchos coeficientes se anulan :

$$(a_\beta^{\alpha'}) = \begin{pmatrix} a_0^{0'} & a_1^{0'} & a_2^{0'} & a_3^{0'} \\ a_0^{1'} & a_1^{1'} & a_2^{1'} & a_3^{1'} \\ a_0^{2'} & a_1^{1'} & a_2^{2'} & a_3^{2'} \\ a_0^{3'} & a_1^{3'} & a_2^{3'} & a_3^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

Si se habla de varios sucesos, se toma (2.10) que como ya se mencionó, sirve como definición de las transformaciones de Lorentz y se puede desarrollar de acuerdo con la nueva notación:

$$\begin{aligned} (\Delta S)^2 &= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (c\Delta t)^2 \\ &= (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 - (c\Delta x^0)^2 \\ &= \eta_{\alpha\beta}\Delta x^\alpha \Delta x^\beta \end{aligned}$$

donde $(\eta_{\alpha\beta}) \equiv diag(-1, 1, 1, 1)$, o bien:

$$(\eta_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

Conocida en la literatura como métrica de Minkowsky, este objeto permite subir y bajar los índices de las cantidades.

Ahora bien, retomando la cantidad $\eta_{\alpha\beta}\Delta x^\alpha \Delta x^\beta$, como representa un invariante, sabemos que:

$$\eta_{\alpha\beta}\Delta x^\alpha \Delta x^\beta = \eta_{\alpha'\beta'}\Delta x^{\alpha'} \Delta x^{\beta'} \tag{2.14}$$

y, recordando (2.11)

$$\eta_{\alpha'\beta'}\Delta x^{\alpha'}\Delta x^{\beta'} = \eta_{\alpha'\beta'}(a^{\alpha'}_{\gamma}\Delta x^{\gamma})(a^{\beta'}_{\delta}\Delta x^{\delta})$$

De manera conveniente, se escribe el primer miembro de (2.14) como $\eta_{\gamma\delta}\Delta x^{\gamma}\Delta x^{\delta}$

$$\Rightarrow \eta_{\gamma\delta}\Delta x^{\gamma}\Delta x^{\delta} = \eta_{\alpha'\beta'}(a^{\alpha'}_{\gamma}\Delta x^{\gamma})(a^{\beta'}_{\delta}\Delta x^{\delta}) \tag{2.15}$$

Acomodando los términos de la expresión anterior, se puede notar que:

$$\eta_{\gamma\delta} = a^{\alpha'}_{\gamma}a^{\beta'}_{\delta}\eta_{\alpha'\beta'} \tag{2.16}$$

esta expresión es muy importante, porque las coordenadas que antes aparecían (ct, x, y, z) ya dejaron de aparecer, sólo aparecen relaciones entre números reales, pero esta expresión proviene de la definición de las transformaciones de Lorentz, es decir, se trata de una manera equivalente de definir las transformaciones de Lorentz. Más aún,

$$\begin{aligned}\eta_{\gamma\delta} &= a^{\alpha'}_{\gamma}\eta_{\alpha'\beta'}a^{\beta'}_{\delta} \\ &= \eta_{\alpha'\beta'}a^{\alpha'}_{\gamma}a^{\beta'}_{\delta}\end{aligned}$$

En general, una transformación de Lorentz arbitraria donde se supone que los orígenes de los dos sistemas inerciales en ningún momento coinciden:

$$x^{\alpha'} = a^{\alpha'}_{\beta}x^{\beta} + b^{\alpha'} \tag{2.17}$$

las constantes $b^{\alpha'}$ al final de cuentas se pueden ignorar pues solo son cuatro constantes arbitrarias que representan traslaciones (distancia entre orígenes), en este caso se ponen porque se pretende ver de manera general cualquier transformación de Lorentz. En cuanto a la a^{α}_{β}, ya se vio que se trata de la matriz de Lorentz.

Definición: Un cuadrivector es un objeto que con respecto a cada marco inercial se representa por cuatro componentes (A^0, A^1, A^2, A^3)

las cuales se transforman (en el caso de la configuración estándar) de acuerdo con:

$$A^{0'} = \gamma(A^0 - \beta A^1) \tag{2.18}$$

$$A^{1'} = \gamma(A^0 - \beta A^1) \tag{2.19}$$

$$A^{2'} = A^2 \tag{2.20}$$

$$A^{3'} = A^3 \tag{2.21}$$

así mismo, se define $U^\alpha \equiv (U^0, U^1, U^2, U^3) = \gamma_u(c, u_x, u_y, u_z)$, que es un cuadrivector llamado cuadrivelocidad donde u_x, u_y, u_z son las componentes espaciales de la velocidad.

Bajo una transformación de Lorentz arbitraria (2.17), las componentes de un cuadrivector se transforman de acuerdo con:

$$A^{\alpha'} = a^{\alpha'}_{\beta} A^\beta \tag{2.22}$$

donde $a^{\alpha'}_{\beta}$ es la matriz de Lorentz y siempre va a aparecer al transformar cualquier cuadrivector.

Proposición: Si A^α y B^α son las componentes de dos cuadrivectores (que pueden ser el mismo), entonces $\eta_{\alpha\beta}A^\alpha B^\beta$ es invariante bajo transformaciones de Lorentz.

Así,

$$\eta_{\alpha'\beta'}A^{\alpha'}B^{\beta'} = \eta_{\gamma\delta}A^\gamma B^\delta \tag{2.23}$$

Este resultado también se puede escribir como: $A^{\alpha'}B_{\alpha'}{=}A^\alpha B_\alpha$ porque $\eta_{\alpha'\beta'}A^{\alpha'}B^{\beta'} = A^{\alpha'}B_{\alpha'}$ pues la $\eta_{\alpha'\beta'}$ le baja el índice $^{\beta'}$ a la B convirtiéndolo en $_{\alpha'}$ dejando el mismo índice α' arriba y abajo, lo cual indica suma de índices griegos, desde cero hasta tres.

Es importante señalar que mediante la matriz de Lorentz $a^{\alpha'}_{\beta}$ se transforma un cuadrivector con índice arriba. La forma en que un cuadrivector con índice abajo se transforma es diferente, para esto es conveniente definir la forma de transformar un cuadrivector A_α a partir de uno A^β.

$$A_\alpha \equiv \eta_{\alpha\beta}A^\beta \tag{2.24}$$

y, también, se define la inversa de la métrica de la siguiente manera:

$$\eta^{\alpha\beta} = (\eta_{\alpha\beta})^{-1}$$

Se sabe, de antemano que la inversa de esta matriz es ella misma, a pesar de que sea igual a su inversa, es conveniente expresarla así.

La siguiente expresión representa una multiplicación de matrices:

$$\eta^{\alpha\gamma}\eta_{\gamma\delta} = \delta^{\alpha}_{\delta} \tag{2.25}$$

lo cual se esperaba porque al multiplicar una matriz por su inversa, se obtiene la matriz identidad.

Si se sustituye (2.16) en (2.25), se tiene:

$$\begin{aligned}\eta^{\alpha\gamma}(a^{\alpha'}_{\gamma}a^{\beta'}_{\delta}\eta_{\alpha'\beta'}) &= a^{\beta'}_{\delta}(\eta_{\alpha'\beta'}a^{\alpha'}_{\gamma}\eta^{\alpha\gamma}) \\ &= a^{\beta'}_{\delta}(\eta_{\beta'\alpha'}a^{\alpha'}_{\gamma}\eta^{\gamma\alpha}) \\ &= \delta^{\alpha}_{\delta}\end{aligned}$$

Denotando

$$(\eta_{\beta'\alpha'}a^{\alpha'}_{\gamma}\eta^{\gamma\alpha}) = (\tilde{a}^{\alpha}_{\beta'}) \tag{2.26}$$

$$\Rightarrow a^{\beta'}_{\delta}(\tilde{a}^{\alpha}_{\beta'}) = \delta^{\alpha}_{\delta} \tag{2.27}$$

Por lo tanto, se puede ver que $(\tilde{a}^{\alpha}_{\beta'})$ es la inversa de $(a^{\beta'}_{\delta})$.

Por otro lado, multiplicando (2.24) por $\eta^{\alpha\beta}$:

$$A^{\beta} = \eta^{\beta\alpha}A_{\alpha} \tag{2.28}$$

Finalmente, se define la forma de transformar un cuadrivector con índice abajo y primado:

$$A_{\alpha'} \equiv \eta_{\alpha'\beta'}A^{\beta'} \tag{2.29}$$

de acuerdo con (2.22)

$$A_{\alpha'} = \eta_{\alpha'\beta'} a^{\beta'}_{\gamma} A^{\gamma}$$

y, usando (2.28)

$$A_{\alpha'} = \eta_{\alpha'\beta'} a^{\beta'}_{\gamma} \eta^{\gamma\delta} A_{\delta} \tag{2.30}$$

Se puede notar fácilmente que en la expresión anterior, el término $\eta_{\alpha'\beta'} a^{\beta'}_{\gamma} \eta^{\gamma\delta}$ es completamente similar al que aparece en (2.26). Por lo tanto.

$$A_{\alpha'} = \tilde{a}^{\delta}_{\alpha'} A_{\delta} \tag{2.31}$$

Es decir, un objeto con índice abajo y primado se transforma con la inversa de la matriz de Lorentz.

Esta notación de índices es muy útil sobre todo para simplificar los cálculos cuando se tienen cantidades compuestas por varios cuadrivectores.

CAPÍTULO 3

Partícula relativista.

En este capítulo se busca llegar a las ecuaciones de movimiento de la partícula relativista disipativa, utilizando la invariancia bajo transformaciones de Lorentz. Previo a esto, se propone un potencial invariante de Lorentz con el cual se construye una Lagrangiana relativista que consta de la parte cinética deducida en la primera sección, seguido del potencial relativista en notación covariante.

3.1. Lagrangiana de la partícula relativista libre.

Como se puede ver en [8], una partícula relativista moviéndose en el espacio de Minkowski se puede caracterizar por un cuadrivector de Lorentz que se denota por X^μ. Durante su evolución, la partícula sigue una línea de mundo que puede ser parametrizada por la variable t. La descripción de una línea de mundo mediante funciones $X^\mu(t)$ solo tiene sentido si t incrementa de manera monótona, es decir, de t_1 a t_2. El parámetro de la línea de mundo es el tiempo propio de la partícula.

La longitud de la línea de mundo es:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{|\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu|} dt \tag{3.1}$$

donde $\dot{X}^\mu = \frac{dX^\mu}{dt}$.

Sea la acción para la partícula relativista proporcional a la longitud de la línea de mundo, esto es:

$$A = -mc \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{-\dot{X}^2} dt \tag{3.2}$$

Se requiere que esta acción sea invariante bajo reparametrizaciones del tiempo, pero para que lo sea, basta con que la lagrangiana sea de primer orden en $\dot{X}$.

Se ve fácilmente que es de orden 1 en $\dot{X}$. Comprobemos que efectivamente es invariante bajo reparametrizaciones del tiempo:

Sea $t = t(\tau)$, una función invertible, es decir, monótona,

$$\Rightarrow dt\sqrt{-\frac{dX^\mu}{dt}\frac{dX^\mu}{dt}} = \frac{dt}{d\tau}d\tau\sqrt{-\frac{d\tau}{dt}\frac{dX^\mu}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}\frac{dX^\mu}{d\tau}} = d\tau\sqrt{-\frac{dX^\mu}{d\tau}\frac{dX^\mu}{d\tau}}$$

Por lo tanto es invariante bajo reparametrizaciones del tiempo. Así, el lagrangiano relativista es:

$$L = -mc\sqrt{-\dot{X}^2} \tag{3.3}$$

Sin embargo, este lagrangiano es singular, lo cual no se esperaba, esto significa que hay constricciones en el sistema. Veamos por qué el lagrangiano es singular y cómo se puede trabajar con esto. Un sistema es singular si su Hessiano es cero; de la ecuación (3.3), tomando $c = 1$ se pretende hallar la matriz Hessiana, que se define en [8] como:

$$W_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{X}^\mu \partial \dot{X}^\nu} \tag{3.4}$$

derivando una vez respeco de $\dot{X}^\nu$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\nu} &= \frac{-m}{2\sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}} \frac{\partial}{\partial \dot{X}^\nu}(-\dot{X}^\mu \dot{X}^\rho \eta_{\rho\mu}) \\
&= \frac{-m}{2\sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}}[-\eta_{\rho\mu}\dot{X}^\mu \delta^\rho_\nu - \eta_{\rho\mu}\dot{X}^\rho \delta^\mu_\nu] \\
&= \frac{m}{2\sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}}[\dot{X}_\nu + \dot{X}_\nu] \\
&= \frac{m\dot{X}_\nu}{\sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}}
\end{aligned}$$

El siguiente paso es derivar el resultado anterior con respecto a $\dot{X}^\sigma$ para obtener:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{X}^\mu \partial \dot{X}^\nu} &= \frac{m}{-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}\left[\sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}\frac{\partial \dot{X}_\nu}{\partial \dot{X}^\sigma} - \dot{X}_\nu \frac{\partial}{\partial \dot{X}^\sigma}(\sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu})\right] \\
&= \frac{m}{-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}\left[\sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}\eta_{\sigma\nu} + \frac{\dot{X}_\nu \dot{X}_\sigma}{\sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}}\right] \\
&= -\frac{m}{(-\dot{X}^2)^{\frac{3}{2}}}[\eta_{\sigma\nu}\dot{X}^2 - \dot{X}_\nu \dot{X}_\sigma]
\end{aligned}$$

Y debido a que los índices son mudos, la matriz Hessiana se puede escribir finalmente como:

$$W_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{X}^\mu \partial \dot{X}^\nu} = -\frac{m}{(-\dot{X}^2)^{\frac{3}{2}}}(\eta_{\mu\nu}\dot{X}^2 - \dot{X}_\mu \dot{X}_\nu) \tag{3.5}$$

Corriendo los índices de 0 a 3 se obtiene el determinante:

$$detW_{\mu\nu} = det \begin{pmatrix} -\dot{x}^2 - \dot{x}_0\dot{x}_0 & -\dot{x}_0\dot{x}_1 & -\dot{x}_0\dot{x}_2 & -\dot{x}_0\dot{x}_3 \\ -\dot{x}_1\dot{x}_0 & \dot{x}^2 - \dot{x}_1\dot{x}_1 & -\dot{x}_1\dot{x}_2 & -\dot{x}_1\dot{x}_3 \\ -\dot{x}_2\dot{x}_0 & -\dot{x}_2\dot{x}_1 & \dot{x}^2 - \dot{x}_2\dot{x}_2 & -\dot{x}_2\dot{x}_3 \\ -\dot{x}_3\dot{x}_0 & -\dot{x}_3\dot{x}_1 & -\dot{x}_3\dot{x}_2 & \dot{x}^2 - \dot{x}_3\dot{x}_3 \end{pmatrix} = 0 \tag{3.6}$$

Esto significa que no todas las velocidades son independientes, la Hessiana tiene rango $4 - 1 = 3$. Los eigenvectores nulos de W se reconocen fácilmente como $\dot{X}$, como se puede ver de (3.5)

$$W_{\mu\nu}\dot{X}^\mu = 0 \tag{3.7}$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange que se siguen del lagrangiano (3.1) son, simplemente:

$$-m\frac{d}{dt}\left[\frac{\dot{X}_\mu}{(-\dot{X}^2)^{\frac{1}{2}}}\right] = 0 \tag{3.8}$$

Con esta información se puede hacer la versión del lagrangiano en dos partes con potencial disipativo como Galley propuso en su artículo sobre sistemas no conservativos [2].

3.2. Extensión del potencial disipativo a la mecánica relativista

Ya se vió que para una partícula clásica que disipa energía, se debe construir el lagrangiano de tal forma que aparezca en él un potencial no conservativo como el que aparece en la ecuación (1.9), hay otros potenciales disipativos más complicados, en este caso basta con tomar

el más simple de ellos para analizar el comportamiento de los sistemas relativistas.

$$K(\vec{q_1}, \dot{\vec{q_1}}, \vec{q_2}, \dot{\vec{q_2}}) = -\frac{\Omega}{2}(\vec{q_1}\dot{\vec{q_2}} - \vec{q_2}\dot{\vec{q_1}}). \tag{3.9}$$

Sin embargo, es necesario extender este potencial clásico a la mecánica relativista con el fin de tener un lagrangiano relativista válido, es decir, que sea invariante bajo transformaciones de Lorentz y que en el límite de bajas velocidades, se reduzca al lagrangiano clásico.

Se propone la cantidad:

$$K(X_1^\mu, \dot{X}_1^\mu, X_2^\mu, \dot{X}_2^\mu) = -\frac{\Omega}{2}(X_1^\mu \dot{X}_{2\mu} - X_2^\mu \dot{X}_{1\mu}) \tag{3.10}$$

Donde

$$X_1^\mu = (q_1^0, q_1^1, q_1^2, q_1^3) \tag{3.11}$$
$$X_2^\mu = (q_2^0, q_2^1, q_2^2, q_2^3) \tag{3.12}$$
$$\dot{X}_{1\mu} = (\dot{q}_1^0, \dot{q}_1^1, \dot{q}_1^2, \dot{q}_1^3) \tag{3.13}$$
$$\dot{X}_{2\mu} = (\dot{q}_2^0, \dot{q}_2^1, \dot{q}_2^2, \dot{q}_2^3) \tag{3.14}$$

Siendo $\dot{X}_1^\mu$ y $\dot{X}_2^\mu$ derivadas respecto al parámetro de la trayectoria (en este caso tiempo propio de la partícula) y por lo tanto son cuadrivectores. No es necesario dar la demostración de que K es invariante bajo transformaciones de Lorentz, pues ya se sabe de (2.23) que dos cuadrivectores forman un invariante cuando aparecen multiplicándose en esa forma, de entrada se sabe que $\dot{X}_1^\mu$ y $\dot{X}_2^\mu$ son las cuadrivelocidades de las partículas 1 y 2, respectivamente. En cuanto X_1^μ y X_2^μ, se pueden considerar cada una, como diferencias entre sucesos y, uno de ellos situado en el origen en ambos casos.

Así,

$$X_1^{\mu'} \dot{X}_{2\mu'} - X_2^{\mu'} \dot{X}_{1\mu'} = X_1^\mu \dot{X}_{2\mu} - X_2^\mu \dot{X}_{1\mu}$$

Por lo tanto, (3.10) es invariante ante transformaciones de Lorentz.

Falta demostrar que esta cantidad en el límite clásico se reduce a (3.9) para ello es conveniente usar las definiciones (3.11), (3.12), (3.13) y (3.14).

$$-\frac{\Omega}{2}[X_1^\mu \dot{X}_{2\mu} - X_2^\mu \dot{X}_{1\mu}] = -\frac{\Omega}{2}[-q_{10}\dot{q}_{20} + q_{11}\dot{q}_{21} + q_{12}\dot{q}_{22} + q_{13}\dot{q}_{23} \\ +q_{20}\dot{q}_{10} - q_{21}\dot{q}_{11} - q_{22}\dot{q}_{12} - q_{23}\dot{q}_{13}] \tag{3.15}$$

Haciendo la elección de $q_1^0 = q_2^0 = ct$:

$$-\frac{\Omega}{2}[X_1^\mu \dot{X}_{2\mu} - X_2^\mu \dot{X}_{1\mu}] \to -\frac{\Omega}{2}[q_{11}\dot{q}_{21} + q_{12}\dot{q}_{22} + q_{13}\dot{q}_{23} \\ -(q_{21}\dot{q}_{11} + q_{22}\dot{q}_{12} + q_{23}\dot{q}_{13})] \tag{3.16}$$

pero el lado derecho de (3.16) equivale a:

$$-\frac{\Omega}{2}[(q_{11}, q_{12}, q_{13})\cdot(\dot{q}_{21}, \dot{q}_{22}, \dot{q}_{23}) - (q_{21}, q_{22}, q_{23})\cdot(\dot{q}_{11}, \dot{q}_{12}, \dot{q}_{13})] = -\frac{\Omega}{2}[\vec{q}_1\dot{\vec{q}}_2 - \vec{q}_2\dot{\vec{q}}_1] \tag{3.17}$$

Finalmente, se obtiene que, con velocidades bajas:

$$-\frac{\Omega}{2}[X_1^\mu \dot{X}_{2\mu} - X_2^\mu \dot{X}_{1\mu}] = -\frac{\Omega}{2}[\vec{q}_1\dot{\vec{q}}_2 - \vec{q}_2\dot{\vec{q}}_1] \qquad l.c.q.d.$$

Por lo tanto, el potencial propuesto es consistente con la relatividad especial pues satisfizo la invariancia de las transformaciones de Lorentz y en el límite clásico se reduce al potencial que se esperaba.

3.3. Lagrangiano de una partícula disipativa.

En la primera sección de este capítulo, se trató el sistema consistente una partícula libre desde el punto de vista relativista y se construyó un lagrangiano extendido válido tanto en mecánica clásica como en relatividad especial [8]. En la sección dos de este mismo capítulo, se extendió el potencial disipativo de la mecánica clásica a la relatividad especial.

Hasta este momento, se tienen tres herramientas importantes para tratar la partícula relativista disipativa: el principio variacional de sistemas no conservativos [2], el lagrangiano y el potencial extendidos.

$$L = L_1(q_1, \dot{q}_1) - L_2(q_2, \dot{q}_2) + K \tag{3.18}$$

Entonces, la construcción del lagrangiano anterior debe considerar la ecuación (3.3) y el potencial disipativo (3.10). Es decir,

$$L = -mc\left(\sqrt{-\dot{X}_1^\mu \dot{X}_{1\mu}} - \sqrt{-\dot{X}_2{}^\mu \dot{X}_{2\mu}}\right) - \frac{\Omega}{2}(X_1^\mu \dot{X}_{2\mu} - X_2^\mu \dot{X}_{1\mu}) \tag{3.19}$$

como ya se vió, la partícula libre es un sistema singular por lo que se puede esperar que este lagrangiano también lo sea, para saberlo es necesario calcular el determinante de acuerdo con [11] porque ya se trata de un sistema no conservativo; el sistema es singular si:

$$det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2(L_1+K)}{\partial \dot{q}_1^2} & \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_2} \\ \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_2} & \frac{\partial^2(L_2-K)}{\partial \dot{q}_1^2} \end{pmatrix} = 0 \tag{3.20}$$

Calculando por separado las entradas de esta matriz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(L_1+K)}{\partial \dot{X}_1^\mu \dot{X}_1^\nu} &= \frac{\partial}{\partial \dot{X}_1^\mu}\left(\frac{\partial(L_1+K)}{\partial \dot{X}_1^\nu}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{X}_1^\mu}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{X}_1^\nu}\left(-m(-\dot{X}_1^\mu \dot{X}_{1\mu})^{\frac{1}{2}} - \frac{\Omega}{2}(X_1^\mu \dot{X}_{2\mu} - X_2^\mu \dot{X}_{1\mu})\right)\right] \end{aligned}$$

pero,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \dot{X}_1^\nu}\left[-m(-\dot{X}_1^\mu \dot{X}_{1\mu})^{\frac{1}{2}} - \frac{\Omega}{2}(X_1^\mu \dot{X}_{2\mu} - X_2^\mu \dot{X}_{1\mu})\right] =& \frac{\partial}{\partial \dot{X}_1^\nu}[-m(-\dot{X}_1^\mu \dot{X}_{1\mu})^{\frac{1}{2}}] \\ & - \frac{\Omega}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{X}_1^\nu}[(X_1^\mu \dot{X}_{2\mu} - X_2^\mu \dot{X}_{1\mu})] \end{aligned}$$

donde el primer término del lado derecho ya se calculó en la sección (3.1), se hará únicamente el segundo:

$$\begin{aligned} -\frac{\Omega}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{X}_1^\nu}\left[(X_1^\mu \dot{X}_{2\mu} - X_2^\mu \dot{X}_{1\mu})\right] &= \frac{\Omega}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{X}_1^\nu}\left[(X_2^\mu \dot{X}_{1\mu})\right] \\ &= \frac{\Omega}{2}\eta_{\gamma\mu}X_2^\mu \delta_\nu^\gamma \\ &= \frac{\Omega}{2}X_2^\mu \eta_{\nu\mu} \end{aligned}$$

Así,

$$\frac{\partial}{\partial \dot{X}_1^\nu}(L_1 + K) = \frac{m\dot{X}_{1\nu}}{(-\dot{X}_1^\mu \dot{X}_{1\mu})^{\frac{1}{2}}} + \frac{\Omega}{2}X_2^\mu \eta_{\nu\mu}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial^2(L_1+K)}{\partial \dot{X}_1^\mu \partial \dot{X}_1^\nu} &= \frac{\partial}{\partial \dot{X}_1^\mu}\left[\frac{m\dot{X}_{1\nu}}{(-\dot{X}_1^\mu \dot{X}_{1\mu})^{\frac{1}{2}}} + \frac{\Omega}{2}X_2^\mu \eta_{\nu\mu}\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{X}_1^\mu}\left[\frac{m\dot{X}_{1\nu}}{(-\dot{X}_1^\mu \dot{X}_{1\mu})^{\frac{1}{2}}}\right] + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \dot{X}_1^\mu}\left[\frac{\Omega}{2}X_2^\mu \eta_{\nu\mu}\right]}_{0} \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{X}_1^\mu}\left[\frac{m\dot{X}_{1\nu}}{(-\dot{X}_1^\mu \dot{X}_{1\mu})^{\frac{1}{2}}}\right] \end{aligned}$$

$$\therefore \qquad \frac{\partial^2(L_1+K)}{\partial \dot{X}_1^\mu \partial \dot{X}_1^\nu} = \frac{\partial}{\partial \dot{X}_1^\mu}\left[\frac{m\dot{X}_{1\nu}}{(-\dot{X}_1^\mu \dot{X}_{1\mu})^{\frac{1}{2}}}\right]$$

que también, ya se calculó y es similar a (3.5)

$$\frac{\partial^2(L_1+K)}{\partial \dot{X}_1^\mu \partial \dot{X}_1^\nu} = -\frac{m}{(-\dot{X}_1^2)^{\frac{3}{2}}}(\eta_{\mu\nu}\dot{X}_1^2 - \dot{X}_{1\mu}\dot{X}_{1\nu})$$

Similarmente, para la última entrada de la matriz (3.20),

$$\frac{\partial^2(L_2-K)}{\partial\dot{X}_2^\mu\dot{X}_2^\nu}=\frac{\partial}{\partial\dot{X}_2^\mu}\left(\frac{\partial(L_2-K)}{\partial\dot{X}_2^\nu}\right)$$
$$=\frac{\partial}{\partial\dot{X}_2^\mu}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{X}_2^\nu}\left(-m(-\dot{X}_2^\mu\dot{X}_{2\mu})^{\frac{1}{2}}-\frac{\Omega}{2}(X_1^\mu\dot{X}_{2\mu}-X_2^\mu\dot{X}_{1\mu})\right)\right]$$

derivando primero el corchete,

$$\frac{\partial}{\partial\dot{X}_2^\nu}\left[-m(-\dot{X}_2^\mu\dot{X}_{2\mu})^{\frac{1}{2}}+\frac{\Omega}{2}(X_1^\mu\dot{X}_{2\mu}-X_2^\mu\dot{X}_{1\mu})\right]=\frac{\partial}{\partial\dot{X}_2^\nu}[-m(-\dot{X}_2^\mu\dot{X}_{2\mu})^{\frac{1}{2}}]$$
$$+\frac{\Omega}{2}\frac{\partial}{\partial\dot{X}_2^\nu}[(X_1^\mu\dot{X}_{2\mu}-X_2^\mu\dot{X}_{1\mu})]$$

donde, nuevamente el primer término del lado derecho ya se calculó en la primera sección de este capítulo, la derivada del segundo término es:

$$\frac{\partial}{\partial\dot{X}_2^\nu}\left[\frac{\Omega}{2}(X_1^\mu\dot{X}_{2\mu}-X_2^\mu\dot{X}_{1\mu})\right]=\frac{\partial}{\partial\dot{X}_2^\nu}\left[\frac{\Omega}{2}(X_1^\mu\dot{X}_{2\mu})\right]$$
$$=\frac{\Omega}{2}\eta_{\gamma\mu}X_1^\mu\delta_\nu^\gamma$$
$$=\frac{\Omega}{2}X_1^\mu\eta_{\nu\mu}$$

Así,

$$\frac{\partial}{\partial\dot{X}_2^\nu}(L_2-K)=\frac{m\dot{X}_{2\nu}}{(-\dot{X}_2^\mu\dot{X}_{2\mu})^{\frac{1}{2}}}+\frac{\Omega}{2}X_1^\mu\eta_{\nu\mu}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2(L_2-K)}{\partial\dot{X}_2^\mu\partial\dot{X}_2^\nu}=\frac{\partial}{\partial\dot{X}_2^\mu}\left[\frac{m\dot{X}_{2\nu}}{(-\dot{X}_2^\mu\dot{X}_{2\mu})^{\frac{1}{2}}}+\frac{\Omega}{2}X_1^\mu\eta_{\nu\mu}\right]$$
$$=\frac{\partial}{\partial\dot{X}_2^\mu}\left[\frac{m\dot{X}_{2\nu}}{(-\dot{X}_2^\mu\dot{X}_{2\mu})^{\frac{1}{2}}}\right]+\underbrace{\frac{\partial}{\partial\dot{X}_2^\mu}\left[\frac{\Omega}{2}X_1^\mu\eta_{\nu\mu}\right]}_{0}$$
$$=\frac{\partial}{\partial\dot{X}_2^\mu}\left[\frac{m\dot{X}_{2\nu}}{(-\dot{X}_2^\mu\dot{X}_{2\mu})^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$\therefore \qquad \frac{\partial^2(L_2-K)}{\partial\dot{X}_2^\mu\partial\dot{X}_2^\nu}=\frac{\partial}{\partial\dot{X}_2^\mu}\left[\frac{m\dot{X}_{2\nu}}{(-\dot{X}_2^\mu\dot{X}_{2\mu})^{\frac{1}{2}}}\right]$$

cantidad igualmente similar a (3.5)

$$\frac{\partial^2(L_2-K)}{\partial\dot{X}_2^\mu\partial\dot{X}_2^\nu}=-\frac{m}{(-\dot{X}_2^2)^{\frac{3}{2}}}(\eta_{\mu\nu}\dot{X}_2^2-\dot{X}_{2\mu}\dot{X}_{2\nu})$$

Por último, notemos que las entradas faltantes de la matriz, son iguales.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 K}{\partial\dot{X}_1^\mu\partial\dot{X}_2^\nu}&=\frac{\partial}{\partial\dot{X}_1^\mu}\left[-\frac{\Omega}{2}\frac{\partial}{\partial\dot{X}_2^\nu}(X_1^\mu\dot{X}_{2\mu}-X_2^\mu\dot{X}_{1\mu})\right]\\&=\frac{\partial}{\partial\dot{X}_1^\mu}\left[-\frac{\Omega}{2}X_1^\mu\frac{\partial}{\partial\dot{X}_2^\nu}(\eta_{\epsilon\mu}\dot{X}_2^\epsilon)\right]\\&=\frac{\partial}{\partial\dot{X}_1^\mu}[-\frac{\Omega}{2}X_1^\mu\eta_{\epsilon\mu}\delta_\nu^\epsilon]\\&=0\end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz que buscamos es:

$$\begin{pmatrix}-\frac{m}{(-\dot{X}_1^2)^{\frac{3}{2}}}[\eta_{\mu\nu}\dot{X}_1^2-\dot{X}_{1\mu}\dot{X}_{1\nu}] & 0\\ 0 & -\frac{m}{(-\dot{X}_2^2)^{\frac{3}{2}}}[\eta_{\mu\nu}\dot{X}_2^2-\dot{X}_{2\mu}\dot{X}_{2\nu}]\end{pmatrix} \tag{3.21}$$

Si se hacen correr los índices de 0 a 3. se obtiene una matriz de $8x8$. Viéndola por bloques, el primer bloque así como el último, son matrices similares a la matriz (3.6) cuyos determinantes son cero, al mismo tiempo se ve que las entradas de los otros dos bloques son las entradas de la matriz nula $4x4$. Se puede concluir que el determinante de la matriz es cero.

Efectivamente, se trataba de un lagrangiano singular, por lo tanto, se espera que las velocidades sean dependientes unas de otras.

3.4. Ecuaciones de movimiento de la partícula relativista con disipación.

Para hallar las ecuaciones de movimiento vamos a variar la acción, es decir vamos a hacer la variación de la integral del Lagrangiano (3.19) con respecto al tiempo de un observador (t).

$$\begin{aligned}\delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt \\ &= -mc \int_{t_1}^{t_2} \delta(-\dot{X}_1^\mu \dot{X}_{1\mu})^{\frac{1}{2}} dt + mc \int_{t_1}^{t_2} \delta(-\dot{X}_2{}^\mu \dot{X}_{2\mu})^{\frac{1}{2}} dt \\ &\quad - \frac{\Omega}{2} \int_{t_1}^{t_2} \delta[(X_1^\mu \dot{X}_{2\mu}) - (X_2^\mu \dot{X}_{1\mu})] dt\end{aligned}$$

El cálculo de las variaciones de las cantidades que aparecen arriba se hará por separado y posteriormente se procederá a realizar las integrales.

$$\begin{aligned}\delta(-\dot{X}_1^\mu \dot{X}_{1\mu})^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(-\dot{X}_1^\mu \dot{X}_{1\mu})^{-\frac{1}{2}} \delta(-\dot{X}_1^\mu \dot{X}_1^\nu \eta_{\mu\nu}) \\ &= -(-\dot{X}_1^\mu \dot{X}_{1\mu})^{-\frac{1}{2}} \dot{X}_1^\mu \eta_{\mu\nu} \frac{d}{dt}[\delta X_1^\nu] \\ &= \frac{d}{dt}[-(-\dot{X}_1^\mu \dot{X}_{1\mu})^{-\frac{1}{2}} \eta_{\mu\nu} \dot{X}_1^\mu \delta X_1^\nu] + \frac{d}{dt}[(-\dot{X}_1^\mu \dot{X}_{1\mu})^{-\frac{1}{2}} \dot{X}_1^\mu \eta_{\mu\nu}] \delta X_1^\nu\end{aligned}$$

pero $\dot{X}_1^\mu \eta_{\mu\nu} = \dot{X}_{1\nu}$.

$$\Rightarrow \delta(-\dot{X}_1^\mu \dot{X}_{1\mu})^{\frac{1}{2}} = \frac{d}{dt}[-(-\dot{X}_1^\mu \dot{X}_{1\mu})^{-\frac{1}{2}} \dot{X}_{1\nu} \delta X_1^\nu] + \frac{d}{dt}[(-\dot{X}_1^\mu \dot{X}_{1\mu})^{-\frac{1}{2}} \dot{X}_{1\nu}] \delta X_1^\nu \quad (3.22)$$

Haciendo los mismos pasos para la partícula dos, se obtiene:

$$\delta(-\dot{X}_2^\mu \dot{X}_{2\mu})^{\frac{1}{2}} = \frac{d}{dt}[-(-\dot{X}_2^\mu \dot{X}_{2\mu})^{-\frac{1}{2}} \dot{X}_{2\nu} \delta X_2^\nu] + \frac{d}{dt}[(-\dot{X}_2^\mu \dot{X}_{2\mu})^{-\frac{1}{2}} \dot{X}_{2\nu}] \delta X_2^\nu \quad (3.23)$$

Ahora hagamos la variación de:

$$\begin{aligned}
\delta(X_1^\mu \dot{X}_{2\mu} - X_2^\mu \dot{X}_{1\mu}) &= \delta(\eta_{\rho\mu} X_1^\mu \dot{X}_2^\rho) - \delta(\eta_{\rho\mu} X_2^\mu \dot{X}_1^\rho) \\
&= \dot{X}_{2\mu}\delta X_1^\mu + X_{1\rho}\delta\dot{X}_2^\rho - (\dot{X}_{1\mu}\delta X_2^\mu + X_{2\rho}\delta\dot{X}_1^\rho) \\
&= \dot{X}_{2\mu}\delta X_1^\mu + X_{1\rho}\delta(\frac{dX_2^\rho}{dt}) - (\dot{X}_{1\mu}\delta X_2^\mu + X_{2\rho}\delta(\frac{dX_1^\rho}{dt})) \\
&= \dot{X}_{2\mu}\delta X_1^\mu + X_{1\rho}\frac{d}{dt}(\delta X_2^\rho) - (\dot{X}_{1\mu}\delta X_2^\mu + X_{2\rho}\frac{d}{dt}(\delta X_1^\rho)) \\
&\quad - (\dot{X}_{1\mu}\delta X_2^\mu + \frac{d}{dt}[X_{2\rho}\delta X_1^\rho] - \frac{d}{dt}(X_{2\rho})\delta X_1^\rho) \\
&= \dot{X}_{2\mu}\delta X_1^\mu + \frac{d}{dt}[X_{1\rho}\delta X_2^\rho] \\
&\quad - \dot{X}_{1\mu}\delta X_2^\mu - (\dot{X}_{1\mu}\delta X_2^\mu + \frac{d}{dt}[X_{2\rho}\delta X_1^\rho] - \dot{X}_{2\mu}\delta X_1^\mu)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt &= -mc\int_{t_1}^{t_2} \delta(\dot{X}_1^\mu \dot{X}_{1\mu})^{\frac{1}{2}} dt + mc\int_{t_1}^{t_2} \delta(\dot{X}_2^\mu \dot{X}_{2\mu}) dt \\
&\quad - \frac{\Omega}{2}\int_{t_1}^{t_2} \delta(X_1^\mu \dot{X}_{2\mu}) dt + \frac{\Omega}{2}\int_{t_1}^{t_2} \delta(X_2^\mu \dot{X}_{1\mu}) dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -mc\int_{t_1}^{t_2} \left\{ [\frac{d}{dt}[-(-\dot{X}_1^\mu \dot{X}_{1\mu})^{-\frac{1}{2}} \dot{X}_{1\nu}\delta X_1^\nu] + \frac{d}{dt}[(-\dot{X}_1^\mu \dot{X}_{1\mu})^{-\frac{1}{2}} \dot{X}_{1\nu}]\delta X_1^\nu] \right\} dt \\
&\quad + mc\int_{t_1}^{t_2} \left\{ [\frac{d}{dt}[-(-\dot{X}_2^\mu \dot{X}_{2\mu})^{-\frac{1}{2}} \dot{X}_{2\nu}\delta X_2^\nu] + \frac{d}{dt}[(-\dot{X}_2^\mu \dot{X}_{2\mu})^{-\frac{1}{2}} \dot{X}_{2\nu}]\delta X_2^\nu] \right\} dt \\
&\quad - \frac{\Omega}{2}\int_{t_1}^{t_2} [\dot{X}_{2\mu}\delta X_1^\mu + \frac{d}{dt}(X_{1\rho}\delta X_2^\rho) - \dot{X}_{1\mu}\delta X_2^\mu] dt \\
&\quad + \frac{\Omega}{2}\int_{t_1}^{t_2} [\dot{X}_{1\mu}\delta X_2^\mu + \frac{d}{dt}(X_{2\rho}\delta X_1^\rho) - \dot{X}_{2\mu}\delta X_1^\mu] dt
\end{aligned}$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo, las siguientes integrales se anulan, pues la variación de las coordenadas en cada extremo es cero.

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left[-(-\dot{X}_1^\mu \dot{X}_{1\mu})^{-\frac{1}{2}} \dot{X}_{1\nu}\delta X_1^\nu\right] dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left[-(-\dot{X}_2^\mu \dot{X}_{2\mu})^{-\frac{1}{2}} \dot{X}_{2\nu}\delta X_2^\nu\right] dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(X_{1\rho}\delta X_2^\rho)dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(X_{2\rho}\delta X_1^\rho)dt = 0$$

Se tiene, entonces:

$$\begin{aligned}
\delta S &= -mc\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}[(-\dot{X}_1^\mu \dot{X}_{1\mu})^{-\frac{1}{2}} \dot{X}_{1\nu}]\delta X_1^\nu dt + mc\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}[(-\dot{X}_2^\mu \dot{X}_{2\mu})^{-\frac{1}{2}} \dot{X}_{2\nu}]\delta X_2^\nu]dt \\
&\quad - \frac{\Omega}{2}\int_{t_1}^{t_2}[\dot{X}_{2\mu}\delta X_1^\mu - \dot{X}_{1\mu}\delta X_2^\mu]dt + \frac{\Omega}{2}\int_{t_1}^{t_2}[\dot{X}_{1\mu}\delta X_2^\mu - \dot{X}_{2\mu}\delta X_1^\mu]dt \\
&= -mc\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}[(-\dot{X}_1^\mu \dot{X}_{1\mu})^{-\frac{1}{2}} \dot{X}_{1\nu}]\delta X_1^\nu dt + mc\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}[(-\dot{X}_2^\mu \dot{X}_{2\mu})^{-\frac{1}{2}} \dot{X}_{2\nu}]\delta X_2^\nu]dt \\
&\quad + \frac{\Omega}{2}\int_{t_1}^{t_2}(-2\dot{X}_{2\mu}\delta X_1^\mu + 2\dot{X}_{1\mu}\delta X_2^\mu)dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{d}{dt}[-mc(-\dot{X}_1^\mu \dot{X}_{1\mu})^{-\frac{1}{2}} \dot{X}_{1\nu}] - \frac{d}{dt}X_{2\mu}\right\}\delta X_1^\nu dt \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{d}{dt}[mc(-\dot{X}_2^\mu \dot{X}_{2\mu})^{-\frac{1}{2}} \dot{X}_{2\nu}] + \frac{d}{dt}X_{1\mu}\right\}\delta X_2^\nu dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo de Variaciones:

$$\frac{d}{dt}[-mc(-\dot{X}_1^\mu \dot{X}_{1\mu})^{-\frac{1}{2}} X_{1\nu} - X_{2\mu}] = 0 \tag{3.24}$$

$$\frac{d}{dt}[mc(-\dot{X}_2^\mu \dot{X}_{2\mu})^{-\frac{1}{2}} X_{2\nu} + X_{1\mu}] = 0 \tag{3.25}$$

o equivalentemente:

$$mc\frac{\dot{X}_{1\nu}}{(-\dot{X}_1^2)^{\frac{1}{2}}} + X_{2\mu} = a_{1\mu} \tag{3.26}$$

$$mc\frac{\dot{X}_{2\nu}}{(-\dot{X}_2^2)^{\frac{1}{2}}} + X_{1\mu} = a_{2\mu} \tag{3.27}$$

que son las ecuaciones de movimiento de la partícula relativista con disipación, notemos que son ecuaciones acopladas y cabe mencionar también que tienen la misma forma que las ecuaciones clásicas, con excepción de la raíz en el denominador del primer término.

3.5. Solución del sistema de ecuaciones

Se obtuvo en la sección anterior un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas:

$$mc\frac{\dot{X}_1^\mu}{\sqrt{-\dot{X}_1^2}} + \Omega X_2^\mu = a_1^\mu \tag{3.28}$$

$$mc\frac{\dot{X}_2^\mu}{\sqrt{-\dot{X}_2^2}} + \Omega X_1^\mu = a_2^\mu \tag{3.29}$$

Se intentará resolver solo para una componente de la parte espacial pues ya se vio que la parte temporal es dependiente de las componentes espaciales cuando se calculó en Hessiano.
De la ecuación (3.28), se obtiene:

$$mc\frac{\dot{X}_1^\mu}{\sqrt{-\dot{X}_1^2}} = a_1^\mu - \Omega X_2^\mu$$

Tomando la componente cero y despejando la raíz:

$$\Rightarrow \sqrt{-\dot{X}_1^2} = \frac{mc\dot{X}_1^0}{(a_1^0 - \Omega X_2^0)} \tag{3.30}$$

Haciendo el mismo procedimiento para la ecuación (3.29), se obtiene:

$$\sqrt{-\dot{X}_2^2} = \frac{mc\dot{X}_2^0}{(a_2^0 - \Omega X_1^0)} \tag{3.31}$$

Por otro lado, la ecuación (3.28) se puede escribir de la siguiente forma:

$$a_1^\mu - \Omega X_2^\mu = mc\frac{\dot{X}_1^\mu}{(-\dot{X}_1^2)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow (a_1^\mu - \Omega X_2^\mu)^2 = -m^2c^2$$

separando la parte temporal de la espacial usando la métrica (2.13):

$$(a_1^0 - \Omega X_2^0)^2 - (a_1^1 - \Omega X_2)^2 = m^2c^2 \tag{3.32}$$

Y tomando solo una dimensión espacial:

$$\Rightarrow X_2 = \frac{a_1}{\Omega} - \frac{1}{\Omega}\epsilon_2\sqrt{(a_1^0 - \Omega X_2^0)^2 - m^2c^2} \tag{3.33}$$

con $\epsilon_2 = \pm 1$ y $\Omega \neq 0$, notemos que si se hace $\Omega = 0$, se trata del caso usual de la partícula relativista sin disipación [5].

También, la ecuación (3.29) se puede escribir como:

$$a_2^\mu - \Omega X_1^\mu = mc\frac{\dot{X}_2^\mu}{(-\dot{X}_2^2)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow (a_2^\mu - \Omega X_1^\mu)^2 = -m^2c^2$$

separando la parte temporal de la espacial:

$$(a_2^0 - \Omega X_1^0)^2 - (a_2^1 - \Omega X_1)^2 = m^2c^2 \tag{3.34}$$

y nuevamente tomando solo una dimensión espacial:

$$\Rightarrow X_1 = \frac{a_2}{\Omega} - \frac{1}{\Omega}\epsilon_1\sqrt{(a_2^0 - \Omega X_1^0)^2 - m^2c^2} \tag{3.35}$$

donde $\epsilon_1 = \pm 1$ y $\Omega \neq 0$

Ahora vamos a calcular $(-\dot{X_1}^2)^{\frac{1}{2}} = (\dot{X_1^0}^2 - \dot{X_1}^2)^{\frac{1}{2}}$ en términos de $\dot{X}_1^0$. Para ello calculemos $\dot{X}_1$, derivando la ecuación (3.35) con respecto de t.

$$\dot{X}_1 = -\frac{1}{\Omega}\left[\frac{2(a_2^0 - \Omega X_1^0)(-\Omega\dot{X}_1^0)}{2\epsilon_1\sqrt{(a_2^0 - \Omega X_1^0)^2 - m^2c^2}}\right]$$

$$\Rightarrow \dot{X}_1 = \frac{(a_2^0 - \Omega X_1^0)\dot{X}_1^0}{\epsilon_1 \sqrt{(a_2^0 - \Omega X_1^0)^2 - m^2c^2}} \tag{3.36}$$

$$\Rightarrow \dot{X}_1^2 = \frac{(a_2^0 - \Omega X_1^0)^2 \dot{X_1^0}^2}{(a_2^0 - \Omega X_1^0)^2 - m^2c^2} \tag{3.37}$$

$$\Rightarrow -\dot{X}_1^2 = \frac{(a_2^0 - \Omega X_1^0)^2 \dot{X_1^0}^2}{(a_2^0 - \Omega X_1^0)^2 - m^2c^2} < 0 \tag{3.38}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
(-\dot{X_1}^2)^{\frac{1}{2}} &= \left(\dot{X_1^0}^2 - \frac{(a_2^0 - \Omega X_1^0)^2 \dot{X_1^0}^2}{(a_2^0 - \Omega X_1^0)^2 - m^2c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \dot{X}_1^0 \left(1 - \frac{(a_2^0 - \Omega X_1^0)^2}{(a_2^0 - \Omega X_1^0)^2 - m^2c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \dot{X}_1^0 \left[\frac{(a_2^0 - \Omega X_1^0)^2 - m^2c^2 - (a_2^0 - \Omega X_1^0)^2}{(a_2^0 - \Omega X_1^0)^2 - m^2c^2} \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \dot{X}_1^0 \left[\frac{-m^2c^2}{(a_2^0 - \Omega X_1^0)^2 - m^2c^2} \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \dot{X}_1^0 \left[\frac{m^2c^2}{-(a_2^0 - \Omega X_1^0)^2 + m^2c^2} \right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Así,

$$(-\dot{X_1}^2)^{\frac{1}{2}} = \dot{X}_1^0 \left[\frac{m^2c^2}{-(a_2^0 - \Omega X_1^0)^2 + m^2c^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

de donde se ve que:

$$-\dot{X_1}^2 = \frac{m^2c^2 \dot{X_1^0}^2}{-(a_2^0 - \Omega X_1^0)^2 + m^2c^2} < 0 \tag{3.39}$$

Ocurriendo lo mismo para X_2

$$-\dot{X}_2{}^2 = \frac{m^2c^2\dot{X}_2^{0\,2}}{-(a_1^0 - \Omega X_2^0)^2 + m^2c^2} < 0 \tag{3.40}$$

De (3.39) se puede ver que:

$$\dot{X}_1^{0\,2} - \dot{X}_1^2 < 0 \tag{3.41}$$

si se toma $X_1^0 = ct$, se tiene:

$$c^2 - v^2 < 0$$

De (3.40), con $X_2^0 = ct$, se llega a la misma expresión.

¡Esto muestra que se trata de partículas taquiónicas!

Ahora bien, para continuar con la solución de las ecuaciones, comparando la expresión (3.39) con el cuadrado de (3.30):

$$\frac{m^2c^2\dot{X}_1^{0\,2}}{(a_1^0 - \Omega X_2^0)^2} = \frac{\dot{X}_1^{0\,2}m^2c^2}{m^2c^2 - (a_2^0 - \Omega X_1^0)^2}$$

$$\Rightarrow (a_1^0 - \Omega X_2^0)^2 = m^2c^2 - (a_2^0 - \Omega X_1^0)^2$$

$$\Rightarrow (a_1^0 - \Omega X_2^0)^2 + (a_2^0 - \Omega X_1^0)^2 = +m^2c^2 \tag{3.42}$$

Esta expresión es muy importante porque relaciona a X_2^0 con X_1^0 y justamente este término aparece en las ecuaciones (3.33) y (3.35) que son las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales acopladas.

Con la relación (3.42) se pueden escribir (3.33) y (3.35) como:

$$X_2 = \frac{a_1}{\Omega} - \frac{1}{\Omega}\epsilon_2\sqrt{-(a_2^0 - \Omega X_1^0)^2} \tag{3.43}$$

$$X_1 = \frac{a_2}{\Omega} - \frac{1}{\Omega}\epsilon_1\sqrt{-(a_1^0 - \Omega X_2^0)^2} \tag{3.44}$$

3.6. Comprobación de las soluciones halladas.

Se desea comprobar la parte espacial de la ecuación (3.28)

$$mc\frac{\dot{X}_1}{\sqrt{-\dot{X}_1^2}} + \Omega X_2 = a_1$$

Usando la ecuación (3.36)

$$\Rightarrow mc\frac{(a_2^0 - \Omega X_1^0)\dot{X}_1^0(a_1^0 - \Omega X_2^0)}{\sqrt{(a_2^0 - \Omega X_1^0)^2 - m^2c^2}\ mc\dot{X}_1^0} + \Omega\left[\frac{a_1}{\Omega} - \frac{1}{\Omega}\sqrt{-(a_2^0 - \Omega X_1^0)^2}\right] = a_1$$

$$\Rightarrow \left[\frac{(a_2^0 - \Omega X_1^0)^2(a_1^0 - \Omega X_2^0)^2}{(a_2^0 - \Omega X_1^0)^2 - m^2c^2}\right]^{\frac{1}{2}} + a_1 - \left[\sqrt{-(a_2^0 - \Omega X_1^0)^2}\right] = a_1$$

$$\Rightarrow \left[\frac{(a_2^0 - \Omega X_1^0)^2(a_1^0 - \Omega X_2^0)^2}{(a_2^0 - \Omega X_1^0)^2 - m^2c^2}\right]^{\frac{1}{2}} - \left[-(a_2^0 - \Omega X_1^0)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 0$$

Usando la relación (3.42), se obtiene:

$$\left[\frac{(a_2^0 - \Omega X_1^0)^2(a_1^0 - \Omega X_2^0)^2}{-(a_1^0 - \Omega X_2^0)^2}\right]^{\frac{1}{2}} - \left[-(a_2^0 - \Omega X_1^0)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 0$$

Así,

$$\left[-(a_2^0 - \Omega X_1^0)^2\right]^{\frac{1}{2}} - \left[-(a_2^0 - \Omega X_1^0)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 0$$

Por lo tanto, la ecuación uno sí se satisface.
Veamos si se satisface la parte espacial de la segunda ecuación (3.29)

$$mc\frac{\dot{X}_2}{\sqrt{-\dot{X}_2^2}} + \Omega X_1 = a_2$$

Derivando la ecuación (3.43)

$$\dot{X}_2 = -\frac{1}{\Omega}\left[\frac{2(a_1^0 - \Omega X_2^0)(-\Omega\dot{X}_2^0)}{2\epsilon_2\sqrt{(a_1^0 - \Omega X_2^0)^2 - m^2c^2}}\right]$$

$$\Rightarrow \dot{X}_2 = \frac{(a_1^0 - \Omega X_2^0)\dot{X}_2^0}{\epsilon_2\sqrt{(a_1^0 - \Omega X_2^0)^2 - m^2c^2}} \tag{3.45}$$

$$\Rightarrow mc\frac{(a_1^0 - \Omega X_2^0)\dot{X}_2^0(a_2^0 - \Omega X_1^0)}{\sqrt{(a_1^0 - \Omega X_2^0)^2 - m^2c^2}\ mc\dot{X}_2^0} + \Omega\left[\frac{a_2}{\Omega} - \frac{1}{\Omega}\sqrt{-(a_1^0 - \Omega X_2^0)^2}\right] = a_2$$

$$\Rightarrow \left[\frac{(a_1^0 - \Omega X_2^0)^2(a_2^0 - \Omega X_1^0)^2}{(a_1^0 - \Omega X_2^0)^2 - m^2c^2}\right]^{\frac{1}{2}} + a_2 - \sqrt{-(a_1^0 - \Omega X_2^0)^2} = a_2$$

$$\Rightarrow \left[\frac{(a_1^0 - \Omega X_2^0)^2(a_2^0 - \Omega X_1^0)^2}{(a_1^0 - \Omega X_2^0)^2 - m^2c^2}\right]^{\frac{1}{2}} - \left[-(a_1^0 - \Omega X_2^0)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 0$$

Usando la relación (3.42), se obtiene:

$$\left[\frac{(a_1^0 - \Omega X_2^0)^2(a_2^0 - \Omega X_1^0)^2}{-(a_2^0 - \Omega X_1^0)^2}\right]^{\frac{1}{2}} - \left[-(a_1^0 - \Omega X_2^0)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 0$$

Así,

$$\left[-(a_1^0 - \Omega X_2^0)^2\right]^{\frac{1}{2}} - \left[-(a_1^0 - \Omega X_2^0)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 0$$

finalmente, la ecuación dos también se satisface.

Por lo tanto las ecuaciones (3.43) y (3.44) son soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales.

3.6.1. Posible solución real y dependencia temporal de las soluciones.

Como se puede ver, se trata de soluciones complejas, es importante buscar soluciones reales como las que se acostumbra a tratar y como se sabe, las componentes temporales son X_1^0 y X_2^0 por lo que conviene relacionarlas de alguna forma con el tiempo.

Se puede notar que (3.42) se puede escribir de la siguiente manera:

$$(X_1^0 - \frac{a_2^0}{\Omega})^2 + (X_2^0 - \frac{a_1^0}{\Omega})^2 = \frac{m^2c^2}{\Omega^2} \tag{3.46}$$

y es evidente que esta relación tiene la forma de una circunferencia de radio $\frac{mc}{\Omega}$ y centrada en $(\frac{a_2^0}{\Omega}, \frac{a_1^0}{\Omega})$, parametrizando:

$$X_1^0 = \frac{a_2^0}{\Omega} + \frac{mc}{\Omega} cos(\theta) \tag{3.47}$$

$$X_2^0 = \frac{a_1^0}{\Omega} + \frac{mc}{\Omega} sen(\theta) \tag{3.48}$$

Sustituyendo en (3.43) y (3.44):

$$X_1 = \frac{a_2}{\Omega} - \frac{1}{\Omega}\epsilon_1\sqrt{-m^2c^2sen^2(\theta)} = \frac{a_2}{\Omega} - \frac{imc}{\Omega}\epsilon_1\sqrt{sen^2(\theta)} \tag{3.49}$$

$$X_2 = \frac{a_1}{\Omega} - \frac{1}{\Omega}\epsilon_2\sqrt{-m^2c^2cos^2(\theta)} = \frac{a_1}{\Omega} - \frac{imc}{\Omega}\epsilon_2\sqrt{cos^2(\theta)} \tag{3.50}$$

Escogiendo $\theta = i\phi$ donde $\phi = \frac{t}{T}$, con T una constante con unidades de tiempo y usando que $cos(i\phi) = cosh(\phi)$ y $sen(i\phi) = isenh(\phi)$.

$$X_1 = \frac{a_2}{\Omega} + \frac{mc}{\Omega}\epsilon_1|senh(\frac{t}{T})|$$

$$X_2 = \frac{a_1}{\Omega} - \frac{imc}{\Omega}\epsilon_2|cosh(\frac{t}{T})|$$

Se puede notar que la primera solución ya es real pero la segunda no lo es; haciendo una combinación lineal de ambas:

$$X_1 + iX_2 = \frac{a_2}{\Omega} + \frac{mc}{\Omega}\epsilon_1|senh(\frac{t}{T})| + \frac{ia_1}{\Omega} + \frac{mc}{\Omega}\epsilon_2|cosh(\frac{t}{T})| \tag{3.51}$$

¡Sigue saliendo un término imaginario!.

Además, tras la elección de $\theta = i\phi$, la segunda coordenada temporales se vuelve compleja.

CAPÍTULO 4

Sistemas relativistas con invariancia de reparametrizaciones del tiempo.

En este capítulo se pretende estudiar sistemas relativistas con invariancia bajo reparametrizaciones del tiempo y posteriormente extender este tratamiento a sistemas disipativos relativistas, se presenta la formulación hamiltoniana para estos sistemas.

4.1. Definición de sistemas relativistas

Un sistema relativista se caracteriza por tener una acción invariante bajo reparametrizaciones del tiempo.

Sea

$$\int L\left(q_i(t), \dot{q}_i(t)\right) dt \tag{4.1}$$

la acción de un sistema relativista arbitrario y sea $t' = t'(t)$ una función invertible monótona, tal que $dt' = |\frac{dt'}{dt}|dt$

$$A' = \int L\left(q_i'(t'), \dot{q'}_i(t')\right) dt' = \int L\left(q_i(t), \dot{q}_i(t)\right) dt = A \tag{4.2}$$

A esto se le llama invariancia bajo reparametrizaciones generales del tiempo. La función $q_i(t)$, se transforma como una función escalar, es decir, $q_i'(t') = q_i(t)$ (función escalar).

Sabemos también que:

$$\dot{q'}_i(t') = \frac{d}{dt'}q'(t') = \frac{dt}{dt'}\frac{d}{dt}q(t) = \frac{dt}{dt'}\frac{dq(t)}{dt} = \frac{dt}{dt'}\dot{q}_i(t).$$

Se define $e(t)$ como un grado de libertad adicional, tal que si $t \to t' \Rightarrow e'(t') = \frac{dt}{dt'}e(t)$

$$\Rightarrow e^{-1}(t)\dot{q}_i(t) \to (e')^{-1}(t')\dot{q'}_i(t') = \frac{dt'}{dt}e^{-1}(t)\frac{dt}{dt'}\dot{q}_i(t) = e^{-1}(t)\dot{q}_i(t)$$

Por lo tanto, $e^{-1}(t)\dot{q}_i(t) = (e')^{-1}(t')\dot{q'}_i(t')$ bajo la reparametrización del tiempo $t \to t'$.

4.2. Invariancia de la acción bajo reparametrizaciones del tiempo.

Sea $L\left(q_i(t), \dot{q}_i(t)\right)$ una lagrangiana arbitraria, donde $q_i(t)$ es una función escalar. La acción correspondiente a este lagrangiano es, simplemen-

te la parte derecha de (4.2).

$$A = \int L\left(q_i(t), \dot{q}_i(t)\right) dt \tag{4.3}$$

Veamos si esta cantidad es invariante bajo reparametrizaciones del tiempo.

Sea $t \to t'$

$$\Rightarrow A' = \int L\left(q_i'(t'), \dot{q'}_i(t')\right) dt' = \int L(q_i(t), \frac{dt}{dt'}\dot{q}_i(t))\frac{dt'}{dt}dt$$
$$\neq \int L(q_i(t), \dot{q}_i(t))dt = A$$

¡No es invariante bajo reparametrizaciones del tiempo!

Notemos que podría ser invariante si $L(q_i(t), \dot{q}_i(t))$ fuera lineal en la velocidad $\dot{q}_i(t)$, sin embargo, en los sistemas físicos que normalmente se tratan, la función lagrangiana lleva dentro la energía cinética y ésta contiene el término de la velocidad al cuadrado y por tanto, para esos sistemas, no se cumple la invariancia, así que, cuando L es lineal en la velocidad es un caso muy particular.

Para tener una acción invariante:

Sea $e(t)dt \to e'(t')dt' = \frac{dt}{dt'}e(t)\frac{dt'}{dt}dt = e(t)dt$

Por lo que $e(t)dt$ también tiene la propiedad de ser escalar.

Se propone, $A = \int e(t)L(q_i(t), e^{-1}\dot{q}_i(t))dt$ como invariante bajo reparametrizaciones generales del tiempo.

Veamos si lo es:

$$A' = \int e'(t')L(q_i'(t'), (e')^{-1}(t')\dot{q'}_i(t'))dt'$$
$$= \int e(t)L(q_i(t), (e)^{-1}(t)\dot{q}_i(t))dt$$

Pues todas las cantidades tienen carácter de ser escalares.

Entonces, se puede tomar como lagrangiana, la cantidad tal que su acción correspondiente es invariante, es decir:

$$\mathcal{L} = e(t)L(q_i(t), (e)^{-1}(t)\dot{q}_i(t)) \tag{4.4}$$

4.3. Sistemas disipativos

Para el estudio de sistemas con pérdida de energía se utiliza el método usual de Galley [1], es decir, se duplican los grados de libertad y, en cuanto a la e, como no aparecen derivadas en esa coordenada, se trata de una variable ignorable pues no tiene término cinético, por tanto no tiene dinámica propia. Partiendo de la lagrangiana de Galley, se tiene:

$$L = L_1(q_{1i}, \dot{q}_{1i}) - L_2(q_{2i}, \dot{q}_{2i}) + K(q_{1i}, q_{2i}, \dot{q}_{1i}, \dot{q}_{2i})$$

Aplicándole la ecuación (4.4):

$$\mathcal{L} = eL_1(q_{1i}, e^{-1}\dot{q}_{1i}) - eL_2(q_{2i}, e^{-1}\dot{q}_{2i}) + eK(q_{1i}, q_{2i}, e^{-1}\dot{q}_{1i}, e^{-1}\dot{q}_{2i}) \tag{4.5}$$

Además, cuando K es lineal en la velocidad, se puede hacer también de la siguiente forma:

$$\mathcal{L} = e_1 L(q_{1i}, e_1^{-1}\dot{q_{1i}}) - e_2 L(q_{2i}, e_2^{-1}\dot{q_{2i}}) + K$$

donde $K = K(e_1, e_2, q_{1i}, q_{2i}, \dot{q}_{1i}, \dot{q}_{2i})$, nuevamente es un potencial de pérdida de energía.

4.4. Ecuaciones de movimiento.

$$
\begin{aligned}
e: \quad L'(q_i, e^{-1}\dot{q}_i) + \frac{\partial L'(q_i, e^{-1}\dot{q}_i)}{\partial e} &= L'(q_i, e^{-1}\dot{q}_i) + \frac{\partial (e^{-1}\dot{q}_i)}{\partial e}\frac{\partial L'(q_i, e^{-1}\dot{q}_i)}{\partial (e^{-1}\dot{q}_i)} \\
&= L'(q_i, e^{-1}\dot{q}_i) - e^{-1}\dot{q}_i \frac{\partial}{\partial \theta_i} L(q_i, \theta_i) \mid_{\theta_i = e^{-1}\dot{q}_i} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
q_i: \qquad \frac{\partial}{\partial q_i} L'(q_i, e^{-1}\dot{q}_i) - \frac{d}{dt}[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L'(q_i, e^{-1}\dot{q}_i)] = 0
$$

Haciendo la elección de $e = 1 \Rightarrow \dot{e} = 0$ se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange para la lagrangiana $L(q_i, \dot{q}_i)$.

4.5. Partícula relativista.

En el capítulo tres, se estudió mediante la formulación lagrangiana, el sistema de la partícula relativista libre, se hallaron las ecuaciones de movimiento y se resolvieron. En esta sección se pretende hallar las ecuaciones de movimiento de este sistema con la forma presentada en este capítulo.

Usando el lagrangiano (3.19) con $c = 1$ y separando m_1 y m_2 para identificar fácilmente las dos partes del sistema L_1 y L_2:

$$
L = -m_1\sqrt{-\dot{X}_1^{\mu}\dot{X}_{1\mu}} + m_2\sqrt{-\dot{X}_2{}^{\mu}\dot{X}_{2\mu}} - \frac{\Omega}{2}(X_1^{\mu}\dot{X}_{2\mu} - X_2^{\mu}\dot{X}_{1\mu}) \quad (4.6)
$$

4.5.1. Partícula relativista con una e.

Escribiéndo (4.6) de acuerdo con la sección 4.2

$$
L = \frac{1}{2}e^{-2}\dot{X}_1{}^2 - \frac{1}{2}m_1^2 - \frac{1}{2}e^{-2}\dot{X}_2{}^2 + \frac{1}{2}m_2^2 - \frac{\Omega e^{-1}}{2}(X_1^{\mu}\dot{X}_{2\mu} - X_2^{\mu}\dot{X}_{1\mu}) \quad (4.7)
$$

y multiplicando por $e(t)$ de acuerdo a la sección 4.2, la acción correspondiente se vuelve invariante.

$$\Rightarrow L' = eL$$
$$= \frac{1}{2}e^{-1}\dot{X_1}^2 - \frac{1}{2}em_1^2 - \frac{1}{2}e^{-1}\dot{X_2}^2 + \frac{1}{2}em_2^2 - \frac{\Omega}{2}(X_1^\mu \dot{X}_{2\mu} - X_2^\mu \dot{X}_{1\mu})$$

de donde, se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$e: \qquad \frac{d}{dt}(\frac{\partial L'}{\partial \dot{e}}) - \frac{\partial L'}{\partial e} = 0$$
$$\Rightarrow e^{-1} = \frac{(m_2^2 - m_1^2)^{\frac{1}{2}}}{(\dot{X}_2^2 - \dot{X}_1^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$X_1^\mu: \qquad \frac{d}{dt}(\frac{\partial L'}{\partial \dot{X}_1^\mu}) - \frac{\partial L'}{\partial X_1^\mu} = 0$$
$$\Rightarrow e^{-1}\dot{X}_1^\mu + \Omega X_2^\mu = a_1^\mu$$

$$X_2^\mu: \qquad \frac{d}{dt}(\frac{\partial L'}{\partial \dot{X}_2^\mu}) - \frac{\partial L'}{\partial X_2^\mu} = 0$$
$$\Rightarrow e^{-1}\dot{X}_2^\mu + \Omega X_1^\mu = a_2^\mu$$

4.5.2. Partícula relativista con e_1 y e_2.

La acción invariante bajo reparametrizaciones del tiempo es:

$$A = \int \left[e_1 L_1(e_1, X_1^\mu, \dot{X}_1^\mu) - e_2 L_2(e_2, X_2^\mu, \dot{X}_2^\mu) + K(e_1, e_2, X_1^\mu, X_2^\mu, \dot{X}_1^\mu, \dot{X}_2^\mu) \right] dt$$
$$= \int \left[\frac{1}{2}e_1^{-1}\dot{X}_1^2 - \frac{1}{2}e_1 m_1^2 - \frac{1}{2}e_2^{-1}\dot{X}_2^2 + \frac{1}{2}e_2 m_2^2 - \frac{\Omega}{2}(X_1^\mu \dot{X}_{2\mu} - X_2^\mu \dot{X}_{1\mu}) \right] dt$$

Por lo tanto, el lagrangiano L' es:

$$L' = \frac{1}{2}e_1^{-1}\dot{X}_1^2 - \frac{1}{2}e_1 m_1^2 - \frac{1}{2}e_2^{-1}\dot{X}_2^2 + \frac{1}{2}e_2 m_2^2 - \frac{\Omega}{2}(X_1^\mu \dot{X}_{2\mu} - X_2^\mu \dot{X}_{1\mu}) \quad (4.8)$$

de donde se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$e_1 : \qquad \frac{d}{dt}(\frac{\partial L'}{\partial \dot{e}_1}) - \frac{\partial L'}{\partial e_1} = 0$$
$$\Rightarrow e_1^{-1} = \frac{m_1}{(-\dot{X}_1^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$e_2 : \qquad \frac{d}{dt}(\frac{\partial L'}{\partial \dot{e}_2}) - \frac{\partial L'}{\partial e_2} = 0$$
$$\Rightarrow e_2^{-1} = \frac{m_2}{(-\dot{X}_2^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$X_1^\mu : \qquad \frac{d}{dt}(\frac{\partial L'}{\partial \dot{X}_1^\mu}) - \frac{\partial L'}{\partial X_1^\mu} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(e_1^{-1}\dot{X}_1^\mu + \Omega X_2^\mu) = 0$$

$$X_2^\mu : \qquad \frac{d}{dt}(\frac{\partial L'}{\partial \dot{X}_2^\mu}) - \frac{\partial L'}{\partial X_2^\mu} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(-e_2^{-1}\dot{X}_2^\mu - \Omega X_1^\mu) = 0$$

Se obtienen entonces, de las constricciones obtenidas a partir de e_1 y e_2, y las ecuaciones de movimiento, las ecuaciones (3.28) y (3.29).

En el artículo [11] se señala que al final $q_1 = q_2$ debido a las condiciones del principio variacional, para cada caso, en este sistema con e_1 y e_2, estas condiciones dejan de cumplirse debido a las constricciones y a que las componentes X_1^0 y X_2^0 no pueden ser constantes (están identificadas con el tiempo). Las ecuaciones de movimiento no cambian con el intercambio $1 \leftrightarrow 2$, pero si $X_1^0 = X_2^0$ las constricciones dan problemas porque X_1^0 y X_2^0 deberían ser constantes.

4.6. Propuesta alternativa.

Expresando la lagrangiana de la siguiente forma:

$$L' = ae^{-1}(\dot{X}_1^2 - \dot{X}_2^2) - be - \frac{\Omega}{2}(X_1\dot{X}_2 - X_2\dot{X}_1) \tag{4.9}$$

donde $a = \frac{1}{2}$ y $b = m^2$ La ecuación para la e es:

$$-ae^{-2}(\dot{X}_1^2 - \dot{X}_2^2) - b = 0 \Rightarrow e = \sqrt{\frac{a}{b}(\dot{X}_2^2 - \dot{X}_1^2)} \tag{4.10}$$

Entonces (4.9) es:

$$L' = a\sqrt{\frac{b}{a}}\frac{\dot{X}_1^2 - \dot{X}_2^2}{\sqrt{\dot{X}_2^2 - \dot{X}_1^2}} - b\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\dot{X}_2^2 - \dot{X}_1^2} - \frac{\Omega}{2}(X_1\dot{X}_2 - X_2\dot{X}_1)$$

$$\Rightarrow L' = -2\sqrt{ab}\sqrt{-\dot{X}_1^2 + \dot{X}_2^2} - \frac{\Omega}{2}(X_1\dot{X}_2 - X_2\dot{X}_1) \tag{4.11}$$

de donde se obtienen las siguientes ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$2\sqrt{ab}\frac{\dot{X}_{1\mu}}{\sqrt{-\dot{X}_1^2 + \dot{X}_2^2}} + \Omega X_{2\mu} = a_{1\mu} \tag{4.12}$$

$$2\sqrt{ab}\frac{\dot{X}_{2\mu}}{\sqrt{-\dot{X}_1^2 + \dot{X}_2^2}} + \Omega X_{1\mu} = a_{2\mu} \tag{4.13}$$

de estas ecuaciones se tiene que:

$$(a_1 - \Omega X_2)^2 = 4ab\frac{\dot{X}_1^2}{\dot{X}_2^2 - \dot{X}_1^2} \tag{4.14}$$

$$(a_2 - \Omega X_1)^2 = 4ab\frac{\dot{X}_2^2}{\dot{X}_2^2 - \dot{X}_1^2} \tag{4.15}$$

y restando la primera de la segunda:

$$(a_2 - \Omega X_1)^2 - (a_1 - \Omega X_2)^2 = 4ab \tag{4.16}$$

Derivando la expresión anterior:

$$(a_2^\mu - \Omega X_1^\mu)\dot{X}_{1\mu} - (a_1^\mu - \Omega X_2^\mu)\dot{X}_{2\mu} = 0$$

Separando las partes espacial y temporal, tomando solo una dimensión espacial:

$$-(a_2^0 - \Omega X_1^0)\dot{X}_1^0 + (a_2 - \Omega X_1)\dot{X}_1 + (a_1^0 - \Omega X_2^0)\dot{X}_2^0 - (a_1 - \Omega X_2)\dot{X}_2 = 0$$

Desarrolando la parte espacial de la expresión (4.16):

$$-(a_2^0 - \Omega X_1^0)^2 + (a_1^0 - \Omega X_2^0)^2 + a_2^2 - a_1^2 + \Omega(-a_+X_- + a_-X_+) + \Omega^2 X_+ X_- = 4ab$$

Por otro lado, de las ecuaciones (4.12) y (4.13):

$$2\sqrt{ab}\dot{X}_1 = (a_1 - \Omega X_2)\sqrt{-\dot{X}_1^2 + \dot{X}_2^2}; \quad 2\sqrt{ab}\dot{X}_2 = (a_2 - \Omega X_1)\sqrt{-\dot{X}_1^2 + \dot{X}_2^2}$$
$$2\sqrt{ab}\dot{X}_1^0 = (a_1^0 - \Omega X_2^0)\sqrt{-\dot{X}_1^2 + \dot{X}_2^2}; \quad 2\sqrt{ab}\dot{X}_2^0 = (a_2^0 - \Omega X_1^0)\sqrt{-\dot{X}_1^2 + \dot{X}_2^2}$$

Con las expresiones anteriores se puede ver que:

$$\sqrt{-\dot{X}_1^2 + \dot{X}_2^2} = 2\sqrt{ab}\frac{\dot{X}_1}{(a_1 - \Omega X_2)} = 2\sqrt{ab}\frac{\dot{X}_2}{(a_2 - \Omega X_1)} = 2\sqrt{ab}\frac{\dot{X}_1^0}{(a_1^0 - \Omega X_2^0)} = 2\sqrt{ab}\frac{\dot{X}_2^0}{(a_2^0 - \Omega X_1^0)}$$

De estas igualdades se obtiene:

$$(a_2^0 - \Omega X_1^0)\dot{X}_1^0 = (a_1^0 - \Omega X_2^0)\dot{X}_2^0; \qquad (a_2 - \Omega X_1)\dot{X}_1 = (a_1 - \Omega X_2)\dot{X}_2;$$
$$\dot{X}_1 = \frac{(a_1 - \Omega X_2)\dot{X}_1^0}{a_1^0 - \Omega X_2^0}; \qquad \dot{X}_2 = \frac{(a_2 - \Omega X_1)\dot{X}_2^0}{a_2^0 - \Omega X_1^0}$$

Utilizando la ecuación (4.16), las dos últimas ecuaciones se pueden expresar como sigue:

$$\dot{X}_1^2 = \frac{(\dot{X}_1^0)^2}{(a_1^0 - \Omega X_2^0)^2}\left[-4ab + (a_1^0 - \Omega X_2^0)^2 - (a_2^0 - \Omega X_1^0)^2 + (a_2 - \Omega X_1)^2\right] \quad (4.17)$$

$$\dot{X}_2^2 = \frac{(\dot{X}_2^0)^2}{(a_2^0 - \Omega X_1^0)^2}\left[4ab - (a_1^0 - \Omega X_2^0)^2 + (a_2^0 - \Omega X_1^0)^2 + (a_1 - \Omega X_2)^2\right] \quad (4.18)$$

La ecuación (4.17) tiene soluciones numéricas, haciendo las siguientes consideraciones sobre las constantes:

$$\begin{array}{lllll} a_1^0 = 101, & X_1^0 = ct, & a_1 = 1, & \Omega = 5, & \\ a_2^0 = 100, & X_2^0 = -ct, & a_2 = 100, & c = 1, & b = 10 \end{array}$$

Se obtiene una solución numérica cuyas gráficas de posición y velocidad contra tiempo, se muestran a continuación:

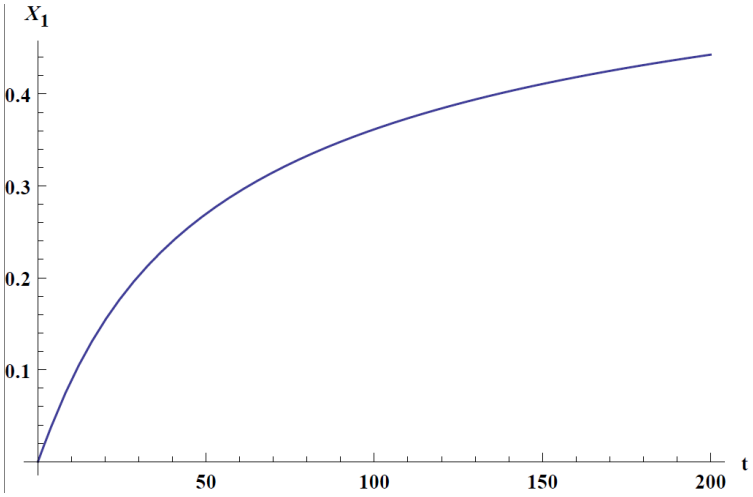

Figura 4.1: Gráfica de la posición-tiempo.

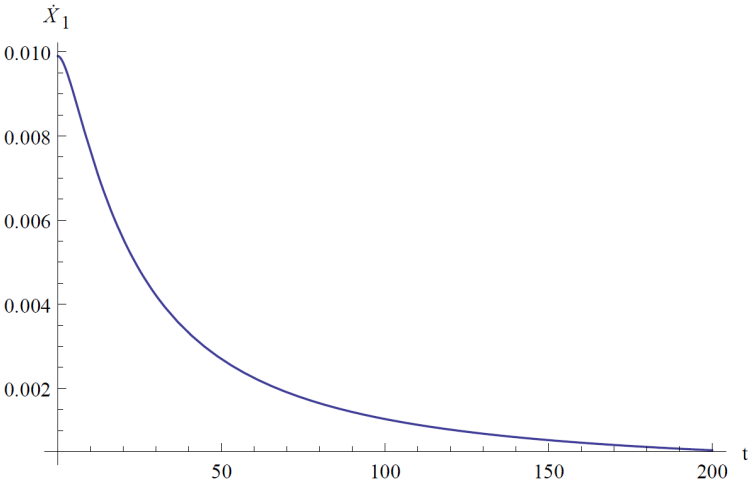

Figura 4.2: Gráfica de la velocidad-tiempo.

En esta forma de resolver la partícula relativista disipativa, se observa que la solución es disipativa, lo cual corresponde a lo que se esperaba.

En cuanto a la ecuación (4.18), se puede ver que al sacar raíz cuadrada para resolver la ecuación, es muy probable obtener un término imaginario dentro de paréntesis cuadrado, pues las cantidades que aparecen dentro de él, tienen los signos invertidos en la ecuación (4.17), efectivamente, con los valores de la tabla para las constantes, se obtiene una solución compleja, por lo tanto, se descarta.

De acuerdo a lo mencionado en el artículo [11], en este caso con una sola $e(t)$, la lagrangiana deja de ser antisimétrica al imponer las constricciones y eso ocasiona que X_1 y X_2 no puedan ser iguales.

4.7. Formalismo Hamiltoniano.

Para pasar a la forma hamiltoniana es necesario considerar los momentos conjugados con cada coordenada.

$$p_e = 0,$$
$$p_{q_i} = e\frac{\partial L'(q_i, e^{-1}\dot{q}_i)}{\partial \dot{q}_i} = e\frac{\partial (e^{-1}\dot{q}_i)}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial L'(q_i, e^{-1}\dot{q}_i)}{\partial (e^{-1}\dot{q}_i)} = \frac{\partial L'(q_i, \theta_i)}{\partial \theta_i}\mid_{\theta_i = e^{-1}\dot{q}_i}$$

Se supone que $p_{q_i} = p_{q_i}(e, q_i, \dot{q}_i)$ es invertible en $\dot{q}_i \Rightarrow \dot{q}_i = \dot{q}_i(e, q_i, p_{q_i})$

$$\Rightarrow H = ep_e + \dot{q}p_{q_i} - eL'(q_i, e^{-1}\dot{q}_i) \tag{4.19}$$

Constricción primaria: $p_e = 0$

Constricción secundaria: $\dot{p}_e = \{p_e, H\} = 0$

$$\begin{aligned}
\{p_e, H\} &= -\frac{\partial H}{\partial e} \\
&= p_{q_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial e} - L'(q_i, e^{-1}\dot{q}_i) - e\frac{\partial L'(q_i, e^{-1}\dot{q}_i)}{\partial e} \\
&= p_q\frac{\partial \dot{q}}{\partial e} - L'(q_i, e^{-1}\dot{q}_i) - e\frac{\partial (e^{-1}\dot{q})}{\partial e}\frac{\partial L'(q_i, e^{-1}\dot{q}_i)}{\partial (e^{-1}\dot{q})} \\
&= p_{q_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial e} - L'(q_i, e^{-1}\dot{q}_i) + e^{-1}\dot{q}_i\frac{\partial L'(q_i, \theta)}{\partial \theta_i}\mid_{\theta_i = e^{-1}\dot{q}_i} - \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial e}\frac{\partial L'(q_i, \theta_i)}{\partial \theta_i}\mid_{\theta_i = e^{-1}\dot{q}_i} \\
&= e^{-1}p_{q_i}\dot{q}_i - L'(q_i, e^{-1}\dot{q}_i)) \\
&= e^{-1}[p_{q_i}\dot{q}_i - eL'(q_i, e^{-1}\dot{q}_i)] \\
&= e^{-1}H(q_i, p_i) = 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow H(q, p) = 0$, es la única constricción secundaria, ya que $\{H, H\} = 0$

4.8. Partícula libre relativista.

Utilizando la versión de la lagrangiana con e_1 y e_2, se va a construir la hamiltoniana.

Los momentos generalizados son:

$$p_{e_1} = 0, \quad p_{e_2} = 0, \quad p^{\mu}_{x_1^{\mu}} = e_1^{-1}\dot{X}_1^{\mu} + \frac{\Omega}{2}X_2^{\mu}, \quad p^{\mu}_{x_2^{\mu}} = -e_2^{-1}\dot{X}_2^{\mu} - \frac{\Omega}{2}X_1^{\mu}$$
$$\Rightarrow \dot{X}_1^{\mu} = e_1 p^{\mu}_{x_1^{\mu}} - \frac{\Omega e_1}{2}X_2^{\mu}, \qquad \dot{X}_2^{\mu} = -e_2 p^{\mu}_{x_2^{\mu}} - \frac{\Omega e_2}{2}X_1^{\mu}$$

La hamiltoniana correspondiente es:

$$\begin{aligned} H =& \frac{1}{2}e_1 p^2_{x_1^{\mu}} - \frac{1}{2}e_2 p^2_{x_2^{\mu}} + \frac{\Omega^2}{8}(-e_1 X_2^2 + e_2 X_1^2) + \frac{1}{2}(e_1 m_1^2 - e_2 m_2^2) \\ & - \frac{\Omega}{2}(e_1 p^{\mu}_{x_1^{\mu}} X_2^{\mu} + e_2 p^{\mu}_{x_2^{\mu}} X_1^{\mu}) + \frac{\Omega^2}{4}(e_1 X_2^2 - e_2 X_1^2) \end{aligned}$$

se obtienen fácilmente las ecuaciones de Hamilton, donde las $\dot{X}_1$ y $\dot{X}_2$ coinciden con las que se obtuvieron a partir de la lagrangiana.

CAPÍTULO 5

Partícula en una circunferencia de radio constante.

En este capítulo se arma la lagrangiana del sistema disipativo clásico y para hacerlo relativista, se construye la lagrangiana cuya acción es invariante bajo reparametrizaciones del tiempo, se hallan las ecuaciones de movimiento, se resuelven, para posteriormente analizar las soluciones y se comparan con lo que se ha estudiado de los sistemas disipativos.

5.1. Lagrangiana del sistema clásico.

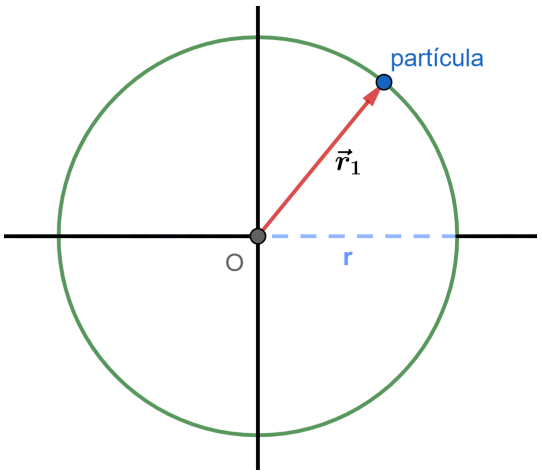

Figura 5.1: partícula constreñida a moverse en una circunferencia de radio r constante.

Como se sabe, el sistema se debe trabajar de acuerdo con el principio variacional de sistemas no conservativos de la sección (1.2) que se refiere a tratar el lagrangiano en dos partes, lo cual se vería como dos partículas girando en lugar de una, es decir dos lagrangianos: $L_1(q_1, \dot{q}_1)$, $L_2(q_2, \dot{q}_2)$ además de un potencial $K = -\frac{\Omega}{2}(\vec{q_1} \cdot \dot{\vec{q_2}} - \vec{q_2} \cdot \dot{\vec{q_1}})$. Parametrizando la circunferencia en coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} \vec{q_1} = \vec{r_1} = (x_1, y_1) \qquad & \vec{q_2} = \vec{r_2} = (x_2, y_2) \\ \Rightarrow \dot{\vec{q_1}} = \dot{\vec{r_1}} = (\dot{x_1}, \dot{y_1}) \quad \wedge \quad & \dot{\vec{q_2}} = \dot{\vec{r_2}} = (\dot{x_2}, \dot{y_2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow K &= -\frac{\Omega}{2}[(x_1, y_1) \cdot (\dot{x}_2, \dot{y}_2) - (x_2, y_2) \cdot (\dot{x}_1, \dot{y}_1)] \\ &= -\frac{\Omega}{2}[(x_1\dot{x}_2 + y_1\dot{y}_2 - x_2\dot{x}_1 - y_2\dot{y}_1] \end{aligned}$$

Pasando a coordenadas polares, sean:

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 cos(\theta_1) \quad &\Rightarrow \dot{x}_1 &= -r_1\dot{\theta}_1 sen(\theta_1) \\ x_2 &= r_2 cos(\theta_2) \quad &\Rightarrow \dot{x}_2 &= -r_2\dot{\theta}_2 sen(\theta_2) \\ y_1 &= r_1 sen(\theta_1) \quad &\Rightarrow \dot{y}_1 &= r_1\dot{\theta}_1 cos(\theta_1) \\ y_2 &= r_2 sen(\theta_2) \quad &\Rightarrow \dot{y}_2 &= r_2\dot{\theta}_2 cos(\theta_2) \end{aligned}$$

entonces, la función lagrangiana se escribe como:

$$\begin{aligned} L &= L_1 - L_2 + K \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{\vec{q_1}})^2 - \frac{1}{2}m(\dot{\vec{q_2}})^2 \\ &= \frac{1}{2}m[-r_1\dot{\theta}_1 sen(\theta_1), r_1\dot{\theta}_1 cos(\theta_1)]^2 - \frac{1}{2}m[-r_2\dot{\theta}_2 sen(\theta_2), r_2\dot{\theta}_2 cos(\theta_2)]^2 \\ &= \frac{1}{2}m[r_1^2\dot{\theta}_1^2 sen^2(\theta_1) + r_1^2\dot{\theta}_1^2 cos^2(\theta_1)] - \frac{1}{2}m[r_2^2\dot{\theta}_2^2 sen^2(\theta_2) + r_2^2\dot{\theta}_2^2 cos^2(\theta_2)] \\ &= \frac{1}{2}mr_1^2\dot{\theta}_1^2[sen^2(\theta_1) + cos^2(\theta_1)] - \frac{1}{2}mr_2^2\dot{\theta}_2^2[sen^2(\theta_2) + cos^2(\theta_2)] \\ &= \frac{1}{2}m[r_1^2\dot{\theta}_1^2 - r_2^2\dot{\theta}_2^2] \\ &= \frac{1}{2}mr_1^2\dot{\theta}_1^2 - \frac{1}{2}mr_2^2\dot{\theta}_2^2 \end{aligned}$$

Y, el potencial:

$$\begin{aligned} K &= -\frac{\Omega}{2}[-r_1r_2\dot{\theta}_2 cos(\theta_1)sen(\theta_2) + r_1r_2\dot{\theta}_2 sen(\theta_1)cos(\theta_2) + r_1r_2\dot{\theta}_1 sen(\theta_1)cos(\theta_2) - r_1r_2\dot{\theta}_1 cos(\theta_1)sen(\theta_2)] \\ &= -\frac{\Omega}{2}r_1r_2[-\dot{\theta}_2 cos(\theta_1)sen(\theta_2) + \dot{\theta}_2 sen(\theta_1)cos(\theta_2) + \dot{\theta}_1 sen(\theta_1)cos(\theta_2) - \dot{\theta}_1 cos(\theta_1)sen(\theta_2)] \\ &= -\frac{\Omega}{2}r_1r_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)sen(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned}$$

El lagrangiano del sistema disipativo en coordenadas polares es:

$$L = L_1 - L_2 + K = \frac{1}{2}mr_1^2\dot{\theta}_1^2 - \frac{1}{2}mr_2^2\dot{\theta}_2^2 - \frac{\Omega}{2}r_1r_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)sen(\theta_1 - \theta_2) \quad (5.1)$$

Donde $[\Omega] = \frac{kg}{s}$ y evidentemente $[\dot{\theta}_1] = [\dot{\theta}_2] = \frac{1}{s^2}$.

5.2. Lagrangiano con invariancia bajo reparametrizaciones del tiempo.

Escribiendo el lagrangiano anterior de acuerdo con la sección 4.2 con la masa en el término cinético.

$$L' = \frac{1}{2}m_1 r_1^2 e^{-1}\dot{\theta}_1^2 - \frac{1}{2}m_2 r_2^2 e^{-1}\dot{\theta}_2^2 - \frac{\Omega}{2}r_1 r_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)sen(\theta_1 - \theta_2)$$

Cuyas ecuaciones de movimiento son:

$$e: \qquad -e^{-2}m_1 r_1^2\dot{\theta}_1^2 + e^{-2}m_2 r_2^2\dot{\theta}_2^2 = 0$$

Se puede ver que se elimina la ecuación para la e.

$$\theta_1: \qquad \frac{d}{dt}[m_1 r_1^2 e^{-1}\dot{\theta_1}] + \Omega r_1 r_2\dot{\theta}_2 cos(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

$$\theta_2: \qquad \frac{d}{dt}[m_2 r_2^2 e^{-1}\dot{\theta_2}] + \Omega r_1 r_2\dot{\theta}_1 cos(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

Haciendo la elección de $e = 1$, se tiene:

$$\theta_1: \qquad m_1 r_1^2\ddot{\theta}_1 + \Omega r_1 r_2\dot{\theta}_2 cos(\theta_1 - \theta_2) = 0 \tag{5.2}$$

$$\theta_2: \qquad m_2 r_2^2\ddot{\theta}_2 + \Omega r_1 r_2\dot{\theta}_1 cos(\theta_1 - \theta_2) = 0 \tag{5.3}$$

Restando la ecuación (5.3) de la ecuación (5.2) y haciendo $m_1 = m_2 = m$:

$$m(r_1^2\ddot{\theta}_1 - r_2^2\ddot{\theta}_2) + \Omega r_1 r_2[\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1]cos(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

Sea: $r_1 = r_2 = r$

$$\Rightarrow mr^2(\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) + \Omega r^2[\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1]cos(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

y, tomando la variable " $-$ " de las variable $\pm$: $(\theta_- = \theta_1 - \theta_2)$:

$$\begin{aligned} & mr^2\ddot{\theta}_- + \Omega r^2 cos(\theta_-)(-\dot{\theta}_-) = 0 \\ & \Rightarrow m\ddot{\theta}_- - \Omega\dot{\theta}_- cos(\theta_-) = 0 \\ & \Rightarrow \frac{d}{dt}[m\dot{\theta}_- - \Omega sen(\theta_-)] = 0 \\ & \Rightarrow \dot{\theta}_- - \frac{\Omega}{m} sen(\theta_-) = k_0 \\ & \Rightarrow \dot{\theta}_- = k_0 + \frac{\Omega}{m} sen(\theta_-) \end{aligned}$$

Donde k_0 es una constante con unidades de $\frac{1}{s}$ y la solución de la ecuación es:

$$\theta_-(t) = 2tan^{-1}\left[\frac{-\frac{\Omega}{m} + \sqrt{k_0^2 - \frac{\Omega^2}{m^2}}tan\left(\frac{a_1}{2}\sqrt{k_0^2 - \frac{\Omega^2}{m^2}} + \frac{t}{2}\sqrt{k_0^2 - \frac{\Omega^2}{m^2}}\right)}{k_0}\right] \tag{5.4}$$

con a_1 una constante con unidades de tiempo (s).

Las gráficas de esta solución escogiendo un período suficientemente grande son:

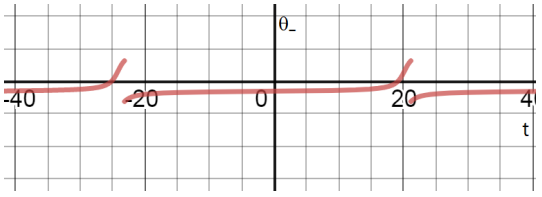

Figura 5.2: Gráfica de la solución del sistema de la partícula moviéndose en una circunferencia con $k_0 > 0$

Se puede notar de esta última gráfica que hay un decremento en el ángulo conforme el tiempo transcurre.

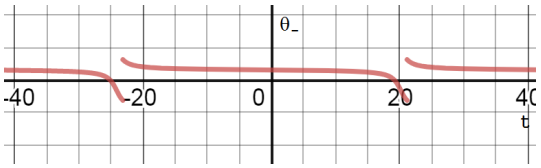

Figura 5.3: Gráfica de la solución del sistema de la partícula moviéndose en una circunferencia con $k_0 < 0$

5.2.1. Sistema con $e_1(t)$ y $e_2(t)$ y la masa en el término cinético.

Escribiendo el lagrangiano de acuerdo con la sección 4.2 con e_1 y e_2:

$$L' = \frac{1}{2}m_1 r_1^2 e_1^{-1}\dot{\theta}_1^2 - \frac{1}{2}m_2 r_2^2 e_2^{-1}\dot{\theta}_2^2 - \frac{\Omega}{2}r_1 r_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)sen(\theta_1 - \theta_2)$$

Cuyas ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned} e_1 : \qquad & -\frac{1}{2}m_1 r_1^2 e_1^{-2}\dot{\theta}_1^2 = 0 \\ e_2 : \qquad & -\frac{1}{2}m_2 r_2^2 e_2^{-2}\dot{\theta}_2^2 = 0 \end{aligned}$$

Se eliminan las ecuaciones para la e.

$$\theta_1 : \qquad \frac{d}{dt}[m_1 r_1^2 e_1^{-1}\dot{\theta_1}] + \Omega r_1 r_2 \dot{\theta}_2 cos(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

$$\theta_2 : \qquad \frac{d}{dt}[m_2 r_2^2 e_2^{-1}\dot{\theta_2}] + \Omega r_1 r_2 \dot{\theta}_1 cos(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

Haciendo la elección de $e = 1$, se tiene:

$$\theta_1 : \qquad m_1 r_1^2 \ddot{\theta}_1 + \Omega r_1 r_2 \dot{\theta}_2 cos(\theta_1 - \theta_2) = 0 \tag{5.5}$$

$$\theta_2 : \qquad m_2 r_2^2 \ddot{\theta}_2 + \Omega r_1 r_2 \dot{\theta}_1 cos(\theta_1 - \theta_2) = 0 \tag{5.6}$$

Las cuales coinciden con las obtenidas en la parte anterior donde se tenía sólo una $e(t)$.

5.2.2. Sistema con $e_1(t)$ y $e_2(t)$ y las masas fuera del término cinético.

Escribiendo el lagrangiano con las masas a parte del término cinético:

$$L' = \frac{1}{2}r_1^2 e_1^{-1}\dot{\theta}_1^2 - \frac{1}{2}e_1 m_1^2 - \frac{1}{2}r_2^2 e_2^{-1}\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}e_2 m_2^2 - \frac{\Omega}{2}r_1 r_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)sen(\theta_1 - \theta_2)$$

Cuyas ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned}
e_1 : &\qquad \frac{m_1}{r_1(-\dot{\theta}_1^2)^{\frac{1}{2}}} = 0 \\
e_2 : &\qquad \frac{m_2}{r_2(-\dot{\theta}_2^2)^{\frac{1}{2}}} = 0 \\
\theta_1 : &\qquad \frac{d}{dt}[r_1^2 e_1^{-1}\dot{\theta_1}] + \Omega r_1 r_2 \dot{\theta}_2 cos(\theta_1 - \theta_2) = 0 \\
\theta_2 : &\qquad \frac{d}{dt}[r_2^2 e_2^{-1}\dot{\theta_2}] + \Omega r_1 r_2 \dot{\theta}_1 cos(\theta_1 - \theta_2) = 0
\end{aligned}$$

Sustituyendo las primeras dos ecuaciones en las dos últimas:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[\frac{m_1 r_1 \dot{\theta}_1}{i\dot{\theta_1}}] + \Omega r_1 r_2 \dot{\theta}_2 cos(\theta_1 - \theta_2) = 0 \\
\frac{d}{dt}[\frac{m_2 r_2 \dot{\theta}_1}{i\dot{\theta_2}}] + \Omega r_1 r_2 \dot{\theta}_1 cos(\theta_1 - \theta_2) = 0
\end{aligned}$$

De donde se obtienen las ecuaciones:

$$\Omega r_1 r_2 \dot{\theta}_2 cos(\theta_1 - \theta_2) = 0 \tag{5.7}$$

$$\Omega r_1 r_2 \dot{\theta}_1 cos(\theta_1 - \theta_2) = 0 \tag{5.8}$$

utilizando las variables " $-$ " de las variable $\pm$ se obtiene:

$$\dot{\theta}_- \Omega r_1 r_2 cos(\theta_-) = 0 \tag{5.9}$$

Cuya solución es:

$$\theta_- = sen^{-1}(\frac{c_0}{\Omega r_1 r_2}) \tag{5.10}$$

que corresponde a ángulos constantes, es decir, no hay movimiento.

CAPÍTULO 6

Oscilador Armónico Relativista

Se presenta el sistema que consiste en un oscilador armónico relativista sin pérdida de energía, mediante la invariancia bajo reparametrizaciones del tiempo. Tomando en cuenta las complicaciones que aparecen, se analiza la posibilidad de agregarle la parte disipativa.

El oscilador armónico relativista se ha intentado resolver mediante varias técnicas, una de ellas es empleando el método numérico [9] obteniendo soluciones bastante complicadas. Este sistema en la mecánica clásica es bien conocido y fácil de resolver, la idea de trabajarlo aquí es con el objetivo de llevarlo a la relatividad especial y hacerlo con disipación de energía; para ello consideremos el lagrangiano:

$$L' = \frac{1}{2}me^{-1}\dot{x}^2 + emc^2 - \frac{1}{2}m\omega^2x^2e \tag{6.1}$$

Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}^\mu}) - \frac{\partial L'}{\partial x^\mu} = 0$$

$$\Rightarrow m\frac{d}{dt}(e^{-1}\dot{x}^\mu) + m\omega^2x^\mu e = 0 \tag{6.2}$$

Por otro lado,

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L'}{\partial \dot{e}}) - \frac{\partial L'}{\partial e} = 0$$

$$\Rightarrow -\left[-\frac{1}{2}me^{-2}\dot{x}^2 + mc^2 - \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right] = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}me^{-2}\dot{x}^2 = -mc^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

$$\Rightarrow e^{-2} = \frac{2mc^2 - m\omega^2x^2}{m\dot{x}^2} = \frac{2c^2 - \omega^2x^2}{\dot{x}^2}$$

$$\Rightarrow e = \frac{(\dot{x}^2)^{\frac{1}{2}}}{(2c^2 - \omega^2x^2)^{\frac{1}{2}}} = \left[\frac{-\dot{x}^2}{-(2c^2 - \omega^2x^2)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{(-\dot{x}^2)^{\frac{1}{2}}}{(-2c^2 + \omega^2x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow e = \frac{(-\dot{x}^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}(-c^2 + \frac{\omega^2 c^2}{2})^{\frac{1}{2}}} \tag{6.3}$$

Haciendo la elección de e=1, la ecuación (6.2) es:

$$m\ddot{x} = -m\omega^2 x^\mu \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x^\mu$$

$$\Rightarrow x^\mu = A^\mu cos(\omega t) + B^\mu sen(\omega t) \tag{6.4}$$

como $e = 1$, la ecuación (6.3) se convierte en una condición:

$$1 = \frac{(-\dot{x}^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}(-c^2 + \frac{\omega^2 x^2}{2})^{\frac{1}{2}}}$$
$$\Rightarrow \sqrt{2}(-c^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2)^{\frac{1}{2}} = (-\dot{x}^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$\Rightarrow 2(-c^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2) = -\dot{x}^2$$

Sustituyendo la solución (6.4) en la ecuación de arriba:

$$\begin{aligned} &-2c^2 + \omega^2[A^2 cos^2(\omega t) + B^2 sen^2(\omega t) + 2A^\mu B_\mu cos(\omega t) sen(\omega t)] \\ &= -A^2\omega^2 sen^2(\omega t) - B^2\omega^2 cos^2(\omega t) + 2A^\mu B_\mu \omega^2 sen(\omega t) cos(\omega t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow &-2c^2 + A^2\omega^2 cos^2(\omega t) + B^2\omega^2 sen^2(\omega t) + 2A^\mu B_\mu \omega^2 cos(\omega t) sen(\omega t) \\ &= -A^2\omega^2 sen^2(\omega t) - B^2\omega^2 cos^2(\omega t) + 2A^\mu B_\mu \omega^2 sen(\omega t) cos(\omega t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -\frac{2c^2}{\omega^2} + A^2[cos^2(\omega t) + sen^2(\omega t)] + B^2[sen^2(\omega t) + cos^2(\omega t)] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2c^2}{\omega^2} = A^2 + B^2 \tag{6.5}$$

Poniendo esta expresión en forma explícita, se puede ver que:

$$\Rightarrow \frac{2c^2}{\omega^2} = (A^\mu)^2 + (B^\mu)^2 \tag{6.6}$$

Esta es la condición que se debe satisfacer, obtenida de la constricción, misma que limita las constantes de integración. Este sistema, a pesar de tener una solución sencilla, bien conocida en la mecánica clásica, no parece ser buen candidato para meterle el potencial disipativo pues el simple hecho de volverlo relativista es complicado, esta solución es con la elección de solo una dimensión espacial.

6.1. Cambiando el signo del segundo término de la lagrangiana.

Se tiene la siguiente L':

$$L' = \frac{1}{2}me^{-1}\dot{x}^2 - emc^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 e \tag{6.7}$$

cuyas ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned} X^\mu : &\qquad \frac{d}{dt}[e^{-1}\dot{X}^\mu] + \omega^2 X^\mu e = 0 \\ e : &\qquad e^{-1} = \frac{(X^2 + \frac{2c^2}{\omega^2})^{\frac{1}{2}}}{(-\dot{X}^2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

donde se nota que la ecuación para la e tiene un signo distinto en el término de la masa por la elección que se hizo, la ecuación para la X^μ se queda igual.

Sustituyendo la e, en la ecuación de la X^μ:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{(X^2 + \frac{2c^2}{\omega^2})^{\frac{1}{2}}\dot{X}^\mu}{(-\dot{X}^2)^{\frac{1}{2}}}\right] + \omega^2 X^\mu \frac{(-\dot{X}^2)^{\frac{1}{2}}}{(X^2 + \frac{2c^2}{\omega^2})^{\frac{1}{2}}} = 0 \tag{6.8}$$

Siendo una ecuación bastante complicada. Conviene entonces resolver la ecuación para la X^μ haciendo $e = 1$ y luego hacer $e = 1$ en la ecuación de la e. De esto se obtiene una ecuación similar a (6.6) pero con un signo distinto en el término que contiene a la ω.

6.2. Oscilador armónico disipativo.

Se tiene la siguiente lagrangiana del oscilador armónico relativista con disipación:

$$L' = \frac{1}{2}m_1 e_1^{-1}\dot{X}_1^2 - e_1 m_1 c^2 - \frac{1}{2}m_2 e_2^{-1}\dot{X}_2^2 + e_2 m_2 c^2 - \frac{1}{2}\omega^2(m_1 e_1 X_1^2 + m_2 e_2 X_2^2) - \frac{\Omega}{2}(X_1\dot{X}_2 - X_2\dot{X}_1) \tag{6.9}$$

de donde se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\ddot{X}_1^\mu + \frac{\Omega}{m_1}\dot{X_2}^\mu + \omega^2 X_1^\mu = 0$$
$$\ddot{X}_2^\mu + \frac{\Omega}{m_2}\dot{X_1}^\mu + \omega^2 X_2^\mu = 0$$

haciendo $m_1 = m_2$ y usando las variables $\pm$:

$$\ddot{X}_\pm^\mu \pm \frac{\Omega}{m}\dot{X}_\pm^\mu + \omega^2 X_\pm^\mu = 0$$

Esta ecuación es la misma que aparece resuelta en [11], la diferencia aquí es que se deben agregar las constricciones obtenidas de e_1 y e_2.

$$e_1 : \qquad e_1^{-1} = \frac{(\frac{2c^2}{\omega^2} + X_1^2)^{\frac{1}{2}}}{(-\dot{X_1}^2)^{\frac{1}{2}}}$$
$$e_2 : \qquad e_2^{-1} = \frac{(\frac{2c^2}{\omega^2} + X_2^2)^{\frac{1}{2}}}{(-\dot{X_2}^2)^{\frac{1}{2}}}$$

CAPÍTULO 7

Conclusiones

La partícula libre relativista, por tener tanto invariancia de Lorentz e invariancia bajo reparametrizaciones del tiempo, se puede trabajar de una u otra forma, obteniendo ecuaciones de movimiento totalmente equivalentes. Al resolver las ecuaciones de movimiento, apareció que la velocidad de las partículas involucradas es mayor que la velocidad de la luz, lo cual corresponde a taquiones; las soluciones de este sistema son complejas y difícilmente se pueden volver reales. Como se vio, resulta más fácil trabajarla mediante el segundo método. De la formulación hamiltoniana, al obtener las ecuaciones de Hamilton, en un intento de resolverlas, se obtuvieron las ecuaciones de Euler-Lagrange, que se resolvieron previamente para este sistema.

Las soluciones complejas que se obtuvieron de este sistema son únicamente considerando una dimensión espacial, no se sabe qué es lo que podría pasar al agregar más dimensiones.

Del último método para la solución de la partícula relativista disipativa, se observa que las soluciones son consistentes con lo que se observa en sistemas disipativos clásicos, por lo cual, se puede concluir que este método es el más indicado para el estudio de este sistema.

Las ecuaciones de movimiento de la partícula en una circunferencia obtenidas mediante invariancia bajo reparametrizaciones del tiempo, se resolvieron y se obtuvo una solución real. Las gráficas de las soluciones, con la elección de que una constante sea negativa, parecen coincidir en algunas partes de las gráficas con lo que se observa en la mecánica clásica de sistemas no conservativos. Otra solución de este sistema resultó de hacer la forma con $e_1(t)$ y $e_2(t)$, en donde se observa que las soluciones corresponden a ángulos constantes, es decir, no hay movimiento.

En cuanto al oscilador armónico, a pesar de tener ambos tipos de invariancia, es problemático desde que se hace relativista. Las dificultades que se presentan impiden trabajarlo por un método u otro; más aún si se quiere resolver con disipación. Este sistema resultaba ser un buen ejemplo debido a que en la física clásica tiene mucho significado, en este caso no fue posible estudiarlo más allá de una solución en relatividad, que resulta ser buena si en comparación con la que se obtiene en el artículo de Miguel Barriuso Gutiérrez [9], donde se encontró una solución numérica del problema y además unidimensional. Para poder hacerlo además disipativo, se deben agregar las constricciones que no parecen ser muy complicadas pero las soluciones del sistema no son tan fáciles de manipular, como se puede ver en [11]. Queda pendiente como trabajo a futuro debido a que la solucion obtenida no se analizó más allá de lo que aquí aparece, se trata de un resultado de este trabajo que no se encontró en ningún otro lado, no se avanzó más en esa dirección porque el propósito era ver la posibilidad de hacerlo disipativo.

Bibliografía

[1] Chad R. Galley, *Classical Mechanics of Nonconservative Systems*, Physical Review Letters, Vol 110, (2013).

[2] Chad R. Galley, et. al. *The principle of stationary nonconservative action for classical mechanics and field theories.* arXiv:1412.3082 [math-ph].

[3] Eric Gourgoulhon, *Special Relativity in General Frames*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg. (2013).

[4] H. Bateman, *On dissipative systems and related variational principles*, Physical Review, vol 38 (1931).

[5] Herbert Goldstein, Charles P. Poole, John L. Safko, *Classical Mechanics* (3ª ed.). Boston, Estados Unidos: Addison-Wesley Publishing Company. pp

[6] Jackson, John D., *Classical Electrodynamics*, 3rd ed., New York: John Wiley and Sons, (1999)

[7] Janos Polonyi , *Classical and quantum effective theories*, Physical Review D 90, 065010 (2014).

[8] K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1982).

[9] Miguel Barriuso Gutiérrez, *Oscilador Armónico Relativista*. Universidad Complutense de Madrid, 2017.

[10] Nephtalí Eliceo Martínez Pérez, *Aspectos cuánticos de sistemas mecánicos no conservativos*, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2017.

[11] N.E. Martínez-Pérez, C. Ramírez , *On the Lagrangian description of dissipative systems*, Math-Ph ArXiv:.1708.03419v2 (2018).

[12] Paul A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Courier Corporation, pp 1-24 (2001)