



# Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

---

## Caída de un observador en un agujero negro de Schwarzschild

Tesis presentada al  
**Colegio de Física**

Como requisito parcial para la obtención del grado de:

**Licenciado en Física**

Presenta:  
**Paula Montserrat Crespo Barrera**

Asesorada por:  
**Dr. Gerardo F. Torres del Castillo**

Puebla Pue. Abril 2016



**Título:** Caída de un observador en un agujero negro de Schwarzschild  
**Estudiante:** PAULA MONTSERRAT CRESPO BARRERA

COMITÉ

---

Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada  
Presidente

---

Dr. Roberto Cartas Fuentes  
Secretario

---

Dr. Gilberto Silva Ortigoza  
Vocal

---

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero  
Vocal

---

Dr. Gerardo F. Torres del Castillo  
Asesor



# Índice general

Agradecimientos	v
Resumen	vii
Introducción	ix
<b>1. Relatividad General</b>	<b>1</b>
1.1. Solución de Schwarzschild . . . . .	4
1.2. Relación con los agujeros negros . . . . .	5
1.3. Geodésicas y sus desviaciones . . . . .	6
1.3.1. Desviación . . . . .	8
<b>2. Resolviendo el problema</b>	<b>9</b>
2.1. Análisis . . . . .	16



# Agradecimientos

Primero que todo quiero agradecer a mis padres por brindarme su amor y apoyo. Porque a pesar de todo sé que puedo contar con ellos y nunca me dejarán sola. A mi hermana Gaby por siempre estar a mi lado y ayudarme a ver las cosas desde otro punto de vista. A mi hermano Gabriel por cuidar de mí. Les amo, familia.

Quiero agradecer a Rodrigo por su ánimo y aliento para concluir esta tesis pero, sobre todo, por ser mi nueva familia. Por darme la mano cada día y ayudarme a seguir avanzando. Te amo.

A mis profesores por su disposición a compartirme su conocimiento, por ser accesibles y resolver mis dudas. En especial agradezco al Dr. Torres del Castillo por la paciencia que tuvo conmigo en la realización de este trabajo; le agradezco el empeño en cada clase y la bondad fuera del aula. También al M.C. Jesús Ortíz por los excelentes cursos de Métodos Matemáticos. A los profesores de *La Comisión* por su enseñanza y horas de sana camaradería.

A mis amigos de la prepa, por seguir junto a mí y por los momentos que vendrán *When I'm sixty four*. A los *frikis* por las batallas ganadas, las horas de diversión y el gran equipo que somos. A los *protos* por darle más alegría a mis días. A Angie, Diana y mamá Caro por la confianza y las sumas mal hechas. Al Gansito y Stephania por su amistad sincera. A toda la bandita matemática de la FCFM por las horas de estudio acompañadas de dibujos y los papelitos del chaparro. Gracias a todos mis amigos por darme su cariño y, aunque no los nombre a todos de forma individual, ustedes saben que están en mi corazón y que sin ustedes, mis días no hubieran sido tan emocionantes, alegres y divertidos. Los quiero mil.

Al Escuadrón Canino de Rastreo, Búsqueda y Rescate por mostrarme un camino distinto. A Laia por llegar a mi vida en el momento que más me hacía falta. A Niara y a Brego por empezar una nueva etapa conmigo y cambiar mi vida por completo.





# Resumen

En este trabajo de tesis se estudian los efectos experimentados por un observador que cae libremente en forma radial a un agujero negro sin rotación, calculando las componentes del tensor de curvatura en el marco de referencia de este observador. Se muestra, en particular, que al atravesar el horizonte de eventos no se presenta un efecto especial.



# Introducción

*Ello podría sugerir que si quisiéramos vivir más tiempo, deberíamos mantenernos volando hacia el este, de manera que la velocidad del avión se sumara a la de la rotación terrestre. Sin embargo, la pequeña fracción de segundo que ganaríamos así, la perderíamos de sobras por culpa de la alimentación servida en los aviones.*

**Stephen Hawking.**

Por debajo de todas las teorías de Einstein, incluida la relatividad, subyacía la búsqueda de constantes, certezas y absolutos. Einstein creía que existía una realidad armónica tras las leyes del universo y que el objetivo de la ciencia era descubrirla.

La historia de la relatividad se inicia en 1632 cuando Galileo articuló el principio de que las leyes de movimiento y de la mecánica (las del electromagnetismo aún no se descubrían) eran las mismas en todos los marcos de referencia de velocidad constante. En su *Diálogo sobre los dos sistemas máximos del mundo*, Galileo trataba de defender la idea copernicana de que la Tierra no permanecía inmóvil en el centro del universo mientras todo lo demás giraba a su alrededor dando una excelente descripción de la relatividad aplicada a sistemas que se mueven con velocidad constante respecto a otros.

Enciérrese con algún amigo en el camarote principal bajo la cubierta de algún gran barco, y llévese consigo unas cuantas moscas, mariposas y otros pequeños animales voladores.[...] Con el barco completamente inmóvil, observe con detenimiento cómo los pequeños animales vuelan con la misma velocidad a todos los rincones del camarote.[...] Cuando haya observado todas esas cosas cuidadosamente, haga que el barco avance con la velocidad que desee, con tal de que el movimiento sea uniforme y no fluctúe de aquí para allá. No descubrirá el menor cambio en todos los efectos mencionados, ni tampoco podrá deducir por ninguno de ellos si el barco estaba en movimiento o permanecía inmóvil. [7]

Años más tarde, tratando de explicar si la luz se comportaría del mismo modo que las ondas sonoras, surgieron dos visiones: Newton pensaba que la luz era un haz de partículas emitidas y Christiaan Huygens decía que la luz debía considerarse como un movimiento ondulatorio. A finales del siglo XIX una serie de experimentos confirmaron que Huygens tenía razón. Gracias a Thomas Young y James Clerk Maxwell, entre otros, se hizo evidente que la luz era la manifestación visible de todo un abanico de ondas electromagnéticas. Esta conclusión generó duda sobre cuál era el medio en el que se propagaba la luz y si su movimiento era en verdad relativo, ¿a qué resultaba ser relativa su velocidad?

La respuesta parecía ser que las ondas luminosas constituían una perturbación de un medio invisible, llamado éter, y que su velocidad era relativa a éste. El éter debía impregnar todo el universo conocido, ser fino y tan etéreo, valga la redundancia, que no causara efecto alguno en los planetas ni en una pluma que lo atravesara; pero a la vez debía ser lo bastante rígido como para permitir que una onda vibrara a través de él a una velocidad enorme (la de la luz, cuya medida ya era conocida). Todo esto llevaría a una desesperada búsqueda del éter a finales del siglo XIX.

A pesar de los esfuerzos de Hippolyte Fizeau, Albert Michelson y Edward Morley, nadie era capaz de detectar aquella escurridiza sustancia debido a que siempre observaban que la velocidad de la luz era exactamente la misma, sin importar quién observara y del experimento que se ideara. De modo que los científicos trataron de explicar cómo el éter existía pero no podía detectarse y fue así que alrededor de

1890 Hendrik Lorentz y George Fitzgerald, de forma independiente, concibieron la hipótesis de que los objetos sólidos se contraían ligeramente cuando se movían a través del éter por un factor de  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ , que compensaría la desviación del aparato de Michelson y Morley.

En 1899, mientras trabajaba en Aarau en la búsqueda de un método para detectar el éter, Einstein leyó un artículo de Wilhelm Wien en el que se describían los nulos resultados de trece experimentos realizados para detectar el éter, incluidos el de Michelson-Morley y el de Fizeau. Para Einstein, la trascendencia de aquellos resultados experimentales residía en que reforzaban lo que él ya creía: que el principio de la relatividad de Galileo resultaba aplicable a las ondas luminosas; es decir, que desde el punto de vista mecánico, cualquier experimento realizado dará los mismos resultados independientemente del marco de referencia.

A comienzos de 1905, Einstein había empezado a dar mayor énfasis a la deducción que a la inducción en su intento de explicar la electrodinámica pero ¿de qué postulados básicos de principios generales partiría?

Su primer postulado era el principio de la relatividad, que afirmaba que todas las leyes de la física, incluidas las ecuaciones de Maxwell, son las mismas para todos los observadores que se muevan a velocidad constante unos con respecto de otros y también postuló que la velocidad de un rayo de luz era constante independientemente de lo rápido que se moviera su fuente. Por desgracia, el postulado de la luz parecía incompatible con el principio de relatividad hasta que dio con la clave del problema: analizar el concepto de tiempo. Así concluyó que el tiempo no puede definirse de manera absoluta y que existe una inseparable relación entre el tiempo y la velocidad de la señal.

Esta idea significa que no hay un *tiempo absoluto*, que todo marco de referencia móvil tiene su propio tiempo relativo. El concepto de tiempo absoluto había sido un pilar fundamental de la física desde que Newton lo convirtiera en premisa de sus *Principios* doscientos dieciséis años antes. Y lo mismo podía decirse del espacio y la distancia absolutos. Además, uniendo la teoría de Maxwell a la de la relatividad, Einstein pudo deducir las ecuaciones que expresan la relación entre velocidad y masa, concluyendo que masa y energía son manifestaciones de la misma cosa.

El camino de Einstein hacia la teoría de la relatividad general se inició en noviembre de 1907 como consecuencia de dos inconformidades con su teoría de la relatividad especial: que se aplicara sólo a un sistema de referencia con movimiento uniforme y velocidad constante y que no incorporara la teoría de la gravitación de Newton. Entonces pensó qué sentiría un observador en caída libre, llegando a la conclusión de que los efectos locales de estar en movimiento acelerado o de hallarse en un campo gravitatorio resultaban indistinguibles, principio conocido como el «principio de equivalencia». Una consecuencia importante de esta equivalencia es que la gravedad debería curvar un rayo de luz; para entenderlo pensemos en un observador que viaja en un tren mientras llueve en el exterior, conforme su velocidad aumenta (recordemos que está acelerado) y el tren avanza, él verá que las gotas de lluvia se van «costando»; la trayectoria que describiría el movimiento de la lluvia no sería una línea recta. Sin embargo, diariamente percibimos a la luz viajar en línea recta entonces, si un rayo de luz se curva al atravesar diversas regiones de campos gravitatorios cambiantes, ¿cómo es que puede verse una línea recta?

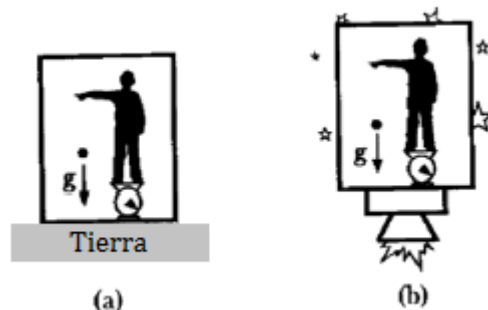


Figura 1: Representación del « principio de equivalencia» donde se muestra un observador en un campo gravitacional (a) y un observador en una nave que viaja con movimiento acelerado (b).

Una solución podría ser la de comparar la trayectoria de un rayo de luz a través de un campo gravitatorio cuya intensidad varía con la trayectoria de una línea dibujada en una esfera o en una superficie curva. En tales casos, la línea más corta entre dos puntos es una curva: una geodésica - que es aquella curva definida de forma que cada elemento de ella sea un desplazamiento paralelo del elemento anterior- como un gran arco o una gran ruta circular en nuestro globo terraqueo. Esto podía significar que la curvatura de la luz requería que la propia estructura del espacio, a través del cual viajaba el rayo de luz, se curvara debido a la gravedad; también significaba que hacía falta una geometría no euclidiana para describir este fenómeno.

La geometría euclidiana describe superficies planas pero en las superficies curvas pierde su validez. Gauss y otros habían desarrollado distintos tipos de geometría que pudieran describir la superficie de esferas y otras superficies curvas pero fue Riemann quien llevó las cosas aún más lejos; desarrolló una forma de describir un espacio curvo con cualquier número de dimensiones. Riemann demostró que las propiedades básicas (la estructura) de un espacio curvo están determinadas por el *tensor métrico*  $ds^2$ .

A partir del verano de 1912, Einstein se esforzó en desarrollar ecuaciones del campo gravitatorio usando tensores y siguiendo la línea desarrollada por Riemann, Ricci y otros, con el objetivo matemático de encontrar ecuaciones que fueran generalmente covariantes. El resultado que obtuvo después de grandes esfuerzos y muchos años es conocido como las *ecuaciones de campo*, las cuales son auténticamente covariantes y, en consecuencia, logró que su teoría incorporara todas las formas de movimiento: inercial, acelerado, rotatorio o arbitrario.

Con su teoría de la relatividad especial, Einstein había demostrado que el espacio y el tiempo no tenían una existencia independiente sino que, en lugar de ello, configuraban juntos la estructura del espacio-tiempo. La estructura curvada y ondulada del espacio-tiempo explicaba la gravedad, su equivalencia con la aceleración y también -según Einstein- la relatividad general de todas las formas de movimiento. Con las ecuaciones del campo gravitatorio de su teoría general de la relatividad, Einstein sentó las bases para el estudio de la naturaleza y evolución del universo, convirtiéndose de este modo en el padre de la cosmología moderna.

Hacia 1916, Karl Schwarzschild leyó la formulación de Einstein y resolvió las ecuaciones de campo pensando en cómo deformaría al espacio tiempo una distribución de simetría esférica. Sus primeros cálculos se centraron en la curvatura del espacio-tiempo *fuera* de una estrella esférica y carente de rotación aunque posteriormente formuló otro artículo sobre lo que ocurría *dentro* de ella. En ambos casos había algo inusual que parecía inevitable: si toda la masa de la estrella (o de cualquier objeto) se comprimía en un espacio lo suficientemente diminuto -menor al radio  $r_g$  conocido como «radio de Schwarzschild»-, algo extraño sucedía. En el centro, el espacio-tiempo se curvaría infinitamente sobre sí mismo. En tal situación, nada dentro del radio de Schwarzschild podría escapar a la fuerza gravitatoria, ni siquiera la luz o ninguna otra forma de radiación. También el tiempo formaría parte de esta curvatura, contrayéndose hasta cero.

En 1919 Einstein elaboró un artículo explicando por qué las singularidades que describía Schwarzschild no existen en la realidad física. Sin embargo, en la década de 1960, Stephen Hawking, Roger Penrose, John Wheeler, Freeman Dyson y Kip Thorne señalaron que las estrellas *podían* colapsarse y producir aquel fenómeno, y que de hecho lo hacían a menudo. Wheeler los bautizó como «agujeros negros» y han constituido un rasgo más de la astrofísica.

Es en este punto donde hacemos una pausa y nos colamos en la historia para hacer una revisión del trabajo de Schwarzschild aplicándolo a un viajero que cae libremente hacia un agujero negro. El objetivo de esta tesis es mostrar, mediante ecuaciones, que el observador no debe notar nada especial al cruzar el horizonte de eventos de un agujero negro; sin embargo, como se verá en detalle, existe un efecto que se intensifica a medida que el observador se aproxima a la verdadera singularidad en  $r = 0$ .



# Capítulo 1

## Relatividad General

*When you are courting a nice girl an hour seems like a second. When you sit on a red-hot cinder a second seems like an hour. That's relativity.*

**Albert Einstein.**

Con el fin de alcanzar la máxima claridad respecto a la teoría de la relatividad, imaginemos que un cuervo vuela en línea recta y uniformemente, visto desde un punto fijo en la tierra. Observado desde un vagón en marcha, el movimiento del cuervo sería un movimiento de distinta velocidad y distinta dirección, pero seguiría siendo rectilíneo y uniforme. En otras palabras, si una masa  $m$  se mueve rectilínea y uniformemente con respecto a un sistema  $K$  de coordenadas, también se moverá rectilínea y uniformemente respecto a un segundo sistema de coordenadas  $K'$ , siempre que este último ejecute con respecto a  $K$  un movimiento de traslación uniforme.

Vemos que con respecto a  $K'$  las leyes de la mecánica de Galileo-Newton son igual de válidas que con respecto a  $K$  entonces podemos decir que si  $K'$  es, con respecto a  $K$ , un sistema de coordenadas con movimiento uniforme y libre de rotación, entonces los sucesos de la naturaleza transcurren con respecto a  $K'$  según las mismas leyes de la naturaleza que con respecto a  $K$ . Esta afirmación es el sentido restringido del «principio de la relatividad».

Si el principio anterior no fuese válido, entonces los sistemas de coordenadas de Galileo que se mueven uniformemente unos con respecto a otros, no serían equivalentes a la hora de describir los sucesos de la naturaleza. Por consiguiente, sería de esperar que la dirección del movimiento de la Tierra en cada momento interviniese en las leyes de la naturaleza y que, por ende, el comportamiento de los principios físicos dependiese de la orientación espacial con respecto a la Tierra. Sin embargo, jamás se ha logrado observar tal anisotropía del espacio físico terrestre, lo cual da peso en favor del principio de la relatividad [5].

Antes de la teoría de la relatividad, la física supuso siempre que el significado de los datos temporales era absoluto, es decir, independiente del estado del movimiento del marco de referencia pero después de ésta se llegó a un resultado importante: todo marco de referencia (sistema de coordenadas) tiene su tiempo particular; así, la especificación del tiempo sólo tiene sentido cuando se indica el marco de referencia al cual hace relación dicha especificación.

Hemos visto que en la física prerrelativista se requiere un marco de referencia y un sistema de coordenadas para describir las relaciones en el espacio. Para caracterizar las relaciones temporales antes mencionadas necesitamos, además, un reloj patrón situado en el origen de nuestro sistema cartesiano de coordenadas; así, si un acontecimiento se produce en un lugar cualquiera le podemos asignar tres coordenadas  $x^i$  y un tiempo  $t$ , que podrá ser medido en cuanto hayamos fijado el origen del tiempo, simultánea con el inicio del acontecimiento, en el reloj que hemos colocado en el origen del sistema de coordenadas.

A partir de estas conclusiones surge la posibilidad de que la ley de propagación de la luz en el vacío sea compatible con el principio de relatividad y para ello hay que responder a la cuestión de qué relación hay entre el tiempo y el lugar de diversos sucesos con respecto a dos marcos de referencia, tal que cualquier rayo de luz posea la velocidad de propagación  $c$  relativa a ambos cuerpos. Esta pregunta conduce a una

ley de transformación muy concreta para las magnitudes espacio-temporales de un suceso al pasar de un marco de referencia a otro, la «transformación de Lorentz»:

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt) \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)\end{aligned}$$

donde  $\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2}$ . De acuerdo con la ley de transformación de Lorentz, la ley de propagación de la luz en el vacío se cumple tanto para el marco de referencia  $K$  como para el  $K'$ . Además, estas relaciones ponen en evidencia una diferencia entre los papeles desempeñados por la coordenada tiempo y por las coordenadas espaciales.

Toda la teoría especial de la relatividad depende del invariante  $s^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 - \Delta x_0^2$ . Formalmente desempeña el mismo papel en el continuo tetradimensional espacio-tiempo que el desempeñado por el invariante  $l^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2$  en la geometría euclidiana y en la física prerrelativista, donde  $l^2$  representa la distancia entre dos puntos. En la geometría euclidiana,  $l^2$  se anula sólo cuando los dos puntos correspondientes coinciden entre sí; en cambio, en relatividad, la anulación de  $s^2$  es la condición invariante de que los dos puntos del espacio-tiempo puedan ser reunidos entre sí por una señal luminosa, a través del vacío.

Las consideraciones hechas hasta ahora están basadas en la suposición de que todos los sistemas inerciales son equivalentes para la descripción de fenómenos físicos pero, ¿qué hay de los marcos de referencia que no tienen movimientos uniformes unos respecto a otros? Existen regiones finitas del espacio en las cuales, respecto a un marco de referencia convenientemente elegido, las partículas materiales se mueven libremente sin aceleración y en el cual las leyes de la teoría especial de la relatividad se cumplen con notable exactitud. El principio de equivalencia entre masa inerte y masa gravitatoria exige que al considerar dichas regiones podamos hacer uso de sistemas de coordenadas que, respecto a los inerciales, están dotados de aceleraciones y de movimientos rotatorios pero en cuanto lo intentemos nos encontraremos en conflicto con la interpretación física del espacio y del tiempo a la cual llegamos mediante la teoría especial de la relatividad.

De acuerdo con el principio de equivalencia, si  $K'$  es un sistema de coordenadas cuyo eje  $z'$  coincide con el eje  $z$  del sistema de coordenadas  $K$  y que gira alrededor de este eje con una velocidad angular constante,  $K'$  debe también considerarse como un sistema en reposo respecto del cual existe un campo gravitatorio (campo de fuerza centrífuga y fuerza de Coriolis). Podemos concluir que el campo gravitatorio influye sobre las leyes métricas del continuo espacio-tiempo y, en presencia de un campo gravitatorio, la geometría que rige la configuración de cuerpos rígidos ideales es no euclidiana.

Gauss resolvió esta dificultad introduciendo coordenadas que eran arbitrarias, aun cuando estaban relacionadas con las propiedades métricas de la superficie para la cual se usaban. Nos mantendremos fieles a la relatividad introduciendo coordenadas arbitrarias para cualquier sistema tetradimensional que sean covariantes respecto de transformaciones arbitrarias; puede desarrollarse la geometría necesaria (sobre una superficie continuamente curvada) al considerar que una porción infinitamente pequeña puede considerarse como plana con errores infinitesimales. Así, para cualquier región de la superficie tenemos:

$$ds^2 = g_{11}dx_1^2 + 2g_{12}dx_1dx_2 + g_{22}dx_2^2$$

donde  $g_{11}$ ,  $g_{12}$  y  $g_{22}$  están determinadas por la naturaleza de la superficie y la elección de coordenadas.

Existen relaciones análogas en el continuo tetradimensional espacio-tiempo puesto que en las proximidades inmediatas de un observador que cae libremente en un campo gravitatorio no existe campo gravitatorio. Por lo tanto, podemos considerar una región infinitamente pequeña del espacio-tiempo, quedándonos

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_0^2.$$

A pesar de esto, las regiones espacio-temporales de extensión finita no son, en general, galileanas, de modo que no puede eliminarse un campo gravitatorio mediante una elección conveniente de coordenadas en estas regiones pero el invariante  $ds$  existe siempre para dos sucesos próximos del continuo y puede



expresarse mediante coordenadas arbitrarias cualesquiera como:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.1)$$

donde las funciones  $g_{\mu\nu}$ , conocidas como *tensor métrico*, describen, respecto al sistema de coordenadas arbitrariamente elegido, las relaciones métricas del continuo espacio-tiempo y también el campo gravitatorio. Es una herramienta matemática que nos dice cómo calcular la distancia entre puntos de un espacio dado y para la entidad tetradimensional conocida como espacio-tiempo, el tensor métrico necesita diez componentes independientes.

En el continuo tetradimensional de la teoría especial de la relatividad la trayectoria del movimiento rectilíneo uniforme es equivalente a una línea recta en el espacio real. La generalización más simple de esta línea, compatible con el sistema conceptual de la teoría general de Riemann de los invariantes, es la que conduce a la línea geodésica. En consecuencia tendremos que suponer, en el sentido del principio de equivalencia, que el movimiento de una partícula material que sólo está sometida al campo gravitacional se halla descrito por la expresión

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\lambda\sigma}^\mu \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0, \quad (1.2)$$

donde as  $\Gamma_{\lambda\sigma}^\mu$  son conocidas como «símbolos de Christoffel». Supondremos que la línea de mundo de una partícula que no está sujeta a ninguna fuerza, excepto la gravitacional, es una geodésica de tipo temporal.

Notemos que si multiplicamos la ec. (1.2) por  $-m$ , el segundo término puede ser interpretado como las fuerzas gravitacionales y las componentes del tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  juegan el rol del potencial gravitacional clásico debido a que los símbolos de Christoffel son proporcionales a las derivadas del tensor métrico pues están definidos como:

$$\Gamma_{\lambda\sigma}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left( \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^\nu} \right). \quad (1.3)$$

Éstos cumplen que  $\Gamma_{\lambda\sigma}^\mu = \Gamma_{\sigma\lambda}^\mu$ .

En un espacio plano, si derivamos cierta cantidad dos veces seguidas, no importa el orden; sin embargo, en general, lo anterior no se cumple para derivación covariante en un espacio curvo. A pesar de ello, gracias a que los símbolos de Christoffel son simétricos en los índices inferiores, no importa el orden en que tomemos sus derivadas. Ahora, tomando la derivada covariante de cualquier vector contravariante  $A^\alpha$  y derivamos este resultado obtenemos, después de varias operaciones[2],

$$A^\alpha \left[ \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \right] = A^\alpha R_{\sigma\mu\nu}^\rho,$$

es decir,

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda$$

que es conocido como el «tensor de curvatura» o «tensor de Riemann». Vemos que depende sólo de los símbolos de Christoffel y sus derivadas. En un espacio plano, como las componentes del tensor métrico son constantes, las componentes del tensor de curvatura serán todas cero; en cambio, en un espacio curvo, el tensor no será cero y el tensor representará la curvatura del espacio.

Las leyes que rigen el campo gravitatorio tienen su análogo con la ecuación de Poisson de la teoría newtoniana. Esta ecuación se fundamenta en la idea de que el campo gravitatorio tiene su origen en la densidad  $\rho$  de la materia ponderable y resulta similar en la teoría general de la relatividad. Si es así, la generalización tensorial de la densidad está dada por el tensor de energía-momento. El potencial gravitacional debe ser una ecuación tensorial de  $g_{\mu\nu}$ , el tensor métrico; además se quiere que el tensor sea simétrico que sea de segundo orden en las derivadas de la métrica. Todos estos tensores diferenciales pueden formarse algebraicamente a partir del tensor de Riemann y serán de la forma

$$R_{\mu\nu} + ag_{\mu\nu}R$$

con

$$R_{\mu\nu} = \partial \Gamma_{\nu\mu}^\alpha - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\alpha\lambda}^\alpha \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda \quad (1.4)$$

y

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu},$$

# CAPÍTULO 1. RELATIVIDAD GENERAL

## 1.1. SOLUCIÓN DE SCHWARZSCHILD

donde  $R_{\mu\nu}$  es una contracción del tensor de Riemann conocido como el tensor de Ricci y  $R$  es el escalar de Ricci. El aspecto más útil del primero de ellos es que es *generalmente covariante*, lo que significa que las relaciones entre sus componentes permanecen constantes aunque hubiera cambios o rotaciones arbitrarios en el sistema de coordenadas del espacio-tiempo.

Tomando  $a = -\frac{1}{2}$ , la expresión  $R_{\mu\nu} + ag_{\mu\nu}R$  pasa a ser el tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R,$$

que siempre cumple que  $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$ . Podemos entonces proponer

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu},$$

donde  $T_{\mu\nu}$  representa el tensor energía-momento antes mencionado y  $\kappa$  simboliza una constante vinculada a la constante de gravitación de Newton. El miembro derecho describe el movimiento de la materia en el campo gravitatorio. La interrelación entre los dos miembros muestra cómo los objetos curvan el espacio-tiempo y cómo, a su vez, dicha curvatura afecta al movimiento de los propios objetos.

Además, sabemos que una importante predicción de la teoría general de la relatividad es que un rayo de luz que pasa cerca del Sol debería ser deflectado debido a la curvatura del espacio-tiempo producida por la masa del Sol. Si la concentración de masa es muy grande, como se cree que ocurre cuando una estrella muy grande agota su fuente de energía, y se colapsa a un pequeño volumen formando un agujero negro, la curvatura del espacio-tiempo es tan extrema que toda la materia y la luz es atrapada por éste; es aquí donde la métrica de Schwarzschild y, por consiguiente, su solución a las ecuaciones de campo de Einstein entran en acción.

### 1.1. Solución de Schwarzschild

Por lo visto anteriormente, sabemos que en la geometría de Riemann, la geometría del espacio tiempo puede describirse con una métrica dada por funciones  $g_{\mu\nu}$  que dependen de las coordenadas del espacio tiempo  $x^0, x^1, x^2$  y  $x^3$ . Entonces, en un sistema de referencia no inercial, el elemento de longitud estará dado según la ecuación (1.1).

Teniendo como fin obtener la métrica de Schwarzschild para el espacio tiempo en el exterior de una estrella que no rota, debemos tomar en cuenta que la simetría esférica implica que habrá una distorsión radial en el 3-espacio euclídeo  $E^3$ . La métrica de  $E^3$  en coordenadas esféricas es

$$ds^2 = dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (1.5)$$

donde  $r$  es la distancia desde el origen;  $\theta$ , la inclinación desde el eje polar; y  $\phi$ , el ángulo azimutal. En un espacio curvado con simetría esférica, el área de esferas sucesivas y paralelas, no aumentará necesariamente como el cuadrado de la distancia. Los incrementos de la distancia radial tendrán la forma general  $F(r)dr$  o, por conveniencia en los cálculos,  $e^{2B(r)}dr$  [1]. La simetría esférica nos permite escribir la ecuación (1.5) como

$$ds^2 = e^{2A(r)}dt^2 - e^{2B(r)}dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (1.6)$$

Y al comparar con (1.1) tendremos que

$$\begin{aligned} g_{00} &= e^{2A(r)}, & g_{11} &= -e^{2B(r)}, & g_{22} &= -r^2, \\ g_{33} &= -r^2 \sin^2\theta, & g_{\mu\nu} &= 0 & \text{con } \mu &\neq \nu, \end{aligned}$$

por lo que las entradas de la matriz inversa son

$$\begin{aligned} g^{00} &= e^{-2A(r)}, & g^{11} &= -e^{-2B(r)}, & g^{22} &= -r^{-2}, \\ g^{33} &= -r^{-2} \sin^{-2}\theta & g^{\mu\nu} &= 0, & \mu &\neq \nu. \end{aligned}$$

Con estas componentes podemos calcular los símbolos de Christoffel, ec. (1.3), y podemos obtener así las componentes del tensor de Riemann:

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda. \quad (1.7)$$

Al contraer el tensor de Riemann se obtiene el tensor de Ricci, ec. (1.4). Como es una métrica diagonal, los únicos componentes de este tensor serán:

$$\begin{aligned} R_{11} &= A'' - A'B' + A'^2 - \frac{2B'}{r} \\ R_{00} &= -e^{2A-2B} \left( A'' - A'B' + A'^2 + \frac{2A'}{r} \right) \\ R_{22} &= e^{-2B} [1 + r(A' - B')] - 1 \\ R_{33} &= R_{22} \text{sen}^2\theta \\ R_{\mu\nu} &= 0 \quad \text{cuando } \mu \neq \nu \end{aligned}$$

donde las primas denotan  $d/dr$ .

Las ecuaciones de campo requieren  $R_{\mu\nu} = 0$  para todos los índices, entonces  $R_{11} = 0$  y  $R_{00} = 0$  llevan a

$$A'' - A'B' + A'^2 - \frac{2B'}{r} = -e^{2A-2B} \left( A'' - A'B' + A'^2 + \frac{2A'}{r} \right)$$

y resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos que  $A' = -B'$ , lo que implica que

$$A = -B + k, \quad k = \text{cte.}$$

Haciendo uso de (1.6) y notando que con un cambio en la escala del tiempo,  $t \rightarrow e^{-k/2}t$ , se absorbe la  $k$  tendremos

$$A = -B \implies e^{2A} (1 + 2rA') = 1,$$

o bien,

$$(re^{2A})' = 1 \implies re^{2A} = r + \text{cte} \equiv r - K \implies e^{2A} = 1 - \frac{K}{r}$$

La constante  $K$  puede ser expresada en términos de la masa del cuerpo pidiendo que las leyes de Newton se satisfagan a largas distancias donde el campo es débil [1]. Es decir, deberíamos tener  $g_{00} = 1 + 2\varphi/c^2$ , donde el potencial tiene el valor newtoniano  $\varphi = -GM/r$ . Así  $K = 2GM/c^2$ , cuyas dimensiones son de longitud y es conocido como el radio gravitacional  $r_g$  del cuerpo:  $r_g = 2GM/c^2$ .

Y, sustituyendo en la ecuación (1.6), hemos obtenido la *métrica de Schwarzschild*:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (1.8)$$

En una situación normal, el radio físico  $r_b$  del cuerpo central es mucho más grande que  $r_g$  y el campo descrito por la métrica de Schwarzschild es válido sólo para  $r_g < r$ . Pero es posible, en astronomía, que el cuerpo esté en un gran estado de compresión tal que  $r_b < r_g$ , lo cual se conoce como agujero negro de Schwarzschild. El cuerpo central ocupa la región  $r_b < r_g$ , donde no es válida la métrica de Schwarzschild; para  $r_b < r \leq r_g$  no hay materia y se supondría que la métrica se aplica y para  $r_g < r$ , funciona sin dificultad. En la frontera, donde  $r = r_g$ , el coeficiente de  $dt^2$  vale cero y se tiene un valor infinito para el coeficiente  $dr^2$ , lo que constituye una singularidad [2].

La singularidad  $r = r_g$  es debida a las coordenadas elegidas y significa que el campo  $g$  se vuelve infinito. Un campo  $g$  infinito en una métrica estática quiere decir que una partícula que permanece en reposo debe tener una aceleración propia infinita, es decir, debe ser un fotón. La frontera  $r = r_g$  es el *horizonte de eventos*, el cual oculta el interior de un agujero negro para cualquier observador fuera de él que se encuentre en el espacio-tiempo; una vez que cualquier señal (o algún observador) haya cruzado el horizonte de eventos no hay forma de salir del agujero negro: ninguna señal puede viajar hacia afuera, sin embargo, el efecto del agujero negro sigue notándose en los alrededores debido a los efectos gravitacionales de éste. [2].

## 1.2. Relación con los agujeros negros

Consideremos una estrella esféricamente simétrica de radio  $r_g$ . El campo gravitacional de la estrella es representado por la solución de Schwarzschild para  $r > r_g$ . Durante su periodo de vida, la estrella genera

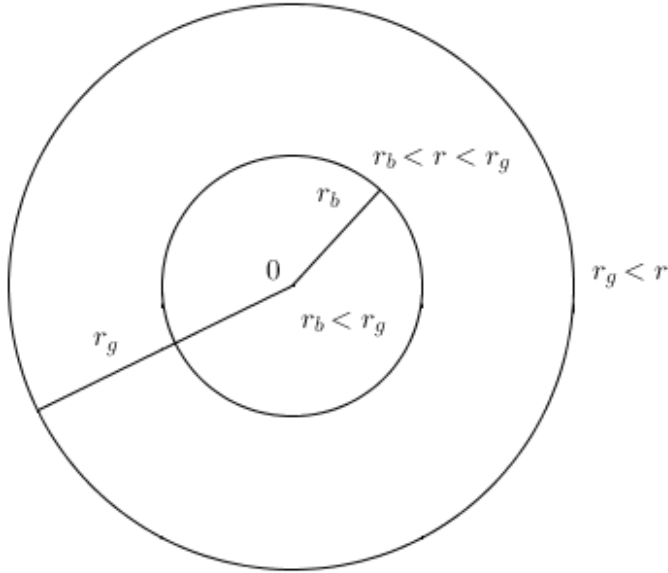


Figura 1.1: Métrica de Schwarzschild en diferentes regiones alrededor de una distribución de materia esféricamente simétrica. En las coordenadas de Schwarzschild, los conos de luz parecen cerrarse conforme nos acercamos a  $r_g$ .

energía mediante fusión nuclear en su interior. El hecho de que la estrella no se colapse debido a la gravedad es producto de la presión de la materia y la energía que emergen del interior. Cuando el combustible nuclear se agota, la estrella se contrae y, si es suficientemente masiva, las fuerzas gravitacionales superan la presión y la estrella se colapsa a un punto de densidad infinita en  $r = 0$ . El resultado será un agujero negro cuyo radio está determinado por  $r_g$ .

Fuera de la estrella, la métrica está dada por la solución de Schwarzschild y la superficie nula  $r = r_g$  aparece en el exterior de la estrella como la historia de un destello de luz emitida desde el centro de la misma. Si imaginamos un punto en la superficie de la estrella emitiendo destellos igualmente espaciados, entonces éstos serán vistos por un observador distante cada vez más separados en el tiempo, de forma que el destello emitido cuando la superficie cruza  $r = r_g$  estará retrasado infinitamente. Además, el destino de la estrella después de que cruza esta superficie es completamente inaccesible para un observador que permanece en el exterior [3]. De lo anterior podemos decir que ninguna partícula puede cruzar la superficie  $r = r_g$  viajando de dentro hacia afuera, lo que significa que cualquier observador en la región  $r > r_g$  no puede recibir información de los eventos que ocurren dentro de ésta.

Mientras que un observador en el exterior nunca ve a la estrella cruzar el horizonte de eventos, el corrimiento al rojo gravitacional hará que la estrella se vuelva oscura a una velocidad exponencial conforme se acerque al horizonte de eventos. Sin embargo, como la métrica externa es la solución de Schwarzschild, los planetas pueden seguir en órbita de la estrella colapsada puesto que aún se siente su influencia gravitacional. En este estado, la estrella se ha convertido en un agujero negro. Una vez que haya cruzado el horizonte, cualquier línea de mundo encontrará, inevitablemente, la singularidad  $r = 0$ . Cualquier observador que siga esa línea de mundo sería destruido por las intensas fuerzas de marea cerca de la singularidad [3].

### 1.3. Geodésicas y sus desviaciones

Las trayectorias de partículas con masa que se mueven en la vecindad de un objeto esférico masivo están dadas por geodésicas. Las ecuaciones (1.2) expresan la influencia de la gravedad sobre la partícula material: todo el primer miembro de esta ecuación tiene un carácter tensorial (respecto de cualquier transformación de coordenadas) pero los dos términos de dicho miembro, considerados por separado, no

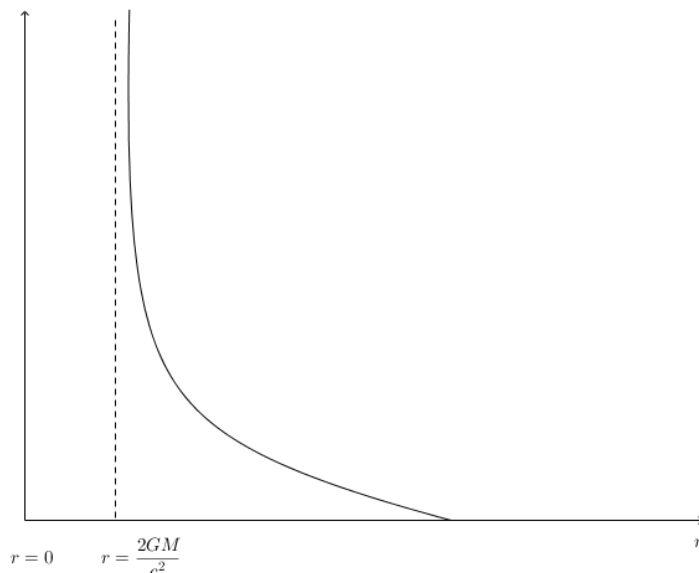


Figura 1.2: Un rayo de luz (o una partícula masiva) no tiene impedimento en alcanzar el radio  $r = r_g$  pero un observador muy lejano nunca podrá decir si es así. Si este último permanece fuera del agujero negro mientras un cuerpo cae dentro del mismo y manda algún tipo de señal durante su recorrido, el observador sólo verá que las señales llegan cada vez más lentamente.

tienen tal carácter. Análogamente a lo que sucede en las ecuaciones de Newton,  $\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} = -g^{\mu\nu} \Phi$ , el segundo término en la ecuación de la geodésica debería considerarse como la expresión de la fuerza gravitacional, como se mencionó antes.

Ahora, una geodésica está determinada cuando damos un punto  $P$  en ella y la dirección de la recta tangente en este punto. En este caso, en el que consideramos sólo el espacio en el exterior del cuerpo central, el punto  $P$  y la dirección de la tangente a él definirán, junto con el centro de simetría  $O$ , el plano del espacio tridimensional y será un plano de simetría de este espacio. Sin embargo estas geodésicas tienen que ver con la parte espacial para  $r > r_g$  y con la parte temporal para  $r < r_g$ . El vector tangente de la geodésica no puede cambiar de un vector temporal a uno espacial por lo que tendremos que las dos regiones ( $r > r_g$  y  $r < r_g$ ) no se unen suavemente en la superficie  $r = r_g$  [4].

Tomando los símbolos de Christoffel que no son cero podemos encontrar las componentes de la ecuación (1.2), que es la ecuación de la geodésica:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{ds^2} - \frac{1}{2} \nu' \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 - r e^\nu \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 - r e^\nu \sin^2 \theta \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{2} e^{2\nu} \nu' \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 &= 0 \\ \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\theta}{ds} - \sin \theta \cos \theta \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 &= 0 \\ \frac{d^2 \varphi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} \frac{d\theta}{d\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} &= 0 \\ \frac{d^2 t}{d\tau^2} + \nu' \frac{dr}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} &= 0. \end{aligned}$$

Sin embargo, esto podría significar que necesitamos calcular primero los 40 símbolos de Christoffel para hallar las ecuaciones de las geodésicas, pero no es así. Si consideramos  $L = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$ , la ecuación (1.1) será la ecuación de Euler-Lagrange[4],

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial (dx^\mu/d\tau)} - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0,$$

de forma que podemos obtener los símbolos de Christoffel a partir de la ecuación de la geodésica.

### 1.3.1. Desviación

En un espacio curvado deja de cumplirse la propiedad de la geometría euclidiana que asegura que si dos rectas son paralelas inicialmente continuarán siendo paralelas para siempre; en una esfera, por ejemplo, geodésicas inicialmente paralelas al meridiano se cruzarán en algún momento. Para ver esta condición partimos de curvas geodésicas inicialmente paralelas y observamos cómo se comportan mientras las recorremos.

Primero consideremos una familia de geodésicas que sean paralelas en un punto dado definidas por un solo parámetro  $\gamma_s(\tau)$ , donde  $\tau$  es un parámetro afín a lo largo de una curva; la colección de estas curvas define una superficie suave de dos dimensiones. Las coordenadas en esta superficie se escogen como  $\tau$  y  $s$  de forma que siga una familia de geodésicas que no se crucen [4][3]. Toda la superficie es el conjunto de puntos  $x^\alpha(\tau, s)$  y toda la familia de geodésicas está caracterizada por la ecuación

$$\frac{\partial x^\alpha(\tau, s)}{\partial \tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x(\tau, s)) \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} = 0. \quad (1.9)$$

que debe satisfacerse para toda  $\tau$  y  $s$  dentro de un rango específico. Para cada valor fijo de  $s$ , obtenemos la ecuación de la geodésica correspondiente a dicho valor, donde  $s$  etiqueta a las diferentes geodésicas.

Más aún, tenemos dos campos vectoriales naturales: los vectores tangentes a las geodésicas,

$$\xi^\alpha(\tau) = \frac{dx^\alpha(\tau, s)}{d\tau} \quad (1.10)$$

y los vectores de desviación

$$\eta^\alpha(\tau) = \frac{dx^\alpha(\tau, s)}{ds}, \quad (1.11)$$

donde  $\eta^\alpha(\tau)$  es un campo vectorial contravariante a lo largo de  $\gamma$  que mide el desplazamiento infinitesimal de geodésicas vecinas a  $\gamma$  conforme  $\tau$  cambia.

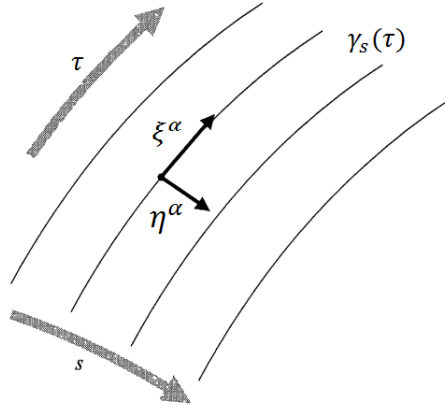


Figura 1.3: Un conjunto de geodésicas  $\gamma_s(\tau)$  con vectores tangentes  $\xi^\alpha$ . El campo vectorial  $\eta^\alpha$  mide la desviación entre geodésicas cercanas.

La forma en que  $\eta^\alpha(\tau)$  varía con respecto a  $\tau$  está determinada por la relación fundamental conocida como la *desviación geodésica* [2] [4] [3]

$$\frac{D^2 \eta^\alpha(\tau)}{D\tau^2} = R_{\mu\nu\delta}^\alpha(x(\tau)) \xi^\mu \xi^\nu \eta^\delta, \quad (1.12)$$

que expresa que la aceleración relativa entre dos geodésicas vecinas es proporcional a la curvatura; es decir, que la aceleración con la que se separan estas geodésicas es proporcional a la curvatura del espacio tiempo. Físicamente, esta aceleración es interpretada como una manifestación de las fuerzas de marea gravitacionales.

## Capítulo 2

# Resolviendo el problema

*If only it weren't so damnably difficult to find exact solutions!*

**Albert Einstein**

Para la métrica de Schwarzschild, las componentes del tensor métrico que son distintas de cero son:

$$g_{00} = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \quad (2.1)$$

$$g_{11} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \quad (2.2)$$

$$g_{22} = r^2 \quad (2.3)$$

$$g_{33} = r^2 \text{sen}^2 \theta \quad (2.4)$$

De modo que la lagrangiana estará dada por:

$$\begin{aligned} L &= g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \\ &= -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \\ &\quad + r^2 \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Ésta no representa la lagrangiana de un fotón porque, si así lo fuera,  $L$  sería cero.

De la ec. (2.5) obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$-\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dt}{d\tau}\right)} \right) = 0 \quad (2.6)$$

$$-\frac{\partial L}{\partial r} + \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dr}{d\tau}\right)} \right) = 0 \quad (2.7)$$

$$-\frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)} \right) = 0 \quad (2.8)$$

$$-\frac{\partial L}{\partial \phi} + \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)} \right) = 0. \quad (2.9)$$

De la ecuación (2.6), como  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ ,

$$0 = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{dt}{d\tau} \right)} \right) = \frac{d}{d\tau} \left[ -2 \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} \right] \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} &= -2 \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right) \frac{d^2 t}{d\tau^2} - \frac{2r_g}{r^2} \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} \\ \implies 0 &= \frac{d^2 t}{d\tau^2} + \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right)^{-1} \frac{r_g}{r^2} \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Para la ecuación radial, ec. (2.7), tendremos:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial L}{\partial r} + \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{dr}{d\tau} \right)} \right) \\ &= \frac{d}{d\tau} \left[ 2 \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right)^{-1} \frac{dr}{d\tau} \right] \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial r} \left[ - \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right) \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 + \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right)^{-1} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \right] \\ &= \frac{d}{d\tau} \left[ 2 \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right)^{-1} \frac{dr}{d\tau} \right] + \frac{r_g}{r^2} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial r} \left[ \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right)^{-1} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 \right] - 2r \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 - 2r \text{sen}^2 \theta \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \\ &= 2 \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right)^{-1} \frac{d^2 r}{d\tau^2} - \frac{2r_g}{r^2} \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right)^{-2} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 \\ &\quad + \frac{r_g}{r^2} \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right)^{-2} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \frac{r_g}{r^2} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 - 2r \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 - 2r \text{sen}^2 \theta \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \\ \implies 0 &= \frac{d^2 r}{d\tau^2} - \frac{r_g}{2r^2} \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right)^{-1} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \frac{r_g}{2r^2} \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right) \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 \\ &\quad - r \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right) \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 - r \text{sen}^2 \theta \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right) \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

De la ecuación (2.8) tendremos:

$$0 = -\frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)} \right) = -\frac{\partial}{\partial \theta} \left[ r^2 \text{sen}^2 \theta \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \right] + \frac{d}{d\tau} \left( 2r^2 \frac{d\theta}{d\tau} \right) \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} &= -2r^2 \text{sen} \theta \cos \theta \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 + 2r^2 \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + 4r \frac{dr}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} \\ \implies 0 &= \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} - \text{sen} \theta \cos \theta \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Y de la última ecuación, ec.(2.9), como  $\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$ ,

$$0 = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)} \right) = \frac{d}{d\tau} \left( 2r^2 \text{sen}^2 \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right) \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} &= 2r^2 \text{sen}^2 \theta \frac{d^2 \phi}{d\tau^2} + \frac{d\phi}{d\tau} \left[ 4r^2 \text{sen} \theta \cos \theta \frac{d\theta}{d\tau} + 4r \text{sen}^2 \theta \frac{dr}{d\tau} \right] \\ \implies 0 &= \frac{d^2 \phi}{d\tau^2} + 2 \frac{\cos \theta}{\text{sen} \theta} \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} \end{aligned} \quad (2.16)$$



## CAPÍTULO 2. RESOLVIENDO EL PROBLEMA

Así, comparando las ecuaciones (2.11), (2.12), (2.14) y (2.16) con (1.2), los símbolos de Christoffel serán:

$$\begin{aligned}\Gamma_{01}^0 &= \frac{r_g}{2r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} = \Gamma_{10}^0 \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{r_g}{2r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \\ \Gamma_{11}^1 &= -\frac{r_g}{2r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \\ \Gamma_{22}^1 &= -r \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \\ \Gamma_{33}^1 &= -r \operatorname{sen}^2 \theta \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r} = \Gamma_{21}^2 \\ \Gamma_{33}^2 &= -\operatorname{sen} \theta \cos \theta \\ \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{r} = \Gamma_{13}^3 \\ \Gamma_{32}^3 &= \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} = \Gamma_{23}^3\end{aligned}$$

y todas las demás son cero.

Al sustituir los símbolos de Christoffel en la ecuación (1.7) tendremos que las componentes del tensor de Riemann correspondientes son:

$$R^0_{101} = \partial_r \Gamma_{10}^0 - \Gamma_{01}^0 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{01}^0 \Gamma_{10}^0 = \frac{r_g}{r^3} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} = -R^0_{110} \quad (2.17)$$

$$R^1_{001} = -\partial_r \Gamma_{00}^1 - \Gamma_{00}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{01}^0 = \frac{r_g}{r^3} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) = -R^1_{010} \quad (2.18)$$

$$R^0_{202} = \Gamma_{22}^1 \Gamma_{01}^0 = -\frac{r_g}{2r} = -R^0_{220} \quad (2.19)$$

$$R^2_{002} = -\Gamma_{00}^1 \Gamma_{21}^2 = -\frac{r_g}{2r^3} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) = -R^2_{020} \quad (2.20)$$

$$R^0_{303} = \Gamma_{33}^1 \Gamma_{01}^0 = -\frac{r_g}{2r} \operatorname{sen}^2 \theta = -R^0_{330} \quad (2.21)$$

$$R^3_{003} = -\Gamma_{00}^1 \Gamma_{31}^3 = -\frac{r_g}{2r^3} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) = -R^3_{030} \quad (2.22)$$

$$R^1_{313} = \partial_r \Gamma_{33}^1 - \Gamma_{33}^1 \Gamma_{31}^3 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{11}^1 = -\frac{r_g}{2r} \operatorname{sen}^2 \theta = -R^1_{331} \quad (2.23)$$

$$R^3_{113} = \partial_r \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{31}^3 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{31}^3 \Gamma_{13}^3 = \frac{r_g}{2r^3} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} = -R^3_{131} \quad (2.24)$$

$$R^1_{212} = \partial_r \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 = -\frac{r_g}{2r} = -R^1_{221} \quad (2.25)$$

$$R^2_{112} = \partial_r \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{12}^2 = \frac{r_g}{2r^3} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} = -R^2_{121} \quad (2.26)$$

$$R^2_{323} = \partial_\theta \Gamma_{33}^2 - \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{21}^2 = \frac{r_g}{r} \operatorname{sen}^2 \theta = -R^2_{332} \quad (2.27)$$

$$R^3_{223} = \partial_\theta \Gamma_{23}^3 - \Gamma_{22}^3 \Gamma_{31}^3 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{32}^3 = -\frac{r_g}{r} = -R^3_{232} \quad (2.28)$$

Pero usando que  $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\eta} R^n_{\beta\gamma\delta}$  podemos reescribir las componentes del tensor de curvatura

como:

$$R_{0101} = -\frac{r_g}{r^3} \quad (2.29)$$

$$R_{0202} = \frac{r_g}{2r} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \quad (2.30)$$

$$R_{0303} = \frac{r_g}{2rr_g} \text{sen}^2\theta \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \quad (2.31)$$

$$R_{1313} = -\frac{r_g}{2r} \text{sen}^2\theta \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \quad (2.32)$$

$$R_{1212} = -\frac{r_g}{2r} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \quad (2.33)$$

$$R_{2323} = r_g r \text{sen}^2\theta. \quad (2.34)$$

Ahora necesitamos encontrar la ecuación de la geodésica y, usando las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenidas anteriormente, tendremos que de la ecuación (2.10)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dt}{d\tau}\right)} \right) = \frac{d}{d\tau} \left[ -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} \right] \\ \implies \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} &= cte \\ \implies \frac{dt}{d\tau} &= \frac{cte}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} \equiv \frac{\varepsilon}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} \end{aligned}$$

Esta primera integral de la ecuación de la geodésica está relacionada con la conservación de la energía de una partícula moviéndose en un campo independiente del tiempo siempre que consideremos  $\varepsilon$  como la energía.

De la ecuación (2.15), como  $\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)} \right) = \frac{d}{d\tau} \left( r^2 \text{sen}^2\theta \frac{d\phi}{d\tau} \right) \\ \implies r^2 \text{sen}^2\theta \frac{d\phi}{d\tau} &= cte \\ \implies \frac{d\phi}{d\tau} &= \frac{cte}{r^2 \text{sen}^2\theta} \equiv \frac{l}{r^2 \text{sen}^2\theta} \end{aligned}$$

Esta ecuación es, esencialmente la ley de conservación del momento angular de la partícula al relacionar  $l$  con el momento angular de la partícula. Tal ley de conservación es válida de forma más general para cualquier campo que tenga un eje de simetría.

De la tercera ecuación, (2.13), tendremos:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)} \right) \\ &= r^2 \text{sen} \theta \cos \theta \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 - \frac{d}{d\tau} \left( r^2 \frac{d\theta}{d\tau} \right) \\ &= \frac{l^2 \cot \theta}{r^2 \text{sen}^2\theta} - \frac{d}{d\tau} \left( r^2 \frac{d\theta}{d\tau} \right) \\ \implies \frac{d}{d\tau} \left( r^2 \frac{d\theta}{d\tau} \right) &= \frac{l^2 \cot \theta}{r^2 \text{sen}^2\theta} \end{aligned}$$

Y para resolver la ecuación radial es preferible aprovechar que  $L$  se conserva, entonces:

$$\begin{aligned}
 & -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \\
 &= -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{\varepsilon}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}\right)^2 + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \\
 &= -\frac{\varepsilon^2}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} + \frac{1}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = cte \equiv -m_0^2
 \end{aligned}$$

y suponiendo  $-m_0^2 = -1$  nos quedará

$$\begin{aligned}
 -\varepsilon^2 + \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 &= -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \\
 \implies \frac{dr}{d\tau} &= \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 1 + \frac{r_g}{r}}
 \end{aligned}$$

Con lo anterior, podemos construir la base "propia" del observador,  $e_{(\alpha)}^\mu$ , cuyos vectores base estarán dados por:

$$\begin{aligned}
 e_{(0)} &= \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{dr}{d\tau}, 0, 0\right) \\
 e_{(1)} &= (a, b, 0, 0) \\
 e_{(2)} &= (0, 0, A, 0) \\
 e_{(3)} &= (0, 0, 0, B)
 \end{aligned}$$

y deberán cumplir las siguientes condiciones:

$$g_{\mu\nu} e_{(0)}^\mu e_{(1)}^\nu = 0 \tag{2.35}$$

$$g_{\mu\nu} e_{(1)}^\mu e_{(1)}^\nu = 1 \tag{2.36}$$

$$g_{\mu\nu} e_{(0)}^\mu e_{(0)}^\nu = -1 \tag{2.37}$$

$$g_{\mu\nu} e_{(2)}^\mu e_{(2)}^\nu = 1 \tag{2.38}$$

$$g_{\mu\nu} e_{(3)}^\mu e_{(3)}^\nu = 1 \tag{2.39}$$

Luego, con las condiciones (2.35) y (2.36) tendremos:

$$0 = g_{00} e_{(0)}^0 e_{(1)}^0 + g_{11} e_{(0)}^1 e_{(1)}^1 = g_{00} \frac{dt}{d\tau} a + g_{11} \frac{dr}{d\tau} b \tag{2.40}$$

$$1 = g_{00} e_{(1)}^0 e_{(1)}^0 + g_{11} e_{(1)}^1 e_{(1)}^1 = g_{00} a^2 + g_{11} b^2 \tag{2.41}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones nos queda que

$$a = \pm \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - 1 + \frac{r_g}{r}}}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} \quad \text{y} \quad b = \pm \varepsilon$$

Además, de las condiciones (2.38) y (2.39):

$$1 = g_{22} e_{(2)}^2 e_{(2)}^2 = g_{22} A^2 \implies A = \pm \frac{1}{r}$$

$$1 = g_{33} e_{(3)}^3 e_{(3)}^3 = g_{33} B^2 \implies B = \pm \frac{1}{r \sin \theta}$$

De forma que los vectores base serán:

$$\begin{aligned}
 e_{(0)} &= \left( \frac{\varepsilon}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}, \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 1 + \frac{r_g}{r}}, 0, 0 \right) = \left( \frac{\varepsilon}{T}, \pm N, 0, 0 \right) \\
 e_{(1)} &= \left( \pm \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - 1 + \frac{r_g}{r}}}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}, \pm \varepsilon, 0, 0 \right) = \left( \pm \frac{N}{T}, \pm \varepsilon, 0, 0 \right) \\
 e_{(2)} &= \left( 0, 0, \pm \frac{1}{r}, 0 \right) \\
 e_{(3)} &= \left( 0, 0, 0, \pm \frac{1}{r \sin \theta} \right),
 \end{aligned}$$

tomando

$$T := \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \quad \text{y} \quad N := \sqrt{\varepsilon^2 - 1 + \frac{r_g}{r}} = \sqrt{\varepsilon^2 - T}$$

para simplificar los cálculos.

Elijamos  $e_{(2)}$  y  $e_{(3)}$  de forma que ambos sean positivos cuando  $r$  y  $\sin \theta$  lo sean. Luego,  $e_{(0)}$  es negativo puesto que  $r$  disminuye conforme  $\tau$  crece. Así, para que la ecuación (2.40) se satisfaga,  $a$  y  $b$  deben tener signo contrario; como  $e_{(0)}$  depende de  $dr/d\tau$  y éste es negativo, elijámosla de forma que  $a$  sea positiva, lo que implica que  $b$  sea negativa. Con estas condiciones, obtendremos que los vectores base son:

$$\begin{aligned}
 e_{(0)} &= \left( \frac{\varepsilon}{T}, -N, 0, 0 \right) \\
 e_{(1)} &= \left( \frac{N}{T}, -\varepsilon, 0, 0 \right) \\
 e_{(2)} &= \left( 0, 0, \frac{1}{r}, 0 \right) \\
 e_{(3)} &= \left( 0, 0, 0, \frac{1}{r \sin \theta} \right),
 \end{aligned}$$

Resta calcular el cambio de base del tensor de curvatura que ya tenemos y, para ello usamos que

$$R_{(\mu)(\nu)(\lambda)(\rho)} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{(\mu)}^\alpha e_{(\nu)}^\beta e_{(\lambda)}^\gamma e_{(\rho)}^\delta \quad (2.42)$$

Entonces, sustituyendo las componentes (2.29) - (2.34) y usando las relaciones para los vectores base en (2.42) tendremos:

$$R_{(0)(1)(0)(1)} = -\frac{r_g}{r^3} = R_{(1)(0)(1)(0)} \quad (2.43)$$

$$R_{(0)(2)(0)(2)} = \frac{r_g}{2r^3} = R_{(2)(0)(2)(0)} \quad (2.44)$$

$$R_{(0)(3)(0)(3)} = \frac{r_g}{2r^3} = R_{(3)(0)(3)(0)} \quad (2.45)$$

$$R_{(1)(2)(1)(2)} = -\frac{r_g}{2r^3} = R_{(2)(1)(2)(1)} \quad (2.46)$$

$$R_{(1)(3)(1)(3)} = -\frac{r_g}{2r^3} = R_{(3)(1)(3)(1)} \quad (2.47)$$

$$R_{(2)(3)(2)(3)} = \frac{r_g}{r^3} = R_{(3)(2)(3)(2)} \quad (2.48)$$

Notemos que las componentes (2.43) - (2.48) del tensor de curvatura vistas desde el marco de referencia del observador no tienen algo de especial; la única singularidad será en  $r = 0$ . Además, estas componentes no dependen de las condiciones iniciales (no dependen de  $\varepsilon$ ).

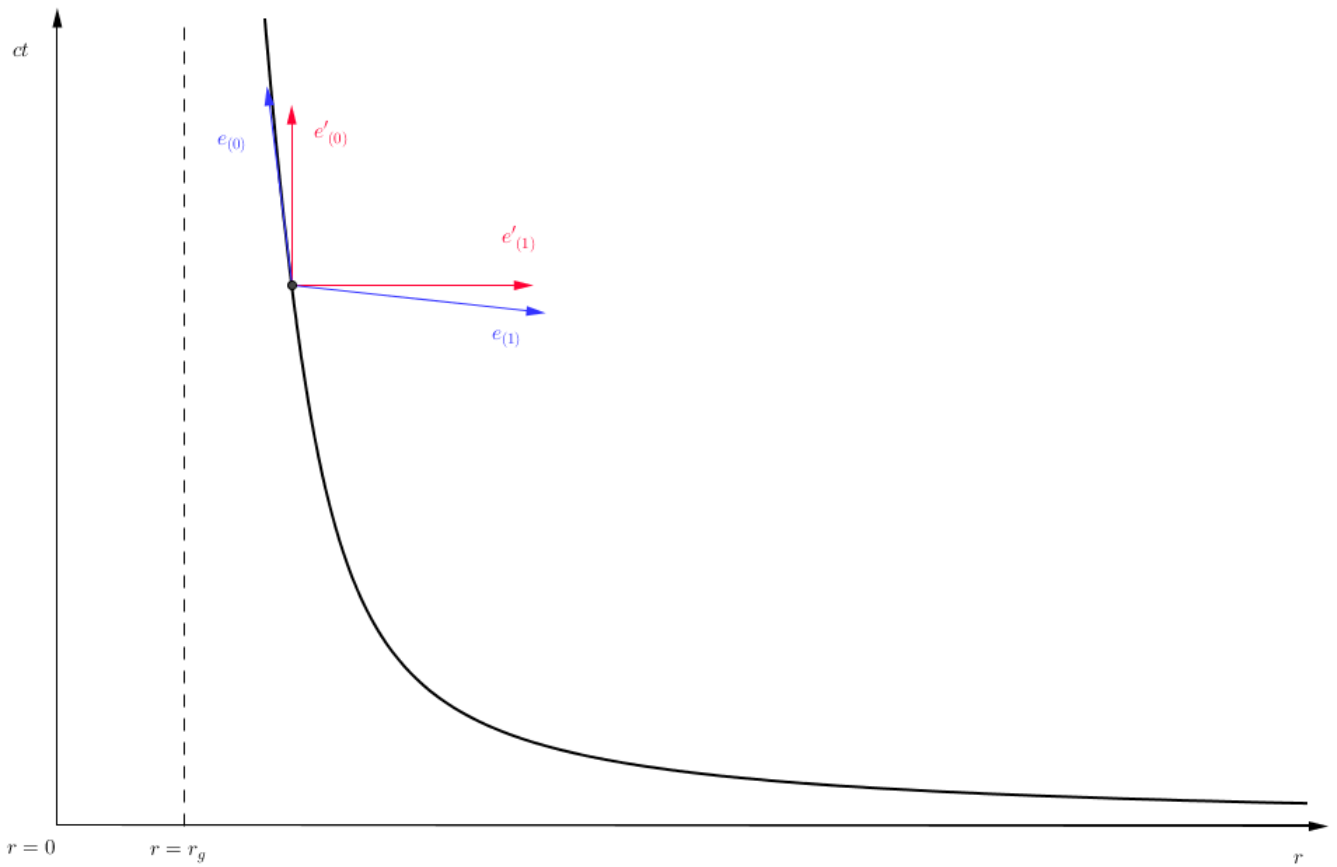


Figura 2.1: Representación del cambio de base. Los ejes en azul representan el marco de referencia formado por la nueva base y el rojo, el formado por la base original.

## 2.1. Análisis

Para ver los efectos de la desviación de las geodésicas, tomemos la ec. (1.12) y sustituyamos las componentes del tensor de Riemann que hemos calculado:

$$\begin{aligned}\frac{D^2\eta^{(1)}(\tau)}{D\tau^2} &= -R^{(1)}{}_{(0)(0)(1)}\xi^{(0)}\xi^{(0)}\eta^{(1)} \\ &= \frac{r_g}{r^3}\xi^{(0)}\xi^{(0)}\eta^{(1)}\end{aligned}\quad (2.49)$$

$$\begin{aligned}\frac{D^2\eta^{(2)}(\tau)}{D\tau^2} &= -R^{(2)}{}_{(0)(0)(2)}\xi^{(0)}\xi^{(0)}\eta^{(2)} - R^{(2)}{}_{(1)(1)(2)}\xi^{(1)}\xi^{(1)}\eta^{(2)} \\ &= \frac{r_g}{2r^3}\left[-\xi^{(0)}\xi^{(0)}\eta^{(2)} + \xi^{(1)}\xi^{(1)}\eta^{(2)}\right]\end{aligned}\quad (2.50)$$

$$\begin{aligned}\frac{D^2\eta^{(3)}(\tau)}{D\tau^2} &= -R^{(3)}{}_{(0)(0)(3)}\xi^{(0)}\xi^{(0)}\eta^{(3)} - R^{(3)}{}_{(1)(1)(3)}\xi^{(1)}\xi^{(1)}\eta^{(3)} - R^{(3)}{}_{(2)(2)(3)}\xi^{(2)}\xi^{(2)}\eta^{(3)} \\ &= \frac{r_g}{2r^3}\left[-\xi^{(0)}\xi^{(0)}\eta^{(3)} + \xi^{(1)}\xi^{(1)}\eta^{(3)} - \xi^{(2)}\xi^{(2)}\eta^{(3)}\right]\end{aligned}\quad (2.51)$$

Sin embargo,  $-c^2 = g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta$ , entonces  $\xi^{(0)} = c$  y todas las demás  $\xi^{(i)}$  son cero porque, de la ecuación (1.10), vemos que  $\xi^\mu$  es tangente a la geodésica del observador. Tomando en cuenta esto, las desviaciones son:

$$\frac{D^2\eta^{(1)}(\tau)}{D\tau^2} = \frac{r_g}{r}c^2\eta^{(1)}\quad (2.52)$$

$$\frac{D^2\eta^{(2)}(\tau)}{D\tau^2} = -\frac{r_g}{2r}c^2\eta^{(2)}\quad (2.53)$$

$$\frac{D^2\eta^{(3)}(\tau)}{D\tau^2} = -\frac{r_g}{2r}c^2\eta^{(3)}.\quad (2.54)$$

La ecuación (2.52) muestra que en la dirección radial (porque  $e^{(1)}$  es radial) existe una aceleración con la que dos partículas que viajan con el observador tenderían a alejarse, mientras que las otras dos ecuaciones muestran que, en las direcciones perpendiculares a la dirección radial, hay una aceleración que tiende a acercar a estas partículas en las direcciones angulares.

Para tener una idea de qué tan grandes son estas aceleraciones, pensemos en un agujero negro de cinco masas solares, es decir,  $\frac{2GM}{c^2} \approx 15\text{km}$ . Si  $r$  es del orden de este radio gravitacional entonces

$$\frac{D^2\eta^{(1)}(\tau)}{D\tau^2} = \frac{r_g}{r}c^2\eta^{(1)} = \frac{15\text{ km}}{(15\text{ km})^3}\left(3 \times 10^5 \frac{\text{km}}{\text{s}}\right)^2\eta^{(1)} \approx \frac{1,33 \times 10^8}{s^2}\eta^{(1)},$$

con  $\eta^{(1)}$  tendiendo unidades de longitud.

Las otras dos aceleraciones serán la mitad de la radial (y en dirección perpendicular a ésta) pero, a pesar de ello, seguirán siendo muy grandes.

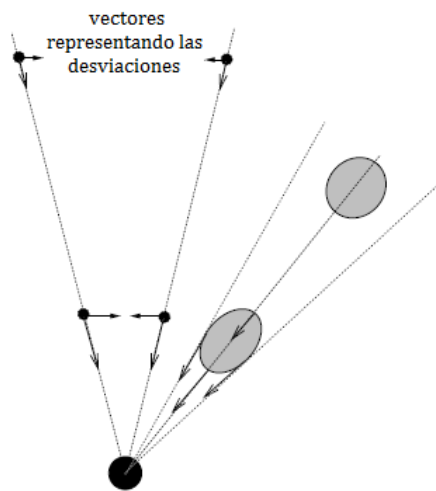


Figura 2.2: Fuerzas de marea en un campo gravitacional de simetría esférica.





# Conclusiones

Las ecuaciones (2.52) - (2.55) muestran que, desde el marco de referencia del observador, dos partículas que caen con él, estarán aceleradas tanto en la dirección radial como en las perpendiculares a la radial pero los signos nos muestran que, en la dirección radial, esta aceleración separará a las partículas y, en las direcciones perpendiculares a la radial, la aceleración que sentirán las partículas será atractiva. Además, que una sea el doble de las otras, nos lleva a concluir que la aceleración radial será mayor que las aceleraciones perpendiculares a ésta.

Vemos que los efectos experimentados por el observador que cae libremente en forma radial a un agujero negro sin rotación no es alguno en especial debido a que será un efecto gradual: conforme nos acerquemos a la singularidad ( $r = 0$ ), estas aceleraciones serán mayores.



# Bibliografía

- [1] Rindler, W., *Relativity. Special, General, and Cosmological*, Segunda Edición, Oxford University Press, 2006.
- [2] Chow, T.L., *Gravity, Black Holes, and the Very Early Universe. An Introduction to General Relativity and Cosmology*, Springer, 2008.
- [3] Carroll, S., *Spacetime and geometry. An introduction to General Relativity*, Addison-Wesley, 2004.
- [4] Hughston, L.P, Tod, K.P., *An Introduction to General Relativity*, Cambridge University Press, 1990.
- [5] Papapetrou, A., *Lectures on General Relativity*, Reidel, 1974.
- [6] Einstein, Albert, *El significado de la relatividad*, Origen/Planeta, 1985, trad. cast. Carlos E. Prélat.
- [7] Galilei, Galileo, *Dialogue Concerning the Two Chief World Systems*, 1632, trad. ing. de Stillman Drake, p.186.