



# BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS  
POSTGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

## REPRESENTACIONES DEL CONJUNTO FACTIBLE Y ESTABILIDAD DEL PROBLEMA DUAL EN PROGRAMACIÓN LINEAL SEMI-INFINITA

Tesis que para obtener el grado de  
**Doctor en Ciencias Matemáticas**

Presenta  
**Lidia Aurora Hernández Rebollar**

Director de Tesis  
**Dr. Maxim Ivanov Todorov**

H. Puebla de Z., Septiembre de 2004

## *AGRADECIMIENTOS*

*Agradezco al Dr. Maxim I. Todorov su paciencia al guiarme con gran sabiduría por el camino de la investigación en matemáticas, el haber puesto a mi alcance toda su experiencia en el área de la programación lineal semi-infinita y su amistad incondicional. Al Dr. Miguel Angel Goberna por su interés en nuestro trabajo de maestría y su invaluable aportación en la continuación del mismo, gracias por la redacción de dos artículos. A la Dra. Soraya Gómez por la organización de los seminarios donde presentamos las ideas de esta tesis y por su amistad. A los profesores del posgrado. Al personal administrativo de la FCFM por su trato amable y su disponibilidad. Al CONACYT por la beca con la que sostuve este trabajo. A mi esposo y a mi hijo por acompañarme siempre y por su amor.*

# ÍNDICE GENERAL

<b>Prefacio</b>	<b>iii</b>
<b>Capítulo I: Representaciones del Conjunto Factible</b>	
<b>1.1 Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1.2 Sistemas de desigualdades lineales Semi-infinitos</b>	<b>3</b>
<b>1.3 Sistemas de desigualdades lineales Analíticos</b>	<b>7</b>
<b>1.4 Representación Polinomial de grado mínimo</b>	<b>15</b>
<b>1.5 Conjuntos en el Plano con Representación Suave</b>	<b>24</b>
<b>Capítulo II: Continuidad del Mapeo Optimal Dual</b>	
<b>2.1 Introducción</b>	<b>38</b>
<b>2.2 Estabilidad del Problema Primario</b>	<b>44</b>
<b>2.3 Estabilidad del Problema Dual</b>	<b>46</b>
<b>2.4 Continuidad del Mapeo Optimal Dual</b>	<b>53</b>
<b>Capítulo III: Estabilidad del Problema Dual</b>	
<b>Introducción</b>	<b>57</b>
<b>3.1 Algunos Resultados sobre <math>\text{int } \Pi_s</math> y <math>\Pi_s^D</math></b>	<b>58</b>
<b>3.2 Ejemplos Patológicos</b>	<b>61</b>
<b>3.3 Partición de <math>\Pi_s</math></b>	<b>70</b>
<b>Conclusiones</b>	<b>76</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>77</b>

# PREFACIO

Este trabajo se compone principalmente de dos partes. En la primera de ellas hablamos de la representación del conjunto factible primario en programación lineal semi-infinita, la cual tiene que ver con la propiedad que tiene todo conjunto convexo y cerrado para ser representado por medio de un sistema de desigualdades lineales con coeficientes continuos. En la segunda parte abordamos el tema de la estabilidad en el problema dual, en donde buscamos condiciones para que el problema permanezca soluble cuando este es modificado con pequeñas perturbaciones en todos sus datos. Ambos temas, aunque relacionados por pertenecer a la programación lineal semi-infinita, se separan por referirse, el primero, al conjunto factible del problema primario, y el segundo, al conjunto de soluciones del problema dual. Cuando el conjunto factible del problema primario tiene una representación polinomial o al menos analítica tenemos que nuestro problema pertenece al caso continuo, donde, si este es soluble y estable, también tiene solución dual, ver [27]. En la parte dos consideramos el caso más general; sin condiciones sobre las funciones coeficientes y sin una estructura topológica sobre el conjunto de índices. Los dos temas son muy interesantes y me parece que con este trabajo hacemos aportaciones muy importantes; en el primero de los temas, por ejemplo, damos condiciones suficientes para que un conjunto convexo y cerrado admita representación suave, es decir, no sólo buscamos que los coeficientes sean continuos, sino analíticos o, aún más, polinomiales, y, cuando la representación es polinomial, tenemos los elementos ahora para determinar el grado mínimo de tal representación, tales resultados constituyen el artículo [15] de próxima aparición. La parte dos está constituida por los Capítulos 2 y 3. En el Capítulo 2 presentamos resultados sobre la continuidad del mapeo optimal dual, específicamente, sobre la semicontinuidad inferior y la acotación uniforme de este mapeo. En el Capítulo 3 no hemos podido encontrar las condiciones para que el problema dual sea estable en el sentido soluble, pero a cambio de esto, encontramos que en el conjunto de problemas primarios estables solubles, existe un subconjunto donde el conjunto de problemas duales solubles, es denso, y finalmente, damos un ejemplo con el cual queda clara una partición del conjunto de problemas primarios solubles. Los resultados del último capítulo han sido enviados para su publicación, ver [20].

Creemos que todavía hay mucho por hacer en las dos direcciones, especialmente en la segunda, donde queda pendiente la caracterización del interior del conjunto de problemas duales solubles. Una de las dificultades para conseguir esta caracterización es que hemos trabajado con el espacio de sucesiones finitas generalizadas, el cual no es completo con las tres normas más usuales. Definir una topología con la cual el espacio de sucesiones finitas generalizadas sea completo parece ser el camino a seguir para la caracterización del interior del conjunto de problemas duales solubles.

# CAPÍTULO I: Representaciones del Conjunto Factible

## 1.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo presento resultados recientes sobre la representación analítica y polinomial de conjuntos convexos y cerrados en el plano. En un trabajo previo, ver [19], presenté algunos conjuntos convexos y cerrados en el plano que admiten una representación polinomial, y el ejemplo de un conjunto en el plano que admite una representación analítica pero no una polinomial, con lo cual se demuestra que este tipo de conjuntos no forman una misma clase, ver [16]. Inicio este capítulo con un resumen acerca de los sistemas de desigualdades lineales semi-infinitos, donde resalto aquellos que tienen coeficientes analíticos o polinomiales, resumiré lo que se conoce hasta ahora acerca de la representabilidad de conjuntos convexos y cerrados mediante este tipo de sistemas de desigualdades, y finalmente, presento los siguientes resultados, los cuales serán publicados en [15]: la representación polinomial de grado mínimo para poliedros en  $\mathbb{R}^n$ , una condición suficiente para que un conjunto convexo y cerrado en  $\mathbb{R}^n$  admita una representación analítica o polinomial, la definición de una familia de conjuntos convexos y cerrados en el plano que admiten una representación polinomial, y, además, el grado mínimo de dicha representación. Para caracterizar a aquellos conjuntos que admiten una representación analítica, Jaume en [21] y Puente en [24], obtuvieron condiciones necesarias restrictivas, pero el problema en general, continúa abierto. Las primeras aportaciones en esta dirección fueron reportadas por Goberna, M.A., López, M.A, y Todorov, M.I. en [11], donde demostraron que todo poliedro convexo admite una representación

polinomial, mientras que las bolas cerradas en  $\mathbb{R}^n$  admiten una representación analítica si y sólo si  $n \leq 2$ . También dieron ejemplos de conjuntos convexos y cerrados en el plano que no admiten representación analítica. Este trabajo complementa los anteriores, al generalizar algunos resultados y al proporcionar el grado mínimo de una representación polinomial, tanto para conjuntos poliedros como no poliedros.

La notación necesaria para este capítulo es: el elemento nulo, la bola unitaria cerrada y la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^n$  serán denotados por  $0_n$ ,  $B_n$  y  $S_n$ , respectivamente. Dado un conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $X \neq \emptyset$ , denotaremos por  $\text{span } X$ ,  $\text{cone } X$ ,  $\text{bd } X$ , e  $\text{int } X$ , al subespacio lineal generado por  $X$ , la envoltura cónica convexa de  $X$ , la frontera de  $X$ , y el interior de  $X$ , respectivamente;  $\text{rint } X$ , denota el interior relativo de  $X$ , la dimensión de un conjunto convexo será  $\text{dim } X$ , y su cono de recesión  $0^+X$ . Dada una función convexa  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  denotaremos por  $\text{dom } f$  a su dominio efectivo, por  $\text{epi } f$  su epígrafo y por  $\partial f(x)$  el subdiferencial de  $f$  en  $x \in \mathbb{R}^n$ , para las definiciones de estos conceptos se puede ver, por ejemplo, [22]. El símbolo  $\mathbb{R}[x]$ , lo usaremos para denotar al espacio lineal de los polinomios con coeficientes reales; dado un polinomio no cero  $p \in \mathbb{R}[x]$ , denotaremos por  $\text{deg } p$  al grado de  $p$ , y definimos  $\text{deg } 0 = -\infty$ .

## 1.2 SISTEMAS DE DESIGUALDADES LINEALES SEMI-INFINITOS

**Definición 1.2.1.** *Un sistema de desigualdades  $\sigma = \{a_t'x \geq b_t, t \in T\}$ , donde  $T$  es un conjunto arbitrario posiblemente infinito,  $b_t = b(t) \in \mathbb{R}$  y  $a_t = a(t) = (a_1(t), \dots, a_n(t))' \in \mathbb{R}^n$  están definidos para todo  $t \in T$ , es llamado lineal semi-infinito. El sistema  $\sigma$  es continuo si  $T$  es un espacio de Hausdorff compacto y todos los coeficientes  $a_1(\cdot), \dots, a_n(\cdot)$  y  $b(\cdot)$  son funciones continuas sobre  $T$ .*

Estos sistemas surgen de manera natural como restricciones en problemas de programación lineal semi-infinita (PLSI), los cuales son problemas de optimización con función objetivo y restricciones lineales, con la característica adicional de que el número de restricciones puede ser infinito. Este tipo de problemas pueden formularse en  $\mathbb{R}^n$  como

$$\begin{aligned} \text{(P)} \quad & \inf \quad c'x \\ & \text{s.a.} \quad a_t'x \geq b_t, \quad t \in T. \end{aligned}$$

donde  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $T$  es un conjunto de índices, posiblemente infinito,  $a_t = a(t) = (a_1(t), \dots, a_n(t))' \in \mathbb{R}^n$ , y  $b_t = b(t) \in \mathbb{R}$ .

Una variedad de problemas donde se aplica PLSI y donde el sistema de restricciones es continuo pueden conocerse en los capítulos 1 y 2 de [12]. La importancia de los sistemas continuos en esta área se debe también a los algoritmos propuestos para su solución, la propiedad de continuidad es fundamental para garantizar la convergencia en los algoritmos de discretización. El ejemplo 1.2.1, es un problema de optimización en el campo de la aproximación funcional con sistema de restricciones

continuo.

**Ejemplo 1.2.1** Sean  $\{f, v_1, \dots, v_n\} \subset C(T)$ , con  $T$  un intervalo compacto de  $\mathbb{R}$  dado. La función  $\sum_{i=1}^n \bar{x}_i v_i$  es la mejor  $L_1$  aproximación por arriba de  $f$  en  $T$ , por medio de combinaciones lineales de  $\{v_1, \dots, v_n\}$ , si y sólo si,  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  es la solución óptima de

$$\begin{aligned} \text{(P)} \quad & \text{Min } c'x \\ \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^n v_i(t)\bar{x}_i \geq f(t), \quad t \in T, \end{aligned}$$

donde  $c_i = \int_T v_i(t)dt$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Definición 1.2.2.** El conjunto factible  $F$  del sistema  $\sigma = \{a_t'x \geq b_t, t \in T\}$ , es el conjunto de vectores en  $\mathbb{R}^n$  que satisfacen todas las desigualdades del sistema  $\sigma$  :

$$F := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_t'x \geq b_t, t \in T\}.$$

El conjunto  $F$  es convexo y cerrado por ser intersección de una familia de semiespacios cerrados y puede ser  $\emptyset$  o  $\mathbb{R}^n$ . El sistema  $\sigma$  proporciona una representación externa de su conjunto factible, y como ya mencionamos antes, cuando  $\sigma$  es continuo garantizamos la convergencia en algoritmos propuestos en [2]. Por lo anterior, es importante mencionar que, cualquier conjunto convexo y cerrado  $F \subset \mathbb{R}^n$  puede ser representado por medio de un sistema continuo (Teorema 5.11, [12]), esto significa que  $F$  es el conjunto solución de un  $\sigma$  continuo.

**Definición 1.2.3.** El sistema  $\sigma$  es consistente si su conjunto factible es no vacío. Si su conjunto factible es vacío, entonces le llamaremos inconsistente.



**Definición 1.2.4.** Una desigualdad  $a^t x \geq b$ , es consecuencia del sistema  $\sigma$ , si toda solución de  $\sigma$  satisface también la desigualdad.

**Definición 1.2.5.** El cono característico  $K$  de un sistema  $\sigma = \{a^t x \geq b_t, t \in T\}$  se define como:

$$K := \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}, t \in T; \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Este cono es importante porque por medio de él se caracterizan los sistemas consistentes, como se aprecia en el Teorema Generalizado de Farkas:

**Teorema Generalizado de Farkas** (Teorema 3.1, [12]). *El sistema de desigualdades lineales  $\{a^t x < b, a^t x \geq b_t, t \in T\}$ , es inconsistente si y sólo si,*

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \text{cl}K, \text{ o } \begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{cl}K.$$

De este teorema se desprende que un sistema  $\sigma = \{a^t x \geq b_t, t \in T\}$  es consistente si, y sólo si,  $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{cl}K$ , y el Lema Extendido de Farkas:

**Lema Extendido de Farkas** [12]. *Una desigualdad  $a^t x \geq b$  es consecuencia de un sistema consistente  $\sigma = \{a^t x \geq b_t, t \in T\}$ , si y solamente si*

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \text{cl}K.$$

Dos sistemas  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  son equivalentes si tienen el mismo conjunto factible, i.e., si  $F_1 = F_2$ .

**Teorema 1.2.1** (Teorema 5.10, [12]). *Sean  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  dos sistemas de desigualdades lineales*

semi-infinitos consistentes. Entonces

1.  $F_2 \subset F_1$  si, y sólo si,  $clK_1 \subset clK_2$ .
2.  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  son equivalentes si, y sólo si,  $clK_1 = clK_2$ .

**Definición 1.2.6.** Un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que  $a'_t x > b_t$ , para todo  $t \in T$ , es llamado un punto de Slater de  $\sigma$ .

**Teorema 1.2.2** (Teorema 5.3, [12]). Si  $\sigma$  es continuo y tiene al menos un punto de Slater, entonces su cono característico  $K$  es cerrado.

**Definición 1.2.7.** La desigualdad  $0'_n x \geq 0$  es llamada desigualdad trivial, y es satisfecha por todos los vectores de  $\mathbb{R}^n$ . Un sistema trivial es aquel que consiste sólo de la desigualdad trivial.

**Definición 1.2.8.** Una restricción  $a'_t x \geq b_t$  se llama ajustada (tight) si existe  $x \in F$  tal que  $a'_t x = b_t$ . Un sistema  $\sigma$  se llamará ajustado si para todo  $x \in bd F$ , existe  $t \in T$  tal que  $a_t \neq 0_n$  y  $a'_t x = b_t$ .

El resultado siguiente nos da una condición suficiente para obtener un sistema ajustado.

**Lema 1.2.3** (Corolario 5.9.1, [12]) Sea  $\sigma$  un sistema continuo consistente. Si  $\sigma$  no contiene la desigualdad trivial, entonces  $\sigma$  es ajustado e  $int F$  coincide con el conjunto de todos los puntos de Slater de  $\sigma$ .

## 1.3 SISTEMAS DE DESIGUALDADES LINEALES ANALÍTICOS

**Definición 1.3.1.** Una función de variable real, definida en un abierto  $D$  de  $\mathbb{R}$ , es analítica en un punto  $x_0 \in D$ , si en un entorno de este punto la función se puede expresar en forma de la suma de una serie de potencias convergente, dispuesta según las potencias de  $x - x_0$  :

$$a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots$$

Una función que es analítica en cada uno de los puntos del abierto  $D$  se llama analítica en este abierto. Todas las funciones elementales que se estudian en el análisis son analíticas en toda la región de su definición, a excepción, posiblemente, de algunos puntos. Por ejemplo, un polinomio, la función exponencial, las funciones trigonométricas, son analíticas en todos los puntos.

Como el resultado de las principales operaciones algebraicas y analíticas (suma, resta, multiplicación, derivación e integración), efectuadas con las series de potencias, se expresa también, generalmente, por una serie de potencias convergente, es posible hacerse ahora una idea de la amplitud e importancia de la clase de las funciones analíticas. Sin embargo, ésta forma solamente una parte regular de la clase de funciones infinitamente derivables.

**Definición 1.3.2.** Un sistema de desigualdades lineales  $\sigma = \{a_t'x \geq b_t, t \in T\}$ , donde  $b_t = b(t) \in \mathbb{R}$  y  $a_t = a(t) = (a_1(t), \dots, a_n(t))' \in \mathbb{R}^n$  están definidos para todo  $t \in T$ , será llamado analítico (polinomial) si  $T$  es un intervalo compacto de  $\mathbb{R}$  y  $b(\cdot)$ ,  $a_1(\cdot), \dots, a_n(\cdot)$  son funciones analíticas (polinomiales) sobre un abierto  $D \subset \mathbb{R}$ , tal que  $T \subset D$ .

**Definición 1.3.3.** *Se dice que el conjunto  $F$  tiene una representación analítica (polinomial) cuando éste es el conjunto solución de un sistema de desigualdades analítico (polinomial).*

Es claro que los sistemas analíticos o polinomiales son una subfamilia de los sistemas continuos, el Ejemplo 1.2.1 tiene un sistema de restricciones analítico o polinomial cuando el conjunto de funciones  $\{f, v_1, \dots, v_n\}$  son analíticas o polinomiales.

Estudiar la geometría de los conjuntos factibles a partir de su descripción externa dada por los sistemas que los originan es muy importante al momento de formular algoritmos eficientes para resolver problemas de optimización lineal semi-infinita. Se han propuesto diferentes métodos modificando un poco el simplex y otros de direcciones factibles para problemas de optimización con sistemas de restricciones analíticos, ver [1, 2 y 11]. Todos estos métodos necesitan calcular en cada iteración, el conjunto de índices activos  $T(\bar{x}) := \{t \in T \mid a_t' \bar{x} = b_t\}$  (esto es, el conjunto de ceros de la función  $a(\cdot)' \bar{x} - b(\cdot)$ ), en la iteración  $\bar{x}$ . El conjunto  $T(\bar{x})$  puede ser finito o todo el conjunto de índices  $T$  (caso trivial). La implementación de tales métodos se vuelve sencilla cuando se conoce una mínima cota superior para  $|T(x)|$ , con  $x \in F$  tal que  $T(x) \neq T$ . Sin embargo, el objetivo general que ha guiado este trabajo, la tesis de maestría [17], y el trabajo de otras personas mencionadas en las referencias, como son Jaume, Puente, Goberna, López y Todorov, es el de caracterizar a aquellos conjuntos convexos y cerrados que admiten representación analítica o polinomial.

**Definición 1.3.4.** *Una aplicación continua  $\varphi$  de un intervalo compacto  $[a, b]$  en  $\mathbb{R}^n$  es llamada una curva en  $\mathbb{R}^n$ . Una curva cuyas funciones componentes son todas analíticas sobre un abierto que contenga a  $[a, b]$  es llamada curva analítica.*

Dado un sistema analítico consistente  $\sigma = \{a'_t x \geq b_t, t \in T\}$ , el conjunto de vectores coeficientes  $\Gamma := \left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}, t \in T \right\}$  del sistema es una curva analítica en  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,

$$\Gamma : T \rightarrow \mathbb{R}^{n+1},$$

$$\Gamma(t) = \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}.$$

En el caso particular de que el conjunto solución de este  $\sigma$  no sea el espacio total ni un semiespacio, entonces  $\Gamma$  tendrá recta tangente en casi todo punto de  $T$ , excepto a lo más, en un número finito, ya que de lo contrario,  $\Gamma$  sería un mapeo constante. Esto es, si la derivada de  $\Gamma$  fuera nula en un número infinito de puntos de  $T$ , cada función analítica componente sería idénticamente nula, luego  $\Gamma(t)$  sería constante para todo  $t \in T$ , contradiciendo así, la suposición sobre  $F$ .

**Definición 1.3.5.** Una cara de un conjunto convexo  $C$ , es un subconjunto convexo  $C' \subset C$ , tal que, para cada segmento cerrado de línea en  $C$  con un punto interior relativo en  $C'$ , se tiene que,  $C'$  contiene también a los puntos extremos del segmento.

**Definición 1.3.6.** Un rayo extremo de un conjunto convexo  $C$  es un rayo (un elemento de la forma  $\lambda y$ , con  $\lambda \geq 0$  y  $y \in C$ ), que además es cara de  $C$ . Si  $C$  es un cono convexo, un rayo extremo es una semirecta que emana del origen y que además es cara de  $C$ .

Lo anterior lo hemos mencionado porque, si  $\sigma$  es analítico y  $K$  es cerrado, entonces  $\Gamma$  debe visitar al menos una vez, el interior relativo de cada rayo extremo de  $K$  diferente de  $\text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ .

Si  $\sigma$  es analítico y no contiene la desigualdad trivial, por la compacidad de  $T$  y la continuidad de los coeficientes,  $\sigma$  es ajustado, y el  $\text{int}F$  coincide con el conjunto de puntos de Slater de  $\sigma$ , (Lema

1.2.3). Por otro lado, si  $\dim F = n$  (esto es, existe un punto de Slater), entonces,  $K$  es cerrado (Teorema 1.2.2). La cerradura de  $K$  también es conveniente porque, si  $K$  es cerrado y  $c \in \text{cone}\{a_t, t \in T\}$ , se tiene que la condición de Karush-Kuhn-Tucker caracteriza los puntos óptimos y que los valores óptimos de los problemas primario y dual coinciden. El ejemplo 1.3.1, tomado de [11], muestra que en un sistema analítico el cono característico puede ser no cerrado a pesar de que  $\sigma$  no contenga la desigualdad trivial.

**Ejemplo 1.3.1** Sea  $\sigma = \{\cos(\pi t)x_1 + \sin(\pi t)x_2 \geq -t^2(t-1)^2, t \in [0, 1]\}$ , es fácil ver que este sistema no contiene la desigualdad trivial y como  $(0, 2\pi, 0)' \in \text{cl}K \setminus K$ , concluimos que  $K$  es no cerrado. Aquí se tiene que  $F = \{0\} \times \mathbb{R}_+$ , esto es,  $\dim F \neq 2$ .

El ejemplo 1.3.2, muestra que, aunque  $\dim F = n$ ,  $K$  puede ser no cerrado si  $\sigma$  contiene a la desigualdad trivial.

**Ejemplo 1.3.2, [11].** El sistema

$$\sigma_1 = \{9t(t+2)^2(t-1)^2x_1 - 9t(t-2)^2(t+1)^2x_2 \geq 4(t^2-1)^2 - 36, t \in [-2, 2]\},$$

es una representación polinomial, y por lo tanto analítica, del cuadrado  $[0,1] \times [0,1]$  en  $\mathbb{R}^2$ , y  $\sigma_2$  obtenido a partir de  $\sigma_1$  multiplicando cada desigualdad por  $(t^2-1)^2(t^2-4)^2$  es otra representación polinomial. Se tiene que  $\text{cl}K_1 = \text{cl}K_2$ , pero debido a la presencia de la desigualdad trivial en  $\sigma_2$  (en  $t = -2, -1, 1, 2$ ), y a pesar de que  $\dim F_2 = 2$ , tenemos que  $K_2$  es no cerrado,  $\sigma_2$  no es ajustado, ni tiene punto de Slater.

La desigualdad trivial puede evitarse encontrando un sistema equivalente que no la contenga,

como se demuestra en el Teorema 2.1 de [11], y cuyo enunciado es:

**Teorema 1.3.1** (Teorema 2.1,[11]) *Sea  $\sigma$  una representación analítica no trivial de un conjunto convexo  $F$  con  $\dim F = n$ , la cual contiene la desigualdad trivial. Sean  $t_1 < \dots < t_p$  aquellos índices de  $T$  que producen la desigualdad trivial, y denotemos por  $r_i$  el orden más pequeño de  $t_i$  como cero de  $a_1(\cdot), \dots, a_p(\cdot), b(\cdot)$ . Consideremos el polinomio  $p(t) = (-1)^{mr_p} \prod_{i=1}^p (t - t_i)^{r_i}$ , donde  $m$  denota el siguiente parámetro:*

$$m = \begin{cases} 1, & \text{si } t_p = \max T \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}.$$

Entonces,  $\sigma$  es equivalente al siguiente sistema analítico que no contiene la desigualdad trivial

$$\tilde{\sigma} = \{ \tilde{a}(t)'x \geq \tilde{b}(t), t \in T \},$$

con

$$\tilde{a}(t) = \frac{a(t)}{p(t)}, \quad \tilde{b}(t) = \frac{b(t)}{p(t)}.$$

Reescribimos el teorema anterior para el caso polinomial ya que de esta forma lo utilizaremos en la demostración del Teorema 1.4.4.

**Corolario 1.3.1.1** (Teorema 2.1 en [11]). *Sea  $\sigma = \{a_t'x \geq b_t, t \in T\}$  una representación polinomial de  $F \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $\dim F = n$ . Si existe  $t \in T$  tal que  $\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} = 0_{n+1}$  entonces existe  $p \in \mathbb{R}[t]$ , con  $\deg p > 0$ , tal que  $\left\{ \frac{a_t'}{p(t)}x \geq \frac{b_t}{p(t)}, t \in T \right\}$  es otra representación polinomial de  $F$ , la cual no contiene a la desigualdad trivial.*

## Representabilidad analítica o polinomial.

Sean  $H_n$  la familia de los poliedros convexos en  $\mathbb{R}^n$ ,  $P_n$  todos los conjuntos en  $\mathbb{R}^n$  representables polinomialmente,  $C_n$  la familia de todos los conjuntos convexos cerrados en  $\mathbb{R}^n$ ,  $A_n$  la familia de conjuntos de  $\mathbb{R}^n$  representables analíticamente, y  $S_n$  la familia de conjuntos representables por un sistema continuo de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces, se tiene que

$$H_n \subset P_n \subset A_n \subset C_n = S_n,$$

donde las inclusiones son propias cuando  $n \geq 2$ . En  $\mathbb{R}$  las cinco familias coinciden.

La igualdad  $C_n = S_n$ , se conoce por el Teorema 5.11 de [12], en el cual se afirma que todo conjunto convexo y cerrado de  $\mathbb{R}^n$  puede ser representado por un sistema continuo.

Que  $H_n \subset P_n$  se cumple, se demuestra en el Teorema 3.1 de [11], (lo retomamos en el Teorema 1.4.4), y que esta inclusión es propia cuando  $n \geq 2$ , se comprueba porque  $B_2 \subset P_2$ , y obviamente  $B_2$  no es un poliedro. Que  $A_n \subset C_n$  propiamente es porque  $B_n \subset A_n$ , si y solo si,  $n \leq 2$ , ver [11], además, en el mismo artículo presentan el ejemplo de un conjunto convexo y cerrado en  $\mathbb{R}^2$  que no es representable analíticamente.

**Ejemplo 1.3.3** (Ejemplo 3.1, [11]) Considerar el sistema  $\sigma = \{-(\cos t)x_1 - (\sin t)x_2 \geq -1, t \in S\}$ , tal que  $S$  es un subconjunto infinito de  $[0, 2\pi]$ , de tal forma que  $F$  es un conjunto acotado. Por ejemplo,

$$S_1 = \left\{ \left[ \frac{\pi}{2}, 2\pi \right] \cup \left\{ 0, \frac{\pi}{4} \right\} \right\},$$



$$F_1 = \text{conv} \left[ (clB_2) \cup \left\{ \left( \begin{array}{c} 1 \\ \sqrt{2} - 1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} \sqrt{2} - 1 \\ 1 \end{array} \right) \right\} \right].$$

Entonces  $F$  en general, y  $F_1$  como caso particular, no pertenecen a  $A_2$ .

La inclusión  $P_n \subset A_n$  es clara y el ejemplo que separa a estas dos familias es:

**Ejemplo 1.3.4.** [16] El conjunto solución  $F$  del sistema analítico, en  $\mathbb{R}^2$ ,

$$\sigma = \{te^t x_1 + tx_2 \leq 1, t \in [0, 1]\},$$

no admite representación polinomial.

En la figura 1.3.1, mostramos la frontera del conjunto  $F$ .

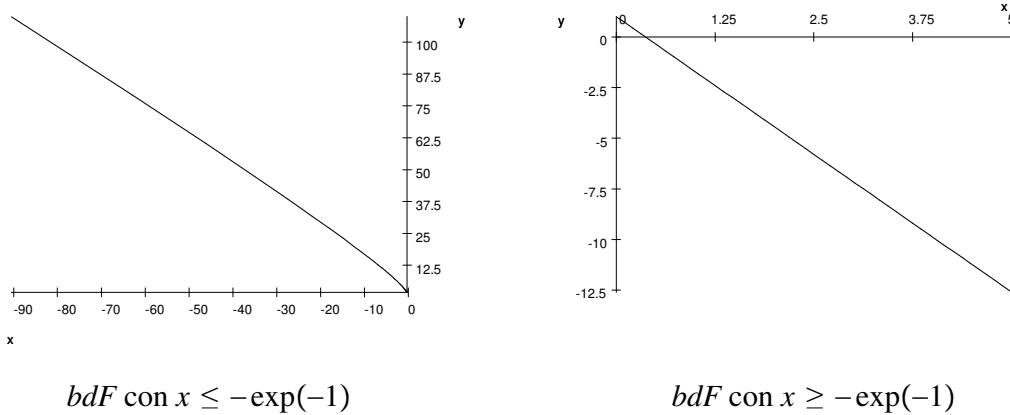


Figura 1.3.1

**Definición 1.3.7.** Dado un sistema consistente  $\sigma = \{a_t^l x \geq b_t, t \in T\}$ , diremos que una restricción  $a_s^l x \geq b_s, s \in T$ , es redundante, cuando su eliminación no modifique el conjunto solución. Si  $a_s^l x \geq b_s$  es no redundante, entonces  $a_s^l \bar{x} = b_s$  para algún  $\bar{x} \in F$ , esto es,  $a_s^l x \geq b_s$  es ajustada en  $\bar{x}$ . Un sistema consistente sin restricciones redundantes será llamado minimal.

Cualquier sistema minimal, o es finito, o es numerable (por un argumento de separación). Si  $\sigma$  es analítico, todas sus restricciones son redundantes (por un argumento de continuidad). Todas las representaciones minimales de un conjunto  $F$  poliedro convexo, con  $\dim F = n$ , tienen la misma cardinalidad, es decir, el número de caras de  $F$ .

## 1.4 REPRESENTACIÓN POLINOMIAL DE GRADO MÍNIMO

Sea  $\sigma = \{a_t'x \geq b_t, t \in T\}$  un sistema polinomial, recordemos que  $b_t = b(t) \in \mathbb{R}$  y  $a_t = a(t) = (a_1(t), \dots, a_n(t))' \in \mathbb{R}^n$  son polinomios con  $t \in T$  y  $T$  un intervalo compacto de  $\mathbb{R}$ , definimos el grado del sistema  $\sigma$  como,  $\deg \sigma = \max\{\deg a_i, i = 1, \dots, n; \deg b\}$ . Si  $F$  admite una representación polinomial, denotaremos por  $\deg F$  al grado mínimo de todas sus representaciones polinomiales. En programación lineal semi-infinita es importante hablar de  $\deg \sigma$  porque ocurre que  $|T(x)| \leq \deg \sigma$  para todo punto factible  $x$  tal que la función  $a(\cdot)'x - b(\cdot)$  no es idénticamente cero. Así,  $\deg F$  es la mínima cota superior de  $|T(x)|$  (en el caso no trivial), por lo que este número puede ser visto como un indicador de la dificultad en el cálculo del conjunto de ceros de la función  $a(\cdot)'x - b(\cdot)$  a la hora de resolver problemas de programación lineal semi-infinita cuyo conjunto factible puede describirse por medio de la mejor representación polinomial.

**Proposición 1.4.1.-** *Si  $F$  admite una representación polinomial y  $d \geq \deg F$ , entonces existe una representación polinomial de  $F$  de grado  $d$ .*

**Prueba:** Si  $\sigma_1 = \{c_t'x \geq d_t, t \in T\}$  es una representación polinomial de grado mínimo, entonces, tomando  $\bar{t} < \min T$ , el sistema  $\sigma_2 = \{(t - \bar{t})^m c_t'x \geq (t - \bar{t})^m d_t, t \in T\}$ , con  $m := d - \deg F \geq 1$ , es otra representación de  $F$  (por el lema extendido de Farkas) y es tal que  $\deg \sigma_2 = \deg \sigma_1 + m = \deg F + m = d$ .  $\square$

**Proposición 1.4.2.** *Si  $F$  admite una representación polinomial y  $g$  es una transformación afín en  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $g(F)$  también admite una representación polinomial y  $\deg g(F) = \deg F$ .*

**Prueba:** Si  $\{a'_t x \geq b_t, t \in T\}$  es una representación polinomial de  $F$  de grado mínimo y  $g(x) = Mx + c$ , con  $M(n \times n)$  regular y  $c \in \mathbb{R}^n$ , entonces

$$g(F) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a'_t M^{-1} x \geq b_t + a'_t M^{-1} c, t \in T\},$$

y esta es una representación polinomial de  $g(F)$  de grado a lo más  $\deg F$ . El argumento puede repetirse para  $g^{-1}(g(F)) = F$ , con lo que se obtiene  $\deg F \leq \deg g(F)$  y en consecuencia, la igualdad.  $\square$

Supongamos que  $\sigma$  es una representación polinomial de  $F$ . Entonces  $\deg \sigma = -\infty$  si y sólo si  $\sigma$  es el sistema trivial ( $a_1(t) = \dots = a_n(t) = b(t) = 0$  para todo  $t \in T$ ), el cual es una representación polinomial de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\deg \sigma = 0$  entonces puede verse facilmente que  $F$  puede ser  $\emptyset$ ,  $\mathbb{R}^n$  o un semiespacio. Si  $\deg \sigma = 1$  entonces  $F$  puede ser la intersección de dos semiespacios o un poliedro. En resumen, tenemos que, las clases de conjuntos convexos  $F \subset \mathbb{R}^n$ , no vacios, tales que  $\deg F = -\infty$ ,  $\deg F = 0$  y  $\deg F = 1$  contienen al espacio completo  $\mathbb{R}^n$ , todos los semiespacios y todas las intersecciones de parejas de semiespacios, respectivamente. La clase de conjuntos convexos no vacios con  $\deg F = 2$ , contiene poliedros y no poliedros (como la envoltura convexa de cualquier brazo de hipérbola). Como una consecuencia del Teorema 1.4.4,  $\deg F \neq 2$  para cualquier conjunto convexo poliedral de dimensión completa. Para demostrar esta afirmación se construye una curva polinomial contenida en el cono característico asociado a  $F$  que visita cada uno de sus rayos al menos una vez. Esta idea podemos verla en el ejemplo siguiente:

**Ejemplo 1.4.1** Sea  $F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a'_i x \geq b_i, i = 1, 2, 3\}$ . Las funciones  $\varphi_1(t) = t^2(1-t)$ ,  $\varphi_2(t) = (1-t^2)$  y  $\varphi_3(t) = t^2(1+t)$  son positivas en  $-1, 0$ , y  $1$ , respectivamente, y fuera de esos

puntos, en el intervalo  $[-1, 1]$ , son cero o no negativas.

$$\begin{aligned} \text{cone} \left\{ \sum_{i=1}^3 \varphi_i(t) \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}, t \in [-1, 1]; \begin{pmatrix} 0_2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \\ = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}, i = 1, 2, 3; \begin{pmatrix} 0_2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \end{aligned}$$

por el lema extendido de Farkas, luego,  $F$  se convierte en el conjunto solución del sistema polinomial correspondiente, esto es,

$$F = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \begin{aligned} & [t^2(1-t)a_1 + (1-t^2)a_2 + t^2(1+t)a_3]'x \\ & \geq (b_3 - b_1)t^3 + (b_1 - b_2 + b_3)t^2 + b_2, t \in [-1, 1] \end{aligned} \right\},$$

con  $\deg F \leq 3$  (la desigualdad es estricta si el sistema inicial contiene desigualdades redundantes).

El siguiente es un resultado geométrico que nos servirá para mostrar que la representación polinomial construida en la demostración del Teorema 1.4.4, es de grado mínimo.

**Lema 1.4.3** *Supongamos que  $y$  define una dirección extrema de un conjunto convexo poliedral  $K \subset \mathbb{R}^n$ . Sea  $z \in C^1(T)$ ,  $z : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ , donde  $T$  es un intervalo en  $\mathbb{R}$ , tal que  $\{z(t) \mid t \in T\} \subset K$ , y sea  $\bar{t} \in \text{int}T$  tal que  $z(\bar{t})$  pertenece al rayo generado por  $y$ . Entonces existe  $\gamma \in \mathbb{R}$  tal que  $\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t=\bar{t}} = \gamma y$ .*

**Prueba.** Sea  $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i'x \geq 0, i \in I\}$ ,  $|I| < \infty$ . Por hipótesis,  $y \in K$  y

$$\dim \text{span} \{a_i \mid a_i'y = 0, i \in I\} = n - 1. \quad (1)$$

Sea  $\delta \geq 0$  tal que  $z(\bar{t}) = \delta y$  (el punto de contacto de la curva con  $\text{cone}\{y\}$ ) y definamos  $v = \left(\frac{dz}{dt}\right)_{t=\bar{t}}$ . Nosotros probaremos que  $a'_i v = 0$  para todo  $i$  tal que  $a'_i y = 0$ . En efecto, supongamos que  $a'_i v < 0$ , entonces existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $a'_i \left(\frac{z(t)-z(\bar{t})}{t-\bar{t}}\right) < 0$  para todo  $t \in ]\bar{t}, \bar{t} + \varepsilon[ \subset T$ . Luego  $a'_i(z(t) - \delta y) = a'_i z(t) < 0$  lo cual demuestra que  $z(t) \notin K$ . Nosotros obtenemos una contradicción similar si suponemos que  $a'_i v > 0$ . En consecuencia,  $v \in \left[\text{span}\{a_i \mid a'_i y = 0, i \in I\}\right]^\perp$  y si retomamos (1), obtenemos  $v \in \text{span}\{y\}$ .  $\square$

Denotamos por  $\mathbb{R}^{(T)}$  al espacio lineal de todas las funciones  $\lambda : T \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $\lambda_t = 0$  para todo  $t \in T$ , excepto tal vez, para un número finito de índices (llamado espacio de sucesiones finitas generalizadas), y su cono positivo por  $\mathbb{R}_+^{(T)}$ . El conjunto soporte de  $\lambda \in \mathbb{R}^{(T)}$  se define por  $\text{supp}\lambda = \{t \in T \mid \lambda_t \neq 0\}$ .

Finalmente, el resultado que nos determina el grado mínimo de una representación polinomial. Recordemos que en [11] ya se ha demostrado que todo poliedro tiene una representación polinomial (Teorema 3.1 [11]), parte de esa demostración, está contenida en la prueba de este teorema.

**Teorema 1.4.4** *Si  $p$  es el número mínimo de desigualdades en la familia de todas las representaciones lineales de un conjunto convexo poliedro  $F$ ,  $\emptyset \neq F \neq \mathbb{R}^n$ , entonces  $\text{deg}F \leq \max\{0, 2p - 3\}$ . La igualdad se cumple si  $F$  es de dimensión completa.*

**Prueba.** Si  $p = 1$ , podemos escribir  $F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c'x \geq d\}$ , con  $c \neq 0_n$  y  $d \in \mathbb{R}$ . Tomando  $c_t = c$  y  $d_t = d$  para todo  $t \in T$  (un intervalo compacto en  $\mathbb{R}$  arbitrario), obtenemos  $\text{deg}\sigma = 0$  y  $\text{deg}F \leq 0$ . Como  $F \neq \mathbb{R}^n$ ,  $\text{deg}F = 0$ .

Si  $p = 2$ , entonces  $F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c'_i x \geq d_i, i = 1, 2\}$ , con las dos desigualdades no redundantes (Def. 1.3.7). Tomando  $T = [0, 1]$  y  $\begin{pmatrix} c_t \\ d_t \end{pmatrix} = (1-t)\begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}$ , tenemos una representación de  $F$  tal que  $\deg \sigma = 1$ . Como  $\deg F \leq 1$ , debemos tener  $\deg F = 1$ .

Ahora supongamos que  $p > 2$ . Sea  $F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c'_i x \geq d_i, i = 1, \dots, p\}$ , y sea  $\sigma_0 = \{c'_i x \geq d_i, i = 1, \dots, p\}$ , como  $\sigma_0$  es minimal se tiene que  $c_i \neq 0$ , para todo  $i = 1, \dots, p$ .

Primero construiremos una representación polinomial de  $F$ ,  $\sigma_1 = \{c'_i x \geq d_i, t \in T\}$ , tal que  $\deg \sigma_1 = 2p - 3$ , y luego probaremos que  $\deg F = 2p - 3$ , si  $\dim F = n$ . Para hacer esto, asociaremos a  $\sigma_0$  y a  $p$  escalares arbitrarios  $t_1, \dots, t_p$ , tales que  $t_1 < t_2 < \dots < t_p$ , la familia  $\Sigma$ , de sistemas polinomiales dependientes de  $p$  parámetros positivos,  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  y  $p - 2$  escalares  $\beta_2, \dots, \beta_{p-1}$ , de la forma

$$\sigma = \left\{ \left( \sum_{i=1}^p \varphi_i(t) c_i \right)' x \geq \sum_{i=1}^p \varphi_i(t) d_i, t \in [t_1, t_p] \right\},$$

donde  $\varphi_i(t) = (-1)^{r_{ij}} [\alpha_i + \beta_i(t - t_i)] \prod_{1 \leq j \leq p} (t - t_j)^{r_{ij}}, i = 1, \dots, p$ , con  $\beta_1 = \beta_p = 0$  y

$$r_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si } j = i \\ 1, & \text{si } (i, j) \in \{(i, 1), i \neq 1; (i, p), i \neq p\}, \\ 2 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Puede verse que  $\deg \varphi_i = 2p - 3$  para  $i = 1, p$  y

$$\deg \varphi_i = \begin{cases} 2p - 3, & \text{si } \beta_i \neq 0, \\ 2p - 4, & \text{si } \beta_i = 0, \end{cases}$$

para  $i = 2, \dots, p-1$ . Por lo tanto,  $\deg \sigma = 2p - 3$  para todo  $\sigma \in \Sigma$ . Además,  $\varphi_i(t_j) = 0$  para todo  $j \neq i$  y

$$\varphi_j(t_j) = \alpha_j \prod_{i=1, \dots, p, i \neq j} |t_i - t_j|^{r_{ji}} > 0,$$

para todo  $j = 1, \dots, p$ .

Seleccionaremos  $\sigma_1 \in \Sigma$  para representar a  $F$ . Para hacer esto, tomemos  $t_1 < t_2 < \dots < t_p$  arbitrarios en  $\mathbb{R}$ ,  $\alpha_i = 1$ , y  $\beta_i = 0$  para todo  $i = 1, \dots, p$ . Esta elección proporciona el sistema usado en la prueba del Teorema 3.1 de [11], con el cual se muestra que  $F$  admite representación polinomial. Por lo que,  $\deg F \leq 2p - 3$ .

Para probar que la igualdad se cumple si  $\dim F = n$ , será suficiente mostrar que dada una representación polinomial de  $F$  de grado mínimo  $\sigma_2 = \{a'_t x \geq b_t, t \in T\}$ , tenemos que  $\deg \sigma_2 = 2p - 3$ . Para hacer esto, nuevamente determinamos escalares  $t_1 < t_2 < \dots < t_p$  y parámetros adecuados  $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_2, \dots, \beta_{p-1}$ , de tal forma que, el correspondiente elemento de  $\Sigma$ , digamos,  $\sigma_3$ , tenga los mismos coeficientes polinomiales que  $\sigma_2$ , en cuyo caso se tendrá  $\deg \sigma_2 = \deg \sigma_3 = 2p - 3$ .

Por la hipótesis sobre  $\sigma_2$ ,  $\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \neq 0_{n+1}$  para cada  $t \in T$ , (Corolario 1.3.1.1), y esto, junto con la continuidad de  $\sigma_2$  nos asegura que

$$K = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}, t \in T; \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$



es cerrado (Teorema 1.2.2 y Lema 1.2.3). Luego, por el lema extendido de Farkas tenemos

$$K = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} c_j \\ d_j \end{pmatrix}, j = 1, \dots, p; \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

por lo que podemos escribir, para cada  $j = 1, \dots, p$ ,

$$\begin{pmatrix} c_j \\ d_j \end{pmatrix} = \sum_{t \in T} \lambda_t^j \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} + \mu_j \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda^j \in \mathbb{R}_+^{(T)}, \mu_j \in \mathbb{R}_+. \quad (2)$$

Como  $c_j \neq 0$ ,  $\text{supp} \lambda^j \neq \emptyset$ . Por otro lado,  $\sigma_0 := \{c_j'x \geq d_j, j = 1, \dots, p\}$  es una representación minimal del conjunto de dimensión completa  $F$ , por lo que cada cara  $\{x \in F \mid c_j'x = d_j\}$ ,  $j = 1, \dots, p$ , es una cara de  $F$ . Reordenando  $\sigma_0$  si fuera necesario, podemos suponer que  $t_1 < t_2 < \dots < t_p$  y considerar la familia correspondiente de sistemas polinomiales  $\Sigma$ . Ahora obtendremos información importante de  $\sigma_2$ , con el fin de seleccionar un  $\sigma_3 \in \Sigma$  adecuado.

Sea  $x^j$  un punto de la correspondiente cara. Multiplicando ambos miembros de (2) por  $\begin{pmatrix} x^j \\ -1 \end{pmatrix}$ , obtenemos  $0 = \sum_{t \in T} \lambda_t^j (a_t'x^j - b_t) + \mu_j$ , así que  $\mu_j = 0$  y (2) queda como sigue

$$\begin{pmatrix} c_j \\ d_j \end{pmatrix} = \sum_{t \in \text{supp} \lambda^j} \lambda_t^j \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \quad (3)$$

Puesto que  $\sigma_0$  es minimal,  $\begin{pmatrix} c_j \\ d_j \end{pmatrix}$  define una dirección extrema de  $K$  y por (3), para cada  $j$ , existe un  $t_j \in \text{supp} \lambda^j \subset T$ , con  $t_i \neq t_j$  si  $i \neq j$ , y  $\delta_j > 0$ ,  $j = 1, \dots, p$ , tal que

$$\begin{pmatrix} a_{t_j} \\ b_{t_j} \end{pmatrix} = \delta_j \begin{pmatrix} c_j \\ d_j \end{pmatrix}, j = 1, \dots, p. \quad (4)$$

Dado  $j \in \{2, \dots, p-1\}$ , tenemos que  $t_j \in \text{int}[t_1, t_p]$  y que la curva  $\left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}, t \in [t_1, t_p] \right\}$  satisface las condiciones del Lema 1.4.3 en  $t_j$ , así que existen  $\gamma_j \in \mathbb{R}$  tales que

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}_{t=t_j} = \gamma_j \begin{pmatrix} c_j \\ d_j \end{pmatrix}, j = 2, \dots, p-1. \quad (5)$$

Ahora podemos seleccionar un sistema  $\sigma_3 \in \Sigma$  que satisfaga, como  $\sigma_2$ , las condiciones (4) y (5) (sin ninguna condición sobre su conjunto solución). Escribamos  $\sigma_3 = \{e'_t x \geq f_t, t \in [t_1, t_p]\}$ .

Dado  $j \in \{1, \dots, p\}$ , como

$$\begin{pmatrix} e_{t_j} \\ f_{t_j} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^p \varphi_i(t_j) \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} = \alpha_j \prod_{i=1, \dots, p, i \neq j} |t_i - t_j|^{r_{ji}} \begin{pmatrix} c_j \\ d_j \end{pmatrix},$$

existe  $\alpha_j > 0$  tal que  $\sigma_3$  cumple (4), esto es,

$$\begin{pmatrix} e_{t_j} \\ f_{t_j} \end{pmatrix} = \delta_j \begin{pmatrix} c_j \\ d_j \end{pmatrix}, j = 1, \dots, p. \quad (6)$$

Por otro lado, para  $j = 2, \dots, p-1$ , tenemos  $r_{ij} = 0$  si  $i = j$  y  $r_{ij} = 2$  en otro caso. Para calcular  $\left( \frac{d\varphi_i}{dt} \right)_{t=t_j}$ , distinguiremos dos casos:

Si  $i \neq j$ ,  $(t - t_j)^2$  divide a  $\varphi_i$ , así que  $\left( \frac{d\varphi_i}{dt} \right)_{t=t_j} = 0$ .

Si  $i = j$ , podemos escribir  $\varphi_j(t) = [\alpha_j + \beta_j(t - t_j)]p_j(t)$ , donde  $p_j(t) = (-1)^{r_{jp}} \prod_{1 \leq k \leq p, k \neq j} (t - t_k)^{r_{kj}}$ .

Entonces,

$$\left(\frac{d\varphi_j}{dt}\right)_{t=t_j} = \beta_j p_j(t_j) + \alpha_j \left(\frac{dp_j}{dt}\right)_{t=t_j}.$$

Como

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} e_t \\ f_t \end{pmatrix}_{t=t_j} = \left(\frac{d\varphi_j}{dt}\right)_{t=t_j} \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} = [\beta_j p_j(t_j) + \alpha_j \left(\frac{dp_j}{dt}\right)_{t=t_j}] \begin{pmatrix} c_j \\ d_j \end{pmatrix}, j = 2, \dots, p-1$$

con  $p_j(t_j) \neq 0$  para todo  $j$ , existen  $\beta_2, \dots, \beta_{p-1}$ , tales que  $\sigma_3$  satisface (5), esto es,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} e_t \\ f_t \end{pmatrix}_{t=t_j} = \gamma_j \begin{pmatrix} c_j \\ d_j \end{pmatrix}, j = 2, \dots, p-1. \quad (7)$$

Finalmente, probaremos que cada componente,  $q(t) \in \mathbb{R}[t]$ , de  $\begin{pmatrix} a_t - e_t \\ b_t - f_t \end{pmatrix}$  es el polinomio cero, con lo cual podremos concluir que  $\deg \sigma_2 = \deg \sigma_3 = 2p - 3$  y así la prueba estará completa.

Cada uno de los puntos  $t_1 < t_2 < \dots < t_p$  es un cero de  $q$  (comparar (4) con (6)), así que (por el teorema de Rolle) existen  $\tau_1, \dots, \tau_{p-1}$  tales que  $t_1 < \tau_1 < t_2 < \dots < t_{p-1} < \tau_{p-1} < t_p$  y  $\left(\frac{dq}{dt}\right)_{t=\tau_j} = 0$ , para  $j = 1, \dots, p-1$ . Además,  $\left(\frac{dq}{dt}\right)_{t=t_j} = 0$ ,  $j = 2, \dots, p-1$  (comparar (5) con (7)). Como  $\tau_1 < t_2 < \dots < t_{p-1} < \tau_{p-1}$  son  $2p - 3$  ceros diferentes de  $\left(\frac{dq}{dt}\right)$ , y  $\deg\left(\frac{dq}{dt}\right) \leq 2p - 4$ ,  $\left(\frac{dq}{dt}\right)$  debe ser idénticamente cero y  $q$  constante. Pero  $q$  se anula en cualquier  $t_j$ , luego,  $q$  debe ser el polinomio cero.  $\square$

Observemos que  $p = 3$  para  $\{0_2\}$ , pero  $\deg\{0_2\} = 2 < \max\{0, 2p - 3\}$ , ya que  $\{tx_1 + (t^2 - 1)x_2 \geq 0, t \in [-2, 2]\}$  es una representación polinomial de  $\{0_2\}$  (su cono de referencia es  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_-$ ). Así mostramos que la suposición  $\dim F = n$  en el teorema anterior no es superflua.

## 1.5. CONJUNTOS EN EL PLANO CON REPRESENTACIÓN SUAVE

Todo conjunto  $F \subset \mathbb{R}^n$  convexo, cerrado y no vacío puede ser escrito como  $F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq 0\}$ , para alguna función convexa  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (considerar, por ejemplo, a la función distancia  $f(x) = d(x, F)$ ). Probaremos que bajo ciertas condiciones,  $f$  permite dar a  $F$  una representación suave (analítica o polinomial), una de esas condiciones es que el conjunto de nivel 0 de  $f$  admita una parametrización adecuada.

**Proposición 1.5.1** *Sea  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$  una función convexa tal que  $F := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq 0\} \subset \text{int dom } f$  y que existe  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $f(\hat{x}) < 0$ . Entonces se cumple:*

i) *Si  $f \in C^1(\text{bd } F)$  y  $\{z(t), t \in T\}$  es un subconjunto denso de  $\text{bd } F$ , entonces*

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall f(z(t))'(x - z(t)) \leq 0 \text{ para todo } t \in T\}.$$

ii) *Si  $f$  es una función polinomial,  $T$  es un intervalo compacto en  $\mathbb{R}$  y  $\{z(t), t \in T\}$  es una curva analítica (racional) y un subconjunto denso de  $\text{bd } F$ , entonces  $F$  admite una representación analítica (polinomial, repectivamente).*

**Prueba** i) Probaremos que  $\text{bd } F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$ . Por la continuidad de  $f$  en  $\text{int dom } f$ ,  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < 0\} \subset \text{int } F$ , esto es,  $\text{bd } F \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$ . Luego, si probamos que  $f(x) = 0$  no permite la posibilidad de que  $x \in \text{int } F$ , tendríamos que  $x \in F \setminus (\text{int } F) = \text{bd } F$  y así tendríamos las dos contenciones.

Sea  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $f(\bar{x}) = 0$ . Sea  $u \in \partial f(\bar{x})$  y tomemos  $x = \bar{x} + \mu u$ , con  $\mu > 0$ . Entonces

$$f(x) = f(\bar{x} + \mu u) \geq f(\bar{x}) + \mu \|u\|^2 = \mu \|u\|^2. \quad (8)$$

Si  $u = 0_n$ , entonces  $\bar{x}$  es un mínimo global de  $f$  en  $\mathbb{R}^n$ , contradiciendo  $f(\hat{x}) < 0 = f(\bar{x})$ . Luego  $u \neq 0_n$ , y de (8),  $f(x) > 0$ , y así,  $x \notin F$ . Como  $x = \bar{x} + \mu u$  es arbitrariamente cercano a  $\bar{x}$ ,  $\bar{x} \notin \text{int } F$ .

Sea  $x \in F$ ,  $z \in \text{bd } F$  y  $u \in \partial f(z)$ . Por i), y por la convexidad de  $f$ , tenemos  $0 \geq f(x) \geq f(z) + u'(x - z) = u'(x - z)$ , lo cual muestra que

$$F \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid u'(x - z) \leq 0 \text{ para todo } u \in \partial f(z) \text{ y } z \in \text{bd } F\}. \quad (9)$$

Ahora sea  $\bar{x} \notin F$ . Si  $z$  es un minimizador global de  $d(x, \bar{x})$  sobre el conjunto cerrado  $F$ , entonces  $z \in \text{bd } F$  y el vector  $a = \bar{x} - z$  es normal a  $F$  en  $z$ , esto es,  $a'(x - z) \leq 0$  para todo  $x \in F$ . Como  $f$  es una función convexa propia y  $F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq f(z)\}$ , podemos aplicar el Corolario 23.7.1 de [25] para concluir la existencia de  $\lambda > 0$  y  $u \in \partial f(z)$  tal que  $a = \lambda u$ , por lo que  $u'(\bar{x} - z) > 0$ . Luego, podemos concluir que la inclusión inversa de (9) se cumple. Por la hipótesis de diferenciabilidad para  $f$  sobre  $\mathbb{R}^n$ , (9) se transforma en

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall z \in \text{bd } F \nabla f(z)'(x - z) \leq 0\}.$$

Ahora solo resta probar que los sistemas  $\sigma_1 = \{\nabla f(z)'(x - z) \leq 0, z \in \text{bd } F\}$  y  $\sigma_2 = \{\nabla f(z(t))'(x - z(t)) \leq 0, t \in T\}$  son equivalentes. En efecto, el conjunto

$$\left\{ \left( \begin{array}{c} \nabla f(z(t)) \\ \nabla f(z(t))'z(t) \end{array} \right), t \in T \right\}$$

es denso en

$$\left\{ \left( \begin{array}{c} \nabla f(z) \\ \nabla f(z)'z \end{array} \right), z \in bd F \right\}$$

por la continuidad de  $\nabla f$  en  $z \in bd F$  y la densidad de  $\{z(t), t \in T\}$  en  $bd F$ . Por lo tanto, los conos característicos de  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  coinciden y la conclusión se sigue del Lema extendido de Farkas.

ii) Es una consecuencia inmediata de i), si tomamos en cuenta que  $\nabla f(z(t))$  tiene componentes analíticas (racionales con denominadores de signo constante), si  $z$  es analítica (racional, respectivamente).  $\square$

En [19] obtuvimos una representación polinomial para el disco  $B_2$ . A partir de la Proposición 1.5.1, que acabamos de demostrar, podemos reconstruir dicha representación y demostrar que  $\deg B_2 = 4$ . Para esto, podemos tomar como  $f$  cualquiera de las funciones  $f_k(x) = \|x\|^k - 1, k = 1, 2, \dots$ , con  $\text{dom} f = \mathbb{R}^2$  para todo  $k = 1, 2, \dots$ , o

$$f_0(x) = \begin{cases} \frac{\|x\|^2 - 1}{3(4 - \|x\|^2)}, & \|x\| < 2, \\ +\infty, & \|x\| \geq 2, \end{cases}.$$

De la proposición i) obtenemos, para cualquier función  $f_k$  que elijamos:

$$B_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid z'(x - z) \leq 0, z \in S_2\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid z'x \leq 1, z \in S_2\}. \quad (10)$$

Tomando la curva analítica

$$\left\{ \left( \begin{array}{c} \cos t \\ \sin t \end{array} \right), t \in [0, 2\pi] \right\} = S_2, \quad (11)$$

obtenemos la representación analítica ya conocida de  $B_2$  :

$$\sigma = \{(\cos t)x_1 + (\sin t)x_2 \leq 1, t \in [0, 2\pi]\}.$$

Para obtener la representación polinomial de  $B_2$  de grado 4, debemos encontrar una curva racional densa en  $S_2$ , lo cual puede hacerse de diferentes maneras. En efecto, la sustitución  $w = \tan \frac{t}{2}$  en (11) nos da:

$$\left\{ \left( \begin{array}{c} \frac{1-w^2}{1+w^2} \\ \frac{2w}{1+w^2} \end{array} \right), w \in \mathbb{R} \right\} = S_2 \setminus \left\{ \left( \begin{array}{c} -1 \\ 0 \end{array} \right) \right\},$$

o recurriendo a un caso particular del teorema de Fermat para polinomios: dados tres polinomios  $p, q$  y  $r$  en una variable, sin factores comunes, se tiene que,  $p^2(t) + q^2(t) = r^2(t)$ , si , y solo si, existen dos polinomios, sin factores comunes,  $u$  y  $v$  tales que

$$p = uv, q = \frac{v^2 - u^2}{2}, r = \frac{v^2 + u^2}{2}.$$

Como consecuencia del mismo teorema, si esos polinomios existen,  $r(t) \neq 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  y  $\deg r$  es par. Tomando  $u(t) = t + 1$  y  $v(t) = 1 - t$ , obtenemos  $p(t) = 1 - t^2$ ,  $q(t) = -2t$ , y  $r(t) = t^2 + 1$ . Con lo que:

$$\left\{ \left( \begin{array}{c} \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \frac{-2t}{1+t^2} \end{array} \right), t \in \mathbb{R} \right\} = S_2 \setminus \left\{ \left( \begin{array}{c} -1 \\ 0 \end{array} \right) \right\}. \quad (12)$$

Usaremos (12) para obtener la representación polinomial de  $B_2$ . La función  $\varphi : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $\varphi(s) = \frac{s}{1-s^2}$  es biyectiva, por lo que, la substitución  $t = \varphi(s)$ , nos permitirá reemplazar a  $\mathbb{R}$  por un intervalo acotado. En efecto, de (12):

$$\left\{ \left( \begin{array}{c} \frac{s^4-3s^2+1}{s^4-s^2+1} \\ \frac{2s(s^2-1)}{s^4-s^2+1} \end{array} \right), s \in ]-1, 1[ \right\} = S_2 \setminus \left\{ \left( \begin{array}{c} -1 \\ 0 \end{array} \right) \right\}$$

entonces, de acuerdo a (10)

$$B_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \left( \frac{s^4-3s^2+1}{s^4-s^2+1} \right) x_1 + \left( \frac{2s(s^2-1)}{s^4-s^2+1} \right) x_2 \leq 1, s \in ]-1, 1[ \right\}. \quad (13)$$

Como las desigualdades que se obtienen con  $s = \pm 1$  en el sistema de (13) son consecuentes, por la continuidad de los coeficientes y el Lema extendido de Farkas, tenemos que

$$\sigma_1 = \left\{ \left( \frac{s^4-3s^2+1}{s^4-s^2+1} \right) x_1 + \left( \frac{2s(s^2-1)}{s^4-s^2+1} \right) x_2 \leq 1, s \in [-1, 1] \right\} \quad (14)$$

que es una representación racional (porque los coeficientes son funciones racionales) de  $B_2$ . Finalmente, multiplicando ambos miembros de la desigualdad en (14) por  $s^4 - s^2 + 1 > 0$  para todo  $s \in [-1, 1]$ , no modificamos el cono característico y  $\sigma_1$  se vuelve equivalente a

$$\sigma_2 = \left\{ (s^4 - 3s^2 + 1)x_1 + 2s(s^2 - 1)x_2 \leq s^4 - s^2 + 1, s \in [-1, 1] \right\} \quad (15)$$

**Proposición 1.5.2.** El conjunto  $B_2$  admite una representación polinomial y  $\deg B_2 = 4$ .

**Prueba.** La expresión (15) muestra que  $B_2$  admite una representación polinomial, como  $\deg \sigma_2 = 4$ ,  $\deg B_2 \leq 4$ . Ahora probaremos que este grado es el menor posible, esto es, que  $\deg B_2 = 4$ .

Supongamos que  $\sigma_3 = \{p(t)x_1 + q(t)x_2 \leq r(t), t \in T\}$  es una representación polinomial de  $B_2$  de grado mínimo y que  $\deg \sigma_3 < 4$ . Por el Corolario 1.3.1.1,  $\sigma_3$  satisface las condiciones del Lema 1.2.3. Por lo tanto, para todo  $\varphi \in [0, 2\pi]$  existe  $t_\varphi \in T$  tal que  $p(t_\varphi)x_1 + q(t_\varphi)x_2 = r(t_\varphi)$  es una



recta tangente a  $(\cos \varphi, \sin \varphi)'$ . Puesto que existe una correspondencia uno a uno entre  $S_2$  y sus rectas tangentes, las cuales no contienen al origen, para cada  $\varphi \in [0, 2\pi[$ , existe un único  $t_\varphi \in T$  tal que  $\frac{p(t_\varphi)}{r(t_\varphi)} = \cos \varphi$ ,  $\frac{q(t_\varphi)}{r(t_\varphi)} = \sin \varphi$  y  $r(t_\varphi) \neq 0$ .

Como  $p^2(t) + q^2(t) = r^2(t)$  para todo  $t \in \{t_\varphi, \varphi \in [0, 2\pi[ \}$ , el cual es un conjunto infinito, la ecuación se cumple para todo  $t \in \mathbb{R}$ , esto es,  $p^2 + q^2 = r^2$ .

Por el Corolario 1.3.1.1,  $p, q$  y  $r$  no tienen factores lineales comunes,  $r(t) \neq 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  y, además,  $\deg r$  es par por el teorema de Fermat. Luego, solo nos resta la posibilidad de que el grado de  $r$  sea dos, lo cual nos llevará a una contradicción.

El vector  $z(t) = \begin{pmatrix} \frac{p(t)}{r(t)} \\ \frac{q(t)}{r(t)} \end{pmatrix}$  está bien definido para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Claramente  $\{z(t), t \in T\} \subset S_2$ .

Por otro lado, hemos mostrado que  $z(t_\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$  para todo  $\varphi \in [0, 2\pi[$ , así que

$$S_2 = \{z(t_\varphi), \varphi \in [0, 2\pi[ \} \subset \{z(t), t \in T\}$$

y por lo tanto  $\{z(t), t \in T\} = S_2$ .

Como el grado de  $p$  y  $q$  es a lo más 2, podemos escribir  $p(t) = p_2 t^2 + p_1 t + p_0$ ,  $q(t) = q_2 t^2 + q_1 t + q_0$  y  $r(t) = r_2 t^2 + r_1 t + r_0$ , con  $r_2 \neq 0$ . Es obvio que  $p_2^2 + q_2^2 = r_2^2$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $|p_2| \leq |q_2|$ , lo cual nos lleva a que  $\left| \frac{p_2}{q_2} \right| < 1$  y  $q_2 \neq 0$ .

Consideremos los puntos en  $S_2$  :  $z^1 = \left( \frac{p_2}{r_2}, -\frac{q_2}{r_2} \right)'$  y  $z^2 = \left( \frac{p_2}{r_2}, \frac{q_2}{r_2} \right)'$ . Debido a que  $z^1 \neq z^2$ , existen  $t_1 \neq t_2 \in T$  que satisfacen la ecuación  $\frac{p(t)}{r(t)} = \frac{p_2}{r_2}$ , esto es,

$$p_2 t^2 + p_1 t + p_0 = \frac{p_2}{r_2} (r_2 t^2 + r_1 t + r_0),$$

o equivalentemente, la ecuación lineal  $(p_1 - r_1 \frac{p_2}{r_2})t = r_0 \frac{p_2}{r_2} - p_0$ , lo cual es un absurdo porque esta ecuación no puede tener dos soluciones diferentes, y esto completa la prueba.  $\square$

La Proposición 1.5.3 proporciona una condición suficiente para que un conjunto  $F \subset \mathbb{R}^2$ , convexo, cerrado y no acotado, admita una representación suave siempre que se tenga una parametrización adecuada para  $bd F$ .

**Proposición 1.5.3.** *Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  es una función convexa propia analítica (racional), tal que  $\text{dom } f$  es abierto, entonces,  $\text{epi } f$  admite una representación analítica (polinomial).*

**Prueba.** Como  $f$  es continua en el intervalo abierto  $\text{dom } f$ ,  $f$  es también cerrada. De aquí,  $\text{epi } f$  es un conjunto convexo cerrado de dimensión dos, y por esto, es la intersección de todos los semiespacios cerrados y tangentes a él (Teorema 18.8, [22]). Como  $f$  es diferenciable en cada  $x \in \text{dom } f$ , los semiespacios tangentes a  $\text{epi } f$  son de la forma  $x_2 - f(t) \geq f'(t)(x_1 - t)$ , con  $t \in \text{dom } f$ , esto es,

$$\sigma_1 = \left\{ -f'(t)x_1 + x_2 \geq f(t) - tf'(t), \quad t \in \text{dom } f \right\}$$

es una representación de  $\text{epi } f$ , la cual no es analítica porque  $\text{dom } f$  no es cerrado.

Ahora supongamos que  $f$  es racional (la prueba si  $f$  es analítica es más simple). Sea  $f(t) = \frac{g(t)}{h(t)}$ , con  $g$  y  $h$  polinomios. Entonces, tomando en cuenta que  $[h(t)]^2 > 0$  para todo  $t \in \text{dom } f$ , tenemos

$$\begin{aligned} \text{epi } f &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid -f'(t)x_1 + x_2 \geq f(t) - tf'(t), \quad t \in \text{dom } f \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^2 \mid [g(t)h'(t) - h(t)g'(t)]x_1 + h(t)^2x_2 \geq \\ g(t)h(t) + tg(t)h'(t) - th(t)g'(t), \quad t \in \text{dom } f \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

así que  $\sigma_2 = \{a_t'x \geq b_t, t \in \text{dom } f\}$ , donde

$$a_t = \left( \begin{array}{c} g(t)h'(t) - h(t)g'(t) \\ h(t)^2 \end{array} \right) \text{ y } b_t = g(t)h(t) + tg(t)h'(t) - th(t)g'(t),$$

es otra representación de  $\text{epi } f$  con coeficientes polinomiales cuyos grados no son mayores a  $d = \text{deg } h + \max\{\text{deg } g, \text{deg } h\}$ .

Para poder concluir que  $\sigma_2$  es analítico o polinomial, necesitamos reemplazar el conjunto de índices de  $\sigma_2$  por un intervalo compacto, y para esto, analizaremos tres casos.

Si  $\text{dom } f$  es acotado, entonces  $T := \text{cl } \text{dom } f$  es un intervalo compacto y el sistema polinomial definido arriba es otra representación de  $\text{epi } f$ , por la continuidad de los coeficientes.

Si  $\text{dom } f$  es una semirecta en  $\mathbb{R}$  acotada por abajo, podemos escribir  $\text{dom } f = ]\alpha, +\infty[$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Consideremos la función  $\Psi(s) = \frac{(1-\alpha)s + \alpha}{1-s}$ , la cual define una biyección entre  $]0, 1[$  y  $]\alpha, +\infty[$ . El cambio de índice dado por  $t = \Psi(s)$  en  $\sigma_2$  nos da el sistema equivalente

$$\sigma_3 := \left\{ \begin{array}{l} [g(\Psi(s))h'(\Psi(s)) - h(\Psi(s))g'(\Psi(s))]x_1 + h(\Psi(s))^2x_2 \geq \\ g(\Psi(s))h(\Psi(s)) + \Psi(s)g(\Psi(s))h'(\Psi(s)) - \Psi(s)h(\Psi(s))g'(\Psi(s)), s \in ]0, 1[ \end{array} \right\},$$

donde los coeficientes son funciones racionales. Multiplicando por  $(1-s)^d > 0$  ambos miembros de la desigualdad de índice  $s$  en  $\sigma_3$ , obtenemos una representación de  $\text{epi } f$  con coeficientes polinomiales y conjunto de índices el intervalo  $]0, 1[$ . Pero podemos agregar las desigualdades correspondientes a  $s = 0, 1$ , sin modificar el conjunto factible, lo cual permite obtener la representación polinomial que buscábamos para  $F = \text{epi } f$ . El argumento es similar si  $\text{dom } f$  es una

semirecta en  $\mathbb{R}$  acotada por arriba.

Finalmente, supongamos que  $\text{dom } f = \mathbb{R}$ . Consideremos la función  $\phi(s) = \frac{s}{1-s^2}$ , la cual define una biyección entre  $] -1, 1[$  y  $\mathbb{R}$ . Razonando como antes, obtenemos una representación polinomial de  $F = \text{epi } f$  si multiplicamos los dos miembros de la desigualdad de índice  $s$  en  $\sigma_3$ , por  $(1-s)^d > 0$ .  $\square$

A continuación un ejemplo para ilustrar el primer caso de la prueba anterior. Los otros dos casos se retomarán en la prueba de la Proposición 1.5.4.

**Ejemplo 1.5.1** Sea  $F = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq (1-x_1^2)^{-1}, |x_1| < 1\}$  y sea

$$f(x) = \begin{cases} (1-x^2)^{-1}, & |x| < 1, \\ +\infty, & |x| \geq 1 \end{cases}.$$

En este caso,  $a_t = \begin{pmatrix} -2t \\ (1-t^2)^2 \end{pmatrix}$ ,  $b_t = 1 - 3t^2$  y  $T = \text{cl dom } f = [-1, 1]$ . Por lo que

$$F = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -2tx_1 + (1-t^2)^2x_2 \geq 1 - 3t^2, t \in [-1, 1]\}.$$

**Proposición 1.5.4.** Si  $F$  es la intersección de un cono en  $\mathbb{R}^3$  con  $x_3 = 0$  (identificado como  $\mathbb{R}^2$ ), entonces  $F$  admite una representación polinomial en  $\mathbb{R}^2$  y  $\text{deg } F$  está dado por la tabla siguiente:

$F$	$\deg F$
$\emptyset$	0
un elemento	2
semiespacio	2
un ángulo en el plano	1
envoltura convexa de una elipse	4
envoltura convexa de una parábola	4
envoltura convexa de un brazo de hipérbola	2

**Prueba.** La llave de la prueba será la Proposición 1.4.2 aplicada a  $\mathbb{R}^2$  y discutiremos los siete casos mencionados en la tabla.

Caso 1: Observemos que, tomando  $a_1(t) = \dots a_n(t) = 0$  y  $b(t) = 1$  para todo  $t \in T = [0, 1]$ , tenemos una representación polinomial de  $\emptyset$ , de grado 0, esto es  $\deg \emptyset = 0$ .

Caso 2: Si  $F$  tiene un solo elemento, podemos verlo como la traslación de  $\{0_2\}$ , y ya hemos visto que  $\deg\{0_2\} = 2$ , (pag. 23).

Caso 3: Si  $F$  es una semirecta, entonces es la imagen de  $G = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq 0, x_1 = 0\}$ , después de una adecuada transformación afin, y como  $\{tx_1 + t^2x_2 \geq 0, t \in [-1, 1]\}$ , es una representación polinomial de  $G$ , tenemos que  $\deg F = \deg G = 2$ .

Caso 4: Si  $F$  es un ángulo en el plano, entonces es la intersección de dos semiespacios, luego,  $\deg F = 1$ .

Caso 5: Si  $F$  es la cubierta convexa de una elipse cuyo centro de simetría es  $c$ , entonces existe una transformación afin en  $\mathbb{R}^2$ ,  $g(x) = Mx + c$ , con  $M$  matriz regular  $2 \times 2$  y  $c \in \mathbb{R}^2$ , tal que  $bd F = \{g(x) \mid x \in S_2\}$ . Dado  $y \in \text{int } F$ , cualquier línea que contenga a  $y$  interseca a  $bd F$  en dos puntos. Sean  $y^1, y^2 \in bd F$  tales que existe  $\lambda \in ]0, 1[$  de tal forma que  $y = (1 - \lambda)y^1 + \lambda y^2$ .

Sea  $x^i := M^{-1}(y^i - c) \in S_2$ ,  $i = 1, 2$ , y sea  $x := (1 - \lambda)x^1 + \lambda x^2 \in B_2 \setminus S_2$ . Entonces

$$y = (1 - \lambda)g(x^1) + \lambda g(x^2) = g(x),$$

lo que significa que  $\text{int } F \subset \{g(x) \mid x \in B_2 \setminus S_2\}$ , cumpliéndose también la inclusión inversa. Por lo tanto

$$F = (\text{int } F) \cup (\text{bd } F) = \{g(x) \mid x \in B_2\},$$

y  $\deg F = \deg B_2 = 4$  por la Proposición 1.5.2.

Caso 6: Sea  $F$  la cubierta convexa de una parábola. Dado  $y \in \text{int } F$ , existe una línea que contiene a  $y$  y que interseca a  $\text{bd } F$  en dos puntos. Como cualquier parábola es la imagen de la parábola  $x_2 = x_1^2$  al aplicar cierta transformación afín de  $\mathbb{R}^2$ , sólo tenemos que probar que el conjunto  $G := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq x_1^2\}$  admite una representación polinomial de grado a lo más 4. Aplicando la Proposición 1.5.3 con  $f(x) = x^2$ , tenemos que  $a_t = \begin{pmatrix} -2t \\ 1 \end{pmatrix}$  y  $b_t = -t^2$ , con lo cual obtenemos

$$\begin{aligned} G &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -2tx_1 + x_2 \geq -t^2, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -2s(1 - s^2)x_1 + (1 - s^2)^2x_2 \geq -s^2, s \in [-1, 1]\}, \end{aligned}$$

de donde  $\deg G \leq 4$ . Denotemos por  $\sigma_1$  a la representación polinomial de  $G$  anterior. Supongamos que  $\sigma_2 = \{p(t)x_1 + q(t)x_2 \geq r(t), t \in T\}$  es una representación de  $G$  de grado mínimo,  $2 \leq \deg \sigma_2 \leq 3$ , obtendremos una contradicción. Para cada  $s \in [-1, 1]$  tenemos una restricción ajustada en un único punto de  $\text{bd } G$ , (Definición 1.2.8) y un punto de este tipo diferente, para cada  $s$  diferente. Como  $G$  tiene una representación suave, aplicando el Lema 1.2.3 y el Teorema 1.3.1 en  $\sigma_2$ , existe  $t_s \in T$  y  $\mu_s > 0$  tales que

$$\begin{pmatrix} p(t_s) \\ q(t_s) \\ r(t_s) \end{pmatrix} = \mu_s \begin{pmatrix} -2s(1-s^2) \\ (1-s^2)^2 \\ -s^2 \end{pmatrix},$$

de donde se deduce la siguiente igualdad  $p(t_s)^2 + 4q(t_s)r(t_s) = 0$ , para cada  $s \in [-1, 1]$ . Como  $\{t_s, s \in [-1, 1]\}$  es un conjunto infinito,

$$p^2 = -4qr, \quad (16)$$

por lo que  $q$  y  $r$  no son los polinomios cero ni tienen factores lineales comunes (por Corolario 1.3.1.1), y el orden de cualquier cero (real o complejo) en ambos polinomios debe ser par. Por otro lado, como  $0_2 \in F$  y  $0^+F = \left\{ \begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ , tenemos que

$$r(t) \leq 0 \text{ y } q(t) \geq 0 \text{ para todo } t \in T. \quad (17)$$

Sea  $S = \{t \in T \mid q(t) \neq 0\}$ . Probaremos que  $\left\{ \frac{p(t)}{q(t)}, t \in S \right\}$  no está acotado ni por arriba ni por abajo. En efecto, si  $k_1 \leq \frac{p(t)}{q(t)}$  para todo  $t \in S$ , entonces  $\begin{pmatrix} 1 \\ -k_1 \end{pmatrix} \in 0^+F$ . Análogamente, si  $\frac{p(t)}{q(t)} \leq k_2$  para todo  $t \in S$ , entonces  $\begin{pmatrix} -1 \\ k_2 \end{pmatrix} \in 0^+F$ . Luego, tomando en cuenta la compacidad de  $T$ , existe una sucesión  $\{s_j^k\}_{k=1}^\infty \subset S$  y  $t_j \in T$ ,  $j = 1, 2$  tales que  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_j^k = t_j$  y  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p(s_j^k)}{q(s_j^k)} = (-1)^j \infty$ ,  $j = 1, 2$ . Si  $t_1 \neq t_2$ , como  $\lim_{k \rightarrow \infty} q(s_j^k) = q(t_j) = 0$ ,  $j = 1, 2$ ,  $(t - t_1)^2(t - t_2)^2$  divide a  $q(t)$ , ver (16), contradiciendo el hecho de que  $\deg \sigma_2 \leq 3$ . Luego  $t_1 = t_2$ , y tenemos que el signo de  $\frac{p(t)}{q(t)}$  cambia en cualquier vecindad de  $t_1$ , por lo que  $t_1 \in \text{int } T$  y podemos escribir

$$p(t) = (t - t_1)^m p_1(t), \quad p_1(t_1) \neq 0, \quad 0 \leq m \leq 3 \quad (18)$$

y

$$q(t) = (t - t_1)^k q_1(t), \quad q_1(t_1) \neq 0, \quad m < k \leq 3. \quad (19)$$

Como  $\frac{p(t)}{q(t)} = \frac{p(t_1)}{q(t_1)} (t - t_1)^{m-k}$ ,  $k - m$  debe ser un número impar positivo, lo cual lleva a  $k = 2$  y  $m = 1$ . De (19), el número par  $\deg q = 2 + \deg q_1 \leq 3$ , así que  $\deg q_1 = 0$ . Entonces, retomando (17), podemos escribir

$$q(t) = \mu(t - t_1)^2, \quad \mu > 0$$

Con respecto al número par  $\deg r \leq 3$ , si  $\deg r = 0$ , entonces  $r$  es un número negativo (por (17)) y  $0_2$  un punto de Slater para  $\sigma_2$ , lo cual contradice que  $0_2 \in bd G$ . Por lo tanto  $\deg r = 2$ . Como el orden de todos los ceros de  $r$  es par, y recordando (16), existe  $t_2 \in \mathbb{R}$  y  $\rho < 0$  tales que

$$r(t) = \rho(t - t_2)^2 \quad \text{y} \quad p(t) = \alpha(t - t_1)(t - t_2),$$

donde  $\alpha^2 = -4\rho\mu > 0$ . Concluiremos esta parte de la prueba mostrando que  $\sigma_2$  no puede ser una representación de  $G$ .

Denotemos  $c := -\frac{\alpha}{\mu} \left( \frac{t-t_2}{t-t_1} \right)$ , la frontera de los semiespacios definidos en  $\sigma_2$  se puede escribir como  $x_2 = cx_1 + f(c)$ , con  $f(c) = \frac{\rho\mu}{\alpha^2} c^2 = -\frac{c^2}{4}$ . Esta familia de líneas se pueden interpretar como la solución general de la ecuación de Claireaut  $y = xy' + f(y')$ , cuya solución particular es la curva  $\left\{ \left( \frac{v}{2}, \frac{v^2}{4} \right), v \in V \right\}$ , donde  $V = \left\{ \left( -\frac{\alpha}{\mu} \right) \left( \frac{t-t_2}{t-t_1} \right), t \in T \setminus \{t_1\} \right\}$  puede ser expresado también como  $V = ]-\infty, \delta]$  y  $[\gamma, +\infty[$ . Por lo tanto, el conjunto solución de  $\sigma_2$  es la intersección de los semiespacios soporte de  $G$  en los puntos con abcisa  $x_1 \in V$ , y este conjunto es la unión de  $G$  con el triángulo formado por una cuerda de la parábola y las líneas tangentes en los puntos extremos. Así,  $\sigma_2$  no puede ser una representación de  $G$  y  $\deg G = 4$ .



Caso 7: Sea  $F$  la envoltura convexa de un brazo de hipérbola, esto es, la imagen de una transformación afin adecuada en  $\mathbb{R}^2$  de  $G = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq x_1^{-1}, x_1 > 0\}$ . Tomando

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1}, & x > 0, \\ +\infty, & x \leq 0, \end{cases}$$

de la Proposición 1.5.3, obtenemos  $a_t = \begin{pmatrix} 1 \\ t^2 \end{pmatrix}$  y  $b_t = 2t$ , así que

$$\begin{aligned} G &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + t^2 x_2 \geq 2t, t \in ]0, +\infty[ \} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid (1-s)^2 x_1 + s^2 x_2 \geq 2s(1-s), s \in [0, 1] \}. \end{aligned}$$

Por lo que  $\deg F = \deg G = 2$  (recordar Teorema 1.4.4).  $\square$

La existencia de representación polinomial para los conjuntos considerados en la proposición anterior, casos 5, 6, y 7 se demuestra en [17]. La ventaja de la prueba usada aquí, es que es más general y nos proporciona  $\deg F$ , como se puede ver en el ejemplo siguiente.

**Ejemplo 1.5.2** Sea  $F = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1 \leq 0\}$ . Encontramos una transformación afin en  $\mathbb{R}^2$ ,  $g(x) = Mx + c$ , con

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } c = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

tal que  $g(S_2) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1 = 0\}$  es la envoltura convexa de la elipse  $2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1 = 0$ . Tomando  $a_t$  y  $b_t$  con  $t \in [-1, 1]$ , como en (15),

$$a_t' M^{-1} = (t^4 - 3t^2 + 1, 2t(t^2 - 1)) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (t^4 + 2t^3 - 3t^2 - 2t + 1, 2t(t^2 - 1))$$

y  $b_t + a_t' M^{-1} c = 2t^2$ . Por lo que, de la Proposición 1.4.2, obtenemos una representación polinomial para  $F$ ,

$$\{(t^4 + 2t^3 - 3t^2 - 2t + 1)x_1 + 2t(t^2 - 1)x_2 \leq 2t^2, t \in [-1, 1]\}.$$

# CAPÍTULO 2: Continuidad del Mapeo Optimal Dual

## 2.1 INTRODUCCIÓN

En el Capítulo 1 tratamos con el conjunto solución de sistemas de desigualdades lineales semi-infinitos, en lo que resta de la tesis trataremos con problemas de programación lineal semi-infinita, los cuales tienen, como mencionamos entonces, a estos sistemas lineales semi-infinitos como restricciones. Generalmente un problema de este tipo puede formularse como:

$$\begin{aligned} \inf c'x \\ a_t'x \geq b_t \end{aligned}$$

donde  $c \in \mathbb{R}^n, t \in T$ ,  $T$  es un conjunto arbitrario, posiblemente infinito,  $a_t = a(t) = (a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t))$ ,  $a$  es una función de  $T$  en  $\mathbb{R}^n$  y  $b_t = b(t)$ , donde  $b$  es una función de  $T$  en  $\mathbb{R}$ . A este problema lo llamaremos primario, lo denotaremos con (P) y le asociaremos el problema dual (D), el cual, se formula como:

$$\begin{aligned} \sup \sum_{t \in T} \lambda_t b_t \\ \sum_{t \in T} \lambda_t a_t = c \end{aligned}$$

donde  $\lambda_t = \lambda(t) \geq 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^{(T)}$  y  $\mathbb{R}^{(T)}$  es el conjunto de todas las funciones de  $T$  en

$\mathbb{R}$  que son cero excepto en un subconjunto finito de  $T$ , dotado con las normas:

$$\|\lambda\|_1 = \sum_{t \in T} |\lambda_t|, \quad \|\lambda\|_\infty = \max_{t \in T} |\lambda_t|, \quad \text{o la norma euclideana } \|\lambda\| = \left( \sum_{t \in T} (\lambda_t)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

este espacio  $\mathbb{R}^{(T)}$  también se le conoce como espacio de sucesiones finitas generalizadas, y es lineal con las operaciones usuales de suma de funciones y el producto por un escalar.

Para cada par de problemas (P) y (D) obtenemos una familia de problemas al variar libremente los datos  $\pi = (c, a., b.)$ , pero dejando fijos la dimensión  $n \in \mathbb{N}$  y el conjunto de índices  $T$ , por lo que, nuestro espacio de parámetros será  $\Pi = \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^T \times \mathbb{R}^T$ , con elemento nulo  $\theta = (0_n, (0_n)_T, 0_T)$ . Para medir dichas perturbaciones consideraremos la aplicación

$$d(\pi_1, \pi_2) = \max \left\{ \|c^1 - c^2\|_\infty, \sup \left\| \begin{pmatrix} a_t^1 \\ b_t^1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_t^2 \\ b_t^2 \end{pmatrix} \right\|_\infty \right\},$$

considerada también en [12, 13 y 18]. Esta aplicación puede tomar valores en  $[0, \infty)$ , pero localmente es una métrica que provee a  $\Pi$  de una topología de Hausdorff, que satisface el primer axioma de numerabilidad, e introduce en  $\Pi$  la convergencia uniforme, esto ocurre cuando tomamos solo pequeñas perturbaciones y se tiene  $d(., \pi) < \infty$ .  $\Pi$  también es un espacio lineal con las operaciones componente a componente. Nuestro interés ahora, es el estudio de la estabilidad de (P) y (D) al variar todos los datos. La estabilidad de (P) ya ha sido tratada y reportada en [12, 13

y 14], en [14] también se presentan resultados sobre la estabilidad de (D), analizando ahí bajo qué condiciones el problema dual permanece consistente (o inconsistente) después de perturbaciones suficientemente pequeñas de todos los datos y comparando los resultados con los hallados para el problema primario, un resumen de estos resultados los presentamos en las secciones 2.2 y 2.3. En la sección 2.4, ofrecemos resultados sobre la continuidad del mapeo optimal, la cual nos interesa porque esta proporciona un tipo de estabilidad en el problema dual, en el siguiente sentido; una aproximación en el parámetro  $\pi$ , nos indicará una aproximación al conjunto optimal. En dicha sección obtenemos condiciones suficientes para que el mapeo optimal sea uniformemente acotado y mostramos que la unicidad es necesaria para que este mapeo sea semicontinuo inferiormente y casi semicontinuo inferiormente.

Continuemos ahora con definiciones que necesitaremos en el desarrollo de este tema.

Para cada  $\pi = (c, a., b.) \in \Pi$ , tendremos los problemas (P) y (D), con su conjunto factible  $F$  y  $\Lambda$  respectivamente,  $F$  definido como en el Capítulo I, y  $\Lambda$  definido como sigue

$$\Lambda := \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)} \mid \sum_{t \in T} \lambda_t a_t = c \right\},$$

también asociado a cada uno de ellos su conjunto optimal, denotado por  $F^*$  y  $\Lambda^*$

respectivamente,  $F^*$  como en el Capítulo I y  $\Lambda^*$  como sigue

$$\Lambda^* := \left\{ \lambda \in \Lambda \mid \sum_{t \in T} \lambda_t b_t = \sup \left\{ \sum_{t \in T} \alpha_t b_t, \alpha \in \Lambda \right\} \right\},$$

y sus valores optimales  $v$  y  $v^D$ . Cuando necesitemos mencionar más de un parámetro utilizaremos índices de la forma  $\pi_r = (c^r, a^r, b^r)$ ,  $(P_r)$ ,  $(D_r)$ ,  $F_r$ ,  $\Lambda_r$ , etcétera.

En el espacio de parámetros  $\Pi$ , definimos los conjuntos:

$$\begin{aligned} \Pi_c &= \{\pi \in \Pi \mid F \neq \emptyset\}, & \Pi_i &= \{\pi \in \Pi \mid F = \emptyset\}, \\ \Pi_c^D &= \{\pi \in \Pi \mid \Lambda \neq \emptyset\}, & \Pi_i^D &= \{\pi \in \Pi \mid \Lambda = \emptyset\}, \\ \Pi_s &= \{\pi \in \Pi \mid F^* \neq \emptyset\}, & \Pi_s^D &= \{\pi \in \Pi \mid \Lambda^* \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

los cuales nos proporcionan las clases de parámetros consistentes ( $F \neq \emptyset$ ), inconsistentes ( $F = \emptyset$ ) y solubles ( $F^* \neq \emptyset$ ), para el problema primario, y para el problema dual en los demás casos. Estos conjuntos resultan ser conos en el espacio lineal  $\Pi$ , y para determinar si hay estabilidad, necesitamos estudiar el interior de cada uno ellos, en estos dos capítulos, en particular, nos ocuparemos de  $\text{int } \Pi_s^D$ , puesto que el interior del resto de estos conjuntos ya ha sido caracterizado y reportado en [12, 13] y otros artículos de los mismos autores.

Para el estudio de la pertenencia de un parámetro  $\pi$  a  $\text{int } \Pi_c$  y a  $\text{int } \Pi_c^D$  son muy importantes las condiciones dadas por la semicontinuidad inferior según Berge de los mapeos factibles  $\mathcal{F} : \Pi \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\mathcal{L} : \Pi \rightarrow \mathbb{R}^{(T)}$ , los cuales son mapeos

multivaluados (de punto a conjunto). El mapeo  $\mathcal{F}$  asigna a cada  $\pi \in \Pi$  su conjunto factible  $F$  y el mapeo  $\mathcal{L}$  asigna a cada  $\pi \in \Pi$  el conjunto  $\Lambda$ . Puesto que nos interesa  $\text{int } \Pi_S^D$ , dedicamos este capítulo a la continuidad del mapeo optimal dual  $\mathcal{L}^* : \Pi \rightarrow \mathbb{R}^{(T)}$ , que asigna a cada  $\pi \in \Pi$  su correspondiente conjunto optimal  $\Lambda^*$ , es decir  $\mathcal{L}^*(\pi) = \Lambda^*$ . Para el caso de  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{L}^*$  es necesario dotar a  $\mathbb{R}^{(T)}$  de una topología adecuada, para lo cual, en su momento, recurriremos a las normas Euclideana,  $l_\infty$  (o de Chebyshev) y  $l_1$ , denotadas por  $\|\cdot\|$ ,  $\|\cdot\|_\infty$  y  $\|\cdot\|_1$ , respectivamente. El elemento nulo en  $\mathbb{R}^{(T)}$ , lo denotaremos por  $0_T$ .

Para los mapeos multivaluados que mencionamos antes, consideraremos los tipos de continuidad siguientes, las primeras cuatro definiciones han sido tomadas de [4].

**Definición 2.1.1** Si  $Y$  y  $Z$  son dos espacios topológicos y  $S : Y \rightarrow Z$  es un mapeo multivaluado, entonces, diremos que  $S$  es **semicontinuo inferiormente según Berge** ( $B$ -lsc), en un punto  $y \in Y$ , si para todo abierto  $W \subset Z$  tal que  $W \cap S(y) \neq \emptyset$  existe un abierto  $U \subset Y$ , que contiene a  $y$ , tal que  $W \cap S(y^1) \neq \emptyset$  para cada  $y^1 \in U$ .

**Definición 2.1.2**  $S$  es **semicontinuo superiormente según Berge** ( $B$ -usc) en un punto  $y \in Y$ , si para todo abierto  $W \subset Z$  tal que  $S(y) \subset W$  existe una vecindad abierta  $U$  de  $y$  en  $Y$ , tal que  $S(y^1) \subset W$  para cada  $y^1 \in U$ .

**Definición 2.1.3** Si  $S$  es tanto semicontinuo inferiormente como superiormente según Berge en  $y \in Y$ , entonces es llamado  **$B$ -continuo** en  $y$ .

**Definición 2.1.4** Supongamos que  $Y$  y  $Z$  son espacios numerables; diremos que  $S$  es cerrado en  $y \in Y$ , si para cualquier par de sucesiones  $\{y^r\}$  y  $\{z^r\}$ , las cuales satisfagan  $\lim_r y^r = y$ ,  $\lim_r z^r = z$  y  $z^r \in S(y^r)$  para todo  $r$ , se tiene que  $z \in S(y)$ . Diremos que  $S$  es un **mapeo cerrado** si lo es en cualquier punto.

**Definición 2.1.5, [13]** Si  $Z$  es un espacio pseudométrico o métrico, diremos que  $S$  es **continuo según Hausdorff (H-continuo)**, en  $y \in Y$ , si, dado  $\varepsilon > 0$  existe una vecindad abierta  $U$  de  $y$  en  $Y$ , tal que, la  $H$ -distancia entre las imágenes satisface

$$d_H(S(y), S(y^1)) := \max\left\{ \sup_{z^1 \in S(y^1)} d(z^1, S(y)), \sup_{z \in S(y)} d(z, S(y^1)) \right\} < \varepsilon$$

para cada  $y^1 \in U$ , donde  $d(z, S) := \inf\{d(z, s) | s \in S\}$ , (suponiendo  $d(z, S) = \infty$  si  $S$  es vacío).



## 2.2 ESTABILIDAD DEL PROBLEMA PRIMARIO ( $\text{int } \Pi_c$ )

En los teoremas que mencionaremos a continuación y cuya demostración puede verse en [13 y 14], podemos observar la relación tan fuerte entre la semicontinuidad inferior según Berge y el interior del conjunto de parámetros consistentes, además, cómo el acotamiento del conjunto factible  $F$ , proporciona una condición suficiente para la continuidad del mapeo factible.

**Teorema 2.2.1** (Teoremas 1 en [13] y 3.1 y 6.2 en [14]). *Para  $\pi = (c, a, b) \in \Pi$  dado, son equivalentes:*

i)  $\pi \in \text{int}\Pi_c$ ;

ii)  $\mathcal{F}$  es B-lsc en  $\pi \in \Pi_c$ ;

iii) existe  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  y  $\varepsilon > 0$  tal que  $a_t^1 \bar{x} \geq b_t + \varepsilon$  para todo  $t \in T$  ( $\bar{x}$  es llamado strong Slater element, o SS-element);

iv)  $(c, a, b^1) \in \Pi_c$  para  $b^1$  suficientemente cercano a  $b$  (en la pseudométrica uniforme);

v)  $\pi \in \Pi_c$  y  $d(0_{n+1}, \mathbb{D}) > 0$ , con  $\mathbb{D} := \text{conv}\left\{\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}, t \in T\right\}$ , lo cual significa que

$0_{n+1} \notin \text{cl}\mathbb{D}$ .

**Teorema 2.2.2** (Teorema 2 en [13]). Sea  $\pi \in \Pi_C$ ;

i) si  $F$  es acotado, entonces  $\mathcal{F}$  es  $B$ -usc y uniformemente acotado en  $\pi$ ;

ii) si  $F$  es acotado y  $\pi \in \text{int } \Pi_C$ , entonces  $\mathcal{F}$  es  $B$ -continuo y  $H$ -continuo en una cierta vecindad de  $\pi$ .

En el Teorema 4 de [13] se demuestra que  $\text{int } \Pi_C \neq \emptyset$ , por lo tanto, todo lo anterior tiene sentido, el elemento elegido para tal demostración es  $(0_n, 0_n, -1)$ , el cual satisface la condición iii) del Teorema 2.2.1.

## 2.3 ESTABILIDAD DEL PROBLEMA DUAL

$(\text{int } \Pi_c^D)$

El Teorema siguiente caracteriza  $\text{int } \Pi_c^D$ , es decir, aquellos parámetros que bajo pequeñas perturbaciones permanecen consistentes en el sentido dual. Observemos que las condiciones ii)-iv) resultan ser las versiones duales de las condiciones correspondientes en el Teorema 2.2.1, aunque iii) ahora requiere del cono  $M := \text{cone}\{a_t, t \in T\}$ .

**Teorema 2.3.1** (Teorema 5 en [13]). *Sea  $\pi = (c, a., b.) \in \Pi$ , son equivalentes:*

- i)  $\pi \in \text{int } \Pi_c^D$ ;
- ii)  $\mathcal{L}$  es B-lsc en  $\pi \in \Pi_c^D$ ;
- iii)  $c \in \text{int } M$ ;
- iv)  $(c^1, a., b.) \in \Pi_c^D$  para todo  $c^1$  suficientemente cercano a  $c$ .

*Si  $\pi \in \Pi_c \cap \Pi_c^D$ , entonces también agregamos a la lista anterior:*

- v)  $F^*$  es un conjunto acotado no vacío;
- vi)  $v$  es finito y los conjuntos de nivel de  $(P)$  son acotados;
- vii) existe  $S \subset T$ ,  $|T| < \infty$ , tal que los conjuntos de nivel primarios, no vacíos, del

*subproblema finito*

$$\begin{aligned} & \inf c^1 x \\ \text{s.a } & a_t^1 x \geq b_t, \quad \text{para todo } t \in S, \end{aligned}$$

*son acotados;*

viii)  $F_1^*$  es un conjunto acotado no vacío para todo  $\pi_1 = (c^1, a., b.)$ , siempre que  $c^1$  esté suficientemente cerca de  $c$ ;

ix) existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $F_1^*$  es un conjunto acotado no vacío para todo  $\pi_1 \in \Pi_c$  tal que  $d(\pi, \pi_1) < \varepsilon$ .

Es interesante observar que en este teorema se dan condiciones también para que  $\pi \in \text{int } \Pi_S$ , el interior del conjunto de parámetros con solución primaria. De hecho, se puede consultar [12] para comprobar que las condiciones que caracterizan completamente al interior de este conjunto son iii) y la condición fuerte de Slater. Este resultado lo enunciamos en el Teorema 3.1.1.

Una gran cantidad de aplicaciones de la programación lineal semi-infinita tienen como conjunto de restricciones a sistemas continuos, es decir, a sistemas lineales donde  $a$  y  $b$ , son funciones continuas sobre un espacio compacto de Hausdorff  $T$ , ver ejemplos en [12, Capítulo 1]. Ya que sólo tienen sentido perturbaciones continuas en este contexto, surge la necesidad de considerar, para tal caso, un espacio de parámetros especial  $\Pi_o := \{\pi \in \Pi \mid a. \text{ y } b. \text{ son continuas sobre } T\}$ , con  $T$ , como

se mencionó antes, compacto de Hausdorff, el cual será llamado espacio de parámetros continuos. Aplicaremos el subíndice "o" a todos los objetos relacionados con este espacio, como por ejemplo;  $\Pi_{oc}$  el subconjunto de parámetros continuos consistentes en el sentido primario ( i.e. con  $F \neq \emptyset$ ),  $int_o \Pi_{oc}$ , y similarmente,  $\mathcal{F}_o$ ,  $\mathcal{L}_o$ , para las restricciones de  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{L}$  en  $\Pi_o$ , respectivamente. Observemos que si  $|T| < \infty$ , entonces  $T$  es un espacio compacto de Hausdorff en la topología discreta y  $\Pi_o = \Pi$ . Así, cualquier resultado sobre estabilidad de problemas continuos se extiende a los problemas de programación lineal ordinaria. Es importante mencionar ahora, que los Teoremas 2.2.1 y 2.3.1, se satisfacen en su versión continua, es decir, para  $\pi \in \Pi_o$ , reemplazando por supuesto, a  $\Pi_c$  con  $\Pi_{oc}$ , a  $\mathcal{F}$  con  $\mathcal{F}_o$ , etcétera.

Otros resultados importantes relacionados con el espacio de parámetros continuos son los dos siguientes.

**Corolario 2.3.1** (Corolario 1, [13]) *Si  $T$  es un espacio de Hausdorff compacto entonces  $int_o \Pi_{oc}^D = int \Pi_c^D$ .*

**Teorema 2.3.2** (Teorema 6, [13]) *Dado un espacio de Hausdorff compacto  $T$ , y  $\pi \in \Pi_o$ , son equivalentes:*

i)  $\pi \in int_o \Pi_c \cap int_o \Pi_c^D$

ii)  $F^*$  y  $\Lambda^*$  son no vacíos y acotados;

iii)  $(P_1)$  y  $(D_1)$  son solubles para cada  $\pi_1$  en una cierta vecindad de  $\pi$  en  $\Pi_0$ .

Pasemos ahora a resultados que tienen que ver con propiedades del mapeo factible dual; veremos que  $\mathcal{L}$ , en general, no es un mapeo cerrado y dos resultados que dan condiciones para la continuidad de este mapeo. Para ilustrar el primer resultado, veamos el ejemplo siguiente, tomado de [13]:

**Ejemplo 2.3.1** Sea  $\pi = (c, a., b.)$  tal que  $c \neq 0$  y el conjunto  $\{t \in T \mid a_t = c\}$  es un conjunto infinito, Tomemos una sucesión en este conjunto  $\{t_k\}$ , con  $t_i \neq t_j$  para  $i \neq j$ , y definamos  $\lambda^r \in \mathbb{R}_+^{(T)}$  como sigue;

$$\lambda_t^r = \frac{1}{r}, \text{ si } t = t_k, k = 1, 2, \dots, r, \text{ y } \lambda_t^r = 0 \text{ en los demás casos, } r = 1, 2, \dots$$

Entonces,  $\{\lambda^r\} \subset \Lambda$  y  $\lim_r \|\lambda^r\|_\infty = 0$ , esto significa que  $\lambda^r$  converge en la norma  $l_\infty$  a  $0_T$ , el cual no pertenece a  $\Lambda$ . Por lo tanto  $\mathcal{L}$  no es  $l_\infty$ -cerrado en  $\pi$  y  $\mathcal{L}_0$  no puede ser  $l_\infty$ -cerrado cuando  $T$  (espacio de Hausdorff compacto) es infinito. Sin embargo, si  $\mathbb{C} := \text{conv}\{a_t, t \in T\}$  es acotado (equivalente a  $a.$  acotada), se tiene que  $\mathcal{L}$  es  $l_1$ -cerrado en  $\pi$ , como se muestra en el teorema siguiente.

**Teorema 2.3.3** (Teorema 7, [13])  $\mathcal{L}$  es  $l_1$ -cerrado en los puntos del subespacio lineal abierto de  $\Pi$ ,  $\Gamma := \{\pi \in \Pi \mid \mathbb{C} \text{ es acotado}\}$ . Además, si  $T$  es un espacio de Hausdorff compacto, entonces  $\mathcal{L}_0$  es  $l_1$ -cerrado y por tanto,  $\mathcal{L}$  será cerrado si  $|T| < \infty$ .

Para el Teorema que sigue necesitamos mencionar la cota de Lipschitz para la

H-distancia entre dos conjuntos  $\mathbb{C}_1$  y  $\mathbb{C}_2$  asociados a dos parámetros diferentes  $\pi_1$  y  $\pi_2$ ,  $d_H(cl\mathbb{C}_1, cl\mathbb{C}_2) \leq \sqrt{n} d(\pi_1, \pi_2)$ , (Lema 2, [13]). Incluimos la demostración de dicho teorema porque presentaremos un resultado análogo para el mapeo optimal  $\mathcal{L}^*$ .

**Teorema 2.3.4** (Teorema 8, [13]) *Dado  $\pi = (c, a, b) \in \Pi$ , con su respectivo  $\mathbb{C} = conv\{a_t, t \in T\}$ , si  $0_n \notin cl\mathbb{C}$ , entonces  $\mathcal{L}$  es uniformemente acotado en  $\pi$ . Además, si  $T$  es un espacio de Hausdorff compacto y  $\Lambda_o \neq \emptyset$  es acotado ( i.e.  $0_n \notin \mathbb{C}$  ), entonces  $\mathcal{L}_o$  es uniformemente acotado en  $\pi \in \Pi_o$ .*

**Prueba** La condición  $0_n \notin cl\mathbb{C}$ , implica que existe  $\mu > 0$  tal que  $\|x\| \geq \mu$ , para todo  $x \in cl\mathbb{C}$ . Consideremos  $\pi_1 = (c^1, a^1, b^1)$  tal que  $d(\pi, \pi_1) < \frac{\mu}{2\sqrt{n}}$ . Si  $\pi_1 \in \Pi_i^D$  terminamos la demostración porque  $\Lambda_1 = \emptyset$  es acotado. Si no es el caso, sea  $\lambda^1 \in \Lambda_1$  arbitrario, esto es,  $c^1 = \sum_{t \in T} \lambda_t^1 a_t^1$ , con  $\lambda^1 \neq 0_T$ . Dividiendo entre

$\|\lambda^1\|_1$ , observamos que  $\frac{\sum_{t \in T} \lambda_t^1}{\|\lambda^1\|_1} = 1$ , de donde  $\frac{c^1}{\|\lambda^1\|_1} \in \mathbb{C}_1$  y así

$$\frac{c^1}{\|\lambda^1\|_1} \geq \inf_{x^1 \in \mathbb{C}_1} \|x^1\|_1 \geq \inf_{x^1 \in \mathbb{C}_1} \|x^1\| \geq \frac{\mu}{2}.$$

La última desigualdad es por lo siguiente, si suponemos que existe  $x^1 \in \mathbb{C}_1$ , con  $\|x^1\| < \frac{\mu}{2}$ , podemos encontrar, por Lema 2 en [13], un  $x \in \mathbb{C}$  tal que

$$\|x - x^1\| \leq \sqrt{n} d(\pi, \pi_1) < \frac{\mu}{2}.$$

Entonces  $\|x\| \leq \|x - x^1\| + \|x^1\| < \mu$ , lo cual constituye una contradicción. Por lo tanto, de aquella desigualdad tenemos

$$\begin{aligned} \|\lambda^1\|_\infty &\leq \|\lambda^1\|_1 \leq \frac{2}{\mu} \|c^1\|_1 \leq \frac{2}{\mu} n \|c^1\|_\infty \leq \frac{2n}{\mu} (\|c^1 - c\|_\infty + \|c\|_\infty) \\ &< \frac{n}{\sqrt{n}} + \frac{2n}{\mu} \|c\|_\infty = \sqrt{n} + \frac{2n}{\mu} \|c\|_\infty \end{aligned}$$

para cada  $\lambda^1 \in \Lambda_1$ , con  $d(\pi, \pi_1) < \frac{\mu}{2\sqrt{n}}$ .

Para la segunda parte (de los problemas continuos) debemos considerar que  $\Lambda_o$  no vacío y acotado es equivalente a que  $\Lambda_o$  no tenga dirección de recesión. Luego, para  $\pi \in \Pi_{oc}^D$  ( con  $T$  espacio de Hausdorff compacto), supondremos que  $\Lambda_o$  tiene una dirección de recesión  $\gamma \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ , entonces,  $\gamma \neq 0_T$  y  $\sum_{t \in T} \gamma_t a_t = 0_n$ , por lo que  $0_n = 0_n \|\gamma\|_1^{-1} \in cl \mathbb{C} = \mathbb{C}$ . Ahora, supongamos que  $0_n \in cl \mathbb{C} = \mathbb{C}$ , esto implica que existe  $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$  tal que  $0_n = \sum_{t \in T} \lambda_t a_t$  y  $\sum_{t \in T} \lambda_t = 1$ . Entonces  $\lambda \neq 0_T$  es una dirección de recesión de  $\Lambda_o$  y este es no acotado. La conclusión se sigue al aplicar la primera parte de la demostración.  $\square$

**Teorema 2.3.5** (Teorema 9, [13]) *Si  $\pi \in int \Pi_c^D$  y  $0_n \notin cl \mathbb{C}$ , entonces  $\mathcal{L}$  es  $H$ -continuo en una vecindad de  $\pi$ . En particular, si  $\pi \in int \Pi_{oc}^D$  y  $\Lambda$  es acotado,*



entonces  $\mathcal{L}_o$  es  $H$ -continuo en una vecindad de  $\pi$ .

**Corolario 2.3.2** (Corolario 2, [13]) Si  $|T| < \infty$  y  $\pi = (c, a., b.) \in \Pi_c^D$ , entonces, son ciertas las afirmaciones siguientes:

i) si  $\Lambda$  es acotado, entonces,  $\mathcal{L}$  es  $B$ -usc y uniformemente acotado en  $\pi$ ;

ii) si, además,  $\pi \in \text{int } \Pi_c^D$ , entonces,  $\mathcal{L}$  es  $B$ -continuo y  $H$ -continuo en una vecindad de  $\pi$ .

El último teorema que se prueba en [13], (Teorema 11), le da sentido a varios de los teoremas enunciados antes, pues de él se deduce que  $\text{int } \Pi_c^D \neq \emptyset$

## 2.4 CONTINUIDAD DEL MAPEO OPTIMAL DUAL

El Corolario 2.4.1, se desprende del Teorema 2.3.4, sin embargo, más adelante, en el Teorema 2.4.3, hemos cambiado las condiciones para que el mapeo optimal dual sea uniformemente acotado en un determinado parámetro  $\pi$ .

**Corolario 2.4.1** *Dado  $\pi \in \Pi$ , si  $0_n \notin \text{cl } \mathbb{C}$ , entonces,  $\mathcal{L}^*$  es uniformemente acotado en  $\pi$ .*

**Prueba** Consideremos en primer lugar que  $\Lambda^*$  es un subconjunto de  $\Lambda$ . Por el Teorema 2.3.4, se tiene que existe una vecindad de  $\pi$  donde para todo  $\pi_1$  en dicha vecindad  $\Lambda_1$  es acotado, luego  $\Lambda_1^*$  también debe serlo y, por lo tanto, se tiene la prueba.  $\square$

Para la demostración de que el mapeo optimal es uniformemente acotado con condiciones más familiares, como son  $c \in \text{int } M$  y la existencia de un elemento de Slater fuerte necesitaremos del Teorema 2.4 mencionado en [7], en donde, nuestras condiciones también implican la continuidad de la función valor optimal  $v : \Pi \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ .

**Teorema 2.4.2** (Teorema 2.4, [7]) *Sea  $\pi \in \Pi_c$ , entonces:*

i)  *$v$  es usc en  $\pi$ , si y sólo si  $\mathcal{F}$  es B-lsc en  $\pi$ .*

ii) Si  $F^* \neq \emptyset$  es acotado entonces  $v$  es lsc en  $\pi$ . Si  $v(\pi) < \infty$  se cumple la afirmación recíproca.

**Teorema 2.4.3** Sea  $\pi \in \Pi$ . Supongamos que  $c \in \text{int } M$  y que existe un elemento de Slater fuerte en  $F$ , entonces,  $\mathcal{L}^*$  es uniformemente acotado en  $\pi$ .

**Prueba** La condición de Slater es equivalente a  $0_{n+1} \notin \text{cl } \mathbb{D}$ , por lo que podemos encontrar un  $\varepsilon > 0$  de tal forma que  $\varepsilon = d(0_{n+1}, \text{cl } \mathbb{D})$ . Consideremos la vecindad de  $\text{cl } \mathbb{D}$ ,  $W = \text{cl } \mathbb{D} + B_{\frac{\varepsilon}{2}}$ . Por el Lema 2 en [13], mencionado también en la demostración del Teorema 2.3.4, podemos encontrar una vecindad de  $\pi, V(\pi)$ , tal que, para todo  $\pi_1 \in V(\pi)$  obtengamos  $\text{cl } \mathbb{D}_1 \subset W$ . Supongamos que para cualquier vecindad  $U(\pi)$ ,  $\bigcup_{\pi_1 \in U(\pi)} \Lambda^*$  es no acotado, entonces, debe existir un par de sucesiones  $\{\pi_m, \lambda^m\}_{m \geq 1}$ ,  $\pi_m \rightarrow \pi$  cuando  $m \rightarrow \infty$ , y  $\lambda^m \in \Lambda_m^*$ , para cada  $m = 1, 2, \dots$ , de tal forma que  $\|\lambda^m\|_1 \rightarrow \infty$  cuando  $m \rightarrow \infty$ . Luego, para cada  $m = 1, 2, \dots$  tenemos

$$c_m = \sum_{t \in T} \lambda_t^m a_t^m, \quad v_m^D = \sum_{t \in T} \lambda_t^m b_t^m,$$

equivalente a

$$\begin{pmatrix} c_m \\ v_m^D \end{pmatrix} = \sum_{t \in T} \lambda_t^m \begin{pmatrix} a_t^m \\ b_t^m \end{pmatrix}.$$

Dividamos la igualdad anterior entre  $\|\lambda^m\|_1$  y tomemos en cuenta que  $\frac{\sum_{t \in T} \lambda_t^m}{\|\lambda^m\|_1} = 1$ , entonces, para algún  $m$  suficientemente grande

$$\frac{1}{\|\lambda^m\|_1} \begin{pmatrix} c_m \\ v_m^D \end{pmatrix} \in \mathbb{D}_m \subset W.$$

Ahora, como  $\pi_m \rightarrow \pi$ , cuando  $m \rightarrow \infty$ , y por el Teorema 2.4.2,  $v$  es continua y por lo tanto  $v_m^D \rightarrow v$  cuando  $m \rightarrow \infty$ , así, tenemos que, cuando  $m \rightarrow \infty$ ,  $0_{n+1} \in cl W$ , lo cual es imposible por la forma en que se definió a  $W$ .  $\square$

**Definición 2.4.1, [19].** Sean  $X, Y$  dos espacios topológicos y  $S : X \rightarrow Y$  un mapeo multivaluado. El mapeo  $S$ , será llamado casi semicontinuo inferiormente (*a-lsc*, por sus siglas en inglés), en un elemento  $x_0 \in X$ , si existe  $y_0 \in S(x_0)$  tal que para todo abierto  $W$  que contenga a  $y_0$ , existe una vecindad  $V(x_0)$  de tal forma que para todo  $x \in V(x_0)$  se cumple  $S(x) \cap W \neq \emptyset$ .

**Teorema 2.4.4** Si  $\mathcal{L}^*$  es *a-lsc* en  $\pi$ , entonces (D) tiene solución única.

**Prueba** Supongamos que la propiedad de *a-lsc* se cumple para  $\lambda^2 \in \Lambda^*$ , si esta es la única solución no hay nada que probar, por lo tanto, supongamos que existe también  $\lambda^1 \in \Lambda^*$ ,  $\lambda^1 \neq \lambda^2$ , entonces, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que existe  $t_0 \in T$  tal que  $\lambda_{t_0}^1 > \lambda_{t_0}^2 \geq 0$ . Consideremos la sucesión  $\{\pi_m\}_{m \geq 1}$ , definida como sigue,  $c^m = c$ ,  $a_t^m = a_t$  para todo  $t \in T$ ,  $b_t^m = b_t$  para todo  $t \in T \setminus \{t_0\}$

y  $b_{t_0}^m = b_{t_0} + \frac{1}{m}(\lambda_{t_0}^1 - \lambda_{t_0}^2)$ ,  $m = 1, 2, \dots$ . Se tiene que,  $\Lambda_m = \Lambda$  para cada  $m = 1, 2, \dots$ . Sea  $W$  una vecindad de  $\lambda^2$  tal que para todo  $\lambda \in W$  se tiene  $(\lambda_{t_0} - \lambda_{t_0}^1)(\lambda_{t_0}^2 - \lambda_{t_0}^1) > 0$ . Luego, para todo  $\lambda \in W \cap \Lambda = W \cap \Lambda_m$  con  $m = 1, 2, \dots$

$$\Psi_m(\lambda) - \Psi_m(\lambda^1) = \sum_{t \in T} b_t(\lambda_{t_0} - \lambda_{t_0}^1) + \frac{1}{m}(\lambda_{t_0}^1 - \lambda_{t_0}^2)(\lambda_{t_0} - \lambda_{t_0}^1) < 0.$$

De aquí,  $\Psi_m(\lambda) < \Psi_m(\lambda^1)$  para todo  $m = 1, 2, \dots$ ; pero esto significa  $W \cap \Lambda_m^* = \emptyset$  para todo  $m = 1, 2, \dots$ , con lo cual hemos obtenido una contradicción, y por lo tanto la prueba.  $\square$

**Corolario 2.4.4.1** *Si  $\mathcal{L}^*$  es B-lsc en  $\pi$ , entonces, el problema dual (D) tiene solución única.*

**Prueba** Sólo tenemos que observar que  $\mathcal{L}^*$  B-lsc en  $\pi$  implica que  $\mathcal{L}^*$  es a-lsc en  $\pi$ .  $\square$

# CAPÍTULO 3: Estabilidad del Problema Dual

## INTRODUCCIÓN

El gran objetivo de esta tesis fue caracterizar el interior del conjunto de parámetros con solución en el problema dual, es decir, deseábamos encontrar condiciones necesarias y suficientes para que un problema fuera estable en este sentido: que después de perturbaciones suficientemente pequeñas de todos los datos en un parámetro  $\pi$  con solución dual, obtuviéramos parámetros también con solución en el problema dual. A este conjunto le hemos llamado  $\text{int } \Pi_s^D$ . En el capítulo anterior podemos encontrar una caracterización para el interior del conjunto de parámetros con solución en el problema primario  $\text{int } \Pi_s$ , y en la literatura, principalmente en [12], se han probado condiciones para que un problema tenga solución dual, por lo que, haremos un pequeño resumen de esos resultados en la sección 3.1. En base a estos resultados, hemos buscado las condiciones para cumplir nuestro objetivo, sin embargo, nos encontramos con algunos ejemplos de problemas que muestran un comportamiento diferente al que esperábamos. En el caso continuo ocurre que en  $\text{int } \Pi_s$  todos los parámetros tienen también solución dual, ver [27], sin embargo, los ejemplos que presentamos muestran que, para el caso más general, aunque  $\pi$  pertenezca a  $\text{int } \Pi_s$ , puede ocurrir que  $\pi$  no tenga solución dual. Estudiamos el comportamiento de estos ejemplos en la sección 3.2, y finalmente, en la última sección de este capítulo, demostramos que existe un subconjunto, que llamamos  $\Pi_{AB}$  de  $\text{int } \Pi_s$ , donde los problemas con solución dual forman un conjunto denso. Además, damos un ejemplo, con el cual se demuestra que, en el complemento de  $\Pi_{AB}$  existen conjuntos abiertos de problemas sin solución dual, dando con esto, una partición de  $\Pi_s$ .

### 3.1 ALGUNOS RESULTADOS SOBRE $\text{int } \Pi_s$ , y $\Pi_s^D$ .

Del Teorema 2.3.1 resumimos lo siguiente: Si  $\pi \in \Pi_c \cap \Pi_c^D$ , entonces son equivalentes:

- i)  $c \in \text{int } M$
- ii)  $F^*$  es acotado y no vacío;
- iii) existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $F_1^*$  es acotado y no vacío para todo  $\pi_1 \in \Pi_c$  que cumpla  $d(\pi, \pi_1) < \varepsilon$ .

Del Teorema 2.2.1 tenemos la equivalencia siguiente: para todo  $\pi \in \Pi_c$ ,  $\pi \in \text{int } \Pi_c$  si y sólo si,  $\mathcal{F}$  es B-lsc en  $\pi$ .

La importancia de estos teoremas es que ellos nos llevan a la caracterización de  $\text{int } \Pi_s$ , (Teorema 3.1.1), se puede ver también el Lema 10.2 de [12].

**Teorema 3.1.1**  $\pi \in \text{int } \Pi_s$  si y sólo si,  $F^*$  es acotado y no vacío y  $\mathcal{F}$  es B-lsc en  $\pi$ .

Otras condiciones equivalentes son:  $\pi \in \text{int } \Pi_s$  si, y sólo si,  $c \in \text{int } M$  y existe un elemento de Slater fuerte (SS-element). Estas condiciones son más prácticas o más accesibles en problemas concretos, por lo que hemos recurrido a ellas en la búsqueda de una caracterización para  $\text{int } \Pi_s^D$ . La primera, además de garantizar  $F^* \neq \emptyset$ , nos indica que tenemos un problema dual consistente,  $\pi \in \Pi_c^D$ , esto es,  $\Lambda \neq \emptyset$ . Tenemos también una condición necesaria y suficiente para que un parámetro  $\pi$  sea soluble en el sentido dual, esto es,  $\pi \in \Pi_s^D$ , ver Teorema 3.1.3.

**Definición 3.1.1, [12].** Sean  $v(\pi)$  y  $v^D(\pi)$  los correspondientes valores optimales primario y dual de un  $\pi$  dado. Le llamamos **hueco dual** (duality gap en inglés) a la diferencia  $\delta(\pi) := v(\pi) - v^D(\pi)$ .

Por la forma en que hemos definido al problema dual, siempre se tiene que  $\delta(\pi) \geq 0$ , (dualidad débil) y cuando  $\delta(\pi) = 0$ , decimos que no tenemos hueco dual, o sea,  $v(\pi) = v^D(\pi)$ .

**Teorema 3.1.2** (Teorema 8.1, [12]) *Sea  $\pi \in \Pi_c$ . Si  $c \in \text{rint } M$  entonces  $\delta(\pi) = 0$ .*

**Teorema 3.1.3** (Teorema 8.3, [12]) *Sea  $\pi = (c, a., b.)$  y supongamos que  $v(\pi) < \infty$ , entonces, los enunciados siguientes son equivalentes:*

i)  $\begin{pmatrix} c \\ v(\pi) \end{pmatrix} \in K$ ;

ii)  $\pi \in \Pi_S^D$  y  $\delta(\pi) = 0$

**Definición 3.1.2** [12] Dado un parámetro  $\pi = (c, a., b.)$ , asociamos a él su cono del segundo momento, el cual se denota y define como:

$$N = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}, t \in T \right\}.$$

Observemos que  $N \subset K = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}, t \in T; \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ . En el Corolario 3.1.3.1, hemos relajado las condiciones del Teorema 3.1.3.

**Corolario 3.1.3.1** *Sea  $\pi \in \Pi_c$  con  $v(\pi) < \infty$ , entonces,  $\pi \in \Pi_S^D$  y  $\delta(\pi) = 0$  si y sólo si,*

$$\begin{pmatrix} c \\ v(\pi) \end{pmatrix} \in N.$$

**Prueba.**

( $\Rightarrow$ ) Por las hipótesis, existe  $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$  tal que  $\sum_{t \in T} \lambda_t a_t = c$  y  $\sum_{t \in T} \lambda_t b_t = v^D(\pi) = v(\pi)$ , entonces,

$$\begin{pmatrix} c \\ v(\pi) \end{pmatrix} = \sum_{t \in T} \lambda_t \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \text{ y de aquí, } \begin{pmatrix} c \\ v(\pi) \end{pmatrix} \in N.$$



( $\Leftarrow$ ) Como  $N \subset K$ , la prueba se tiene por el Teorema 3.1.3.

**Corolario 3.1.3.2** Si  $\pi \in \Pi_S^D$  y  $\delta(\pi) = 0$  entonces  $\begin{pmatrix} c \\ v(\pi) \end{pmatrix} \in N \cap bd N$ .

**Prueba.** Por el Corolario 3.1.3.1, sabemos que  $\begin{pmatrix} c \\ v(\pi) \end{pmatrix} \in N$ . Supongamos que  $\begin{pmatrix} c \\ v(\pi) \end{pmatrix} \in int N$ , luego, debe existir  $\varepsilon > 0$  tal que  $\begin{pmatrix} c \\ v(\pi) + \varepsilon \end{pmatrix} \in N$ . Esto implica que existe  $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$  tal que  $\sum_{t \in T} \lambda_t b_t = v(\pi) + \varepsilon$  pero como  $v(\pi) + \varepsilon > v(\pi) = v^D(\pi)$ , hemos obtenido un absurdo. Por lo tanto  $\begin{pmatrix} c \\ v(\pi) \end{pmatrix} \in N \cap bd N$ .  $\square$

Por los resultados anteriores, para caracterizar  $int \Pi_S^D$  hemos centrado nuestra atención en el cono  $N$ .

## 3.2 EJEMPLOS PATOLÓGICOS

**Ejemplo 3.2.1.**-Sea  $T = [0, 1]$ ,  $c = (1/3, 1)$ ,  $a_t = (t, 1)$  para todo  $t \in T$ .

$$(P) \quad \inf \frac{1}{3}x_1 + x_2$$

$$\text{s.a. } tx_1 + x_2 \geq b_t, t \in [0, 1]$$

$$(D) \quad \sup \sum_{t \in T} \lambda_t b_t$$

$$\text{s.a. } \sum_{t \in T} \lambda_t \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$$

Sean los puntos en  $[0,1]$ :  $t_n = 2^{-n}$ ;  $a_{t_n} = (2^{-n}, 1)$   $n = 1, 2, \dots$  y  $\lambda = (2^{-1}, 2^{-2}, \dots)$ , donde  $\lambda_{t_n} = 2^{-n}$ . Entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{t_n} a_{t_n} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n}, \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \right) = (1/3, 1) = c.$$

Así, tenemos que  $\lambda = (2^{-1}, 2^{-2}, \dots)$  satisface una de las condiciones para ser factible pero  $\lambda \notin \mathbb{R}^{(T)}$ . En la figura 3.2.1 hemos ilustrado a  $M = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, t \in [0, 1] \right\}$ , el cual, en  $\mathbb{R}^2$ , se puede ver como el cono con vértice en el origen, limitado por los rayos que pasan por los puntos  $(0, 1)$  y  $(1, 1)$ . Independientemente de la definición de la función  $b$  podemos observar que  $c = (1/3, 1) \in \text{int } M$ .

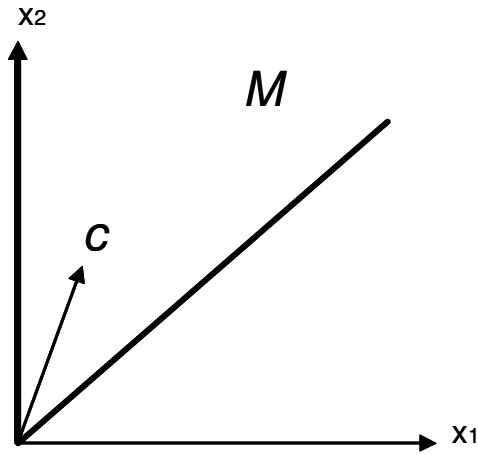


Figura 3.2.1

Ahora consideremos:  $t_0 = 0$ ,  $t_n = 2^{-n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , y la sucesión con términos:

$\lambda^m = (\frac{1}{3}2^{-m}, 2^{-1}, 2^{-2}, \dots, 2^{-m+1}, 0, \dots) \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ , para cada  $m = 1, 2, \dots$ . Veamos que  $\lambda^m \in \Lambda$ .

$$\begin{aligned} \sum_{t \in T} \lambda_t^m a_t &= \begin{pmatrix} 0 + \sum_{i=1}^m 2^{-2i} + \frac{1}{3}2^{-m+1}2^{-m-1} \\ \frac{1}{3}2^{-m} + \sum_{i=1}^m 2^{-i} + \frac{1}{3}2^{-m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m 4^{-i} + \frac{4^{-m}}{3} \\ \sum_{i=1}^m 2^{-i} + 2^{-m} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(1 - 4^{-m+1}) + \frac{4^{-m}}{3} \\ 1 - 2^{-m+1} + 2^{-m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \end{pmatrix} = c, \end{aligned}$$

cuando  $m \rightarrow \infty$ .

Sea  $\lambda^0 = (0, \lambda)$ , con  $\lambda = (2^{-1}, 2^{-2}, \dots)$  como se definió al principio de este ejemplo,

$\sum_{t \in T} \lambda^0 a_t = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n} \begin{pmatrix} 2^{-n} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \end{pmatrix} = c$ , pero  $\lambda^0 \notin \mathbb{R}^{(T)}$ . Cuando  $m \rightarrow \infty$ , tenemos

que  $\lambda^m \rightarrow \lambda^0$ , con cualquiera de las normas que hemos considerado para  $\mathbb{R}^{(T)}$ .

Así que, tenemos en el problema dual, una sucesión de puntos factibles cuyo límite también podría ser factible pero no pertenece a  $\mathbb{R}_+^{(T)}$ .

**Observación.** El defecto anterior ocurre porque el espacio  $\mathbb{R}^{(T)}$  no es completo con las normas  $\|\cdot\|$ ,  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_\infty$ .

**Ejemplo 3.2.2.-** En el Ejemplo 3.2.1 definamos a la función  $b$  de la manera siguiente: para  $t = 0$ ,  $b_0 = 1$  y para todo  $t \in (0, 1]$   $b_t = 0$ . El conjunto factible del problema primario podemos verlo en la Figura 3.2.2, el cual, queda descrito como sigue:

$$F_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_2 \geq 1, tx_1 + x_2 \geq 0, t \in (0, 1]\}.$$

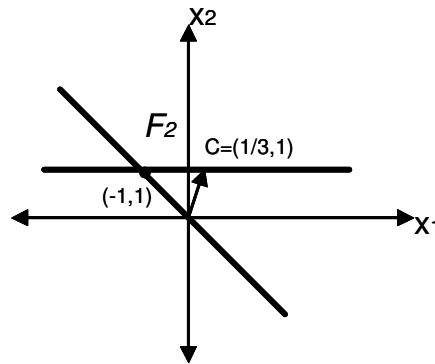


Figura 3.2.2

(P) tiene solución en  $x^* = (-1, 1)$ , y su valor optimal es  $v_2 = \frac{2}{3}$ . Como tenemos  $c \in \text{int } M$  y Slater, por ejemplo,  $\bar{x} = (0, 2)$  es un punto de Slater, ocurre que  $v_2^D = v_2 = \frac{2}{3}$ . Entonces, el problema dual consiste en hallar  $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ , de tal forma que,  $\sup \sum_{t \in T} \lambda_t b_t = \sup \lambda_0 = \frac{2}{3}$ ,

$\sum_{t \in T} \lambda_t t = \frac{1}{3}$  y  $\sum_{t \in T} \lambda_t = 1$ . Esto lleva a las igualdades

$$\sum_{t \in (0, 1]} \lambda_t = 1 - \lambda_0 = \frac{1}{3} = \sum_{t \in [0, 1]} \lambda_t t.$$

Supongamos que existe  $t_0 \in (0, 1)$  tal que  $\lambda_{t_0} > 0$ , entonces  $\lambda_{t_0} t < \lambda_{t_0}$ , para todo  $t \in (0, 1)$ ,

luego  $\sum_{t \in (0,1]} \lambda_t t < \sum_{t \in (0,1]} \lambda_t$ , pero esto nos lleva al absurdo  $\frac{1}{3} < \frac{1}{3}$ . Por lo tanto, hemos obtenido

que, para todo  $t \in (0, 1)$ ,  $\lambda_t = 0$ , y que,  $\lambda_1 = \frac{1}{3} = \sum_{t \in (0,1]} \lambda_t$ . De esta forma, la única solución para

(D) es  $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$  definido como:  $\lambda_0 = \frac{2}{3}$ ,  $\lambda_1 = \frac{1}{3}$ , y para todo  $t \in (0, 1)$ ,  $\lambda_t = 0$ .

**Ejemplo 3.2.3.**- En el problema del ejemplo 3.2.1 definamos a la función  $b$  de la forma siguiente: para  $t = 0$ ,  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = -1$  y para todo  $t \in (0, 1)$   $b_t = 0$ . El conjunto factible del problema primario es:

$$F_3 = \{(x_1, x_2) \mid x_2 \geq 1, x_1 + x_2 \geq -1, tx_1 + x_2 \geq 0, t \in (0, 1)\},$$

el cual coincide con  $F_2$ , por lo que tenemos la misma solución para (P),  $x^* = (-1, 1)$ , y su valor optimal es  $v_3 = \frac{2}{3}$ . También debemos tener  $v_3^D = \frac{2}{3}$ . Por lo anterior, para resolver (D) debemos

suponer que existe  $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ , tal que  $\sum_{t \in T} \lambda_t b_t = \lambda_0 - \lambda_1 = \frac{2}{3}$ ,  $\sum_{t \in T} \lambda_t t = \frac{1}{3}$  y  $\sum_{t \in T} \lambda_t = 1$ . Esto

implica que  $\lambda_0 = \frac{2}{3} + \lambda_1 \geq \frac{2}{3}$ , y por otro lado, que  $\sum_{t \in (0,1]} \lambda_t = 1 - \lambda_0 \leq 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ . Supongamos

que existe  $\hat{t} \in (0, 1)$  tal que  $\lambda_{\hat{t}} > 0$ , entonces tendríamos  $\lambda_{\hat{t}} \hat{t} < \lambda_{\hat{t}}$ , y de aquí,

$\frac{1}{3} = \sum_{t \in (0,1]} \lambda_t t < \sum_{t \in (0,1]} \lambda_t \leq \frac{1}{3}$ , lo cual es un absurdo. Por lo tanto, para todo  $t \in (0, 1)$ ,  $\lambda_t = 0$ .

Luego,  $\lambda$  debe satisfacer el sistema:  $\lambda_0 - \lambda_1 = \frac{2}{3}$ ,  $\sum_{t \in [0,1]} \lambda_t = \lambda_0 + \lambda_1 = 1$  cuya solución es:

$\lambda_0 = \frac{5}{6}$  y  $\lambda_1 = \frac{1}{6}$ , pero recordemos que  $\frac{1}{3} = \sum_{t \in T} \lambda_t t = \lambda_1$ , lo cual nos lleva a una contradicción.

Con esto hemos demostrado que no existe solución para (D), a pesar de tenerla para (P) y de tener condiciones buenas como  $c \in \text{int } M$  y Slater, las cuales nos indican que tenemos un parámetro en  $\text{int } \Pi_s$  sin solución dual.

Definamos la sucesión  $\{\lambda^m\}_{m \geq 2}$  de la siguiente manera:  $\lambda_0^m = \frac{2m-3}{3(m-1)}$ ,  $\lambda_t^m = \frac{m}{3(m-1)}$  para  $t = \frac{m-1}{m}$  y  $m = 2, 3, \dots$ . Para cada  $m$  fijo se tiene que,  $\sum_{t \in \{0, m-1/m\}} \lambda_t^m \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \end{pmatrix} = c$ , lo que significa que  $\{\lambda^m\}_{m \geq 2} \subset \Lambda$ , además, es una sucesión maximal ya que  $\lim_m \sum_{t \in \{0, m-1/m\}} \lambda_t^m b_t = \lim_m \lambda_0^m = \frac{2}{3} = v^D$ . Sin embargo,  $\lim_m \lambda^m = \bar{\lambda}$ , con  $\bar{\lambda}$  definido como sigue:  $\bar{\lambda}_0 = \frac{2}{3}$  y  $\bar{\lambda}_1 = \frac{1}{3}$ , el cual, según el Ejemplo 3.2.2, es un punto factible, sin embargo, para este caso, ocurre que  $\sum_{t \in T} \bar{\lambda}_t b_t = \bar{\lambda}_0 - \bar{\lambda}_1 = \frac{1}{3} < \frac{2}{3} = v^D$ . Es decir, tenemos una sucesión de puntos factibles maximal, cuyo límite  $\bar{\lambda} \notin \Lambda^*$ , lo cual demuestra que el mapeo optimal es no cerrado, ( $\Lambda^*$  es no cerrado).

**Ejemplo 3.2.4.-** Ahora definamos a la función  $b$  como sigue: para  $t = \frac{m-1}{m}$  y  $m > 1$ ,  $b_{\frac{m-1}{m}} = \frac{1}{m}$ ,  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = -1$ , y para todo  $t \in (0, 1) \setminus \{\frac{m-1}{m}\}$ ,  $b_t = 0$ .

$F_4 = \{(x_1, x_2) \mid x_2 \geq 1, x_1 + x_2 \geq -1, (\frac{m-1}{m})x_1 + x_2 \geq \frac{1}{m}\}$  nuevamente coincide con  $F_2$ , ver figura 3.2.3, y tenemos las mismas condiciones;  $c \in \text{int } M$ , Slater, y por lo tanto,  $v_4 = v_4^D = \frac{2}{3}$ .

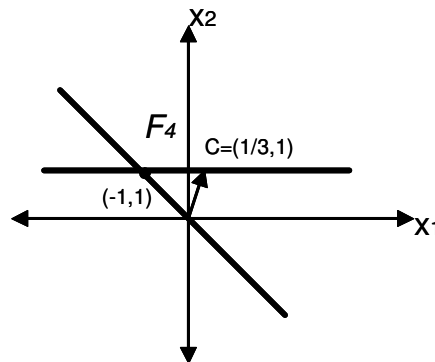


Figura 3.2.3

Sea  $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$  definido como sigue:  $\lambda_0 = \frac{2m-3}{3(m-1)}$ ,  $\lambda_{\frac{m-1}{m}} = \frac{m}{3(m-1)}$  y  $\lambda_t = 0$  para todos los demás casos. Se tiene que para cada  $m > 1$ ,

$$\sum_{t \in \{0, m-1/m\}} \lambda_t a_t = \frac{2m-3}{3(m-1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{m}{3(m-1)} \begin{pmatrix} \frac{m-1}{m} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \end{pmatrix} = c$$

y

$$\sum_{t \in \{0, m-1/m\}} \lambda_t b_t = \frac{2m-3}{3(m-1)} (1) + \frac{m}{3(m-1)} \left(\frac{1}{m}\right) = \frac{2}{3},$$

luego, esta  $\lambda$  es solución para (D),  $\lambda \in \Lambda_4^*$ .

En el Ejemplo 3.2.4, para cada  $m > 1$  tenemos un par de problemas (P) y (D) con solución. Denotemos a estos problemas  $\pi_m$  y al problema del Ejemplo 3.2.3 con  $\pi_0$ . Cuando  $m \rightarrow \infty$ ,  $\pi_m \rightarrow \pi_0$ , luego, tenemos una sucesión de problemas con solución cuyo límite es un problema sin solución dual.

Veamos qué ocurre con el cono  $N$  en cada uno de estos problemas.

Ejemplo 3.2.2.-  $\begin{pmatrix} c \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \in N_2$  y tanto (P) como (D) tienen solución.

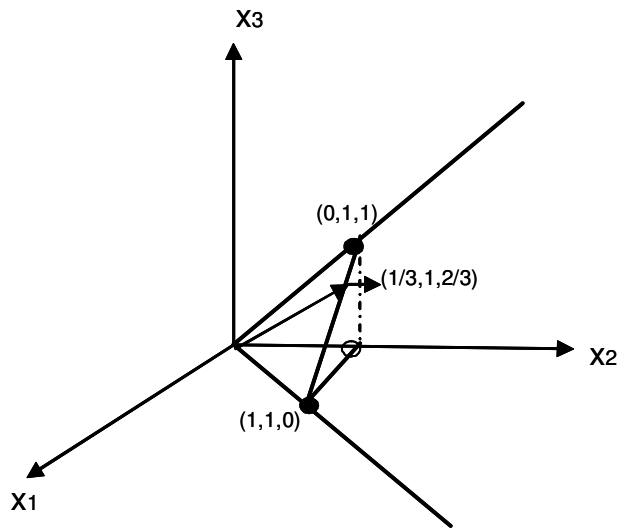


Figura 3.2.4

Descripción de la figura 3.2.4:  $N_2 = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in ]0, 1]; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  consta de los rayos

que emanan del origen y pasan por  $(0, 1, 1)$ ,  $(1, 1, 0)$ , y por aquellos rayos que pasan por la recta que une estos dos puntos, (estos conos son convexos). También forman parte de  $N_2$ , todos los rayos que pasan por la recta que une al punto  $(1, 1, 0)$  y  $(0, 1, 0)$ , sin incluir al que toca este último punto, es decir, el eje  $x_2$  no pertenece al cono  $N_2$ , así como tampoco la cara marcada con la línea punteada en

el dibujo. De aquí que,  $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \in N_2$ , pues este punto se encuentra sobre la recta que une

a los puntos  $(0, 1, 1)$ , y  $(1, 1, 0)$ .



Ejemplo 3.2.3.-  $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \notin N_3$  y (D) no tiene solución.

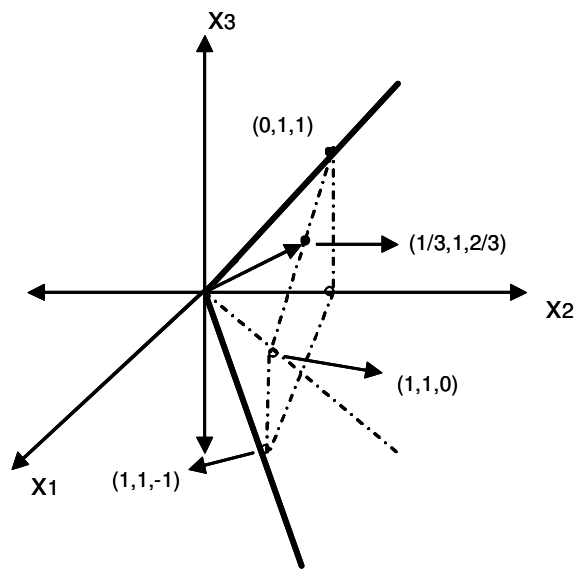


Figura 3.2.5

Descripción de la figura 3.2.5:  $N_3 = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in ]0, 1[; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ , está

constituido por los rayos que pasan por los puntos  $(0, 1, 1)$  y  $(1, 1, -1)$ , y por todos aquellos que pasan por la región encerrada entre las líneas punteadas, sin tocar a estas, esto es debido a que, los

rayos que pasan por los puntos  $\begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , con  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , si pertenecen al cono. Este cono se

puede ver como una pirámide de cuatro caras, de las cuales, ninguna de ellas pertenece al cono. Del

dibujos podemos observar que, el punto  $\begin{pmatrix} c \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \notin N_3$ .

Ejemplo 3.2.4.-  $\begin{pmatrix} c \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \in N_m$  y  $(D_m)$  tiene solución para cada  $m > 1$ .

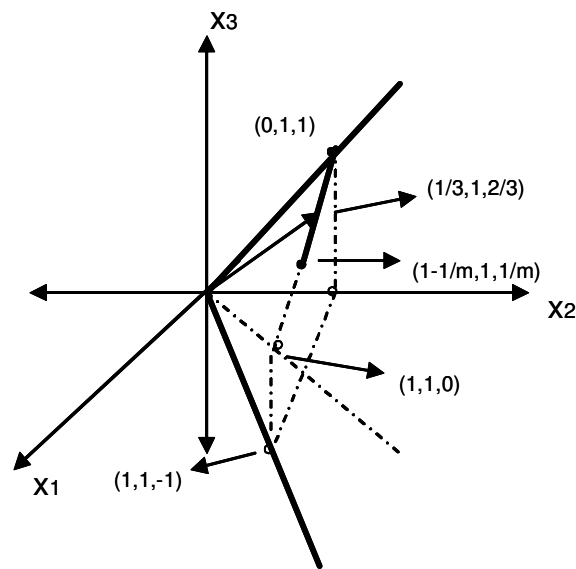


Figura 3.2.6

Descripción de la figura 3.2.6:

$$N_m = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-1/m \\ 1 \\ 1/m \end{pmatrix}_{m>1}, \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{t \in ]0,1[, t \neq 1/m} \right\}.$$

Cada vez que  $m$  toma un valor, agregamos un punto al cono  $N_3$  sobre la semirecta que une a los puntos  $(0, 1, 1)$ , y  $(1, 1, 0)$ , lo cual permite que, una parte de la cara comprendida entre los rayos que

pasan por esos dos puntos, quede incluida en el cono, incluyendo también, de esta manera, al punto  $(\frac{c}{v})$ . En el límite, cuando  $m \rightarrow \infty$ , esta cara pertenece al cono. No pertenecen al cono las otras tres caras y las aristas formadas por el eje  $x_2$ , y por el rayo que pasa por el punto  $(1, 1, 0)$ .

### 3.3 PARTICIÓN DEL CONJUNTO $\Pi_S$

Del trabajo realizado en la sección precedente queremos resaltar lo siguiente: en el Ejemplo 3.2.3, tenemos un parámetro  $\pi_0 \in \text{int } \Pi_S$ , con  $\Lambda^* = \emptyset$ , y por medio del Ejemplo 3.2.4 mostramos que existe una sucesión de problemas  $\pi_m \rightarrow \pi_0$ , con la característica de que para cada  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\Lambda_m^* \neq \emptyset$ . Es decir, en el interior del conjunto donde los problemas primarios tienen solución, tenemos un problema que no cuenta con solución dual, pero para el cual, se ha podido construir una sucesión de problemas tendiendo a él que sí tienen solución dual.

#### CONJETURA

Siempre que exista un parámetro  $\pi_0 \in \text{int } \Pi_S$  sin solución dual, existe una sucesión  $\{\pi_m\}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ ,  $\pi_m \rightarrow \pi_0$ , tal que, para cada  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\pi_m$  tiene solución dual, es decir,  $\Lambda_m^* \neq \emptyset$ .

Utilizando fuertemente el Corolario 3.1.3.2, y restringiendo el conjunto  $\text{int } \Pi_S$ , a un subconjunto denominado  $\Pi_{AB}$ , demostramos que la conjetura se cumple si agregamos la condición adicional de que  $|T| \geq n + 1$ . Esto queda demostrado en el siguiente

**Teorema 3.3.1.-** Sea  $\Pi_{AB} = \{\pi \in \text{int } \Pi_S \mid \{\sup \left\| \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \right\|_\infty, t \in T\} < \infty\}$ . Si  $|T| \geq n + 1$  entonces el conjunto de problemas  $\pi \in \text{int } \Pi_S$ , con  $\Lambda^* \neq \emptyset$  es un conjunto denso en  $\Pi_{AB}$ .

**Prueba.** Sea  $\pi_0 = (c^0, a^0, b^0) \in \Pi_{AB}$  tal que  $\Lambda_0^* = \emptyset$ . Construiremos una sucesión de problemas  $\pi_m \rightarrow \pi_0$ , tal que  $\Lambda_m^* \neq \emptyset$  para cada  $m = 1, 2, \dots$ , para lo cual, necesitaremos probar algunas proposiciones.

**Proposición 1.**  $c_0 \neq 0_n$ .

**Prueba.** Supongamos que  $c_0 = 0$ , entonces,  $v_0 = v_0^D = 0$ , luego,  $\lambda \equiv 0_T \in \mathbb{R}_+^{(T)}$  es una solución para  $(D_0)$ , lo cual contradice la suposición  $\Lambda_0^* = \emptyset$ . ■

Como  $\begin{pmatrix} c_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in bdN_0 \setminus N_0$ , existe  $\{k_m\} \subset N_0$ , tal que  $k_m \rightarrow \begin{pmatrix} c_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ , escribamos a los elementos de esta sucesión como sigue:

$$k_m = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^m \begin{pmatrix} a_{i_{t_{im}}}^0 \\ b_{i_{t_{im}}}^0 \end{pmatrix},$$

para cada  $m = 1, 2, \dots$  y algún  $\alpha_i^m \geq 0$ , con  $i = 1, 2, \dots, n+1$ .

Por la suposición  $\pi_0 \in \Pi_{AB}$ , sin pérdida de generalidad, existe  $\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} = \lim_{m \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} a_{i_{t_{im}}}^0 \\ b_{i_{t_{im}}}^0 \end{pmatrix}$ , con  $i=1, 2, \dots, n+1$ , con la propiedad de que para cada  $i = 1, 2, \dots, n+1$ ,  $\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$  es una consecuencia de  $\sigma_0$ , esto es, para cada  $x \in F_0$  se cumple la desigualdad  $a_i/x \geq b_i$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, n+1$ , (Definición 1.2.4).

**Proposición 2..**  $\left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^m \right\}_{m \geq 1}$  es una sucesión acotada que no tiende a cero cuando  $m \rightarrow \infty$ .

**Prueba.** En efecto, que no tiende a cero se sigue inmediatamente de la Proposición 1. Supongamos que  $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^m \rightarrow \infty$  cuando  $m \rightarrow \infty$ , entonces,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\alpha_i^m}{\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j^m} \begin{pmatrix} a_{i_{t_{im}}}^0 \\ b_{i_{t_{im}}}^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j^m} \begin{pmatrix} c_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = 0_{n+1}.$$

Sea  $\beta_i = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\alpha_i^m}{\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j^m} \geq 0$ , se tiene que  $\sum_{i=1}^{n+1} \beta_i \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} = 0_{n+1}$  y como  $\sum_{i=1}^{n+1} \beta_i = 1$

hemos obtenido  $0_{n+1} \in cl \mathbb{D}_0$ , lo cual es una contradicción pues  $\pi_0 \in int \Pi_s$ . ■

Construyamos ahora la sucesión  $\{\pi_m\}_{m \geq 1}$  con  $\pi_m = (c^0, a^m, b^m)$ , definido de la siguiente forma:  $\begin{pmatrix} a_i^m \\ b_i^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i^0 \\ b_i^0 \end{pmatrix}$  para todo  $t \in T \setminus \{t_{1_m}, t_{2_m}, \dots, t_{n+1_m}\}$  y  $\begin{pmatrix} a_{i_m}^m \\ b_{i_m}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n+1$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Es claro que  $\pi_m \rightarrow \pi_0$  cuando  $m \rightarrow \infty$ .

**Proposición 3.** Si  $x^* \in F_0^*$  entonces  $x^* \in F_m^*$  para cada  $m \geq 1$ .

**Prueba.** En efecto, fijando  $m \in \mathbb{N}$ ,  $F_m$  es el conjunto factible del correspondiente  $\pi_m$ , con el cual tenemos la relación  $F_0 \subset F_m$ , ya que en la definición de  $\pi_m$ , solo hemos removido  $n+1$  restricciones y agregado  $n+1$  restricciones consecuentes, así pues,  $x^* \in F_m$ . Por las proposiciones 1 y 2 existe  $\alpha_i \geq 0$  con  $i = 1, 2, \dots, n+1$  y  $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \neq 0$ , tal que  $\alpha_i^m \rightarrow \alpha_i$ , cuando  $m \rightarrow \infty$ , de tal forma que podemos escribir

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^m \begin{pmatrix} a_{i_m}^m \\ b_{i_m}^m \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}.$$

Luego, tenemos que,  $c_0 = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i a_i$  y  $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i b_i = v_0$ , entonces, para todo  $x \in F_m$

$$c_0 x = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i a_i x \geq \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i b_i,$$

de donde  $v_m = \inf_{x \in F_m} c_0 x \geq \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i b_i = v_0$ . Por la relación  $F_0 \subset F_m$  tenemos también  $v_m \leq v_0$ , por lo tanto,  $c_0 x^* = v_0 = v_m$  y de aquí la prueba. ■

Finalmente, como  $\begin{pmatrix} c_0 \\ v_m \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \in N_m$ , tenemos, por el Corolario 3.1.3.1,  $\Lambda_m^* \neq \emptyset$

para cada  $m \geq 1$ .  $\square$

**Ejemplo 3.3.1.** El problema que a continuación describimos, y que denotamos por  $\pi_5$ , pertenece a  $\text{int } \Pi_S$ , no tiene solución dual,  $\sup \left\{ \left\| \begin{pmatrix} a_t^5 \\ b_t^5 \end{pmatrix} \right\|_\infty, t \in T \right\} = \infty$ , por lo que  $\pi_5 \notin \Pi_{AB}$ , y para un  $\varepsilon > 0$  demostraremos que todos los problemas  $\pi$  con  $d(\pi, \pi_5) < \varepsilon$  tampoco tienen solución dual.

$$(P_5) \quad T = \{(n, 0), (0, m) \mid n, m \in \mathbb{N}\}, \quad c = (1, 1), \quad a_t = t, \quad b_t = -1 \text{ para todo } t \in T.$$

$$\begin{aligned} & \min x_1 + x_2 \\ \text{s.a.} \quad & nx_1 \geq -1, \quad mx_2 \geq -1, \quad n, m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

$F_5 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ ,  $M_5 = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix} \mid m \in \mathbb{N} \right\} = F_5$ , claramente  $c = (1, 1) \in \text{int } M_5$ , y se tiene existencia de punto de Slater fuerte como  $\bar{x} = (1, 1)$ , con lo que se comprueba que  $\pi_5 \in \text{int } \Pi_S$ , además,  $F_5^* = \{(0, 0)\}$ . En la figura 3.3.1 representamos a  $M_5$ .

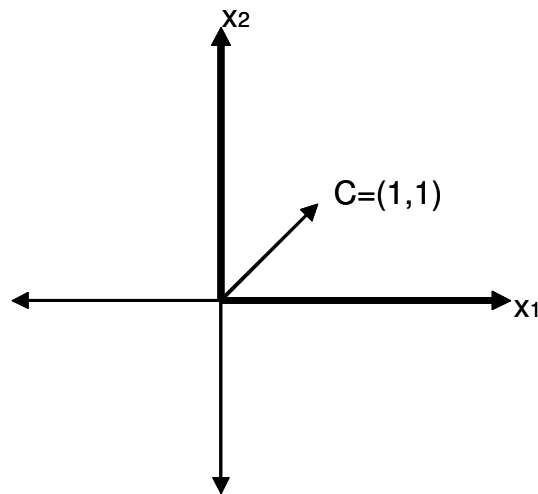


Figura 3.3.1

$$(D_5)$$

$$\begin{aligned} & \sup \sum_{t \in T} \lambda_t (-1) \\ \text{s.a. } & \sum_{t \in T} \lambda_t t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)} \end{aligned}$$

Claramente (D<sub>5</sub>) no tiene solución, pues si la tuviera, digamos  $\lambda \in \Lambda_5^*$ , como  $v_5 = v_5^D = 0$ , tendríamos  $\lambda \equiv 0_T$ , pero  $0_T \notin \Lambda_5$  entonces  $\Lambda_5^* = \emptyset$ .

Ahora probaremos que existe una vecindad de  $\pi_5$ , en la cual, ningún problema tiene solución dual.

Sea  $\pi_\varepsilon = \pi_5 + \varepsilon$ , donde  $\varepsilon = (\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3)$ , y  $\varepsilon^1 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^1 \\ \varepsilon_2^1 \end{pmatrix}$  es tal que  $\|\varepsilon^1\| < \frac{1}{4}$ ,  $\varepsilon^2 = \varepsilon^2(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^2(t) \\ \varepsilon_2^2(t) \end{pmatrix}$  con  $\|\varepsilon^2\|_\infty < \frac{1}{4}$ , y  $\varepsilon^3 = \varepsilon^3(t)$  tal que  $\|\varepsilon^3\|_\infty < \frac{1}{4}$ . Claramente  $d(\pi_\varepsilon, \pi_5) < \frac{1}{4}$ , entonces, para este nuevo parámetro  $\pi_\varepsilon$ , analizaremos sus respectivos problemas (P<sub>ε</sub>) y (D<sub>ε</sub>).

(P<sub>ε</sub>)

$$\begin{aligned} & \min(1 + \varepsilon_1^1)x_1 + (1 + \varepsilon_2^1)x_2 \\ \text{s.a. } & (n + \varepsilon_1^2(t))x_1 + \varepsilon_2^2(t)x_2 \geq -1 + \varepsilon^3(t), \\ & \varepsilon_1^2(t)x_1 + (m + \varepsilon_2^2(t))x_2 \geq -1 + \varepsilon^3(t), \\ & \text{con } n, m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Si  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in F_\varepsilon$ , entonces, despejando  $\bar{x}_1$  de la primera desigualdad y  $\bar{x}_2$  de la segunda, obtenemos  $\bar{x}_1 \geq \frac{-1 + \varepsilon^3(t) - \varepsilon_2^2(t)\bar{x}_2}{n + \varepsilon_1^2(t)}$ , y  $\bar{x}_2 \geq \frac{-1 + \varepsilon^3(t) - \varepsilon_1^2(t)\bar{x}_1}{m + \varepsilon_2^2(t)}$ . De donde se tiene que, cuando  $m \rightarrow \infty$ ,  $\bar{x}_1 \geq 0$  y  $\bar{x}_2 \geq 0$ , por lo tanto,  $\bar{x} \in F_5$ , y de aquí,  $F_\varepsilon \subset F_5$ . Acerca de la solución de (P<sub>ε</sub>) y de su valor optimal, tenemos que:  $v_\varepsilon \geq v_5$ , por la contención entre sus conjuntos factibles, y por otro lado,



como el punto  $(0,0) \in F_\varepsilon$ ,  $v_\varepsilon \leq 0 = v_5$ , luego,  $v_\varepsilon = v_5 = 0$  y  $F_\varepsilon^* = \{(0,0)\}$ . Nuevamente tenemos, para este problema  $c_\varepsilon \in \text{int } M_\varepsilon$ , (observar que  $M_\varepsilon = M_5$ ), y a  $(0,0)$ , por ejemplo, como punto de Slater fuerte, por lo tanto  $\pi_\varepsilon \in \text{int } \Pi_S$ .

Veamos qué pasa con el problema dual para cada  $\varepsilon$  elegido como arriba.

(D $_\varepsilon$ )

$$\begin{aligned} & \sup \sum_{t \in T} \lambda_t (-1 + \varepsilon^3(t)) \\ \text{s.a. } & \sum_{t \in T} \lambda_t (t + \varepsilon^2(t)) = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon_1^1 \\ 1 + \varepsilon_2^1 \end{pmatrix} \\ & \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)} \end{aligned}$$

Como  $\pi_\varepsilon \in \text{int } \Pi_S$ ,  $v_\varepsilon^D = v_5 = 0$ , entonces si  $\lambda^* \in \Lambda_\varepsilon^*$ , debemos tener  $\lambda^* \equiv 0_T$ , pero, sustituyendo en las restricciones de (D $_\varepsilon$ ) obtenemos  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon_1^1 \\ 1 + \varepsilon_2^1 \end{pmatrix}$ , lo cual es imposible, luego,  $0_T$  no es factible, y por tanto concluimos que, para cada  $\pi_\varepsilon$  que satisfaga  $d(\pi_\varepsilon, \pi_5) < \frac{1}{4}$ , tenemos  $\Lambda_\varepsilon^* = \emptyset$ .

De esta manera hemos probado que, para  $\pi_5 \in \text{int } \Pi_S \setminus \Pi_{AB}$ , no tenemos solución dual, y además, que existe una vecindad de  $\pi_5$  en donde tampoco tenemos solución dual. Entonces, existen conjuntos abiertos en el complemento de  $\Pi_{AB}$ , (o huecos), para los cuales no hay solución dual.

Acerca de  $\Pi_{AB}$

Sea  $\Pi_B = \{\pi \in \Pi \mid \{\sup \left\| \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \right\|_\infty, t \in T\} < \infty\}$  y  $\Pi_{UB} = \Pi \setminus \Pi_B$ . Claramente  $\Pi_B$  es un conjunto abierto y  $\Pi_{UB} \cap \Pi_B = \emptyset$ .  $\Pi_{UB}$  también es abierto y  $\Pi = \Pi_{UB} \cup \Pi_B$ . Entonces nuestro conjunto  $\Pi_{AB} = \text{int } \Pi_S \cap \Pi_B$  es abierto.

# CONCLUSIONES

CAPÍTULO I. Los resultados más importantes de este capítulo son; la posibilidad de determinar el grado mínimo de una representación polinomial para todo poliedro convexo, una condición suficiente para que un conjunto que no es un poliedro, admita una representación polinomial, o al menos analítica, y condiciones suficientes para que conjuntos convexos y cerrados en el plano admitan una representación polinomial, pudiendo, además, determinar el grado mínimo de tal representación.

CAPÍTULO II. En este capítulo hemos investigado principalmente, la continuidad del mapeo optimal dual, buscando condiciones para la estabilidad en el sentido de que el problema permanezca con solución dual, después de pequeñas perturbaciones en todos los datos. Hemos encontrado dos condiciones suficientes para que dicho mapeo sea uniformemente acotado en un cierto parámetro y, por otro lado, mostramos que una solución única en el problema dual es necesaria para que el mapeo optimal dual sea semicontinuo inferiormente y casi semicontinuo inferiormente.

CAPÍTULO III. Presentamos el análisis de unos ejemplos que nos muestran que, a pesar de tener solución y estabilidad en el problema primario, existe la posibilidad de no tener solución en el problema dual. Este análisis nos llevó a demostrar que, el mapeo optimal dual no es cerrado, a relajar una condición necesaria y suficiente para la existencia de solución en el problema dual y, finalmente, a dar una partición del conjunto de problemas con solución primaria. No hemos podido caracterizar el interior del conjunto de problemas con solución dual, que es donde encontramos estabilidad, pero si hemos localizado dónde este conjunto es denso y dónde hay huecos o conjuntos abiertos de problemas sin solución dual.

En el Capítulo I hemos abordado problemas de optimización con coeficientes polinomiales o al menos analíticos, los cuales pertenecen a una familia más grande que es la de los problemas de optimización con coeficientes continuos. Este último tipo de problemas se comporta mejor cuando buscamos caracterizar el conjunto de soluciones tanto en el problema primario como en el dual. Nosotros hemos abordado en los otros dos capítulos de esta tesis, el caso más general, cuando no pedimos ninguna condición sobre los coeficientes del problema, ni sobre el conjunto de índices. Para este caso, continúa abierto el problema de caracterizar el interior del conjunto de parámetros con

solución dual.

# BIBLIOGRAFÍA

1. ANDERSON, E.J. AND NASH, P., *Linear Programming in Infinite Dimensional Spaces*, Wiley, New York, 1987.
2. ANDERSON, E.J., AND LEWIS, A.S., *An Extension of the Simplex Algorithm for Semi-Infinite Linear Programming*, Mathematical Programming, Vol. 44, (1989), pp. 247-469.
3. APOSTOL, T.M., *Análisis Matemático*, 2da. Edición, Reverté, 1989.
4. BANK, B., GUDDAT, J., KLATTE, D., KUMMER, B. AND TAMMER, K., *Non-linear Parametric Optimization*, Birkhauser Verlag, Basel Boston Stuttgart, 1983
5. BAZARAA, M.S., SHERALI, H.D. AND SHETTY, C.M., *Nonlinear Programming, Theory and Algorithms*, Second Edition, Wiley, 1993.
6. BROSOWSKI, B., *Parametric Semi-Infinite Optimization*. Verlag Peter Lang, Frankfurt am Main, 1982.
7. CÁNOVAS, M.J., LÓPEZ, M:A:, PARRA, J. AND TODOROV, M:I:, *Solving Strategies and Well-posedness in Linear Semi-infinite Programming*, Annals of Operations Research 101, 171-190, 2001.
8. CHARNES, A., COOPER, W.W. AND KORTANEK, K.O., *On the Theory of Semi-Infinite Programming and a Generalization of the Kuhn-Tucker Saddle Point Theorem for Arbitrary Convex Funtions*, Naval Res. Logistics Quart., 16, 1969, 41-51.
9. CONWAY, B.J., *Functions of one Complex Variable*, Springer-Verlag, New York, 1987.
10. EVGRAFOV, M.A., *Analytical Functions*, Dover, New York, New York, 1978.
11. GOBERNA, M.A., JORNET, V., PUENTE, R., AND TODOROV, M.I., *Analytical Linear Inequality Systems and Optimization*, Journal of Optimization theory and applications, Vol. 103, No. 1, pp 95-119,1999.
12. GOBERNA, M.A. AND LÓPEZ, M.A., *Linear Semi-Infinite Optimization*, Wiley, Chichester, 1998.
13. GOBERNA, M.A., LÓPEZ, M.A. AND TODOROV, M.I., *On the Stability of the Feasible Set in Linear Optimization*. Set-Valued Analysis, 9 (2001), 75-99..
14. GOBERNA, M.A., LÓPEZ, M.A. AND TODOROV, M.I., *Stability Theory for Linear Inequality Systems*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 17 (1996), 730-743.
15. GOBERNA, M.A., HERNÁNDEZ, L.A. AND TODOROV, M.I., *On Linear Inequality Systems with Smooth Coefficients*, recomendado para su publicación en Journal of Optimization Theory and Applications, 2004.
16. GOBERNA, M.A., HERNÁNDEZ, L.A. AND TODOROV, M.I., *Separating the Solution*

*Sets of Analytical and Polynomial Systems*, enviado a RAIRO, 2004.

17. HAASER, N.B. AND SULLIVAN, J.A., *Análisis Real*, Trillas, 1978.
18. HELBIG, S. AND TODOROV, M.I., *Unicity Results for General Linear Semi-Infinite Optimization Problems Using a New Concept of Active Constraints*, Applied Mathematics and Optimization 38:21-43, 1998.
19. HERNÁNDEZ, L.A., *Investigación sobre representación analítica y polinomial de conjuntos convexos y cerrados en el plano*, Tesis de maestría, FCFM-BUAP, México, 2000.
20. HERNÁNDEZ, L.A. AND TODOROV, M.I., *Examples of bad phenomena of the dual problems and generic results in parametric linear semi-infinite optimization*, enviado para su publicación a DBAN en Junio de 2004.
21. JAUME, D.A., *Dimensión de Curvatura Como un Invariante Bajo Polaridad y Aplicaciones a Sistemas Lineales Semi-Infinitos*. Tesis de maestría, UNSL, 2002.
22. KENDEROV, P.S., *Most of the Optimization Problems Have Unique Solution*, Parametric Optimization and Approximation (Basel) (B. Brosowski and F. Deutsch, eds.), Birkhäuser, 1985, pp. 203-216.
23. LAY, S.R., *Convex Sets and Their Applications*, Pure and Applied Mathematics, John Wiley & Sons, 1982.
24. PUENTE, R., *Sobre la no Representabilidad de Conjuntos Convexos Mediante Sistemas Analíticos*, Tech. Report, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de San Luis, San Luis, Argentina, 2002.
25. ROCKAFELLAR, R.T., *Convex Analysis*, Princenton U. P., Princenton, N.J., 1986.
26. TODOROV, M.I., *Generic Existence and Uniqueness of the Solution to Linear Semi-Infinite Optimization Problems*, Numerical Functional Analysis and Optimization, Vol. 8 (1985), 541-556.
27. TODOROV, M.I., *Uniqueness of the Saddle Points for most of the Lagrange Functions of the Linear Semi-Infinite Optimization*, Numer. Funct. Anal. and Optimization, 10(3&4), 367-382, 1989.