



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

INSTITUTO DE FÍSICA "LUIS RIVERA TERRAZAS"

**"PROPAGACIÓN DE UN PULSO TÉRMICO EN
MATERIALES SEMICONDUCTORES: MODELO
DE DOS TEMPERATURAS"**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**MAESTRO EN CIENCIAS
(EN LA ESPECIALIDAD DE CIENCIA DE
MATERIALES)**

PRESENTA:

ING. OCTAVIO BALLINAS CAMACHO

ASESOR:

DR. FELIPE PÉREZ RODRÍGUEZ

JULIO 2009

Resumen

Se presenta un estudio teórico de la propagación de calor en materiales semiconductores, los cuales poseen cuasipartículas (electrones y fonones) cuyas temperaturas pueden diferir. Se resuelve numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales que describe la propagación de calor en estos materiales. En el caso lineal, cuando las variaciones de temperatura producidas por el haz de luz incidente sobre la muestra son pequeñas y, por tanto, los coeficientes de conductividad y difusividad térmica prácticamente no varían, se comparan los resultados obtenidos en esta tesis con las predicciones hechas en trabajos teóricos previos. La aportación principal de esta investigación se relaciona con el estudio del régimen no lineal, es decir, el caso cuando la intensidad del flujo de calor incidente, producido por el haz luminoso, es alta. En este régimen la dependencia de los parámetros térmicos en función de la temperatura juega un papel importante en la propagación de calor. El método de solución numérica desarrollado aquí se aplicó primeramente a una muestra metálica, la cual se modela bien con una temperatura única para todas las cuasipartículas, y reprodujo los resultados existentes en la literatura para los perfiles de temperatura tanto en el régimen lineal como no lineal. En el caso de semiconductores, los perfiles para las temperaturas de los electrones y los fonones son muy diferentes y dependen no solo del grado de no linealidad, sino también, del intercambio de calor que exista entre estos sistemas.

Índice

1. Introducción	2
2. Ecuaciones de conducción de calor	3
2.1. Modelo de una temperatura	3
2.1.1. Régimen lineal	3
2.1.2. Régimen no lineal	7
2.2. Modelo de dos temperaturas	12
2.2.1. Aproximación de orden cero $\alpha_e \gg \alpha_f$	14
2.2.1.1. Caso límite: película delgada $k_e l \ll 1$	15
2.2.1.2. Caso límite: bulto $k_e l \gg 1$	15
2.2.2. Aproximación de primer orden $\alpha_e \approx \alpha_f$	17
2.2.2.1. Caso límite: película delgada $k_e l \ll 1$	20
2.2.2.2. Caso límite: bulto $k_e l \gg 1$	21
3. Modelo de dos temperaturas en el régimen no lineal	25
3.1. Solución numérica	26
4. Resultados	29
4.1. Metales	29
4.2. Semiconductores	29
4.2.1. Régimen de flujo térmico bajo	30
4.2.2. Régimen de flujo térmico medio	32
4.2.3. Régimen de flujo térmico alto	33
5. Conclusiones	37
Apéndice	41

1. Introducción

Las propiedades térmicas de los materiales (calor específico, conductividad térmica, por ejemplo) tales como los metales y los dieléctricos se pueden describir haciendo uso del modelo de una temperatura única T para todas las cuasipartículas del medio (en los metales tanto los electrones de conducción como los fonones tienen la misma temperatura, mientras que en los dieléctricos son solamente los fonones los responsables de la conducción térmica). Sin embargo, en el caso de los semiconductores las diferentes cuasipartículas (electrones, huecos, fonones, etc.) pueden tener temperatura propia por lo que su descripción requiere de un modelo más sofisticado [1]. Por otro lado, los métodos experimentales que con mayor frecuencia se utilizan para la medición de las propiedades térmicas se basan en las técnicas de fotoacústica [2], fotopiroeléctricas [3], fototérmicas [4], piezoeléctricas [5], y de fotoluminiscencia [6]. En estas técnicas se utiliza, por lo general, pulsos láser que se modulan con la ayuda de un cortador de haces. Recientemente, se ha mostrado que las propiedades térmicas de los materiales se pueden describir con un solo pulso en virtud de que el uso de pulsos aplicados periódicamente involucra efectos tanto de excitación como relajación [7]. En estos trabajos se aplicaron tanto el modelo de una temperatura para todas las cuasipartículas como el modelo de dos temperaturas para los portadores de carga y los fonones. Cabe mencionar que estos estudios se restringieron al régimen lineal, es decir, todos los parámetros térmicos de los materiales (por ejemplo, conductividad térmica, calor específico) se consideraron independientes de las variaciones de la temperatura producidas por el pulso incidente. Cuando se aplican pulsos láser de gran intensidad la aproximación lineal no es correcta y requiere tomar en cuenta la dependencia de los parámetros térmicos en función de la temperatura. De esta forma el sistema se representa (tanto en el modelo de una como el de dos temperaturas) por ecuaciones diferenciales parciales parabólicas cuasilineales de segundo orden con condiciones a la frontera del tipo mixto. Así, el problema se concentra en obtener soluciones de estructura espaciotemporal, mismas que son particularmente importantes en aplicaciones prácticas.

Hasta donde sabemos, esto no se ha estudiado profundamente. La propagación de un pulso térmico a través de un material conductor (metal) en el régimen no lineal y con el modelo de una temperatura se estudió en el trabajo [8]. Por lo tanto es de gran interés investigar la respuesta térmica no lineal con el modelo de dos temperaturas que describe la situación típica en semiconductores.

El capítulo 2 es de naturaleza introductoria. Este capítulo tiene material suficiente para la discusión de las soluciones obtenidas en el capítulo 4. El capítulo 3 está dedicado a mostrar el sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales que modelan el problema. Allí se realiza la discretización de dicho sistema para su solución. En el capítulo 4 se presentan las soluciones espaciotemporales del problema. Finalmente, hemos incluido un apéndice donde se presenta la solución de diferentes problemas de propagación de calor, en el régimen lineal, que pueden ser de interés para los lectores de la presente tesis y que quieran adentrarse en este campo de estudio.

2. Ecuaciones de conducción de calor

En este capítulo se presentan ecuaciones de conducción de calor y sus soluciones, las cuales se usarán más adelante en el análisis del problema que nos atañe. Para hacer una presentación progresiva, en las secciones de este capítulo se revisan soluciones de las ecuaciones de conducción de calor, complementadas con valores a la frontera diversos. Para todas ellas se presentan gráficas en dominios de interés. Se procederá a describir aquella solución que resulte crucial para la interpretación física de nuestro problema¹.

2.1. Modelo de una temperatura

2.1.1. Régimen lineal

Si una muestra sólida se somete a un gradiente de temperatura, o si se libera energía en su interior, aparece en ella un flujo térmico, el cual es transportado por conducción de calor. La conducción de calor provoca difusión de energía e igualamiento de temperatura. La conducción de calor transporta perturbaciones térmicas a través de la muestra. En ausencia de fuentes externas de energía, la ecuación de balance de energía toma la forma

$$\rho c \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{Q} \quad (2.1)$$

donde ρ es la densidad y c es el calor específico. Ambas cantidades han sido tomadas como constantes para esta aproximación. \mathbf{Q} es el vector de flujo de calor. El flujo de calor por conducción en muestras sólidas es proporcional al gradiente de temperatura; siendo el primero un vector que está dirigido hacia regiones de menor temperatura. Entonces el flujo de calor apunta en dirección contraria a la de ∇T

$$\mathbf{Q} = -\kappa \nabla T(\mathbf{r}, t), \quad (2.2)$$

donde κ es el coeficiente de conductividad térmica, cuyo valor depende de la identidad de la muestra. Sustituyendo (2.2) en (2.1), uno obtiene la ecuación general de conducción de calor, la cual describe la temperatura de la muestra como función de las coordenadas y del tiempo

$$\rho c \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot (\kappa \nabla T). \quad (2.3)$$

Si el coeficiente de conductividad térmica se considera como constante, $\kappa = \text{const}$ se tiene

$$\rho c \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T. \quad (2.4)$$

¹La consecuencia primaria de la no linealidad es la ausencia de un principio de superposición, el cual es válido en problemas lineales. Esto hace que sea importante el realizar una clasificación de soluciones a diversos problemas. Tal clasificación puede hacer las veces de principio de superposición para problemas no lineales.

Material	α [m ² s ⁻¹]
Si	8×10^{-5}
Ge	3.6×10^{-5}
GaP	6.2×10^{-5}
GaAs	3.1×10^{-5}
AlN	1.47×10^{-4}

Tabla 1. Difusividad térmica para algunos materiales.

Dividiendo la ecuación de conducción de calor (2.4) entre ρc , toma una forma en la cual las propiedades de la muestra están caracterizadas en un sólo parámetro, el coeficiente de difusividad térmica $\alpha = \frac{\kappa}{\rho c}$:

$$\frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T. \quad (2.5)$$

Algunos valores del coeficiente de difusividad térmica en materiales semiconductores se muestra en la Tabla 1.

Si las caras laterales de la muestra se aíslan adiabáticamente, el problema es unidimensional. Si se considera que el flujo de calor Q es pequeño tal que tanto κ como c no dependen de la temperatura se puede emplear la aproximación lineal.

Con estas suposiciones y reordenando, la ecuación (2.5) toma la forma

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t}. \quad (2.6)$$

En el Apéndice de esta tesis se revisan algunas soluciones de las ecuaciones de conducción de calor, correspondientes a diversos valores a la frontera, que son de interés para el lector que desee profundizar en este campo de estudio. En esta sección revisaremos solamente ciertos problemas que se han resuelto en la literatura y que serán útiles para la interpretación de nuestros resultados.

Considérese el siguiente problema. En el extremo izquierdo ($x = 0$) se supone incide un pulso láser rectangular de duración arbitraria τ e intensidad I_0 . El extremo derecho ($x = l$) se mantiene a temperatura constante T_0 . Por simplicidad, supóngase que la muestra es ópticamente opaca. Esto significa que la energía láser total que incide en la muestra se absorbe en la superficie y es convertida completamente en calor. Por lo tanto la condición inicial es $T = T_0$ en $t = 0$ y las de frontera son: $T = T_0$, en $x = l$ (condición del primer tipo); $-\kappa \partial_x T = Q_0$ en $x = 0$ (condición no homogénea del segundo tipo) aplicable durante la aplicación del pulso, esto es, en $0 \leq t \leq \tau$; y $-\kappa \partial_x T = 0$, la cual es una condición homogénea de frontera del segundo tipo aplicable cuando ha cesado la aplicación del pulso, es decir, en $\tau \leq t < \infty$.

Para determinar la solución general de (2.6) con las condiciones de frontera e iniciales, en [7] se halló conveniente dividir el problema en dos intervalos de tiempo: el

tiempo de acción del pulso ($0 \leq t \leq \tau$), y el tiempo después de haber concluido la aplicación del pulso ($t > \tau$). Después, la solución para el primer intervalo en el momento $t = \tau$ es la condición inicial para resolver la ecuación en el segundo intervalo. De esta forma se tiene [7], para el intervalo $0 \leq t \leq \tau$:

$$T(x, t) = T_0 + \frac{Q_0(l-x)}{\kappa} - \frac{8lQ_0}{\pi^2\kappa} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\beta_n x)}{(2n+1)^2} \exp[-\beta_n^2 \alpha t], \quad (2.7)$$

con, $\beta_n = \frac{(2n+1)\pi}{2l}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Y para $t > \tau$:

$$T(x, t) = T_0 + \frac{8lQ_0}{\pi^2\kappa} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\beta_n x)}{(2n+1)^2} (1 - \exp[-\beta_n^2 \alpha t]). \quad (2.8)$$

De (2.7) y (2.8) se obtiene [7] el criterio según el cual puede considerarse como despreciable la dependencia de temperatura del coeficiente α . Dicho criterio es $|T - T_0| \ll T_0$ e implica que

$$Q_0 \ll \frac{\kappa T_0}{l}. \quad (2.9)$$

De (2.7) y (2.8) también se puede observar [7] (véase la discusión de la solución del problema 1) que el carácter de la distribución de temperatura depende del parámetro $\tau_c = \frac{4l^2}{\pi^2\alpha}$, el cual tiene dimensiones de tiempo y su sentido físico es el de un tiempo de relajación de la fluctuación de temperatura en la muestra en su longitud l completa.

En la dependencia espacial y temporal de la temperatura influye [7] la relación entre los tiempos τ y τ_c . Dado que estos parámetros son independientes, se tienen los siguientes casos: $\tau \gg \tau_c$, llamado caso de *pulso prolongado*; $\tau \ll \tau_c$, llamado caso de *pulso corto*. En [7] se graficaron (Figuras 2.1- 2.3) las soluciones para ambos casos recurriendo a la normalización $\theta(\eta, \zeta) = \frac{\kappa}{iQ_0} [T(\eta, \zeta) - T_0]$, en donde $\eta = \frac{x}{l}$, $\zeta = \frac{t}{\tau}$.

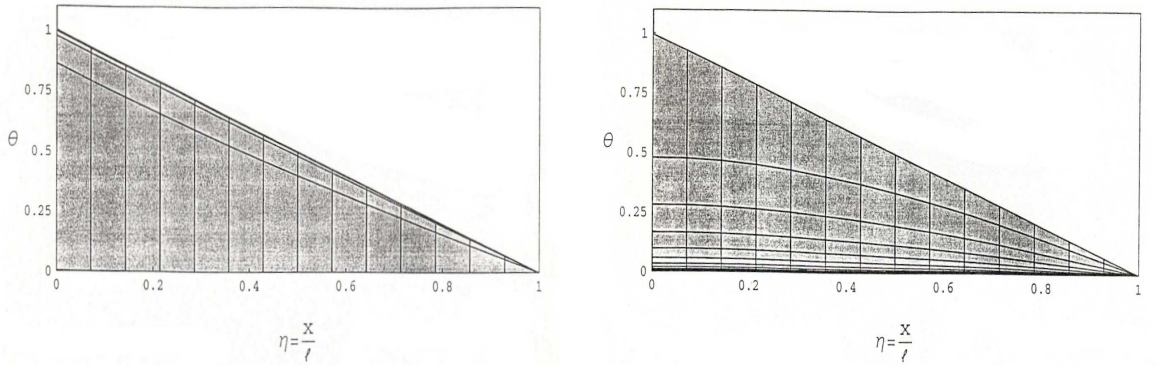


Figura 2.1: Distribución espacial de la diferencia de temperatura $\theta(\eta, \zeta) = \frac{\kappa_0}{Q_0 l} (T(\eta, \zeta) - T_0)$, con $\eta = \frac{x}{l}$, $\zeta = \frac{t}{\tau}$, $\kappa_0 = \kappa(T_0)$ con pulso prolongado en el intervalo (a) $0 \leq t \leq \tau$ y (b) $t \geq \tau$.

Note en el panel izquierdo de la Figura 2.1 que para un mismo instante, la muestra se calienta rápidamente en un tiempo del orden de $t = \tau_c = \frac{4l^2}{\pi^2\alpha}$ y se establece una

distribución lineal respecto a la coordenada (distribución cuasiestática). Una vez que se cumple $t \geq \tau$ (panel derecho) la temperatura disminuye en un tiempo del orden de $t = \tau_c$ y tiende a la temperatura T_0 [7].

Para un mismo punto (panel izquierdo de la Figura 2.2), la temperatura tiene un comportamiento exponencial en el intervalo $0 \leq t \leq \tau_c$, mientras que para el intervalo $\tau_c \leq t \leq \tau$ la temperatura deja de depender del tiempo (lo que corresponde a una dependencia espacial lineal). Para el intervalo $t > \tau$ la temperatura disminuye exponencialmente también en un tiempo del orden de τ_c [7].

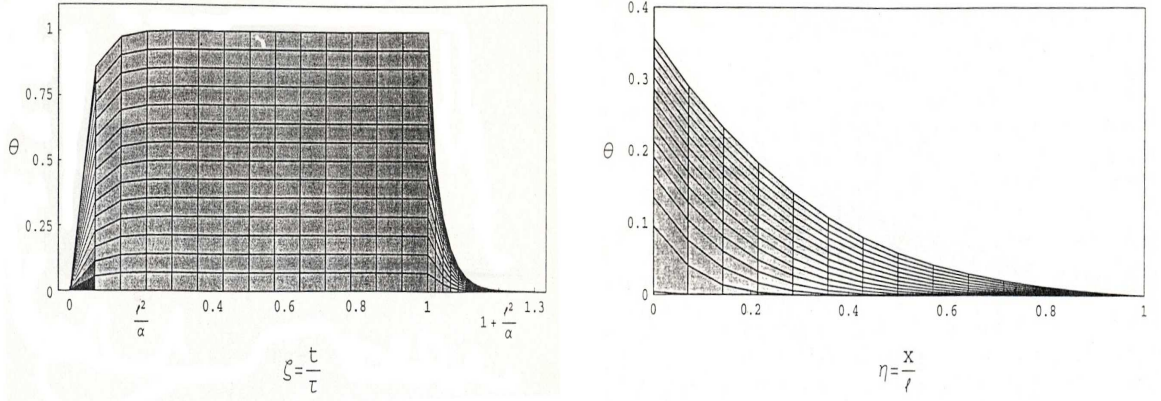


Figura 2.2: (a) Distribución temporal de la temperatura en el intervalo $0 \leq t \leq 1,2\tau$, (b) Distribución espacial de la temperatura con pulso corto en el intervalo $0 \leq t \leq \tau$.

Note que (panel derecho de la Figura 2.2) para un pulso corto, en un mismo instante, el comportamiento es exponencial con respecto a x . En el intervalo (panel izquierdo de la Figura 2.3) $\tau < t < \infty$ el comportamiento de la temperatura es amonótono con respecto a x [7].

Note que para este intervalo la curvatura de la distribución de temperatura es una función positiva en todos los puntos ($\partial_{xx}T > 0$)². Posteriormente aparecen dos regiones: una ($0 < x < x_1$) en la que la curvatura de la función se vuelve negativa ($\partial_{xx}T < 0$) y otra en la que se mantiene positiva ($x > x_1$). Aquí $x_1 = \sqrt{\alpha\tau}$ es el punto de la muestra hasta el cual se ha establecido un estado de cuasiestabilidad [7].

En un mismo punto para el caso de pulso corto en el intervalo $0 < t < \tau$ (panel derecho de la Figura 2.3) la temperatura aumenta exponencialmente. En el intervalo $\tau < t < \infty$ se nota que existe una región en la que la temperatura disminuye monótonamente ($0 < x < x_1$) y otra no monótona en la que la temperatura aumenta inicialmente para luego ($x > x_1$) disminuir. Esto se explica puesto que en el momento inicial $t = \tau$, la curvatura de la distribución de temperatura es positiva, lo que significa que las capas cercanas al plano $x = 0$ se enfrían dado que ya no reciben calor (recuerde que $t > \tau$) y el calor de estas capas se transmite a las capas paralelas adyacentes. Estas capas

² $\partial_{xx}T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

paralelas se calientan inicialmente porque el gradiente de calor que reciben es mayor que el que transmiten a las siguientes capas (lo que se desprende del cambio de signo de $\partial_{xx}T$). Este proceso continúa hasta que las capas cercanas al plano $x = 0$ no tengan más calor que transmitir por lo que las capas paralelas empiezan a enfriarse hasta que toda la muestra alcance la temperatura de equilibrio [7].

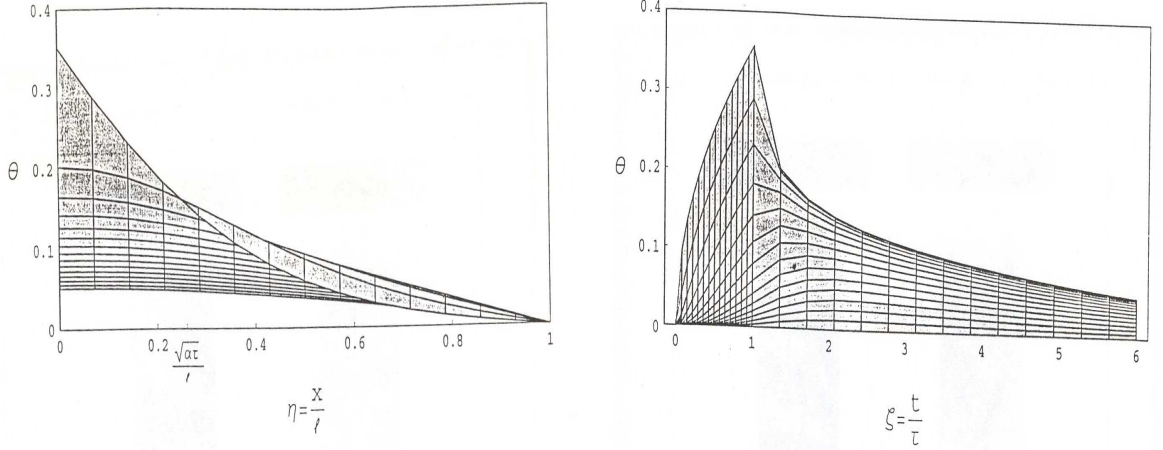


Figura 2.3: (a) Distribución espacial de la temperatura con pulso corto en el intervalo $\tau < t \leq 6\tau$, (b) distribución temporal de la temperatura con pulso corto en el intervalo $\tau < t \leq 6\tau$.

2.1.2. Régimen no lineal

Supóngase ahora que tanto el coeficiente de conductividad térmica como el calor específico dependen de la temperatura. En esta aproximación la ecuación de balance de energía es

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\rho \frac{\partial}{\partial t} c(T)T \quad (2.10)$$

y el flujo de calor por conducción es

$$Q = -\kappa(T) \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (2.11)$$

Sustituyendo (2.11) en (2.10) se tiene³

$$\frac{\partial}{\partial x} \kappa(T) \frac{\partial T}{\partial x} = \rho \frac{\partial}{\partial t} c(T)T. \quad (2.12)$$

³Escribiendo explícitamente las derivadas la ecuación (2.12) queda como

$$\kappa(T) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{d\kappa}{dT} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 = \left(\rho c(T) + \rho T \frac{dc(T)}{dT} \right) \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Note que al considerar $\kappa = const$ y $c = const$ la ecuación (2.12) toma la forma lineal (2.6).

Considérese el siguiente problema. Suponga que en (2.12) $c = \text{const}$ y que el coeficiente de conductividad térmica decrece cuando la temperatura disminuye y es nulo a temperatura cero. De esta forma (2.12) queda como⁴

$$\frac{\partial}{\partial x} \kappa(T) \frac{\partial T}{\partial x} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (2.13)$$

En este caso el calor no puede penetrar a una distancia grande, sino que se propaga desde la fuente con una velocidad finita de forma tal que existe una frontera precisamente definida entre la región “caliente” y la “fría” la cual no ha sido alcanzada por la perturbación térmica. El calor se propaga desde la fuente en forma de una onda, con la superficie de frontera como frente de onda. A esta onda se le llama *onda térmica* [9].

Note que la temperatura y el flujo de calor en la parte de la muestra sin perturbar son iguales a cero, ya que el coeficiente de conductividad térmica tiende a cero. Recuerde que en el caso de la conducción lineal de calor, $\kappa, c = \text{const}$, el hecho de que el flujo de calor sea nulo se puede atribuir únicamente al caso en el que el gradiente de temperatura sea nulo también. Por el contrario, en el caso de la conducción no lineal de calor, dado que κ decrece a cero con $T \rightarrow 0$, el flujo de calor puede ser nulo si el gradiente de temperatura es diferente de cero porque el coeficiente de conductividad térmica tiende a cero. Esta condición es la responsable de que exista un frente de onda térmico bien definido [9].

Considérese una capa de muestra cerca del frente de onda. Para intervalos de tiempo suficientemente pequeños tal que la onda viaja distancias pequeñas en comparación con la región que comprende la onda completa y en comparación con la coordenda del frente de onda x_f (vea la Figura 2.4), entonces la velocidad del frente durante este intervalo de tiempo puede considerarse constante [9].

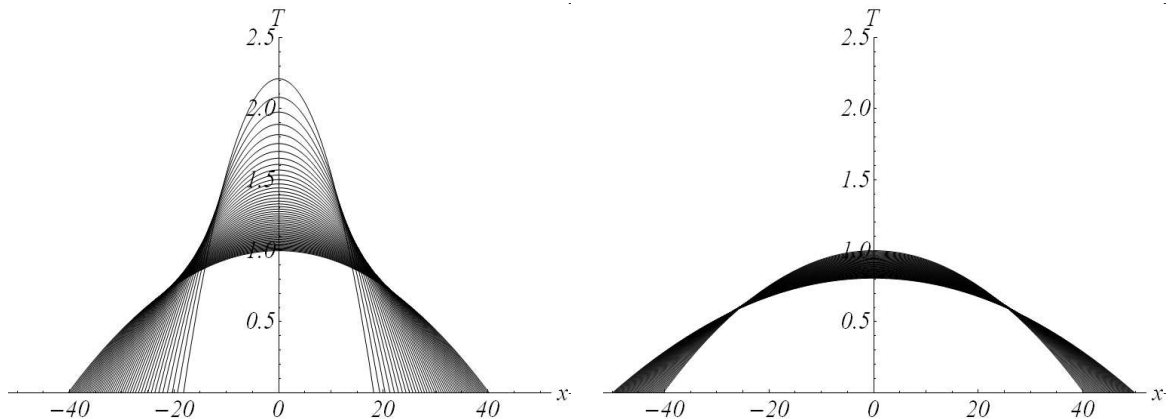


Figura 2.4: Propagación de una onda térmica desde una fuente plana instantánea, siendo el panel izquierdo el más próximo a la condición inicial. Confróntese con la Figura (a-1).

⁴Para esta ecuación en la literatura se han resuelto las cuestiones fundamentales de existencia, unicidad y estabilidad de sus soluciones con valores a la frontera diversos.

Se puede buscar una distribución de temperatura cerca del frente de onda en la forma de una onda estacionaria $T = T(x - vt)$, donde v es la velocidad del frente. La distribución de temperatura cerca del frente es cuasiestacionaria en un sistema de coordenadas que se mueve con el frente de onda. Sustituyendo una solución de la forma $T = T(x - vt)$ en (2.13) se obtiene [9] la siguiente ecuación para la distribución de temperatura cerca del frente de onda

$$-v \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \alpha(T) \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.14)$$

Suponiendo que $\alpha = aT^n$ ($n > 0$) con la condición de frontera $T = 0$ en $x = x_f$, la solución [9] de (21) es ⁵

$$T = \left[\frac{nv}{a} |x_f - x| \right]^{1/n}. \quad (2.15)$$

En la Figura 2.4 se muestra (en tiempos sucesivos) la distribución de temperatura bajo el régimen de onda térmica.

Si el exponente $n \leq 0$, el coeficiente de difusividad térmica α no es cero para $T = 0$ y (21) no tiene solución que sea nula a una distancia finita. Este caso corresponde a la propagación instantánea de calor a distancias grandes arbitrarias. De (2.15) se desprende que el gradiente de temperatura cerca del frente de la onda térmica satisface la proporcionalidad $\frac{dT}{dx} \sim |x_f - x|^{(1/n)-1}$. Si $n > 1$, entonces el gradiente de temperatura en el frente (en $x = x_f$) se vuelve infinito, es decir, el frente es una función rectangular. Si $n < 1$, $(dT/dx)_{x_f} = 0$. Sin embargo, el flujo siempre es cero en $x = x_f$: $Q \sim T^n \frac{dT}{dx} \sim |x_f - x|^{1/n} \rightarrow 0$ para $n > 0$ [9].

Considérese el siguiente problema. Suponga que en (2.12), $\kappa = const$ y que el lado derecho de la misma es $\rho T \frac{\partial T}{\partial t}$. Así se tiene

$$\kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho T \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.16)$$

Supóngase además que $\kappa, \rho = 1$. Las condiciones de frontera tómense de la forma: $T(x, 0) = 0$ para $x > 0$, $T(\infty, t) = 0$ para $t > 0$, $\partial_x T(0, t) = -1$ para $t > 0$. La solución [13] es

$$T(x, t) = t^{-1/3} y \left(\frac{x}{\sqrt{3} t^{1/3}} \right) \quad (2.17)$$

donde $y(z)$, $z = \frac{xt^{-1/3}}{\sqrt{3}}$ satisface la ecuación

$$\frac{d^2 y}{dz^2} - y \left(y - z \frac{dy}{dz} \right) = 0 \quad (2.18)$$

En la Figura 2.5 se muestra un perfil de (2.17) obtenido numéricamente en [13].

⁵Las propiedades de diferenciabilidad de esta solución ya han sido estudiadas en detalle en la literatura.

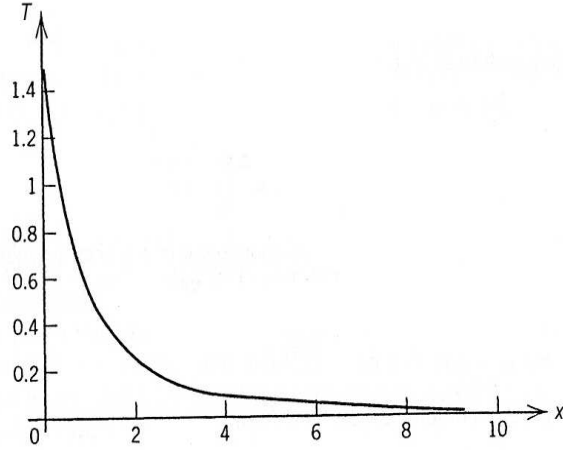


Figura 2.5: Perfil de $T(x, t)$ de la forma (2.17) tomado de [13].

Considérese el siguiente problema. Supóngase un problema de conducción de calor que se describa con una ecuación de la forma

$$\frac{\partial}{\partial x} \kappa(T) \frac{\partial T}{\partial x} = \rho c(T) \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (2.19)$$

con las condiciones iniciales y a la frontera: $T(x, 0) = T_0$, $T(x, t) = T_0$ en $x = l$, $-\kappa(T) \partial_x T = Q_0$ en $x = 0$, $Q_0(t) = Q_0$ (condición no homogénea) para $0 \leq t \leq \tau$, $Q_0(t) = 0$ (condición homogénea) si $\tau \leq t < \infty$ (vea formulación del problema 10).

La solución [8] de (2.19) se presenta en forma gráfica (Figuras 2.6 - 2.9) para valores sucesivos de Q_0 en las que se usó tanto un polinomio de grado n para modelar el coeficiente de conductividad térmica de una muestra de titanio, como la normalización $\theta(\eta, \zeta) = \frac{\kappa_0}{Q_0 l} (T(\eta, \zeta) - T_0)$, con $\eta = \frac{x}{l}$, $\zeta = \frac{t}{\tau}$, $\kappa_0 = \kappa(T_0)$.

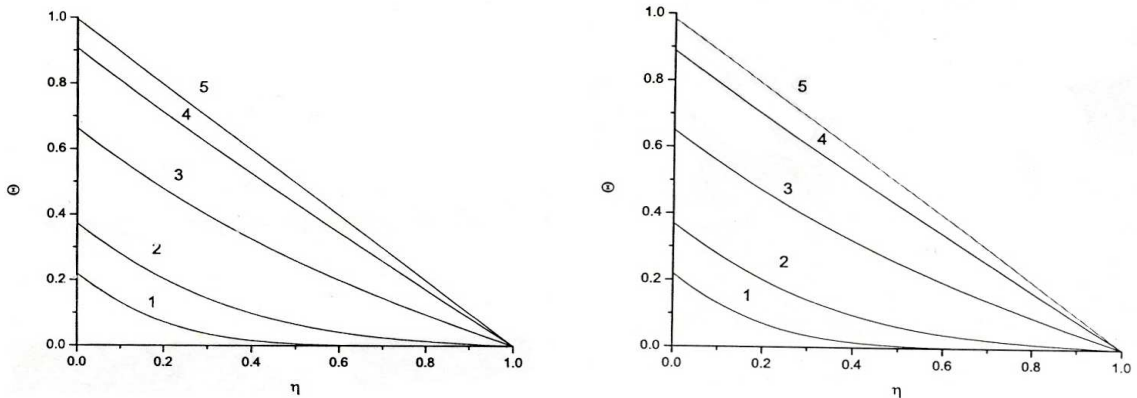


Figura 2.6: Distribución espacial de θ , en el intervalo $0 \leq t \leq \tau$ con flujo térmico en la frontera izquierda de (a) $Q_0 = 10^2 \text{W/m}^2$ y (b) $Q_0 = 10^3 \text{W/m}^2$.

Note (Figuras 2.6 - 2.9) que las funciones $\theta(\eta)$ decrecen con η . Para magnitudes del flujo térmico en la frontera Q_0 relativamente bajas (recuerde el criterio obtenido

en el problema 10, $Q_0 \ll \frac{\kappa T_0}{l}$), note que las distribuciones tienden a la distribución cuasiestática con el transcurso del tiempo. Si se incrementa Q_0 la temperatura se incrementa ($T \sim T_0 + Q_0 l / \kappa$) en el plano irradiado [8].

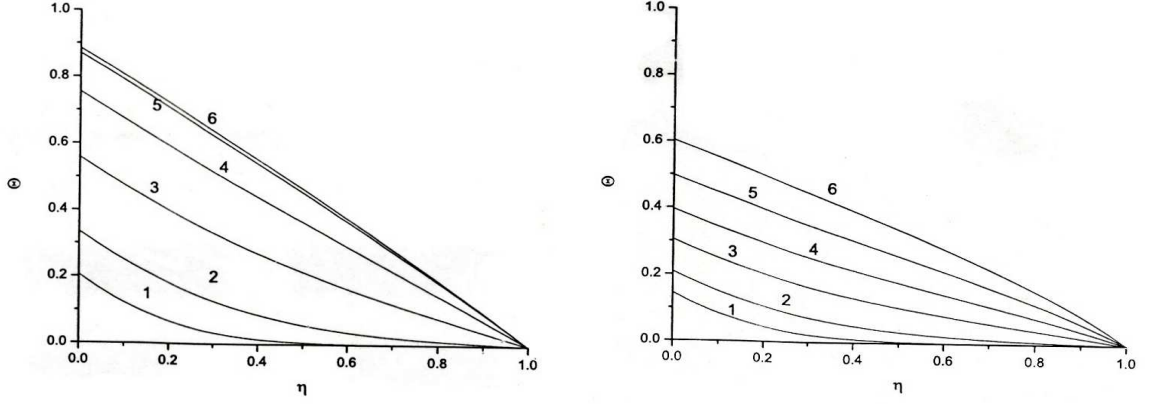


Figura 2.7: Distribución espacial de θ , en el intervalo $0 \leq t \leq \tau$ con flujo térmico en la frontera izquierda de (a) $Q_0 = 10^4 \text{W/m}^2$ y (b) $Q_0 = 10^5 \text{W/m}^2$.

A diferencia del caso cuando $Q_0 = 10^2, 10^3, 10^4 \text{W/m}^2$ en la Figura 2.7b se nota claramente que la distribución cuasiestática de θ tiene una forma que corresponde a una función no lineal. Este remarkable resultado fue obtenido en [8], en donde también se concluye que los llamados perfiles cuasiestáticos no lineales ocurren a tiempos mayores que el tiempo característico $\tau_c = \frac{4l^2}{\pi^2\alpha}$ del caso lineal equivalente (problema 10), esto es, el tiempo de relajación térmica es mayor en el régimen no lineal.

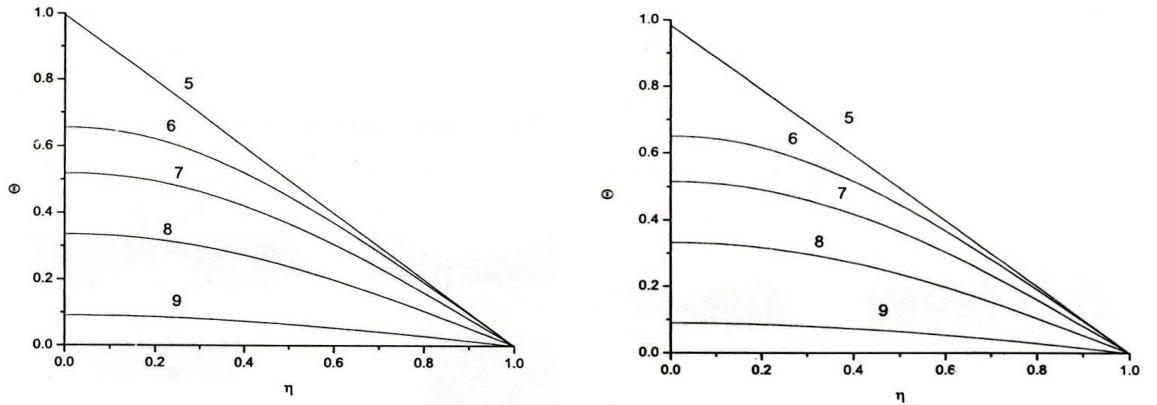


Figura 2.8: Distribución espacial de θ , en el intervalo $\tau \leq t < \infty$ con flujo térmico en la frontera izquierda de (a) $Q_0 = 10^2 \text{W/m}^2$ y (b) $Q_0 = 10^3 \text{W/m}^2$.

Para el intervalo $t > \tau$ note que (Figuras 2.8 y 2.9) la distribución de temperatura decrece rápidamente en toda la muestra manteniendo su valor máximo en el plano $x = 0$. En el caso en que Q_0 es relativamente bajo (Figura 2.8) la distribución de temperatura para todos los instantes calculados cumplen $\theta \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$. Observe que para Q_0 suficientemente grande (Figura 2.9), la disminución de la temperatura en la región cercana a $x = l$ ocurre más rápido que en el llamado caso lineal [8].

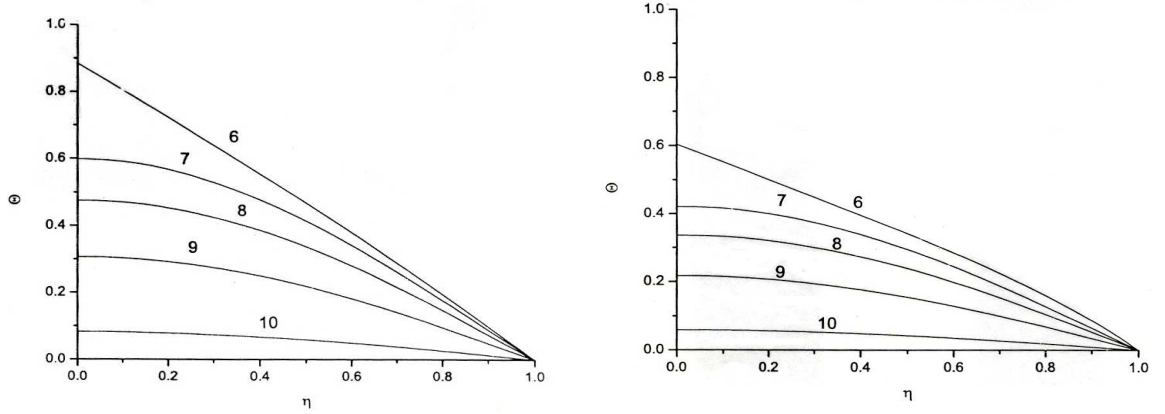


Figura 2.9: Distribución espacial de θ , en el intervalo $\tau \leq t < \infty$ con flujo térmico en la frontera izquierda de (a) $Q_0 = 10^3 \text{W/m}^2$ y (b) $Q_0 = 10^4 \text{W/m}^2$.

2.2. Modelo de dos temperaturas

Atendiendo un enfoque cinético del problema de conducción de calor en sistemas con dos grados de libertad (*subsistemas*), no existe ningún fundamento para esperar que, en general, una muestra sometida a un gradiente de temperatura, las temperaturas (en caso de poderse definir) de los grados de libertad coincidan [1]. Este hecho es la base del modelo de dos temperaturas, el cual es de los modelos más simples y a la vez efectivos para describir procesos de conducción de calor [11] ya que ha sido ampliamente usado para predecir distribuciones de temperatura en varios sistemas [18]. En él se asigna una temperatura individual a cada grado de libertad del sistema. El concepto de *dos temperaturas* originalmente predicho teóricamente [19] se ha validado por muchos experimentos [18].

Considérese un sistema semiconductor con dos grados de libertad interactuantes (subsistema de electrones interactuando energéticamente con un subsistema de fonones), cada uno con temperatura propia T_e , T_f . El sistema de ecuaciones de conducción de calor para tal sistema es

$$\frac{\partial^2 T_e}{\partial x^2} - k_e^2 [T_e(x, t) - T_f(x, t)] = \frac{1}{\alpha_e} \frac{\partial T_e(x, t)}{\partial t} \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2} + k_f^2 [T_e(x, t) - T_f(x, t)] = \frac{1}{\alpha_f} \frac{\partial T_f(x, t)}{\partial t} \quad (2.21)$$

donde α_e , α_f son las difusividades térmicas de los subsistemas. $k_{e,f}^2 = nF_e/\kappa_{e,f}$, n es la concentración de electrones, F_e es la frecuencia de relajación de la energía debida a la interacción entre el subsistema de electrones y el de fonones. $k_{e,f}^{-1}$ son las llamadas longitudes de relajación de energía para ambos subsistemas, o más conocidas como longitudes de enfriamiento. Estas longitudes determinan la distancia $k^{-1} = [k_e k_f / (k_e + k_f)]^{-1}$ dentro de la cual la diferencia entre las temperaturas de ambos subsistemas desaparece para estados estacionarios.

En [11] se resolvieron estas ecuaciones con las siguientes condiciones iniciales y de frontera: $T_{e,f} = T_0$ en $t = 0$; $T_{e,f} = T_0$ en $x = l$ (condición de frontera del primer tipo); $-\kappa_{e,f}\partial_x T = Q_{e,f}^0$ en $x = 0$ (condición de frontera no homogénea del segundo tipo) para el intervalo temporal $0 \leq t \leq \tau$ donde $Q_{e,f}^0$ es el flujo de calor generado en el subsistema de electrones y en el de fonones una vez que un pulso energético incidente ha sido convertido completamente en calor; $\partial_x T = 0$ en $x = 0$ (condición de frontera homogénea del segundo tipo) para $\tau \leq t < \infty$.

En el trabajo citado, además de separar el intervalo de tiempo de igual forma que en el problema 10, se aplicó el método usual [10] de separar la contribución estática $T_{e,f}^s(x)$ de la dinámica $F_{e,f}(x, t)$, esto es, para $0 \leq t \leq \tau$:

$$T_{e,f}(x, t) = T_{e,f}^s(x) + F_{e,f}(x, t), \quad (2.22)$$

con lo que las ecuaciones de conducción de calor para la contribución estática están dadas por

$$\frac{d^2 T_e^s}{dx^2} - k_e^2(T_e^s - T_f^s) = 0, \quad (2.23)$$

$$\frac{d^2 T_f^s}{dx^2} + k_f^2(T_e^s - T_f^s) = 0, \quad (2.24)$$

con las condiciones: $-\kappa_{e,f}\frac{dT_{e,f}^s}{dx}|_{x=0} = Q_{e,f}^0$, $T_{e,f}^s|_{x=l} = T_0$. De esta forma se encontró que

$$T_{e,f}^s(x) = T_0 + \frac{1}{k^2} \left(\frac{Q_e^0}{\kappa_e} k_f^2 + \frac{Q_f^0}{\kappa_f} k_e^2 \right) (l - x) \pm \frac{k_{e,f}}{k^2} \left(\frac{Q_e^0}{\kappa_e} - \frac{Q_f^0}{\kappa_f} \right) \frac{\sinh[k(l - x)]}{k \cosh(kl)}. \quad (2.25)$$

Las ecuaciones de conducción de calor para la contribución dinámica son:

$$\frac{\partial^2 F_{e,f}^0}{\partial x^2} \pm k_{e,f}^2 [T_e(x, t) - T_f(x, t)] = \frac{1}{\alpha_{e,f}} \frac{\partial F_e(x, t)}{\partial t} \quad (2.26)$$

con las condiciones: $\frac{\partial F_{e,f}(x,t)}{\partial x}|_{x=0} = 0$, $F_{e,f}|_{x=l} = 0$, $F_{e,f}(x, t)|_{t \leq 0} = T_0 - T_{e,f}^s(x)$, $F_{e,f}(x, t)|_{t \leq 0} = T_0 - T_{e,f}^s(x)$. Con ello se encontró que la solución general para el sistema de ecuaciones (2.20) y (2.21) es

$$\begin{aligned} T_e(x, t) = & T_0 + \frac{1}{k^2} \left(\frac{Q_e^0}{\kappa_e} k_f^2 + \frac{Q_f^0}{\kappa_f} k_e^2 \right) (l - x) + \frac{k_e^2}{k^2} \left(\frac{Q_e^0}{\kappa_e} - \frac{Q_f^0}{\kappa_f} \right) \frac{\sinh[k(l-x)]}{k \cosh(kl)} + \frac{2k_e^2}{lk^2} \left(\frac{Q_e^0}{\kappa_e} - \frac{Q_f^0}{\kappa_f} \right) \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \cos(\beta_n \frac{x}{l}) \left[\frac{(k^2 l^2 \alpha_e + \beta_n^2 \alpha_e + \lambda_{1n} l^2) e^{\lambda_{2n} t} - (k^2 l^2 \alpha_e + \beta_n^2 \alpha_e + \lambda_{2n} l^2) e^{\lambda_{1n} t}}{(\lambda_{2n} - \lambda_{1n})(k^2 l^2 + \beta_n^2)} \right] + \\ & + \frac{2}{lk^2} \left(\frac{Q_e^0}{\kappa_e} k_f^2 + \frac{Q_f^0}{\kappa_f} k_e^2 \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\beta_n \frac{x}{l})}{\beta_n^2} \frac{(\beta_n^2 \alpha_e + \lambda_{1n} l^2) e^{\lambda_{2n} t} - (\beta_n^2 \alpha_e + \lambda_{2n} l^2) e^{\lambda_{1n} t}}{\lambda_{2n} - \lambda_{1n}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_f(x, t) = & T_0 + \frac{1}{k^2} \left(\frac{Q_e^0}{\kappa_e} k_f^2 + \frac{Q_f^0}{\kappa_f} k_e^2 \right) (l - x) - \frac{k_f^2}{k^2} \left(\frac{Q_e^0}{\kappa_e} - \frac{Q_f^0}{\kappa_f} \right) \frac{\sinh[k(l-x)]}{k \cosh(kl)} - \frac{2k_f^2}{lk^2} \left(\frac{Q_e^0}{\kappa_e} - \frac{Q_f^0}{\kappa_f} \right) \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \cos(\beta_n \frac{x}{l}) \left[\frac{(k^2 l^2 \alpha_f + \beta_n^2 \alpha_f + \lambda_{1n} l^2) e^{\lambda_{2n} t} - (k^2 l^2 \alpha_f + \beta_n^2 \alpha_f + \lambda_{2n} l^2) e^{\lambda_{1n} t}}{(\lambda_{2n} - \lambda_{1n})(k^2 l^2 + \beta_n^2)} \right] + \\ & + \frac{2}{lk^2} \left(\frac{Q_e^0}{\kappa_e} k_f^2 + \frac{Q_f^0}{\kappa_f} k_e^2 \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\beta_n \frac{x}{l})}{\beta_n^2} \frac{(\beta_n^2 \alpha_f + \lambda_{1n} l^2) e^{\lambda_{2n} t} - (\beta_n^2 \alpha_f + \lambda_{2n} l^2) e^{\lambda_{1n} t}}{\lambda_{2n} - \lambda_{1n}}. \end{aligned}$$

Con, $\lambda_{1n,2n} = \frac{1}{2}(-k_e^2\alpha_e - \kappa_f^2\alpha_f - \beta_n^2\alpha \pm \{[k_e^2\alpha_e - \kappa_f^2\alpha_f \pm \beta_n^2(\alpha_e - \alpha_f)]^2 + 4k_e^2\kappa_f^2\alpha_e\alpha_f\}^{\frac{1}{2}})$, $\beta_n = \pi/2(2n + 1)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ y después de haber concluido la aplicación del pulso térmico, $\tau \leq t \leq \infty$.

$$T_e(x, t) = T_0 + \frac{2k_e^2}{lk^2} \left(\frac{Q_e^0}{\kappa_e} - \frac{Q_f^0}{\kappa_f} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \cos(\beta_n x) \left[\frac{(k^2\alpha_e + \beta_n^2\alpha_e + \lambda_{2n})(1 - e^{\lambda_{1n}t}) - (k^2\alpha_e + \beta_n^2\alpha_e + \lambda_{1n}l^2)(1 - e^{-\lambda_{2n}\tau_c})e^{\lambda_{2n}t}}{(\lambda_{1n} - \lambda_{2n})(k^2 + \beta_n^2)} \right] + \frac{2}{lk^2} \left(\frac{Q_e^0}{\kappa_e} k_f^2 + \frac{Q_f^0}{\kappa_f} k_e^2 \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\beta_n x)}{\beta_n^2} \left[\frac{(\beta_n^2\alpha_e + \lambda_{2n})(1 - e^{\lambda_{1n}\tau_c})e^{\lambda_{1n}t} - (\beta_n^2\alpha_e + \lambda_{1n}l^2)(1 - e^{-\lambda_{2n}\tau_c})}{\lambda_{1n} - \lambda_{2n}} \right],$$

$$T_f(x, t) = T_0 - \frac{2k_f^2}{lk^2} \left(\frac{Q_e^0}{\kappa_e} - \frac{Q_f^0}{\kappa_f} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \cos(\beta_n x) \left[\frac{(k^2\alpha_f + \beta_n^2\alpha_f + \lambda_{2n})(1 - e^{\lambda_{1n}t}) - (k^2\alpha_f + \beta_n^2\alpha_f + \lambda_{1n}l^2)(1 - e^{-\lambda_{2n}\tau_c})e^{\lambda_{2n}t}}{(\lambda_{1n} - \lambda_{2n})(k^2 + \beta_n^2)} \right] + \frac{2}{lk^2} \left(\frac{Q_e^0}{\kappa_e} k_f^2 + \frac{Q_f^0}{\kappa_f} k_e^2 \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\beta_n x)}{\beta_n^2} \left[\frac{(\beta_n^2\alpha_f + \lambda_{2n})(1 - e^{\lambda_{1n}\tau_c})e^{\lambda_{1n}t} - (\beta_n^2\alpha_f + \lambda_{1n}l^2)(1 - e^{-\lambda_{2n}\tau_c})}{\lambda_{1n} - \lambda_{2n}} \right].$$

Para el caso particular en el que la interacción energética entre los subsistemas de electrones y de fonones es de magnitud relativamente grande ($\tau_e = 0$, $P = \infty$), las ecuaciones (2.20) y (2.21) se reducen a la ecuación (2.6). Respectivamente, las soluciones para el caso de dos temperaturas se reducen a las de una temperatura.

2.2.1. Aproximación de orden cero $\alpha_e \gg \alpha_f$

El número de electrones por unidad de volumen en la banda de conducción se puede determinar en el marco de la estadística de Fermi-Dirac. Se puede extraer información útil acerca de los parámetros térmicos del subsistema de electrones y del de fonones suponiendo que el potencial químico $\mu < 0$, $|\mu| \gg T$ [11]. Si esto ocurre, el semiconductor se puede considerar no degenerado y para este caso la razón entre la conductividad térmica del subsistema de electrones y la de fonones satisface: $\kappa_e/\kappa_f \sim 10^{-3}$ [11]. Entonces, definiendo la longitud de enfriamiento del subsistema de electrones k_e^{-1} y del de fonones k_f^{-1} , y usando la teoría cinética de un gas de electrones en [14] se demostró que la capacidad calorífica del subsistema de electrones es proporcional a la densidad de electrones en semiconductores no degenerados, es decir, $(\rho c)_e \sim n \sim 10^{14} - 10^{16} \text{ cm}^{-3}$, mientras que para el gas de fonones $(\rho c)_f \sim 10^{23} \text{ cm}^{-3}$. En estas condiciones se obtiene:

$$\alpha_e = \frac{\kappa_e}{n}; \quad \alpha_f = 10^3 \frac{\kappa_e}{(\rho c)_f}; \quad \frac{\alpha_e}{\alpha_f} = \frac{\kappa_e}{(\rho c)_e} \frac{(\rho c)_f}{\kappa_f} \approx 10^6 - 10^4. \quad (2.27)$$

Por lo tanto

$$\alpha_e \gg \alpha_f. \quad (2.28)$$

Con estas aproximaciones y simplificando [$\lambda_{1n} = 0$, $\lambda_{2n} = -\alpha_e(k_e^2 + \beta_n^2)$], las expresiones [20] para T_e y T_f son:

$$T_e(x, t) = T_0 + \frac{Q_e}{\kappa_e} \frac{\sinh[k_e(l - x)]}{k_e \cosh(k_e l)} - \frac{2Q_e^0}{lk_e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\beta_n x)}{k_e^2 + \beta_n^2} e^{-\alpha_e(k_e^2 + \beta_n^2)t}, \quad (2.29)$$

$$T_f(x, t) = T_0.$$

Mientras que para $\tau_c \leq t \leq \infty$ la soluciones son:

$$T_e(x, t) = T_0 - \frac{2Q_e^0}{l\kappa_e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\beta_n x)}{k_e^2 + \beta_n^2} \left(1 - e^{-\alpha_e(k_e^2 + \beta_n^2)\tau_c}\right) e^{-\alpha_e(k_e^2 + \beta_n^2)t}, \quad (2.30)$$

$$T_f(x, t) = T_0.$$

2.2.1.1. Caso límite: película delgada $k_e l \ll 1$

Atendiendo la correlación entre la longitud de enfriamiento del subsistema de electrones k_e^{-1} y la longitud de la muestra l existen [20] los casos límite de película delgada y de bulto. En el primer caso $k_e l \ll 1$ y las temperaturas del subsistema de electrones se simplifican [11] tal que:

$$T_e(x, t) = T_0 + \frac{Q_e}{\kappa_e} \frac{\sinh[k_e(l-x)]}{k_e \cosh(k_e l)} - \frac{8Q_e^0 l}{\pi^2 \kappa_e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos[(2n+1)\pi x/2l]}{(2n+1)^2} e^{-(2n+1)^2(\pi^2 \alpha_e/4l^2)t}, \quad (2.31)$$

$$T_e(x, t) = T_0 - \frac{8Q_e^0 l}{\pi^2 \kappa_e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos[(2n+1)\pi x/2l]}{(2n+1)^2} (1 - e^{-(2n+1)^2(\pi^2 \alpha_e/4l^2)\tau_c}) e^{-(2n+1)^2(\pi^2 \alpha_e/4l^2)t}, \quad (2.32)$$

para $0 \leq t \leq \tau_c$ y para $\tau_c \leq t \leq \infty$, respectivamente. En (2.31) y (2.32) note que existe una longitud característica $k^{-1} \simeq k_e^{-1}$ en la cual la energía que adquiere el subsistema de electrones del flujo térmico en $x = 0$ se transfiere al subsistema de fonones, el cual se encuentra a temperatura T_0 . El subsistema de fonones actúa como termostato [20].

Note también que la distribución de temperatura depende de la relación entre el tiempo τ_c de duración de Q_0 y el tiempo característico de relajación de energía del subsistema de electrones τ . Entonces, en el caso de película delgada se obtiene el resultado sobresaliente [11] en el que el subsistema de electrones no puede transferir su energía al otro subsistema [20].

2.2.1.2. Caso límite: bulto $k_e l \gg 1$

En el caso de bulto $k_e \gg 1$, las temperaturas del subsistema de electrones se simplifican tal que:

$$T_e(x, t) = T_0 + \frac{Q_e}{\kappa_e} \frac{\sinh[k_e(l-x)]}{k_e \cosh(k_e l)} - \frac{2Q_e^0 l}{l\kappa_e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos[(2n+1)\pi x/2l]}{k_e^2 + (2n+1)^2(\pi^2/4l^2)} e^{-\alpha_e[k_e^2 + (2n+1)^2(\pi^2/4l^2)]t}, \quad (2.33)$$

$$T_e(x, t) = T_0 - \frac{2Q_e^0 l}{l\kappa_e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos[(2n+1)\pi x/2l]}{k_e^2 + (2n+1)^2(\pi^2/4l^2)} (1 - e^{-\alpha_e[k_e^2 + (2n+1)^2(\pi^2/4l^2)]\tau_c}) e^{-\alpha_e[k_e^2 + (2n+1)^2(\pi^2/4l^2)]t}, \quad (2.34)$$

para $0 \leq t \leq \tau_c$ y para $\tau_c \leq t \leq \infty$, respectivamente. En este caso el subsistema de electrones cede completamente su energía al subsistema de fonones [20].

Si se toma en cuenta la relación entre el tiempo de relajación del subsistema de electrones τ y la duración del pulso láser τ_c se pueden discernir varias aproximaciones para $T_e(x, t)$.

Si se desprecia la contribución dinámica a T_e resulta que Q_e es prácticamente constante. Esta situación es válida si el extremo izquierdo de la muestra se ilumina durante un tiempo τ_c tal que $\tau_c \gg \tau$. Esta aproximación es similar al proceso cuasiestático de difusión de calor en el que la temperatura es una función lineal de la posición x (Figuras 2.10, 2.11 y 2.12).

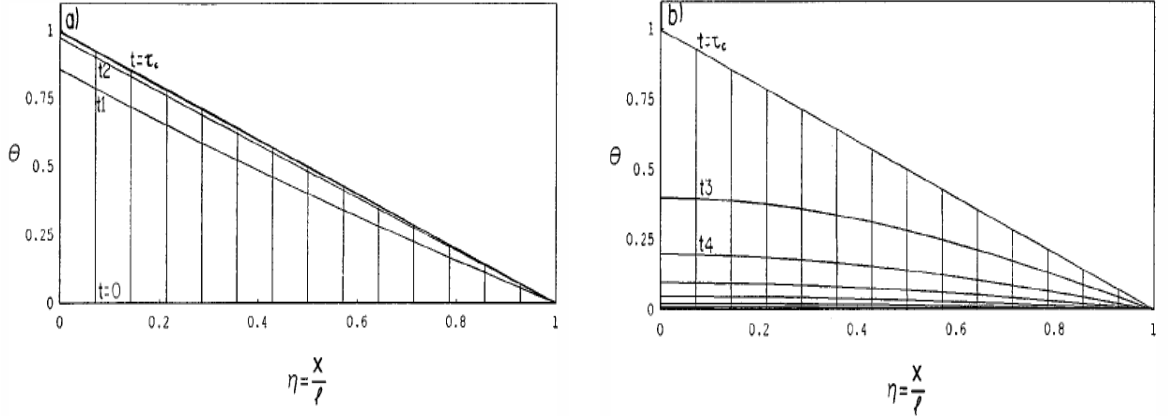


Figura 2.10: Dependencia temporal de la temperatura normalizada $\theta_e = (\kappa_e/Q_e l)(T_e - T_0)$ como función de la posición para (a) $0 < t_1 < t_2 < \dots < \tau_c$ y (b) $\tau_c < t_3 < t_4 < \dots$ para el caso de película delgada.

Por el contrario, para la excitación con pulsos cortos ($\tau_c \ll \tau$), T_e decrece exponencialmente (Figuras 2.13 - 2.14) al aumentar x durante el intervalo $0 \leq t \leq \tau_c$ de tal forma que a partir de una distancia $x = \sqrt{\alpha_e t}$ la temperatura es casi nula.

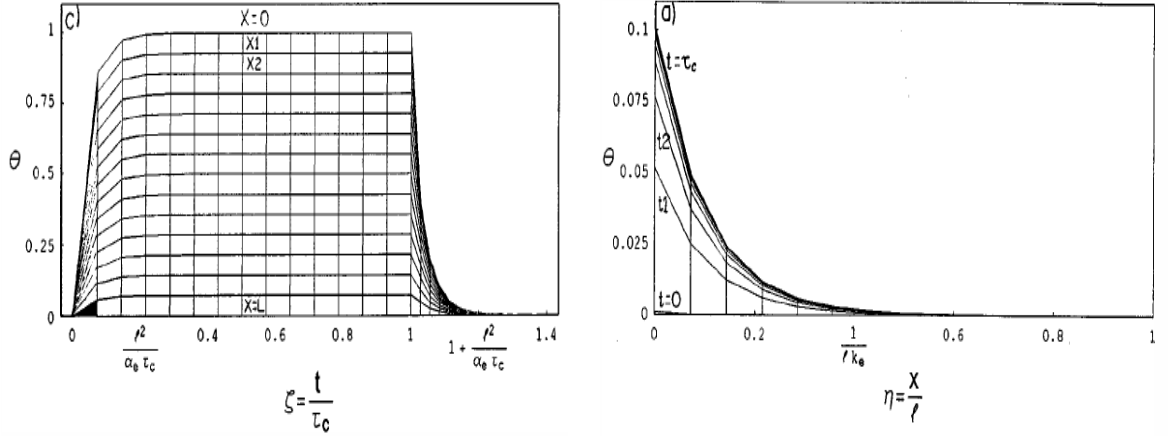


Figura 2.11: (a) Dependencia espacial de $\theta_e = (\kappa_e/Q_e l)(T_e - T_0)$ como función del tiempo en $0 < x_1 < x_2 < \dots < l$ para película delgada. (b) Dependencia temporal de θ_e como función de la posición para (a) $0 < t_1 < t_2 < \dots < \tau_c$ en el caso de bulto.

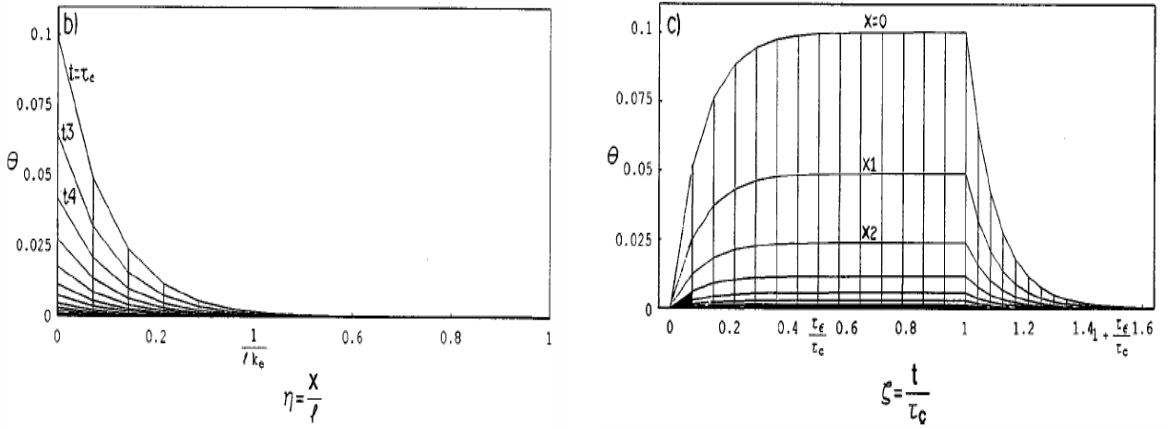


Figura 2.12: (a) Dependencia temporal de θ_e como función de la posición para $\tau_c < t_3 < t_4 < \dots$ en el caso de bulto. (b) Dependencia de la posición de θ_e como función del tiempo en $0 < x_1 < x_2 < \dots < l$ para película bulto.

2.2.2. Aproximación de primer orden $\alpha_e \approx \alpha_f$

Simplificando la solución general [11] del sistema (2.20) y (2.21) con $\lambda_{1n} \approx -\frac{\alpha_f}{l^2}$, $\lambda_{2n} \approx -\frac{\alpha_e}{l^2}(k_e^2 l^2 + \beta_n^2)$, $k^2 \approx k_e^2$, las expresiones para T_e y T_f toman la forma:

$$T_e(x, t) = T_0 + \frac{Q_e^0 + Q_f^0}{\kappa_f}(l - x) + \left(\frac{Q_e^0}{\kappa_e} - \frac{Q_f^0}{\kappa_f} \right) \frac{\sinh[k_e(l - x)]}{k_e \cosh(k_e l)} - \frac{2Q_e^0 l}{\kappa_e} \sum \frac{\cos(\beta_n \frac{x}{l})}{k_e^2 l^2 + \beta_n^2} e^{-t/\tau_{en}} - 2k_e^2 l^3 \frac{Q_e^0 + Q_f^0}{\kappa_f} \sum \frac{\cos(\beta_n \frac{x}{l})}{\beta_n^2 (k_e^2 l^2 + \beta_n^2)} e^{-t/\tau_{fn}},$$

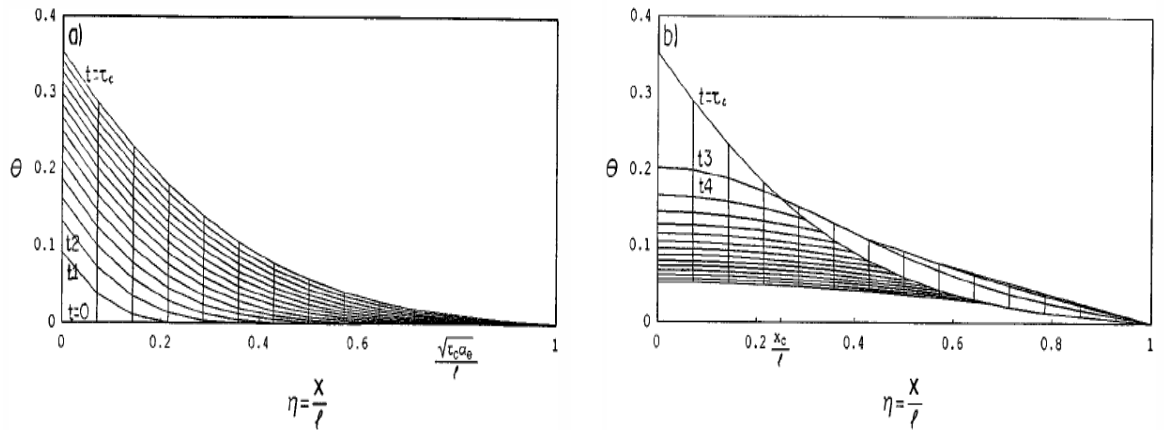


Figura 2.13: Dependencia temporal de θ_e para el caso de pulso corto en película delgada para (a) $0 < t_1 < t_2 < \dots < \tau_c$ y para (b) $\tau_c < t_3 < t_4 < \dots$.

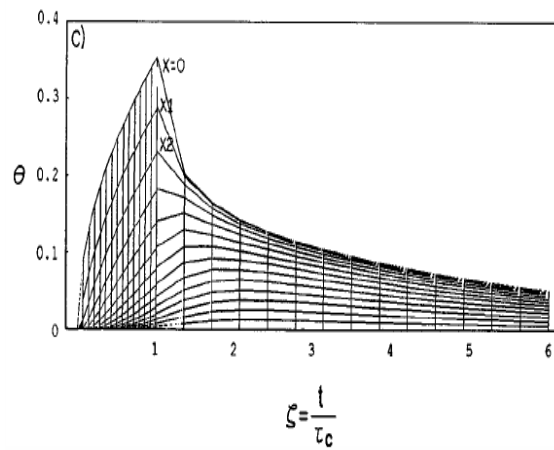


Figura 2.14: Dependencia de la posición de θ_e como función del tiempo en $0 < x_1 < x_2 < \dots < l$ para un pulso corto en una película delgada.

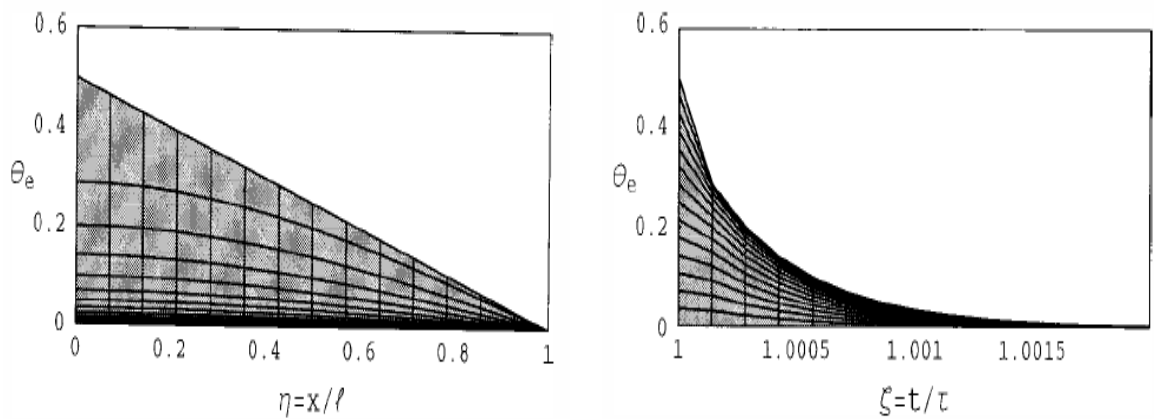


Figura 2.15: Dependencia de θ_e con respecto a la coordenada (a) y al tiempo (b) en muestras delgadas ($t \geq \tau$), $\tau_{cd} \ll \tau \ll \tau_{p0}$.

$$T_f(x, t) = T_0 + \frac{Q_e^0 + Q_f^0}{\kappa_f}(l - x) - \frac{\kappa_e}{\kappa_f} \left(\frac{Q_e^0}{\kappa_e} - \frac{Q_f^0}{\kappa_f} \right) \frac{\sinh[k_e(l - x)]}{k_e \cosh(k_e l)} - \frac{2Q_e^0 k_e^2 l^3}{\kappa_f} \sum \frac{\cos(\beta_n \frac{x}{l})}{\beta_n^2 (k_e^2 l^2 + \beta_n^2)} e^{-t/\tau_{fn}} - \frac{2Q_f^0 l}{\kappa_f} \sum \frac{\cos(\beta_n \frac{x}{l})}{\beta_n^2} e^{-t/\tau_{fn}}.$$

Aquí, $\tau_{en} = l^2/\alpha_e(k_e^2 l^2 + \beta_n^2)$, $\tau_{fn} = l^2/\alpha_f \beta_n^2$. Después de haber concluido la aplicación del pulso térmico ($t > \tau$), las temperaturas son:

$$T_e(x, t) = T_0 + \frac{2Q_e^0 l}{\kappa_e} \sum \frac{\cos(\beta_n \frac{x}{l})}{k_e^2 l^2 + \beta_n^2} (e^{\tau/\tau_{en}} - 1) e^{-t/\tau_{en}} + \frac{2Q_e^0 k_e^2 l^3}{\kappa_f} \left(1 + \frac{Q_f^0}{Q_e^0} \right) \sum \frac{\cos(\beta_n \frac{x}{l})}{\beta_n^2 (k_e^2 l^2 + \beta_n^2)} (e^{\tau/\tau_{fn}} - 1) e^{-t/\tau_{fn}} \quad (2.35)$$

$$T_f(x, t) = T_0 + \frac{2Q_e^0 k_e^2 l^3}{\kappa_f} \sum \frac{\cos(\beta_n \frac{x}{l})}{\beta_n^2 (k_e^2 l^2 + \beta_n^2)} (e^{\tau/\tau_{fn}} - 1) e^{-t/\tau_{fn}} + \frac{2Q_f^0 l}{\kappa_f} \sum \frac{\cos(\beta_n \frac{x}{l})}{\beta_n^2} (e^{\tau/\tau_{fn}} - 1) e^{-t/\tau_{fn}}. \quad (2.36)$$

La temperatura del subsistema de fonones consta de dos partes. Una de ellas depende únicamente de los parámetros del subsistema de fonones y es igual a la temperatura de no equilibrio en un aislante. La segunda parte depende tanto de los parámetros del subsistema de fonones como de los del subsistema de electrones y describe la influencia del subsistema de electrones sobre la temperatura de estado no estacionario del subsistema de fonones [11].

De las soluciones que se obtuvieron para semiconductores no degenerados se desprende [11] que los procesos térmicos transitorios en el subsistema de fonones se describen con el tiempo característico

$$\tau_{p0} = \frac{4l^2}{\pi^2 \alpha_f}. \quad (2.37)$$

Este tiempo característico depende de la difusividad térmica del subsistema de fonones y de la longitud de la muestra y no contiene parámetros del otro subsistema. Este tiempo característico coincide con el que se presenta en los materiales aislantes [11].

A diferencia del subsistema de fonones, el proceso de relajación en el subsistema de electrones se describe por dos tiempos característicos. El primero es:

$$\tau_{e0} = l^2 \alpha_e \left(k_e^2 l^2 + \frac{\pi^2}{4} \right), \quad (2.38)$$

y lo determinan la difusividad térmica del subsistema de electrones, la longitud de la muestra, y la correlación entre la longitud de la muestra y la longitud de enfriamiento del subsistema de electrones. Esto significa que la naturaleza de la relajación de energía

para este subsistema no será la misma para placas de muestra delgadas ($k_e l \ll 1$) que para placas gruesas ($k_e l \gg 1$) [11].

El segundo tiempo de relajación del subsistema de electrones corresponde al ya mencionado τ_{p0} .

La existencia de dos tiempos característicos conduce a la situación siguiente para el subsistema de electrones: su temperatura es mucho mayor en la primera etapa del proceso de relajación ($\tau < t < \tau_{e0}$) que la temperatura del subsistema de fonones, pero en la segunda etapa ($t > \tau_{e0}$), ambas temperaturas son comparables, e incluso $T_e < T_f$ [11].

De las ecuaciones para las temperaturas calculadas después de concluida la aplicación del pulso, las temperaturas $T_{e,f}(x, t) = \tau$ se determinan por las conductividades térmicas $\kappa_{e,f}$, los flujos térmicos en la frontera $Q_{e,f}^0$, la correlación entre la longitud de la muestra y la longitud de enfriamiento del subsistema de electrones $l_e = k_e^{-1}$, y la correlación entre la duración del pulso y los tiempos característicos τ_{e0} y τ_{p0} [11].

Si se presta atención únicamente al intervalo $t \geq \tau$ las temperaturas [11] son

$$T_e(x, t) = T_0 + \frac{2Q_e^0 l}{\kappa_e} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right)}{k_e^2 l^2 + \frac{\pi^2}{4}} \left[(e^{\tau/\tau_{e0}} - 1)e^{-t/\tau_{e0}} + \frac{4(k_f l)^2}{\pi^2} \left(1 + \frac{Q_f^0}{Q_e^0}\right) (e^{\tau/\tau_{f0}} - 1)e^{-t/\tau_{f0}} \right] \quad (2.39)$$

$$T_f(x, t) = T_0 + \frac{8Q_f^0 l}{\pi^2 \kappa_f} \cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right) \left(1 + \frac{Q_e^0}{Q_f^0} \frac{k_e^2 l^2}{k_e^2 l^2 + \frac{\pi^2}{4}}\right) (e^{\tau/\tau_{f0}} - 1)e^{-t/\tau_{f0}}. \quad (2.40)$$

El tiempo τ_{f0} determina el tiempo de relajación del proceso de no equilibrio en todo el subsistema de fonones. En este subsistema el mecanismo de relajación de energía es la difusión térmica. De (2.40) se puede ver que el subsistema de electrones tiene más influencia en el de fonones si la longitud de la muestra es $l \sim k_e^{-1}$ y si $Q_e^0 \gg Q_f^0$ [11].

De (2.39) se puede ver que en el intervalo de relajación $\tau \leq t \approx \tau_{e0}$, el subsistema de electrones trasfiere su energía hacia el termostato de dos maneras: difusión térmica interna en el subsistema de electrones con el tiempo característico $\tau_e = 4l^2/\pi^2\alpha_e$, interacción con los fonones con el tiempo característico $\tau_e = l_e^2/\alpha_e$ [11].

Para analizar este último mecanismo de relajación escribese [11] la longitud efectiva generalizada de relajación

$$l^* = \sqrt{\frac{l^2 l_e^2}{l^2 + l_e^2}}, \quad (2.41)$$

la cual determina la longitud de difusión térmica de la interacción energética con los dos termostatos anteriormente descritos. Para el caso de muestras delgadas ($k_e l \ll 1$) l^* es igual a l y el único proceso de relajación es la difusión térmica. Para ($k_e l \gg 1$), $l^* = l_e$. Esto significa que la difusión térmica en el subsistema de electrones es inefectiva en muestras voluminosas y que dicho subsistema relaja su energía en el subsistema de fonones a través de la interacción entre ambos subsistemas [11].

2.2.2.1. Caso límite: película delgada $k_e l \ll 1$

El tiempo característico de relajación en el subsistema de electrones, de acuerdo con (2.37) es

$$\tau_{e0} = \tau_{ed} = \frac{4l^2}{\pi^2 \alpha_e}, \quad (2.42)$$

lo cual indica que la relajación de energía ocurre únicamente mediante el mecanismo de difusión térmica en el subsistema de electrones. De esta forma, si la longitud de la muestra es suficientemente pequeña comparada con la longitud de enfriamiento, se satisface la relación $k_f l \ll 1$. Esto significa que en muestras delgadas tanto la longitud de enfriamiento del subsistema de electrones como la del de fonones son mucho mayores que la longitud de la muestra. Debido a este hecho las temperaturas se pueden representar por [11]

$$T_e(x, t) = T_0 + \frac{8Q_e^0 l}{\pi^2 \kappa_e} \cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right) \left[(e^{\tau/\tau_{ed}} - 1)e^{-t/\tau_{ed}} + \frac{4(k_f l)^2}{\pi^2} \left(1 + \frac{Q_f^0}{Q_e^0}\right) (e^{\tau/\tau_{f0}} - 1)e^{-t/\tau_{f0}} \right], \quad (2.43)$$

$$T_f(x, t) = T_0 + \frac{8Q_f^0 l}{\pi^2 \kappa_f} \cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right) (e^{\tau/\tau_{f0}} - 1)e^{-t/\tau_{f0}}. \quad (2.44)$$

En [11] se realizaron gráficas de las soluciones generales del modelo de dos temperaturas. Allí se usó la normalización $\theta_{e,f}(\eta, \xi) = T_{e,f} - T_0/2Q_e^0 \kappa_e$, en la que $\eta = x/l$, $\xi = t/\tau$. Note que (Figuras 2.16 y 2.17) la temperatura del subsistema de electrones es cuasiestática. Por el contrario la temperatura del subsistema de fonones presenta un comportamiento temporal no monótono. Note que surge un calentamiento local del subsistema de fonones en cierta región de la muestra (Figura 2.18).

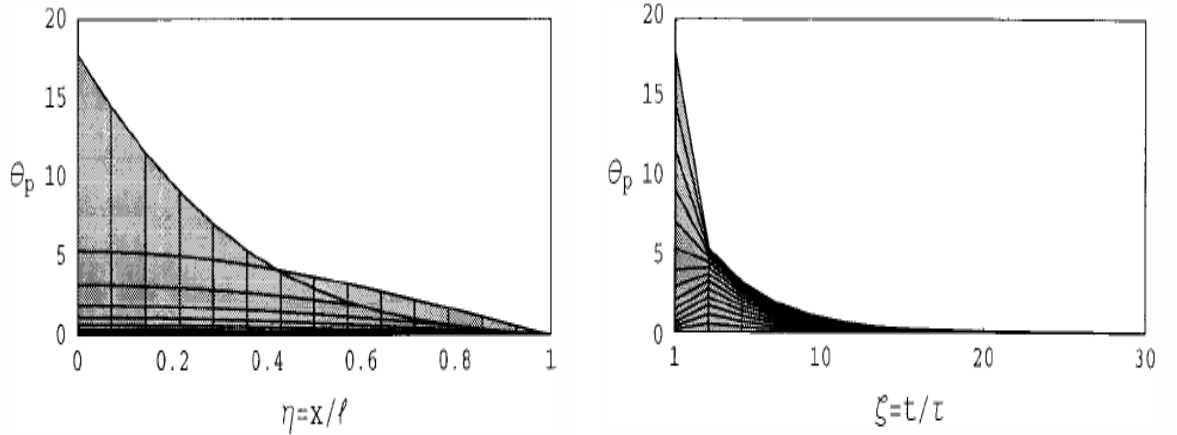


Figura 2.16: Dependencia de la temperatura $\theta_f \times 10^{-5}$ con respecto a la coordenada (a) y al tiempo (b) en las capas ($t \geq \tau$), $\tau_{ed} \ll \tau \ll \tau_{p0}$.

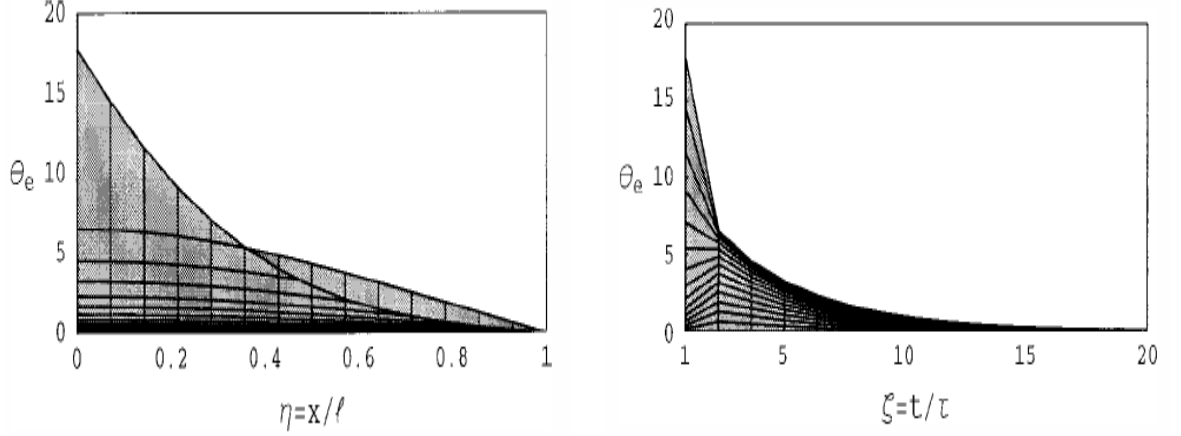


Figura 2.17: Dependencia de la temperatura $\theta_e \times 10^{-2}$ con respecto a la coordenada (a) y al tiempo (b) en muestras delgadas ($t \geq \tau$), $\tau_{ed} \ll \tau \ll \tau_{p0}$.

2.2.2.2. Caso límite: bulto $k_e l \gg 1$

El mecanismo dominante de relajación de energía de una muestra semiconductor en bulto es el que ocurre por la interacción de ambos subsistemas. Esta interacción es efectiva dentro de la longitud de enfriamiento l_e . De esta forma el criterio para un “calentamiento” completo para el subsistema de electrones es

$$\sqrt{\alpha_e \tau} > l_e. \quad (2.45)$$

Este resultado se describe en la Figura 2.19. Si ocurre que $\sqrt{\alpha_e \tau} < l_e$, la región de calentamiento local tiene lugar en el subsistema de electrones (Figura 2.20). Cualitativamente, esta característica no cambia en el subsistema de fonones en comparación con caso de muestras delgadas (Véase la Figura 2.21). Debemos destacar que las

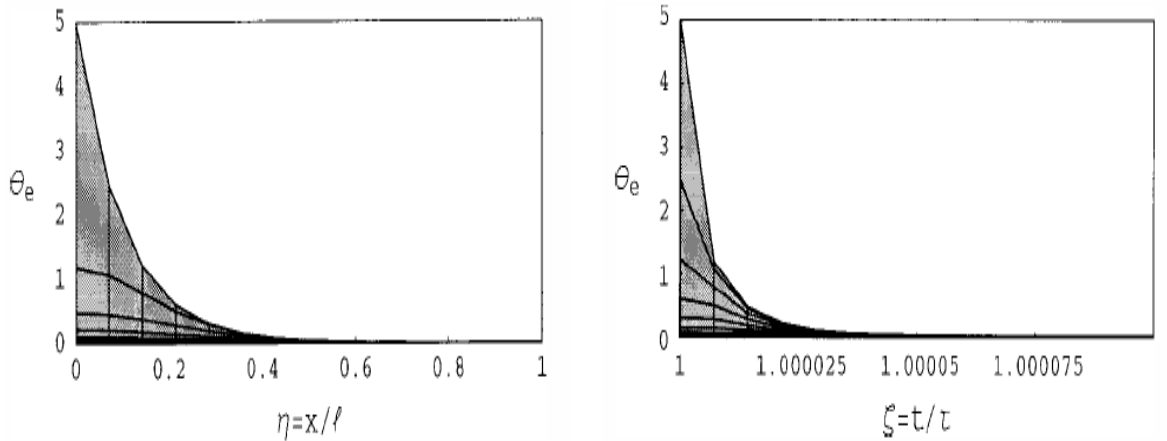


Figura 2.18: Dependencia de la temperatura $\theta_e \times 10^{-2}$ con respecto a la coordenada (a) y al tiempo (b) en muestras bulto ($t \geq \tau$), $\tau_e \ll \tau \ll \tau_{p0}$.

ecuaciones (3.1) y (3.2) que forman parte del sistema de ecuaciones que describen la

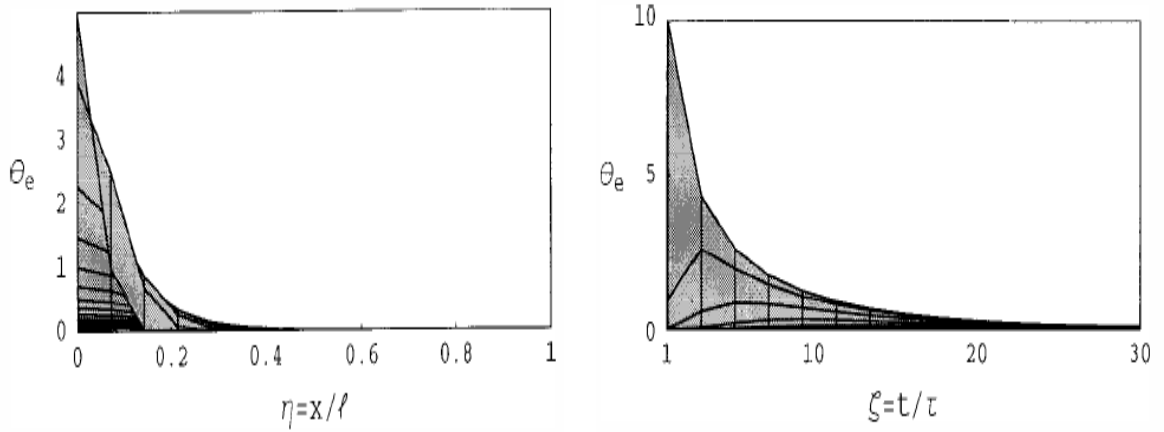


Figura 2.19: Dependencia de la temperatura $\theta_e \times 10^{-3}$ con respecto a la coordenada (a) y al tiempo (b) en muestras bulto ($t \geq \tau$), $\tau \ll \tau_\epsilon \ll \tau_p$.

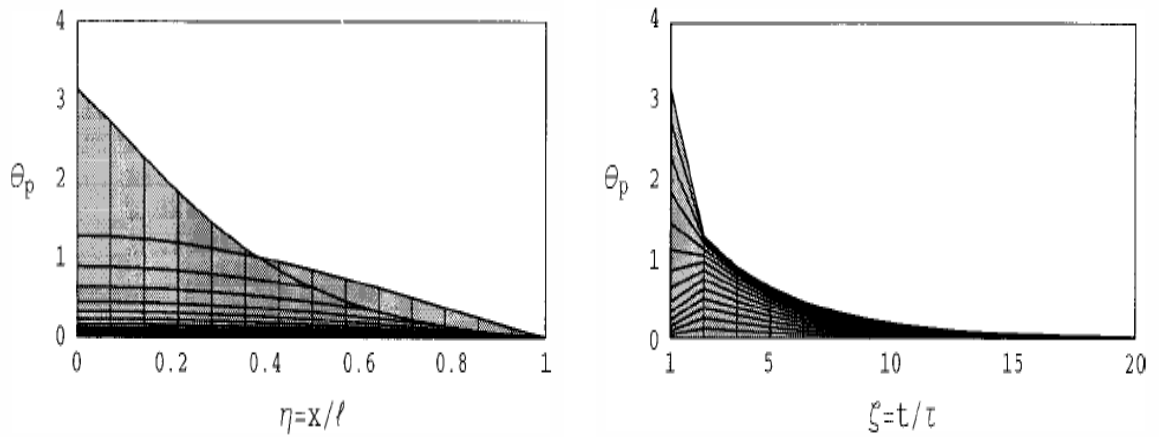


Figura 2.20: Dependencia de la temperatura $\theta_f \times 10^{-4}$ con respecto a la coordenada (a) y al tiempo (b) en muestras bulto ($t \geq \tau$), $\tau_\epsilon \ll \tau \ll \tau_{p0}$.

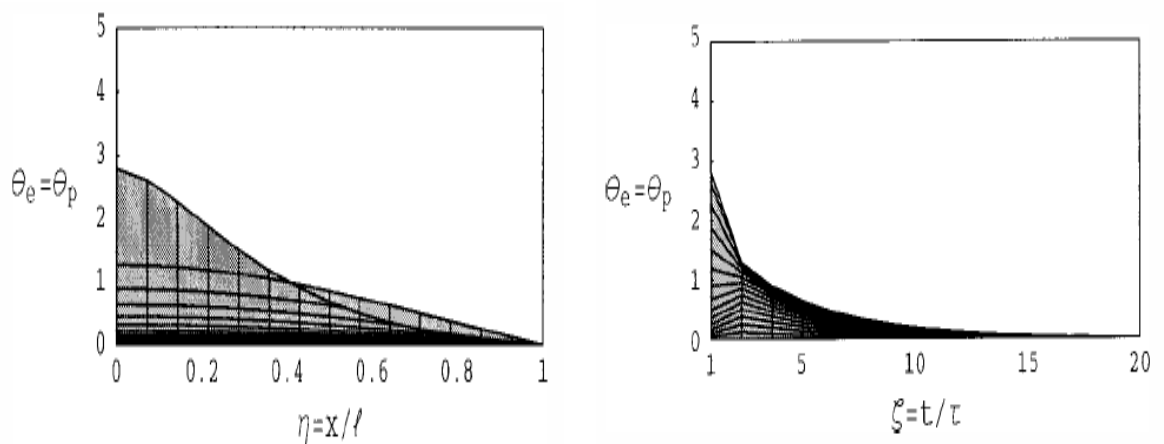


Figura 2.21: Dependencia de la temperatura $\theta_e \times 10^{-4}$ y $\theta_f \times 10^{-4}$ con respecto a la coordenada (a) y al tiempo (b) en muestras bulto con la condición $k_\epsilon l = 10^3$ ($t \geq \tau$), $\tau_\epsilon \ll \tau \ll \tau_p$.

propagación de calor se han escrito despreciando las variaciones de las densidades asociadas con la variación de la temperatura en la muestra. En esta tesis, consideraremos los efectos no lineales debidos a la dependencia de la conductividad térmica, el calor específico y la interacción de los subsistemas de electrones y fonones.

3. Modelo de dos temperaturas en el régimen no lineal

Considere el sistema que consta de una muestra sólida isotrópica en forma de paralelepípedo de sección transversal unitaria delimitada verticalmente por los planos $x = 0$ y $x = l$ (siendo la longitud l constante). Supongamos que un flujo térmico Q_0 rectangular de duración arbitraria τ se genera puntualmente en $x = 0$. Impóngase la condición (lo cual corresponde a las condiciones físicas de un experimento fotoacústico [15]) que la temperatura en $x = l$ es constante cuya magnitud corresponde a la de la temperatura ambiente T_0 . Con el objetivo de usar conceptos de la teoría cinética, es útil representar al sistema previamente descrito con dos grados de libertad (llamados *subsistemas* en este trabajo) interactuando con Q_0 y a su vez interactuando entre ellos.

Note que [12] dicha interacción no será necesariamente igual para los subsistemas presentes. Esto es $Q_e \neq Q_f$, siendo Q_e el flujo de calor en $x = 0$ para el subsistema de electrones y Q_f el correspondiente al subsistema de fonones. Observe que se trata de un sistema transitorio el cual se encuentra inicialmente fuera del equilibrio para después, relajarse a su estado final en el equilibrio. Esto ocurre a través de la interacción con algún reservorio de calor. Incluso, para ciertas condiciones algún subsistema permanecerá inalterado por el flujo térmico y actuará propiamente como un reservorio de calor. Mientras que el sistema interactuante será llevado a una nueva distribución de temperatura cuya forma depende de las características del pulso y de las del subsistema. Con todo ello, las ecuaciones de balance de energía son

$$\frac{\partial Q_e}{\partial x} = -\rho_e \frac{\partial c_e T_e}{\partial t} - P[T_e - T_f], \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial Q_f}{\partial x} = -\rho_f \frac{\partial c_f T_f}{\partial t} + P[T_e - T_f] \quad (3.2)$$

donde $\rho_{e,f}$, $c_{e,f}$ es la densidad y el calor específico de los subsistemas; el término $P[T_e - T_f]$ es la energía que intercambian los subsistemas y P es un parámetro que describe la interacción energética entre los subsistemas. Los flujos de calor para ambos subsistemas están dados por

$$Q_e = -\kappa_e \frac{\partial T_e}{\partial x}, \quad (3.3)$$

$$Q_f = -\kappa_f \frac{\partial T_f}{\partial x} \quad (3.4)$$

donde $\kappa_{e,f}$ es la conductividad térmica del subsistema de electrones y la del de fonones. Se utilizaron las condiciones iniciales

$$T_{e,f}(x, 0) = T_0 \quad (3.5)$$

y las condiciones de frontera

$$T_{e,f}(l, t) = T_0 \quad (3.6)$$

$$\left. \frac{\partial T_{e,f}}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{Q_{e,f}^0}{\kappa_{e,f}^0}, \quad (3.7)$$

siendo (3.6) una condición de frontera de primer tipo en el extremo derecho $x = l$ de la muestra y (3.7) de segundo tipo (de Neumann) en el extremo izquierdo $x = 0$, mismas que describen condiciones físicas experimentales típicas [15]. También se acepta sin verificación que el problema (3.1) - (3.7) tiene solución única con todas las derivadas necesarias. Debemos destacar que las ecuaciones (3.1) y (3.2) que forman parte del sistema de ecuaciones que describen la propagación de calor se han escrito despreciando las variaciones de las densidades asociadas con la variación de la temperatura en la muestra. En esta tesis, consideraremos los efectos no lineales debidos a la dependencia de la conductividad térmica, el calor específico y la interacción de los subsistemas de electrones y fonones.

3.1. Solución numérica

Es importante enfatizar que el desarrollo en el entendimiento de problemas tanto del modelo de una como dos temperaturas es inconcebible sin el uso de métodos numéricos. Para la solución del problema (en esta tesis de forma numérica) se recurrió a la siguiente normalización

$$\theta_{e,f} = \frac{\kappa_{e,f}^0}{Q_0 l} (T_{e,f} - T_0), \quad (3.8)$$

$$\eta = \frac{x}{l}, \quad (3.9)$$

$$\zeta = \frac{t}{\tau} \quad (3.10)$$

$$\xi_{e,f} = \frac{Q_{e,f}}{Q_0} \quad (3.11)$$

donde $Q_0 = Q_e + Q_f$ es el flujo de energía convertido completamente en flujo de calor en $x = 0$ y $\kappa_{e,f}^0$ es la conductividad térmica a temperatura T_0 para los subsistemas.

Con las sustituciones (3.8) - (3.11) las ecuaciones (3.1) y (3.7) quedan como

$$\frac{\partial \xi_e}{\partial \eta} = \frac{l}{Q_0} \left[\left(-\frac{\rho_e l^2}{\kappa_e^0 \tau} \frac{\partial c_e \theta_e}{\partial \zeta} \right) - Pl^2 \left(\frac{\theta_e}{\kappa_e^0} - \frac{\theta_f}{\kappa_f^0} \right) \right], \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \xi_f}{\partial \eta} = \frac{l}{Q_0} \left[\left(-\frac{\rho_f l^2}{\kappa_f^0 \tau} \frac{\partial c_f \theta_f}{\partial \zeta} \right) + Pl^2 \left(\frac{\theta_e}{\kappa_e^0} - \frac{\theta_f}{\kappa_f^0} \right) \right]. \quad (3.13)$$

Y las ecuaciones (3.3) y (3.4) quedan

$$\xi_e = -\frac{\kappa_e}{Q_0 l} \frac{\partial \theta_e}{\partial \eta}, \quad (3.14)$$

$$\xi_f = -\frac{\kappa_f}{Q_0 l} \frac{\partial \theta_f}{\partial \eta}. \quad (3.15)$$

Y las condiciones de iniciales y de frontera (3.5) - (3.7) quedan como

$$\theta_{e,f}(\eta, \zeta) \Big|_{\zeta=0} = 0, \quad (3.16)$$

$$\theta_{e,f}(\eta, \zeta) \Big|_{\eta=1} = 0, \quad (3.17)$$

$$-\frac{\kappa_{e,f}(T_0 + \frac{Q_0 l}{\kappa_{e,f}^0} \theta_{e,f})}{Q_0 \kappa_{e,f}^0} = \xi_{e,f}^0. \quad (3.18)$$

Para lograr la discretización de las ecuaciones con el objetivo de implementar un algoritmo computacional, se procedió de la siguiente manera. Se introdujo en el segmento (equivalente a la longitud de la muestra) $0 \leq \eta \leq 1$ una retícula equidistante $\eta_i = ih$, $i = 1, 2, \dots, N$, $hN = 1$.

Luego se consideró a las temperaturas normalizadas $\theta_{e,f}$ como dos variables reticulares $\theta_i = \theta(i)$ del argumento entero $i = 1, 2, \dots, N$. De igual forma se hizo para los flujos de calor normalizados $\xi_{e,f}$: $\xi_j = \xi(j)$, $j = 2, 3, \dots, N$. Se optó por usar un esquema de diferencias centrado. Con todo esto las derivadas parciales tanto de primer como de segundo orden tienen análogos formales en forma de diferencias. De esta forma las ecuaciones y sus condiciones a la frontera se pueden escribir en forma de diferencias. Con todo ello se obtienen las ecuaciones renormalizadas y discretizadas del problema. Las ecuaciones (3.12) y (3.13) quedan como

$$\begin{aligned} \frac{\xi_e(i+1, \zeta) - \xi_e(i, \zeta)}{\Delta\eta} &= -\rho_e \frac{l^2}{\kappa_e^0 \tau} \frac{\partial c_e \left(T_0 + \frac{lQ_0}{\kappa_e^0} \theta_e(i, \zeta) \right) \theta_e}{\partial \zeta} - \\ &- Pl^2 \left[\frac{\theta_e(i, \zeta)}{\kappa_e^0} - \frac{\theta_f(i, \zeta)}{\kappa_f^0} \right], \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\xi_f(i+1, \zeta) - \xi_f(i, \zeta)}{\Delta\eta} &= -\rho_f \frac{l^2}{\kappa_f^0 \tau} \frac{\partial c_f \left(T_0 + \frac{lQ_0}{\kappa_f^0} \theta_f(i, \zeta) \right) \theta_f}{\partial \zeta} - \\ &- Pl^2 \left[\frac{\theta_e(i, \zeta)}{\kappa_e^0} - \frac{\theta_f(i, \zeta)}{\kappa_f^0} \right]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Mientras que las ecuaciones (3.14) y (3.15) toman la forma

$$\xi_e(i, \zeta) = -\frac{1}{\kappa_e^0} \kappa_e \left(T_0 + \frac{lQ_0}{2\kappa_e^0} [\theta_e(i+1, \zeta) + \theta_e(i, \zeta)] \right) \frac{\theta_e(i+1, \zeta) - \theta_e(i, \zeta)}{\Delta\eta}, \quad (3.21)$$

$$\xi_f(i, \zeta) = -\frac{1}{\kappa_f^0} \kappa_f \left(T_0 + \frac{dQ_0}{2\kappa_f^0} [\theta_e(i+1, \zeta) + \theta_f(i, \zeta)] \right) \frac{\theta_f(i+1, \zeta) - \theta_f(i, \zeta)}{\Delta\eta}. \quad (3.22)$$

Las condiciones iniciales (3.16) quedan

$$\theta_{e,f}(i, \zeta) \Big|_{\zeta=0} = 0, \quad (3.23)$$

y las condiciones de frontera (3.17)–(3.18) se expresan como

$$\theta_{e,f}(i, \zeta) \Big|_{i=N} = 0 \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\kappa_{e,f}^0} \kappa_{e,f} \left(T_0 + \frac{lQ_0}{2\kappa_{e,f}^0} [\theta_{e,f}(i+1, \zeta) + \theta_{e,f}(i, \zeta)] \right) \times \\
& \times \frac{\theta_{e,f}(i+1, \zeta) - \theta_{e,f}(i, \zeta)}{\Delta\eta} \Big|_{i=1, 0 \leq \zeta \leq 1} = \xi_{e,f}^0(1, \zeta) \tag{3.25}
\end{aligned}$$

4. Resultados

En esta sección se reproduce una parte de los resultados obtenidos en [8] presentados en las Figuras 2.6 - 2.9, con objeto de probar el algoritmo utilizado para la solución del problema en el caso de semiconductores (siguiente sección). En otras palabras, aplicaremos el método numérico al caso del modelo de una temperatura.

4.1. Metales

En las Figuras 4.1 y 4.2 hemos reproducido la evolución temporal de los perfiles de temperatura en una placa de Ti que es irradiada por un haz luminoso con distintos valores de su intensidad. Como puede verse, conforme se incrementa el flujo de calor Q

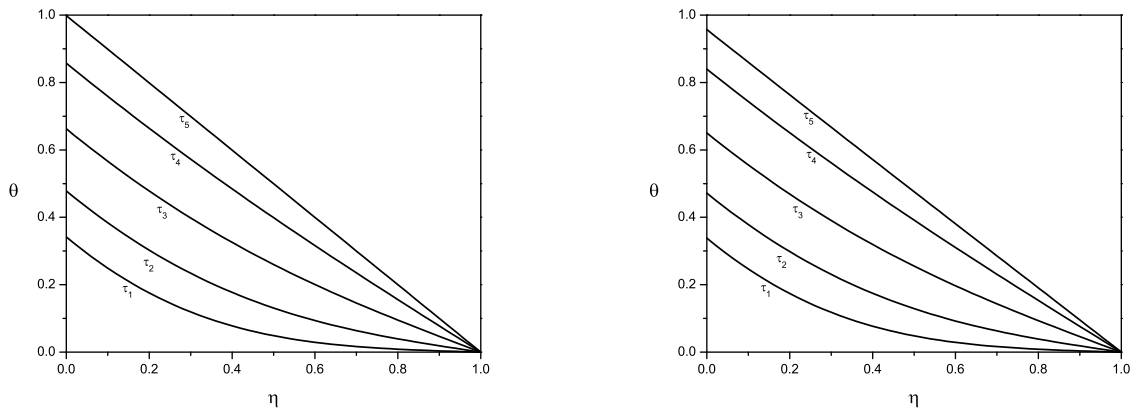


Figura 4.1: Perfiles de $T(x,t)$ para (a) $Q_0 = 10^2 \text{W/m}^2$ y (b) $Q_0 = 10^3 \text{W/m}^2$. Confróntese con la Figura 2.6.

en la superficie irradiada los perfiles de temperatura a tiempos grandes (pero menores que la duración del pulso térmico) difieren notablemente en su pendiente debido a un decremento en la temperatura en $\eta = 0$. Además, en el caso de no linealidad fuerte (Figura 4.2b), el perfil estacionario deja de tener la forma de una línea recta ya que la pendiente de la curva es mayor en valor absoluto, cerca del extremo derecho de la muestra. En el Apéndice se tratan diversos problemas relacionados al modelo de una temperatura para metales.

4.2. Semiconductores

En esta sección presentaremos resultados para silicio. Los parámetros usados en los cálculos para esta material se tomaron de la literatura. La dependencia de la conductividad térmica y del calor específico de los fonones, en función de la temperatura, se tomó de la Ref. [18].

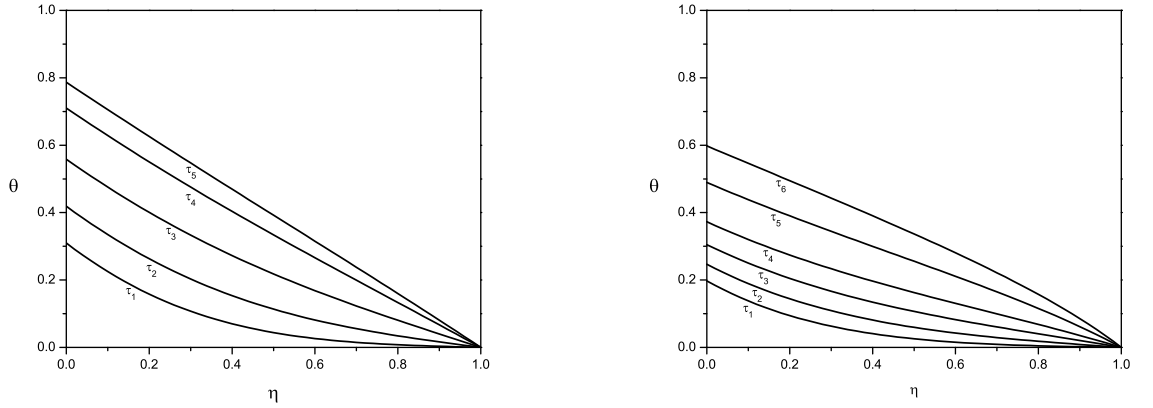


Figura 4.2: Perfiles de $T(x,t)$ para (a) $Q_0 = 10^4 \text{W/m}^2$ y (b) $Q_0 = 10^5 \text{W/m}^2$. Confróntese con la Figura 2.7.

4.2.1. Régimen de flujo térmico bajo

La Figura 4.3 muestra las temperaturas normalizadas θ_e, θ_f , calculadas con un parámetro $P = 0$ en distintos tiempos τ_1, \dots, τ_{15} posteriores a la aplicación del pulso térmico. Representa (a) la temperatura normalizada del subsistema de electrones. Es evidente que para todo τ , θ_e decrece monótonamente desde el punto iluminado ($x = 0$) hacia el interior de la muestra. Note que la magnitud de θ_e aumenta con el transcurrir de t . Debido a la baja intensidad del pulso térmico y a que el parámetro de acoplamiento P

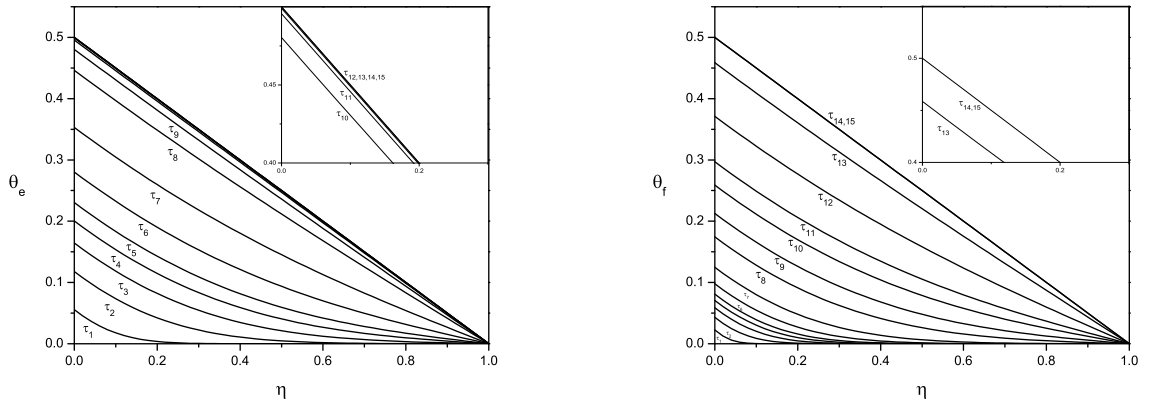


Figura 4.3: Distribución de la temperatura del subsistema de (a) electrones normalizada $\theta_e = (\kappa_e^0/Q_0d)(T_e - T_0)$ y de (b) fonones $\theta_f = (\kappa_f^0/Q_0d)(T_f - T_0)$ a diferentes tiempos para una muestra semiconductor irradiada por un pulso de $\tau = 1 \text{s}$ a $Q_0 = 10^2 \text{W/m}^2$ y $P = 0$.

es nulo, los perfiles de temperatura θ_e (desde el tiempo τ_1 hasta τ_{15}) pueden describirse con funciones válidas en el régimen lineal.

Para tiempos suficientemente grandes pero menores que τ (duración del pulso térmico-

co), los perfiles θ_e tienden a ser cuasiestacionarios.

La Figura 4.3 (b) muestra la temperatura normalizada del subsistema de fonones. De manera similar al comportamiento de θ_e , θ_f decrece desde el punto irradiado hacia el interior de la muestra. Exhibe el mismo comportamiento que θ_e para diferentes τ calculados.

A diferencia de θ_e , se observa que θ_f alcanza más lentamente el perfil cuasiestacionario. Debido a la baja intensidad del pulso térmico y a que la magnitud del parámetro de acoplamiento es relativamente baja, los perfiles θ_e, θ_f , pueden describirse con funciones válidas en el régimen lineal.

La Figura 4.4 muestra las temperaturas normalizadas de los dos subsistemas de cuasipartículas, calculadas con un parámetro $P = 10^2 \text{W/m}^3 \text{K}$. En (a) existe un ligero incremento en la magnitud de la temperatura normalizada con respecto a la temperatura de la Figura 4.3 (a) para cualquier punto de la muestra y para todos los tiempos calculados (τ_1, \dots, τ_{15}). Para esta magnitud del parámetro de acoplamiento se observa

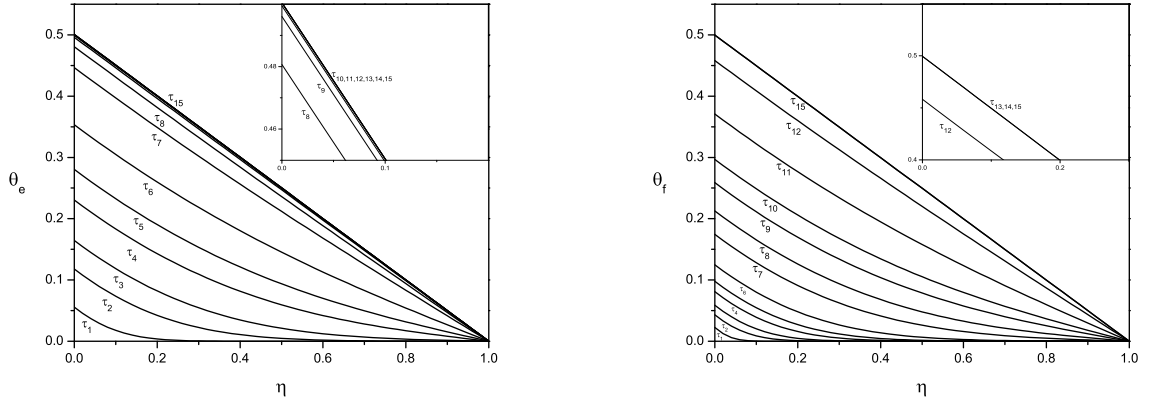


Figura 4.4: Distribución de la temperatura del subsistema de (a) electrones normalizada $\theta_e = (\kappa_e^0/Q_0d)(T_e - T_0)$ y de (b) fonones $\theta_f = (\kappa_f^0/Q_0d)(T_f - T_0)$ a diferentes tiempos para una muestra semiconductor irradiada por un pulso de $\tau = 1 \text{s}$ a $Q_0 = 10^2 \text{W/m}^2$ y $P = 10^2 \text{W/m}^3 \text{K}$.

que θ_f alcanza más lentamente el perfil cuasiestacionario que θ_e y existe ligera disminución en la magnitud de la temperatura normalizada del subsistema de fonones. Debido a la baja intensidad del pulso térmico y a que el parámetro de acoplamiento es relativamente pequeño en magnitud, los perfiles θ_e, θ_f pueden describirse con funciones válidas en el régimen lineal.

El cálculo de los perfiles de temperatura con parámetro de acoplamiento $P = 10^4 \text{W/m}^3 \text{K}$ se muestra en la Figura 4.5. La temperatura normalizada de los dos subsistemas de cuasipartículas es cualitativamente similar a las obtenidas para $P = 0$ y $P = 10^2 \text{W/m}^3 \text{K}$. Existe una diferencia más pronunciada en la magnitud de la temperatura normalizada entre los dos subsistemas con respecto a la diferencia observada en el cálculo mostrado en las Figuras 4.3 y 4.4.

En este régimen de intensidad del pulso térmico y para esta magnitud del parámetro de acoplamiento los perfiles θ_e , θ_f pueden describirse con funciones válidas en el régimen lineal.

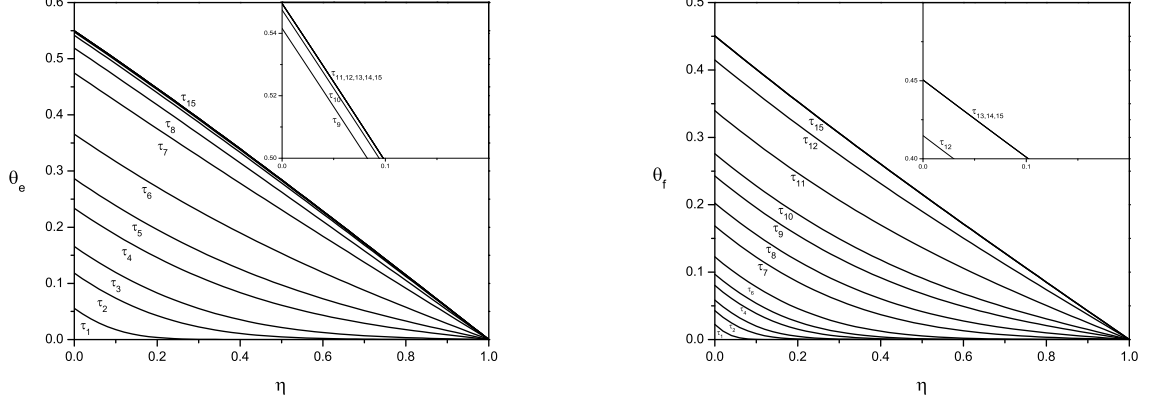


Figura 4.5: Distribución de la temperatura del subsistema de (a) electrones normalizada $\theta_e = (\kappa_e^0/Q_0d)(T_e - T_0)$ y de (b) fonones $\theta_f = (\kappa_f^0/Q_0d)(T_f - T_0)$ a diferentes tiempos para una muestra semiconductor irradiada por un pulso de $\tau = 1s$ a $Q_0 = 10^2W/m^2$ y $P = 10^4W/m^3K$.

La Figura 4.6 muestra las temperaturas normalizadas θ_e , θ_f , calculadas con un parámetro $P = 5 \times 10^4W/m^3K$. Se observa incremento en la magnitud de θ_e en todos los puntos de la muestra con respecto a la de la Figura 4.5, a partir de los perfiles calculados a τ_6 . Para esta magnitud de P , se incrementa la diferencia de tiempo entre los subsistemas para alcanzar el estado cuasiestacionario y con $\tau_{15} = \tau$, la temperatura normalizada del subsistema de fonones no alcanza el estado cuasiestacionario.

Mientras que debido a la baja intensidad del pulso térmico los perfiles que describen la temperatura normalizada del subsistema de electrones pueden describirse con funciones válidas en el régimen lineal, no puede decirse lo mismo de la temperatura normalizada del subsistema de fonones. Se observa que las funciones que describen los perfiles de la temperatura normalizada del subsistema de electrones temporalmente cercanos al estado cuasiestacionario son no lineales. La temperatura normalizada del subsistema de fonones no alcanza el estado cuasi estacionario. Los resultados obtenidos en esta sección para intensidades bajas del haz incidente, concuerdan plenamente con las predicciones del trabajo [20] descritas en la sección 2.2 arriba para el caso de pulsos largos.

4.2.2. Régimen de flujo térmico medio

En las Figuras 4.7 - 4.10 se muestran los resultados obtenidos del cálculo numérico de los perfiles de temperatura tanto del subsistema de electrones como de fonones para un flujo térmico de $Q_0 = 10^4W/m^2$, y con diferentes valores de P . Es evidente que todas

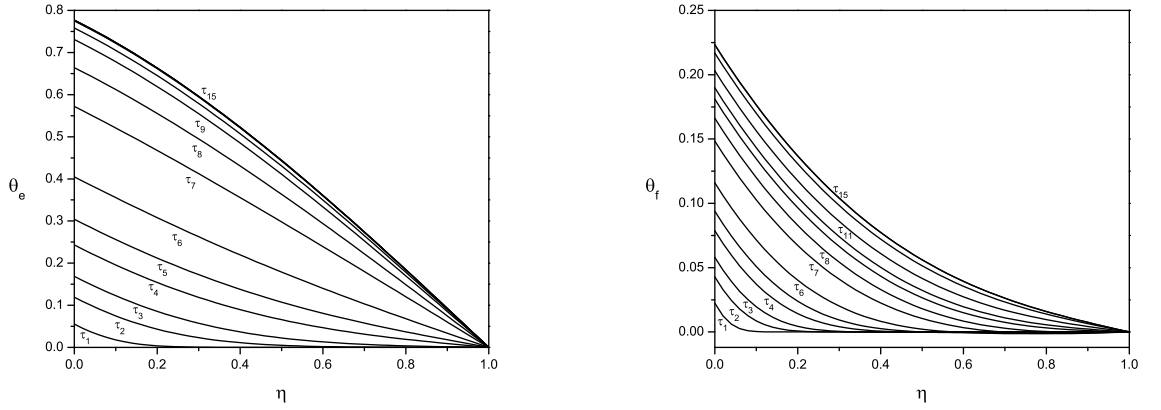


Figura 4.6: Distribución de la temperatura del subsistema de (a) electrones normalizada $\theta_e = (\kappa_e^0/Q_0d)(T_e - T_0)$ y de (b) fonones $\theta_f = (\kappa_f^0/Q_0d)(T_f - T_0)$ a diferentes tiempos para una muestra semiconductor irradiada por un pulso de $\tau = 1s$ a $Q_0 = 10^2W/m^2$ y $P = 5 \times 10^4W/m^3K$.

las temperaturas normalizadas que se presentan en el régimen de flujo térmico medio son cualitativamente similares a las del régimen de flujo térmico bajo.

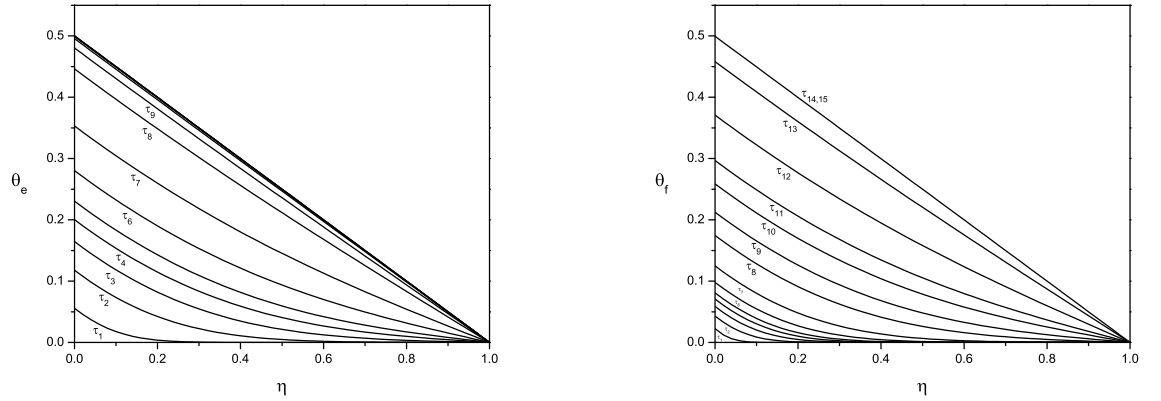


Figura 4.7: Distribución de la temperatura del subsistema de (a) electrones normalizada $\theta_e = (\kappa_e^0/Q_0d)(T_e - T_0)$ y de (b) fonones $\theta_f = (\kappa_f^0/Q_0d)(T_f - T_0)$ a diferentes tiempos para una muestra semiconductor irradiada por un pulso de $\tau = 1s$ a $Q_0 = 10^4W/m^2$ y $P = 0$.

4.2.3. Régimen de flujo térmico alto

En la Figura 4.11 se muestra la distribución de la temperatura normalizada de los dos subsistemas de cuasi partículas calculadas con un parámetro de acoplamiento $P = 0$. La distribución de temperaturas del subsistema de electrones es cualitativamente equivalente para el mismo valor de P (Figuras 4.3a y 4.7a). A diferencia de los dos regímenes

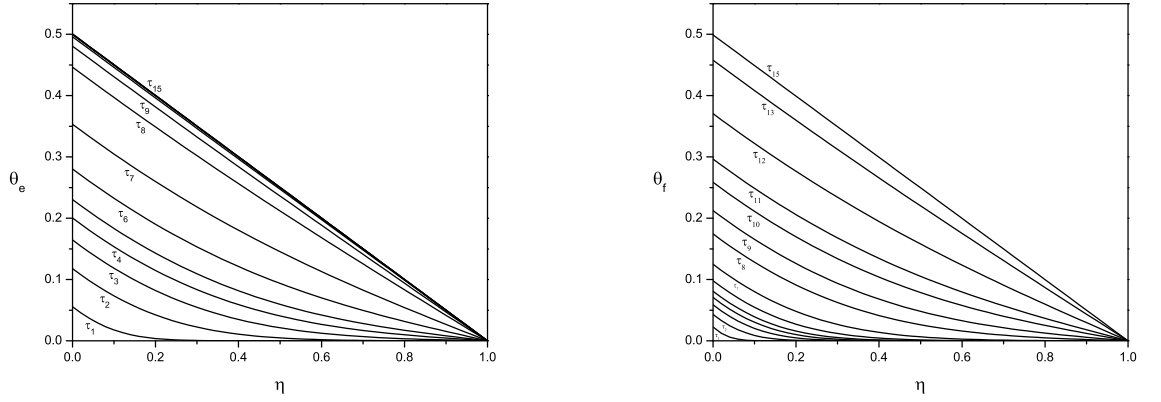


Figura 4.8: Distribución de la temperatura del subsistema de (a) electrones normalizada $\theta_e = (\kappa_e^0/Q_0d)(T_e - T_0)$ y de (b) fonones $\theta_f = (\kappa_f^0/Q_0d)(T_f - T_0)$ a diferentes tiempos para una muestra semiconductor irradiada por un pulso de $\tau = 1s$ a $Q_0 = 10^4W/m^2$ y $P = 10^2W/m^3K$.

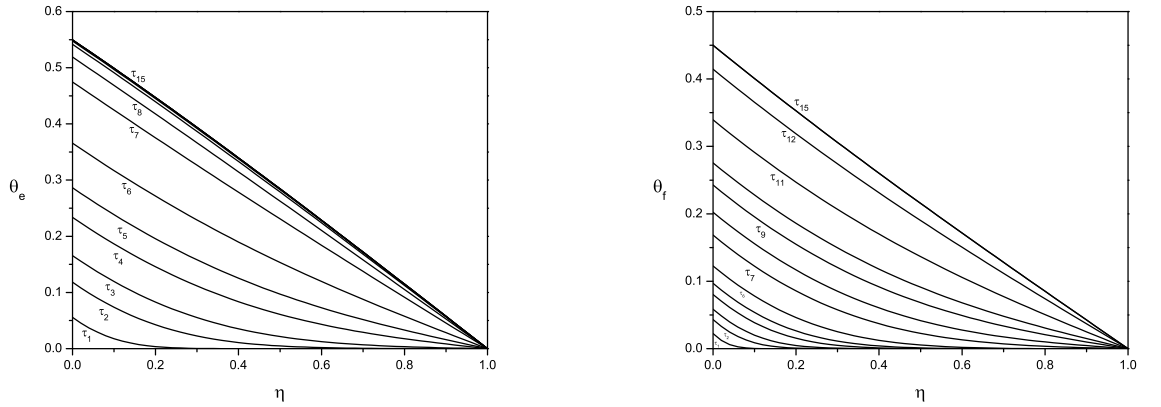


Figura 4.9: Distribución de la temperatura del subsistema de (a) electrones normalizada $\theta_e = (\kappa_e^0/Q_0d)(T_e - T_0)$ y de (b) fonones $\theta_f = (\kappa_f^0/Q_0d)(T_f - T_0)$ a diferentes tiempos para una muestra semiconductor irradiada por un pulso de $\tau = 1s$ a $Q_0 = 10^4W/m^2$ y $P = 10^4W/m^3K$.

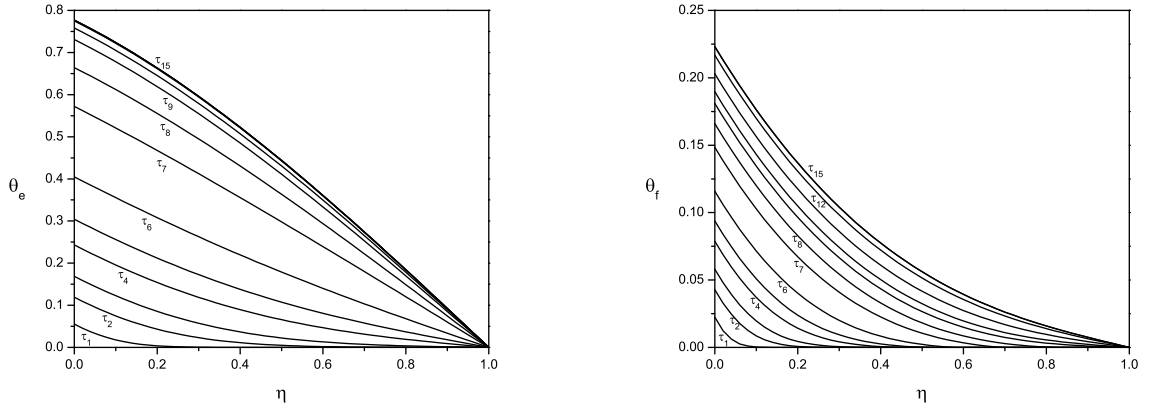


Figura 4.10: Distribución de la temperatura del subsistema de (a) electrones normalizada $\theta_e = (\kappa_e^0/Q_0d)(T_e - T_0)$ y de (b) fonones $\theta_f = (\kappa_f^0/Q_0d)(T_f - T_0)$ a diferentes tiempos para una muestra semiconductor irradiada por un pulso de $\tau = 1s$ a $Q_0 = 10^4W/m^2$ y $P = 5 \times 10^4W/m^3K$.

anteriores con la misma magnitud del parámetro P , los perfiles de temperatura normalizada del subsistema de electrones próximos a τ_{15} deben describirse con funciones no lineales.

En las Figuras 4.12 y 4.13 se observa que para este régimen de flujo térmico la magnitud de la temperatura del subsistema de electrones aumenta al haber incrementado el parámetro de acoplamiento ($P = 10^2W/m^3K$ y $P = 10^4W/m^3K$, respectivamente) a costa de una disminución en la magnitud de la temperatura del subsistema de fonones.

Los perfiles de temperatura presentan un cambio cualitativo a partir de $P = 5 \times$

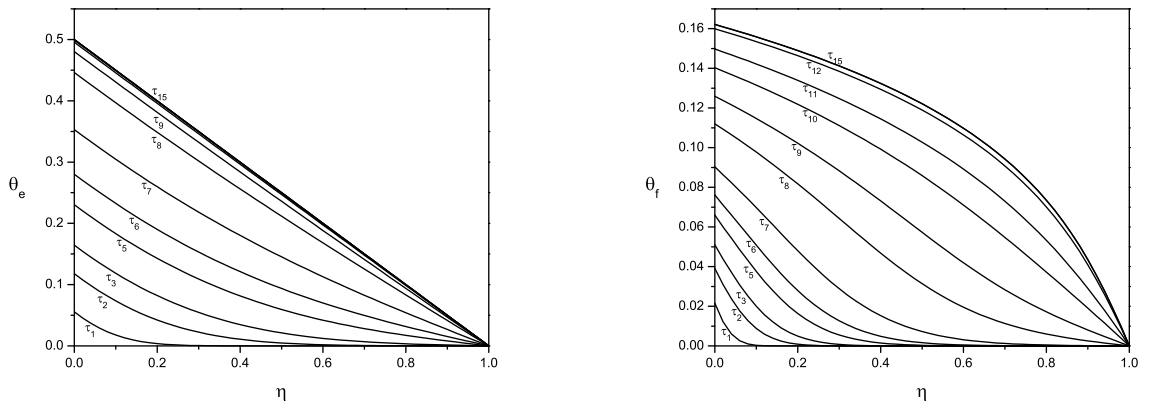


Figura 4.11: Distribución de la temperatura del subsistema de (a) electrones normalizada $\theta_e = (\kappa_e^0/Q_0d)(T_e - T_0)$ y de (b) fonones $\theta_f = (\kappa_f^0/Q_0d)(T_f - T_0)$ a diferentes tiempos para una muestra semiconductor irradiada por un pulso de $\tau = 1s$ a $Q_0 = 10^8W/m^2$ y $P = 0W/m^3K$.

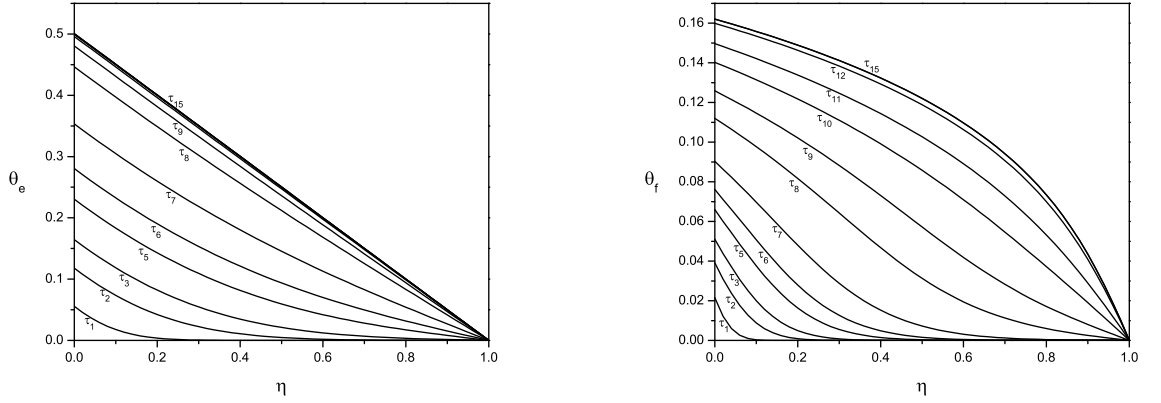


Figura 4.12: Distribución de la temperatura del subsistema de (a) electrones normalizada $\theta_e = (\kappa_e^0/Q_0d)(T_e - T_0)$ y de (b) fonones $\theta_f = (\kappa_f^0/Q_0d)(T_f - T_0)$ a diferentes tiempos para una muestra semiconductor irradiada por un pulso de $\tau = 1s$ a $Q_0 = 10^8W/m^2$ y $P = 10^2W/m^3K$.

$10^4W/m^3K$ (Figura 4.14). Note que las funciones que describirían al subsistema de electrones próximos al perfil $\tau_6 = \tau$ son del tipo no lineal. El subsistema de fonones no alcanza el estado cuasi estacionario.

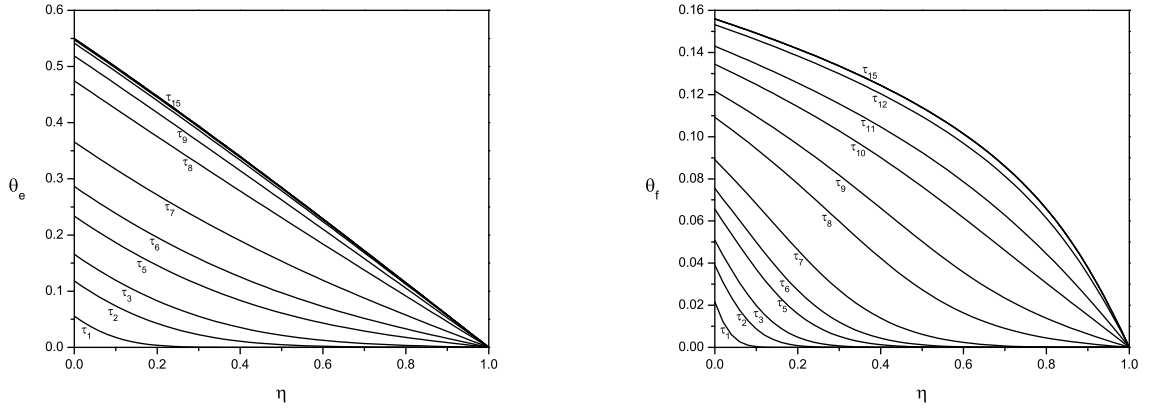


Figura 4.13: Distribución de la temperatura del subsistema de (a) electrones normalizada $\theta_e = (\kappa_e^0/Q_0d)(T_e - T_0)$ y de (b) fonones $\theta_f = (\kappa_f^0/Q_0d)(T_f - T_0)$ a diferentes tiempos para una muestra semiconductor irradiada por un pulso de $\tau = 1s$ a $Q_0 = 10^8W/m^2$ y $P = 10^4W/m^3K$.

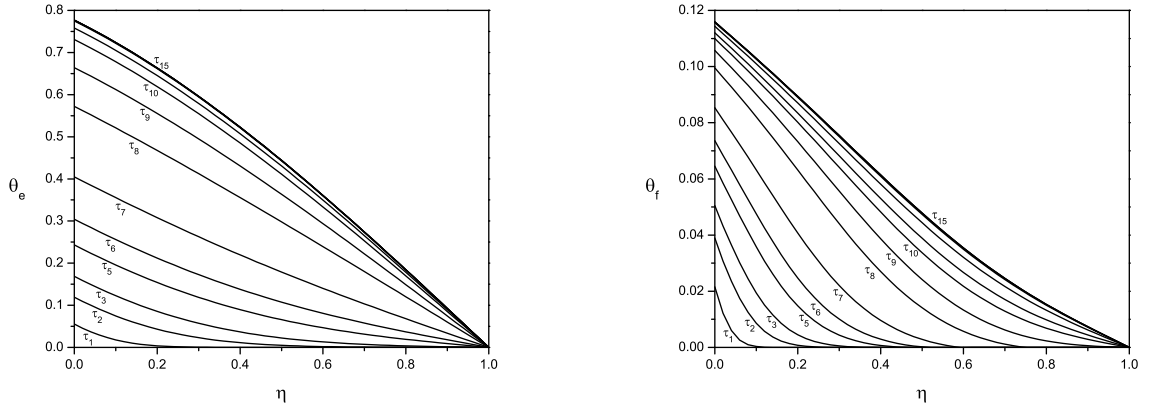


Figura 4.14: Distribución de la temperatura del subsistema de (a) electrones normalizada $\theta_e = (\kappa_e^0/Q_0d)(T_e - T_0)$ y de (b) fonones $\theta_f = (\kappa_f^0/Q_0d)(T_f - T_0)$ a diferentes tiempos para una muestra semiconductor irradiada por un pulso de $\tau = 1s$ a $Q_0 = 10^8 W/m^2$ y $P = 5 \times 10^4 W/m^3 K$.

5. Conclusiones

En la presente tesis hemos investigado la propagación de calor en materiales semiconductores con el modelo de dos temperaturas. Es decir los sistemas de electrones y de fonones en el semiconductor poseen su propia temperatura. En esta investigación teórica hemos resuelto numéricamente el sistema de ecuaciones que describe la propagación de calor para los regímenes tanto lineal (baja intensidad del flujo de calor incidente sobre la muestra) como no lineal (alta intensidad del flujo de calor incidente). Nuestros resultados para el caso lineal reproducen los reportados en la literatura relacionada con el tema.

En el caso no lineal, hemos considerado la dependencia de la conductividad térmica y del calor específico del sistema de fonones en función de la temperatura. Primeramente, aplicamos el método numérico a una placa metálica, donde todas las cuasipartículas tienen la misma temperatura, y hemos podido reproducir los perfiles de temperatura en el régimen no lineal predichos en trabajos previos. En el caso de una placa semiconductor, se obtuvo la evolución de los perfiles de las temperaturas de los electrones y los fonones. Si la magnitud del flujo de calor sobre la muestra es relativamente baja o, incluso, moderada, los perfiles de ambas temperaturas son muy similares y semejantes a las del caso de una temperatura. Al considerar transferencia de calor de los electrones a los fonones, los perfiles de temperatura de los electrones incrementan su valor dentro de la muestra, mientras que la temperatura de los fonones decrece. Además, se encontró que la temperatura de los electrones alcanza más rápidamente su perfil cuasiestacionario en comparación con la de los fonones cuando el parámetro de intercambio de calor P es grande. La situación más interesante corresponde al régimen de flujo de calor incidente de gran magnitud. Aquí, se ha demostrado que si el intercambio de calor entre los dos subsistemas de cuasipartículas es nulo, entonces los

perfiles de temperatura evolucionan de manera independiente. En virtud de que en este trabajo solo se consideró la dependencia de la conductividad térmica y el calor específico en función de la temperatura para el subsistema de fonones, su perfil resultó similar al que se observa en el modelo de una temperatura en el régimen no lineal. Además, la temperatura de los electrones evoluciona como en el caso lineal del modelo de una temperatura. Por otro lado, si la transferencia de calor de los fonones a los electrones es importante, la temperatura de estos últimos se incrementa dentro de la muestra semiconductor, mientras que la temperatura de los fonones evoluciona alterando fuertemente su distribución espacial y de manera efectiva decrece dentro de la placa.

Referencias

- [1] Y.G. Gurevich, F. Pérez Rodríguez, *Fenómenos de Transporte en Semiconductores*. Fondo de Cultura Económica, México (2007).
- [2] V.P. Zharov, V.S. Lethokov, *Laser Optoacoustic Spectroscopy*. Springer Verlag, Berlin, 1986.
- [3] M. Chirtoc, G. Mikhailescu, Phys Rev. B **40**, 9606. 1989.
- [4] A. Mandelis, *Photoacoustic Thermal Waves Phenomena in Semiconductors*. North Holland, 1987.
- [5] G. Rousset, F. Lupoutre, L. Bertrand. J. Appl. Phys. **54**, 5, 1983.
- [6] H. Vargas, L.C.M. Miranda. Phys. Rep. **161**, 43, 1988.
- [7] A.F. Carballo Sánchez, *Propagación de un pulso térmico en un medio conductor finito*. Tesis de Doctorado, Cinvestav-IPN, Mexico, D.F. 1999.
- [8] J. Tlamani Amador, *Estudio de la propagación de un pulso térmico en materiales*. Tesis de Licenciatura, FCFM-BUAP, Puebla, Pue. 2002.
- [9] Y.B. Zeldovich, Yu.P. Razier, *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena*. Academic Press New York and London 1967.
- [10] A.D. Polyanin, *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists*. Chapman and Hall/CRC, 2002.
- [11] Y.G. Gurevich, G.N. Logvinov, A.F. Carballo-Sánchez, Yu.V. Drogobitskiy, J.L. Salazar, Electron and phonon temperature relaxation in semiconductors excited by thermal pulse. J. App. Phys. **91** 183, 2002.
- [12] K.E. Shuler. *Temperature, its measurement and control in science and industry*. Robert E. Krieger publishing, Ney York, 1972.
- [13] J.D. Logan, *An Introduction to nonlinear partial differential equations*. John Wiley, New York, 1994.
- [14] F.G. Bass, Y.G. Gurevich, *Hot Electrons and Strong Electromagnetic Waves in Semiconductors and Gas Discharge Plasmas*. Nauka, Moscow, 1975.
- [15] A. Rosencwaig, A. Gersho, J. Appl. Phys **47**, 64, 1976.
- [16] H.S. Carslaw, J.C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*. Clarendon Press, Oxford, 1984.
- [17] B.M. Budak, A.A. Samarskii, A.N. Thikonov, *Collection of Problems on Mathematical Physics*, Nauka, Moscow, 1980.
- [18] J. Lan, T. Hai-Lung, Journal of Heat Transfer **127**, 1167, 2005.

- [19] S.I. Anisimov, B.L. Kapeliovich, T.L. Perelman, Electron Emission from Metal Surfaces Exposed to Ultrashort Laser Pulses, *Sov. Phys. JETP* **39**, 375, 1974.
- [20] A.F. Carballo Sánchez, G. González de la Cruz, Y.G. Gurevich, G.N. Logvinov, Transient heat transport by carriers and phonons in semiconductors, *Phys. Rev. B* **59**, 10630, 1999.

Apéndice

En este apéndice presentamos varias soluciones analíticas del sistema de ecuaciones que describe la propagación de calor en un medio lineal que pueden ser útiles para los lectores que deseen profundizar en el tema de esta tesis. Los problemas resueltos sirven de introducción a los métodos analíticos que se han aplicado en los modelos de una y dos temperaturas, en el régimen lineal, y que se comentan en el capítulo 2.

Problema 1. Dominio infinito $-\infty < x < \infty$. Se asume que la distribución espacial de temperatura satisface la condición de conservación de energía $\int_{-\infty}^{\infty} T dx = S$, donde la cantidad $S = \varepsilon/\rho c$, con ε igual a la energía liberada por unidad de área en el tiempo inicial $t = 0$ y en el plano $x = 0$. Para $t > 0$ el calor se propaga en ambas direcciones desde el plano $x = 0$. La ecuación (2.6) con las condiciones anteriores es equivalente a la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} + q,$$

con una fuente laminar de intensidad arbitraria, esto es, una fuente q en forma de delta (con respecto a la posición y al tiempo) $q(x, t) = S\delta(x)\delta(t)$. Inicialmente en $t = 0$ se asume que la temperatura de la muestra es idénticamente igual a cero en todas partes, excepto en el punto donde ocurre la liberación de energía $T(x, 0) = S\delta(x)$. La solución [9] es

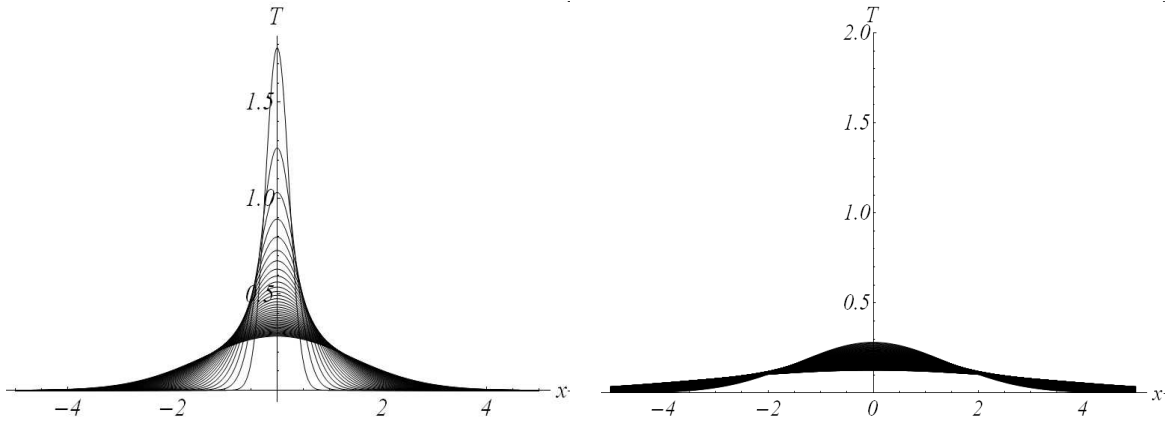


Figura a-1: Perfiles de $T(x, t)$ de la forma (A-1) en instantes sucesivos de tiempo, siendo el panel izquierdo el más próximo a la condición inicial.

$$T = \frac{S}{\sqrt{4\pi\alpha t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right). \quad (\text{A-1})$$

Note que el calor se concentra en el punto de liberación de energía sólo en el tiempo inicial $t = 0$ (para $x = 0$, $T \rightarrow \infty$ con $t^{-1/2}$). Para $t > 0$ el calor se propaga de forma instantánea por todo el espacio y la temperatura tiende asintóticamente a cero en infinito. La mayor parte de la energía se concentra en una región cuyas dimensiones son del orden de $x \sim (4\alpha t)^{1/2}$, la cual se incrementa proporcionalmente con el tiempo como \sqrt{t} . Correspondientemente, la temperatura también decrece como $1/\sqrt{t}$, tal que la cantidad total de calor, la cual es proporcional a $\int T dx \sim Tx \sim (1/\sqrt{t})\sqrt{t} \sim 1$,

permanece constante. La Figura a-1 muestra la distribución de temperatura descrita por la ecuación (A-1) en instantes sucesivos de tiempo.

El carácter asintótico del decremento de la temperatura en el infinito y la propagación instantánea de calor a distancias infinitas se puede explicar por el hecho de que el coeficiente de conductividad térmica es finito a temperatura cero. Sin embargo, desde luego que en la práctica sólo una cantidad despreciablemente pequeña de calor es la que alcanza un punto distante a cierto tiempo. Es evidente que la densidad de las gráficas de la distribución de temperatura aumenta conforme $t \rightarrow \infty$.

Problema 2*. **Dominio infinito** $-\infty < x < \infty$. Se supone la condición inicial $T = f(x)$ en $t = 0$. Considérense condiciones de frontera del primer tipo (de Dirichlet). Las temperaturas en los dominios $|x| < x_0$ y $|x| > x_0$ son constantes e iguales a T_1 y a T_2 , respectivamente, es decir $f(x) = T_1$ para $|x| < x_0$ y $f(x) = T_2$ para $|x| > x_0$. La solución [16] es⁶

$$T = \frac{1}{2}(T_1 - T_2) \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x_0 - x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{x_0 + x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \right] + T_2. \quad (\text{A-2})$$

Los perfiles para varios intervalos de tiempo, con $T_1 = 0$, $T_2 = 2$ y $x_0 = 2$ se muestran en la Figura a-2.

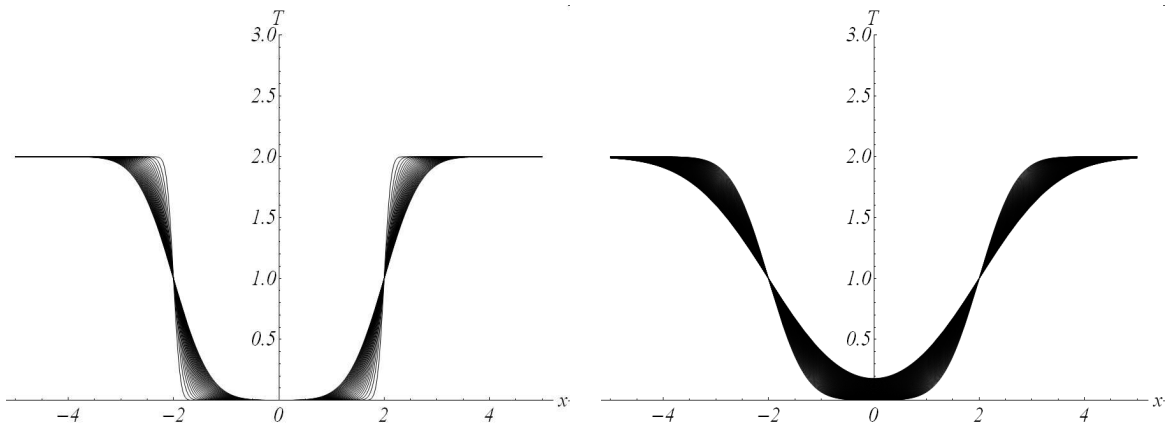


Figura a-2: Perfiles de $T(x, t)$ de la forma (A-2) en instantes sucesivos de tiempo, siendo el panel izquierdo el más próximo a la condición inicial.

Problema 3*. **Dominio semiinfinito** $0 \leq x < \infty$. Se supone $T = f(x)$ en $t = 0$ como condición inicial y $T = g(t)$ en $x = 0$ como condición de frontera del primer tipo. Si además la temperatura inicial es linealmente dependiente de la coordenada espacial $f(x) = T_0 + bx$ y la temperatura en la frontera es cero $g(t) = 0$, la solución [16] es

$$T = T_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) + bx. \quad (\text{A-3})$$

⁶La función error se define como $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp[-t^2] dt$.

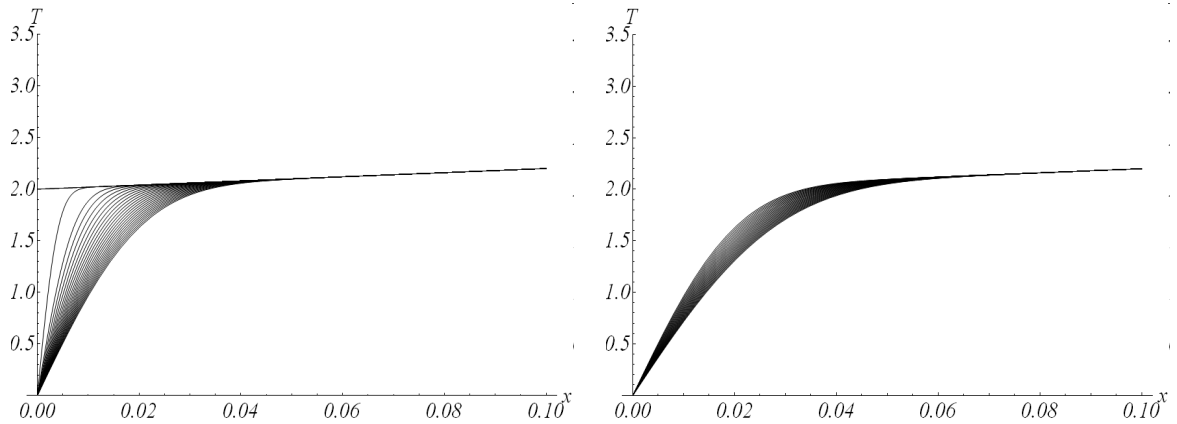


Figura a-3: Solución (A-3) para distintos valores de t .

Los perfiles para varios intervalos de tiempo se muestran en la Figura a-3 donde se consideró $b = 2$, $T_0 = 2$.

Problema 4*. **Dominio semiinfinito** $0 \leq x < \infty$. Se supone $T = f(x)$ en $t = 0$ como condición inicial y $T = g(t)$ en $x = 0$ como condición de frontera tal como en el problema anterior. Si la temperatura inicial es cero, $f(x) = 0$ y la temperatura en la frontera aumenta linealmente con el tiempo, $g(t) = At$, la solución [16] es⁷

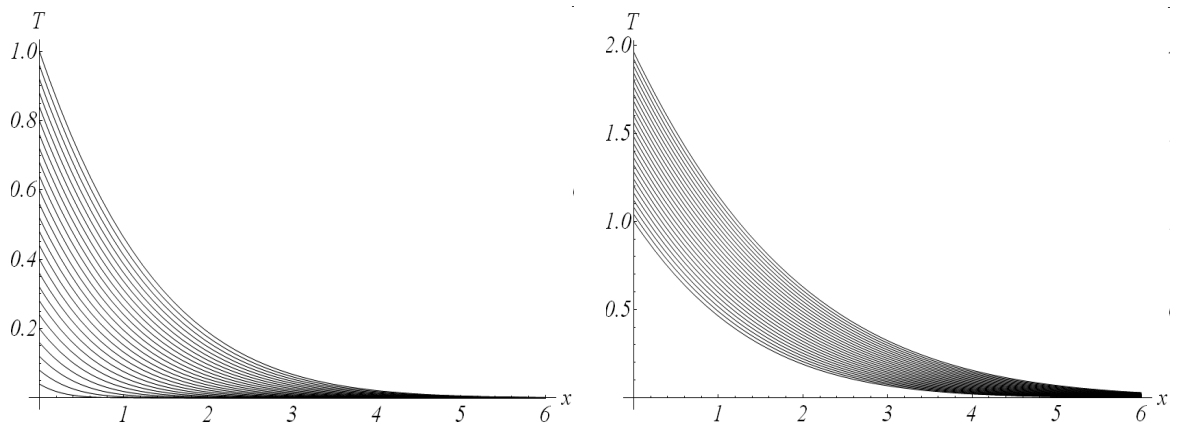


Figura a-4: Solución (A-4) para valores sucesivos de t .

$$T = At \left[\left(1 + \frac{x^2}{2\alpha t} \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} - \frac{x}{\sqrt{\pi\alpha t}} \exp\left[-\frac{x^2}{4\alpha t}\right] \right) \right] \quad (\text{A-4})$$

Los perfiles para varios intervalos de tiempo y se muestran en las Figuras a-4 y a-5 con $A = 4$.

Problema 5*. **Dominio semiinfinito** $0 \leq x < \infty$. Se supone $T = f(x)$ en $t = 0$ (condición inicial) y $\partial_x T = g(t)$ en $x = 0$ (condición de frontera del segundo tipo o de Neumann)⁸. Si además la temperatura inicial es cero $f(x) = 0$ y se mantiene un flujo

⁷La función error complementaria se define como $1 - \operatorname{erf}(x)$

⁸ $\partial_x T = \frac{\partial T}{\partial x}$

térmico constante en la frontera para todo t , $g(t) = -Q$, la solución [16] es

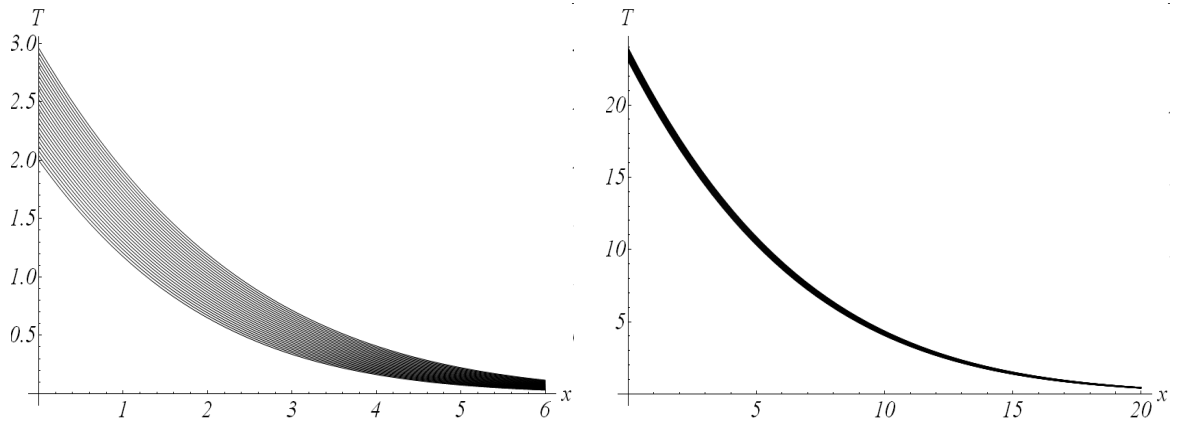


Figura a-5: Solución (A-4) para distintos valores de t .

$$T = 2Q\sqrt{\frac{\alpha t}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right) - Qx \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \quad (\text{A-5})$$

Los perfiles para varios intervalos de tiempo y se muestran en las Figuras a-6 y a-7 con $Q = 5$.

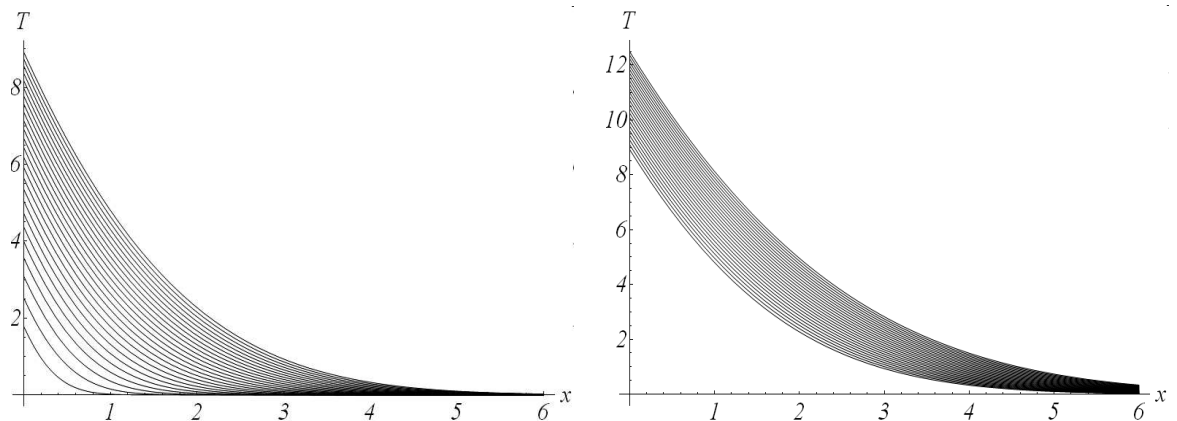


Figura a-6: Solución (A-5) para distintos valores de t .

Problema 6*. **Dominio semiinfinito** $0 \leq x < \infty$. Se supone una condición inicial de la forma $T = f(x)$ y una condición de frontera del tercer tipo (de Robin) $\partial_x T - sT = g(t)$. Si además la temperatura inicial T_0 es uniforme y la temperatura del medio de contacto (en $x = 0$) es cero: $g(x) = 0$ la solución [17] es

$$T = T_0 \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) + \exp(sx + \alpha s^2 t) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + s\sqrt{\alpha t}\right) \right]. \quad (\text{A-6})$$

Los perfiles para varios intervalos de tiempo y se muestran en la Figura a-8 con $T_0 = 15$, $s = 1$.

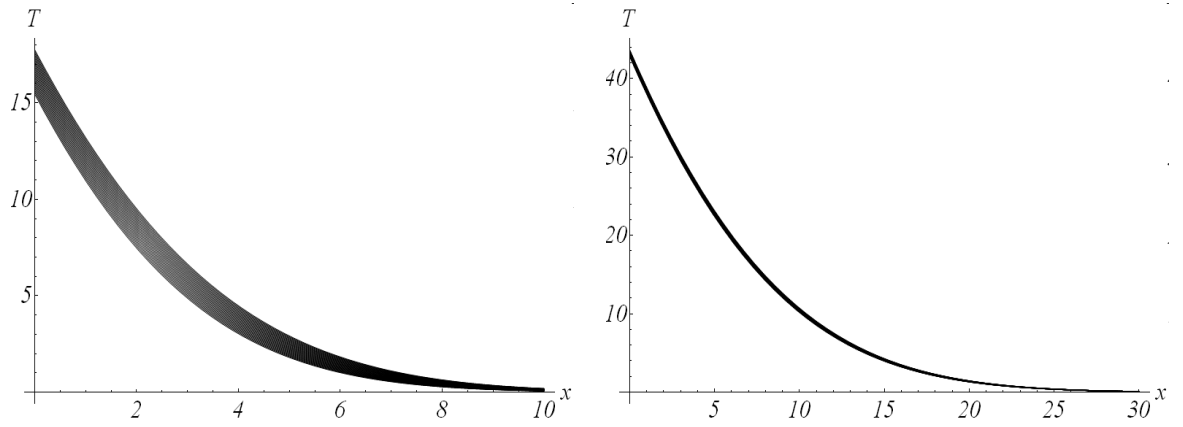


Figura a-7: Solución (A-5) para distintos valores de t .

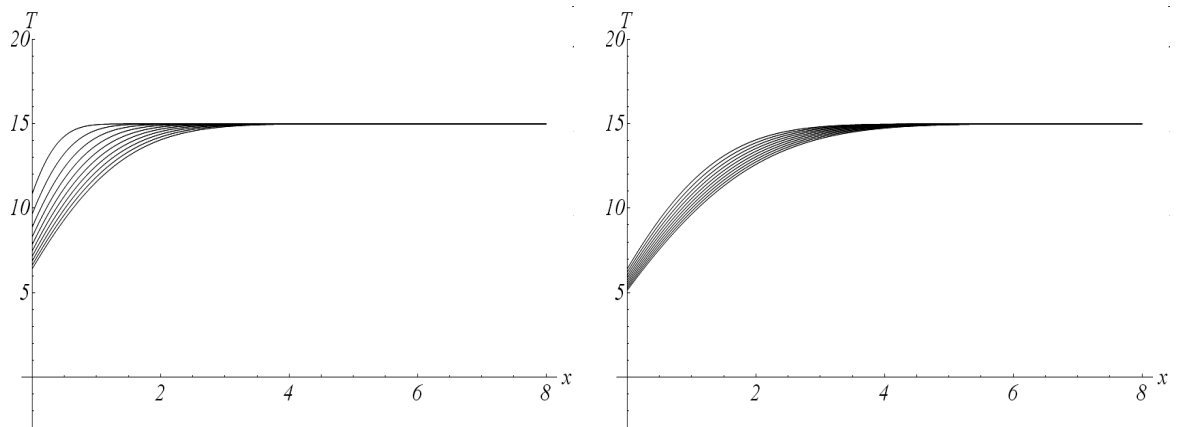


Figura a-8: Solución (A-6) para distintos valores de t .

Problema 7*. Dominio acotado $0 \leq x \leq l$. Se prescribe la condición inicial $T = f(x)$ en $t = 0$ y las condiciones de frontera del primer tipo $T = g_1(t)$ en $x = 0$ y $T = g_2(t)$ en $x = l$. Si además se supone que la temperatura inicial es uniforme, $f(x) = T_0$ y ambos extremos se mantienen a temperatura cero $g_1(t) = 0$, $g_2(t) = 0$, la solución [16] es

$$T = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \operatorname{sen} \left[\frac{(2n+1)\pi x}{l} \right] \exp \left[-\frac{\alpha(2n+1)^2 \pi^2 t}{l^2} \right]. \quad (\text{A-7})$$

Los perfiles para varios intervalos de tiempo y se muestran en la Figura a-9 con $T_0 = 1$, $l = 2$, $\alpha = 1$.

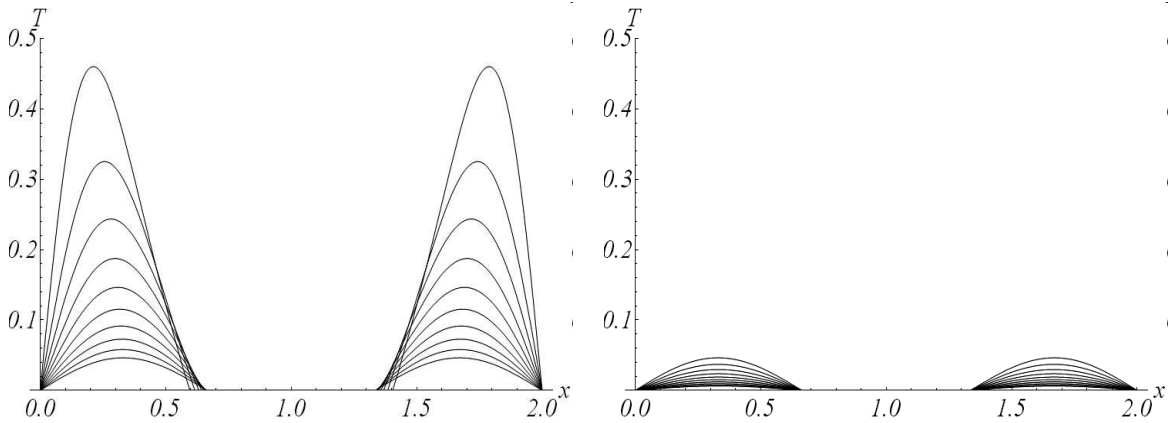


Figura a-9: Solución (A-7) para distintos valores de t .

Problema 8*. Dominio acotado $0 \leq x \leq l$. Se supone una condición inicial de la forma $T = f(x)$ en $t = 0$ y las condiciones de frontera del primer tipo $T = g_1(t)$ en $x = 0$ y $T = g_2(t)$ en $x = l$. Si además se supone que la temperatura inicial es cero, $f(x) = 0$ y los extremos se mantienen a temperaturas uniformes, $g_1(t) = T_1$, $g_2(t) = T_2$, la solución [10] es

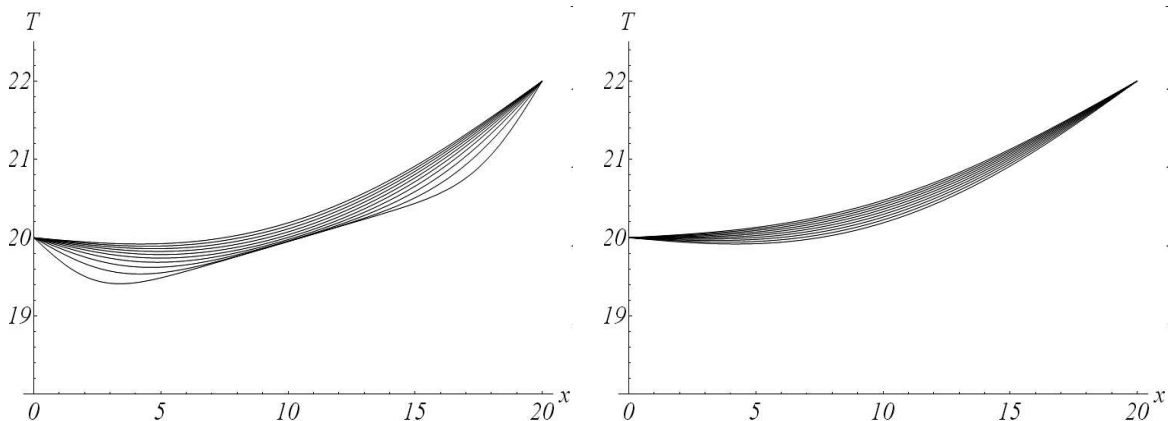


Figura a-10: Solución (A-8) para distintos valores de t .

$$T = T_1 + (T_2 - T_1)\frac{x}{l} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n T_2 - T_1}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \exp\left(-\frac{\alpha n^2 \pi^2 t}{l^2}\right). \quad (\text{A-8})$$

Los perfiles para varios intervalos de tiempo y se muestran en las Figuras a-10 y a-11.

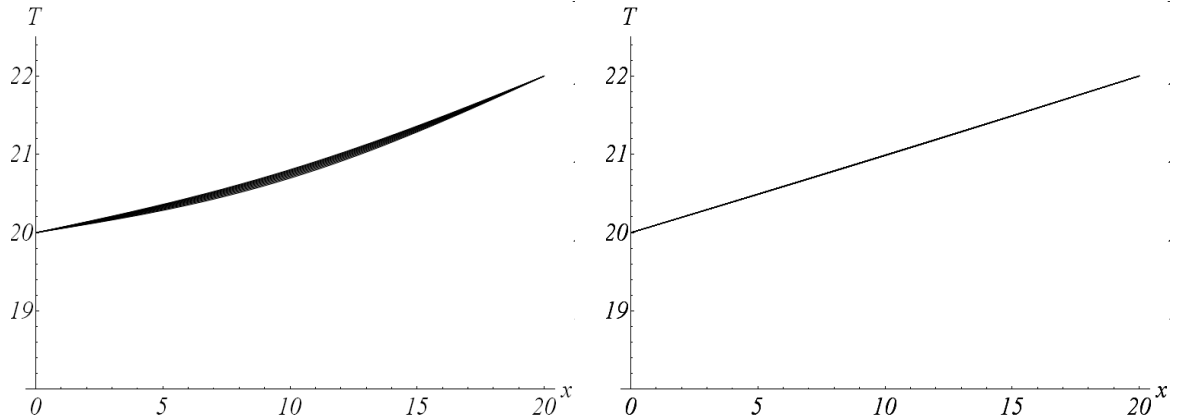


Figura a-11: Solución (A-8) para distintos valores de t .

Problema 9*. **Dominio acotado** $0 \leq x \leq l$. Se prescribe la condición inicial como $T = f(x)$ en $t = 0$ y la condición de frontera del segundo tipo $\partial_x T = g_1(t)$ en $x = 0$ y de primer tipo $T = g_2(t)$ en $x = l$. Además, si la temperatura inicial es cero, $f(x) = 0$, el extremo izquierdo se aísla térmicamente $g_1(t) = 0$ y el derecho se mantiene a temperatura constante $g_2(t) = A$, entonces la solución [17] es

$$T = A + \frac{4A}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \cos\left[\frac{\pi(2n+1)x}{2l}\right] \exp\left[-\frac{\alpha \pi^2 (2n+1)^2 t}{4l^2}\right]. \quad (\text{A-9})$$

Los perfiles para varios intervalos de tiempo y se muestran en las Figuras a-12 y a-13.

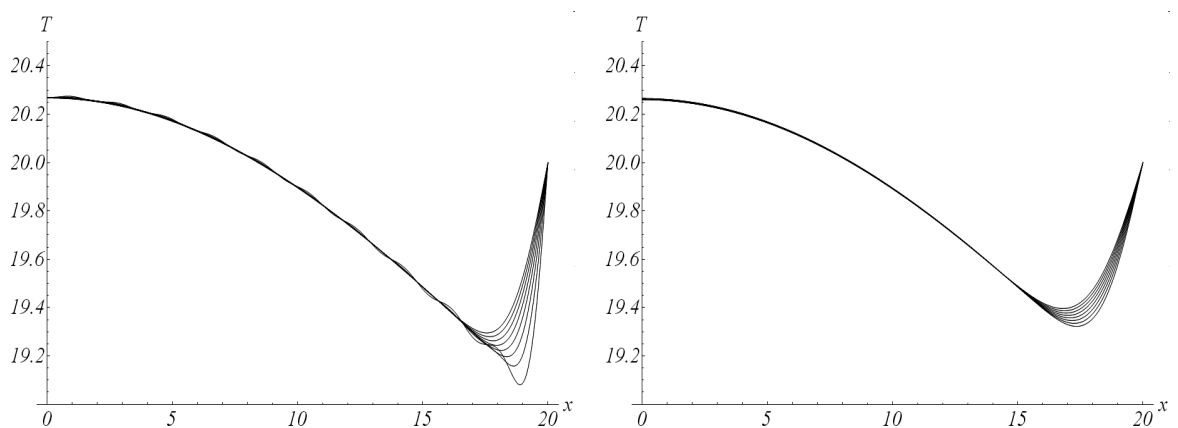


Figura a-12: Solución (A-9) para distintos valores de t .

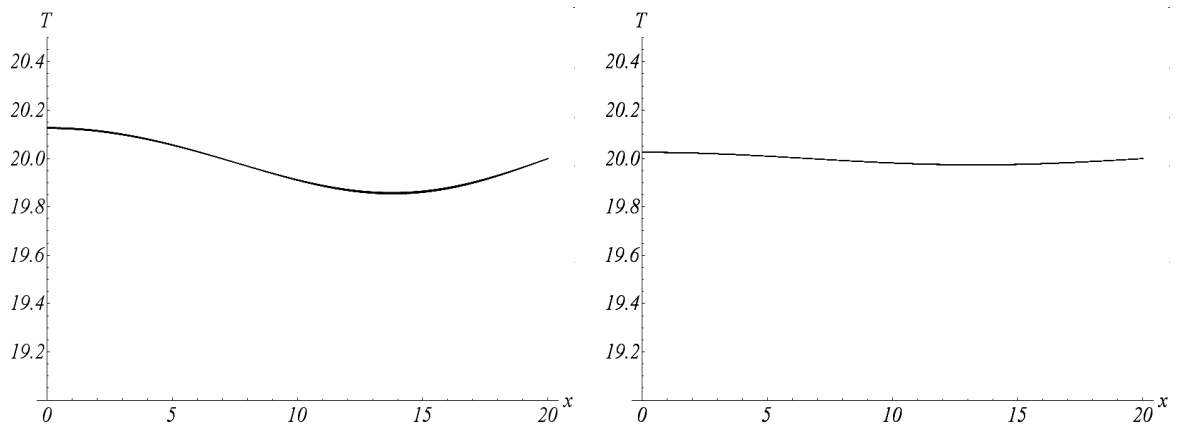


Figura a-13: Solución (A-9) para distintos valores de t .



**ACTA DE EXAMEN DE GRADO DE
MAESTRÍA EN CIENCIAS
(en la especialidad de Ciencia de Materiales)**

Siendo las 17:00 horas del día viernes 11 de Septiembre del año dos mil nueve, reunido el Jurado examinador integrado por los Doctores:

- Dr. Felix Izrailev. (Presidente)
- Dr. José Soto Manríquez.
- Dr. Antonio Méndez Blas.
- Dr. Felipe Pérez Rodríguez. (Asesor)

en el Auditorio del Edificio "B" del IFUAP, se procedió a examinar al ING. OCTAVIO BALLINAS CAMACHO, quien expuso su tesis intitulada "Propagación de un pulso térmico en materiales semiconductores: Modelo de dos temperaturas", y respondió satisfactoriamente a las preguntas del Jurado Examinador, decidiendo éste, después de deliberar libremente, aprobarlo por unanimidad

Dr. Felix Izrailev.

Dr. José Soto Manríquez.

Dr. Antonio Méndez Blas.



Dr. Felipe Pérez Rodríguez.