



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

UN MÉTODO RELATIVISTA GENERAL PARA
ESTIMAR LA RAZÓN MASA/DISTANCIA DE UN
AGUJERO NEGRO MEDIANTE OBSERVACIONES

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

Gustavo Ángel González Juárez

Asesorado por

Dr. Alfredo Herrera Aguliar

Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada

Puebla Pue.
14 de junio de 2022



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

UN MÉTODO RELATIVISTA GENERAL PARA
ESTIMAR LA RAZÓN MASA/DISTANCIA DE UN
AGUJERO NEGRO MEDIANTE OBSERVACIONES

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

Gustavo Ángel González Juárez

Asesorado por

Dr. Alfredo Herrera Aguliar

Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada

Puebla Pue.
14 de junio de 2022

Título: UN MÉTODO RELATIVISTA GENERAL PARA ESTIMAR
LA RAZÓN MASA/DISTANCIA DE UN AGUJERO NEGRO
MEDIANTE OBSERVACIONES

Estudiante: GUSTAVO ÁNGEL GONZÁLEZ JUÁREZ

COMITÉ

Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo
Presidente

Dr. Cupatitzio Ramirez Romero
Secretario

Dr. Roberto Cartas Fuentesvilla
Vocal

Dr. Ulises Nucamendi Gomez
Vocal

Dr. Alfredo Herrera Aguliar
Asesor

Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada
Asesor

RESUMEN

En este trabajo se muestra un método de relatividad general para estimar la razón de la masa de un agujero negro entre la distancia que nos separa del mismo. Dicha estimación se realiza mediante el uso de datos registrados para corrimientos al rojo y azul, los cuales están presentes en fotones emitidos por máseres de agua que orbitan dicho agujero negro en trayectorias geodésicas. En este caso se estudiarán algunos sistemas astrofísicos registrados en el *Megamaser Cosmology Project*, como son UGC3789 y ESO558-G009, en los cuales consideraremos que existe un agujero negro súper masivo en el núcleo de cada uno de estos sistemas galácticos astrofísicos.

Índice general

1. Métrica de Kerr y vectores de Killing	3
1.1. Métrica de Kerr	3
1.2. Vectores de Killing y cantidades conservadas	3
2. Campos tensoriales de Killing y órbitas en la métrica de Kerr	5
2.1. Campo tensorial de Killing en la métrica de Kerr	5
2.2. Órbitas geodésicas en la Métrica de Kerr	6
2.3. Órbitas circulares para partículas masivas	8
3. Relaciones entre observables y propiedades de un agujero negro de Kerr	11
3.1. Emisión y detección de fotones (métrica de Kerr)	11
3.2. Corrimientos (al rojo o al azul) en términos de las propiedades de un agujero negro de Kerr	13
4. Estimación de Parámetros	17
4.1. Modelando Sistemas astrofísicos galácticos del <i>Megamaser Cosmology Project</i> . . .	17
4.2. Método de χ^2	20
5. Resultados y conclusiones	23
5.1. Resultados obtenidos	23
5.2. Conclusiones	25
Bibliografía	27

Introducción

Durante mucho tiempo la teoría de la Gravedad de Newton ha sido una de las herramientas más útiles para describir el movimiento de los cuerpos celestes, además de que dicha teoría ha demostrado ser muy precisa en cuanto a la predicción de diversos fenómenos astronómicos. Debido a esto, el modelo de Newton es de los más empleados para el estudio de sistemas astrofísicos, sin embargo existen fenómenos que esta teoría no puede describir, como lo son la precesión del perihelio de la órbita de Mercurio y el corrimiento al rojo gravitacional [2], los cuales fueron algunas de las primeras pruebas para Relatividad General, lo cual nos muestra que en realidad la naturaleza de la gravedad es más compleja de lo que parece.

En este trabajo se hará uso de la Relatividad General, la teoría más completa en la actualidad para describir la gravedad y el espacio-tiempo, ya que las ecuaciones de Einstein nos muestran que hay una diferencia entre la gravedad y las demás fuerzas de la naturaleza, siendo esta un efecto debido a la curvatura del espacio y el tiempo, la cual a su vez es generada por la distribución de los objetos en el mismo. De esta forma, los cuerpos masivos y, de manera general, la energía deforma el espacio-tiempo a su alrededor. Dichas ecuaciones nos permiten ver, de forma clara, la relación que existe entre estos objetos y la curvatura generada por los mismos. Asimismo esta teoría permite la existencia de agujeros negros los cuales serán estudiados aquí.

Se empleará un modelo Relativista General a sistemas astrofísicos y así poder determinar la razón *masa/distancia* (M/D) de agujeros negros en los discos de acreción que están ubicados en el centro de sistemas galácticos, como lo son *UGC3789* y *ESO558 – G009*. Esto con datos observacionales registrados en el *Megamaser Cosmology Project* (MCP), dichos datos son obtenidos debido a fotones emitidos por objetos que orbitan estos agujeros negros en órbitas geodésicas, en este caso concreto dichos objetos son máseres de agua de los cuales se conoce su frecuencia de emisión en reposo. Así, podemos determinar los corrimientos al rojo o al azul que experimentan estos fotones y con el modelo propuesto se encuentra que la masa del agujero negro esta relacionada con dichos corrimientos, y al implementar un análisis estadístico sobre los datos reportados se puede estimar la masa de dicho agujero.

También otro de los objetivos de este trabajo, además de determinar la masa de los agujeros negros en los sistemas antes mencionados, es mostrar algunas de las diferencias entre modelos empleados, ya que muchas de las estimaciones para la masa del agujero negro central han sido realizadas bajo un modelo newtoniano. Además de tratar de encontrar contribuciones “notables” de algunos de los efectos propios de la Relatividad General como el corrimiento gravitacional.

Capítulo 1

Métrica de Kerr y vectores de Killing

1.1. Métrica de Kerr

Una solución a las ecuaciones de Einstein, es la métrica de un agujero negro de Kerr, que describe el campo gravitatorio generado por objetos que además de poseer una masa, también tienen un momento angular. Dicha métrica está dada por

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\varphi}dtd\varphi + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2, \quad (1.1)$$

donde

$$g_{tt} = -\left[1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right], \quad g_{t\varphi} = -\frac{2Mar\sin^2\theta}{\Sigma}, \quad g_{rr} = \frac{\Sigma}{\Delta},$$

$$g_{\theta\theta} = \Sigma, \quad g_{\varphi\varphi} = \left[r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2r\sin^2\theta}{\Sigma}\right]\sin^2\theta,$$

en las cuales las expresiones para Σ y Δ son:

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 + a^2 - 2Mr.$$

Cabe mencionar que las componentes de esta métrica, dependen de M y a , la masa del agujero negro y el parámetro de rotación de Kerr, este último es dado por $a = J/M$, aquí J es el momento angular del objeto masivo. Además la métrica aquí mencionada es descrita en el Sistema Natural de Unidades ($G = c = 1$), donde G es la constante de gravitación universal de Newton y c es la velocidad de la luz.

La métrica de Kerr está expresada en el sistema coordenado de Boyer–Lindquist, $x^\mu(t, r, \theta, \varphi)$, con ello se recurrirá a la convención de sumas de Einstein para la operación entre los cuadvectores para los índices repetidos.

Otro aspecto a notar es que todas las componentes de esta métrica son independientes de t y de φ . Así, mediante los *vectores de Killing* [2], se puede deducir que existen cantidades que se conservan a lo largo de trayectorias geodésicas.

1.2. Vectores de Killing y cantidades conservadas

Un resultado que se presenta en las diferentes métricas, las cuales son solución a las ecuaciones de Einstein, es inferido por medio la ecuación de las geodésicas,

$$p^\mu \nabla_\mu p^\nu = 0,$$

con la cual se puede llegar a que

$$m \frac{dp_\mu}{d\tau} = \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\nu\lambda}) p^\lambda p^\nu.$$

De esta relación notamos que para trayectorias geodésicas, si las componentes de la métrica son independientes de la coordenada x^{σ^*} , entonces la componente del momento, p_{σ^*} , es una cantidad conservada [2].

Para este caso, como ya se ha mencionado, la métrica de Kerr es independiente de t y φ , por lo cual presenta dos vectores de Killing, dados por

$$\xi^\mu = (1, 0, 0, 0) \quad (\text{Campo vectorial de Killing temporal}), \quad (1.2)$$

$$\psi^\mu = (0, 0, 0, 1) \quad (\text{Campo vectorial de Killing rotacional}). \quad (1.3)$$

Dadas las ecuaciones anteriores, podemos ver que cumplen la siguiente relación, $K^\mu p_\mu = p_{\sigma^*}$, donde K^μ es un vector de Killing, p^μ es el cuadrimento de una partícula, y p_{σ^*} es una cantidad conservada de movimiento. Con ello notamos que en la métrica de Kerr, se pueden definir dos cantidades conservadas [2].

Ahora con, $p^\mu/m = U^\mu = (U^t, U^r, U^\theta, U^\varphi)$, la cuadrivelocidad de una partícula, y los vectores de Killing dados anteriormente, se pueden definir dichas cantidades conservadas por

$$E \equiv \frac{\bar{E}}{m} \equiv -\xi_\nu U^\nu = -g_{\mu\nu} \xi^\mu U^\nu, \quad L \equiv \frac{\bar{L}}{m} \equiv \psi_\nu U^\nu = g_{\mu\nu} \psi^\mu U^\nu. \quad (1.4)$$

Podemos encontrar los valores para E y L al sustituir (1.2) y (1.3) en (1.4). Así, obtenemos que

$$E = -g_{\varphi t} U^\varphi - g_{tt} U^t, \quad L = g_{t\varphi} U^t + g_{\varphi\varphi} U^\varphi. \quad (1.5)$$

Al resolver el anterior sistema de ecuaciones para U^t y U^φ se puede llegar a que

$$U^t = \frac{g_{\varphi\varphi} E + g_{t\varphi} L}{g_{t\varphi}^2 - g_{\varphi\varphi} g_{tt}}, \quad U^\varphi = -\frac{g_{t\varphi} E + g_{tt} L}{g_{t\varphi}^2 - g_{\varphi\varphi} g_{tt}}. \quad (1.6)$$

Podemos notar que el sistema anterior de ecuaciones expresa las componentes U^φ y U^t de la cuadrivelocidad para una partícula en trayectorias geodésicas; las cuales están en términos de la métrica de Kerr y de las cantidades conservadas de movimiento dadas por los vectores de Killing.

Capítulo 2

Campos tensoriales de Killing y órbitas en la métrica de Kerr

2.1. Campo tensorial de Killing en la métrica de Kerr

La métrica de Kerr posee un campo tensorial de Killing [2], este campo satisface la ecuación de Killing, $\nabla_{(\lambda}K_{\mu\nu)} = 0$, el cual está dado por

$$K_{\mu\nu} = 2\Sigma l_{(\mu}n_{\nu)} + r^2 g_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

donde

$$l^\mu = \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^\mu + \frac{a}{\Delta} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^\mu + \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^\mu, \\ n^\mu = \frac{r^2 + a^2}{2\Sigma} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^\mu + \frac{a}{2\Sigma} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^\mu - \frac{\Delta}{2\Sigma} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^\mu,$$

estos son vectores nulos, los cuales cumplen que $l_\mu l^\mu = 0$, $n_\mu n^\mu = 0$ y $l^\mu n_\mu = l_\mu n^\mu = -1$. [2]. Esto se puede verificar usando la métrica de Kerr (1.1), y también del hecho de que para A^α y B^α , cuadvectores, $B_\alpha A^\alpha = g_{\alpha\beta} B^\beta A^\alpha$ [11].

Dado el campo tensorial de Killing, la cuadvirvelocidad de una partícula y las componentes de la métrica de Kerr en (1.1), podemos ver que existe una constante de movimiento C [2], la cual está dada por

$$C = K_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = 2\Sigma (l_\mu U^\mu) (n_\nu U^\nu) - r^2, \quad (2.2)$$

donde $K_{\mu\nu}$ es el campo tensorial de Killing en (2.1). Se pueden deducir las expresiones para $l_\mu U^\mu$ y $n_\nu U^\nu$, al sustituir sus expresiones correspondientes. Así, tenemos que

$$l_\mu U^\mu = -\frac{r^2 + a^2}{\Delta} E + \frac{a}{\Delta} L + g_{rr} U^r, \quad n_\mu U^\mu = -\frac{r^2 + a^2}{2\Sigma} E + \frac{a}{2\Sigma} L - \frac{\Delta}{2\Sigma} g_{rr} U^r.$$

Podemos sustituir los resultados anteriores en la ecuación (2.2), para llegar a que

$$C = \frac{1}{\Delta} \left([(r^2 + a^2)E - aL]^2 - \Sigma^2 (U^r)^2 \right) - r^2. \quad (2.3)$$

Así, dada la constante de Carter, Q , definida en [8], se puede encontrar que

$$C = (L - aE)^2 + Q = \frac{1}{\Delta} \left([(r^2 + a^2)E - aL]^2 - \Sigma^2 (U^r)^2 \right) - r^2. \quad (2.4)$$

2.2. Órbitas geodésicas en la Métrica de Kerr

Las órbitas en la métrica de Kerr satisfacen la ecuación de las geodésicas dada en la sección 1.2 [2], asimismo, las expresiones encontradas en (1.6) para las componentes de la cuadrivelocidad de una partícula, corresponden a trayectorias (u órbitas) que también satisfacen la ecuación de las geodésicas. Ahora en la métrica de Kerr se puede definir un potencial efectivo (V_{eff}), tal como es mencionado en [5]. Dicho potencial resulta de normalizar la cuadrivelocidad de una partícula, cuya trayectoria es geodésica, es decir, de $U_\mu U^\mu = g_{\mu\nu} U^\nu U^\mu = -1$ y de las expresiones dadas en (1.6) tenemos que

$$g_{tt}(U^t)^2 + 2g_{t\varphi}U^tU^\varphi + g_{rr}(U^r)^2 + g_{\theta\theta}(U^\theta)^2 + g_{\varphi\varphi}(U^\varphi)^2 = -1, \quad (2.5)$$

y con ello

$$-g_{rr}(U^r)^2 = g_{\theta\theta}(U^\theta)^2 + 1 - \left(\frac{E^2 g_{\varphi\varphi} + 2ELg_{t\varphi} + L^2 g_{tt}}{g_{t\varphi}^2 - g_{tt}g_{\varphi\varphi}} \right). \quad (2.6)$$

Por lo que podemos definir una expresión V_{eff} mediante la siguiente expresión.

$$V_{eff} \equiv g_{\theta\theta}(U^\theta)^2 + 1 - \left(\frac{E^2 g_{\varphi\varphi} + 2ELg_{t\varphi} + L^2 g_{tt}}{g_{t\varphi}^2 - g_{tt}g_{\varphi\varphi}} \right). \quad (2.7)$$

Cabe notar que $V_{eff} = V_{eff}(r, \theta, E, L, M, a)$, pero los parámetros M y a son propiedades del objeto masivo central, y con ello constantes. También se puede ver que E y L son el producto interior de cuadvectores, y por lo tanto invariantes de Lorentz.

Por otra parte también podemos definir un par de funciones en términos de la constante de Carter [8]. Al utilizar la ecuación (2.4) y despejar $\Sigma^2(U^r)^2$, podemos definir $V(r)$ como sigue

$$V(r) \equiv [(r^2 + a^2)E - aL]^2 - \Delta [(L - aE)^2 + Q + r^2]. \quad (2.8)$$

Ahora al sustituir la expresión para $\Sigma^2(U^r)^2$ dada por la anterior expresión en (2.6), y al despejar $\Sigma^2(U^\theta)^2$, podemos definir una función $\Theta(\theta)$ de la siguiente forma

$$\Theta(\theta) \equiv Q - \left[a^2(1 - E^2) + \frac{L^2}{\text{sen}^2\theta} \right] \cos^2\theta. \quad (2.9)$$

Además, al escribir de forma explícita U^t y U^φ , sustituyendo las expresiones de las componentes de la métrica de Kerr en (1.6), obtenemos las siguientes relaciones:

$$U^t = \frac{1}{\Delta\Sigma} \left([(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \text{sen}^2\theta] E - 2MarL \right), \quad (2.10)$$

$$U^\varphi = \frac{1}{\Delta\Sigma \text{sen}^2\theta} \left([2Marsen^2\theta] E + [\Delta - a^2 \text{sen}^2\theta] L \right). \quad (2.11)$$

De esta forma las ecuaciones (2.8), (2.9), (2.10) y (2.11) rigen la trayectoria geodésica de una partícula.

Dado que parte de este trabajo es analizar los fotones detectados provenientes de diferentes galaxias, podemos obtener las ecuaciones que rijan las trayectorias geodésicas seguidas por estos. Por lo que consideraremos el cuadvector de onda de los fotones, el cual, a diferencia de la cuadrivelocidad de una partícula masiva, este cumple que $k_\mu k^\mu = 0$, con $k^\alpha = (k^t, k^r, k^\theta, k^\varphi)$ el cuadvector para el momento de un fotón [2, 12].

Al normalizar el cuadrado de dicho cuadvector, k^α , tenemos de manera similar a la ecuación (2.5), que

$$g_{tt}(k^t)^2 + 2g_{t\varphi}k^t k^\varphi + g_{rr}(k^r)^2 + g_{\theta\theta}(k^\theta)^2 + g_{\varphi\varphi}(k^\varphi)^2 = 0. \quad (2.12)$$

Campos tensoriales de Killing y órbitas en la métrica de Kerr

2.2 Órbitas geodésicas en la Métrica de Kerr

De forma análoga a lo realizado para una partícula masiva, podemos obtener las componentes k^t y k^φ por medio de los vectores de Killing en (1.2) y (1.3). Así, tenemos un sistema de ecuaciones dado por

$$E_\gamma = -g_{\varphi t}k^\varphi - g_{tt}k^t, \quad L_\gamma = g_{t\varphi}k^t + g_{\varphi\varphi}k^\varphi.$$

Al resolver el sistema de ecuaciones para k^φ y k^t tenemos que

$$k^t = \frac{g_{\varphi\varphi}E_\gamma + g_{t\varphi}L_\gamma}{g_{t\varphi}^2 - g_{\varphi\varphi}g_{tt}}, \quad k^\varphi = -\frac{g_{t\varphi}E_\gamma + g_{tt}L_\gamma}{g_{t\varphi}^2 - g_{\varphi\varphi}g_{tt}}. \quad (2.13)$$

Ahora, al sustituir las ecuaciones anteriores en (2.12), podemos llegar a que

$$-g_{rr}(k^r)^2 = g_{\theta\theta}(k^\theta)^2 - \left(\frac{E_\gamma^2 g_{\varphi\varphi} + 2E_\gamma L_\gamma g_{t\varphi} + L_\gamma^2 g_{tt}}{g_{t\varphi}^2 - g_{tt}g_{\varphi\varphi}} \right). \quad (2.14)$$

También, podemos hacer uso de la constante de Carter, Q_γ , para poder determinar las cantidades correspondientes a $\Sigma^2(k^r)^2$, $\Sigma^2(k^\theta)^2$, k^t , k^φ (análogamente al análisis de una partícula masiva) y con ello, las ecuaciones geodésicas que regirán el movimiento de un fotón. Para ello podemos ver que dado $k_\mu k^\mu = g_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = 0$ y $C_\gamma = K_{\mu\nu}k^\mu k^\nu$, donde $K_{\mu\nu}$ está dado por la ecuación (2.1), tenemos que

$$C_\gamma = 2\Sigma(l_\mu k^\mu)(n_\nu k^\nu). \quad (2.15)$$

Dadas las expresiones para l^μ y n^μ en la sección 2.1, para $l_\mu k^\mu$ y $n_\nu k^\nu$ de forma análoga a partículas masivas obtenemos que

$$l_\mu k^\mu = -\frac{r^2 + a^2}{\Delta}E_\gamma + \frac{a}{\Delta}L_\gamma + g_{rr}k^r, \quad n_\mu k^\mu = -\frac{r^2 + a^2}{2\Sigma}E_\gamma + \frac{a}{2\Sigma}L_\gamma - \frac{\Delta}{2\Sigma}g_{rr}k^r.$$

Al sustituir las anteriores expresiones en la ecuación (2.15), obtenemos que

$$C_\gamma = \frac{1}{\Delta}([(r^2 + a^2)E_\gamma - aL_\gamma]^2 - \Sigma^2(k^r)^2). \quad (2.16)$$

Siendo ahora, la constante de Carter, Q_γ , para fotones, se puede llegar a que

$$C_\gamma = (L_\gamma - aE_\gamma)^2 + Q_\gamma = \frac{1}{\Delta}([(r^2 + a^2)E_\gamma - aL_\gamma]^2 - \Sigma^2(k^r)^2), \quad (2.17)$$

de la cual podemos despejar el valor de $\Sigma^2(k^r)^2$ obteniendo la siguiente expresión

$$\Sigma^2(k^r)^2 = [(r^2 + a^2)E_\gamma - aL_\gamma]^2 - \Delta((L_\gamma - aE_\gamma)^2 + Q_\gamma). \quad (2.18)$$

Al ser $k_\mu k^\mu = 0$, podemos tomar la ecuación (2.14) y sustituir la expresión para $\Sigma^2(k^r)^2$. Así, podemos despejar $\Sigma^2(k^\theta)^2$ para obtener que

$$\Sigma^2(k^\theta)^2 = Q_\gamma - \left[\frac{L_\gamma^2}{\text{sen}^2\theta} - a^2 E_\gamma^2 \right] \cos^2\theta. \quad (2.19)$$

Al sustituir los valores de las componentes de la métrica en (2.13) obtenemos que

$$k^t = \frac{1}{\Delta\Sigma} \left([(r^2 + a^2)^2 - a^2 \text{sen}^2\theta\Delta] E_\gamma - 2MarL_\gamma \right), \quad (2.20)$$

$$k^\varphi = \frac{1}{\Delta\Sigma \text{sen}^2\theta} \left[(2Mar \text{sen}^2\theta) E_\gamma + (\Delta - a^2 \text{sen}^2\theta) L_\gamma \right]. \quad (2.21)$$

De forma similar a una partícula masiva, las ecuaciones (2.18), (2.19), (2.20) y (2.21) son las ecuaciones que rigen el movimiento de los fotones en la métrica de Kerr.

Como ya hemos visto tenemos las ecuaciones que gobiernan el movimiento, tanto para partículas masivas como para fotones. Como nota, se tiene que tomar en cuenta la forma en la que se definen las cantidades E y L , para partículas masivas en movimiento. Las cuales están definidas en términos de las cantidades \bar{L} y \bar{E} , estas son correspondientes a las constantes definidas por los vectores de Killing, ya que $p^\alpha = mU^\alpha$ [2].

Por lo tanto, E y L corresponden a las constantes \bar{E} y \bar{L} por unidad de masa respectivamente, esto es, $m = 1$, lo cual es importante ya que el Sistema Natural de Unidades tiene como característica que, $G = c = \hbar = 1$.

Así, podemos “juntar” las ecuaciones para partículas masivas y fotones (que no poseen masa) y utilizar las ecuaciones obtenidas para realizar nuestro análisis.

2.3. Órbitas circulares para partículas masivas

Una vez realizado el anterior análisis. En esta sección veremos el tipo de trayectorias más simples e importantes, las cuales son órbitas circulares en el plano ecuatorial, ya que, como se verá, son un tipo de trayectorias geodésicas estables y acotadas. Estas cumplen que $r = cte.$ y $\theta = \pi/2$.

Podemos obtener las ecuaciones para órbitas circulares que necesitaremos para este análisis, por medio de la ecuación de las geodésicas, la cual está dada por

$$U^\mu \nabla_\mu U^\alpha = U^\mu \partial_\mu U^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha U^\mu U^\nu = 0$$

[12]. Al reescribir esta ecuación, dado que $U^\alpha = \dot{x}^\alpha = dx^\alpha/d\tau$, obtenemos la siguiente expresión

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0, \quad (2.22)$$

la cual describe un conjunto de ecuaciones para los distintos valores de α .

Para simplificar las expresiones, propondremos la cuadrivelocidad para una partícula en una órbita circular en el plano ecuatorial. Dicha cuadrivelocidad estará dada por $U^\alpha = (U^t, 0, 0, U^\varphi)$, ya que, $U^r = dr/d\tau = 0$ y $U^\theta = d\theta/d\tau = 0$.

Así, escribiendo los términos de la ecuación (2.22), tenemos que

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma_{tt}^\alpha (U^t)^2 + 2\Gamma_{t\varphi}^\alpha U^t U^\varphi + \Gamma_{\varphi\varphi}^\alpha (U^\varphi)^2 = 0. \quad (2.23)$$

Para deducir las expresiones de los símbolos de Christoffel, podemos usar la ecuación donde estos se expresan en función de las componentes de la métrica [2], la cual está dada de la siguiente forma

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \quad (2.24)$$

Podemos notar que la anterior expresión depende de las componentes de la métrica en su forma contravariante (o matriz inversa). Así, para la métrica de Kerr tenemos que

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 = g^{tt} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 + 2g^{t\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) + g^{r\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + g^{\theta\theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^2 + g^{\varphi\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^2, \quad (2.25)$$

[1], donde

$$g^{tt} = -\frac{1}{\Sigma\Delta} [(r^2 + a^2)^2 - a^2 \text{sen}^2\theta\Delta], \quad g^{t\varphi} = -\frac{2Mar}{\Sigma\Delta}, \quad g^{r\varphi} = \frac{\Delta}{\Sigma},$$

$$g^{\theta\theta} = \frac{1}{\Sigma}, \quad g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{\Sigma\Delta \text{sen}^2\theta} (\Delta - a^2 \text{sen}^2\theta).$$

Dado que la métrica es independiente de t y φ , al tomar en cuenta que, $g^{\mu\sigma}g_{\sigma\nu} = \delta_{\nu}^{\mu}$, donde dicha cantidad cumple lo siguiente: si $\mu = \nu$, $\delta_{\nu}^{\mu} = 1$ y si $\mu \neq \nu$, $\delta_{\nu}^{\mu} = 0$ [11]. De la expresión (2.24), se puede notar que, cuando $\alpha = r, \theta$, los símbolos de Christoffel para (2.23) son distintos de cero. Ahora utilizando la ecuación (2.23), obtenemos las siguientes expresiones para las componentes r y θ :

$$\ddot{x}^r + \Gamma_{tt}^r (U^t)^2 + 2\Gamma_{t\varphi}^r U^t U^\varphi + \Gamma_{\varphi\varphi}^r (U^\varphi)^2 = 0, \quad (2.26)$$

donde a partir de la definición (2.24), al sustituir las expresiones de la métrica en (1.1) y (2.25), obtenemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{tt}^r &= \frac{M\Delta}{\Sigma^3} (r^2 - a^2 \cos^2 \theta), & \Gamma_{t\varphi}^r &= \frac{\Delta}{\Sigma^3} M a \sin^2 \theta (a^2 \cos^2 \theta - r^2), \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -\frac{\Delta}{\Sigma} \sin^2 \theta \left[r + \frac{M a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma^2} (a^2 \cos^2 \theta - r^2) \right]; \end{aligned}$$

$$\ddot{x}^\theta + \Gamma_{tt}^\theta (U^t)^2 + 2\Gamma_{t\varphi}^\theta U^t U^\varphi + \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta (U^\varphi)^2 = 0, \quad (2.27)$$

donde

$$\begin{aligned} \Gamma_{tt}^\theta &= -\frac{2M a^2 r \sin \theta \cos \theta}{\Sigma^3}, & \Gamma_{t\varphi}^\theta &= \frac{2M a r}{\Sigma^3} (r^2 + a^2) \sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= -\frac{\sin \theta \cos \theta}{\Sigma^2} \left([(r^2 + a^2)^2 - a^2 \sin^2 \theta \Delta] + \frac{2M a^2 r \sin^2 \theta (r^2 + a^2)}{\Sigma} \right). \end{aligned}$$

Las expresiones anteriores están dadas para un r y θ fijos, ya que $U^\alpha = (U^t, 0, 0, U^\varphi)$. De esta forma eligiendo $r = cte.$ y $\theta = \pi/2$, tenemos que, $r = x^r = cte.$, $\ddot{r} = 0$ y $\theta = x^\theta = \pi/2$, $\dot{\theta} = 0$. Por consiguiente tenemos solo la siguiente expresión para (2.23)

$$\frac{M\Delta}{r^4} (U^t)^2 - 2\frac{M\Delta a}{r^4} U^t U^\varphi - \frac{\Delta}{r^4} (U^\varphi)^2 = 0, \quad (2.28)$$

ya que todos los símbolos de Christoffel para la expresión (2.27) tienen un factor de $\cos \theta$ el cual es igual a cero.

Ahora, al considerar la normalización de la cuadrivelocidad $U^\alpha = (U^t, 0, 0, U^\varphi)$, esto es, $U_\mu U^\mu = -1$, con $r = cte.$ y $\theta = \pi/2$ (órbitas circulares en el plano ecuatorial), obtenemos que

$$-\left[1 - \frac{2Mr}{r^2}\right] (U^t)^2 + 2\left[-\frac{2Mar}{r^2}\right] U^t U^\varphi + \left[r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2 r}{r^2}\right] (U^\varphi)^2 = -1. \quad (2.29)$$

Al resolver el sistema de ecuaciones dado por (2.28) y (2.29) para U^t y U^φ , podemos obtener que

$$U^\varphi = \frac{\pm M^{1/2}}{r^{3/4} (r^{3/2} - 3Mr^{1/2} \pm 2M^{1/2}a)^{1/2}}, \quad (2.30)$$

$$U^t = \frac{r^{3/2} \pm M^{1/2}a}{r^{3/4} (r^{3/2} - 3Mr^{1/2} \pm 2M^{1/2}a)^{1/2}}. \quad (2.31)$$

Debemos mencionar que para el análisis general, en el cual se toma en cuenta la constante de Carter, también se da cabida a las ecuaciones obtenidas anteriormente. Ya que para órbitas circulares en el plano ecuatorial ($\theta = \pi/2$ y $r = cte.$). Al tomar esto en cuenta para las expresiones en (2.10) y (2.11), tenemos que

$$U^t = \frac{(r^3 + a^2 r + 2Ma^2)E - 2MaL}{r(r^2 + a^2 - 2Mr)}, \quad (2.32)$$

$$U^\varphi = \frac{2MaE + (r - 2M)L}{r(r^2 + a^2 - 2Mr)}. \quad (2.33)$$

Mientras que las expresiones para E y L dadas por

$$E = \frac{r^{3/2} - 2Mr^{1/2} \pm aM^{1/2}}{r^{3/4}(r^{3/2} - 3Mr^{1/2} \pm 2M^{1/2}a)^{1/2}}, \quad (2.34)$$

$$L = \frac{\pm M^{1/2}(r^2 \mp 2aM^{1/2}r^{1/2} + a^2)}{r^{3/4}(r^{3/2} - 3Mr^{1/2} \pm 2M^{1/2}a)^{1/2}}, \quad (2.35)$$

son soluciones al sistema de ecuaciones generado por

$$V(r) = 0 \text{ y } V'(r) = 0,$$

con $V(r)$ dado en (2.8) y la constante de Carter (Q) es igual a cero (esto se puede ver en (2.9) para estas órbitas [1]). Las últimas dos expresiones para $V(r)$ son las condiciones para órbitas circulares y estables.

También se puede notar que esto es equivalente a lo establecido por el potencial V_{eff} dado por (2.7). Al fijar el valor de θ , tenemos $V_{eff} = V_{eff}(r)$, y al considerar que $dr/d\tau = U^r = 0$ para $r = cte.$ se encuentran órbitas estables circulares [5], bajo las siguientes condiciones

$$V_{eff}(r) = 0, \quad V'_{eff}(r) = 0.$$

Mediante este análisis general, para obtener las ecuaciones en (2.30) y (2.31), solo sustituimos las expresiones de E y L en (2.32) y (2.33) [1].

Cabe señalar que las expresiones dadas en (2.30) y (2.31), los signos arriba y abajo que acompañan a la constante a , corresponden a movimientos en corrotación y contrarrotación de los objetos orbitantes, dada la dirección de rotación del objeto masivo (agujero negro).

En el caso para L , al igual que U^φ en la ecuación (2.30), donde se muestran estos signos arriba y abajo en el factor de $M^{1/2}$, dichos signos hacen referencia al sentido de la rotación, en la dirección de φ .

Capítulo 3

Relaciones entre observables y propiedades de un agujero negro de Kerr

3.1. Emisión y detección de fotones (métrica de Kerr)

En esta sección se considerará el corrimiento de los fotones provenientes de otras galaxias, en el caso específico donde un observador sobre el plano ecuatorial no experimenta un alejamiento del sistema de interés. De esta forma deduciremos los corrimientos que registra dicho observador de fotones provenientes de fuentes de emisión conocidas como son los máseres de agua que orbitan ciertos núcleos galácticos [9], ya que se conoce su espectro.

Al conocerse su frecuencia de emisión en reposo, podemos medir los corrimientos al rojo y al azul que presentan dichos fotones, debido al movimiento de estos máseres alrededor de un agujero negro, en este caso considerando una métrica de Kerr.

Para un observador en movimiento, con cuadrivelocidad en el punto C dada por U_C^α , este medirá la frecuencia de un fotón, con un cuadvivector de onda $k^\mu = (k^t, k^r, k^\theta, k^\varphi)$, mediante la siguiente expresión,

$$\omega_C = -(k_\mu U^\mu)_C$$

[2]. Así, para los puntos de emisión y detección usaremos los subíndices (e) y (d) respectivamente. Ahora tomaremos la definición para el corrimiento (al rojo o al azul) dada por

$$1 + z \equiv \frac{\omega_e}{\omega_d} = \frac{[g_{tt}U^t k^t + g_{t\varphi}(U^t k^\varphi + U^\varphi k^t) + g_{rr}U^r k^r + g_{\theta\theta}U^\theta k^\theta + g_{\varphi\varphi}U^\varphi k^\varphi]_e}{[g_{tt}U^t k^t + g_{t\varphi}(U^t k^\varphi + U^\varphi k^t) + g_{rr}U^r k^r + g_{\theta\theta}U^\theta k^\theta + g_{\varphi\varphi}U^\varphi k^\varphi]_d}. \quad (3.1)$$

Aquí, podemos sustituir tanto las expresiones para U^t y U^φ , como las de k^t y k^φ , las cuales están dadas por las ecuaciones (1.6) y (2.13), obteniendo así la siguiente relación

$$1 + z = \frac{[Ek^t - Lk^\varphi - g_{rr}U^r k^r - g_{\theta\theta}U^\theta k^\theta]_e}{[Ek^t - Lk^\varphi - g_{rr}U^r k^r - g_{\theta\theta}U^\theta k^\theta]_d} = \frac{[E_\gamma U^t - L_\gamma U^\varphi - g_{rr}U^r k^r - g_{\theta\theta}U^\theta k^\theta]_e}{[E_\gamma U^t - L_\gamma U^\varphi - g_{rr}U^r k^r - g_{\theta\theta}U^\theta k^\theta]_d}. \quad (3.2)$$

Como hemos estado haciendo, para este caso supondremos que las órbitas de los objetos que emiten estos fotones, así como las de los observadores, son circulares en el plano ecuatorial. Por lo que $U^r = 0$ y $U^\theta = 0$, lo cual nos deja la siguiente expresión

$$1 + z = \frac{[E_\gamma U^t - L_\gamma U^\varphi]_e}{[E_\gamma U^t - L_\gamma U^\varphi]_d}. \quad (3.3)$$

Relaciones entre observables y propiedades de un agujero negro de Kerr
 3.1 Emisión y detección de fotones (métrica de Kerr)

Ahora introduciremos el parámetro de deflexión de la luz, b , el cual está dado para un punto C como sigue,

$$b_C \equiv [L_\gamma/E_\gamma]_C. \quad (3.4)$$

Cabe notar que, dada la definición del parámetro de deflexión de la luz, podemos reescribir la ecuación para el corrimiento en (3.3) de la siguiente forma

$$1 + z = \frac{E_{\gamma e} [U^t - bU^\varphi]_e}{E_{\gamma d} [U^t - bU^\varphi]_d}, \quad (3.5)$$

usando el hecho de que los fotones siguen trayectorias geodésicas, y que las cantidades E_γ y L_γ dadas en la sección 2.2 son cantidades conservadas a lo largo de todo el camino de los fotones. Notemos que la cantidad b , como está definida, se conserva a lo largo de la trayectoria del fotón, esto es, $b_e = b_d$, donde e y d son los puntos de emisión y detección [5], por lo que la expresión para el corrimiento total queda de la siguiente forma

$$1 + z = \frac{[U^t - bU^\varphi]_e}{[U^t - bU^\varphi]_d}. \quad (3.6)$$

Ahora fijaremos un punto c sobre el plano ecuatorial a una distancia r del agujero negro. Para encontrar la cantidad b_c consideraremos como un primer caso los fotones que se emiten en dicho punto con un cuadrivector de onda, $k^\mu = (k^t, k^r, 0, 0)$. Así, estos fotones se emiten sobre el plano ecuatorial, en la dirección radial del agujero negro.

De esta forma, podemos obtener el parámetro b_c , al considerar las expresiones para E_γ y L_γ , dadas en la sección 2.2. Para dichos fotones obtenemos que

$$b_c = -\frac{g_{t\varphi}}{g_{tt}}. \quad (3.7)$$

También, consideraremos los fotones emitidos en la dirección de φ , sobre el plano ecuatorial, cuyo cuadrivector de onda está dado de la siguiente forma $k^\mu = (k^t, 0, 0, k^\varphi)$. Cabe notar que la componente k^φ del cuadrivector es perpendicular al vector de posición de su fuente de emisión, la cual es medida con respecto al agujero negro. Para obtener el parámetro de deflexión de la luz, podemos usar las expresiones dadas en (2.12) y (2.13), donde se puede resolver una ecuación para b . Así, al usar la definición para b , obtenemos que

$$b_{1,2} = \frac{-g_{t\varphi} \pm \sqrt{g_{t\varphi}^2 - g_{tt}g_{\varphi\varphi}}}{g_{tt}}. \quad (3.8)$$

De esta forma podemos ver que $b(r)$ es un mapeo entre el parámetro de deflexión de la luz y el radio, donde r depende del vector de posición \mathbf{r} de los máseres detectados. Así, podemos notar que dicho mapeo para un punto dado, alcanza sus valores máximos donde los fotones son emitidos de forma perpendicular a la línea media (ver figura 3.1).

Ahora podemos sustituir las expresiones para las componentes de la métrica, en (3.7) y (3.8) para el caso donde se toma en cuenta que los fotones se emiten en el plano ecuatorial ($\theta = \pi/2$). Así, en las ecuaciones para b obtenemos las siguientes expresiones

$$b_c = -\frac{2Ma}{r - 2m}, \quad (3.9)$$

$$b_{1,2} = \frac{-2Ma \pm r\sqrt{r^2 + a^2 - 2Mr}}{r - 2M}. \quad (3.10)$$

Relaciones entre observables y propiedades de un agujero negro de Kerr

3.2 Corrimientos (al rojo o al azul) en términos de las propiedades de un agujero negro de Kerr

De las anteriores relaciones se puede notar que b_c es proporcional al parámetro a , con lo cual la expresión (3.9) contiene información sobre el arrastre debido a la rotación del agujero negro, además de un efecto gravitacional debido a la presencia de la masa del agujero negro.

También se puede ver que los dos valores obtenidos para $b_{1,2}$ están relacionados a objetos que se acercan o alejan de un observador lejano [5] .

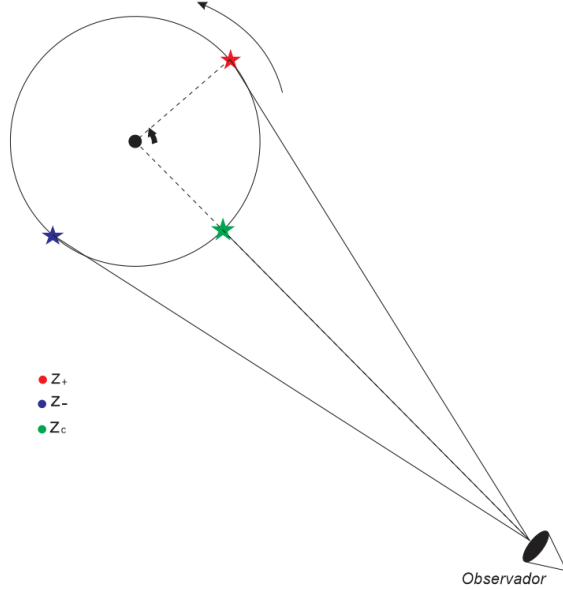


Figura 3.1: Se muestra el sistema con un observador muy lejano donde las cantidades z_+ y z_- corresponden a los corrimientos al rojo y al azul respectivamente, ya que los fotones emitidos en estos puntos son tangentes a la órbita. Por esta razón el corrimiento al rojo corresponde a objetos que se alejan, mientras que el corrimiento al azul corresponde a los objetos que se acercan. Esto se puede notar más claramente en las expresiones (3.20) y (3.21).

Con base en lo encontrado anteriormente, al reescribir $b_{1,2}$ como $b_{1,2} = b_c \pm |b_{\pm}|$, donde $|b_{\pm}|$ es el segundo término de $b_{1,2}$ en (3.8). Notamos que de manera general, el corrimiento dado en (3.6) estará dado de la siguiente forma

$$1 + z_{1,2} = \frac{[U^t - b_{1,2}U^\varphi]_e}{[U^t - b_{1,2}U^\varphi]_d} = \frac{[U^t - b_c U^\varphi]_e \pm [|b_{\mp}|U^\varphi]_e}{[U^t - b_c U^\varphi]_d \pm [|b_{\mp}|U^\varphi]_d}. \quad (3.11)$$

Por otra parte, usando el hecho de que $U^\alpha = dx^\alpha/d\tau$, podemos definir la cantidad $\Omega = U^\varphi/U^t$. Ahora tomando en cuenta las ecuaciones (2.30) y (2.31) tenemos que

$$\Omega_{\pm} = \frac{U^\varphi}{U^t} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\pm M^{1/2}}{r^{3/2} \pm M^{1/2}a}, \quad (3.12)$$

la cual es la velocidad angular de un objeto que orbita el agujero negro en una trayectoria circular en el plano ecuatorial.

3.2. Corrimientos (al rojo o al azul) en términos de las propiedades de un agujero negro de Kerr

Las galaxias registradas en el *Megamaser Cosmology Project*, son sistemas astrofísicos que en su mayoría tienen un núcleo galáctico activo (AGN por sus siglas en inglés), es decir, la radiación

Relaciones entre observables y propiedades de un agujero negro de Kerr
3.2 Corrimientos (al rojo o al azul) en términos de las propiedades de un agujero negro de Kerr

que podemos observar de ellas se debe principalmente a la materia en el disco de acreción, la cual es una región cercana al agujero negro de la galaxia.

En dichas galaxias se pudo identificar radiación proveniente de máseres (nubes) de agua, los cuales se encuentran orbitando en el disco de acreción del sistema. Al considerar que la frecuencia en reposo de estas “nubes” de agua es $22,23508\text{GHz}$ [7], se pueden medir los corrimientos al rojo y al azul de los fotones emitidos por estos objetos.

En esta sección nos encargaremos de encontrar las expresiones para los corrimientos al rojo y al azul, presentes en los fotones emitidos por los máseres de agua que orbitan el agujero negro. Estos corrimientos estarán dados en términos de las propiedades que posee dicho agujero negro.

Consideremos el caso mas simple, esto es, un observador sobre el plano ecuatorial que no experimenta alejamiento o acercamiento al sistema galáctico a una distancia r_d del agujero negro. Tenemos que para este observador la forma de su cuadrivelocidad está dada por $U^\mu = (U^t, 0, 0, U^\varphi)$, la cual es congruente para órbitas circulares en el plano ecuatorial.

Dado el anterior argumento, podemos usar las expresiones dadas en (2.30) y (2.31) notando así que $U^t \rightarrow 1$ y $U^\varphi \rightarrow 0$, cuando $r_d \rightarrow \infty$.

Por esta razón, la cuadrivelocidad de un observador muy lejano quedaría de la forma

$$U^\mu = (1, 0, 0, 0). \quad (3.13)$$

Ahora con este resultado en mano, podemos sustituir las expresiones de las componentes de la cuadrivelocidad para este observador en la relación (3.11). En este caso el observador es quien detecta los fotones emitidos por los máseres de agua, obteniendo así que el corrimiento total (al rojo o al azul) está dado por

$$1 + z_{1,2} = [U^t - b_c U^\varphi]_e \pm [|b_\mp| U^\varphi]_e. \quad (3.14)$$

De la anterior expresión, podemos notar que la contribución del corrimiento central, para este caso, está dada de la siguiente forma, $1 + z_c = [U^t - b_c U^\varphi]_e$. Por lo que podemos definir la cantidad z_\pm como sigue

$$z_\mp = \pm U_e^\varphi |b_\mp|_e. \quad (3.15)$$

Notemos aquí que el corrimiento central z_c nos provee información sobre el campo gravitacional, y z_\pm , nos aporta información debida al movimiento de las fuentes emisoras (máseres que se alejan o acercan al observador).

Con esta nueva variable introducida, notamos que para el corrimiento total $z_{1,2}$, se obtiene la siguiente relación

$$z_{1,2} - z_c = z_\pm. \quad (3.16)$$

Ahora, como siguiente paso, se deducirán las expresiones para z_c y z_\pm .

Para z_c podemos introducir la cantidad, Ω_\pm en (3.12). Así, obtenemos que

$$1 + z_c = (1 - b_{e_c} \Omega_{e_\pm}) U_e^t. \quad (3.17)$$

Al ser ecuaciones para fotones emitidos sobre el plano ecuatorial, podemos sustituir las expresiones en (2.31), (3.9) y (3.12) en la anterior ecuación para el radio r_e de una fuente emisora. De esta forma, obtenemos la siguiente expresión

$$1 + z_c = \frac{1 - 2\frac{M}{r_e} \pm \frac{a}{r_e} \sqrt{\frac{M}{r_e}}}{\left(1 - 2\frac{M}{r_e}\right) \sqrt{1 - 3\frac{M}{r_e} \pm 2\sqrt{\frac{M}{r_e} \frac{a}{r_e}}}}. \quad (3.18)$$

Por consiguiente se deducirá la ecuación para z_\pm . Dado el resultado en (3.15), al sustituir las expresiones correspondientes para órbitas en el plano ecuatorial, como se hizo anteriormente, podemos encontrar que z_\pm está dado por

$$z_\pm = (\pm) \frac{\sqrt{\frac{M}{r_e}} \sqrt{1 + \left(\frac{a}{r_e}\right)^2 - 2\frac{M}{r_e}}}{\left(1 - 2\frac{M}{r_e}\right) \sqrt{1 - 3\frac{M}{r_e} \pm 2\frac{a}{r_e} \sqrt{\frac{M}{r_e}}}}. \quad (3.19)$$

Relaciones entre observables y propiedades de un agujero negro de Kerr
3.2 Corrimientos (al rojo o al azul) en términos de las propiedades de un agujero negro de Kerr

Para las anteriores expresiones podemos asignar los corrimientos al rojo y al azul de la siguiente manera

$$z_{red} = z_c + z_+, \quad (3.20)$$

$$z_{blue} = z_c + z_-, \quad (3.21)$$

(ver figura 3.1).

Como podemos observar, las anteriores ecuaciones para los corrimientos están dadas en términos de los parámetros que definen al agujero negro. De esta forma, podemos determinar el corrimiento total (al azul o al rojo), medido por el observador, el cual está expresado en (3.16). Con esto se tendría una prueba para el régimen de campo fuerte de la hipótesis de Kerr. La cual nos dice que todos los agujeros negros estacionarios y axisimétricos en relatividad general están dados por la solución de Kerr.

Supongamos ahora que los valores más probables para M y r_0 (r_0 es la posición del agujero negro en los sistemas de referencia que toman los astrónomos) arrojados por un ajuste estadístico y reportados en [7, 10, 4] son “buenos ajustes”; además de considerar el caso más simple, donde un observador muy lejano no se mueve con respecto al sistema galáctico, podemos analizar los corrimientos dados en (3.20) y (3.21) para los datos registrados de las posiciones de los máseres conjuntamente con las estimaciones de M y r_0 obtenidas por los astrónomos, con ello notamos que las cotas inferior y superior del parámetro de rotación de Kerr, dadas por la relación, $0 \leq a \leq M$ (M es la masa del agujero negro), imponen a su vez cotas sobre estos corrimientos, es decir, les imponen un valor mínimo y un valor máximo para el caso corrotante y contrarrotante, de esta manera se puede verificar que para $z_{1,2}$:

- i)* Con $a = 0$, los corrimientos al rojo y al azul toman sus valores máximos para los casos de corrotación y contrarrotación respectivamente y sus valores mínimos en el caso contrario.
- ii)* Mientras que para $a = M$, los corrimientos al rojo y al azul toman sus valores máximos para los casos de contrarrotación y corrotación respectivamente y sus valores mínimos en el caso contrario.

De esta forma, se puede notar que las diferencias entre los corrimientos al considerar el parámetro de rotación $a = M$ y $a = 0$ para estos sistemas galácticos, es del orden de $\sim 10^{-5} \text{ km/s}$, para órbitas registradas cercanas al agujero negro.

Debemos notar que para este análisis se consideró que a posea su valor máximo lo cual puede o no ser cierto, ya que a puede tomar cualquier valor entre 0 y M , de este modo la contribución del corrimiento al considerar el parámetro de rotación de Kerr sería incluso más pequeña que lo antes encontrado.

Mientras tanto los detectores en la Tierra realizan mediciones del orden de hasta 10^3 km/s con una precisión de 1 km/s para discos de acreción con máseres de agua orbitando un agujero negro. De este modo el error asociado puede ser mucho más grande que las diferencias entre los corrimientos para $a = M$ y $a = 0$.

Por lo tanto, podemos concluir que cuando nuestros instrumentos de medición mejoren su precisión, tanto para medir los corrimientos como las posiciones de las fuentes emisoras, o puedan detectar nubes de agua (si es que las hay) que orbiten muy cerca del agujero negro, podremos tomar en cuenta los efectos del parámetro a .

Dado lo anterior, podemos notar que el corrimiento cuando $a = M$, corresponde prácticamente al corrimiento teórico $z_{1,2}|_{a=0}$.

Cabe mencionar que los corrimientos aquí expresados, están dados mediante la definición óptica, esto es, $z = v/c$, donde z es el corrimiento medido, v es su velocidad asociada, y c es la velocidad de la luz.

En el siguiente capítulo, se formulará un método para determinar algunos parámetros como M/D y r_0 de forma estadística, además de otros parámetros que se incluirán debido al modelo propuesto, que en este caso será el correspondiente a un agujero negro de Schwarzschild ($a = 0$).

Relaciones entre observables y propiedades de un agujero negro de Kerr
3.2 Corrimientos (al rojo o al azul) en términos de las propiedades de un agujero negro de Kerr

Al escribir los corrimientos para la métrica de Schwarzschild tenemos las siguientes expresiones:

$$1 + z_c = \frac{1}{\sqrt{1 - 3\frac{M}{r_e}}}, \quad (3.22)$$

$$z_{\pm} = (\pm) \frac{\sqrt{\frac{M}{r_e}}}{\sqrt{1 - 2\frac{M}{r_e}} \sqrt{1 - 3\frac{M}{r_e}}}. \quad (3.23)$$

Para el corrimiento total (al rojo o al azul) se considerará la expresión dada por la suma de estos corrimientos, es decir,

$$z_{1,2} = z_c + z_{\pm} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 3\frac{M}{r_e}}} - 1 \right) \pm \left(\frac{\sqrt{\frac{M}{r_e}}}{\sqrt{1 - 2\frac{M}{r_e}} \sqrt{1 - 3\frac{M}{r_e}}} \right).$$

Capítulo 4

Estimación de Parámetros

4.1. Modelando Sistemas astrofísicos galácticos del *Megamaser Cosmology Project*

Los sistemas reportados en el *Megamaser Cosmology Project*, en su mayoría están en flujo de Hubble, es decir, cada sistema está estrictamente a una distancia mayor a 30 Mpc [10], lo cual es importante, ya que las ecuaciones obtenidas para los corrimientos están dadas para un observador muy lejano, pero que a la vez no se mueve con respecto al sistema de estudio, esto no es del todo cierto. Por tal razón, tomaremos en cuenta el corrimiento debido al movimiento del sistema con respecto a un sistema de referencia estático, el cual es llamado en los artículos del *Megamaser Cosmology Project* como *local standard of rest* (LSR) sobre el que se realizan todas sus mediciones. Los corrimientos asociados al movimiento de recesión de la galaxia como un todo son debidos a la expansión del universo y al movimiento local de la propia galaxia [3]. Además se puede agregar la contribución de los corrimientos al rojo y al azul de objetos que orbitan un agujero negro, para este caso de Schwarzschild. Para el corrimiento debido a la expansión del universo solo consideraremos la velocidad asociada a este corrimiento, es decir, $v_{\text{cosm}} = z_{\text{cosm}} \cdot c$, donde v_{cosm} se tomará solo como un parámetro a estimar. Para el corrimiento debido al movimiento local de la galaxia se considerará la velocidad correspondiente al efecto Doppler v_0 , donde v_0 es la componente sobre la línea de visión de velocidad peculiar descrita en [3], la cual será otro parámetro a estimar.

También hay que notar que puede existir un ángulo de inclinación del disco, el cual es complementario al ángulo formado por el plano del disco de acreción y la línea de visión, siendo $i_0 = 90^\circ$ para los discos que están completamente de canto (ver figura 4.1), dicho ángulo de inclinación i_0 , es reportado para cada galaxia en los artículos del Megamaser Cosmology Project.

Notemos ahora que, en el caso donde el observador es muy lejano, para los corrimientos al rojo y al azul expresados en (3.20) y (3.21), se consideran objetos emisores de fotones (nubes de agua) que están sobre la línea media, es decir, la línea definida para el ángulo azimutal $\phi = \pm 90^\circ$, donde ϕ es medido en el plano del disco de acreción (ver figura 3.1). Sin embargo, para un sistema real no siempre los emisores de fotones están sobre la línea media por lo que consideraremos un ángulo de dispersión de los máseres σ_θ (el cual será propuesto en este modelo). Dado que dicho ángulo no puede ser medido, propondremos una distribución uniforme para los máseres dentro del área que subtiende el ángulo de dispersión sobre la línea media [6].

Para poder deducir los parámetros de interés, tenemos que reescribir la ecuaciones para los corrimientos dados en (3.22) y (3.23), las cuales están dadas en el Sistema Natural de Unidades. Por lo tanto, al reescribir estas ecuaciones en unidades del SI tenemos lo siguiente

$$1 + z_c = \sqrt{\frac{r_e}{r_e - \frac{3GM}{c^2}}}, \quad (4.1)$$

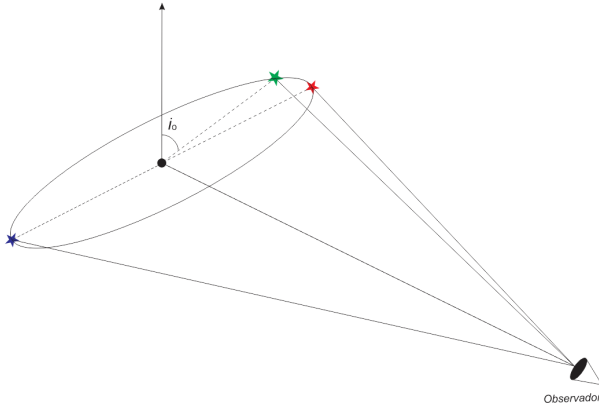


Figura 4.1: Se muestra una representación simple de como es medido el ángulo de inclinación del disco de acreción para un sistema astrofísico.

$$z_{\pm} = (\pm) \sqrt{\frac{\left(\frac{GM}{c^2}\right)r_e}{\left(r_e - \frac{2GM}{c^2}\right)\left(r_e - \frac{3GM}{c^2}\right)}}, \quad (4.2)$$

donde G es la constante de Gravitación Universal y c es la velocidad de la luz.

Los datos observacionales reportados, para las posiciones de los másers, están dados en miliarcosegundos (mas), por lo cual se deben escribir nuevamente, estas expresiones para usar los datos reportados.

Para ángulos muy pequeños podemos obtener la siguiente relación, $r_e = Dr_{\alpha}$, donde r_e es la distancia medida desde el agujero negro hasta el emisor de fotones (para este caso másers de agua). Así, r_{α} , es el arco medido en radianes y D la distancia al sistema en metros (m).

Con base en el argumento anterior, podemos reescribir las expresiones anteriores como

$$\begin{aligned} 1 + z_c &= \sqrt{\frac{\frac{r_e}{D}}{\frac{r_e}{D} - \frac{3GM}{Dc^2}}} \\ &= \sqrt{\frac{r_{\alpha}}{r_{\alpha} - \frac{3GM}{Dc^2}}}. \end{aligned}$$

De forma análoga a este procedimiento podemos obtener que

$$z_{\pm} = (\pm) \sqrt{\frac{\frac{GM}{c^2 D} r_{\alpha}}{\left(r_{\alpha} - \frac{2GM}{Dc^2}\right)\left(r_{\alpha} - \frac{3GM}{Dc^2}\right)}}.$$

Dadas las formas anteriores para los corrimientos, podemos multiplicar el numerador y el denominador dentro de la raíz por el factor de conversión de radianes a miliarcosegundos (β). Por ende podremos usar los datos directamente de las mediciones dadas por los astrónomos. Así, tenemos que

$$\begin{aligned} 1 + z_c &= \sqrt{\frac{\beta r_{\alpha}}{\beta r_{\alpha} - 3\beta \frac{GM}{Dc^2}}}, \\ z_{\pm} &= (\pm) \sqrt{\frac{\left(\beta \frac{GM}{c^2 D}\right)(\beta r_{\alpha})}{\left(\beta r_{\alpha} - 2\beta \frac{GM}{Dc^2}\right)\left(\beta r_{\alpha} - 3\beta \frac{GM}{Dc^2}\right)}}. \end{aligned}$$

Cabe notar que en estas expresiones el parámetro M/D a estimar, está dado en $10^7 M_{\odot}/Mpc$ por lo que se debe multiplicar este parámetro por el factor de conversión de $10^7 M_{\odot}/Mpc$ a kg/m (ε).

Así, con $\beta r_\alpha = r$ y $\alpha = \beta \frac{G}{c^2} \varepsilon$. Dadas las ecuaciones anteriores, para los corrimientos, se puede llegar a que

$$1 + z_c = \sqrt{\frac{r}{r - \frac{3\alpha M}{D}}},$$

$$z_\pm = (\pm) \sqrt{\frac{\frac{\alpha M}{D} r}{(r - \frac{2\alpha M}{D})(r - \frac{3\alpha M}{D})}},$$

donde α es el factor de conversión de ($10^7 M_\odot / Mpc$) a (mas).

De esta manera, r , es el arco medido en (mas) el cual estará dado por $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, donde x_0 y y_0 determinan la posición del agujero negro, los cuales también serán parámetros a estimar, así como v_0 y v_{cosm} .

Los parámetros para estas velocidades, estarán dados dentro del corrimiento debido al alejamiento del sistema (\bar{z}), el cual es conformado por los efectos debidos a la expansión del universo y al movimiento local de la galaxia [3]. De esta forma, que tenemos que

$$1 + \bar{z} = (1 + z_{cosm})(1 + z_D), \quad (4.3)$$

donde

$$1 + z_D = \left(1 + \frac{v_0}{c}\right) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}. \quad (4.4)$$

Ahora, tomando en cuenta la composición de los corrimientos para, \bar{z} y $z_{1,2}$. Tenemos la siguiente relación para el corrimiento total,

$$1 + z_{tot} = (1 + \bar{z})(1 + z_{1,2}) = (1 + z_{cosm})(1 + z_D)(1 + z_{1,2}), \quad (4.5)$$

donde $z_{1,2}$ es el corrimiento medido por un observador muy lejano al sistema estudiado, el cual no experimenta un alejamiento (o acercamiento) al sistema de interés. Este corrimiento total se debe a objetos emisores que rotan en torno a un agujero negro en la métrica de Schwarzschild.

Ahora, siendo z_\pm (dado dentro de $z_{1,2}$), el corrimiento que nos aporta información sobre el movimiento de los máseres alrededor del agujero negro, tomando en cuenta la inclinación del disco de acreción i_0 y el ángulo de dispersión de los máseres σ_θ , el cual se considerará pequeño [6], tenemos que

$$1 + z_{1,2} = (1 + z_c + \epsilon \sin(i_0) z_\pm), \quad (4.6)$$

donde

$$\epsilon \approx 1 - \frac{\sigma_\theta^2}{2} + \frac{\sigma_\theta^4}{24}. \quad (4.7)$$

Así, el corrimiento total medido estará dado de la siguiente forma

$$z_{tot} = (1 + z_{cosm})(1 + z_D)(1 + z_c + \epsilon \sin(i_0) z_\pm) - 1. \quad (4.8)$$

Para la elección de un sistema de referencia en los sistemas astrofísicos que vamos a estudiar se rotarán los datos usando el *position angle* (P.A.), siendo este el ángulo de inclinación del sistema, medido desde la línea vertical Norte-Sur en las observaciones realizadas por los astrónomos. Al rotar la posición de los máseres de agua nos deja el sistema sobre el eje horizontal.

El siguiente paso es elegir como origen en la dirección x , el promedio geométrico de los máseres sistémicos (máseres centrales) y como origen en la dirección y , el promedio geométrico de los máseres corridos al rojo y al azul. Este análisis es análogo al realizado en el artículo [7] para curvas de Kepler, el cual es solo un argumento geométrico (ver figura 4.1), ya que los objetos que rotan un objeto masivo están aproximadamente sobre el disco de acreción.

Aquí los errores asociados a las mediciones estarán propagados como se indica en [14], lo cual nos deja un nuevo conjunto de observaciones en un sistema de referencia que esta rotado y trasladado. Cabe recalcar que la forma en la que está dado este nuevo origen, no necesariamente implica que el objeto central masivo esté ubicado en el origen, pero si se puede inferir que esté en su proximidad. Notemos ahora que para los datos observados y registrados por los astrónomos, la cantidad de parámetros con sus respectivos errores a estimar dados por (4.8), son: M/D , x_0 , y_0 , v_0 y v_{cosm} . Este hecho nos obliga a realizar un análisis Bayesiano para obtener los valores de los parámetros más probables que se ajusten al modelo relativista general propuesto para estos sistemas usando un método de χ^2 .

4.2. Método de χ^2

Por lo establecido en la anterior sección y teniendo en cuenta que el corrimiento total está distribuido de forma gaussiana o normal, además de considerar cada medición independiente, podemos proponer un modelo de χ^2 [13] dado por

$$\chi^2 = \sum_k \frac{(x_k - \mu)^2}{\sigma_k^2}, \quad (4.9)$$

donde $\{x_k\}$ y $\{\sigma_k\}$ es el conjunto de datos observados y sus errores asociados, aquí μ será la propuesta teórica para estos sistemas.

En este trabajo consideraremos densidades de probabilidad a priori planas, por lo que el minimizar la función χ^2 es equivalente a maximizar la probabilidad dada $prob(\mu|\{x_k\}, \{\sigma_k\}) \propto exp\{-\frac{\chi^2}{2}\}$ [13].

En el caso de UGC3789, se considerará una densidad de probabilidad a priori plana para la velocidad peculiar dada por $151 \pm 200 \text{ km/s}$, debido a los resultados obtenidos en [10]. Para el mismo parámetro en el sistema ESO558-G009, al no tener información previa sobre la velocidad peculiar, se propondrá una densidad de probabilidad a priori plana dada por $0 \pm 400 \text{ km/s}$. Por otro lado, para resto de los parámetros se considerarán densidades de probabilidad a priori planas de tal forma que los datos reportados hasta ahora estén en sus respectivos intervalos, los cuales serán considerablemente grandes comparados con dichos datos reportados.

Para los corrimientos de alta velocidad (correspondientes a los máseres en $\phi = \pm 90^\circ$) tenemos que el modelo de χ^2 está dado de la siguiente manera

$$\chi_{red,blue}^2 = \sum_i \frac{[z_i - ((1 + z_c + \epsilon \sin(i_o) z_{\pm})(1 + z_D)(1 + z_{cosm}) - 1)]^2}{\sigma_{z_i}^2 + \frac{1}{2}(z_{\pm}(1 + z_{cosm})(1 + z_D))^2 \sigma_{\theta}^4}, \quad (4.10)$$

donde

$$\sigma_{z_i}^2 = \left(\frac{\epsilon \sin(i_o) z_{\pm}}{2(1 - 2\bar{M})} + \frac{3\bar{M}}{2}(1 + z_c + \epsilon \sin(i_o) z_{\pm})(1 + z_c)^2 \right)^2 \left(\frac{(1 + z_{cosm})(1 + z_D)}{r} \right)^2 \sigma_r^2,$$

siendo

$$\sigma_r^2 = \frac{(x - x_0)^2 \sigma_x^2 + (y - y_0)^2 \sigma_y^2}{r^2},$$

$$\bar{M} = \frac{(M/D)\alpha}{r},$$

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Aquí z_i está dado por la definición óptica, ya que los astrónomos reportan la velocidad asociada a este, es decir, $z_i = v_i/c$ (z_i es el corrimiento registrado por los astrónomos para el i -ésimo dato). Además, el error asociado a la medición del corrimiento va a estar inferido por los errores en las posiciones de los máseres, ya que solo tenemos registro de estos últimos.

Cabe notar que la expresión para χ^2 está dada para las mediciones realizadas por los astrónomos, esto es r y \bar{M} están dados en *mas* por la reescritura para $z_{1,2}$ dada previamente.

Por otro lado hay dos expresiones para la χ^2 , que corresponden a los corrimientos al rojo y al azul dados por z_1 y z_2 de manera análoga a las expresiones (3.20) y (3.21). Por lo tanto el modelo para los datos de los corrimientos al azul y al rojo estará dado por $\chi^2 = \chi_{red}^2 + \chi_{blue}^2$, donde χ_{red}^2 está definida para los datos de los corrimientos al rojo y χ_{blue}^2 para los datos de los corrimientos al azul. Al minimizar la función χ^2 con respecto a las variables a estimar, se obtienen sus valores más probables. Esto se lograría de forma analítica derivando esta función, igualándola a cero y calculando los valores más probables, así como su error asociado [13], con ello se determinaría las densidades de probabilidad a posteriori, dada la distribución gaussiana de observables. Sin embargo en la realidad no se pueden expresar de forma analítica los valores más probables de los parámetros a estimar, por la forma en que χ^2 está dada. Por consecuente se recurre al método computacional *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC) para minimizar dicha función.

Capítulo 5

Resultados y conclusiones

5.1. Resultados obtenidos

Se realizaron varias pruebas para los sistemas mencionados, al variar el ángulo de dispersión de los máseres incluyendo $\sigma_\theta = 0$, para ambos sistemas de acreción galácticos. La χ^2 reducida, dada por $\chi_\nu^2 = \chi^2/N$ (donde N es el número de grados de libertad del sistema) [13], es una medida de cuan buena es una estimación. Por la forma en la χ_ν^2 que está definida, se puede inferir que una estimación es buena cuando su valor es cercano a 1.

Se puede notar que una de las diferencias entre estos sistemas es que el ángulo de dispersión, ya que es menor para ESO558-G009 porque muestra un mejor ajuste a ángulos más pequeños, lo que significa que los máseres de este sistema están más cercanos a la línea media. Por otro lado para UGC3789 se requiere de ángulos más grandes para tener un buen ajuste, lo cual nos dice que los máseres de este sistema están más alejados de la línea media en comparación con ESO558-G009 (ver Tablas 5.1 y 5.2).

En ambos casos también podemos notar que la estimación en las velocidades v_0 y v_{cosm} se reflejan densidades de probabilidad a posteriori aproximadamente planas en cierto intervalo, por lo que podemos observar que no hay la suficiente información para establecer una forma concreta para estimar estos parámetros.

Además también notamos que para los parámetros M/D , x_0 , y_0 , se obtuvieron densidades de probabilidad a posteriori gaussianas (ver figuras 5.1 y 5.2) por lo que se pueden considerar buenas estimaciones para estos parámetros, notando también que se definieron adecuadamente sus regiones de confianza.

Cabe mencionar que dichas regiones de confianza y las densidades de probabilidad a posteriori de cada sistema fueron similares para los diferentes ángulos utilizados en las estimaciones.

■ *UGC3789*

UGC3789 es un sistema a una distancia de 49,9 *Mpc* y una masa del objeto masivo central reportada de $1,16 \pm 0,12 \times 10^7 M_\odot$ [10] de este modo podemos inferir el parámetro $M/D = 0,02324 \pm 0,0024 \times 10^7 M_\odot/Mpc$ con una χ^2 reducida, $\chi_\nu^2 = 1,50$ para las estimaciones realizadas por estos astrónomos, por lo que podemos observar que se obtuvieron resultados distintos a la formulación de Relatividad General.

Además también se obtuvo un error para la M/D de hasta 2 órdenes de magnitud menor para $\chi_\nu^2 \approx 1$ (ver tabla 5.1) en este trabajo.

Resultados y conclusiones
5.1 Resultados obtenidos

σ_θ ($^\circ$)	$\frac{M}{D}$ ($10^7 M_\odot/\text{Mpc}$)	x_0 (mas)	y_0 (mas)	v_0 (km/s)	v_{cosm} (km/s)	χ_ν^2
0	$0,02204^{+2,075 \cdot 10^{-5}}_{-2,086 \cdot 10^{-5}}$	$0,04865^{+0,001}_{-0,001}$	$-0,00598^{+0,007}_{-0,006}$	$149,33^{+137,22}_{-134,89}$	$3129,52^{+136,22}_{-138,64}$	16,23
5	$0,02221^{+3,852 \cdot 10^{-5}}_{-3,814 \cdot 10^{-5}}$	$0,04845^{+0,002}_{-0,002}$	$-0,01136^{+0,011}_{-0,011}$	$151,48^{+134,38}_{-137,01}$	$3127,69^{+138,48}_{-135,87}$	6,51
6	$0,02230^{+5,074 \cdot 10^{-5}}_{-5,036 \cdot 10^{-5}}$	$0,04873^{+0,003}_{-0,003}$	$-0,01246^{+0,014}_{-0,014}$	$147,15^{+137,37}_{-133,17}$	$3132,34^{+134,42}_{-138,96}$	4,13
7	$0,02241^{+6,498 \cdot 10^{-5}}_{-6,324 \cdot 10^{-5}}$	$0,04899^{+0,004}_{-0,004}$	$-0,01246^{+0,018}_{-0,018}$	$151,46^{+135,04}_{-136,99}$	$3128,08^{+138,28}_{-136,53}$	2,61
8	$0,02252^{+8,276 \cdot 10^{-5}}_{-7,928 \cdot 10^{-5}}$	$0,04892^{+0,005}_{-0,005}$	$-0,01174^{+0,023}_{-0,022}$	$150,55^{+134,88}_{-137,59}$	$3128,58^{+139,38}_{-136,04}$	1,68
9	$0,02265^{+1,018 \cdot 10^{-4}}_{-1,006 \cdot 10^{-4}}$	$0,04906^{+0,006}_{-0,006}$	$-0,01039^{+0,028}_{-0,027}$	$151,84^{+136,26}_{-137,20}$	$3127,52^{+138,61}_{-137,86}$	1,11

Tabla 5.1: Se muestran las estimaciones realizadas para el sistema **UGC3789** al variar el ángulo de dispersión de los máseres.

■ *ESO558-G009*

Para este sistema se tienen registradas una distancia de $107,6 \pm 5,9 \text{ Mpc}$ y una masa del objeto central de $M = 1,7 \pm 0,1 \times 10^7 M_\odot$ [4]. De esta forma, podemos deducir que $M/D = 0,0157 \pm 0,0012 \times 10^7 M_\odot/\text{Mpc}$. Así, notamos que al igual que UGC3789, hay una diferencia en el error, ya que para todos los ángulos de dispersión de los máseres de este sistema, el error en la masa es al menos un orden de magnitud más chico en el análisis realizado en este trabajo (ver tabla 5.2).

Además, los astrónomos registran una $\chi_\nu^2 = 1,28$ la cual es un poco mayor a la mejor estimación dada aquí, la cual tiene un valor de $\chi_\nu^2 = 1,05$.

σ_θ ($^\circ$)	$\frac{M}{D}$ ($10^7 M_\odot/\text{Mpc}$)	x_0 (mas)	y_0 (mas)	v_0 (km/s)	v_{cosm} (km/s)	χ_ν^2
0	$0,01570^{+0,00025}_{-0,00026}$	$0,07417^{+0,037}_{-0,038}$	$0,08929^{+0,043}_{-0,045}$	$-3,992^{+270,28}_{-264,41}$	$7618,30^{+271,06}_{-278,18}$	1,31
5	$0,01582^{+0,00025}_{-0,00025}$	$0,06866^{+0,038}_{-0,040}$	$0,08540^{+0,044}_{-0,048}$	$1,802^{+272,05}_{-272,71}$	$7609,70^{+279,76}_{-279,30}$	1,26
6	$0,01589^{+0,00025}_{-0,00026}$	$0,06251^{+0,042}_{-0,042}$	$0,08189^{+0,045}_{-0,050}$	$4,674^{+268,06}_{-271,58}$	$7604,67^{+279,11}_{-274,50}$	1,21
7	$0,01596^{+0,00024}_{-0,00024}$	$0,05518^{+0,043}_{-0,045}$	$0,07462^{+0,048}_{-0,056}$	$-7,973^{+271,70}_{-267,47}$	$7614,75^{+274,22}_{-280,31}$	1,14
8	$0,01603^{+0,00024}_{-0,00024}$	$0,04390^{+0,047}_{-0,048}$	$0,06440^{+0,052}_{-0,061}$	$3,379^{+272,01}_{-270,75}$	$7598,43^{+278,02}_{-278,42}$	1,05

Tabla 5.2: Se muestran las estimaciones realizadas para el sistema **ESO558-G009** al variar el ángulo de dispersión de los máseres.

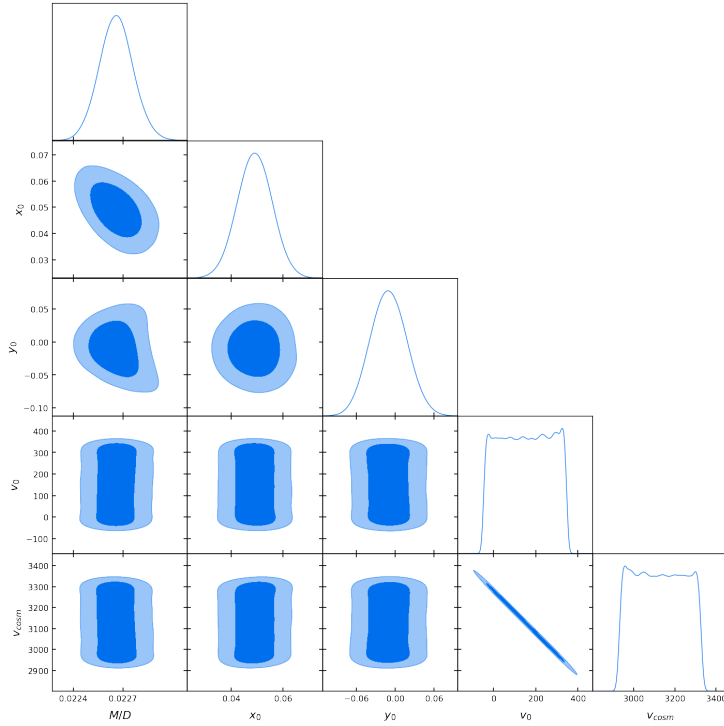


Figura 5.1: Se muestran las distribuciones a posteriori del análisis Bayesiano para el sistema **UGC3789** con un ángulo de dispersión de los máseres $\sigma_\theta = 9^\circ$.

5.2. Conclusiones

De este trabajo se puede concluir que las observaciones por nuestros instrumentos actualmente (al menos para UGC3789 y ESO558-G009) no tienen la precisión necesaria para detectar efectos del corrimiento debido al parámetro de rotación de Kerr. Esto debido a que al realizar pruebas con los datos obtenidos podemos deducir que nuestros instrumentos deben mejorar su precisión en al menos un orden de magnitud para los corrimientos detectados y con ello los efectos debidos al corrimiento gravitacional z_c de Schwarzschild en estos sistemas. Además de mejorar la precisión en la posición de las fuentes de emisión ya que el error asociado al corrimiento es propagado mediante el modelo establecido y con el hecho de que solo conocemos errores en las posiciones resultando que el error es mayor a la contribución del corrimiento z_c .

También un aspecto a resaltar de este método es la precisión en los parámetros obtenidos para el agujero negro central de cada sistema con respecto a los resultados obtenidos por los astrónomos con un método kepleriano, ya que los valores para M/D aquí presentados mejoran la precisión en al menos un orden de magnitud.

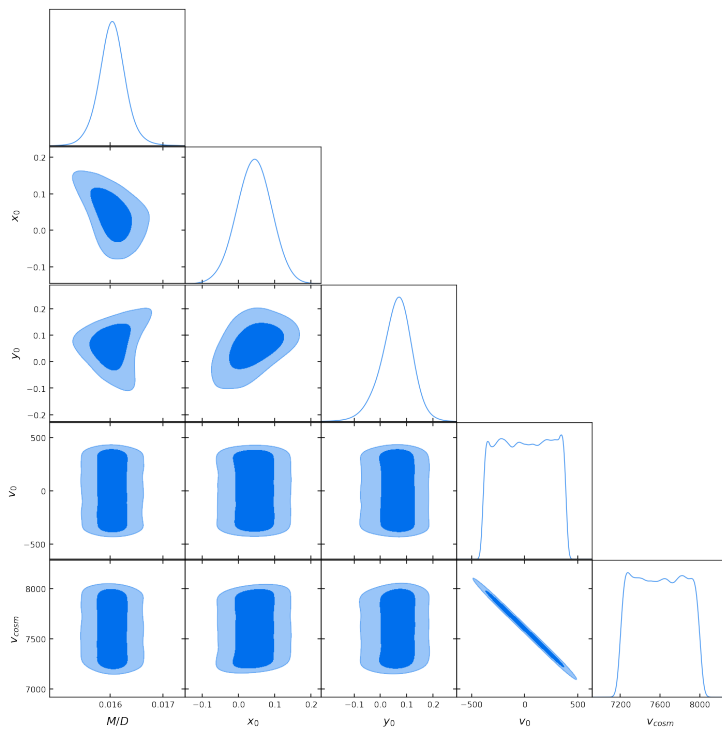


Figura 5.2: Se muestran las distribuciones a posteriori del análisis Bayesiano para el sistema **ESO558-G009** con un ángulo de dispersión de los maseros $\sigma_\theta = 8^\circ$.

Bibliografía

- [1] James M. Bardeen, William H. Press, and Saul A. Teukolsky. Rotating black holes: Locally nonrotating frames, energy extraction, and scalar synchrotron radiation. *The Astrophysical Journal*, 178, dec 1972.
- [2] Sean M. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press, 2019.
- [3] Tamara Davis and Morag Scrimgeour. Deriving accurate peculiar velocities (even at high redshift). *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 442, jun 2014.
- [4] F. Gao, J. A. Braatz, M. J. Reid, J. J. Condon, J. E. Greene, C. Henkel, C. M. V. Impellizzeri, K. Y. Lo, C. Y. Kuo, D. W. Pesce, J. Wagner, and W. Zhao. THE MEGAMASER COSMOLOGY PROJECT. IX. BLACK HOLE MASSES FOR THREE MASER GALAXIES. *The Astrophysical Journal*, 834, dec 2016.
- [5] Alfredo Herrera-Aguilar and Ulises Nucamendi. Kerr black hole parameters in terms of the redshift/blueshift of photons emitted by geodesic particles. *Physical Review D*, 92, aug 2015.
- [6] J. R. Herrnstein, J. M. Moran, L. J. Greenhill, and Adam S. Trotter. The geometry of and mass accretion rate through the maser accretion disk in NGC 4258. *The Astrophysical Journal*, 629, aug 2005.
- [7] C. Y. Kuo, J. A. Braatz, J. J. Condon, C. M. V. Impellizzeri, K. Y. Lo, I. Zaw, M. Schenker, C. Henkel, M. J. Reid, and J. E. Greene. THE MEGAMASER COSMOLOGY PROJECT. III. ACCURATE MASSES OF SEVEN SUPERMASSIVE BLACK HOLES IN ACTIVE GALAXIES WITH CIRCUMNUCLEAR MEGAMASER DISKS. *The Astrophysical Journal*, 727, dec 2010.
- [8] Brandon Carter. Global Structure of the Kerr Family of Gravitational Fields. *Physical Review*, 174, oct 1968.
- [9] M. J. Reid, J. A. Braatz, J. J. Condon, L. J. Greenhill, C. Henkel, and K. Y. Lo. The megamaser cosmology project. i. very long baseline interferometric observations of UGC 3789. *The Astrophysical Journal*, 695, mar 2009.
- [10] M. J. Reid, J. A. Braatz, J. J. Condon, K. Y. Lo, C. Y. Kuo, C. M. V. Impellizzeri, and C. Henkel. THE MEGAMASER COSMOLOGY PROJECT. IV. a DIRECT MEASUREMENT OF THE HUBBLE CONSTANT FROM UGC 3789. *The Astrophysical Journal*, 767, apr 2013.
- [11] W. Rindler. *Relativity: Special, General, and Cosmological*. OUP Oxford, 2006.
- [12] Bernard Schutz. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, 2009.
- [13] D. Sivia and J. Skilling. *Data Analysis: A Bayesian Tutorial*. OUP Oxford, 2006.
- [14] J.R. Taylor. *An Introduction to Error Analysis: The Study of Uncertainties in Physical Measurements*. University Science Books, 1997.