

# BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS  
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

**FIBRACIONES EN LA CATEGORÍA MAP-TOP**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
**MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**

PRESENTA  
**Jorge Aguilar Guzmán**

DIRECTOR DE TESIS  
**Dr. Alexander Bykov**

PUEBLA, PUE. DICIEMBRE DE 2017





**DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR**  
**SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y**  
**ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP**  
**P R E S E N T E:**

Por este medio le informo que el(la) C:

**JORGE AGUILAR GUZMÁN**

estudiante de la Maestría en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 24 de noviembre de 2017, con la tesis titulada:

*Fibraciones en la categoría Map-Top*

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

**A T E N T A M E N T E.**  
H. Puebla de Z. a 24 de noviembre de 2017

**DR. FERNANDO MACÍAS ROMERO**  
**COORDINADOR DEL POSGRADO**  
**EN MATEMÁTICAS.**





A mis padres Jorge y Filiberta



## Agradecimientos

En primer lugar, agradezco a mis padres Jorge y Filiberta por todo su apoyo y cariño. A mi hermana María del Carmen por siempre motivarme a lograr cosas trascendentales. A mis hermanas Elvia y Marcela por todo su afecto.

En segundo lugar, agradezco al Dr. Alexander Bykov por confiar en mí para la realización de esta tesis y por el tiempo dedicado a resolver las dudas que surgieron durante su elaboración.

Muchas gracias a los profesores: Dr. Oleg Okunev, Dr. Raúl Escobedo Conde, Dr. Fernando Macías Romero y Dr. David Herrera Carrasco, por aceptar tan amablemente ser miembros de mi jurado. Agradezco sus valiosas observaciones al presente trabajo.

Por último, agradezco al Consejo de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico durante la maestría.





---

## *Introducción*

---

El concepto de fibración desempeña un rol muy importante en Topología algebraica, específicamente en la teoría de homotopías. Surgió en el estudio de haces localmente triviales, los cuales poseen una característica de gran relevancia: la propiedad de levantamiento de homotopías (PLH). En realidad, una fibración de Hurewicz es una función continua que tiene la PLH. Cabe mencionar que el concepto dual, llamado cofibración, involucra la propiedad de extensión de homotopías (PEH).

El matemático D. G. Quillen a mediados del siglo pasado, en su obra *Homotopical algebra*, mostró que es posible desarrollar una teoría homotópica en una categoría  $\mathcal{C}$  si se localizan tres familias de morfismos: fibraciones, cofibraciones y equivalencias homotópicas. Además, tales morfismos deben satisfacer los llamados axiomas de Quillen.

Un axioma de nuestro interés es el siguiente: un morfismo  $p : E \rightarrow B$  es una fibración si para cada cofibración trivial (cofibración y equivalencia homotópica)  $s : A \rightarrow X$  y cada diagrama conmutativo en  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & E \\ s \downarrow & \nearrow G & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{F} & B, \end{array}$$

existe un relleno  $G : X \rightarrow E$ , es decir,  $G$  hace conmutativo el diagrama anterior. Es importante remarcar que el matemático noruego A. Strom demostró que este axioma se cumple en la categoría  $TOP$  (véase [6, teorema 3]), donde los conceptos de fibración, cofibración y equivalencia homotópica son en el sentido usual.

El anterior axioma motiva las definiciones de  $\Sigma$ -fibración y objeto  $\Sigma$ -fibrante a partir de una colección de  $\mathcal{C}$ -morfismos  $\Sigma$ . Desde luego,  $\Sigma$  debe satisfacer ciertas condiciones para obtener resultados consistentes e interesantes.

El objetivo general de la tesis es describir varias  $\Sigma$ -fibraciones en las categorías  $TOP$  o  $\mathcal{M}$ , donde  $\mathcal{M}$  representa la categoría de espacios topológicos

metrizables y funciones continuas, usando diferentes familias  $\Sigma$ . Posteriormente, a partir de  $\Sigma$ , definiremos ciertas colecciones de morfismos  $\widehat{\Sigma}$  en  $Map-TOP$  o  $Map-\mathcal{M}$  e investigaremos posibles relaciones entre objeto  $\widehat{\Sigma}$ -fibrante y  $\Sigma$ -fibración.

Nuestros objetivos particulares son enunciados a continuación.

1. Estudiar las relaciones entre diferentes  $\Sigma$ -fibraciones para las familias:  $\Sigma = \{Cl\}$ , la familia de todos los encajes cerrados  $A \hookrightarrow X$ ;  $\Sigma = \{\partial^0\}$ , la familia de todos los encajes de la forma  $X \times \{0\} \hookrightarrow X \times [0, 1]$ ;  $\Sigma = SDR$ , la familia de todos los encajes cerrados  $s : A \hookrightarrow X$  tal que  $s(A)$  es un retracto por deformación fuerte de  $X$  y  $\Sigma = SSDR$ .
2. Probar los teoremas de factorización en  $TOP$  y  $Map-TOP$  bajo ciertas condiciones adicionales sobre  $\Sigma$ .
3. Caracterizar las fibraciones regulares usando la teoría desarrollada en  $Map-TOP$ .

En el capítulo 1 presentamos algunas definiciones y resultados importantes que usaremos a lo largo de toda la tesis. En la sección 1.1 enunciamos los problemas de levantamiento y extensión y analizamos la forma de solucionarlos mediante los conceptos: morfismos de funtores y morfismos de funtores adjuntos. En la sección 1.2 introducimos los espacios  $AE$ ,  $ANE$ ,  $AR$  y  $ANR$  para una clase débilmente hereditaria  $\mathcal{C}$ , sin embargo, nuestro interés se centra sólomente en la clase de los espacios metrizables pues en ella los anteriores conceptos son equivalentes. Además, sobresalen los teoremas de extensión de Dugundji y de encaje de Kuratowski-Wojdyslawski, este último nos permitirá demostrar que todo espacio métrico puede ser encajado, como subconjunto cerrado, en un espacio  $AE$ .

En el capítulo 2 definimos los conceptos de  $\Sigma$ -fibración y objeto  $\Sigma$ -fibrante. Posteriormente, proporcionamos algunos ejemplos de colecciones  $\Sigma$  con la finalidad de obtener diferentes tipos de  $\Sigma$ -fibraciones y objetos  $\Sigma$ -fibrantes, digamos: fibraciones fuertes, fibraciones regulares, fibraciones de Hurewicz, espacios  $AE$ , espacios fibrantes (en el sentido de Cathey), entre otros. En las secciones restantes probamos las siguientes implicaciones:

$$\text{fibración fuerte} \Rightarrow \text{fibración regular} \Rightarrow \text{fibración de Hurewicz},$$

y

$$\text{fibración de Hurewicz entre espacios fibrantes} \Rightarrow \text{fibración fuerte}.$$

En la sección 2.3 introducimos la noción de familia cerrada bajo extensiones cilíndricas y probamos que  $SDR$  y  $SSDR$  lo son. La importancia de este tipo de colecciones radica en que nos permitirán probar el teorema de factorización

en la categoría  $TOP$  (sección 2.4).

El capítulo 3 es la parte central de esta tesis. Dada una familia  $\Sigma$  en  $TOP$ , definimos las familias de morfismos en  $Map-TOP$ :

$$\mathfrak{F} = \{(s, id) : s \in \Sigma\} \text{ y } \widehat{\Sigma} = \{(s, s') : s, s' \in \Sigma\}.$$

La importancia de estas familias es la caracterización lograda de las  $\mathfrak{F}$ -fibraciones y  $\widehat{\Sigma}$ -fibraciones mediante el concepto de cuadrado  $\Sigma$ -fibrado. Además, es relevante remarcar que podemos adaptar el concepto de retracto por deformación fuerte a la categoría  $Map-\mathcal{M}$  y por ende es posible definir una nueva familia de morfismos denotada por  $SDR_{Map-\mathcal{M}}$ . En la sección 4.8 presentamos la correspondiente versión del teorema de factorización.

Finalmente, en el capítulo 4 sobresale la caracterización de una fibración regular local a través de la noción de  $AE$ -cuadrado (teorema 4.2). La importancia de este hecho se centra en una prueba alternativa del teorema 4.4, el cual afirma, a grandes rasgos, que si una función continua es fibración regular local entonces es fibración regular.



---

# *Índice general*

---

<b>Introducción</b>	<b>5</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>11</b>
1.1. Los problemas de levantamiento y extensión en $\mathcal{C}$ . . . . .	13
1.1.1. Morfismos de funtores . . . . .	14
1.1.2. Morfismos de funtores adjuntos . . . . .	17
1.2. Espacios $AR$ y $AE$ . . . . .	19
1.2.1. Teorema de extensión de Dugundji . . . . .	20
1.2.2. Teorema de encaje de Kuratowski-Wojdyslawski . . . . .	23
<b>2. <math>\Sigma</math>-fibraciones y objetos <math>\Sigma</math>-fibrantes</b>	<b>27</b>
2.1. Resultados básicos . . . . .	28
2.2. Ejemplos de familias $\Sigma$ . . . . .	30
2.2.1. Fibraciones de Hurewicz . . . . .	30
2.2.2. La familia de todos los encajes cerrados . . . . .	31
2.2.3. Fibraciones regulares . . . . .	31
2.2.4. La familia de retracts por deformación fuerte . . . . .	31
2.2.5. Fibraciones fuertes y espacios fibrantes (en el sentido de Cathey) . . . . .	35
2.3. Familias cerradas bajo extensiones cilíndricas . . . . .	40
2.4. El teorema de factorización en $TOP$ . . . . .	47
<b>3. <math>\Sigma</math>-fibraciones en <math>Map-TOP</math></b>	<b>53</b>
3.1. Las familias $\mathfrak{F}$ y $\hat{\Sigma}$ . . . . .	53
3.1.1. $\mathfrak{F}$ -fibraciones . . . . .	54
3.1.2. $\hat{\Sigma}$ -fibraciones . . . . .	60
3.2. La familia de retracts por deformación fuerte en $Map-\mathcal{M}$ . . . . .	64
3.3. Teorema de factorización en $Map-TOP$ . . . . .	65
<b>4. Aplicaciones</b>	<b>75</b>

10

*ÍNDICE GENERAL*

**Conclusiones**

**83**

# Capítulo 1

---

## Preliminares

---

En esta sección proporcionamos algunas definiciones y resultados básicos que usaremos en los capítulos restantes. En primer lugar, analizamos los problemas de levantamiento y extensión en la categoría  $\mathcal{C}$  e introducimos otros conceptos categóricos que serán de gran ayuda. Posteriormente, presentamos los conceptos de espacios  $AR$  y  $AE$ .

Sea  $\mathcal{C}$  una categoría y consideremos los  $\mathcal{C}$ -objetos  $A, B$ . El conjunto  $\mathcal{C}(A, B)$  denota a todos los  $\mathcal{C}$ -morfismos de  $A$  en  $B$ , mientras que  $id_A$  representa el morfismo identidad de  $A$ . Por último,  $I$  denota el subconjunto  $[0, 1]$  de  $\mathbb{R}$ .

**Definición 1.1.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría. La categoría de morfismos de  $\mathcal{C}$ , denotada por  $Map\text{-}\mathcal{C}$ , está definida de la siguiente manera:

- Los objetos de  $Map\text{-}\mathcal{C}$  son  $\mathcal{C}$ -morfismos.
- Dados dos objetos  $p' : E' \rightarrow B'$  y  $p : E \rightarrow B$  de  $Map\text{-}\mathcal{C}$ , un morfismo  $p' \rightarrow p$  de  $Map\text{-}\mathcal{C}$  es un par  $(f', f)$  de  $\mathcal{C}$ -morfismos,  $f' : E' \rightarrow E$  y  $f : B' \rightarrow B$ , tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{f'} & E \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

es conmutativo.

**Definición 1.2.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría y consideremos los  $\mathcal{C}$ -morfismos  $f :$

$X \longrightarrow Y$  y  $g : Z \longrightarrow Y$ . Un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{v} & Z \\ u \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

se llama **pullback para  $f$  y  $g$**  si para cada par de  $\mathcal{C}$ -morfismos  $v' : P' \rightarrow Z$  y  $u' : P' \rightarrow X$  tal que  $f \circ u' = g \circ v'$ , existe un único  $\mathcal{C}$ -morfismo  $q : P' \rightarrow P$  tal que  $u \circ q = u'$  y  $v \circ q = v'$ , es decir, el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} P' & & & & \\ & \searrow q & & & \\ & & P & \xrightarrow{v} & Z \\ & & u \downarrow & & \downarrow g \\ & & X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \swarrow u' & & & \end{array}$$

conmuta.

Usualmente diremos que  $P$  es el pullback de la terna  $X \xrightarrow{f} Y \xleftarrow{g} Z$ . Además, cabe mencionar que en cualquier categoría  $\mathcal{C}$  el pullback de dos  $\mathcal{C}$ -morfismos es único hasta  $\mathcal{C}$ -isomorfismo.

En el caso de la categoría  $TOP$  existe una construcción explícita. Sean  $f : B \longrightarrow A$  y  $g : C \longrightarrow A$  dos morfismos en  $TOP$ , el siguiente diagrama conmutativo es el pullback para  $f$  y  $g$ :

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\pi_1} & C \\ \pi_2 \downarrow & & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{f} & A, \end{array}$$

donde  $P = \{(c, b) \in C \times B \mid g(c) = f(b)\}$  y  $\pi_1, \pi_2$  son las correspondientes proyecciones canónicas.

Respecto a la categoría de morfismos de  $\mathcal{C}$ , sean  $p : E \longrightarrow B$  y  $q : E' \longrightarrow B'$  objetos de  $Map\text{-}\mathcal{C}$ . Consideremos las funciones

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(E, q) & : \mathcal{C}(E, E') \longrightarrow \mathcal{C}(E, B') \text{ y} \\ \mathcal{C}(p, B') & : \mathcal{C}(B, B') \longrightarrow \mathcal{C}(E, B'), \end{aligned}$$

definidas por  $\mathcal{C}(E, q)(h) = q \circ h$  para cada  $h \in \mathcal{C}(E, E')$  y  $\mathcal{C}(p, B')(g) = g \circ p$  para cada  $g \in \mathcal{C}(B, B')$ .

Por lo mencionado anteriormente, el pullback de las funciones  $\mathcal{C}(E, q)$  y  $\mathcal{C}(p, B')$



es el conjunto

$$\begin{aligned} & \{(f', f) \in \mathcal{C}(E, E') \times \mathcal{C}(B, B') \mid \mathcal{C}(E, q)(f') = \mathcal{C}(p, B')(f)\} \\ &= \{(f', f) \in \mathcal{C}(E, E') \times \mathcal{C}(B, B') \mid q \circ f' = f \circ p\} \\ &= \text{Map} - \mathcal{C}(p, q), \end{aligned}$$

es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \text{Map} - \mathcal{C}(p, q) & \longrightarrow & \mathcal{C}(E, E') \\ \downarrow & & \downarrow \mathcal{C}(E, q) \\ \mathcal{C}(B, B') & \xrightarrow{\mathcal{C}(p, B')} & \mathcal{C}(E, B'). \end{array}$$

## 1.1. Los problemas de levantamiento y extensión en $\mathcal{C}$

El primero consiste en que dados los  $\mathcal{C}$ -morfismos  $f : B \rightarrow B'$  y  $q : E' \rightarrow B'$ , debemos hallar un  $\mathcal{C}$ -morfismo  $h : B \rightarrow E'$  tal que  $q \circ h = f$ , esto es, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & & E' \\ & \nearrow h & \downarrow q \\ B & \xrightarrow{f} & B'. \end{array}$$

En este caso se dice que  $h$  es un levantamiento de  $f$  respecto a  $q$ .

El segundo problema radica en que dados los  $\mathcal{C}$ -morfismos  $p : E \rightarrow B$  y  $f' : E \rightarrow E'$ , tenemos que hallar un  $\mathcal{C}$ -morfismo  $h : B \rightarrow E'$  tal que  $h \circ p = f'$ , es decir, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f'} & E' \\ p \downarrow & \nearrow h & \\ B & & \end{array}$$

Por lo regular se dice que el  $\mathcal{C}$ -morfismo  $h$  es una extensión de  $f'$  respecto a  $p$ . Notar que si  $\alpha = (f', f) : p \rightarrow q$  es un morfismo en  $\text{Map} - \mathcal{C}$  y hallamos  $h : B \rightarrow E'$  tal que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f'} & E' \\ p \downarrow & \nearrow h & \downarrow q \\ B & \xrightarrow{f} & B', \end{array} \tag{1.1}$$

entonces ambos problemas quedan resueltos. Más aún, observar que la existencia de  $h$  en (1.1) equivale a que  $\varpi(h) = \alpha$ , donde  $\varpi : \mathcal{C}(B, E') \rightarrow \text{Map} - \mathcal{C}(p, q)$  es la única función que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C}(B, E') & \xrightarrow{\mathcal{C}(p, E')} & \mathcal{C}(E, E') \\
 \downarrow \mathcal{C}(B, q) & \searrow \varpi & \downarrow \mathcal{C}(E, q) \\
 \text{Map} - \mathcal{C}(p, q) & \longrightarrow & \mathcal{C}(E, E') \\
 \downarrow & & \downarrow \mathcal{C}(E, q) \\
 \mathcal{C}(B, B') & \xrightarrow{\mathcal{C}(p, B')} & \mathcal{C}(E, B')
 \end{array}$$

es decir,  $\varpi(g) = (\mathcal{C}(p, E')(g), \mathcal{C}(B, q)(g))$  para cada  $g \in \mathcal{C}(B, E')$ .

### 1.1.1. Morfismos de funtores

Es importante señalar que este concepto nos será de gran utilidad para la solución de los problemas planteados anteriormente.

**Definición 1.3.** Sean  $S, T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  funtores.  $\eta$  es un **morfismo de funtores**, denotado por  $\eta : S \rightarrow T$ , si para cada  $\mathcal{C}$ -objeto  $A$  tenemos un  $\mathcal{D}$ -morfismo  $\eta_A : S(A) \rightarrow T(A)$  tal que, para cualquier  $\mathcal{C}$ -morfismo  $f : A \rightarrow B$ , el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 S(A) & \xrightarrow{\eta_A} & T(A) \\
 S(f) \downarrow & & \downarrow T(f) \\
 S(B) & \xrightarrow{\eta_B} & T(B)
 \end{array}$$

Si  $\eta_A$  es un  $\mathcal{D}$ -isomorfismo para cada  $\mathcal{C}$ -objeto  $A$ ,  $\eta$  es una equivalencia natural.

En la categoría  $TOP$  podemos considerar los siguientes funtores.

- $-- \times I : TOP \rightarrow TOP$

Para cada espacio  $X$ ,  $(-- \times I)(X) = X \times I$ ; mientras que para cada función continua  $f : X \rightarrow Y$ ,  $(-- \times I)(f) = f \times id_I : X \times I \rightarrow Y \times I$ , donde  $(f \times id_I)(x, t) = (f(x), t)$  para cada  $(x, t) \in X \times I$ .

- $--^I : TOP \rightarrow TOP$

Para cada espacio  $X$  definimos  $--^I(X) = X^I$ , el espacio de todas las funciones continuas de  $I$  en  $X$  con la topología compacto abierta; mientras que para cada función continua  $f : X \rightarrow Y$ ,  $--^I(f) = f^I : X^I \rightarrow Y^I$ , donde  $f^I(\omega) = f \circ \omega$  para cada  $\omega \in X^I$ .

1.1. LOS PROBLEMAS DE LEVANTAMIENTO Y EXTENSIÓN EN  $\mathcal{C}$  15

- $Id_{TOP} : TOP \rightarrow TOP$  el functor identidad.

Veamos algunos ejemplos de morfismos de funtores.

1.  $\pi^0 : \_{}^I \rightarrow Id_{TOP}$

Para cada espacio  $X$  tenemos una función continua  $\pi_X^0 : X^I \rightarrow X$  dada por  $\pi_X^0(\omega) = \omega(0)$  para cada  $\omega \in X^I$ . Es claro que dada la función continua  $f : A \rightarrow B$ , el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A^I & \xrightarrow{\pi_A^0} & A \\ f^I \downarrow & & \downarrow f \\ B^I & \xrightarrow{\pi_B^0} & B. \end{array}$$

2.  $\partial^0 : Id_{TOP} \rightarrow \_{} \times I$

Para cada espacio  $X$  existe una función continua  $\partial_X^0 : X \rightarrow X \times I$  dada por  $\partial_X^0(x) = (x, 0)$  para cada  $x \in X$ . Además, dada la función continua  $f : A \rightarrow B$ , el siguiente cuadrado es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\partial_A^0} & A \times I \\ f \downarrow & & \downarrow f \times id_I \\ B & \xrightarrow{\partial_B^0} & B \times I. \end{array}$$

**Definición 1.4.** Sean  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  y  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  funtores.  $F$  y  $G$  son **funtores adjuntos** si existe una equivalencia natural  $\eta$  que consiste de funciones biyectivas  $\eta_{(A,B)} : \mathcal{D}(F(A), B) \rightarrow \mathcal{C}(A, G(B))$  para cada  $A \in Ob(\mathcal{C})$  y  $B \in Ob(\mathcal{D})$ . En este caso,  $F$  es adjunto a la izquierda de  $G$ .

Es relevante mencionar que la equivalencia natural  $\eta$  es entre los funtores  $\mathcal{D}(F(\_{}), \_{}), \mathcal{C}(\_{} , G(\_{})) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \rightarrow Sets$ , donde  $\mathcal{C}^{op}$  denota la categoría opuesta de  $\mathcal{C}$ . Explícitamente, la condición de naturalidad de  $\eta$  significa que para cualesquiera  $f : A_2 \rightarrow A_1$   $\mathcal{C}$ -morfismo y  $g : B_1 \rightarrow B_2$   $\mathcal{D}$ -morfismo, el siguiente cuadrado es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(F(A_1), B_1) & \xrightarrow{\eta_{(A_1, B_1)}} & \mathcal{C}(A_1, G(B_1)) \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \delta \\ \mathcal{D}(F(A_2), B_2) & \xrightarrow{\eta_{(A_2, B_2)}} & \mathcal{C}(A_2, G(B_2)), \end{array}$$

donde  $\gamma(h) = g \circ h \circ F(f)$  para cada  $h \in \mathcal{D}(F(A_1), B_1)$  y  $\delta(h) = G(g) \circ h \circ f$  para cada  $h \in \mathcal{C}(A_1, G(B_1))$ .

Veamos algunos ejemplos de funtores adjuntos.

1.  $\_ \times I$  y  $\_ \times I$ 

Dados los espacios topológicos  $X$  y  $Y$ , tenemos una biyección natural  $\eta_{(X,Y)} : TOP(X \times I, Y) \longrightarrow TOP(X, Y^I)$  dada por  $\eta_{(X,Y)}(f) = \widehat{f}$ , donde  $\widehat{f}(x)(t) = f(x, t)$  para cada  $f \in TOP(X \times I, Y)$ ,  $x \in X$  y  $t \in I$ .

Es importante mencionar que  $ev : Y^I \times I \longrightarrow Y$ , dada por  $ev(\omega, t) = \omega(t)$  para cada  $(\omega, t) \in Y^I \times I$ , es continua (porque  $I$  es localmente compacto y de Hausdorff) y por lo tanto  $\eta_{(X,Y)}$  es biyectiva.

2. Los funtores unión disjunta  $\_ \sqcup \_$  y producto cartesiano  $\_ \times \_$  son adjuntos

Dados  $X$  y  $Y$  espacios topológicos, tenemos una biyección natural  $\eta_{(X,Y)} : TOP(X \times \{0\} \cup X \times \{1\}, Y) \longrightarrow TOP(X, Y \times Y)$  definida por  $\eta_{(X,Y)}(f)(x) = (f(x, 0), f(x, 1))$  para cada  $f \in TOP(X \times \{0\} \cup X \times \{1\}, Y)$  y  $x \in X$ .

Regresando a los problemas de levantamiento y extensión, sean  $p : E \longrightarrow B$ ,  $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$  y  $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$  funtores adjuntos. Supongamos que deseamos hallar un  $\mathcal{C}$ -morfismo  $h$  tal que (1.2) es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} F(E) & \xrightarrow{f'} & X \\ F(p) \downarrow & \nearrow h & \\ F(B) & & \end{array} \quad (1.2)$$

Usando la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(F(B), X) & \xrightarrow{\eta_{(B,X)}} & \mathcal{C}(B, G(X)) \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \delta \\ \mathcal{D}(F(E), X) & \xrightarrow{\eta_{(E,X)}} & \mathcal{C}(E, G(X)), \end{array}$$

obtenemos que  $h$  existe en (1.2) si y sólo si existe  $\widehat{h} : B \longrightarrow G(X)$  tal que hace conmutar el siguiente triángulo

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\widehat{f}'} & G(X) \\ p \downarrow & \nearrow \widehat{h} & \\ B & & \end{array}$$

donde  $\widehat{h} = \eta_{(B,X)}(h)$  y  $\widehat{f}' = \eta_{(E,X)}(f')$ .

Se procede de manera análoga para el problema de levantamiento.

### 1.1.2. Morfismos de funtores adjuntos

Supongamos que  $F, F' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  y  $G, G' : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  son funtores tales que  $F$  y  $F'$  son adjuntos a la izquierda de  $G$  y  $G'$  respectivamente. Además, sean  $\eta_{(X,Y)} : \mathcal{D}(F(X), Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, G(Y))$  y  $\eta'_{(X,Y)} : \mathcal{D}(F'(X), Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, G'(Y))$  tales biyecciones naturales para cada  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  y  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ . Finalmente, sean  $\nu : F' \rightarrow F$  y  $\mu : G \rightarrow G'$  morfismos de funtores.

**Definición 1.5.** *Los morfismos de funtores  $\nu$  y  $\mu$  son adjuntos si el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(F(X), Y) & \xrightarrow{\eta_{(X,Y)}} & \mathcal{C}(X, G(Y)) \\ \mathcal{D}(\nu_X, Y) \downarrow & & \downarrow \mathcal{C}(X, \mu_Y) \\ \mathcal{D}(F'(X), Y) & \xrightarrow{\eta'_{(X,Y)}} & \mathcal{C}(X, G'(Y)). \end{array} \quad (1.3)$$

para cada  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  y  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ , donde  $\nu_X : F'(X) \rightarrow F(X)$  es un  $\mathcal{D}$ -morfismo,  $\mu_Y : G(Y) \rightarrow G'(Y)$  es un  $\mathcal{C}$ -morfismo,  $\mathcal{D}(\nu_X, Y)(f) = f \circ \nu_X$  para cada  $f \in \mathcal{D}(F(X), Y)$  y  $\mathcal{C}(X, \mu_Y)(g) = \mu_Y \circ g$  para cada  $g \in \mathcal{D}(X, G(Y))$ .

Veamos que los funtores  $\pi : \_{}^I \rightarrow \_{} \times \_{}^I$  y  $\partial : \_{} \sqcup \_{} \rightarrow \_{} \times I$  son un ejemplo de morfismos de funtores adjuntos.

Para cada espacio  $X$ , definimos  $\pi_X : X^I \rightarrow X \times X$  por  $\pi_X(\omega) = (\omega(0), \omega(1))$  para cada  $\omega \in X^I$ ; mientras que  $\partial_X : X \times \{0\} \cup X \times \{1\} \rightarrow X \times I$  está dada por  $\partial_X((x, 0)) = (x, 0)$  y  $\partial_X((x, 1)) = (x, 1)$  para cada  $x \in X$ . Además, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \text{TOP}(X \times I, Y) & \xrightarrow{\eta_{(X,Y)}} & \text{TOP}(X, Y^I) \\ \text{TOP}(\partial_X, Y) \downarrow & & \downarrow \text{TOP}(X, \pi_Y) \\ \text{TOP}(X \times \{0\} \cup X \times \{1\}, Y) & \xrightarrow{\eta'_{(X,Y)}} & \text{TOP}(X, Y \times Y) \end{array}$$

pues dados  $f \in \text{TOP}(X \times I, Y)$  y  $x \in X$ ,

$$\begin{aligned} [(\eta'_{(X,Y)} \circ \text{TOP}(\partial_X, Y))(f)](x) &= [\eta'_{(X,Y)}(f \circ \partial_X)](x) \\ &= ((f \circ \partial_X)(x, 0), (f \circ \partial_X)(x, 1)) \\ &= (f(x, 0), f(x, 1)); \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} [(\text{TOP}(X, \pi_Y) \circ \eta_{(X,Y)})(f)](x) &= [\pi_Y \circ \eta_{(X,Y)}(f)](x) \\ &= (\eta_{(X,Y)}(f)(x)(0), \eta_{(X,Y)}(f)(x)(1)) \\ &= (f(x, 0), f(x, 1)). \end{aligned}$$

Otro ejemplo importante lo proporcionan los morfismos de funtores  $\pi^0 : \_ \times I \longrightarrow Id_{TOP}$  y  $\partial^0 : Id_{TOP} \longrightarrow \_ \times I$ . Análogo al ejemplo anterior, se puede verificar la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} TOP(X \times I, Y) & \xrightarrow{\eta_{(X,Y)}} & TOP(X, Y^I) \\ \downarrow TOP(\partial_{X,Y}^0) & & \downarrow TOP(X, \pi_Y^0) \\ TOP(X, Y) & \xrightarrow{\eta'_{(X,Y)}} & TOP(X, Y). \end{array}$$

El anterior concepto tiene una gran relación con los problemas de levantamiento y extensión debido a que permite pasar de uno al otro y viceversa. Continuando con la notación de la definición 1.5, supongamos que deseamos hallar una extensión  $h$  en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} F'(X) & \xrightarrow{f} & Y \\ \nu_X \downarrow & \nearrow h & \\ F(X) & & \end{array} \quad (1.4)$$

Debido a la conmutatividad del diagrama 1.3, concluimos que la extensión  $h$  existe en (1.4) si y sólo si existe un levantamiento  $\hat{h}$  en el siguiente triángulo

$$\begin{array}{ccc} & & G(Y) \\ & \nearrow \hat{h} & \downarrow \mu_Y \\ X & \xrightarrow{\hat{f}} & G'(Y), \end{array}$$

donde  $\hat{f} = \eta'_{(X,Y)}(f)$  y  $\hat{h} = \eta_{(X,Y)}(h)$ .

Finalmente, presentamos algunas definiciones que involucran el concepto de homotopía.

**Definición 1.6.** Sean  $f, g : X \longrightarrow Y$  funciones continuas entre espacios topológicos y  $A$  un subconjunto de  $X$ .

1.  $f$  y  $g$  son **homotópicas** si existe una función continua  $H : X \times I \longrightarrow Y$ , llamada **homotopía entre  $f$  y  $g$** , tal que  $H(x, 0) = f(x)$  y  $H(x, 1) = g(x)$  para cada  $x \in X$ .  $H : f \simeq g$  denota que  $f$  y  $g$  son homotópicas mediante la homotopía  $H$ .
2.  $f$  y  $g$  son **homotópicas relativas a  $A$**  si existe una homotopía  $H$  entre  $f$  y  $g$  tal que para cada  $(a, t) \in A \times I$ ,  $H(a, t) = H(a, 0) = f(a)$ . La correspondiente notación es  $H : f \simeq g \text{ rel } A$ .

**Definición 1.7.** Sean  $X$  un espacio topológico y  $A$  un subconjunto de  $X$ . Una **retracción de  $X$  en  $A$**  es una función continua  $r : X \rightarrow A$  tal que  $r(a) = a$  para cada  $a \in A$ . Además,  $A$  es un **retracto de  $X$**  si existe una retracción de  $X$  en  $A$ .

**Definición 1.8.** Sean  $X$  un espacio topológico y  $A$  un subconjunto de  $X$ .  $A$  es un **retracto por deformación fuerte de  $X$**  si existe una retracción  $r : X \rightarrow A$  tal que  $i \circ r \simeq id_X$  rel  $A$ , donde  $i : A \rightarrow X$  es la inclusión.

## 1.2. Espacios AR y AE

En esta sección exponemos los conceptos de espacios  $AE$ ,  $ANE$ ,  $AR$  y  $ANR$  para una clase débilmente hereditaria. Además, destacan los Teoremas de extensión de Dugundji y el Teorema de encaje de Kuratowski-Wojdyslawski, siendo este último de gran utilidad en capítulos posteriores.

Una clase  $\mathcal{C}$  de espacios Hausdorff es **débilmente hereditaria** si:

1. Para cada subconjunto cerrado  $A$  de  $X$ ,  $X \in \mathcal{C}$  implica que  $A \in \mathcal{C}$ .
2. Para cualquier espacio  $Y$  homeomorfo a  $X$ ,  $X \in \mathcal{C}$  implica que  $Y \in \mathcal{C}$ .

Existen varios ejemplos de clases débilmente hereditarias, por ejemplo: la de espacios de Hausdorff, la de espacios regulares, la de espacios completamente regulares, la de espacios metrizables (que denotaremos por  $\mathfrak{M}$ ), la de espacios normales, la de espacios Lindelöf, entre otros.

Recordar que un subespacio  $Y$  de  $X$  es un **retracto de vecindad** si existe una vecindad  $U$  de  $Y$  en  $X$  tal que  $Y$  es retracto de  $U$ . Para una clase débilmente hereditaria tenemos la siguiente definición.

**Definición 1.9.** Un espacio  $Y$  es un **retracto absoluto (retracto absoluto de vecindad)** para la clase débilmente hereditaria  $\mathcal{C}$  si se cumplen las condiciones:

- $Y \in \mathcal{C}$ ,
- si  $Y'$  es homeomorfo a  $Y$ ,  $Y'$  un subespacio cerrado en  $X$  y  $X \in \mathcal{C}$ , entonces  $Y'$  es un retracto (retracto de vecindad) de  $X$ .

Si  $Y$  es un retracto absoluto para la clase débilmente hereditaria  $\mathcal{C}$  lo denotamos por  $Y \in AR(\mathcal{C})$ , mientras que  $Y \in ANR(\mathcal{C})$  hace referencia a que  $Y$  es un retracto absoluto de vecindad para la clase débilmente hereditaria  $\mathcal{C}$ . Asimismo, es claro que si  $Y \in AR(\mathcal{C})$  entonces  $Y \in ANR(\mathcal{C})$ .

Por otro lado, sea  $A$  un subconjunto cerrado de  $X$ . Recordar que un espacio  $Y$  es un **extensor** para el par  $(X, A)$  si toda función continua  $f : A \rightarrow Y$  admite una extensión continua  $g : X \rightarrow Y$ . Además, el espacio  $Y$  es un **extensor de vecindad** para el par  $(X, A)$  si toda función continua  $f : A \rightarrow Y$  admite una extensión continua  $g : U \rightarrow Y$ , donde  $U$  es una vecindad de  $A$  en  $X$ . Para una clase débilmente hereditaria tenemos la siguiente definición.

**Definición 1.10.** *Un espacio  $Y$  es un **extensor absoluto (extensor absoluto de vecindad)** para la clase débilmente hereditaria  $\mathcal{C}$  si  $Y$  es un extensor (extensor de vecindad) para cada par  $(X, A)$ , donde  $X \in \mathcal{C}$  y  $A$  es cerrado en  $X$ .*

Nuevamente, usamos las notaciones  $Y \in AE(\mathcal{C})$  y  $Y \in ANE(\mathcal{C})$  para indicar que  $Y$  es un extensor absoluto para la clase  $\mathcal{C}$  y extensor absoluto de vecindad para la clase  $\mathcal{C}$ , respectivamente.

Dos aspectos importantes a destacar: el primero radica en que no suponemos  $Y \in \mathcal{C}$  y el segundo consiste en la validez de la implicación  $Y \in AE(\mathcal{C}) \Rightarrow Y \in ANE(\mathcal{C})$ .

### Observación

Todo espacio  $AE(\mathcal{C})$  (respectivamente  $ANE(\mathcal{C})$ ) es un espacio  $AR(\mathcal{C})$  (respectivamente  $ANR(\mathcal{C})$ ).

Probaremos el caso  $ANE(\mathcal{C})$  y  $ANR(\mathcal{C})$  pues el otro es más sencillo.

Sea  $Y$  un espacio  $ANE(\mathcal{C})$  y veamos que  $Y$  es un  $ANR(\mathcal{C})$ .

Consideremos  $Z \in \mathcal{C}$ ,  $X$  subconjunto cerrado de  $Z$  y  $h : Y \rightarrow X$  un homeomorfismo (esto implica que automáticamente  $Y \in \mathcal{C}$ ), deseamos hallar una vecindad  $U$  de  $X$  en  $Z$  tal que  $X$  es un retracto de  $U$ .

Dado que  $Y \in ANE(\mathcal{C})$  existen una vecindad  $U$  de  $X$  en  $Z$  y  $f : U \rightarrow Y$  continua tal que  $f|_X = h^{-1}$ . Así,  $h \circ f : U \rightarrow X$  es continua y además, para cada  $x \in X$ ,  $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(h^{-1}(x)) = x$ . Luego  $X$  es un retracto de  $U$  y por lo tanto  $Y \in ANR(\mathcal{C})$ .

### 1.2.1. Teorema de extensión de Dugundji

El siguiente paso es demostrar el Teorema de extensión de Dugundji y para ello es necesario el siguiente resultado. La prueba del lema se centra en el teorema de Stone, el cual afirma que todo espacio metrizable es paracompacto (véase [9, teorema 20.9]).

**Lema 1.11.** *Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A$  un subconjunto cerrado no vacío de  $X$ . Existe una cubierta abierta localmente finita  $\mathcal{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  de  $X \setminus A$  tal que para cada  $a \in A$  y cada vecindad  $V$  de  $a$  en  $X$ , existe una vecindad  $W$  de  $a$  en  $X$  tal que  $W \subset V$  y si  $U_\lambda \cap W \neq \emptyset$  entonces  $U_\lambda \subset V$ .*



**Demostración.**

Primero probaremos la existencia de  $\mathcal{U}$ .

Para cada  $x \in X \setminus A$  consideremos la bola abierta  $B_{r_x}(x)$  contenida en  $X \setminus A$ , donde  $r_x = \frac{1}{2}d(x, A) > 0$ . Dado que  $X \setminus A$  es un espacio métrico se sigue que  $X \setminus A$  es paracompacto, por consiguiente la cubierta abierta  $\{B_{r_x}(x) : x \in X \setminus A\}$  de  $X \setminus A$  admite un refinamiento localmente finito  $\mathcal{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ .

Ahora, probaremos la existencia de la vecindad  $W$  con la condición requerida.

Sean  $a \in A$ ,  $V$  una vecindad de  $a$  en  $X$  y  $\epsilon > 0$  tal que  $B_\epsilon(a) \subset V$ .

Veamos que  $W = B_{\frac{1}{3}\epsilon}(a)$  es la vecindad deseada.

- Es claro que  $W \subset V$ .
- Sean  $\lambda \in \Lambda$  y  $z \in U_\lambda \cap W$ . Dado que  $\mathcal{U}$  es un refinamiento de  $\{B_{r_x}(x) : x \in X \setminus A\}$  se sigue que  $U_\lambda \subset B_{r_x}(x)$  para algún  $x \in X \setminus A$ .  
Sea  $u \in U_\lambda$ , deseamos probar que  $u \in V$ . Notar que  $d(u, a) \leq d(u, x) + d(x, z) + d(z, a) < 2r_x + \frac{1}{3}\epsilon$  y además  $2r_x = d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, z) + d(z, a) < r_x + \frac{1}{3}\epsilon$ , esto es,  $r_x < \frac{1}{3}\epsilon$ . Así,  $d(u, a) < 2r_x + \frac{1}{3}\epsilon < \frac{2}{3}\epsilon + \frac{1}{3}\epsilon = \epsilon$  y por consiguiente  $u \in B_\epsilon(a) \subset V$ .  
Por lo tanto  $U_\lambda \subset V$ .

□

**Teorema 1.12.** (Teorema de extensión de Dugundji)

Todo subconjunto convexo  $K$  de un espacio lineal normado  $L$  es un espacio  $AE(\mathfrak{M})$ .

**Demostración.**

Sea  $K$  un conjunto convexo de un espacio lineal normado  $L$  y consideremos  $(X, d)$  un espacio métrico,  $A$  un subconjunto cerrado de  $X$  y  $f : A \rightarrow K$ . Deseamos probar la existencia de una función continua  $g : X \rightarrow K$  tal que  $g|_A = f$ .

Sea  $\mathcal{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  la cubierta abierta localmente finita de  $X \setminus A$  dada por el lema anterior. Aplicando el teorema de Partición de la Unidad para espacios paracompactos de Hausdorff (véase [8, teorema 41.7]), sea  $\phi_\lambda : X \setminus A \rightarrow I$  continua tal que

1.  $\text{supp}(\phi_\lambda) \subset U_\lambda$  para cada  $\lambda \in \Lambda$ ,
2.  $\{\text{supp}(\phi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$  es localmente finita y
3.  $\sum_{\lambda \in \Lambda} \phi_\lambda(x) = 1$  para cada  $x \in X \setminus A$ .

Observar que si  $x \notin U_\lambda$  entonces  $x \notin \text{supp}(\phi_\lambda)$ , es decir, existe una vecindad  $\tilde{U}$  de  $x$  en  $X \setminus A$  tal que  $\tilde{U} \cap \{z \in X \setminus A : \phi_\lambda(z) \neq 0\} = \emptyset$  y por lo tanto  $\phi_\lambda(u) = 0$  para cada  $u \in \tilde{U}$ , en particular  $\phi_\lambda(x) = 0$ . En resumen, si  $\phi_\lambda(x) \neq 0$  entonces

$x \in U_\lambda$  para cada  $\lambda \in \Lambda$ . Además, la propiedad 2 implica que la expresión en 3 tiene sentido.

Para cada  $\lambda \in \Lambda$  tomamos  $x_\lambda \in U_\lambda$  y  $a_\lambda \in A$  tales que  $d(x_\lambda, a_\lambda) < 2d(x_\lambda, A)$ . Definimos  $g : X \rightarrow K$  dada por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ \sum_{\lambda \in \Lambda} \phi_\lambda(x) f(a_\lambda) & \text{si } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Antes de probar la continuidad de  $g$ , observar que está bien definida en  $X \setminus A$  porque dado  $x \in X \setminus A$  existe una vecindad  $U_x$  de  $x$  en  $X \setminus A$  tal que  $U_x$  sólo interseca a un número finito de elementos de  $\mathcal{U}$ , digamos  $\{U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \dots, U_{\lambda_r}\}$ . Luego  $\phi_\lambda(x) = 0$  para toda  $\lambda \in \Lambda \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$  y por lo tanto  $g(x) = \sum_{j=1}^r \phi_{\lambda_j}(x) f(a_{\lambda_j})$ .

Una vez aclarada la buena definición de  $g$  pasamos a demostrar que es continua en  $X$ .

Es claro que  $g$  es continua en  $X \setminus A$  porque cada uno de sus puntos admite una vecindad en  $X \setminus A$  (y por tanto vecindad en  $X$ ) donde  $g$  es la suma de funciones continuas.

Resta ver que  $g$  es continua en  $A$  y para ello tomamos  $a_0$  punto arbitrario de  $A$ .

Sea  $U$  una vecindad convexa de  $g(a_0) = f(a_0)$  en  $K$ . Usando la continuidad de  $f$  hallamos  $\delta > 0$  tal que  $f(a) \in U$  siempre que  $a \in A$  y  $d(a, a_0) < 3\delta$ . Notar que  $V = \{x \in X : d(x, a_0) < \delta\}$  es una vecindad de  $a_0$  en  $X$  y, en virtud del lema previo, existe una vecindad  $W$  de  $a_0$  en  $X$  tal que  $W \subset V$  y  $U_\lambda \cap W \neq \emptyset$  implica que  $U_\lambda \subset V$  para cualquier  $\lambda \in \Lambda$ .

Afirmamos que  $g(W) \subset U$ . Para demostrar esto, dado  $w \in W$  ocurre que  $w \in A \cap W$  o  $w \in W \setminus A$ .

- Si  $w \in A \cap W \subset A \cap V$  entonces  $g(w) = f(w) \in U$  pues  $d(w, a_0) < \delta < 3\delta$ .
- Si  $w \in W \setminus A$  probaremos que  $f(a_\lambda) \in U$  y usando la convexidad de  $U$  concluiremos que  $g(w) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \phi_\lambda(w) f(a_\lambda) \in U$ .

Claramente podemos suponer  $\phi_\lambda(w) \neq 0$  para cada  $\lambda \in \Lambda$ , entonces  $w \in W \cap U_\lambda$  y por consiguiente  $x_\lambda \in U_\lambda \subset V$ . Así,  $d(a_0, a_\lambda) \leq d(a_0, x_\lambda) + d(x_\lambda, a_\lambda) \leq d(a_0, x_\lambda) + 2d(x_\lambda, A) \leq 3d(a_0, x_\lambda) < 3\delta$  y por tanto  $f(a_\lambda) \in U$ .

Por lo tanto  $g$  es continua en  $X$  y  $g|_A = f$ . Más aún, hemos probado que  $g(X) \subset \text{conv}(f(A))$ , donde  $\text{conv}(f(A))$  denota la envoltura convexa de  $f(A)$ .  $\square$

### 1.2.2. Teorema de encaje de Kuratowski-Wojdyslawski

Una vez demostrado el Teorema de extensión de Dugundji procedemos a la prueba del teorema más relevante de esta sección.

**Teorema 1.13.** (*Teorema de encaje de Kuratowski-Wojdyslawski*)

Para cada espacio métrico  $Y$  existen un espacio lineal, normado y completo  $L$  y un encaje  $h : Y \rightarrow L$  tal que  $h(Y)$  es un subconjunto cerrado de su envoltura convexa  $\text{conv}(h(Y))$ .

#### Demostración.

Sea  $(Y, d)$  un espacio métrico. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $d$  es acotada. En caso contrario definimos una nueva métrica,  $d^*(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$

para cada  $(x, y) \in Y \times Y$ , la cual es acotada y equivalente a  $d$ .

Sea  $L = \{f : Y \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua y acotada}\}$ . Observar que  $L$  es un espacio lineal real con las operaciones

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ y } (\alpha f)(x) = \alpha f(x),$$

donde  $f, g \in L$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Más aún,  $L$  es un espacio normado de Banach si para cada  $f \in L$  definimos la norma:

$$\|f\|_\infty = \sup_{y \in Y} |f(y)|.$$

Sea  $a \in Y$ , definimos  $f_a : Y \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f_a(y) = d(a, y)$  para cada  $y \in Y$ . Se verifica fácilmente que  $f_a \in L$  y por tanto es posible definir la función  $h : Y \rightarrow L$  dada por  $h(a) = f_a$  para cada  $a \in Y$ .

**Afirmación.** La función  $h : Y \rightarrow L$  es un encaje y una isometría.

Primero veamos que  $h$  es una isometría.

Sean  $x, y \in Y$ , deseamos probar que  $d(x, y) = \|h(x) - h(y)\|_\infty$ . Observar que  $\|h(x) - h(y)\|_\infty \geq |h(x)(y) - h(y)(y)| = |d(x, y) - d(y, y)| = |d(x, y)| = d(x, y)$ . Por otro lado, la desigualdad  $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$  ( $z \in Y$ ) implica que, para cada  $z \in Y$ :  $|h(x)(z) - h(y)(z)| \leq d(x, y)$ . Luego

$$\|h(x) - h(y)\|_\infty = \sup_{z \in Y} |h(x)(z) - h(y)(z)| \leq d(x, y).$$

Por lo tanto  $d(x, y) = \|h(x) - h(y)\|_\infty = \|f_x - f_y\|_\infty$ .

Veamos que  $h$  es un encaje, es decir,  $h : Y \rightarrow h(Y)$  es un homeomorfismo. Es claro que  $h$  es continua pues es una isometría.

Para probar la inyectividad sean  $x, y \in Y$  tal que  $h(x) = h(y)$ , es decir,  $h(x)(z) = h(y)(z)$  para cada  $z \in Y$ . En particular,  $0 = d(x, x) = h(x)(x) = h(y)(x) = d(y, x)$  y por consiguiente  $y = x$ .

Por otro lado,  $\psi : h(Y) \rightarrow Y$  dada por  $\psi(f_a) = a$ , con  $a \in Y$ , está bien

definida pues  $h$  es inyectiva. Además,  $\psi$  es una isometría (y por tanto es continua) porque dados  $f_a, f_b \in h(Y)$  se verifica que  $d(\psi(f_a), \psi(f_b)) = d(a, b) = \|f_a - f_b\|_\infty$ .

Finalmente  $\psi \circ h = id_Y$  y  $h \circ \psi = id_{h(Y)}$ , luego  $h$  es un encaje.

El siguiente paso es comprobar que  $h(Y)$  es cerrado en  $conv(h(Y))$ . No obstante, es importante tener presente que  $conv(h(Y)) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i : \alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0; \right.$

$$\left. f_1, \dots, f_n \in h(Y); \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Veamos que  $conv(h(Y)) \setminus h(Y)$  es abierto en  $conv(h(Y))$ . Para ello, sea  $g \in conv(h(Y)) \setminus h(Y)$  entonces existen  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$  y  $f_1, \dots, f_n \in h(Y)$  tales

que  $g = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$  y  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ . Supongamos que para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $f_i = h(y_i)$  con  $y_i \in Y$ .

Dado que  $g \notin h(Y)$ , se verifica que  $g \neq f_i$  para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  y por tanto podemos considerar el número real positivo  $\delta = \min\{\frac{1}{2}\|g - f_i\|_\infty : i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$ . Proponemos que  $B_\delta(g) = \{f \in K : \|f - g\|_\infty < \delta\} \subset K \setminus h(Y)$ .

Sea  $f \in B_\delta(g)$  y supongamos, por contradicción, que  $f = h(y)$  para algún  $h \in Y$ . Observar que  $\delta = 2\delta - \delta \leq \|g - f_i\|_\infty - \|f - g\|_\infty \leq \|f - f_i\|_\infty = \|h(y) - h(y_i)\|_\infty$  para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Dado que  $h$  es una isometría se sigue que  $\delta \leq d(y, y_i)$  para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  y por lo tanto  $\|f - g\|_\infty \geq$

$$|f(y) - g(y)| = |h(y)(y) - g(y)| = |g(y)| = \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(y) \right| = \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i h(y_i)(y) \right| = \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i d(y_i, y) \right| = \sum_{i=1}^n \alpha_i d(y_i, y) \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta = \delta \sum_{i=1}^n \alpha_i = \delta, \text{ lo que contra-}$$

dice que  $f \in B_\delta(g)$ . Así,  $B_\delta(g)$  es un abierto en  $conv(h(Y))$  contenido en  $conv(h(Y)) \setminus h(Y)$ .

Por lo tanto  $h(Y)$  es cerrado en  $conv(h(Y))$ . □

**Corolario 1.14.** *Para cada espacio metrizable  $Y$  existe un encaje cerrado  $h : Y \hookrightarrow M$ , donde  $M$  es un espacio  $AE(\mathfrak{M})$ .*

Anteriormente probamos que para toda clase débilmente hereditaria  $\mathcal{C}$  se tienen las contenciones  $AE(\mathcal{C}) \subset AR(\mathcal{C})$  y  $ANE(\mathcal{C}) \subset ANR(\mathcal{C})$ . Sin embargo, existen ciertas clases hereditarias donde se da la igualdad y una de ellas es la de los espacios metrizables.

**Teorema 1.15.** *Los conceptos  $ANE(\mathfrak{M})$  (respectivamente  $AE(\mathfrak{M})$ ) y  $ANR(\mathfrak{M})$  (respectivamente  $AR(\mathfrak{M})$ ) son equivalentes.*

**Demostración.**

Demostraremos el caso  $ANE(\mathfrak{M})$  y  $ANR(\mathfrak{M})$ .

Ya hemos probado que  $ANE(\mathcal{C}) \subset ANR(\mathcal{C})$  se cumple en general, en particular cuando  $\mathcal{C} = \mathfrak{M}$ .

Recíprocamente, sea  $Y \in ANR(\mathfrak{M})$  y supongamos, sin pérdida de generalidad, que la métrica en  $Y$  es acotada. Sean  $f : A \rightarrow Y$  continua y  $A$  un subconjunto cerrado de  $X$ , deseamos hallar una vecindad  $U$  de  $A$  en  $X$  y  $g : U \rightarrow Y$  continua tal que  $g|_A = f$ .

Consideremos el encaje  $h : Y \rightarrow L$  dado por el teorema 1.13. Sabemos que  $Z_0 = h(Y)$  es un subconjunto cerrado de  $conv(Z_0)$ . Además, porque  $Y \in ANR(\mathfrak{M})$ , existen una vecindad  $V$  de  $Z_0$  en  $conv(Z_0)$  y una retracción  $r : V \rightarrow Z_0$ .

Por el teorema de extensión de Dugundji existe  $\psi : X \rightarrow L$  continua tal que  $\psi|_A = h \circ f$  y  $\psi(X) \subset conv((h \circ f)(A))$ . Asimismo, notar que  $\psi(X) \subset conv(Z_0)$  y por tanto  $U = \psi^{-1}(V)$  es una vecindad de  $A$  en  $X$  debido a que  $\psi(a) = h(f(a)) \in Z_0 \subset V$  para cada  $a \in A$ .

Finalmente, la función continua  $g : U \rightarrow Y$  dada por  $g(u) = h^{-1}(r(\psi(u)))$ , para cada  $u \in U$ , satisface la condición deseada porque  $g(a) = h^{-1}(r(\psi(a))) = h^{-1}(r(h(f(a)))) = h^{-1}(h(f(a))) = f(a)$  para cada  $a \in A$ .

Por lo tanto  $Y \in ANE(\mathfrak{M})$ .

□

En los capítulos restantes usaremos los términos  $ANE$ ,  $AE$ ,  $ANR$  y  $AR$  para indicar que nos referimos a un espacio  $ANE(\mathfrak{M})$ ,  $AE(\mathfrak{M})$ ,  $ANR(\mathfrak{M})$  y  $AR(\mathfrak{M})$ , respectivamente.



## Capítulo 2

---

### $\Sigma$ -fibraciones y objetos $\Sigma$ -fibrantes

---

En esta sección nos enfocamos en el estudio de  $\Sigma$ -fibraciones en las categorías  $TOP$  y  $\mathcal{M}$ , por tal motivo usaremos los términos función y espacio (metrizable) para referirnos a una función continua y a un espacio topológico (metrizable), respectivamente. Además, todo espacio se supone de Hausdorff.

En la introducción mencionamos que cierto axioma de Quillen nos motiva a definir el concepto de  $\Sigma$ -fibración. Para ello, consideremos una colección de morfismos  $\Sigma$  en una categoría  $\mathcal{C}$ .

**Definición 2.1.** Un  $\mathcal{C}$ -morfismo  $p : E \rightarrow B$  es una  $\Sigma$ -fibración si para cada diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & E \\ s \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{g} & B, \end{array}$$

con  $s \in \Sigma$ , existe un  $\mathcal{C}$ -morfismo  $h : X \rightarrow E$  tal que  $h \circ s = f$  y  $p \circ h = g$ .

Frecuentemente diremos que el morfismo  $h$  es un relleno del diagrama anterior si satisface que  $h \circ s = f$  y  $p \circ h = g$ .

**Definición 2.2.** Un  $\mathcal{C}$ -objeto  $Y$  es  $\Sigma$ -fibrante si para cada  $\mathcal{C}$ -morfismo  $f : A \rightarrow Y$  y  $s : A \rightarrow X$ , con  $s \in \Sigma$ , existe  $h : X \rightarrow Y$  tal que  $h \circ s = f$ , es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & Y \\ s \downarrow & \nearrow h & \\ X & & \end{array}$$

**Observación**

Consideremos el objeto terminal  $T$  en la categoría  $\mathcal{C}$  (en el caso de  $TOP$  o  $\mathcal{M}$  el objeto terminal es el espacio que consta de un sólo elemento). Resulta sencillo verificar que  $Y$  es  $\Sigma$ -fibrante si y sólo si  $Y \rightarrow T$  es  $\Sigma$ -fibración.

**2.1. Resultados básicos**

Veamos algunos resultados útiles sobre  $\Sigma$ -fibraciones, posteriormente proporcionaremos algunos ejemplos de familias  $\Sigma$ .

**Proposición 2.3.** *Si  $f : E \rightarrow B$  y  $g : C \rightarrow E$  son  $\Sigma$ -fibraciones entonces  $f \circ g$  también lo es.*

**Demostración.**

Sea  $s : A \rightarrow X$  con  $s \in \Sigma$  y consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & C \\ \downarrow s & & \downarrow g \\ & & E \\ & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{v} & E, \end{array}$$

deseamos hallar  $h : X \rightarrow C$  tal que  $h \circ s = u$  y  $f \circ g \circ h = v$ .

Dado que  $f$  es  $\Sigma$ -fibración garantizamos la existencia de un morfismo  $r : X \rightarrow E$  tal que  $r \circ s = g \circ u$  y  $f \circ r = v$ . La igualdad  $r \circ s = g \circ u$  y el hecho que  $g$  es  $\Sigma$ -fibración implican que existe  $h : X \rightarrow C$  tal que  $h \circ s = u$  y  $g \circ h = r$ . Así,  $h$  es el morfismo deseado pues  $h \circ s = u$  y  $f \circ g \circ h = f \circ r = v$ . □

**Proposición 2.4.** *Sea  $p : E \rightarrow B$  una  $\Sigma$ -fibración. Si  $B$  es  $\Sigma$ -fibrante entonces  $E$  también lo es.*

**Demostración.**

Sean  $T$  el objeto terminal de  $\mathcal{C}$  y  $A$  un  $\mathcal{C}$ -objeto, denotamos por  $T_A$  al único morfismo con dominio  $A$  y codominio  $T$ .

Queremos demostrar que  $T_E$  es  $\Sigma$ -fibración, pero esto se sigue del hecho que  $T_E = T_B \circ p$  y la proposición 2.3. □

**Proposición 2.5.** *Supongamos que el siguiente cuadrado es un diagrama pull-back*

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{f'} & E \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{f} & B. \end{array} \tag{2.1}$$



Si  $p$  es  $\Sigma$ -fibración entonces  $p'$  también lo es.

**Demostración.**

Sea  $s \in \Sigma$  con  $s : A \rightarrow X$  y consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & E' \\ s \downarrow & & \downarrow p' \\ X & \xrightarrow{v} & B', \end{array} \tag{2.2}$$

deseamos hallar un relleno del diagrama 2.2. Utilizando los diagramas 2.1 y 2.2 obtenemos un nuevo cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f' \circ u} & E \\ s \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f \circ v} & B. \end{array}$$

Por ser  $p$  una  $\Sigma$ -fibración existe  $h : X \rightarrow E$  tal que  $h \circ s = f' \circ u$  y  $p \circ h = f \circ v$ . La igualdad  $p \circ h = f \circ v$  y la propiedad universal de  $E'$  implican la existencia de un único morfismo  $\varphi : X \rightarrow E'$  tal que  $p' \circ \varphi = v$  y  $f' \circ \varphi = h$ , es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & \\ & \searrow \varphi & & \searrow h & \\ & & E' & \xrightarrow{f'} & E \\ & & \downarrow p' & & \downarrow p \\ & & B' & \xrightarrow{f} & B. \end{array}$$

Proponemos a  $\varphi$  como relleno del diagrama 2.2.

- Es claro que  $p' \circ \varphi = v$ .
- Notar que  $f' \circ (\varphi \circ s) = (f' \circ \varphi) \circ s = h \circ s = f' \circ u$  y  $p' \circ (\varphi \circ s) = (p' \circ \varphi) \circ s = v \circ s = p' \circ u$ , esto es, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} A & & & & \\ & \searrow u & & \searrow f' \circ u & \\ & & E' & \xrightarrow{f'} & E \\ & & \downarrow p' & & \downarrow p \\ & & B' & \xrightarrow{f} & B. \end{array}$$

$\varphi \circ s$  (curved arrow from  $A$  to  $E'$ )  
 $p' \circ u$  (curved arrow from  $A$  to  $B'$ )

Por la unicidad del morfismo  $A \rightarrow E'$  concluimos que  $u = \varphi \circ s$ .

Por lo tanto  $p'$  es  $\Sigma$ -fibración. □

**Proposición 2.6.** Sean  $\bar{E} = \{E_i, q_i^{i+1}\}_{i \geq 0}$  una sucesión inversa y  $E = \varprojlim \bar{E}$ . Si  $E_1$  es  $\Sigma$ -fibrante y cada  $q_i^{i+1}$  es  $\Sigma$ -fibración entonces  $E$  es  $\Sigma$ -fibrante.

**Demostración.**

Sean  $s : A \rightarrow X$ ,  $s \in \Sigma$  y  $f : A \rightarrow E$ , deseamos hallar una función continua  $\varphi : X \rightarrow E$  tal que  $\varphi \circ s = f$ .

Para cada  $i \geq 0$  sea  $q_i : E \rightarrow E_i$  la  $i$ -ésima proyección. Porque  $E_1$  es  $\Sigma$ -fibrante existe  $g_1 : X \rightarrow E_1$  tal que  $g_1 \circ s = q_1 \circ f$ , luego podemos considerar el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{q_2 \circ f} & E_2 \\ s \downarrow & & \downarrow q_1^2 \\ X & \xrightarrow{g_1} & E_1. \end{array}$$

Dado que  $q_1^2$  es  $\Sigma$ -fibración garantizamos la existencia  $g_2 : X \rightarrow E_2$  tal que  $g_2 \circ s = q_2 \circ f$  y  $q_1^2 \circ g_2 = g_1$ . En general, para cada  $i \geq 2$ , existe  $g_i : X \rightarrow E_i$  tal que  $g_i \circ s = q_i \circ f$  y  $q_{i-1}^i \circ g_i = g_{i-1}$ .

Por otro lado, por la propiedad universal de  $E$ , existe una única función continua  $\varphi : X \rightarrow E$  tal que  $q_i \circ \varphi = g_i$  para cada  $i \in \mathbb{N}$ .

Restar ver que  $\varphi \circ s = f$ . Para ello, notar que dado  $a \in A$  se verifica que  $\varphi(s(a)) = (g_1(s(a)), g_2(s(a)), \dots) = (q_1(f(a)), q_2(f(a)), \dots) = f(a)$ .

Por lo tanto  $E$  es  $\Sigma$ -fibrante. □

## 2.2. Ejemplos de familias $\Sigma$

A pesar de que las definiciones anteriores fueran dadas en una categoría arbitraria  $\mathcal{C}$ , en este trabajo nos enfocamos en las categorías  $TOP$ ,  $\mathcal{M}$ ,  $Map-TOP$  y  $Map-\mathcal{M}$ .

El siguiente paso es definir algunas familias  $\Sigma$  para posteriormente analizar los espacios  $\Sigma$ -fibrantes y  $\Sigma$ -fibraciones que hemos obtenido.

### 2.2.1. Fibraciones de Hurewicz

Sea  $\Sigma$  la colección que consta de todos los encajes cerrados de la forma  $\partial_X^0 : X \hookrightarrow X \times I$ .

Las  $\Sigma$ -fibraciones son las fibraciones de Hurewicz y cualquier espacio topológico  $Y$  es  $\Sigma$ -fibrante debido a que  $X$  es un retracto de  $X \times I$ .

Ejemplos usuales de fibraciones de Hurewicz son  $\pi_B^0 : B^I \rightarrow B$  dada por

$\pi_B^0(\omega) = \omega(0)$  para cada  $\omega \in B^I$  y  $\pi_B : B^I \longrightarrow B \times B$  dada por  $\pi_B(\omega) = (\omega(0), \omega(1))$  para cada  $\omega \in B^I$ .

### 2.2.2. La familia de todos los encajes cerrados

Definimos la colección  $\Sigma = \{s : A \hookrightarrow X : s \text{ es encaje cerrado}\}$ .

Por definición, las  $\Sigma$ -fibraciones son los  $AE$ -mapeos y los objetos  $\Sigma$ -fibrantes son los espacios extensores absolutos. Usaremos el símbolo  $Cl$  para denotar a tal familia.

### 2.2.3. Fibraciones regulares

Supongamos que  $A$  es un subconjunto cerrado de  $X$  y definimos la colección  $\Sigma = \{X \times \{0\} \cup A \times I \longrightarrow X \times I\}$ .

Las  $\Sigma$ -fibraciones son las fibraciones regulares y un objeto  $Y$  es  $\Sigma$ -fibrante si y sólo si satisface la propiedad de extensión de homotopías.

El siguiente resultado nos proporciona más ejemplos de espacios  $\Sigma$ -fibrantes.

**Proposición 2.7.** *En la categoría  $\mathcal{M}$ , si  $Y$  es un espacio  $ANE$  entonces  $Y$  es  $\Sigma$ -fibrante.*

#### **Demostración.**

Sean  $\Gamma = X \times \{0\} \cup A \times I$ ,  $j : X \times \{0\} \cup A \times I \longrightarrow X \times I$  la inclusión y  $f : \Gamma \longrightarrow Y$ , deseamos hallar una función  $F : X \times I \longrightarrow Y$  tal que  $F \circ j = f$ . Por ser  $Y$  un espacio  $ANE$ , existen una vecindad  $U$  de  $\Gamma$  en  $X \times I$  y  $\tilde{f} : U \longrightarrow Y$  tal que  $\tilde{f}|_{\Gamma} = f$ . Además, usando la compacidad de  $I$ , existe una vecindad  $V$  de  $A$  en  $X$  tal que  $V \times I \subset U$ .

Por otro lado, en virtud de que  $X$  es metrizable, existe una función continua  $\varphi : X \longrightarrow I$  tal que  $\varphi(A) = \{1\}$  y  $\varphi(X - V) = \{0\}$ .

Notar que si  $x \in V$  se sigue que  $(x, \varphi(x)t) \in V \times I \subset U$ , mientras que si  $x \in X \setminus V$  entonces  $(x, \varphi(x)t) = (x, 0) \in \Gamma \subset U$ . En resumen, para cada  $(x, t) \in X \times I$  se verifica que  $(x, \varphi(x)t) \in U$ . Luego tiene sentido definir  $F : X \times I \longrightarrow Y$  por  $F(x, t) = \tilde{f}(x, \varphi(x)t)$  para cada  $(x, t) \in X \times I$ .

Claramente  $F$  es continua, restar ver que  $F|_{\Gamma} = f$ .

Sea  $(x, t) \in \Gamma$ , si  $(x, t) \in X \times \{0\}$  entonces  $F(x, t) = F(x, 0) = \tilde{f}(x, 0) = f(x, 0)$ . Mientras que si  $(x, t) \in A \times I$  se verifica que  $F(x, t) = \tilde{f}(x, t\varphi(x)) = \tilde{f}(x, t) = f(x, t)$ .

Por lo tanto  $Y$  es un espacio  $\Sigma$ -fibrante. □

### 2.2.4. La familia de retracts por deformación fuerte

Consideremos la categoría  $\mathcal{M}$  y definimos  $\Sigma = \{s : A \hookrightarrow X \mid s \text{ es encaje cerrado y } s(A) \text{ es un retracto por deformación fuerte de } X\}$ . Tal familia la llamaremos

*SDR* debido a que son las siglas en inglés de “strong deformation retract”. Los elementos de esta familia son llamados *SDR-mapeos*. Además, usamos las expresiones *SDR-fibrante* y *SDR-fibración* para referirnos a los conceptos  $\Sigma$ -fibrante y  $\Sigma$ -fibración, respectivamente.

En este caso, todo espacio metrizable  $Y$  es *SDR-fibrante*. Un hecho más importante radica en que las *SDR-fibraciones* coinciden con las fibraciones de Hurewicz a pesar de que las familias  $\{\partial^0\}$  y *SDR* son distintas. Para demostrar esta afirmación necesitamos dos lemas previos.

**Lema 2.8.** *Sea  $p : E \rightarrow B$  una fibración de Hurewicz con  $B$  un espacio metrizable. Sean  $A$  un subconjunto cerrado en  $X$  y  $H : X \times I \rightarrow B$  tal que  $H(a, t) = H(a, 0)$  para cada  $(a, t) \in A \times I$ . Finalmente, si el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & E \\ \partial_X^0 \downarrow & & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

entonces existe  $\tilde{H} : X \times I \rightarrow E$  tal que  $\tilde{H}(x, 0) = h(x)$  para cada  $x \in X$ ,  $p \circ \tilde{H} = H$  y  $\tilde{H}(a, t) = \tilde{H}(a, 0) = h(a)$  para cada  $(a, t) \in A \times I$ .

### Demostración.

Por ser  $B$  un espacio metrizable existe una métrica  $d : B \times B \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  sobre  $B$  tal que la topología de  $B$  coincide con  $\tau_d$ . Más aún, podemos suponer que  $\text{diam}(B) = \sup\{d(x, y) : x, y \in B\} \leq 1$ . En caso contrario definimos una nueva métrica,  $d^*(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$  para cada  $(x, y) \in B \times B$ , la cual es equivalente a  $d$  y satisface que  $\text{diam}(B) \leq 1$ .

Sea  $\varphi : X \rightarrow I$  dada por  $\varphi(x) = \text{diam}(H(\{x\} \times I))$  para cada  $x \in X$ . Notar que  $A \subset \varphi^{-1}(0)$ , no obstante, podemos suponer que  $A = \varphi^{-1}(0)$  pues en caso contrario definimos  $A' = \{x \in X : H(x, t) = H(x, 0), t \in I\}$ , obteniendo así que  $A'$  es cerrado,  $A \subset A'$  y  $A' = \varphi^{-1}(0)$ . Además, es claro que si probamos el teorema para  $A'$  se sigue cumpliendo para  $A$ .

Definimos  $F : X \times I \rightarrow B$  por

$$F(x, t) = \begin{cases} H(x, \frac{t}{\varphi(x)}) & \text{si } t < \varphi(x), \\ H(x, 1) & \text{si } t \geq \varphi(x). \end{cases}$$

Veamos que  $F$  es continua.

Sean  $A_0 = \{(x, t) \in X \times I : \varphi(x) = 0\} = A \times I$  y  $A_1 = \{(x, t) \in X \times I : \varphi(x) > 0\} = (X \setminus A) \times I$ . Notar que  $A_0 \cup A_1 = X \times I$  y  $A_1 = B_1 \cup B_2$ , donde  $B_1, B_2$  son cerrados en  $A_1$ .

Notar que  $F|_{A_1}$  es continua en  $A_1$  y como  $A_1$  es abierto en  $X \times I$ , concluimos

que  $F$  es continua en cada punto de  $A_1$ .

Resta ver que  $F$  es continua en  $A_0$ .

Sean  $(x_0, t_0) \in A_0$  y  $D$  una vecindad abierta de  $F(x_0, t_0) = H(x_0, 1) = H(x_0, t_0)$ . Notemos que  $\{x_0\} \times I \subset H^{-1}(D)$  y como  $I$  es compacto existe una vecindad abierta  $W$  de  $x_0$  en  $X$  tal que  $W \times I \subset H^{-1}(D)$ , es decir,  $H(W \times I) \subset D$ . Esto implica que  $F(W \times I) \subset D$  y así  $F$  es continua en  $A_0$ .

Hemos probado que  $F$  es continua.

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & E \\ \partial_X^0 \downarrow & & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{F} & B. \end{array}$$

Por ser  $p$  fibración, existe  $\widehat{F} : X \times I \rightarrow E$  continua tal que  $\widehat{F} \circ \partial_X^0 = h$  y  $p \circ \widehat{F} = F$ .

Definimos  $\tilde{H} : X \times I \rightarrow E$  por  $\tilde{H}(x, t) = \widehat{F}(x, t\varphi(x))$  para cada  $(x, t) \in X \times I$ . Es claro que  $\tilde{H}$  es continua,  $\tilde{H} \circ \partial_X^0 = h$  y  $p \circ \tilde{H} = F$ . Además, para cada  $(a, t) \in A \times I$ ,  $\tilde{H}(a, t) = \widehat{F}(a, t\varphi(a)) = \widehat{F}(a, 0) = \tilde{H}(a, 0)$ .

□

**Lema 2.9.** *A es un retracto por deformación fuerte de X si y sólo si para cada fibración de Hurewicz  $p : E \rightarrow B$ , con B un espacio metrizable, y cada diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & E \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{F} & B, \end{array}$$

existe  $\tilde{F} : X \rightarrow E$  tal que  $\tilde{F} \circ i = f$  y  $p \circ \tilde{F} = F$ .

**Demostración.**

Sea  $p : E \rightarrow B$  una fibración de Hurewicz y consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & E \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{F} & B. \end{array}$$

Por ser  $A$  un retracto por deformación fuerte de  $X$ , existen funciones continuas  $r : X \rightarrow A$  y  $H : X \times I \rightarrow X$  tales que  $r \circ i = id_A$  y

- $H(x, 0) = x$  para cada  $x \in X$ ,

- $H(x, 1) = r(x)$  para cada  $x \in X$ ,
- $H(a, t) = a$  para cada  $(a, t) \in A \times I$ .

Definimos  $h : X \times \{1\} \longrightarrow A$  por  $h(x, 1) = r(x)$  para cada  $x \in X$ . Notar que tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X \times \{1\} & \xrightarrow{f \circ h} & E \\ \downarrow & & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{F \circ H} & B, \end{array}$$

más aún, para cada  $(a, t) \in A \times I$ ,  $F(H(a, t)) = F(a)$ .

Por el lema 2.8 existe  $\tilde{H} : X \times I \longrightarrow E$  tal que  $\tilde{H}(x, 1) = (f \circ h)(x)$ ,  $p \circ \tilde{H} = F \circ H$  y  $\tilde{H}(a, t) = \tilde{H}(a, 0) = f(a)$ ;  $x \in X$ ,  $a \in A$  y  $t \in I$ .

Definimos  $\tilde{F} : X \longrightarrow E$  por  $\tilde{F}(x) = \tilde{H}(x, 0)$  para cada  $x \in X$ .

Resta ver que  $\tilde{F}$  satisface las condiciones deseadas. En efecto:

- $\tilde{F}(i(a)) = \tilde{F}(a) = \tilde{H}(a, 0) = f(a)$ ,  $a \in A$  y
- $p(\tilde{F}(x)) = p(\tilde{H}(x, 0)) = F(H(x, 0)) = F(x)$ ,  $x \in X$ .

Recíprocamente, consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{id_A} & A \\ \downarrow i & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & \{*\}. \end{array}$$

Recordar que con la familia  $\Sigma = \{\partial_X^0 : X \hookrightarrow X \times I\}$  todo espacio es  $\Sigma$ -fibrante.

En particular,  $A$  lo es y por lo tanto  $A \longrightarrow \{*\}$  es fibración de Hurewicz.

Por hipótesis existe  $r : X \longrightarrow A$  tal que  $r \circ i = id_A$ . Veamos que  $i \circ r \simeq id_X$  rel  $A$ .

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X^I \\ \downarrow i & & \downarrow \pi_X \\ X & \xrightarrow{\psi} & X \times X, \end{array}$$

donde  $f(a)(t) = a$ ,  $\psi(x) = (x, r(x))$  y  $\pi_X(\omega) = (\omega(0), \omega(1))$  para cada  $a \in A$ ,  $t \in I$ ,  $x \in X$  y  $\omega \in X^I$ .

Dado que  $\pi_X$  es fibración de Hurewicz, existe  $\tilde{H} : X \longrightarrow X^I$  tal que  $\tilde{H} \circ i = f$  y  $\pi_X \circ \tilde{H} = \psi$ .

Definimos  $H : X \times I \longrightarrow X$  por  $H(x, t) = \tilde{H}(x)(t)$  para cada  $(x, t) \in X \times I$ .

Resta ver que  $H : i \circ r \simeq id_X$  rel  $A$ . En efecto:

- para cada  $(a, t) \in A \times I$ ,  $H(a, t) = \tilde{H}(a)(t) = f(a)(t) = a$ ;
- para cada  $x \in X$ ,  $(x, r(x)) = \psi(x) = \pi_X(\tilde{H}(x)) = (\tilde{H}(x)(0), \tilde{H}(x)(1))$ , es decir,  $H(x, 0) = x$  y  $H(x, 1) = r(x)$ .

Por lo tanto  $A$  es un retracto por deformación fuerte de  $X$ .

□

Finalmente, probamos el siguiente teorema.

**Teorema 2.10.** *Sea  $B$  un espacio metrizable.*

*$p : E \rightarrow B$  es fibración de Hurewicz si y sólo si  $p$  es  $SDR$ -fibración.*

**Demostración.**

Supongamos que  $p$  es fibración de Hurewicz y sea  $s : A \hookrightarrow X$  un encaje cerrado tal que  $s(A)$  es un retracto por deformación fuerte de  $X$ . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $s(a) = a$  para cada  $a \in A$ . El lema 2.9 nos garantiza que  $p$  es  $SDR$ -fibración.

Recíprocamente, supongamos que  $p$  es una  $SDR$ -fibración y consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & E \\ \partial_X^0 \downarrow & & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{H} & B. \end{array}$$

Es claro que  $\partial_X^0$  es un encaje cerrado. Veamos que  $\partial_X^0(X) = X \times \{0\}$  es un retracto fuerte por deformación de  $X \times I$ .

La función  $D : (X \times I) \times I \rightarrow X \times I$ , dada por  $D((x, t), \tau) = (x, (1 - \tau)t)$  para cada  $((x, t), \tau) \in (X \times I) \times I$ , es la homotopía requerida.

Notar que  $D((x, t), 0) = (x, t) = id_{X \times I}(x, t)$  para cada  $(x, t) \in X \times I$ ,  $D((x, t), 1) = (x, 0) \in X \times \{0\}$  para cada  $(x, t) \in X \times I$ , mientras que  $D((x, 0), \tau) = (x, 0)$  para cada  $\tau \in I$ .

Dado que  $p$  es  $SDR$ -fibración existe  $\tilde{H} : X \times I \rightarrow E$  tal que  $\tilde{H} \circ j = f$  y  $p \circ \tilde{H} = H$ . Por lo tanto  $p$  es fibración de Hurewicz.

□

### 2.2.5. Fibraciones fuertes y espacios fibrantes (en el sentido de Cathey)

El siguiente concepto fue propuesto por el matemático F. Cathey en su tesis doctoral en 1981 y generaliza el de retracto por deformación fuerte.

Para la definición de esta familia es importante recalcar que trabajamos en la categoría  $\mathcal{M}$ .

**Definición 2.11.** Un subconjunto cerrado  $A$  de un espacio  $X$  se denomina **SSDR** si existe un encaje  $i : X \hookrightarrow Y$ , donde  $Y$  es un espacio  $AR$ , tal que para cualesquiera vecindades  $U$  y  $V$  de  $i(X)$  y  $i(A)$  en  $Y$  respectivamente, existe una homotopía  $H : X \times I \longrightarrow U$  tal que

1.  $H(x, 0) = x$  para cada  $x \in X$ ,
2.  $H(x, 1) \in V$  para cada  $x \in X$  y
3.  $H(a, t) = a$  para cada  $(a, t) \in A \times I$ .

Antes de definir nuestra familia  $\Sigma$  es conveniente hacer las siguientes observaciones.

1.- El espacio  $AR$  existe debido al corolario 1.5 pues todo espacio métrico puede ser encajado, como subconjunto cerrado, en un espacio  $AE$  y por tanto en un espacio  $AR$ .

2.- La definición previa no depende del encaje  $i$ .

Sea  $s : X \hookrightarrow W$  otro encaje con  $W$  un espacio  $AR$ . Claramente podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $s(x) = x = i(x)$  para cada  $x \in X$ .

Sean  $U'$  y  $V'$  vecindades de  $s(X)$  y  $s(A)$  en  $W$  respectivamente. Dado que  $W$  es un espacio  $AE$  existe  $\varphi : Y \longrightarrow W$  continua tal que  $\varphi|_X = s$ . Notar que  $i(X) \subset \varphi^{-1}(s(X)) \subset \varphi^{-1}(U')$  y  $i(A) \subset \varphi^{-1}(s(A)) \subset \varphi^{-1}(V')$ , es decir,  $\varphi^{-1}(U')$  y  $\varphi^{-1}(V')$  son vecindades de  $i(X)$  y  $i(A)$  en  $Y$  respectivamente. Por hipótesis existe  $H : X \times I \longrightarrow \varphi^{-1}(U')$  tal que

1.  $H(x, 0) = x$  para cada  $x \in X$ ,
2.  $H(x, 1) \in \varphi^{-1}(V')$  para cada  $x \in X$  y
3.  $H(a, t) = a$  para cada  $(a, t) \in A \times I$ .

Definimos  $G : X \times I \longrightarrow U'$  por  $\varphi(H(x, t))$  para cada  $(x, t) \in X \times I$ . Observar que  $G$  es continua y además

1.  $G(x, 0) = \varphi(H(x, 0)) = \varphi(x) = s(x) = x$  para cada  $x \in X$ ,
2.  $G(x, 1) = \varphi(H(x, 1)) \in \varphi(\varphi^{-1}(V')) \subset V'$  para cada  $x \in X$  y
3.  $G(a, t) = \varphi(H(a, t)) = \varphi(a) = s(a) = a$  para cada  $(a, t) \in A \times I$ .

Por lo tanto la definición 2.11 no depende del encaje  $i$ .

Finalmente, definimos  $\Sigma = \{s : A \hookrightarrow X \mid s \text{ es encaje cerrado y } s(A) \text{ es un SSDR de } X\}$ . Tal familia la denotaremos por  $SSDR$ , sus elementos se conocen como **SSDR-mapeos**, las  $SSDR$ -fibraciones son llamadas fibraciones fuertes, mientras que para los espacios  $SSDR$ -fibrantes usaremos simplemente el término espacios fibrantes (en el sentido de Cathey).



Es claro que  $SDR \subset SSDR$  y por consiguiente toda fibración fuerte es  $SDR$ -fibración.

Veamos una caracterización interesante de los  $SSDR$ -mapeos debida a Cathey.

**Teorema 2.12.** *Sea  $s : A \hookrightarrow X$  un encaje cerrado. Son equivalentes:*

1.  $s$  es un  $SSDR$ -mapeo;
2. para cada  $f : A \rightarrow Y$  con  $Y$  un espacio  $ANR$ , existe  $\tilde{f} : X \rightarrow Y$  tal que  $\tilde{f} \circ s = f$ , además, si  $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : X \rightarrow Y$  son extensiones de  $f$  se cumple que  $\tilde{f}_1 \simeq \tilde{f}_2$  rel  $s(A)$ ;
3. para cada fibración de Hurewicz  $p : E \rightarrow B$ , donde  $E$  y  $B$  son espacios  $ANR$ , y cada diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & E \\ s \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{F} & B \end{array}$$

existe  $\tilde{F} : X \rightarrow E$  tal que  $\tilde{F} \circ s = f$  y  $p \circ \tilde{F} = F$ .

### Demostración.

Podemos suponer que  $s(a) = a$  para cada  $a \in A$ .

Veamos que 2 se sigue de 1.

Sean  $f : A \rightarrow Y$  donde  $Y$  es un espacio  $ANR$  y  $M$  un espacio  $AR$  tal que  $X$  es encajado en  $M$  como subconjunto cerrado (corolario 1.14). Por el teorema 1.15 se sigue que  $Y$  es un espacio  $ANE$ , luego existen una vecindad  $V$  de  $A$  en  $M$  y  $g : V \rightarrow Y$  tal que  $g|_A = f$ .

Debido a que  $s$  es un  $SSDR$ -mapeo existe  $H : X \times I \rightarrow M$  tal que  $H(x, 0) = x$ ,  $H(x, 1) \in V$  y  $H(a, t) = a$  para cada  $x \in X$ ,  $t \in I$  y  $a \in A$ . Definimos  $\tilde{f} : X \rightarrow Y$  por  $\tilde{f}(x) = g(H(x, 1))$  para cada  $x \in X$ . Notar que para cada  $a \in A$ ,  $\tilde{f}(a) = g(H(a, 1)) = g(a) = f(a)$ .

Sean  $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : X \rightarrow Y$  extensiones de  $f$ .

Consideremos  $F : \Gamma = X \times \{0, 1\} \cup A \times I \rightarrow Y$  dada por

$$\begin{aligned} F(x, 0) &= \tilde{f}_1(x) && \text{si } (x, 0) \in X \times \{0\} \\ F(x, 1) &= \tilde{f}_2(x) && \text{si } (x, 1) \in X \times \{1\} \\ F(a, t) &= f(a) && \text{si } (a, t) \in A \times I. \end{aligned}$$

Notar que  $F$  está bien definida porque  $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$  extensiones de  $f$ .

Debido a que  $Y$  es un espacio  $ANE$ , existen una vecindad  $W$  de  $\Gamma$  en  $M \times I$  y  $\tilde{F} : W \rightarrow Y$  tal que  $\tilde{F}|_\Gamma = F$ . Además, sabemos que existe una vecindad  $U$  de  $X$  en  $M$  tal que  $U \times \{0\} \subset W$  y  $U \times \{1\} \subset W$ . Usando la compacidad

de  $I$  hallamos una vecindad  $O$  de  $A$  en  $M$  tal que  $O \times I \subset W$ .

En virtud de que  $s$  es un  $SSDR$ -mapeo existe  $G : X \times I \rightarrow U$  tal que  $G(x, 0) = x$ ,  $G(x, 1) \in O$  y  $G(a, t) = a$  para cada  $x \in X$ ,  $t \in I$  y  $a \in A$ .

Definimos tres homotopías  $\bar{G}, G^*, \tilde{G} : X \times I \rightarrow Y$  de la siguiente manera:

$$\bar{G}(x, t) = \tilde{F}(G(x, t), 0), G^*(x, t) = \tilde{F}(G(x, t), 1), \text{ y } \tilde{G}(x, t) = \tilde{F}(G(x, 1), t);$$

para cada  $(x, t) \in X \times I$ .

Notar que

- $\bar{G}(x, 0) = \tilde{F}(G(x, 0), 0) = \tilde{F}(x, 0) = F(x, 0) = \tilde{f}_1(x)$ ,  
 $\bar{G}(x, 1) = \tilde{F}(G(x, 1), 0)$  y  
 $\bar{G}(a, t) = \tilde{F}(G(a, t), 0) = \tilde{F}(a, 0) = F(a, 0) = f(a)$ ;
- $G^*(x, 0) = \tilde{F}(G(x, 0), 1) = \tilde{F}(x, 1) = F(x, 1) = \tilde{f}_2(x)$ ,  
 $G^*(x, 1) = \tilde{F}(G(x, 1), 1)$  y  
 $G^*(a, t) = \tilde{F}(G(a, t), 1) = \tilde{F}(a, 1) = F(a, 1) = f(a)$ ;
- $\tilde{G}(x, 0) = \tilde{F}(G(x, 1), 0)$ ,  
 $\tilde{G}(x, 1) = \tilde{F}(G(x, 1), 1)$  y  
 $\tilde{G}(a, t) = \tilde{F}(G(a, 1), t) = \tilde{F}(a, t) = F(a, t) = f(a)$ .

Finalmente, por transitividad, concluimos que  $\tilde{f}_1 \simeq \tilde{f}_2$  rel  $s(A)$ .

Veamos que 2 implica 3.

Sea  $p : E \rightarrow B$  una fibrición entre espacios  $ANR$  y consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & E \\ s \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{F} & B. \end{array}$$

Por hipótesis existe  $\tilde{f} : X \rightarrow E$  tal que  $\tilde{f} \circ s = f$ . Observar que  $F$  y  $p \circ \tilde{f}$  son extensiones de  $p \circ f$ , luego existe  $H : X \times I \rightarrow B$  continua tal que  $H : p \circ \tilde{f} \simeq F$  rel  $s(A)$ .

Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \partial_X^0 \downarrow & & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{H} & B, \end{array}$$

por el teorema 2.8 existe  $\tilde{H} : X \times I \rightarrow E$  tal que  $\tilde{H} \circ \partial_X^0 = \tilde{f}$ ,  $p \circ \tilde{H} = H$  y  $\tilde{H}(s(a), t) = \tilde{H}(s(a), 0)$  para cada  $s(a) \in s(A)$ .

Definimos  $\tilde{F} : X \rightarrow E$  por  $\tilde{F}(x) = \tilde{H}(x, 1)$  para cada  $x \in X$ . Resta ver que  $\tilde{F} \circ s = f$  y  $p \circ \tilde{F} = F$ . En efecto:

- $\tilde{F}(s(a)) = \tilde{H}(s(a), 1) = \tilde{H}(s(a), 0) = \tilde{f}(s(a)) = f(a), a \in A;$
- $p \circ \tilde{F}(x) = p(\tilde{H}(x, 1)) = H(x, 1) = F(x), x \in X.$

Probaremos que 3 implica 1.

Nuevamente, sea  $M$  un espacio  $AR$  tal que  $X$  es encajado en  $M$  como subconjunto cerrado (corolario 1.14). Además, supongamos sin pérdida de generalidad que  $s(a) = a$  para cada  $a \in A$ .

Sean  $U$  y  $V$  vecindades abiertas de  $A$  y  $X$  en  $M$  respectivamente. Primero, consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & U \\ s \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & \{*\}. \end{array}$$

Notar que  $M$  es un espacio  $ANR$  y como  $U$  es abierto en  $M$ , se sigue que  $U$  también lo es. Por el inciso 3 existe  $r : X \longrightarrow U$  tal que  $r \circ s = i$ .

Por otro lado, consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & V^I \\ s \downarrow & & \downarrow \pi_V \\ X & \xrightarrow{g} & V \times V, \end{array}$$

donde  $h(a)(t) = a$ ,  $g(x) = (x, r(x))$  y  $\pi_V(\omega) = (\omega(0), \omega(1))$  para cada  $a \in A$ ,  $t \in I$ ,  $x \in X$  y  $\omega \in V^I$ .

Nuevamente, como  $V$  es abierto en  $M$  y este es un espacio  $ANR$ , obtenemos que  $V$  también lo es. Además,  $V \times V$  y  $V^I$  son espacios  $ANR$  (véase [7, pág. 97 y 186]) y por hipótesis existe  $\tilde{g} : X \longrightarrow V^I$  tal que  $\tilde{g} \circ s = h$  y  $\pi_V \circ \tilde{g} = g$ . Definimos  $H : X \times I \longrightarrow V$  por  $H(x, t) = \tilde{g}(x)(t)$  para cada  $(x, t) \in X \times I$ .

Resta ver que  $H$  satisface las condiciones deseadas. En efecto:

- $H(x, 0) = \tilde{g}(x)(0) = x, x \in X;$
- $H(x, 1) = \tilde{g}(x)(1) = r(x) \in U, x \in X$  y
- $H(a, t) = \tilde{g}(a)(t) = (\tilde{g} \circ s)(a)(t) = h(a)(t) = a, a \in A$  y  $t \in I.$

Por lo tanto  $s$  es un  $SSDR$ -mapeo.

□

**Corolario 2.13.** Sean  $A$  un subconjunto cerrado de  $X$ . El encaje cerrado  $i : X \times \{0\} \cup A \times I \hookrightarrow X \times I$  es un  $SSDR$ -mapeo.

**Demostración.**

Sea  $f : X \times \{0\} \cup A \times I \longrightarrow Y$  con  $Y$  un espacio  $ANR$ , deseamos hallar  $\tilde{f} : X \times I \longrightarrow Y$  tal que  $\tilde{f} \circ i = f$ .

Sea  $\Sigma = \{X \times \{0\} \cup A \times I \hookrightarrow X \times I\}$ . Por el teorema 1.15 se sigue que  $Y$  es un espacio  $ANE$  y por la proposición 2.7 obtenemos que  $Y$  es  $\Sigma$ -fibrante. Por tanto queda garantizada la existencia de  $\tilde{f}$  con las propiedades deseadas.

Por el inciso 2 del teorema 2.12 hemos probado que  $i$  es un  $SSDR$ -mapeo.  $\square$

**Observación 1**

El corolario 2.13 afirma que  $\{X \times \{0\} \cup A \times I \longrightarrow X \times I\} \subset SSDR$ , luego toda fibración fuerte es fibración regular.

**Observación 2**

El inciso 2 del teorema 2.12 indica que todo espacio  $ANR$  es fibrante.

**Observación 3**

El inciso 3 del teorema 2.12 afirma que si  $p : E \longrightarrow B$  es una fibración de Hurewicz entre espacios  $ANR$  entonces  $p$  es fibración fuerte. Más adelante, probaremos que la misma conclusión es válida si suponemos que tanto  $E$  como  $B$  son fibrantes.

## 2.3. Familias cerradas bajo extensiones cilíndricas

En la sección del teorema de factorización veremos la utilidad de este tipo de familias.

**Definición 2.14.** Sea  $\Sigma \subset Cl$ .

$\Sigma$  es **cerrada bajo extensiones cilíndricas** si para cada  $s : A \hookrightarrow X$ , con  $s \in \Sigma$ , se satisface que  $\tilde{s} \in \Sigma$  con  $\tilde{s} : X \times \{0, 1\} \cup A \times I \hookrightarrow X \times I$ .

Un ejemplo inmediato de familia cerrada bajo extensiones cilíndricas es aquella que consta de todos los encajes cerrados  $s : A \hookrightarrow X$ . La idea de presentar los siguientes resultados radica en su utilidad para corroborar que  $SDR$  y  $SSDR$  son familias de este tipo.

**Proposición 2.15.** Si  $E$  es un espacio  $ANE$  entonces  $E^I$  también lo es.

**Demostración.**

Sean  $A$  un subconjunto cerrado de  $X$  y  $f : A \longrightarrow E^I$ , deseamos hallar una vecindad  $U$  de  $A$  en  $X$  y  $g : U \longrightarrow E^I$  tal que  $g|_A = f$ .

Definimos  $\hat{f} : A \times I \longrightarrow E$  por  $\hat{f}(a, t) = f(a)(t)$  para cada  $(a, t) \in A \times I$ .

Notar que  $A \times I$  es cerrado en  $X \times I$  y debido a que  $E$  es un espacio ANE existen una vecindad  $W$  de  $A \times I$  en  $X \times I$  y  $\widehat{g} : W \rightarrow E$  tal que  $\widehat{g}|_{A \times I} = \widehat{f}$ . Por otro lado, como  $I$  es compacto, existe una vecindad  $U$  de  $A$  en  $X$  tal que  $U \times I \subset W$ . Definimos  $g : U \rightarrow E^I$  por  $g(u)(t) = \widehat{g}(u, t)$  para cada  $u \in U$  y  $t \in I$ .

Veamos que  $g$  satisface la condición deseada.

En efecto: sean  $a \in A$  y  $t \in I$ , observar que  $g(a)(t) = \widehat{g}(a, t) = \widehat{f}(a, t) = f(a)(t)$ ; es decir,  $g|_A = f$ .

Por lo tanto  $E^I$  es un espacio ANE. □

### Observación

Si  $E$  es metrizable y  $d$  es su métrica entonces  $E^I$  es metrizable usando la métrica  $\rho(\alpha, \beta) = \sup\{d(\alpha(t), \beta(t)) : t \in I\}$  con  $\alpha, \beta \in E^I$ . Además, la topología inducida por  $\rho$  coincide con la topología compacto-abierto. Por lo tanto  $E^I$  es espacio ANE si y sólo si es espacio ANR.

**Proposición 2.16.** *Consideremos el siguiente diagrama pullback*

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{f} & E \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{h} & B. \end{array}$$

Si  $E, B, B'$  son espacios ANE y  $p$  es fibración de Hurewicz, entonces  $E'$  es un espacio ANE.

### Demostración.

Sean  $A$  un subconjunto cerrado de  $X$  y  $g : A \rightarrow E'$ , necesitamos hallar una vecindad  $V$  de  $A$  en  $X$  y  $r : V \rightarrow E'$  tal que  $r|_A = g$ .

Por ser  $E$  y  $B'$  espacios ANE existen vecindades  $U_1$  y  $U_2$  de  $A$  y funciones  $g_1 : U_1 \rightarrow E, g_2 : U_2 \rightarrow B'$  tales que  $g_1|_A = f \circ g$  y  $g_2|_A = q \circ g$ .

Sean  $U = U_1 \cap U_2, \tilde{g}_1 = g_1|_U$  y  $\tilde{g}_2 = g_2|_U$ , entonces  $U$  sigue siendo vecindad de  $A$  en  $X$  y  $\tilde{g}_1|_A = f \circ g, \tilde{g}_2|_A = q \circ g$ .

Consideremos  $F : \Gamma = U \times \{0, 1\} \cup A \times I \rightarrow B$  dada por

$$\begin{aligned} F(u, 0) &= (p \circ \tilde{g}_1)(u) && \text{si } (u, 0) \in U \times \{0\} \\ F(u, 1) &= (h \circ \tilde{g}_2)(u) && \text{si } (u, 1) \in U \times \{1\} \\ F(a, t) &= (p \circ f \circ g)(a) && \text{si } (a, t) \in A \times I. \end{aligned}$$

Notar que  $F$  está bien definida porque  $p \circ \tilde{g}_1|_A = h \circ \tilde{g}_2|_A = p \circ f \circ g$ .

Por ser  $B$  un espacio ANE existen una vecindad  $W$  de  $\Gamma$  en  $U \times I$  y  $\tilde{F} : W \rightarrow B$  tal que  $\tilde{F}|_\Gamma = F$ . Además, como  $I$  es compacto existe una vecindad  $V$  de  $A$  en  $U$  tal que  $V \times I \subset W$ . Observar que  $V$  también es una vecindad de  $A$  en

X.

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\tilde{g}_1|_V} & E \\ \partial_V^0 \downarrow & & \downarrow p \\ V \times I & \xrightarrow{\tilde{F}|_{V \times I}} & B, \end{array}$$

observar que para cada  $(a, t) \in A \times I$ ,  $\tilde{F}|_{V \times I}(a, t) = \tilde{F}(a, t) = F(a, t) = (p \circ f \circ g)(a)$ .

Por el lema 2.8 existe  $G : V \times I \rightarrow E$  tal que  $G \circ \partial_V^0 = \tilde{g}_1|_V$ ,  $p \circ G = \tilde{F}|_{V \times I}$  y  $G(a, t) = G(a, 0) = \tilde{g}_1(a)$  para cada  $(a, t) \in A \times I$ .

Sea  $\varphi : V \rightarrow E$  dada por  $\varphi(v) = G(v, 1)$  para cada  $v \in V$ . Notar que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} V & & E \\ & \searrow \varphi & \\ & & E' \xrightarrow{f} E \\ & \searrow \tilde{g}_2|_V & \downarrow q \quad \downarrow p \\ & & B' \xrightarrow{h} B, \end{array}$$

pues  $p(\varphi(v)) = p(G(v, 1)) = \tilde{F}(v, 1) = F(v, 1) = h(\tilde{g}_2(v))$  para cada  $v \in V$ . Por la propiedad universal de  $E'$  existe una única función continua  $r : V \rightarrow E'$  tal que  $q \circ r = \tilde{g}_2|_V$  y  $f \circ r = \varphi$ .

Resta demostrar que  $r|_A = g$ .

Para ello, notar que  $f \circ g = \tilde{g}_1|_A$ ,  $q \circ g = \tilde{g}_2|_A$ ,  $q \circ r|_A = \tilde{g}_2|_A$  y  $f \circ r|_A = \tilde{g}_1|_A$ , es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & & E \\ & \searrow r|_A & \\ & & E' \xrightarrow{f} E \\ & \searrow g & \downarrow q \quad \downarrow p \\ & & B' \xrightarrow{h} B. \end{array}$$

$\tilde{g}_1|_A$  (curved arrow from  $A$  to  $E$ )  
 $\tilde{g}_2|_A$  (curved arrow from  $A$  to  $B'$ )

Por la unicidad de la función  $A \rightarrow E'$  concluimos que  $g = r|_A$ .

Por lo tanto  $E'$  es un espacio ANE.

□

Para la demostración del siguiente resultado necesitamos un análisis previo. Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 E^I & & \\
 \searrow^{\bar{p}} & \searrow^{\pi_E} & \\
 & W & \xrightarrow{\pi_B} E \times E \\
 \searrow^{p^I} & \downarrow \widehat{p \times p} & \downarrow p \times p \\
 & B^I & \xrightarrow{\pi_B} B \times B,
 \end{array}$$

donde  $W = \{(y_1, y_2, \omega) \in E \times E \times B^I : \omega(0) = p(y_1), \omega(1) = p(y_2)\}$  y  $\bar{p} = (\omega(0), \omega(1), p \circ \omega)$  para cada  $\omega \in E^I$ .

Sea  $A$  un subconjunto cerrado de  $X$  y consideremos los diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\hat{h}} & E^I \\
 s \downarrow & & \downarrow \bar{p} \\
 X & \xrightarrow{\hat{H}} & W
 \end{array} \tag{2.3}$$

y

$$\begin{array}{ccc}
 X \times \{0, 1\} \cup A \times I & \xrightarrow{h} & E \\
 \bar{s} \downarrow & & \downarrow p \\
 X \times I & \xrightarrow{H} & B,
 \end{array} \tag{2.4}$$

donde  $\hat{h}(a)(t) = h(a, t)$ ,  $\hat{H}(x) = (h(x, 0), h(x, 1), H^*(x))$  y  $H^*(x)(t) = H(x, t)$  para cada  $a \in A$ ,  $x \in X$  y  $t \in I$ .

Probaremos que la existencia de un relleno  $\hat{G} : X \rightarrow E^I$  en el cuadrado 2.3 equivale a la existencia de un relleno  $G : X \times I \rightarrow E$  en el diagrama 2.4.

Sea  $\hat{H} = (\hat{H}_1, \hat{H}_2)$ , es decir,  $\hat{H}_1 = \widehat{\pi_B} \circ \hat{H}$  y  $\hat{H}_2 = \widehat{p \times p} \circ \hat{H}$ . La conmutatividad del diagrama 2.3 equivale a la conmutatividad de los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\hat{h}} & E^I \\
 s \downarrow & & \downarrow \pi_E \\
 X & \xrightarrow{\hat{H}_1} & E \times E
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\hat{h}} & E^I \\
 s \downarrow & & \downarrow p^I \\
 X & \xrightarrow{\hat{H}_2} & B^I.
 \end{array}$$

Deseamos hallar  $\hat{G} : X \rightarrow E^I$  tal que  $\hat{G} \circ s = \hat{h}$ ,  $\pi_E \circ \hat{G} = \hat{H}_1$  y  $p^I \circ \hat{G} = \hat{H}_2$ . Usando que los funtores  $-^I$ ,  $- \times I$  y los morfismos de funtores  $\pi$ ,  $\partial$  son adjuntos

es posible modificar nuestros problemas de levantamiento y extensión iniciales, en los siguientes diagramas ejemplificamos tal hecho:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\hat{h}} & E^I \\
 s \downarrow & \nearrow \hat{G} & \\
 X & & 
 \end{array} & \longleftrightarrow & \begin{array}{ccc}
 A \times I & \xrightarrow{\tilde{h}} & E \\
 s \times id_I \downarrow & \nearrow G & \\
 X \times I & & 
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 & & E^I \\
 & \nearrow \hat{G} & \downarrow \pi_E \\
 X & \xrightarrow{\hat{H}_1} & E \times E \\
 & & \downarrow \\
 & & X \times I
 \end{array} & \longleftrightarrow & \begin{array}{ccc}
 & & X \times \{0, 1\} \xrightarrow{\tilde{H}_1} E \\
 & & \downarrow \\
 & & X \times I
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 & & E^I \\
 & \nearrow \hat{G} & \downarrow p^I \\
 X & \xrightarrow{\hat{H}_2} & B^I \\
 & & \downarrow \\
 & & X \times I
 \end{array} & \longleftrightarrow & \begin{array}{ccc}
 & & E \\
 & \nearrow G & \downarrow p \\
 X \times I & \xrightarrow{H} & B, \\
 & & \downarrow \\
 & & X \times I
 \end{array}
 \end{array} \tag{2.5}$$

donde  $\tilde{h}(a, t) = \hat{h}(a)(t)$ ,  $G(x, t) = \hat{G}(x)(t)$ ,  $\hat{H}_1(x) = (\tilde{H}_1(x, 0), \tilde{H}_1(x, 1))$ ,  $H(x, t) = \hat{H}_2(x)(t)$ ; para cada  $x \in X$ ,  $a \in A$ ,  $t \in I$ . Uniendo los triángulos derechos en el diagrama 2.5 obtenemos el siguiente rectángulo conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 X \times \{0, 1\} \cup A \times I & \xrightarrow{h} & E \\
 \tilde{s} \downarrow & \nearrow G & \downarrow p \\
 X \times I & \xrightarrow{H} & B,
 \end{array} \tag{2.6}$$

donde  $h(a, t) = \tilde{h}(a, t)$ ,  $h(x, 0) = \tilde{H}_1(x, 0)$ ,  $h(x, 1) = \tilde{H}_1(x, 1)$ ; para cada  $x \in X$ ,  $a \in A$ ,  $t \in I$ .

Concluimos que el relleno  $\hat{G}$  existe en 2.3 si y sólo si existe el relleno  $G$  en 2.6, justo lo que deseamos demostrar.

**Proposición 2.17.** *La familia SDR es cerrada bajo extensiones cilíndricas.*

**Demostración.**

Sea  $s \in SDR$  con  $s : A \hookrightarrow X$  y veamos que  $\tilde{s} \in SDR$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $s(a) = a$  para cada  $a \in A$ .

Sea  $p : E \rightarrow B$  una fibración de Hurewicz y tomemos en cuenta el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 X \times \{0, 1\} \cup A \times I & \xrightarrow{f} & E \\
 \tilde{s} \downarrow & & \downarrow p \\
 X \times I & \xrightarrow{F} & B.
 \end{array} \tag{2.7}$$



Si probamos la existencia de un relleno  $H : X \times I \longrightarrow E$  en el diagrama 2.7 habremos probado que  $\tilde{s} \in SDR$  (Lema 2.9). No obstante, por el análisis anterior, sabemos que la existencia de  $H$  equivale a la existencia de un relleno  $\widehat{H} : X \longrightarrow E^I$  tal que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\widehat{f}} & E^I \\ s \downarrow & & \downarrow \widehat{p} \\ X & \xrightarrow{\widehat{F}} & W, \end{array} \quad (2.8)$$

donde  $W = \{(y_1, y_2, \omega) \in E \times E \times B^I : \omega(0) = p(y_1), \omega(1) = p(y_2)\}$ ,  $\widehat{f}(a)(t) = f(a, t)$ ,  $\widehat{F}(x) = (f(x, 0), f(x, 1), F^*(x))$  y  $F^*(x)(t) = F(x, t)$ ;  $a \in A$ ,  $t \in I$  y  $x \in X$ .

Notar que el relleno  $\widehat{H}$  en 2.8 estará garantizado por el Lema 2.9 si probamos que  $\widehat{p}$  es una fibrición de Hurewicz.

En efecto: tomando  $A = Z \times \{0\}$  y  $X = Z \times I$  en los diagramas 2.7 y 2.8 obtenemos los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc} Z \times \{0\} & \longrightarrow & E^I \\ \downarrow & & \downarrow \widehat{p} \\ Z \times I & \longrightarrow & W \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (Z \times I) \times \{0, 1\} \cup (Z \times \{0\}) \times I & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow p \\ (Z \times I) \times I & \longrightarrow & B. \end{array} \quad (2.9)$$

Observar que

$$\begin{aligned} (Z \times I) \times \{0, 1\} \cup (Z \times \{0\}) \times I &= Z \times (I \times \{0, 1\} \cup \{0\} \times I) \\ &\approx Z \times (I \times \{0\}) \\ &= (Z \times I) \times \{0\}. \end{aligned}$$

Dado que  $p$  es fibrición de Hurewicz se sigue que existe  $\varphi_1 : (Z \times I) \times I \longrightarrow E$  tal que hace conmutar el cuadrado derecho de 2.9, esto equivale a la existencia de un relleno  $\varphi_2 : Z \times I \longrightarrow E^I$  en el cuadrado izquierdo de 2.9. Luego  $\widehat{p}$  es fibrición de Hurewicz.

Por el lema 2.9 garantizamos la existencia de  $\widehat{H} : X \longrightarrow E^I$  tal que hace conmutar 2.8. Esto implica la existencia de  $H : X \times I \longrightarrow E$  tal que hace conmutar 2.7.

En virtud del lema 2.9 concluimos que  $X \times \{0, 1\} \cup A \times I$  es un retracto por deformación fuerte de  $X \times I$ , es decir,  $\tilde{s} \in SDR$ .

Por lo tanto  $SDR$  es cerrada bajo extensiones cilíndricas. □

**Proposición 2.18.** *La familia  $SSDR$  es cerrada bajo extensiones cilíndricas.*

**Demostración.**

Sea  $s : A \hookrightarrow X$  un  $SSDR$ -mapeo y veamos que  $\tilde{s} : X \times \{0, 1\} \cup A \times I \hookrightarrow X \times I$  también lo es. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $s(a) = a$  para cada  $a \in A$ .

Sea  $p : E \rightarrow B$  una fibración de Hurewicz entre espacios  $ANR$  y consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0, 1\} \cup A \times I & \xrightarrow{f} & E \\ \tilde{s} \downarrow & & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{F} & B. \end{array} \quad (2.10)$$

Si probamos que existe un relleno en 2.10 habremos demostrado que  $\tilde{s} \in SSDR$  (teorema 2.12). Sin embargo, la existencia de un relleno  $\tilde{F} : X \times I \rightarrow E$  en 2.10 equivale a la existencia de un relleno  $\tilde{H} : X \rightarrow E^I$  tal que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & E^I \\ s \downarrow & & \downarrow \hat{p} \\ X & \xrightarrow{H} & W, \end{array} \quad (2.11)$$

donde  $W = \{(y_1, y_2, \omega) \in E \times E \times B^I : \omega(0) = p(y_1), \omega(1) = p(y_2)\}$ ,  $g(a)(t) = f(a, t)$ ,  $H(x) = (h(x, 0), h(x, 1), H^*(x))$  y  $H^*(x)(t) = F(x, t)$ ;  $a \in A$ ,  $t \in I$  y  $x \in X$ .

Dado que  $p$  es fibración de Hurewicz se sigue que  $\hat{p}$  también lo es (véase demostración de la proposición 2.17). Además, en virtud de la proposición 2.16,  $W$  es un espacio métrico  $ANE$  (y por consiguiente un espacio  $ANR$ ) pues es el pullback de la terna  $E \times E \xrightarrow{p \times p} B \times B \xleftarrow{\pi_B} B^I$ . Además, la proposición 2.15 afirma que  $E^I$  es un espacio métrico  $ANE$  y por tanto  $E^I$  es un espacio  $ANR$ . Así,  $\hat{p} : E^I \rightarrow W$  es una fibración de Hurewicz entre espacios  $ANR$ . El teorema 2.12 garantiza la existencia de un relleno  $\tilde{H} : X \rightarrow E^I$  en 2.11 y por consiguiente un relleno  $\tilde{F} : X \times I \rightarrow E$  en 2.10.

Por el teorema 2.12 concluimos que  $\tilde{s}$  es un  $SSDR$ -mapeo.

Por lo tanto  $SSDR$  es cerrada bajo extensiones cilíndricas. □

Recordar que  $p$  es fibración de Hurewicz si y sólo si es  $SDR$ -fibración. Para el caso de la familia  $SSDR$  tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 2.19.** *Sea  $p : E \rightarrow B$  un fibración de Hurewicz.*

*Si  $E$  y  $B$  son espacios fibrantes entonces  $p$  es fibración fuerte.*

**Demostración.**

Sea  $s \in SSDR$  con  $s : A \rightarrow X$  y consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & E \\ s \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{F} & B, \end{array}$$

deseamos hallar  $\tilde{F} : X \rightarrow E$  tal que  $\tilde{F} \circ s = f$  y  $p \circ \tilde{F} = F$ .

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $s(a) = a$  para cada  $a \in A$ .

Por ser  $E$  un espacio fibrante existe  $g : X \rightarrow E$  tal que  $g \circ s = f$ . Definimos  $h : X \times \{0, 1\} \cup A \times I \rightarrow B$  dada por

$$\begin{aligned} h(x, 0) &= (p \circ g)(x) && \text{si } (x, 0) \in X \times \{0\} \\ h(x, 1) &= F(x) && \text{si } (x, 1) \in X \times \{1\} \\ h(a, t) &= F(a) && \text{si } (a, t) \in A \times I. \end{aligned}$$

Observar que  $h$  está bien definida pues para cada  $a \in A$ ,  $h(a, 0) = (p \circ g)(a) = (p \circ f)(a) = F(a)$ . Debido a que  $SSDR$  es cerrada bajo extensiones cilíndricas concluimos que  $\tilde{s} \in SSDR$ , además, como  $B$  es fibrante existe  $H : X \times I \rightarrow B$  tal que  $H \circ \tilde{s} = h$ .

Por otro lado, para cada  $x \in X$ , se verifica que  $H(x, 0) = H(\tilde{s}(x, 0)) = h(x, 0) = (p \circ g)(x)$ , esto es, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & E \\ \partial_X^0 \downarrow & & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{H} & B. \end{array}$$

Más aún, para cada  $a \in A$ ,  $H(a, t) = H(\tilde{s}(a, t)) = h(a, t) = F(a)$ . Por el lema 2.8 existe una homotopía  $\tilde{H} : X \times I \rightarrow E$  tal que  $\tilde{H} \circ \partial_X^0 = g$ ,  $p \circ \tilde{H} = H$  y  $\tilde{H}(a, t) = \tilde{H}(a, 0) = g(a) = f(a)$  para cada  $a \in A$  y  $t \in I$ .

Definimos  $\tilde{F} : X \rightarrow E$  por  $\tilde{F}(x) = \tilde{H}(x, 1)$  para cada  $x \in X$ .

Restar ver que  $\tilde{F} \circ s = f$  y  $p \circ \tilde{F} = F$ .

- Sea  $a \in A$ ,  $(\tilde{F} \circ s)(a) = \tilde{F}(a) = \tilde{H}(a, 1) = \tilde{H}(a, 0) = g(a) = f(a)$ .
- Sea  $x \in X$ ,  $(p \circ \tilde{F})(x) = p(\tilde{H}(x, 1)) = H(x, 1) = h(x, 1) = F(x)$ .

□

## 2.4. El teorema de factorización en TOP

**Definición 2.20.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua. El cocilindro de  $f$ , denotado por  $coCyl(f)$ , es el diagrama pullback de la terna  $X \xrightarrow{f} Y \xleftarrow{\pi_Y^0} Y^I$ .

Es importante remarcar que  $coCyl(f) = \{(\omega, x) \in Y^I \times X : f(x) = \omega(0)\}$ , es decir, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} coCyl(f) & \xrightarrow{\widehat{f}} & Y^I \\ \widehat{\pi}_Y^0 \downarrow & & \downarrow \pi_Y^0 \\ X & \xrightarrow{f} & Y, \end{array} \quad (2.12)$$

donde  $\widehat{\pi}_Y^0$  y  $\widehat{f}$  son las correspondientes proyecciones canónicas.

Sean  $s_f : X \rightarrow coCyl(f)$  y  $\tilde{f} : coCyl(f) \rightarrow Y$  dadas por  $s_f(x) = (x, c_{f(x)})$  ( $c_{f(x)}$  denota la trayectoria constante en el punto  $f(x)$ ) para cada  $x \in X$  y  $\tilde{f}(\omega, x) = (\pi_Y^1 \circ \widehat{f})(\omega, x) = \omega(1)$  para cada  $(x, \omega) \in coCyl(f)$ .

Notar que  $f = \tilde{f} \circ s_f$ , es decir,  $f$  admite una factorización a través de su cocilindro.

**Teorema 2.21.** (*Teorema de factorización*)

Toda función continua  $f : X \rightarrow Y$  admite una factorización de la siguiente manera:

$$X \xrightarrow{s_f} coCyl(f) \xrightarrow{\tilde{f}} Y,$$

con  $s_f \in SDR$  y  $\tilde{f}$  fibración de Hurewicz.

Además, si  $\Sigma$  es cerrada bajo extensiones cilíndricas y tanto  $X$  como  $Y$  son espacios  $\Sigma$ -fibrantes entonces  $\tilde{f}$  es  $\Sigma$ -fibración, y por lo tanto  $coCyl(f)$  es  $\Sigma$ -fibrante.

**Demostración.**

1.  $\tilde{f}$  es fibración de Hurewicz porque tanto  $\pi_Y^1$  como  $\widehat{f}$  lo son, además  $\tilde{f} = \pi_Y^1 \circ \widehat{f}$ .
2. En segundo lugar probaremos que  $s_f$  es un encaje cerrado .

a) Es claro que  $s_f$  es inyectiva.

b)  $s_f$  es continua

Definimos  $g : X \times I \rightarrow Y$  dada por  $g(x, t) = f(x)$  para cada  $(x, t) \in X \times I$ . La continuidad de  $g$  implica que  $\widehat{g} = \eta_{(X, Y)}(g) : X \rightarrow Y^I$ , dada por  $\widehat{g}(x)(t) = g(x, t) = f(x)$ , es continua. Así, las composiciones  $\widehat{f} \circ s_f = \widehat{g}$  y  $\widehat{\pi}_Y^0 \circ s_f = id_X$  son continuas, lo que nos permite concluir la continuidad de  $s_f$ .

- c) Para probar que  $s_f$  es un homeomorfismo definimos  $\phi : s_f(X) \rightarrow X$  de la siguiente manera: dado  $z \in s_f(X)$  existe un único  $x \in X$  tal que  $z = (x, c_{f(x)})$ , luego  $\phi(z) = x$ . Es claro que  $\phi$  es continua y además  $s_f \circ \phi = id_{s_f(X)}$ ,  $\phi \circ s_f = id_X$ . En resumen,  $s_f$  es un homeomorfismo.
- d)  $s_f(X)$  es cerrado en  $coCyl(f)$ .  
Dado que  $Y$  es de Hausdorff se sigue que  $Y^I$  también lo es, luego  $Y^I \times X$  es de Hausdorff y por consiguiente  $coCyl(f)$  también satisface el segundo axioma de separación. Además, porque todo retracto de un espacio de Hausdorff es cerrado, concluimos lo deseado.

Por lo tanto  $s_f$  es un encaje cerrado.

3. Probaremos que  $s_f(X)$  es un retracto por deformación fuerte de  $coCyl(f)$ . Para ello, definimos la función  $D_f : coCyl(f) \times I \rightarrow coCyl(f)$  dada por  $D_f((x, \omega), t) = (x, \omega_t)$  para cada  $((x, \omega), t) \in coCyl(f) \times I$ , donde  $\omega_t(\tau) = \omega(\tau(1-t))$  para cada  $\tau \in I$ .

- a)  $D_f$  está bien definida  
Sea  $((x, \omega), t) \in coCyl(f) \times I$  y observar que  $\omega_t(0) = \omega(0) = f(x)$ , luego  $D_f((x, \omega), t) \in coCyl(f)$ .
- b)  $D_f$  es continua  
Sea  $\psi : Y^I \times I \times I \rightarrow Y$  definida por  $\psi((\omega, t, \tau)) = \omega(\tau(1-t))$  para cada  $(\omega, t, \tau) \in Y^I \times I \times I$ . Dado que  $ev : Y^I \times I \rightarrow Y$  es continua se sigue que  $\psi$  también lo es. Luego  $\hat{\psi} : Y^I \times I \rightarrow Y^I$ , dada por  $\hat{\psi}((\omega, t))(\tau) = \psi(\omega, t, \tau) = \omega_t(\tau)$  para cada  $(\omega, t) \in Y^I \times I$  y  $\tau \in I$ , es continua. Esto implica que  $\varphi = id_X \times \hat{\psi} : X \times Y^I \times I \rightarrow X \times Y^I$  es continua y por lo tanto  $D_f = \varphi|_{coCyl(f) \times I}$  también lo es.
- c) Sea  $((x, \omega), t) \in coCyl(f) \times I$ , notar que  $D_f((x, \omega), 0) = (x, \omega_0) = (x, \omega) = id_{coCyl(f)}(x, \omega)$ ; mientras que  $D_f((x, \omega), 1) = (x, \omega_1) = (x, c_{\omega(0)}) = (x, c_{f(x)}) = s_f(x) \in s_f(X)$ .
- d) Finalmente, sea  $(x, c_{f(x)}) \in s_f(X)$  y observar que  $D_f((x, c_{f(x)}), t) = (x, c_{f(x)_t}) = (x, c_{f(x)}) = D_f((x, c_{f(x)}), 0)$ , es decir,  $D_f$  es relativa a  $s_f(X)$ .

Por lo tanto  $s_f(X)$  es un retracto por deformación fuerte de  $coCyl(f)$ , es decir,  $s_f \in SDR$ .

4. Probaremos que  $\tilde{f}$  es  $\Sigma$ -fibración.  
Sea  $s \in \Sigma$  con  $s : A \hookrightarrow Z$  y consideremos el siguiente diagrama conmu-

tativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{F} & \text{coCyl}(f) \\ s \downarrow & & \downarrow \tilde{f} \\ Z & \xrightarrow{G} & Y. \end{array}$$

Utilizando el diagrama anterior y el cuadrado 2.12 obtenemos el nuevo diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} & & A & \xrightarrow{\hat{f} \circ F} & Y^I \\ & & \downarrow \widehat{\pi}_Y^0 \circ F & & \downarrow \pi_Y^0 \\ s \swarrow & & X & \xrightarrow{f} & Y \\ & & & & \downarrow \pi_Y^1 \\ & & Z & \xrightarrow{G} & Y. \end{array}$$

Por ser  $X$  un espacio  $\Sigma$ -fibrante existe  $\beta : Z \rightarrow X$  tal que  $\beta \circ s = \widehat{\pi}_Y^0 \circ F$ . Esto implica que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\hat{f} \circ F} & Y^I \\ s \downarrow & & \downarrow (\pi_Y^0, \pi_Y^1) = \pi_Y \\ Z & \xrightarrow{(f \circ \beta, G)} & Y \times Y. \end{array} \quad (2.13)$$

En virtud de que funtores  $\_ \_{}^I$ ,  $\_ \_{} \times I$  y los morfismos de funtores  $\pi$ ,  $\partial$  son adjuntos, sabemos que la existencia de un relleno  $\widehat{\gamma} : Z \rightarrow Y^I$  en 2.13 equivale a la existencia de  $\gamma : Z \times I \rightarrow Y$  tal que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} Z \times \{0, 1\} \cup A \times I & \xrightarrow{h} & Y \\ \tilde{s} \downarrow & \nearrow \gamma & \\ Z \times I, & & \end{array} \quad (2.14)$$

donde  $h(a, t) = (\hat{f} \circ F)(a)(t)$ ,  $h(z, 0) = (f \circ \beta)(z)$  y  $h(z, 1) = G(z)$ , para cada  $a \in A$ ,  $t \in I$ ,  $z \in Z$ .

Dado que  $\Sigma$  es cerrada bajo extensiones cilíndricas obtenemos que  $\tilde{s} \in \Sigma$ . Además, por ser  $Y$  un espacio  $\Sigma$ -fibrante existe  $\gamma : Z \times I \rightarrow Y$  tal que  $\gamma \circ \tilde{s} = h$  y por consiguiente existe  $\widehat{\gamma} : Z \rightarrow Y^I$  como relleno en 2.13, es decir,  $\widehat{\gamma} \circ s = \hat{f} \circ F$ ,  $\pi_Y^0 \circ \widehat{\gamma} = f \circ \beta$  y  $\pi_Y^1 \circ \widehat{\gamma} = G$ .

Por otro lado, consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 Z & & Y^I \\
 \searrow^{\hat{\gamma}} & & \downarrow \pi_Y^0 \\
 & \text{coCyl}(f) \xrightarrow{\hat{f}} & Y^I \\
 \searrow^{\beta} & \downarrow \widehat{\pi}_Y^0 & \downarrow \pi_Y^0 \\
 & X \xrightarrow{f} & Y.
 \end{array}$$

Por la propiedad universal de  $\text{coCyl}(f)$  existe una única función continua  $H : Z \rightarrow \text{coCyl}(f)$  tal que  $\widehat{\pi}_Y^0 \circ H = \beta$  y  $\hat{f} \circ H = \hat{\gamma}$ . Resta ver que  $H \circ s = F$  y  $\hat{f} \circ H = G$ .

- $G = \pi_Y^1 \circ \hat{\gamma} = \pi_Y^1 \circ (\hat{f} \circ H) = (\pi_Y^1 \circ \hat{f}) \circ H = \tilde{f} \circ H$ .
- Notar que  $\hat{f} \circ (H \circ s) = (\hat{f} \circ H) \circ s = \hat{\gamma} \circ s = \hat{f} \circ F$  y  $\widehat{\pi}_Y^0 \circ (H \circ s) = (\widehat{\pi}_Y^0 \circ H) \circ s = \beta \circ s = \widehat{\pi}_Y^0 \circ F$ , es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 A & & Y^I \\
 \searrow^{\hat{f} \circ F} & & \downarrow \pi_Y^0 \\
 & \text{coCyl}(f) \xrightarrow{\hat{f}} & Y^I \\
 \searrow^{H \circ s} & \downarrow \widehat{\pi}_Y^0 & \downarrow \pi_Y^0 \\
 & X \xrightarrow{f} & Y. \\
 \swarrow^{\widehat{\pi}_Y^0 \circ F} & & 
 \end{array}$$

Por la unicidad de la función  $A \rightarrow \text{coCyl}(f)$ , obtenemos que  $F = H \circ s$ .

Por lo tanto  $\tilde{f}$  es  $\Sigma$ -fibración.

□

**Observación**

En el caso de la familia  $SDR$ , si tanto  $X$  como  $Y$  son  $SDR$ -fibrantes obtenemos que  $s_f \in SDR$  y  $\tilde{f}$  es  $SDR$ -fibración. Además, debido a la contención  $SDR \subset SSDR$ , si suponemos que  $X$  y  $Y$  son fibrantes obtenemos que  $s_f \in SSDR$  y  $\tilde{f}$  es fibración fuerte. Es deseable que para cualquier familia cerrada bajo extensiones cilíndricas  $\Sigma$  se cumpla que  $s_f \in \Sigma$ .





## Capítulo 3

---

### $\Sigma$ -fibraciones en $Map-TOP$

---

Las nociones de  $\Sigma$ -fibración y objeto  $\Sigma$ -fibrante fueron dadas en una categoría arbitraria  $\mathcal{C}$ , no obstante, en la categoría  $Map-TOP$  dos familias particulares sobresalen.

#### 3.1. Las familias $\mathfrak{F}$ y $\widehat{\Sigma}$

Sea  $\Sigma \subset Cl$  una familia en  $TOP$  que contenga a todas las funciones identidad, por ejemplo  $SDR$ ,  $SSDR$  o  $\Sigma = Cl$ . Definimos las colecciones de morfismos en  $Map-TOP$ :

$$\mathfrak{F} = \{(s, id) : s \in \Sigma\} \text{ y } \widehat{\Sigma} = \{(s, s') : s, s' \in \Sigma\}.$$

Notar que  $\mathfrak{F} \subset \widehat{\Sigma}$  y por consiguiente toda  $\widehat{\Sigma}$ -fibración es  $\mathfrak{F}$ -fibración.

El objetivo de esta sección es caracterizar las  $\mathfrak{F}$ -fibraciones y las  $\widehat{\Sigma}$ -fibraciones, para ello el siguiente concepto es necesario.

**Definición 3.1.** *Un diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{f'} & E \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

es un **cuadrado  $\Sigma$ -fibrado** si en el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} E' & & & & \\ & \searrow^{f'} & & & \\ & & P & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ & \searrow^q & \downarrow \tilde{p} & & \downarrow p \\ & & B' & \xrightarrow{f} & B, \end{array} \quad (3.1)$$

donde el cuadrado interno es un diagrama pullback,  $q$  (la función asociada a  $p$ ) es  $\Sigma$ -fibración.

### 3.1.1. $\mathfrak{F}$ -fibraciones

**Teorema 3.2.** *Un morfismo  $\varpi = (f', f) : p' \rightarrow p$  es  $\mathfrak{F}$ -fibración si y sólo si  $\varpi$  es un cuadrado  $\Sigma$ -fibrado.*

**Demostración.**

Continuando con la notación del diagrama 3.1, supongamos que  $\varpi$  es  $\mathfrak{F}$ -fibración y veamos que  $q$  es  $\Sigma$ -fibración. Para ello, consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & E' \\ s \downarrow & & \downarrow q \\ X & \xrightarrow{g} & P, \end{array} \quad (3.2)$$

con  $s \in \Sigma$ . Probaremos que existe  $\alpha : X \rightarrow E'$  tal que  $\alpha \circ s = h$  y  $q \circ \alpha = g$ . Notar que  $(\tilde{p} \circ g) \circ s = \tilde{p} \circ (g \circ s) = \tilde{p} \circ (q \circ h) = (\tilde{p} \circ q) \circ h = p' \circ h$ ,  $(\tilde{f} \circ g) \circ s = \tilde{f} \circ (g \circ s) = \tilde{f} \circ (q \circ h) = (\tilde{f} \circ q) \circ h = f' \circ h$  y  $p \circ (f \circ g) = (p \circ f) \circ g = (f \circ \tilde{p}) \circ g$ , es decir, tenemos el siguiente cubo conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} & & A & \xrightarrow{h} & E' \\ & & \downarrow & & \downarrow p' \\ X & \xrightarrow{\tilde{p} \circ g} & B' & & E' \\ & & \downarrow s & & \downarrow f' \\ & & X & \xrightarrow{\tilde{f} \circ g} & E \\ id_X \downarrow & & \downarrow id_X & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f \circ \tilde{p} \circ g} & B, & & \end{array}$$

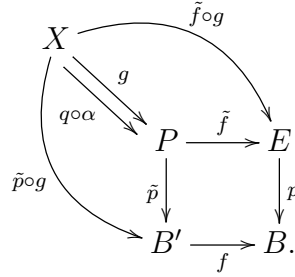
lo que equivale a tener el siguiente cuadrado conmutativo en  $Map-TOP$

$$\begin{array}{ccc} s & \xrightarrow{(h, \tilde{p} \circ g)} & p' \\ (s, id_X) \downarrow & & \downarrow \varpi = (f', f) \\ id_X & \xrightarrow{(\tilde{f} \circ g, f \circ \tilde{p} \circ g)} & p. \end{array}$$

Debido a que  $\varpi$  es  $\mathfrak{F}$ -fibración existe  $(\alpha, \beta) : id_X \rightarrow p'$  tal que  $(\alpha, \beta) \circ (s, id_X) = (h, \tilde{p} \circ g)$  y  $(f', f) \circ (\alpha, \beta) = (\tilde{f} \circ g, f \circ \tilde{p} \circ g)$ .

Proponemos  $\alpha : X \rightarrow E'$  como relleno del diagrama 3.2.

- Es claro que  $\alpha \circ s = h$ .
- Observar que  $\tilde{f} \circ (q \circ \alpha) = (\tilde{f} \circ q) \circ \alpha = f' \circ \alpha = \tilde{f} \circ g$  y  $\tilde{p} \circ (q \circ \alpha) = (\tilde{p} \circ q) \circ \alpha = p' \circ \alpha = \beta = \tilde{p} \circ g$ , esto es, tenemos el siguiente diagrama conmutativo



Por la unicidad del morfismo  $X \rightarrow P$  concluimos que  $g = q \circ \alpha$ .

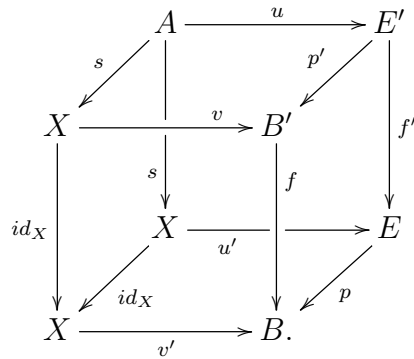
Por lo tanto  $q$  es  $\Sigma$ -fibración.

Recíprocamente, supongamos que  $\varpi$  es cuadrado  $\Sigma$ -fibrado y veamos que  $\varpi$  es  $\mathfrak{F}$ -fibración.

Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 s & \xrightarrow{(u,v)} & p' \\
 (s, id_X) \downarrow & & \downarrow \varpi = (f', f) \\
 id_X & \xrightarrow{(u', v')} & p,
 \end{array} \tag{3.3}$$

es decir, el siguiente cubo es conmutativo



Pretendemos hallar un morfismo  $id_X \rightarrow p'$  como relleno del diagrama 3.3. Observar que  $f \circ v = v' = p \circ u'$  y como  $P$  es el pullback de la terna  $B' \xrightarrow{f} B \xleftarrow{p} E$ , se garantiza la existencia de un único morfismo  $\gamma : X \rightarrow P$  tal que  $\tilde{p} \circ \gamma = v$  y  $\tilde{f} \circ \gamma = u'$ .



Así tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 E & & \\
 \downarrow p & \searrow & \\
 B & \longrightarrow & \{*\} \\
 \downarrow id_B & & \downarrow id_{\{*\}} \\
 B & \longrightarrow & \{*\}.
 \end{array}$$

(Note: The diagram also includes a curved arrow from  $E$  to  $\{*\}$  labeled  $p$ , and a curved arrow from  $E$  to  $B$  labeled  $p$ .)

Finalmente,  $p$  es  $\mathfrak{F}$ -fibrante si y sólo si  $p \rightarrow id_*$  es  $\mathfrak{F}$ -fibración, si y sólo si,  $p$  es  $\Sigma$ -fibración.

□

Si tenemos el caso excepcional en que el cuadrado  $\varpi : p' \rightarrow p$  es pullback entonces tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 3.4.**  $\varpi : p' \rightarrow p$  es un diagrama pullback si y sólo si  $\varpi$  es  $\mathfrak{F}$ -fibración con la propiedad de levantamiento único, es decir, para cada diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 s & \xrightarrow{\alpha} & p' \\
 (s, id_X) \downarrow & & \downarrow \varpi \\
 id_X & \xrightarrow{\beta} & p,
 \end{array}$$

con  $s \in \Sigma$ , existe un único morfismo  $\tilde{\beta} : id_X \rightarrow p'$  que preserva la conmutatividad del diagrama.

**Demostración.**

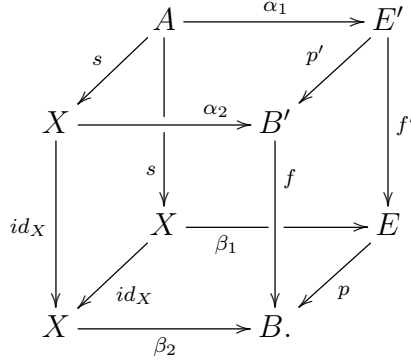
Sea  $\varpi = (f', f)$ , es decir, el siguiente cuadrado es conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 E' & \xrightarrow{f'} & E \\
 p' \downarrow & & \downarrow p \\
 B' & \xrightarrow{f} & B.
 \end{array}$$

Supongamos que  $\varpi$  es un diagrama pullback, probaremos que  $\varpi$  es  $\mathfrak{F}$ -fibración. Para ello, tomemos en cuenta el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 s & \xrightarrow{\alpha=(\alpha_1, \alpha_2)} & p' \\
 (s, id_X) \downarrow & & \downarrow \varpi=(f', f) \\
 id_X & \xrightarrow{\beta=(\beta_1, \beta_2)} & p,
 \end{array} \tag{3.5}$$

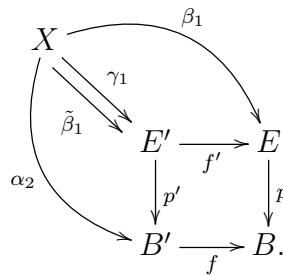
deseamos hallar un relleno  $\tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2) : id_X \longrightarrow p'$  para el diagrama 3.5. La forma “desplegada” de 3.5 es el cubo conmutativo



Debido al teorema 3.2 basta demostrar que  $\varpi$  es un cuadrado  $\Sigma$ -fibrado, esto es,  $id_{E'}$  es  $\Sigma$ -fibración. No obstante, toda función identidad es  $\Sigma$ -fibración y por consiguiente existe  $\tilde{\beta}$  tal que  $(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2) \circ (s, id_X) = (\alpha_1, \alpha_2)$  y  $\varpi \circ (\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2) = (\beta_1, \beta_2)$ .

Para demostrar la unicidad, supongamos que existe  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : id_X \longrightarrow p'$  tal que  $(\gamma_1, \gamma_2) \circ (s, id_X) = (\alpha_1, \alpha_2)$  y  $\varpi \circ (\gamma_1, \gamma_2) = (\beta_1, \beta_2)$ .

De lo anterior se verifica que  $\gamma_2 = \alpha_2 = \beta_2$ , así que resta comprobar que  $\gamma_1 = \tilde{\beta}_1$ . Observar que  $p \circ \beta_1 = \beta_2 = f \circ \alpha_2$ ,  $p' \circ \gamma_1 = \gamma_2 = \alpha_2$ ,  $p' \circ \tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}_2 = \alpha_2$ ,  $f' \circ \tilde{\beta}_1 = \beta_1 = f' \circ \gamma_1$ , esto es, el siguiente diagrama es conmutativo



La unicidad de la función  $X \longrightarrow E'$  nos permite concluir que  $\gamma_1 = \tilde{\beta}_1$  y por lo tanto  $\tilde{\beta} = \gamma$ .

Recíprocamente, supongamos las hipótesis y veamos que  $\varpi$  es un cuadrado pullback.

Sean  $\gamma_1 : X \longrightarrow E$  y  $\gamma_2 : X \longrightarrow B'$  funciones tales que  $f \circ \gamma_2 = p \circ \gamma_1$ , deseamos hallar una única función  $\psi : X \longrightarrow E'$  tal que  $p' \circ \psi = \gamma_2$  y  $f' \circ \psi = \gamma_1$ .

Consideremos el siguiente cubo conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \emptyset & \xrightarrow{h'} & E' \\
 & \swarrow s & \downarrow \gamma_2 & \swarrow p' & \downarrow f' \\
 X & \xrightarrow{\quad} & B' & & \\
 \downarrow id_X & & \downarrow s & & \downarrow f \\
 X & \xrightarrow{\quad} & X & \xrightarrow{\gamma_1} & E \\
 \downarrow id_X & \swarrow id_X & \downarrow p & \swarrow p & \\
 X & \xrightarrow{p \circ \gamma_1} & B & & 
 \end{array}$$

es decir,

$$\begin{array}{ccc}
 s & \xrightarrow{\alpha=(h', \gamma_2)} & p' \\
 (s, id_X) \downarrow & & \downarrow \varpi \\
 id_X & \xrightarrow{\beta=(\gamma_1, p \circ \gamma_1)} & p
 \end{array} \tag{3.6}$$

conmuta en *Map-TOP*.

Por hipótesis existe un único morfismo  $\delta = (\delta_1, \delta_2) : id_X \rightarrow p'$  tal que  $(\delta_1, \delta_2) \circ (s, id_X) = (h', \gamma_2)$  y  $(f', f) \circ (\delta_1, \delta_2) = (\gamma_1, p \circ \gamma_1)$ . Luego, definiendo  $\psi = \delta_1 : X \rightarrow E'$  se cumple que  $p' \circ \psi = \delta_2 = \gamma_2$  y  $f' \circ \psi = \gamma_1$ . Además, es clara la unicidad de  $\psi$ .

Por lo tanto  $\varpi$  es un cuadrado pullback. □

El siguiente resultado es bastante conocido en teoría de categorías, sin embargo, la caracterización proporcionada en la proposición 3.4 nos permite dar una prueba alternativa.

**Corolario 3.5.** *Consideremos el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccccc}
 W & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\
 h \downarrow & & u \downarrow & & \downarrow \tilde{h} \\
 \tilde{W} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{Y} & \xrightarrow{\tilde{g}} & \tilde{Z}.
 \end{array} \tag{3.7}$$

Si  $u \rightarrow \tilde{h}$  es un pullback entonces  $h \rightarrow \tilde{h}$  es un pullback si y sólo si  $h \rightarrow u$  lo es.

**Demostración.**

Supongamos que  $h \rightarrow \tilde{h}$  es un pullback y veamos que  $h \rightarrow u$  lo es. Para ello, sea  $(s, id_X) \in \mathfrak{F}$  y consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} s & \xrightarrow{\alpha} & h \\ (s, id_X) \downarrow & & \downarrow (f, \tilde{f}) \\ id_X & \xrightarrow{\beta} & u, \end{array}$$

queremos hallar un único morfismo  $\tilde{\beta} : id_X \rightarrow h$  tal que  $\tilde{\beta} \circ (s, id_X) = \alpha$  y  $(f, \tilde{f}) \circ \tilde{\beta} = \beta$ .

El primer paso es usar que  $h \rightarrow \tilde{h}$  es  $\mathfrak{F}$ -fibración. Por tal motivo, tomemos en cuenta el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} s & \xrightarrow{\alpha} & h \\ (s, id_X) \downarrow & & \downarrow (g \circ f, \tilde{g} \circ \tilde{f}) \\ id_X & \xrightarrow{(g, \tilde{g}) \circ \tilde{\beta}} & \tilde{h} \end{array}$$

para garantizar la existencia de un único morfismo  $\tilde{\beta} : id_X \rightarrow h$  tal que  $\tilde{\beta} \circ (s, id_X) = \alpha$  y  $(g \circ f, \tilde{g} \circ \tilde{f}) \circ \tilde{\beta} = (g, \tilde{g}) \circ \beta$ .

Ya hemos probado que  $\tilde{\beta} \circ (s, id_X) = \alpha$ , resta verificar que  $(f, \tilde{f}) \circ \tilde{\beta} = \beta$ .

Observar que el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} s & \xrightarrow{(f, \tilde{f}) \circ \alpha} & u \\ (s, id_X) \downarrow & & \downarrow (g, \tilde{g}) \\ id_X & \xrightarrow{(g, \tilde{g}) \circ \beta} & \tilde{h} \end{array}$$

tiene dos rellenos:  $\beta$  y  $(f, \tilde{f}) \circ \tilde{\beta}$ . No obstante,  $u \rightarrow \tilde{h}$  es pullback y por tanto es  $\mathfrak{F}$ -fibración con levantamiento único, esto es,  $\beta = (f, \tilde{f}) \circ \tilde{\beta}$ .

Recíprocamente, si  $h \rightarrow u$  y  $u \rightarrow \tilde{h}$  son diagramas pullback entonces son  $\mathfrak{F}$ -fibraciones con levantamiento único, lo que implica que la composición  $h \rightarrow u \rightarrow \tilde{h}$  es  $\mathfrak{F}$ -fibración con levantamiento único, es decir, es un diagrama pullback. □

### 3.1.2. $\widehat{\Sigma}$ -fibraciones

**Teorema 3.6.** *Un morfismo  $\varpi = (f', f) : p' \rightarrow p$  es  $\widehat{\Sigma}$ -fibración si y sólo si  $\varpi$  es un cuadrado  $\Sigma$ -fibrado y  $f$  es  $\Sigma$ -fibración.*

**Demostración.**



Supongamos las hipótesis, probaremos que  $\varpi$  es  $\widehat{\Sigma}$ -fibración. Para ello, sea  $(s, s') \in \widehat{\Sigma}$  y consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 h' & \xrightarrow{(u,v)} & p' \\
 (s,s') \downarrow & & \downarrow \varpi=(f',f) \\
 h & \xrightarrow{(u',v')} & p,
 \end{array} \tag{3.8}$$

deseamos hallar un relleno  $h \rightarrow p'$  en 3.8. La forma “desplegada” de 3.8 es el cubo conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A & \xrightarrow{u} & E' \\
 & \swarrow h' & \downarrow & & \swarrow p' \\
 A' & \xrightarrow{v} & B' & & \downarrow f' \\
 \downarrow s' & & \downarrow s & & \downarrow f \\
 & \swarrow h & X & \xrightarrow{u'} & E \\
 & & \downarrow & & \swarrow p \\
 X' & \xrightarrow{v'} & B & & 
 \end{array}$$

Porque  $f$  es  $\Sigma$ -fibración existe  $\varphi_1 : X' \rightarrow B'$  tal que  $\varphi_1 \circ s' = v$  y  $f \circ \varphi_1 = v'$ . Así obtenemos que  $f \circ \varphi_1 \circ h = v' \circ h = p \circ u'$ , esto es, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{u'} & E \\
 \varphi_1 \circ h \searrow & & \downarrow \tilde{p} \\
 & P & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\
 & \downarrow & & \downarrow p \\
 & B' & \xrightarrow{f} & B.
 \end{array}$$

Por la propiedad universal de  $P$  existe una única función  $\psi : X \rightarrow P$  tal que  $\tilde{p} \circ \psi = \varphi_1 \circ h$  y  $\tilde{f} \circ \psi = u'$ .

El siguiente paso es demostrar que el cuadrado

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{u} & E' \\
 s \downarrow & & \downarrow q \\
 X & \xrightarrow{\psi} & P
 \end{array} \tag{3.9}$$

es conmutativo y posteriormente usaremos que  $q$  es  $\Sigma$ -fibración para obtener un relleno  $X \rightarrow E'$  en 3.9.

Notar que  $f \circ (v \circ h') = (f \circ v) \circ h' = (v' \circ s') \circ h' = v' \circ (s' \circ h') = v' \circ (h \circ s) = (v' \circ h) \circ s = (p \circ u') \circ s$ ,  $\tilde{p} \circ (q \circ u) = (\tilde{p} \circ q) \circ u = p' \circ u = v \circ h'$ ,  $\tilde{p} \circ (\psi \circ s) = (\tilde{p} \circ \psi) \circ s = (\varphi_1 \circ h) \circ s = \varphi_1 \circ (h \circ s) = \varphi_1 \circ (s' \circ h') = (\varphi_1 \circ s') \circ h' = v \circ h'$ ,  $f \circ (q \circ u) = (f \circ q) \circ u = f' \circ u = u' \circ s$  y  $\tilde{f} \circ (\psi \circ s) = (\tilde{f} \circ \psi) \circ s = u' \circ s$ , esto es, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & u' \circ s \\
 & & & & \curvearrowright \\
 A & & & & E \\
 \swarrow \psi \circ s & & & & \searrow \\
 & P & \xrightarrow{\tilde{f}} & E & \\
 \swarrow q \circ u & \downarrow \tilde{p} & & \downarrow p & \\
 & B' & \xrightarrow{f} & B & \\
 \searrow v \circ h' & & & & \\
 & & & & 
 \end{array}$$

Por la unicidad del morfismo  $A \rightarrow P$  concluimos que  $\psi \circ s = q \circ u$ , es decir, el cuadrado 3.9 es conmutativo y debido a que  $q$  es  $\Sigma$ -fibración existe  $\varphi_2 : X \rightarrow E'$  tal que  $\varphi_2 \circ s = u$  y  $q \circ \varphi_2 = \psi$ .

Proponemos  $(\varphi_2, \varphi_1) : h \rightarrow p'$  como relleno del diagrama 3.8.

Notar que, en efecto,  $(\varphi_2, \varphi_1) : h \rightarrow p'$  porque  $p' \circ \varphi_2 = (\tilde{p} \circ q) \circ \varphi_2 = \tilde{p} \circ (q \circ \varphi_2) = \tilde{p} \circ \psi = \varphi_1 \circ h$ . Además,

- $\varphi_2 \circ s = u$  y  $\varphi_1 \circ s' = v$  implican que  $(\varphi_2, \varphi_1) \circ (s, s') = (u, v)$ , mientras que
- $f' \circ \varphi_2 = (\tilde{f} \circ q) \circ \varphi_2 = \tilde{f} \circ (q \circ \varphi_2) = \tilde{f} \circ \psi = u'$  y  $f \circ \varphi_1 = v'$  implican que  $\varpi \circ (\varphi_2, \varphi_1) = (u', v')$ .

Por lo tanto  $\varpi : p' \rightarrow p$  es una  $\widehat{\Sigma}$ -fibración.

Recíprocamente, supongamos que  $\varpi : p' \rightarrow p$  es  $\widehat{\Sigma}$ -fibración y veamos que  $q : E' \rightarrow P$  es  $\Sigma$ -fibración.

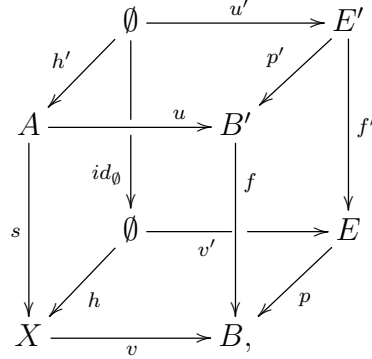
Notar que  $\varpi : p' \rightarrow p$  es  $\mathfrak{F}$ -fibración pues  $\mathfrak{F} \subset \widehat{\Sigma}$ . Por el teorema 3.2 concluimos que  $\varpi$  es un cuadrado  $\Sigma$ -fibrado, es decir,  $q$  es  $\Sigma$ -fibración.

Por último, veamos que  $f$  es  $\Sigma$ -fibración. Para ello, consideremos el diagrama conmutativo

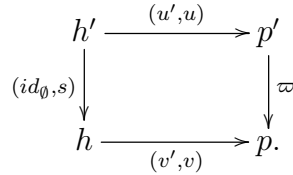
$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{u} & B' \\
 \downarrow s & & \downarrow f \\
 X & \xrightarrow{v} & B,
 \end{array} \tag{3.10}$$

necesitamos localizar un relleno  $X \rightarrow B'$  en el cuadrado 3.10.

Consideremos el siguiente cubo conmutativo



es decir,

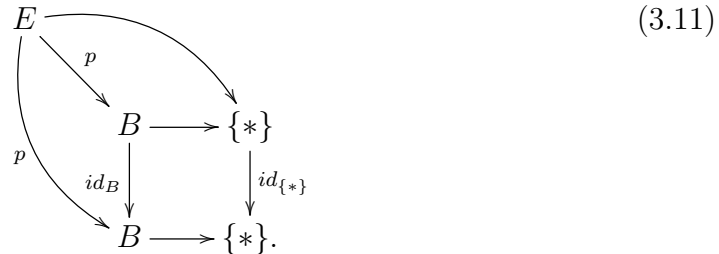


Dado que  $\Sigma$  contiene todas las identidades se sigue que  $id_\emptyset \in \Sigma$  y por consiguiente  $(id_\emptyset, s) \in \widehat{\Sigma}$ . Porque  $\varpi$  es  $\widehat{\Sigma}$ -fibración existe  $(\varphi_1, \varphi_2) : h \rightarrow p'$  tal que  $(\varphi_1, \varphi_2) \circ (id_\emptyset, s) = (u', u)$  y  $\varpi \circ (\varphi_1, \varphi_2) = (v', v)$ . Así,  $\varphi_2 : X \rightarrow B'$  es el relleno del diagrama 3.10. Por lo tanto  $f$  es  $\Sigma$ -fibración. □

**Corolario 3.7.**  $p : E \rightarrow B$  es objeto  $\widehat{\Sigma}$ -fibrante si y sólo si  $p$  es  $\Sigma$ -fibración entre espacios  $\Sigma$ -fibrantes.

**Demostración.**

Consideremos el diagrama conmutativo que analizamos en el corolario 3.3:



$p$  es  $\widehat{\Sigma}$ -fibrante si y sólo si  $p \rightarrow id_{\{*\}}$  es  $\widehat{\Sigma}$ -fibración, si y sólo si,  $p$  y  $B \rightarrow \{*\}$  son  $\Sigma$ -fibraciones, si y sólo si,  $p$  es  $\Sigma$ -fibración y  $B$  es  $\Sigma$ -fibrante, si y sólo si  $p$  es  $\Sigma$ -fibración entre espacios  $\Sigma$ -fibrantes. □

### 3.2. La familia de retracts por deformación fuerte en $Map-\mathcal{M}$

El concepto de retracto por deformación fuerte fue definido en la categoría  $TOP$ , sin embargo, puede ser adaptado a la categoría  $Map-TOP$ .

Consideremos el cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{f'} & E \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{f} & B, \end{array}$$

si  $A \subset B$  y  $F \subset E$  son tales que  $p(F) \subset A$ , entonces podemos considerar la restricción  $q : F \rightarrow A$  de  $p$ . En este caso escribimos  $q \subset p$ .

**Definición 3.8.** *Continuando con la notación anterior, sea  $q \subset p$ .*

*$q$  es un **retracto por deformación fuerte de  $p$**  si existen retracciones  $r : E \rightarrow F$  y  $r' : B \rightarrow A$  tal que  $H : i_F \circ r \simeq id_E$  rel  $F$  y  $D : i_A \circ r' \simeq id_B$  rel  $A$ , donde  $i_F$  y  $i_A$  son las respectivas inclusiones. Además, las homotopías  $H$  y  $D$  deben conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccc} E \times I & \xrightarrow{H} & E \\ p \times id_I \downarrow & & \downarrow p \\ B \times I & \xrightarrow{D} & B. \end{array}$$

En la categoría  $Map-\mathcal{M}$  definimos la clase  $SDR_{Map-\mathcal{M}} = \{q \hookrightarrow p : q \text{ es retracto por deformación fuerte de } p\}$ .

Recordar que en la categoría  $\mathcal{M}$  definimos las colecciones  $SDR$  y  $SSDR$ , por lo tanto es posible considerar las familias  $\widehat{SDR} = \{(s, s') : s, s' \in SDR\}$  y  $\widehat{SSDR} = \{(s, s') : s, s' \in SSDR\}$ .

Directamente de la definición se sigue que  $SDR_{Map-\mathcal{M}} \subset \widehat{SDR}$ , luego

$$\{\widehat{SDR}\text{-fibraciones}\} \subset \{SDR_{Map-\mathcal{M}}\text{-fibraciones}\}.$$

Similarmente, la contención  $SDR \subset SSDR$  implica que  $\widehat{SDR} \subset \widehat{SSDR}$ , luego

$$\{\widehat{SSDR}\text{-fibraciones}\} \subset \{\widehat{SDR}\text{-fibraciones}\}.$$

En resumen,  $\{\widehat{SSDR}\text{-fibraciones}\} \subset \{SDR_{Map-\mathcal{M}}\text{-fibraciones}\}$ .

### 3.3. Teorema de factorización en *Map-TOP*

Sea  $\alpha = (f', f) : p' \rightarrow p$  un morfismo en *Map-TOP*, digamos

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{f'} & E \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{f} & B. \end{array}$$

Definimos  $coCyl(\alpha) : coCyl(f') \rightarrow coCyl(f)$  dado por  $coCyl(\alpha)(x, \omega) = (p'(x), p \circ \omega)$  para cada  $(x, \omega) \in coCyl(f')$ . Notar que, en efecto,  $(p'(x), p \circ \omega) \in coCyl(f)$  pues  $f(p'(x)) = p(f'(x)) = p(\omega(0))$ .

Recordar que dada una función continua  $f : X \rightarrow Y$ ,  $coCyl(f)$  es el pullback de la terna  $X \xrightarrow{f} Y \xleftarrow{\pi_Y^0} Y^I$ . En el caso de *Map-TOP*,  $coCyl(\alpha)$  también es el pullback de cierta terna de morfismos.

**Proposición 3.9.** *El cuadrado*

$$\begin{array}{ccc} coCyl(\alpha) \xrightarrow{\hat{\alpha}} p^I \\ \widehat{\pi}_p^0 \downarrow & & \downarrow \pi_p^0 = (\pi_E^0, \pi_B^0) \\ p' \xrightarrow{\alpha} p \end{array}$$

es un pullback en la categoría de morfismos de *TOP*.

**Demostración.**

La forma tridimensional del diagrama anterior es

$$\begin{array}{ccccc} & & coCyl(f') & \xrightarrow{\hat{f}'} & E^I \\ & \swarrow coCyl(\alpha) & \downarrow & & \swarrow p^I \\ coCyl(f) & \xrightarrow{\hat{f}} & B^I & & E \\ \downarrow \widehat{\pi}_B^0 & & \downarrow \widehat{\pi}_E^0 & & \downarrow \pi_E^0 \\ & \swarrow p' & E' & \xrightarrow{f'} & E \\ & & \downarrow & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{f} & B & & \end{array}$$

Veamos que, en efecto, los cuadrados del cubo anterior que involucran al morfismo  $coCyl(\alpha)$  conmutan.

Sea  $(z, \omega) \in coCyl(f')$ , observar que  $p^I(\hat{f}'(z, \omega)) = p^I(\omega) = p \circ \omega = \hat{f}(p'(z), p \circ$

$\omega) = \widehat{f}(coCyl(\alpha)(z, \omega))$ , mientras que  $\widehat{\pi}_B^0(coCyl(\alpha)(z, \omega)) = \widehat{\pi}_B^0(p'(z), p \circ \omega) = p'(z) = p'(\widehat{\pi}_E^0(z, \omega))$ .

Ahora, sea  $\varphi : C \rightarrow D$  y consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \varphi & \xrightarrow{\tau=(\tau_1, \tau_2)} & p^I \\
 \delta=(\delta_1, \delta_2) \searrow & & \downarrow \widehat{\pi}_p^0 \\
 coCyl(\alpha) & \xrightarrow{\widehat{\alpha}} & p^I \\
 \downarrow \widehat{\pi}_p^0 & & \downarrow \pi_p^0=(\pi_E^0, \pi_B^0) \\
 p' & \xrightarrow{\alpha} & p,
 \end{array} \tag{3.12}$$

deseamos hallar un único morfismo  $\varphi \rightarrow coCyl(\alpha)$  que preserve la conmutatividad de 3.12.

Centramos nuestra atención en el cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \varphi & \xrightarrow{\tau} & p^I \\
 \delta \downarrow & & \downarrow \pi_p^0 \\
 p' & \xrightarrow{\alpha} & p,
 \end{array}$$

cuya forma tridimensional es el siguiente cubo conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 & & C & \xrightarrow{\tau_1} & E^I \\
 & \swarrow \varphi & \downarrow & & \downarrow p^I \\
 D & \xrightarrow{\tau_2} & B^I & & E \\
 \downarrow \delta_1 & & \downarrow \pi_B^0 & & \downarrow \pi_E^0 \\
 & & E' & \xrightarrow{f'} & E \\
 \downarrow \delta_2 & \swarrow p' & \downarrow p & & \\
 B' & \xrightarrow{f} & B & & 
 \end{array}$$

Así obtenemos los nuevos diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{\tau_2} & B^I \\
 \delta_2 \searrow & & \downarrow \widehat{\pi}_B^0 \\
 coCyl(f) & \xrightarrow{\widehat{f}} & B^I \\
 \downarrow \widehat{\pi}_B^0 & & \downarrow \pi_B^0 \\
 B' & \xrightarrow{f} & B,
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\tau_1} & E^I \\
 \delta_1 \searrow & & \downarrow \widehat{\pi}_E^0 \\
 coCyl(f') & \xrightarrow{\widehat{f}'} & E^I \\
 \downarrow \widehat{\pi}_E^0 & & \downarrow \pi_E^0 \\
 E' & \xrightarrow{f'} & E.
 \end{array}$$

Por las propiedades universales de  $coCyl(f)$  y  $coCyl(f')$  existen únicos morfismos  $\psi_2 : D \rightarrow coCyl(f)$  y  $\psi_1 : C \rightarrow coCyl(f')$  tales que  $\widehat{\pi}_B^0 \circ \psi_2 = \delta_2$ ,  $\widehat{f} \circ \psi_2 = \tau_2$ ,  $\widehat{\pi}_E^0 \circ \psi_1 = \delta_1$  y  $\widehat{f}' \circ \psi_1 = \tau_1$ .

Proponemos a  $\psi = (\psi_1, \psi_2)$  como el morfismo que preserva la conmutatividad de 3.12.

En primer lugar, veamos que  $\psi = (\psi_1, \psi_2) : \varphi \longrightarrow coCyl(\alpha)$ , es decir,  $coCyl(\alpha) \circ \psi_1 = \psi_2 \circ \varphi$ .

En efecto: notar que  $\widehat{f} \circ (\psi_2 \circ \varphi) = (\widehat{f} \circ \psi_2) \circ \varphi = \tau_2 \circ \varphi = p^I \circ \tau_1 = p^I \circ (\widehat{f}' \circ \psi_1) = (p^I \circ \widehat{f}') \circ \psi_1 = (\widehat{f} \circ coCyl(\alpha)) \circ \psi_1 = \widehat{f} \circ (coCyl(\alpha) \circ \psi_1)$ , mientras que  $\widehat{\pi}_B^0 \circ (\psi_2 \circ \varphi) = (\widehat{\pi}_B^0 \circ \psi_2) \circ \varphi = \delta_2 \circ \varphi = p' \circ \delta_1 = p' \circ (\widehat{\pi}_E^0 \circ \psi_1) = (p' \circ \widehat{\pi}_E^0) \circ \psi_1 = (\widehat{\pi}_B^0 \circ coCyl(\alpha)) \circ \psi_1 = \widehat{\pi}_B^0 \circ (coCyl(\alpha) \circ \psi_1)$ ; es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\widehat{f} \circ \psi_2 \circ \varphi} & B^I \\
 \searrow^{coCyl(\alpha) \circ \psi_1} & & \downarrow \pi_B^0 \\
 \psi_2 \circ \varphi \searrow & coCyl(f) \xrightarrow{\widehat{f}} & B^I \\
 \widehat{\pi}_B^0 \circ \psi_2 \circ \varphi \searrow & & \downarrow \pi_B^0 \\
 & B' \xrightarrow{f} & B.
 \end{array}$$

Por unicidad del morfismo  $C \longrightarrow coCyl(f)$  concluimos que  $coCyl(\alpha) \circ \psi_1 = \psi_2 \circ \varphi$ .

Resta demostrar que  $\widehat{\pi}_p^0 \circ \psi = \delta$  y  $\widehat{\alpha} \circ \psi = \tau$ . Esto se sigue del hecho de que  $\widehat{\pi}_E^0 \circ \psi_1 = \delta_1$ ,  $\widehat{\pi}_B^0 \circ \psi_2 = \delta_2$ ,  $\widehat{f}' \circ \psi_1 = \tau_1$  y  $\widehat{f} \circ \psi_2 = \tau_2$ ; es decir, los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccc}
 & E' & \\
 \delta_1 \nearrow & & \nwarrow \widehat{\pi}_E^0 \\
 C & \xrightarrow{\psi_1} & coCyl(f') \\
 \downarrow \varphi & & \downarrow p' \\
 & B' & \\
 \delta_2 \nearrow & & \nwarrow \widehat{\pi}_B^0 \\
 D & \xrightarrow{\psi_2} & coCyl(f), \\
 & & \downarrow coCyl(\alpha)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & E^I & \\
 \tau_1 \nearrow & & \nwarrow \widehat{f}' \\
 C & \xrightarrow{\psi_1} & coCyl(f') \\
 \downarrow \varphi & & \downarrow p^I \\
 & B^I & \\
 \tau_2 \nearrow & & \nwarrow \widehat{f} \\
 D & \xrightarrow{\psi_2} & coCyl(f). \\
 & & \downarrow coCyl(\alpha)
 \end{array}$$

Finalmente, supongamos que existe  $\rho = (\rho_1, \rho_2) : \varphi \longrightarrow coCyl(\alpha)$  tal que  $\widehat{\pi}_p^0 \circ \rho = \delta$  y  $\widehat{\alpha} \circ \rho = \tau$ . Esto implica que  $\widehat{\pi}_E^0 \circ \rho_1 = \delta_1$ ,  $\widehat{\pi}_B^0 \circ \rho_2 = \delta_2$ ,  $\widehat{f}' \circ \rho_1 = \tau_1$  y  $\widehat{f} \circ \rho_2 = \tau_2$ . Por la unicidad de  $\psi_1$  y  $\psi_2$  concluimos que  $\psi_1 = \rho_1$  y  $\psi_2 = \rho_2$ , luego  $\rho = \psi$ .

Por lo tanto  $coCyl(\alpha)$  es el pullback de la terna  $p' \xrightarrow{\alpha} p \xleftarrow{\pi_p^0} p^I$ .

□

Antes de demostrar el teorema de factorización en *Map-TOP* necesitamos un lema previo.

**Lema 3.10.** Sean  $\Sigma \subset Cl$  una familia cerrada bajo extensiones cilíndricas y  $p : E \rightarrow B$ .

- Si  $p$  es  $\Sigma$ -fibración (es decir,  $p$  es  $\mathfrak{F}$ -fibrante) entonces el morfismo  $(\pi_E, \pi_B) : p^I \rightarrow p \times p$  es  $\mathfrak{F}$ -fibración.
- Si  $p$  es  $\Sigma$ -fibración y tanto  $E$  como  $B$  son  $\Sigma$ -fibrantes (esto es,  $p$  es  $\widehat{\Sigma}$ -fibrante) entonces  $(\pi_E, \pi_B)$  es  $\widehat{\Sigma}$ -fibración.

**Demostración.**

Demostraremos el segundo inciso pues el primero es más sencillo.

Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 E^I & & & & \\
 \searrow^{\bar{p}} & & \searrow^{\pi_E} & & \\
 & W & \xrightarrow{\pi_B} & E \times E & \\
 \searrow^{p^I} & \downarrow^{\widehat{p \times p}} & & \downarrow^{p \times p} & \\
 & B^I & \xrightarrow{\pi_B} & B \times B & 
 \end{array}$$

donde  $W = \{(y_1, y_2, \omega) \in E \times E \times B^I : \omega(0) = p(y_1), \omega(1) = p(y_2)\}$  y  $\bar{p} = (\omega(0), \omega(1), p \circ \omega)$  para cada  $\omega \in E^I$ .

Probaremos que  $(\pi_E, \pi_B)$  es  $\widehat{\Sigma}$ -fibración, no obstante, debido a la caracterización lograda en el teorema 3.6 basta verificar que  $\pi_B$  y  $\bar{p}$  son  $\Sigma$ -fibraciones.

1. Sea  $s \in \Sigma$  y consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\hat{u}} & B^I \\
 \downarrow s & & \downarrow \pi_B \\
 X & \xrightarrow{\hat{H}} & B \times B,
 \end{array} \tag{3.13}$$

deseamos hallar  $\widehat{G} : X \rightarrow B^I$  tal que  $\widehat{G} \circ s = \hat{u}$  y  $\pi_B \circ \widehat{G} = \hat{H}$ . Debido a que los funtores  $--^I$ ,  $-- \times I$  y los morfismos de funtores  $\pi$ ,  $\partial$  son adjuntos es posible modificar nuestros problemas de levantamiento y extensión iniciales, en los siguientes diagramas ejemplificamos tal hecho:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\hat{u}} & B^I \\
 \downarrow s & \nearrow \widehat{G} & \\
 X & & 
 \end{array} & \iff & \begin{array}{ccc}
 A \times I & \xrightarrow{\hat{u}} & B \\
 \downarrow s \times id_I & \nearrow G & \\
 X \times I & & 
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 & \nearrow \widehat{G} & B^I \\
 X & \xrightarrow{\hat{H}} & B \times B \\
 & & \downarrow \pi_B
 \end{array} & \iff & \begin{array}{ccc}
 X \times \{0, 1\} & \xrightarrow{\hat{H}} & B \\
 \downarrow & \nearrow G & \\
 X \times I & & 
 \end{array}
 \end{array} \tag{3.14}$$



donde  $\tilde{u}(a, t) = \hat{u}(a, t)$ ,  $G(x, t) = \hat{G}(x)(t)$ ,  $\hat{H}(x) = (\tilde{H}(x, 0), \tilde{H}(x, 1))$ ; para cada  $x \in X$ ,  $a \in A$ ,  $t \in I$ . Uniendo los triángulos derechos en el diagrama 3.14 obtenemos el siguiente triángulo conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0, 1\} \cup A \times I & \xrightarrow{u} & B \\ \tilde{s} \downarrow & \nearrow G & \\ X \times I, & & \end{array} \quad (3.15)$$

donde  $u(a, t) = \tilde{u}(a, t)$ ,  $u(x, 0) = \tilde{H}(x, 0)$ ,  $u(x, 1) = \tilde{H}(x, 1)$ ; para cada  $x \in X$ ,  $a \in A$ ,  $t \in I$ .

En resumen, la existencia de  $\hat{G}$  en el diagrama 3.13 equivale a la existencia de  $G$  en 3.15. Sin embargo,  $G$  existe porque  $B$  es  $\Sigma$ -fibrante y  $\tilde{s} \in \Sigma$ . Por lo tanto existe  $\hat{G}$  tal que  $\hat{G} \circ s = \hat{u}$  y  $\pi_B \circ \hat{G} = \hat{H}$ , es decir,  $\pi_B$  es  $\Sigma$ -fibración.

2. Probaremos que  $\bar{p}$  es  $\Sigma$ -fibración. Para ello, sea  $s \in \Sigma$  y tomemos en cuenta el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\hat{h}} & E^I \\ s \downarrow & & \downarrow \bar{p} \\ X & \xrightarrow{\hat{H}} & W. \end{array} \quad (3.16)$$

Recordando un poco el análisis realizado antes de la prueba de la proposición 2.17, sabemos que la existencia de un relleno  $\hat{G} : X \rightarrow E^I$  en el cuadrado 3.16 equivale a la existencia de un relleno  $G : X \times I \rightarrow E$  en el siguiente rectángulo

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0, 1\} \cup A \times I & \xrightarrow{h} & E \\ \tilde{s} \downarrow & & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{H} & B, \end{array} \quad (3.17)$$

donde  $\hat{h}(a)(t) = h(a, t)$ ,  $\hat{H}(x) = (h(x, 0), h(x, 1), H^*(x))$  y  $H^*(x)(t) = H(x, t)$  para cada  $a \in A$ ,  $x \in X$  y  $t \in I$ .

Dado que  $\tilde{s} \in \Sigma$  y  $p$  es  $\Sigma$ -fibración se garantiza la existencia de  $G$  en 3.17, lo que implica la existencia de  $\hat{G}$  en 3.16 y así concluimos que  $\bar{p}$  es  $\Sigma$ -fibración.

El teorema 3.6 garantiza que  $(\pi_E, \pi_B)$  es  $\hat{\Sigma}$ -fibración.

□

Sea  $\alpha = (f', f) : p' \longrightarrow p$  un morfismo en  $Map-TOP$ , digamos

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{f'} & E \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{f} & B. \end{array}$$

Sabemos que, por el teorema 2.21,  $f$  y  $f'$  admiten factorizaciones a través de  $coCyl(f)$  y  $coCyl(f')$  respectivamente:

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{f'} & E \\ & \searrow s_{f'} & \nearrow \tilde{f}' \\ & coCyl(f') & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} B' & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow s_f & \nearrow \tilde{f} \\ & coCyl(f) & \end{array}$$

donde  $s_{f'}(e') = (e', c_{f'}(e'))$  para cada  $e' \in E'$ ,  $\tilde{f}'(e', \omega) = \omega(1)$  para cada  $(e', \omega) \in coCyl(f')$ ,  $s_f(b') = (b', c_f(b'))$  para cada  $b' \in B'$ ,  $\tilde{f}(b', \omega) = \omega(1)$  para cada  $(b', \omega) \in coCyl(f)$ .

Veamos que los cuadrados

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{s_{f'}} & coCyl(f') \\ p' \downarrow & & \downarrow coCyl(\alpha) \\ B' & \xrightarrow{s_f} & coCyl(f) \end{array} \quad y \quad \begin{array}{ccc} coCyl(f') & \xrightarrow{\tilde{f}'} & E \\ coCyl(\alpha) \downarrow & & \downarrow p \\ coCyl(f) & \xrightarrow{\tilde{f}} & B \end{array}$$

conmutan, con la finalidad de garantizar que  $\sigma_\alpha = (s_{f'}, s_f) : p' \longrightarrow coCyl(\alpha)$  y  $\tilde{\alpha} = (\tilde{f}', \tilde{f}) : coCyl(\alpha) \longrightarrow p$  son morfismos en  $Map-TOP$ .

Sea  $e' \in E'$ , observar que  $coCyl(\alpha)(s_{f'}(e')) = coCyl(\alpha)(e', c_{f'}(e')) = (p'(e'), p \circ c_{f'}(e')) = (p'(e'), c_{p \circ f'}(e')) = (p'(e'), c_{f \circ p'}(e')) = s_f(p'(e'))$ , es decir  $coCyl(\alpha) \circ s_{f'} = s_f \circ p'$ .

Por otro lado, sea  $(e', \omega) \in coCyl(f')$ , notar que  $\tilde{f}(coCyl(\alpha)(e', \omega)) = \tilde{f}(p'(e'), p \circ \omega) = (p \circ \omega)(1) = p(\tilde{f}'(e', \omega))$ , esto es,  $\tilde{f} \circ coCyl(\alpha) = p \circ \tilde{f}'$ .

**Teorema 3.11.** (Teorema de factorización)

Todo morfismo  $\alpha = (f', f) : p' \longrightarrow p$  en  $Map-TOP$  puede factorizarse de la siguiente manera:

$$p' \xrightarrow{\sigma_\alpha} coCyl(\alpha) \xrightarrow{\tilde{\alpha}} p,$$

es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{coCyl}(f') & \\
 s_{f'} \nearrow & | & \searrow \tilde{f}' \\
 E' & \xrightarrow{f'} & E \\
 p' \downarrow & \text{coCyl}(\alpha) & \downarrow p \\
 & \text{coCyl}(f) & \\
 s_f \nearrow & | & \searrow \tilde{f} \\
 B' & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}$$

donde  $\sigma_\alpha = (s_{f'}, s_f) \in \text{SDR}_{\text{Map-M}}$  y  $\tilde{\alpha} = (\tilde{f}', \tilde{f})$ .

Además, sea  $\Sigma \subset \text{Cl}$  cerrada bajo extensiones cilíndricas.

- Si tanto  $p'$  como  $p$  son  $\Sigma$ -fibraciones (es decir,  $p'$  y  $p$  son  $\mathfrak{F}$ -fibrantes) entonces el morfismo  $\tilde{\alpha}$  es  $\mathfrak{F}$ -fibración, y por lo tanto  $\text{coCyl}(\alpha)$  es  $\mathfrak{F}$ -fibrante.
- Si tanto  $p'$  como  $p$  son  $\Sigma$ -fibraciones entre espacios  $\Sigma$ -fibrantes (esto es,  $p'$  y  $p$  son  $\widehat{\Sigma}$ -fibrantes) entonces el morfismo  $\tilde{\alpha}$  es  $\widehat{\Sigma}$ -fibración, y por lo tanto  $\text{coCyl}(\alpha)$  es  $\widehat{\Sigma}$ -fibrante.

### Demostración.

Primero demostraremos que  $\sigma_\alpha \in \text{SDR}_{\text{Map-M}}$ .

Por el teorema 2.21 sabemos que tanto  $s_{f'}(E')$  como  $s_f(B')$  son retracts por deformación fuerte de  $\text{coCyl}(f')$  y  $\text{coCyl}(f)$  respectivamente. Así que resta probar la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \text{coCyl}(f') \times I & \xrightarrow{D_{f'}} & \text{coCyl}(f') \\
 \text{coCyl}(\alpha) \times id_I \downarrow & & \downarrow \text{coCyl}(\alpha) \\
 \text{coCyl}(f) \times I & \xrightarrow{D_f} & \text{coCyl}(f),
 \end{array}$$

donde  $D_f((b', \omega), t) = (b', \omega_t)$  para cada  $((b', \omega), t) \in \text{coCyl}(f) \times I$  y  $\omega_t(\tau) = \omega(\tau(1-t))$  para cada  $\tau \in I$ . Similarmente se define  $D_{f'}$ .

En efecto:

Sea  $((e', \omega), t) \in \text{coCyl}(f') \times I$ , notar que  $D_f(\text{coCyl}(\alpha) \times id_I((e', \omega), t)) = D_f((p'(e'), p \circ \omega), t) = (p'(e'), (p \circ \omega)_t)$ ; mientras que  $\text{coCyl}(\alpha)(D_{f'}((e', \omega), t)) = \text{coCyl}(\alpha)(e', \omega_t) = (p'(e'), p \circ \omega_t) = (p'(e'), (p \circ \omega)_t)$ .

Por lo tanto  $\sigma_\alpha \in \text{SDR}_{\text{Map-M}}$ .

Probaremos la afirmación referente a la familia  $\widehat{\Sigma}$  pues el caso de la colección  $\mathfrak{F}$  es más simple.

Supongamos que  $p$  y  $p'$  son  $\widehat{\Sigma}$ -fibrantes. Demostraremos que  $\tilde{\alpha}$  es  $\widehat{\Sigma}$ -fibración y para ello consideramos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} h & \xrightarrow{\beta} & coCyl(\alpha) \\ \iota=(s,s') \downarrow & & \downarrow \tilde{\alpha} \\ g & \xrightarrow{\gamma} & p, \end{array} \quad (3.18)$$

con  $\iota \in \widehat{\Sigma}$ . Pretendemos hallar un relleno  $g \rightarrow coCyl(\alpha)$  en el diagrama 3.18. Recordar que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} coCyl(p) & \xrightarrow{\widehat{\alpha}} & p^I \\ \widehat{\pi}_p^0 \downarrow & & \downarrow \pi_p^0=(\pi_E^0, \pi_B^0) \\ p' & \xrightarrow{\alpha} & p, \end{array} \quad (3.19)$$

donde  $\widehat{\alpha} = (\widehat{f}', \widehat{f})$  y  $\widehat{\pi}_p^0 = (\widehat{\pi}_E^0, \widehat{\pi}_B^0)$  (véase el cubo conmutativo de la página 65), es un pullback.

Uniendo los diagramas (3.18) y (3.19) obtenemos un nuevo diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} & & h & \xrightarrow{\widehat{\alpha} \circ \beta} & p^I \\ & & \downarrow \widehat{\pi}_p^0 \circ \beta & & \downarrow \pi_p^0 \\ & \iota & p' & \xrightarrow{\alpha} & p \\ & & & & \downarrow \pi_p^1 \\ g & \xrightarrow{\gamma} & & & p. \end{array}$$

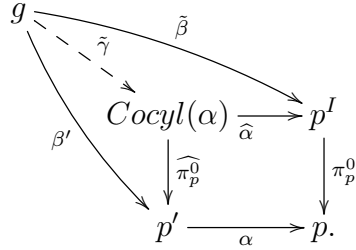
Dado que  $p'$  es  $\widehat{\Sigma}$ -fibrante existe  $\beta' : g \rightarrow p'$  tal que  $\beta' \circ \iota = \widehat{\pi}_p^0 \circ \beta$ . Así obtenemos el rectángulo conmutativo

$$\begin{array}{ccc} h & \xrightarrow{\widehat{\alpha} \circ \beta} & p^I \\ \iota \downarrow & & \downarrow \pi_p=(\pi_p^0; \pi_p^1)=(\pi_E, \pi_B) \\ g & \xrightarrow{(\alpha \circ \beta'; \gamma)} & p \times p. \end{array}$$

Por el lema 3.10 sabemos que  $(\pi_E, \pi_B)$  es  $\widehat{\Sigma}$ -fibración, luego existe  $\tilde{\beta} : g \rightarrow p^I$  tal que  $\tilde{\beta} \circ \iota = \widehat{\alpha} \circ \beta$  y  $\pi_p \circ \tilde{\beta} = (\alpha \circ \beta'; \gamma)$ .

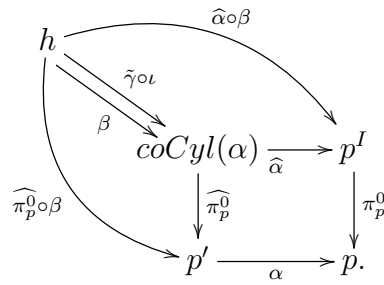
La igualdad  $\pi_p \circ \tilde{\beta} = (\alpha \circ \beta'; \gamma)$  implica que  $\pi_p^0 \circ \tilde{\beta} = \alpha \circ \beta'$  y por la propiedad universal de  $coCyl(\alpha)$  obtenemos un único morfismo  $\tilde{\gamma} : g \rightarrow coCyl(\alpha)$  tal

que  $\widehat{\pi}_p^0 \circ \tilde{\gamma} = \beta'$  y  $\widehat{\alpha} \circ \tilde{\gamma} = \tilde{\beta}$ , esto es, el siguiente diagrama es conmutativo



Proponemos a  $\tilde{\gamma}$  como relleno del diagrama 3.18, es decir,  $\tilde{\gamma} \circ \iota = \beta$  y  $\tilde{\alpha} \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ .

1.  $\gamma = \pi_p^1 \circ \tilde{\beta} = \pi_p^1 \circ \widehat{\alpha} \circ \tilde{\gamma} = \tilde{\alpha} \circ \tilde{\gamma}$ .
2. Notar que  $\widehat{\pi}_p^0 \circ \tilde{\gamma} \circ \iota = \beta' \circ \iota = \widehat{\pi}_p^0 \circ \beta$  y  $\widehat{\alpha} \circ \tilde{\gamma} \circ \iota = \tilde{\beta} \circ \iota = \widehat{\alpha} \circ \beta$ , es decir, el siguiente diagrama conmuta



Por la unicidad del morfismo  $h \rightarrow coCyl(\alpha)$  concluimos que  $\beta = \tilde{\gamma} \circ \iota$ .  
 Por lo tanto  $\tilde{\alpha}$  es  $\widehat{\Sigma}$ -fibración.

□



## Capítulo 4

---

### Aplicaciones

---

El propósito de esta sección es caracterizar las fibraciones regulares utilizando el concepto de cuadrado  $\Sigma$ -fibrado para una familia particular  $\Sigma$ , lo cual nos permitirá proporcionar una demostración alternativa del teorema 4.4.

Consideremos la familia  $Cl = \{s : A \hookrightarrow X : s \text{ es encaje cerrado}\}$ . Recordar que las  $Cl$ -fibraciones son  $AE$ -mapeos y los objetos  $Cl$ -fibrantes son espacios  $AE$ .

Consideremos el cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} E^I & \xrightarrow{p^I} & B^I \\ \pi_E^0 \downarrow & & \downarrow \pi_B^0 \\ E & \xrightarrow{p} & B. \end{array}$$

Si tomamos en cuenta el diagrama pullback de la terna  $E \xrightarrow{p} B \xleftarrow{\pi_B^0} B^I$  obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} E^I & \xrightarrow{p^I} & B^I \\ & \searrow q & \downarrow \pi_B^0 \\ & \text{coCyl}(p) & \xrightarrow{\widehat{p}} & B^I \\ & \searrow \pi_E^0 & \downarrow \widehat{\pi_B^0} & \downarrow \pi_B^0 \\ & E & \xrightarrow{p} & B, \end{array}$$

donde  $q(\omega) = (\omega(0), p \circ \omega)$  para cada  $\omega \in E^I$ .

Por otro lado, sea  $A$  un subconjunto cerrado de  $X$  y consideremos los diagramas

conmutativos

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\hat{f}} & E^I \\ i \downarrow & & \downarrow q \\ X & \xrightarrow{\hat{F}} & \text{coCyl}(p) \end{array} \quad (4.1)$$

y

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} \cup A \times I & \xrightarrow{f} & E \\ j \downarrow & & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{F} & B, \end{array} \quad (4.2)$$

donde  $F(x, t) = [(\hat{p} \circ \hat{F})(x)](t)$ ,  $f(x, 0) = (\pi_B^0 \circ \hat{F})(x)$  y  $f(a, t) = \hat{f}(a)(t)$  para cada  $x \in X$ ,  $a \in A$  y  $t \in I$ .

Si probamos que la existencia de un relleno  $\hat{\Phi} : X \rightarrow E^I$  en el diagrama 4.1 es equivalente a la existencia de un relleno  $\Phi : X \times I \rightarrow E$  en el cuadrado 4.2, habremos demostrado que  $p$  es fibración regular si y sólo si  $q$  es  $AE$ -mapeo. En los párrafos siguientes probamos tal equivalencia.

Supongamos que  $\hat{F} = (\hat{F}_1, \hat{F}_2)$ , es decir,  $\hat{F}_1 = \pi_B^0 \circ \hat{F}$  y  $\hat{F}_2 = \hat{p} \circ \hat{F}$ . La conmutatividad del diagrama 4.1 implica que para cada  $a \in A$  se tiene que  $((\hat{F}_1 \circ i)(a), (\hat{F}_2 \circ i)(a)) = (\hat{F} \circ i)(a) = (q \circ \hat{f})(a) = (\hat{f}(a)(0), p \circ \hat{f}(a))$ , es decir,  $(\hat{F}_1 \circ i)(a) = \hat{f}(a)(0)$  y  $(\hat{F}_2 \circ i)(a) = p \circ \hat{f}(a)$ . En resumen, la conmutatividad del diagrama 4.1 se reduce a la de los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\hat{f}} & E^I \\ i \downarrow & & \downarrow \pi_E^0 \\ X & \xrightarrow{\hat{F}_1} & E \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\hat{f}} & E^I \\ i \downarrow & & \downarrow p^I \\ X & \xrightarrow{\hat{F}_2} & B^I. \end{array} \quad (4.3)$$

Deseamos hallar  $\hat{\Phi} : X \rightarrow E^I$  tal que  $\hat{\Phi} \circ i = \hat{f}$ ,  $\pi_E^0 \circ \hat{\Phi} = \hat{F}_1$  y  $p^I \circ \hat{\Phi} = \hat{F}_2$ . Usando que los funtores  $--^I$ ,  $-- \times I$  y los morfismos de funtores  $\pi^0$ ,  $\partial^0$  son adjuntos es posible modificar nuestros problemas de levantamiento y extensión



iniciales, en los siguientes diagramas expresamos tal hecho:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\hat{f}} & E^I \\ \downarrow i & \nearrow \hat{\Phi} & \\ X & & \end{array} & \rightsquigarrow & \begin{array}{ccc} A \times I & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \downarrow i \times id_I & \nearrow \Phi & \\ X \times I & & \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccc} & & E^I \\ & \nearrow \hat{\Phi} & \downarrow \pi_E^0 \\ X & \xrightarrow{\hat{F}_1} & E \end{array} & \rightsquigarrow & \begin{array}{ccc} X \times \{0\} & \xrightarrow{\tilde{F}_1} & E \\ \downarrow & \nearrow \Phi & \\ X \times I & & \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccc} & & E^I \\ & \nearrow \hat{\Phi} & \downarrow p^I \\ X & \xrightarrow{\hat{F}_2} & B^I \end{array} & \rightsquigarrow & \begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow \Phi & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{F} & B, \end{array}
 \end{array} \tag{4.4}$$

donde  $\tilde{f}(a, t) = \hat{f}(a)(t)$ ,  $\Phi(x, t) = \hat{\Phi}(x)(t)$ ,  $\tilde{F}_1(x, 0) = \hat{F}_1(x)$  y  $F(x, t) = \hat{F}_2(x)(t)$ ; para cada  $x \in X$ ,  $a \in A$ ,  $t \in I$ . Uniendo los triángulos derechos en el diagrama 4.4 obtenemos el siguiente rectángulo conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 X \times \{0\} \cup A \times I & \xrightarrow{f} & E \\
 \downarrow j & \nearrow \Phi & \downarrow p \\
 X \times I & \xrightarrow{F} & B,
 \end{array} \tag{4.5}$$

donde  $f(x, 0) = \tilde{F}_1(x, 0)$ ,  $f(a, t) = \tilde{f}(a, t)$  para cada  $x \in X$ ,  $a \in A$ ,  $t \in I$ . Concluimos que el relleno  $\hat{\Phi}$  existe en 4.1 si y sólo si existe el relleno  $\Phi$  en 4.5, justo lo que deseamos demostrar.

Resumimos este análisis en el siguiente resultado.

**Teorema 4.1.** *Sea  $p : E \rightarrow B$  una función continua.  $p$  es una fibración regular si y sólo si  $(\pi_E^0, \pi_B^0) : p^I \rightarrow p$  es un AE-cuadrado, es decir,  $q$  (la función asociada a  $p$ ) es AE-mapeo.*

□

Un hecho relevante radica en que el anterior teorema tiene una versión “local”. Antes de enunciar tal resultado necesitamos algunos aspectos importantes. Sea  $U$  un subconjunto de  $B$  y denotemos por  $p_U$  la restricción  $p^{-1}(U) \rightarrow U$  de  $p$ . Sea  $\iota : p_U \rightarrow p$ , definimos los morfismos  $\alpha_U = \iota \circ (\pi_{p^{-1}(U)}^0, \pi_U^0)$  y

$\beta_U = \iota \circ (\pi_{p^{-1}(U)}^1, \pi_U^1)$ , es decir, tenemos los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U)^I & \xrightarrow{\pi_{p^{-1}(U)}^0} & E \\ p_U^I \downarrow & & \downarrow p \\ U^I & \xrightarrow{\pi_U^0} & B, \end{array} \quad \begin{array}{ccc} p^{-1}(U)^I & \xrightarrow{\pi_{p^{-1}(U)}^1} & E \\ p_U^I \downarrow & & \downarrow p \\ U^I & \xrightarrow{\pi_U^1} & B. \end{array}$$

**Teorema 4.2.**  $p_U$  es una fibración regular si y sólo si  $\alpha_U : p_U^I \rightarrow p$  es un  $AE$ -cuadrado.

**Demostración.**

Para la demostración usaremos de referencia el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} E^I & \xrightarrow{p^I} & B^I \\ & \searrow q & \downarrow \widehat{p} \\ & coCyl(p) & \downarrow \widehat{\pi}_B^0 \\ & & E \xrightarrow{p} B. \end{array} \quad (4.6)$$

Una pequeña modificación del diagrama anterior nos permite tomar en cuenta el nuevo diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U)^I & \xrightarrow{p_U^I} & U^I \\ & \searrow \rho & \downarrow \widehat{p}_U \\ & coCyl(p_U) & \downarrow \widehat{\pi}_U^0 \\ & & p^{-1}(U) \xrightarrow{p_U} U, \end{array}$$

donde  $\rho(\omega) = (\omega(0), p_U \circ \omega)$  para cada  $\omega \in p^{-1}(U)^I$ , es decir,  $\rho = q|_{p^{-1}(U)^I}$ . Un análisis similar al realizado antes de la formulación del teorema 4.1 nos permite concluir que  $p_U$  es fibración regular si y sólo si  $\rho$  es  $AE$ -mapeo, si y sólo si  $p_U^I \rightarrow p_U$  es  $AE$ -cuadrado. No obstante,  $\iota : p_U \rightarrow p$  es un cuadrado pullback y por consiguiente  $coCyl(p_U)$  también es el pullback de la terna  $U^I \xrightarrow{\pi_U^0} B \xleftarrow{p} E$ . Esto implica que  $p_U$  es

fibración regular si y sólo si  $p_U^I \rightarrow p$  es  $AE$ -cuadrado (véase el diagrama 4.7)

$$\begin{array}{ccccc}
 p^{-1}(U)^I & & & & \\
 \rho \searrow & & \xrightarrow{\pi_{p^{-1}(U)}^0} & & \\
 & coCyl(p_U) & \xrightarrow{\pi_U^0} & p^{-1}(U) & \xrightarrow{\cong} & E \\
 p_U^I \searrow & \downarrow \widehat{p_U} & & \downarrow p_U & & \downarrow p \\
 & U^I & \xrightarrow{\pi_U^0} & U & \longrightarrow & B
 \end{array} \tag{4.7}$$

□

La prueba del siguiente resultado puede encontrarse en [1].

**Proposición 4.3.** *Sea  $p : E \rightarrow B$  continua. Si existe una cubierta abierta  $\mathfrak{U}$  de  $B$  tal que la restricción  $p_U$  es un  $AE$ -mapeo para cada  $U \in \mathfrak{U}$ , entonces  $p$  es un  $AE$ -mapeo.*

Su importancia radica en que nos permitirá, junto con la caracterización lograda en el teorema 4.2, proporcionar una prueba alternativa del siguiente hecho.

**Teorema 4.4.** *Sea  $p : E \rightarrow B$  una función continua. Si existe una cubierta abierta  $\mathfrak{U}$  de  $B$  tal que la restricción  $p_U : p^{-1}(U) \rightarrow U$  es una fibración regular para cada  $U \in \mathfrak{U}$ , entonces  $p$  es una fibración regular.*

**Demostración.**

Sea  $(x, \gamma) \in coCyl(p)$  y consideremos la cubierta abierta  $\{\gamma^{-1}(U) : U \in \mathfrak{U}\}$  de  $I$ . Por el lema del recubrimiento de Lebesgue existe  $r > 0$  tal que para cada  $O \subset I$  con  $diam(O) < r$  se verifica la existencia de  $U \in \mathfrak{U}$  tal que  $O \subset \gamma^{-1}(U)$ . Sea  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{n} < r$ . Observar que para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  se cumple que  $diam([\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]) = \frac{1}{n} < r$  y por lo tanto existe  $U_i \in \mathfrak{U}$  tal que  $\gamma([\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]) \subset U_i$ . Notar que

$$W = \{\omega \in B^I : \omega([\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]) \subset U_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$$

es una vecindad de  $\gamma$  en  $B^I$  respecto a la topología compacto-abierto.

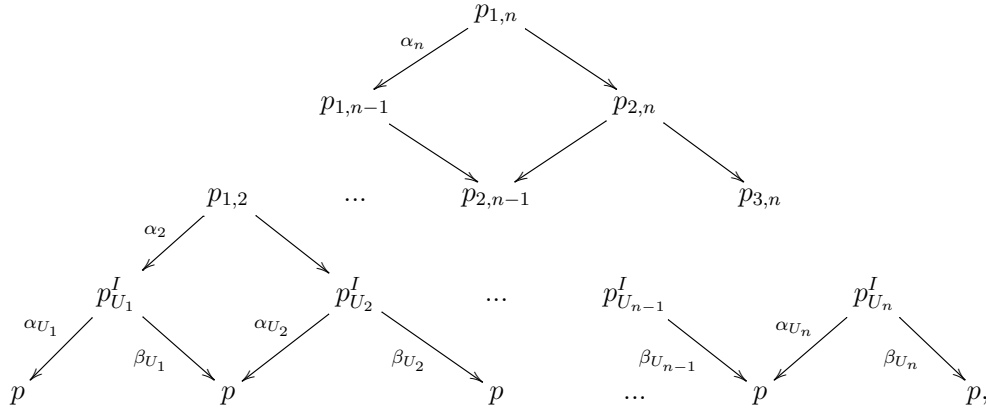
Usando la notación del diagrama 4.6, tomemos en cuenta el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 V & & & & \\
 q_{\widehat{W}} \searrow & & \xrightarrow{p_W^I} & & \\
 & \widehat{W} & \xrightarrow{\widehat{p_W}} & W & \\
 \pi_V^0 \searrow & \downarrow \widehat{\pi_W^0} & & \downarrow \pi_W^0 & \\
 & E & \xrightarrow{p} & B, & 
 \end{array} \tag{4.8}$$

donde  $\widehat{W} = \widehat{p}^{-1}(W)$ ,  $V = q^{-1}(\widehat{W}) = (p^I)^{-1}(W)$  y el cuadrado interno es pullback.

Probaremos que el morfismo  $p_W^I \rightarrow p$  es un  $AE$ -cuadrado, es decir,  $q_{\widehat{W}}$  es un  $AE$ -mapeo.

Construimos el siguiente diagrama conmutativo en la categoría  $Map-TOP$ :



donde cada cuadrado es un diagrama pullback, es decir,  $p_{1,2}$  es el pullback de la terna  $p_{U_1}^I \xrightarrow{\beta_{U_1}} p \xleftarrow{\alpha_{U_2}} p_{U_2}^I$  y así sucesivamente hasta  $p_{1,n}$ , el cual es el pullback de la terna  $p_{1,n-1} \rightarrow p_{2,n-1} \leftarrow p_{2,n}$ .

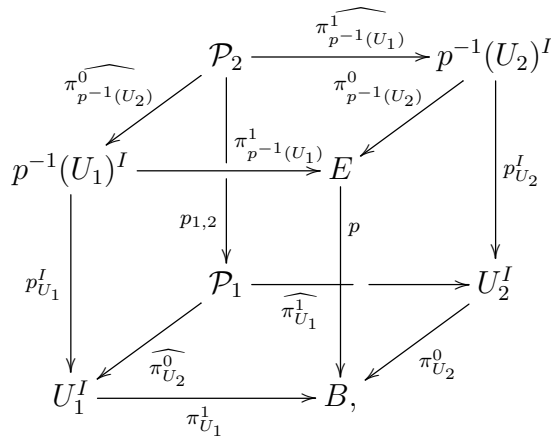
Por hipótesis cada  $p_{U_i}$  es fibración regular y por el teorema 4.2 obtenemos que cada  $\alpha_{U_i}$  es un  $AE$ -cuadrado, por consiguiente los morfismos  $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$  son  $AE$ -cuadrados porque se obtienen, tomando pullbacks, de los  $AE$ -cuadrados  $\alpha_{U_2}, \alpha_{U_3}, \dots, \alpha_{U_n}$  respectivamente. Por lo tanto

$$\alpha = \alpha_{U_1} \circ \alpha_2 \circ \dots \circ \alpha_n : p_{1,n} \rightarrow p$$

es un  $AE$ -cuadrado.

El siguiente paso es dar una definición explícita de la función  $p_{1,n}$ .

Primero analizamos que sucede con  $p_{1,2}$ . Para ello, consideremos el cubo conmutativo



donde

- $\alpha_2 = (\widehat{\pi_{p^{-1}(U_2)}^0}, \widehat{\pi_{U_2}^0}),$
- $\mathcal{P}_1 = \{(\omega_1, \omega_2) \in U_1^I \times U_2^I : \pi_{U_2}^0(\omega_2) = \pi_{U_1}^1(\omega_1)\} = \{(\omega_1, \omega_2) \in U_1^I \times U_2^I : \omega_1(1) = \omega_2(0)\},$
- $\mathcal{P}_2 = \{(\omega_1, \omega_2) \in p^{-1}(U_1)^I \times p^{-1}(U_2)^I : \pi_{p^{-1}(U_2)}^0(\omega_2) = \pi_{p^{-1}(U_1)}^1(\omega_1)\} = \{(\omega_1, \omega_2) \in p^{-1}(U_1)^I \times p^{-1}(U_2)^I : \omega_1(1) = \omega_2(0)\}$  y
- $p_{1,2}((\omega_1, \omega_2)) = (p \circ \omega_1, p \circ \omega_2)$  para cada  $(\omega_1, \omega_2) \in \mathcal{P}_2.$

En general, si  $\tilde{U}_i = p^{-1}(U_i)$  el dominio de  $p_{1,n}$  es

$$\bar{V} = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \tilde{U}_1^I \times \dots \times \tilde{U}_n^I : \omega_1(1) = \omega_2(0), \dots, \omega_{n-1}(1) = \omega_n(0)\},$$

su codominio es

$$\bar{W} = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in U_1^I \times \dots \times U_n^I : \omega_1(1) = \omega_2(0), \dots, \omega_{n-1}(1) = \omega_n(0)\}$$

y su regla de correspondencia es  $p_{1,n}((\omega_1, \dots, \omega_n)) = (p \circ \omega_1, \dots, p \circ \omega_n)$  para cada  $(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \bar{V}$ . Más aún,  $\alpha = (\pi_{\bar{V}}, \pi_{\bar{W}})$  donde  $\pi_{\bar{V}}((\omega_1, \dots, \omega_n)) = \omega_1(0)$  y  $\pi_{\bar{W}}((\omega_1, \dots, \omega_n)) = \omega_1(0)$ .

Por otro lado, es importante destacar que las funciones  $p_W^I$  y  $p_{1,n}$  son esencialmente las mismas, es decir,  $V \approx \bar{V}$  y  $W \approx \bar{W}$ . Para la prueba de tal afirmación, sean  $\tilde{g} : V \rightarrow \bar{V}$  y  $g : W \rightarrow \bar{W}$  dadas por  $\tilde{g}(\omega) = g(\omega) = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ , donde  $\omega_i(t) = \omega(\frac{i-1+t}{n})$ , para cada  $\omega \in V$ ,  $\omega \in W$  y  $t \in I$ . Sus respectivas funciones inversas son  $\tilde{g}^{-1} : \bar{V} \rightarrow V$  y  $g^{-1} : \bar{W} \rightarrow W$  definidas por  $\tilde{g}^{-1}((\omega_1, \dots, \omega_n)) = g^{-1}((\omega_1, \dots, \omega_n)) = \omega$ , donde

$$\omega(t) = \begin{cases} \omega_1(nt) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ \omega_2(nt - 1) & \text{si } \frac{1}{n} \leq t \leq \frac{2}{n} \\ \vdots & \\ \omega_i(nt + 1 - i) & \text{si } \frac{i-1}{n} \leq t \leq \frac{i}{n} \\ \vdots & \\ \omega_n(nt + 1 - n) & \text{si } \frac{n-1}{n} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Observar que  $w$  está bien definida pues para cada  $i \in \{2, \dots, n\}$  se cumple:  $\omega(\frac{i-1}{n}) = \omega_{i-1}(1) = \omega_i(0)$ . Asimismo,  $\omega$  es continua por el lema de Pegado.

Una observación interesante es que  $\pi_{\bar{V}} \circ \tilde{g} = \pi_V^0$  y  $\pi_{\bar{W}} \circ g = \pi_W^0$ , es decir,  $\alpha \circ (\tilde{g}, g) = (\pi_V^0, \pi_W^0)$ . Además, en virtud de que  $\alpha$  es un  $AE$ -cuadrado se sigue que  $(\tilde{g}, g)$  también lo es, por consiguiente  $(\pi_V^0, \pi_W^0)$  es un  $AE$ -cuadrado, esto es,  $q_{\widehat{W}}$  es un  $AE$ -mapeo.

Finalmente, debido a la elección arbitraria de  $(x, \gamma) \in \widehat{W} \subset coCyl(p)$  podemos afirmar que existe una cubierta abierta  $\{\widehat{W}_j\}_{j \in J}$  de  $coCyl(p)$  tal que  $q_{\widehat{W}_j} : q^{-1}(\widehat{W}_j) \rightarrow \widehat{W}_j$  es un  $AE$ -mapeo para cada  $j \in J$ . Luego, por el teorema 4.3, concluimos que  $q$  es  $AE$ -mapeo, es decir,  $p$  es fibración regular (teorema 4.1).  $\square$



---

## *Conclusiones*

---

En esta tesis estudiamos los conceptos de  $\Sigma$ -fibración y objeto  $\Sigma$ -fibrante para las siguientes familias de encajes cerrados:  $\partial_0$ ,  $\{X \times \{0\} \cup A \times I \hookrightarrow X \times I\}$ ,  $Cl$ ,  $SDR$  y  $SSDR$ . Después, probamos que

$$\{\text{fibración fuerte}\} \subset \{\text{fibración regular}\} \subset \{\text{fibración de Hurewicz}\}.$$

Es aquí donde surgen dos aspectos relevantes a destacar. El primero radica en la igualdad de las clases  $\{SDR\text{-fibración}\}$  y  $\{\text{fibración de Hurewicz}\}$  en la categoría  $\mathcal{M}$ ; el segundo es la contención  $\{\text{fibración de Hurewicz entre espacios fibrantes}\} \subset \{\text{fibración fuerte}\}$ .

Posteriormente, observamos el importante rol que desempeñan las familias cerradas bajo extensiones cilíndricas en las pruebas de los teoremas de factorización en las categorías  $TOP$  y  $Map\text{-}TOP$ .

La parte principal de este trabajo la desarrollamos en el capítulo 3. Definimos las familias  $\mathfrak{F}$  y  $\widehat{\Sigma}$  en  $Map\text{-}TOP$  a partir de una familia  $\Sigma$  y caracterizamos las  $\mathfrak{F}$ -fibraciones y  $\widehat{\Sigma}$ -fibraciones utilizando el concepto de cuadrado  $\Sigma$ -fibrado. En particular, la noción de  $AE$ -cuadrado nos permitió caracterizar las fibraciones regulares y por tal motivo fue posible proporcionar una prueba alternativa del teorema 4.4.

¿Qué sigue?

1. Un encaje cerrado  $s : A \hookrightarrow X$  es una extensión fibrante si  $s \in SSDR$  y  $X$  es fibrante. Un ejemplo de este tipo de encajes lo proporciona la función  $s_f$  del teorema de factorización en  $TOP$ , debido a que  $s_f \in SDR \subset SSDR$  y  $coCyl(f)$  es fibrante si  $f$  es una función continua entre espacios fibrantes. Por tal motivo, es deseable estudiar propiedades y resultados interesantes sobre extensiones fibrantes.
2. Dado un grupo topológico compacto  $G$ , definimos la categoría  $G\text{-}TOP$  que consiste de  $G$ -espacios topológicos y  $G$ -funciones continuas. Un hecho importante es la versión de fibración de Hurewicz en esta nueva categoría.

Explícitamente, una  $G$ -función continua  $p : E \rightarrow B$  es una  $G$ -fibración de Hurewicz si para cada diagrama conmutativo en  $G\text{-TOP}$ ,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & E \\ \partial_X^0 \downarrow & & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{F} & B, \end{array}$$

existe una  $G$ -función continua  $G : X \times I \rightarrow E$  tal que  $G \circ \partial_X^0 = f$  y  $p \circ G = F$ . Un trabajo interesante sería analizar qué teoremas vistos en esta tesis pueden ser reformulados en la categoría  $G\text{-TOP}$ .



---

## *Bibliografía*

---

- [1] Antonyan S. A., De Neymet S. y Jimenez R., “Fiberwise retraction and shape properties of the orbit space”. *Glasnik Mat.* 35(55), 191-210. 2000.
- [2] Bykov A. y Sánchez J., “G-fibrant extensions and twisted products”. *Topology and Appl.* 201. 157-170. 2016.
- [3] Bykov A. y Kantún A., “Strong G-fibrations and orbit projections”. *Topology and Appl.* 163. 46-65. 2014.
- [4] Bykov A. y Juárez R., “G-fibraciones regulares”. *Matemáticas y sus Aplicaciones* 4. 131-158. 2014.
- [5] James I. M., “General Topology and Homotopy Theory”. Springer-Verlag. 0-387-90970-2. 1984.
- [6] Strom A., “Note on cofibrations II”. *Math. Scand.* 22. 130-142. 1968.
- [7] Hu S. T., “Theory of Retracts”. Wayne State University Press. 9780814312537. 1965.
- [8] Munkres J. R., “Topology”. Prentice Hall. 9780131784499. 1975.
- [9] Willard S., “General topology”. Addison-Wesley Publishing Company. 0-486-43479-6. 2004.



---

## *Índice alfabético*

---

- SDR*-mapeo, 32  
 $\Sigma$ -fibración, 27
- AE-mapeo, 31
- categoría de morfismos de  $\mathcal{C}$ , 11  
clase débilmente hereditaria, 19  
cocilindro de un morfismo en  
    Map-TOP, 65  
cocilindro de una función continua,  
    47  
cuadrado  $\Sigma$ -fibrado, 53
- espacio fibrante (en el sentido de  
    Cathey), 36  
espacio SDR, 36  
extensor absoluto, 20  
extensor absoluto de vecindad, 20
- familia cerrada bajo extensiones  
    cilíndricas, 40  
fibración de Hurewicz, 30  
fibración fuerte, 36  
fibración regular, 31  
funciones homotópicas, 18  
funciones homotópicas relativas, 18  
funtores adjuntos, 15
- morfismo de funtores, 14  
morfismos de funtores adjuntos, 17
- objeto  $\Sigma$ -fibrante, 27
- propiedad de extensión de  
    homotopías, 31  
pullback de dos morfismos, 12
- retracción, 19  
retracto, 19  
retracto absoluto, 19  
retracto absoluto de vecindad, 19  
retracto por deformación fuerte en  
    Map-TOP, 64  
retracto por deformación fuerte, 19
- SSDR-mapeo, 36
- teorema de encaje de  
    Kuratowski-Wojdyslawski,  
    23  
teorema de extensión de Dugundji,  
    21  
teorema de factorización en  
    Map-TOP, 70  
teorema de factorización en TOP,  
    48