BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN FÍSICA

EL DESEMPEÑO DE ESTUDIANTES DE DIFERENTES NIVELES EDUCATIVOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE "SOBRA Y FALTA": LA INFLUENCIA DEL CONTEXTO Y DEL NIVEL COGNITIVO

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN FÍSICA

PRESENTA
JESÚS ÁNGEL MELCHOR TIRO
DIRECTOR DE TESIS
DR. JOSIP SLISKO IGNJATOV

Puebla, Puebla, Junio de 2023

PUEBLA, PUE. JUNIO 2023

AGRADECIMIENTOS

A la vida, por permitirme estar aquí hoy, agradecido y emocionado por haber llegado al final de esta etapa. Cada día es una oportunidad para aprender, crecer y descubrir nuevos horizontes. Gracias por las alegrías y por los retos que me han permitido desarrollar mi fortaleza y perseverancia.

A mi familia, por su amor, apoyo y comprensión en cada momento de mi vida, en especial durante esta etapa académica. Gracias por ser mi mayor motivación y por alentarme a seguir adelante en los momentos difíciles. Sin su apoyo incondicional, no hubiera sido posible llegar hasta aquí.

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mi asesor de tesis Josip Slisko. Su dedicación, conocimiento y orientación han sido fundamentales en el desarrollo de este proyecto académico. Su apoyo constante, paciencia y valiosos comentarios me han permitido crecer tanto a nivel profesional como personal.

RESUMEN

La resolución de problemas es una habilidad fundamental para el desarrollo de competencias cognitivas y el éxito académico de los estudiantes. Entre los diversos tipos de problemas, los que involucran la noción de "sobra y falta" son de especial interés, ya que requieren un análisis y razonamiento complejo para encontrar soluciones adecuadas.

El presente trabajo muestra los resultados de la aplicación de una prueba en la que se plantean dos problemas de "sobra y falta": uno de carácter matemático y otro en el que se involucran conceptos básicos de cinemática.

Esta prueba se aplicó a diferentes niveles educativos: secundaria, nivel medio superior y universidad (alumnos de nuevo ingreso de la facultad de ciencias fisicomatemáticas).

En la aplicación de la prueba se hicieron dos modalidades. Con los alumnos de secundaria y bachiller solo se aplicó la prueba de manera individual y con los alumnos de universidad se dio un seguimiento más detallado con base en sus resultados de su examen de razonamiento lógico y reflexión cognitiva. Se aplicó la misma prueba, pero ahora de manera grupal en donde los alumnos comentaron y defendieron sus respuestas.

Al finalizarla fase grupal se hizo una reflexión evaluativa sobre los dos problemas a los alumnos universitarios.

Se encontró que los alumnos con mayor puntaje en sus pruebas de razonamiento lógico y reflexión cognitiva tienden a resolver de manera exitosa ambos problemas, utilizando métodos algebraicos, mientras los alumnos con puntajes menores suelen usar métodos aritméticos que no siempre los llevan al resultado correcto.

INDICE

Capítulo 1
INTRODUCCIÓN

A lo largo de la historia, la resolución de problemas matemáticos y físicos ha sido una actividad clave para el desarrollo del pensamiento crítico y la comprensión del mundo natural. En el contexto actual, esta habilidad sigue siendo esencial para enfrentar los retos que la sociedad demanda en diversos campos, como la ingeniería, la ciencia y la tecnología.

En esta tesis nos enfocaremos particularmente a los problemas de falta y sobra, que son un tipo común de problemas matemáticos que se aplican en diversas situaciones de la vida cotidiana, como en compras y presupuestos.

Los problemas de falta y sobra se utilizan en la enseñanza de las matemáticas, especialmente en la educación primaria y secundaria. Estos problemas son útiles para enseñar a los estudiantes conceptos como adición, sustracción, igualdad y desigualdad, y también son una buena manera de desarrollar habilidades de pensamiento lógico y resolución de problemas.

Este trabajo presenta los resultados de la aplicación de una prueba que consistió en plantear dos problemas extraídas de los libros de texto de Singapur, una de naturaleza matemática y la otra que aborda los conceptos básicos de la física, em los diferentes niveles educativos: secundaria, preparatoria y universidad.

La prueba se aplicó en dos modos, con pruebas de aplicación individual para los estudiantes de secundaria y preparatoria, mientras que con los estudiantes universitarios se dio un seguimiento más detallado basado en sus resultados de razonamiento lógico y cognitivo.

La misma prueba se aplicó de manera grupal, donde los estudiantes universitarios comentaron y defendieron sus respuestas. Al final de la fase grupal, se realizó una reflexión valorativa sobre los dos problemas planteados.

Capítulo 2
MARCO TEÓRICO

2.1. Resolución de problemas físico-matemáticos y el impacto en la sociedad

La resolución de problemas físico-matemáticos es una habilidad esencial para el desarrollo de la sociedad en múltiples aspectos. A continuación, se presenta un marco teórico detallado que explica cómo la resolución de problemas físico-matemáticos impacta en la sociedad.

Contribución a la innovación tecnológica

La resolución de problemas físico-matemáticos es esencial para el avance en áreas como la tecnología, la ciencia y la ingeniería. La capacidad para resolver problemas matemáticos y físicos es fundamental para el diseño de sistemas de tecnología avanzada, la creación de nuevos productos y la mejora de procesos de producción (National Research Council, 2011).

Desarrollo económico

El desarrollo de habilidades en matemáticas y resolución de problemas tiene un impacto directo en la economía de un país. Los trabajadores que poseen habilidades matemáticas avanzadas son más propensos a obtener empleos mejor remunerados y contribuyen al crecimiento económico de sus comunidades (OECD, 2019).

Mejora de la calidad de vida

La resolución de problemas físico-matemáticos también tiene un impacto directo en la calidad de vida de las personas. Por ejemplo, los avances en tecnología médica, como los equipos de diagnóstico por imágenes, se basan en gran medida en las habilidades matemáticas avanzadas y la resolución de problemas (OECD, 2019).

Toma de decisiones informadas

La resolución de problemas físico-matemáticos también es esencial para la toma de decisiones informadas. Las personas que poseen habilidades en matemáticas y resolución de problemas son más capaces de comprender y evaluar la información, lo que les permite tomar decisiones informadas y hacer elecciones basadas en datos objetivos (Siegler & Lortie-Forgues, 2015).

2.2. Medición del rendimiento en la resolución de problemas matemáticos.

Existen diferentes pruebas y evaluaciones a nivel mundial para medir la capacidad de resolver problemas matemáticos en los estudiantes.

A continuación, se presentan algunas que han destacado en su cobertura y resultados:

Pruebas PISA: La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE, n.d.) administra cada tres años la prueba PISA (Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes), que evalúa el rendimiento de los estudiantes de 15 años en matemáticas, ciencias y lectura. La prueba se aplica en más de 70 países y se enfoca en la capacidad de los estudiantes para aplicar sus conocimientos matemáticos a situaciones de la vida real (OCDE, n.d.).

TIMSS: El Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMSS) es otra evaluación a nivel mundial que se realiza cada cuatro años. Esta prueba se enfoca en medir la comprensión de los estudiantes en conceptos matemáticos y científicos y se administra a estudiantes de cuarto y octavo grado. (TIMSS & PIRLS International Study Center, n.d.).

AMC: La Competencia Matemática Australiana (AMC) es una prueba anual que se aplica en varios países de todo el mundo. La prueba se enfoca en la resolución de problemas matemáticos y está diseñada para estudiantes de primaria y secundaria (Australian Mathematics Trust, n.d).

Debido al alcance mundial y a la participación de México nos enfocaremos en la prueba PISA aplicada en México desde el año 2000 y que hasta la fecha ha estado presente en todas las ediciones de la prueba.

Desafortunadamente los resultados de México han sido muy por debajo comparado con los resultados más destacados de dicha prueba.

Singapur por ejemplo ha tenido un desempeño consistente y muy alto en la prueba PISA desde que comenzó a participar en ella en el año 2000. A continuación (Tabla 1), se muestran los resultados de Singapur en las tres áreas evaluadas en cada uno de los años que ha participado:

Año	Matemáticas	Ciencias	Lectura
2000	598	605	587
2003	575	542	549
2006	548	543	542
2009	562	542	526
2012	573	551	542
2015	564	556	535
2018	569	551	517

Tabla 1. Resultados de Singapore. Fuente OCDE. (2020)

Como se puede observar, Singapur ha mantenido altos puntajes en todas las áreas evaluadas en cada una de las pruebas PISA en las que ha participado.

Cabe destacar que, en el año 2015, Singapur obtuvo los puntajes más altos en las tres áreas evaluadas, convirtiéndose en el país con el mejor desempeño general en la prueba PISA. En la prueba PISA 2018, aunque Singapur no obtuvo los puntajes más altos en ninguna de las tres áreas, siguió siendo uno de los países con mejor desempeño en la prueba (*OCDE, 2020).*

2.3. Técnicas de resolución de problemas físico - matemáticos

La resolución de problemas es un proceso fundamental en la matemática y la física, ya que permite a los estudiantes desarrollar habilidades analíticas y de pensamiento crítico que son esenciales en estas disciplinas. Sin embargo, los problemas matemáticos y físicos pueden resultar desafiantes para muchos estudiantes, quienes pueden sentirse abrumados y desmotivados al tratar de resolverlos.

Es por eso que existen diversas técnicas y estrategias para abordar y solucionar este tipo de problemas, que han sido objeto de investigación en la pedagogía de estas disciplinas.

Las técnicas de resolución de problemas físico - matemáticos son herramientas fundamentales para el desarrollo de habilidades científicas, matemáticas y técnicas en los estudiantes (Gómez & De la Herrán Gascón, 2018)**.** Estas técnicas se utilizan para analizar y comprender los problemas, aplicar conceptos y principios físicos y matemáticos y encontrar soluciones óptimas a los problemas planteados.

Para llevar a cabo la resolución de problemas físico - matemáticos, se pueden utilizar diferentes técnicas, como la identificación de los datos, la formulación de hipótesis, la selección y aplicación de fórmulas, la interpretación de resultados y la verificación de la solución**.**

La identificación de los datos es una técnica que consiste en analizar el enunciado del problema y determinar qué datos se proporcionan y qué se busca.

La formulación de hipótesis implica plantear posibles soluciones o estrategias para resolver el problema (Ruiz, F. A. Z, 2017). La selección y aplicación de fórmulas se refiere al uso de las relaciones matemáticas y físicas apropiadas para el problema. La interpretación de resultados implica la revisión crítica de la solución obtenida y la verificación de que tiene sentido físico.

Es importante destacar que la resolución de problemas físico matemáticos no solo implica la aplicación de técnicas específicas, sino también el desarrollo de habilidades de pensamiento crítico y resolución de problemas (Ruiz, F. A. Z. (2017)).

Estas habilidades se desarrollan a través de la práctica y la exposición a una variedad de problemas que involucran diferentes niveles de complejidad.

Las técnicas de resolución de problemas físico - matemáticos son herramientas fundamentales para el desarrollo de habilidades científicas, matemáticas y técnicas en los estudiantes.

La identificación de los datos, la formulación de hipótesis, la selección y aplicación de fórmulas, la interpretación de resultados y la verificación de la solución son algunas de las técnicas que se utilizan para resolver problemas físico matemáticos. Además, es importante destacar que la resolución de problemas físico matemáticos implica el desarrollo de habilidades de pensamiento crítico y resolución de problemas que se adquieren a través de la práctica y la exposición a una variedad de problemas.

2.4. Influencia del razonamiento lógico y cognitivo para la resolución de problemas

El razonamiento lógico y cognitivo es una habilidad cognitiva importante que permite a las personas analizar, entender y resolver problemas complejos utilizando el pensamiento crítico y la toma de decisiones efectivas.

Definición de razonamiento lógico y cognitivo

El razonamiento lógico y cognitivo se define como la capacidad para utilizar información, conocimiento y habilidades cognitivas para resolver problemas de manera efectiva y eficiente. Según la teoría de la inteligencia fluida y cristalizada de (Cattell, 1987), la inteligencia fluida se refiere a la capacidad para resolver problemas nuevos o no familiares, mientras que la inteligencia cristalizada se refiere a la capacidad para utilizar el conocimiento adquirido previamente para resolver problemas familiares.

Teorías del razonamiento lógico y cognitivo

Existen varias teorías sobre el razonamiento lógico y cognitivo, entre ellas la teoría de los modelos mentales de (Johnson-Laird, 1983).

Esta teoría sugiere que los seres humanos utilizan modelos mentales para representar la información y resolver problemas. Los modelos mentales son representaciones mentales simplificadas del mundo que permiten a las personas simular situaciones y tomar decisiones basadas en la información disponible.

Otra teoría relevante es la teoría de la transferencia de conocimiento de (Perkins y Salomon, 1992). Esta teoría sugiere que las habilidades cognitivas adquiridas en una tarea pueden transferirse a otras tareas similares. La transferencia de conocimiento es importante para la educación, ya que los estudiantes pueden aplicar habilidades y conocimientos adquiridos en una materia a otras áreas del conocimiento.

Desarrollo del razonamiento lógico y cognitivo

El razonamiento lógico y cognitivo se desarrolla a lo largo de la vida y es influenciado por factores biológicos, ambientales y educativos. Según (Piaget, 1950), los niños pasan por diferentes etapas de desarrollo cognitivo, y en cada etapa, desarrollan habilidades cognitivas más complejas, incluyendo el razonamiento lógico y abstracto.

La educación también desempeña un papel importante en el desarrollo del razonamiento lógico y cognitivo. Las actividades educativas que fomentan el pensamiento crítico, la resolución de problemas y el razonamiento lógico pueden mejorar estas habilidades. En un estudio de análisis de (Abrami, Bernard, Borokhovski & Persson, 2008), se encontró que la enseñanza de habilidades de pensamiento crítico mejoró significativamente el rendimiento académico y el razonamiento lógico de los estudiantes.

2.5. Pensamiento lógico deductivo en los problemas de “sobra y falta”

Los problemas de falta y sobra son un tipo de problema matemático que requiere que el estudiante determine las cantidades solicitas a partir de las cantidades conocidas que faltan o sobran en una situación dada.

Estos problemas pueden ser presentados en diferentes contextos (compras, pagos, movimientos,…). Tienen una larga historia y, por primera vez, aparecen en China (Kangshen, Crossley & Lun, 1999) y, después, gracias a los escritos de los matemáticos hindu y árabes, reaparecen en en Europa medieval (Chemla, 1997).

Un ejemplo alemán del siglo XV es:

> “Una mujer tiene figos y niños. Dando a cada niño 12 figos, le quedan a ella 37 figos. Si quisiera dar a cada niño 15 figos, entonce le fatarían 44 figos. Ahora pregunto, cuántos figos y niños hay (Vogel, 1954, Problema 158, pp. 75 – 76).

El número de niños es obtiene al dividir la suma de los números de figos que sobran y que faltan (37 + 44 = 81) entre el aumento de los números de figos dados (15 – 13 = 3): 81/3 = 27. El número de figos es: (27 x 12) + 37 = 361.

Tropfke (1980, pp. 601 - 602) presentó una bibliografía amplia de los autores medievales en Europa que usaban en sus manuscritos y libros de texto los problemas de sobra y falta en diferentes contextos. Una revisión de los diferentes métodos de solución de problemas de sobra y falta se presenta en el **Anexo 1**.

Es importante destacar que la resolución de problemas de falta y sobra no solo implica la aplicación de estrategias matemáticas específicas, sino también el desarrollo de habilidades de pensamiento crítico y resolución de problemas (Lester, 2007). Estas habilidades se adquieren a través de la práctica y la exposición a una variedad de problemas que involucran diferentes niveles de complejidad (Schoenfeld, 1992).

Además, los problemas de falta y sobra pueden ser presentados en diferentes contextos culturales y lingüísticos, lo que puede afectar la forma en que los estudiantes interpretan y resuelven estos problemas.

Por lo tanto, es importante tener en cuenta el contexto cultural y lingüístico del estudiante al presentar problemas de falta y sobra.

Los problemas de falta y sobra requieren que el estudiante identifique las cantidades solicitadas a partir de las cantidades conocidas que faltan o sobran en una situación dada. Resolver estos problemas requiere el uso de estrategias matemáticas específicas, como usar modelos y representaciones, reconocer patrones y relaciones, aplicar operaciones y resolver ecuaciones.

Los problemas de falta y sobra se vinculan con el pensamiento lógico deductivo, como señalan (Monroy, 2013) en su estudio sobre habilidades matemáticas en estudiantes de primaria.

Los problemas de falta y sobra se vinculan con el pensamiento lógico deductivo de varias maneras.

En primer lugar la resolución de problemas de falta y sobra requiere que el estudiante utilice el razonamiento lógico para comprender la situación presentada y deducir de las cantidad dadas que faltan o sobran las cantidades solicitadas. Esto implica la capacidad de identificar patrones y relaciones matemáticas, y aplicar reglas y principios matemáticos para llegar a una conclusión (Bunge, 2019).

En segundo lugar, los problemas de falta y sobra a menudo requieren que el estudiante aplique un enfoque deductivo para llegar a una solución. El estudiante debe comenzar con la información proporcionada (lo que sobra y falta) y deducir las cantidades solicitadas, utilizando una serie de pasos lógicos y una comprensión clara de las relaciones matemáticas involucradas.

En tercer lugar, la resolución de problemas de falta y sobra también puede involucrar la aplicación de reglas y principios matemáticos aprendidos previamente.

La capacidad de aplicar reglas y principios matemáticos de manera efectiva también es una habilidad clave del pensamiento lógico deductivo (Monroy, 2013).

2.6. Uso de métodos algebraicos para resolver problemas físico-matemáticos

La resolución de problemas matemáticos es un aspecto fundamental en la educación matemática, ya que permite a los estudiantes desarrollar habilidades de razonamiento lógico y abstracto, y aplicar conceptos y procedimientos matemáticos en situaciones cotidianas y en la resolución de problemas prácticos. En este sentido, el uso de métodos algebraicos para resolver problemas matemáticos es una habilidad esencial que los estudiantes deben desarrollar a lo largo de su educación matemática.

El álgebra es una rama de las matemáticas que se ocupa de las relaciones y las operaciones entre variables y constantes, y se utiliza para modelar y resolver problemas matemáticos en diversas áreas, como la física, la economía, la ingeniería, entre otras.

Según varios estudios, el uso de métodos algebraicos en la resolución de problemas matemáticos puede mejorar la comprensión de los conceptos matemáticos y el rendimiento académico de los estudiantes (Gómez & De la Herrán Gascón, 2018).

Además, el uso de métodos algebraicos para resolver problemas matemáticos puede ayudar a los estudiantes a desarrollar habilidades de pensamiento crítico y de resolución de problemas, ya que implica la identificación y la organización de información, la formulación de ecuaciones y la aplicación de procedimientos matemáticos para encontrar soluciones.

Por otro lado, algunos estudios han señalado que el uso excesivo de métodos algebraicos en la resolución de problemas matemáticos puede limitar la capacidad de los estudiantes para comprender y aplicar conceptos matemáticos más avanzados, como la geometría y el cálculo (Knuth *et al.*, 2006)

En resumen, el uso de métodos algebraicos en la resolución de problemas matemáticos puede tener un impacto positivo en el aprendizaje de los estudiantes y en su capacidad para resolver problemas prácticos en diversas áreas de la sociedad.

2.7. Uso de recursos gráficos en la resolución de problemas físico -matemáticos.

Muchas veces las personas encuentran más fácil resolver un problema cuando se puede ver, tocar o representar a través de un dibujo o esquema. Esta característica es quizá una de las razones que justifica el hecho de que la investigación sobre el lugar de las representaciones en el aprendizaje de las matemáticas y en la resolución de problemas haya experimentado un crecimiento importante en los últimos años.

Como resultado de estas investigaciones se considera indiscutible la importancia de las múltiples representaciones en el desarrollo del pensamiento matemático de cuya evidencia principal dan cuenta las agendas de prioridades establecidas en comités y reuniones científicas de rango internacional (Goldin, 2013). El término representación es complejo y está abierto a muchas interpretaciones.

En este estudio el término "representación" se refiere a todas aquellas formas con que hacemos presentes los objetos o procesos matemáticos, y nos es esencial para definir, explicar, visualizar, registrar y comunicar el conocimiento matemático. Los sistemas de representación reúnen unos requisitos de complejidad, interrelación y poder de simbolización y abstracción cuyo dominio amplía y enriquece la inteligencia humana en cuanto son instrumentos útiles de modelización de la realidad y herramientas prácticas para la resolución de diferentes tipos de problemas de la vida real. Mediante diversos medios de expresión los seres humanos nos familiarizamos y aprendemos un sin fin de códigos, símbolos, señales, iconos y lenguajes de diversa naturaleza.

2.8. Metacognición en la resolución de problemas

La metacognición se refiere al conocimiento y la conciencia que una persona tiene sobre sus propios procesos cognitivos y de aprendizaje (Flavell, 1979). En otras palabras, se trata de la capacidad de reflexionar y controlar los propios procesos mentales durante la resolución de problemas y la toma de decisiones.

Algunos autores destacan que la metacognición puede dividirse en dos aspectos principales: la metacognición declarativa y la metacognición procesal (Schraw & Moshman, 1995). La metacognición declarativa se refiere al conocimiento que una persona tiene sobre su propia cognición, como el conocimiento de los propios puntos fuertes y débiles en un área determinada. La metacognición procesal, por otro lado, se refiere al conocimiento y control que una persona tiene sobre los procesos cognitivos y de aprendizaje que se utilizan para lograr una tarea determinada.

La metacognición puede ser un factor importante en el rendimiento académico de los estudiantes, ya que aquellos que tienen un mayor conocimiento metacognitivo pueden ser más efectivos en el aprendizaje y la resolución de problemas (Schraw & Dennison, 1994). Además, la enseñanza explícita de la metacognición puede mejorar el rendimiento académico de los estudiantes y fomentar el aprendizaje a largo plazo (Dunlosky & Metcalfe, 2009).

La metacognición juega un papel muy importante en la resolución de problemas, así como en este estudio debido a las diferencias encontradas.

Las habilidades metacognitivas ayudan a:

1) Codificar estratégicamente la naturaleza del problema y a obtener una representación mental de sus elementos.

2) Seleccionar las estrategias adecuadas para la consecución del objetivo; y

3) Identificar los obstáculos que impiden y dificultan el progreso

(Davidson & Sternberg, 1998).

Algunos estudios han revelado la importancia de la metacognición para hacer frente a la dificultad para resolver problemas matemáticos en el momento de emplear el conocimiento necesario de modo correcto o en el momento apropiado (McAfee & Leong, 1997).

Capítulo 3

ANTECEDENTES Y JUSTIFICACIÓN

México ha mostrado un resultado muy por debajo de los países de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE 2015) a través de las diferentes ediciones del Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes o Informe PISA (por sus siglas en ingles).

De acuerdo con los resultados de 2015, el desempeño de México fue alrededor de 75 puntos menor al promedio de la OCDE, en las tres áreas evaluadas.

Esta diferencia en la puntuación cobra mayor relevancia cuando se considera el lugar que ha ocupado México con respecto a los otros países participantes.

Así, por ejemplo, en la edición de 2015, de los 70 países participantes, las puntuaciones de los estudiantes mexicanos se ubicaron en el lugar 58 en Ciencias, 55 en Lectura y 56 en Matemáticas, es decir más de 25 posiciones por debajo del promedio de la OCDE, o, dicho en otras palabras, por debajo del último cuartil.

De hecho, como puntualizaron Martínez-Rizo y Silva Guerrero (2016), los resultados de México son inclusive inferiores a los de otros países de Latinoamérica (Uruguay, Costa Rica y Colombia).

Aunque en algunos ciclos se han producido avances, los datos siguen siendo desalentadores. Por ejemplo, en Matemáticas el logro ha incrementado casi 20 puntos, entre el 2000 y 2015; sin embargo, en Lectura prácticamente no ha variado, y en Ciencias de hecho ha disminuido (OCDE, 2016)

Año	Matemáticas	Lectura	Ciencias
2000	385 (-52)	410 (-26)	416 (-20)
2003	388 (-53)	417 (-19)	419 (-17)
2006	410 (-43)	425 (-11)	416 (-20)
2009	419 (-56)	425 (-10)	416 (-20)
2012	413 (-43)	424 (-11)	415 (-21)
2015	408 (-49)	423 (-12)	416 (-20)
2018	409 (-46)	420 (-15)	409 (-27)

Tabla 2. Los resultados de México en la prueba PISA desde el año 2000 al 2018. Los números en paréntesis indican la diferencia en puntos porcentuales entre los resultados de México y el promedio de la OCDE (OCDE, 2018).

3.1. Planteamiento del problema y justificación

En los últimos años se ha construido una base crítica respecto de los procesos de enseñanza que considera el conocimiento matemático formal, el enseñado por el docente, y la aplicación en la solución de diferentes tipos de problemas aritméticos, en donde el alumno debe desarrollar la habilidad para enfrentar una situación nueva y proponer una solución utilizando los contenidos vistos en el aula (Lerman, 2001)

La resolución de problemas físicos y matemáticos necesita nuevas visiones paradigmáticas para orientar sus métodos y sus formas de enseñar y de aprender. Se requiere superar la tendencia a la abstracción pura, buscando su aplicabilidad en la vida y en los contextos reales en los que se vive.

Se necesitan nuevas taxonomías orientadoras, basadas en sólidos argumentos teóricos y reconceptualizaciones, que permitan explorar una teoría matemática que facilite despejar su cientificidad en el arraigo contextual de sus problemas, para no quedar reducida a la sola formulación de enunciados abstractos.

En el área de la educación, cada disciplina aborda el estudio de aplicación y resolución de problemas físico y matemáticos con una visión propia, desarrollada por filósofos, psicólogos, matemáticos, especialistas en educación y didáctica (Piaget, 1950).

Esta situación provoca que, en la actualidad, nos encontremos con una considerable cantidad de investigaciones centradas en resolución de problemas.

3.1.1. Preguntas de investigación

- ¿Qué estrategias usan los alumnos de diferentes niveles educativos para resolver dos problemas de sobra y falta?
- ¿Cómo influye la instrucción explícita de incluir una representación visual en la resolución de los problemas?
- ¿Cuál de los dos problemas de sobra y falta es más difícil para los alumnos?
- ¿Qué relación hay entre los alumnos que presentan una alta calificación en su examen de medición en razonamiento lógico - cognitivo y el número de sus soluciones correctas de problemas de sobra y falta?

3.1.2. Objetivo General

Investigar los tipos de soluciones y comparar sus diferentes formas aritméticas o algebraicas con la solución experta, paralelamente encontrar una relación entre su nivel de razonamiento lógico cognitivo con sus respuestas.

3.1.3. Objetivos Específicos

1. Analizar y clasificar las soluciones de los problemas físico y matemático.
2. Relacionar las soluciones grupales con las individuales.
3. Comparar las respuestas de los alumnos con las respuestas expertas.
4. Relacionar los tipos de soluciones con el puntaje en la prueba lógico - cognitivo.

Capítulo 4

METODOLOGÍA

4.1.1. Participantes

Los dos problemas fueron aplicados a 13 alumnos de secundaria, 137 alumnos de bachillerato y 30 universitarios.

- 2° grado de Educación Básica Secundaria (13 alumnos)
- 4° Semestre de Educación Media Superior (100 alumnos)
- 6° Semestre de Educación Media Superior (37 alumnos)
- 1° Semestre de Educación Superior (30 alumnos)

Se recolectaron las respuestas y las representaciones entre los distintos niveles educativos.

Se analizaron y se clasificaron las soluciones.

En el caso de los alumnos universitarios además se hizo una prueba de medición de razonamiento lógico y reflexión cognitiva.

4.1.2. Instrumentos

El problema matemático, que denominaremos a partir de ahora ***"El problema de los dulces",*** fue tomado del libro *Singapore Math Challenge 3 Grade (Chew, 2008, p. 223).* Su formulación es la siguiente:

- Una maestra tiene una bolsa con dulces, si ella da a cada estudiante 3 dulces, le quedan 16 dulces, para dar a cada estudiante 5 dulces, le faltarían 4 dulces más.
  ¿Cuántos estudiantes tiene la maestra?
  ¿Cuántos dulces tiene la maestra?

El problema físico, que denominaremos a partir de ahora ***"El problema de Tammy"***, fue tomado del mismo libro y tiene la siguiente formulación (Chew, 2008, p. 226):

> Cada mañana Tammy camina a la escuela. Si camina 50 metros por minuto, llega a la escuela dos minutos tarde. Si camina 60 metros por minuto, llega a la escuela un minuto temprano.
>
> ¿Qué tan lejos está la escuela de Tammy?

Los alumnos de Singapore obtienen estos dos problemas con la solución que se basa en un algoritmo aritmético, que usaba Widmann, pero sin su argumentación conceptual. En los problemas por resolver, se supone que los alumnos deben aplicar el mismo algoritmo memorizado.

En un libro de texto de matemática para el segundo grado de primaria, publicado en Croacia, el diseño didáctico es diferente (Jagodić et al., 2020, p. 140). En lugar de repetir un algoritmo dado previamente, se espera que los alumnos mismos encuentren su propio método de cálculo que les permite responder las preguntas en dos problemas de sobra y falta:

> Si un alumno compra 8 libretas, le quedan 5 kunas. Para comprar 10 libretas le faltan 5 kunas.
>
> ¿Cuánto dinero tenia el alumno? ¿Cuánto cuesta una libreta?
>
> **Calculo**:
>
> **Respuesta**:

> Una madre está dando manzanas a sus hijos. Si cada hijo obtiene 5 manzanas, le quedan dos manzanas. Para darle a cada hijo 6 manzanas, le faltarían dos manzanas.
>
> ¿Cuántos hijos y cuántas manzanas tiene?
>
> **Calculo**:
>
> **Respuesta**:

En este estudio, también, se suponía que los alumnos no conocían previamente una manera de resolver los problemas de sobra y falta. La instrucción en ambos problemas fue que con palabras y operaciones matemáticas desarrollen su razonamiento con el que piensan encontrar el resultado. En la prueba hay espacios designados para que el alumno pueda dibujar o hacer algún esquema y así aclarar el plan de solución.

En cada uno de los problemas se le pide al alumno desarrollar las operaciones que realizará para encontrar la solución y, en caso de tener un error o cambiar de idea, se solicita al estudiante que no borre nada, sino que simplemente deje indicado que ha cambiado de idea. Las hojas de trabajo están en el **Anexo 2**.

La prueba de medición de razonamiento lógico y reflexión cognitiva consta de 16 preguntas las cuales se distribuyen 10 de carácter lógico (**Anexo 3**) y 6 de reflexión cognitiva (**Anexo 4**). Esta prueba nos ayudará a comparar y encontrar una relación entre los alumnos que tienen un resultado alto en la prueba de razonamiento lógico y reflexión cognitiva y las respuestas que den en los problemas.

Capítulo 5
ANALISIS DE LOS RESULTADOS

5.1 Secundaria

5.1.1 Respuestas correctas para el problema de los dulces

Para nuestro estudio a nivel secundaria se seleccionó un grupo al azar del segundo año ya que ellos ya llevan la materia de física y en principio tienen una ventaja sobre los grados inferiores.

De las trece pruebas aplicadas, siete alumnos (**53 %**) pudieron resolver únicamente el problema de los dulces. Los seis restantes no tuvieron ninguna respuesta correcta.

Los alumnos que tuvieron la solución correcta en el problema de los dulces recurrieron a una solución algebraica y no utilizaron recursos gráficos para apoyarse, definiendo las incógnitas y estableciendo un sistema de ecuaciones simultaneo:

Utilizamos un sistema de ecuaciones donde decimos x = número de dulces y y = número de estudiantes

(1b) Si un dibujo o un esquema ayudaría a aclarar tu plan de solución, hazlo en el espacio de abajo.

(1c) Realiza las operaciones planeadas para responder la pregunta sobre el número de estudiantes.

$x - 3y = 16$

$x - 5y = -4$

$x = -4 + 5y$

$x - 5y = -4$

$x - 3y = 16$

$2y = 20$

$y = \frac{20}{2} = 10$

$x = 16 + 3\,y = 16 + \ 30 = \ 46$

$x = -4 + 5y = \ -4 + 50 = 46$

(1d) El número de estudiantes que tiene la maestra es **10**.

El método algebraico fue el que predominó en este grupo para llegar a la respuesta correcta a continuación veremos otros métodos que no tuvieron éxito.

5.1.2 Respuestas Incorrectas

Otro grupo de participantes recurrió a herramientas aritméticas que no dieron un resultado positivo, estos alumnos no tomaron en cuenta las condiciones iniciales del problema y establecieron valores aleatorios que satisfacían parcialmente las condiciones.

EJEMPLO DE RESPUESTA DE UN ALUMNO

Si a cada estudiante le da cierto número de dulces, sin que sobra alguno. Eso quiere decir que tiene 20 dulces repartidos entre cuatro alumnos. Sin embargo, ya que hay dulces sobrantes. Con el número de alumno (4) Si lo multiplicamos por el número de los dulces que recibieron los estudiantes (3) Quedan 12 y se le suman a los 16, dando 28 dulces.

(1b) Si un dibujo o un esquema ayudaría a aclarar tu plan de solución, hazlo en el espacio de abajo.

(1c) Realiza las operaciones planeadas para responder la pregunta sobre el número de estudiantes.

$$16 + 4 = 20$$

$$\frac{20}{5} = 4 \; número de \; estudiantes$$

$$4(3) = 12$$

$$16 + 12 = 28 \; dulces$$

Y, sin embargo, en el caso de que el número de dulces sea correcto, se puede dar un reparto exacto.

En ocasiones la sustitución de valores aleatorios que cumplen las condiciones de manera parcial no siempre son una respuesta ya que cumplen otros criterios al momento de abstraer el problema.

5.1.3 Respuestas correctas para el problema de Tammy

A nivel secundaría no hubo ninguna respuesta correcta en el problema de Tammy. Además, en su mayoría, ni si quiera hubo un intento.

5.2 Bachillerato

A nivel medio superior encontramos una mayor variedad de respuestas. Se aplicó la prueba a 137 alumnos de los cuáles únicamente ocho participantes (**6 %**) pudieron resolver ambos problemas.

5.2.1 Respuestas correctas

5.2.2 Respuestas para el problema de los dulces

Dentro de los sesenta y tres alumnos (**46 %**) que respondieron correctamente a la pregunta de los dulces, la siguiente respuesta mostraba cierta concurrencia, la cual consiste en una aproximación por tanteo hasta dar con los números que satisfacen las condiciones iniciales.

(1a) Describe con palabras y operaciones matemáticas el razonamiento con que piensas encontrar el número de los estudiantes.

$$3 \times 8 = 24 \quad 6 \times 8 = 40 \quad 3 \times 9 = 27 + 16 = 43 \quad 5 \times 9 = 45$$

$$16 - 20$$

$$2 \times 10 = 20$$

$$3 \times 10 = 30$$

$$5 \times 10 = 50$$

$$46$$

$$3 \times 10 = 30 + 16 = 46$$

$$5 \times 10 = 50 - 4 = 46$$

(1d) El número de estudiantes que tiene la maestra es 10 estudiantes

---

Otra respuesta similar pero reforzada con gráficos nos presenta el siguiente alumno dónde representa con cuadros cada uno de los dulces y va coloreando según la repartición para aclarar su plan de trabajo.

Ejemplo de respuesta de un alumno

Tiene 10 alumnos y en la bolsa suponemos 46 dulces

$5 \times 10 = 50 \quad 46 - 50 = \mathbf{4}$ $\qquad$ $3 \times 10 = 30 \quad 46 - 30 = \mathbf{16}$

Dulces Faltantes $\qquad$ Dulces Sobrantes

(1b) Si un dibujo o un esquema ayudaría a aclarar tu plan de solución, hazlo en el espacio de abajo.

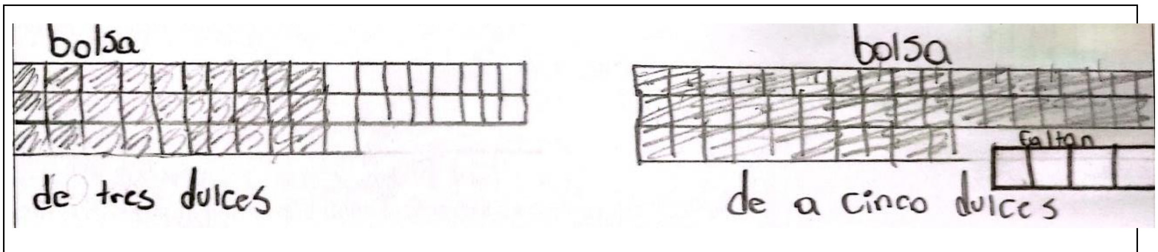


Fig. 5.1. Representación gráfica de los dulces y su repartición
Fuente: Elaboración propia

(1c) Realiza las operaciones planeadas para responder la pregunta sobre el número de estudiantes.

$3 \times 10 = 30 \quad 46 - 30 = \mathbf{16}$ $\qquad$ $5 \times 10 = 50 \quad 46 - 50 = \mathbf{-4}$

___

La repartición de dulces virtuales a través de dibujos representa cierta tranquilidad y confianza al alumno al momento de comprobar sus respuestas.

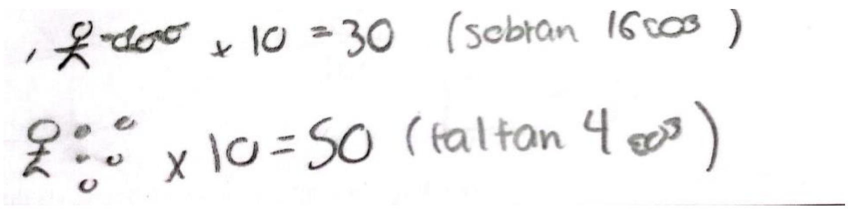


Fig. 5.2. Representación gráfica de los dulces y su repartición
Fuente: Elaboración propia

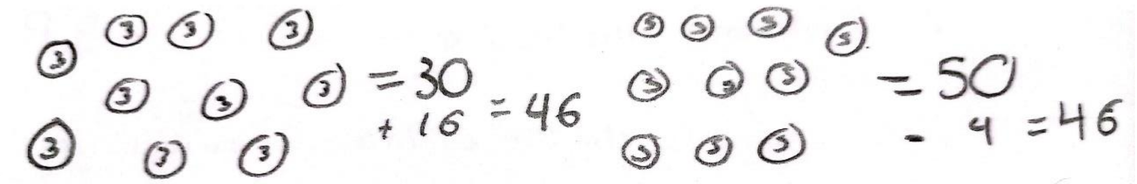


Fig.5.3. Representación gráfica de los dulces y su repartición
Fuente: Elaboración propia

Algunos alumnos simplemente basaron su respuesta en el resultado que arrojo su dibujo.

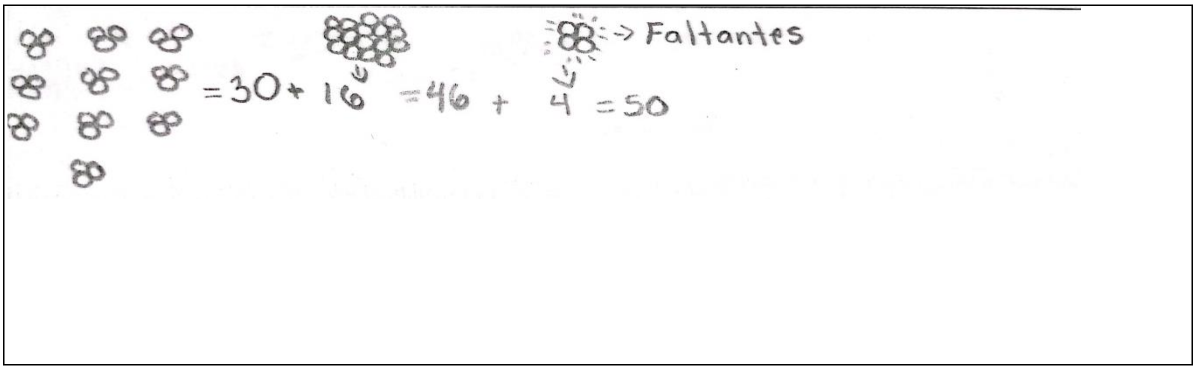


Fig. 5.4. Representación gráfica de los dulces y su repartición
Fuente: Elaboración propia

En ocasiones se combina un esquema numérico con una representación gráfica en dónde el aluno presenta una distribución proporcional a cada niño dibujado.

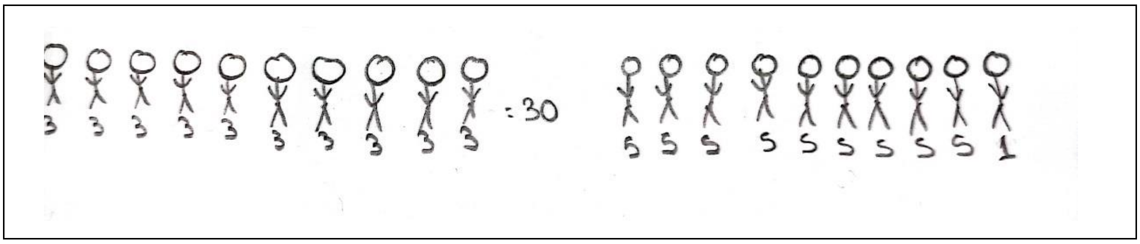


Fig. 5.5. Representación gráfica de los dulces y su repartición
Fuente: Elaboración propia

Otro tipo de soluciones establece una tabulación de las posibles respuestas e ir comparando cada una de las situaciones, en este caso particular el alumno considera valores desde 19 dulces hasta 46, el hecho de elegir un número múltiplo de 10 hace referencia a la condición inicial.

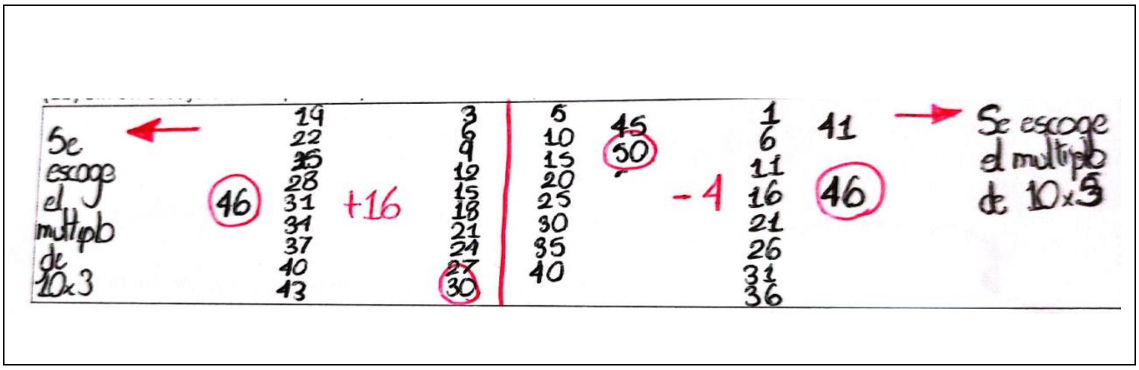


Fig. 5.6. Representación gráfica de los dulces y su repartición
Fuente: Elaboración propia

5.2.2. Respuestas Incorrectas

5.2.3. Respuestas para el problema de los dulces

A nivel bachiller las representaciones gráficas combinadas con una mala aritmética llevaron a muchos alumnos a una respuesta incorrecta ya que utilizan valores al tanteo que solo cumplen una de las condiciones iniciales.

Ejemplo de respuesta de un alumno

Yo pensé, si le quedan 16 dulces para repartirle 5 a cada estudiante y le faltarían 4,

5x3 =15 y faltarían cuatro dulces para darle 5 al último

(1b) Si un dibujo o un esquema ayudaría a aclarar tu plan de solución, hazlo en el espacio de abajo.

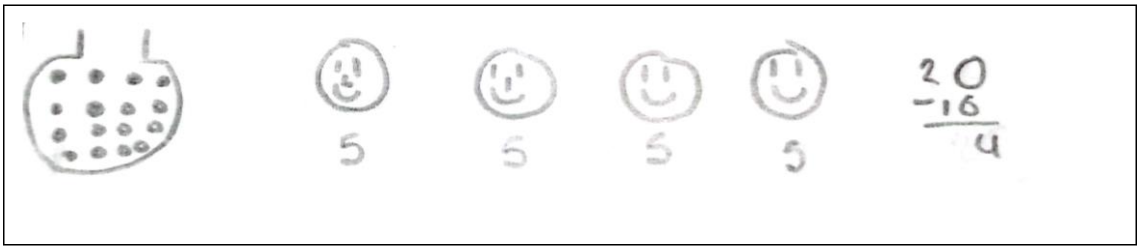


Fig. 5.7. Representación gráfica de los dulces y su repartición
Fuente: Elaboración propia

(1c) Realiza las operaciones planeadas para responder la pregunta sobre el número de estudiantes.

$$\frac{5\times3}{15} \qquad \frac{20-16}{4} \qquad \frac{16+12}{28}$$

(1d) El número de estudiantes que tiene la maestra es 4.

Otra situación recurrente en los errores de los alumnos viene desde operaciones básicas cómo lo son multiplicaciones o divisiones, lo cual implica un desvío enorme del resultado real.

Ejemplo de respuesta de un alumno

A cada estudiante le dan 3 dulces de esos dulces les sobran 16 para dar de a 5 dulces a cada estudiante de ahí le faltan cuatro dulces se hace una división 5 entre 16 del resultado hay que contar 4 dulces, es el resultado de los estudiantes.

(1b) Si un dibujo o un esquema ayudaría a aclarar tu plan de solución, hazlo en el espacio de abajo.

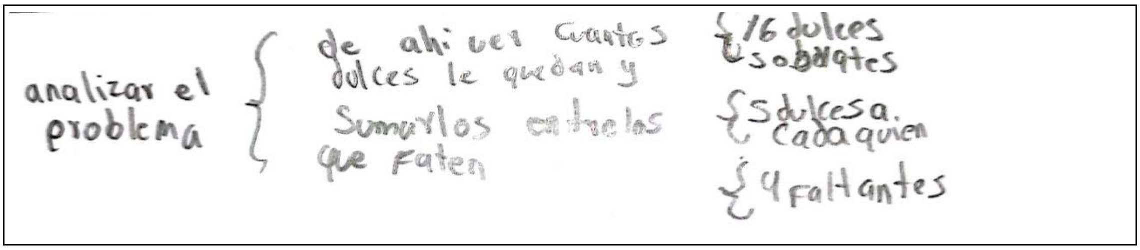


Fig. 5.8. Representación gráfica de los dulces y su repartición
Fuente: Elaboración propia

(1c) Realiza las operaciones planeadas para responder la pregunta sobre el número de estudiantes.

$$16/5 = 10$$

$$10 + 4 = 14$$

(1d) El número de estudiantes que tiene la maestra es 14 alumnos.

5.2.3 Respuestas correctas para el problema de Tammy

Los ocho participantes que tuvieron la respuesta de Tammy correcta utilizaron *el método aritmético*, tomando en cuenta la diferencia de tiempos para recorrer la misma distancia.

Ejemplo de **respuesta de un alumno**

$60 \times 14 = 840$

$50 \times 14 = 700$

$60 \times 12 = 720$

$50 \times 12 = 600$

$60 \times 16 = 960$

$50 \times 16 = 800$

$50 \times 1 = 2\ Tarde$

$60 \times 1 = 1\ Temprano\ 60 \times 15 = 900$

$50 \times 15 = 750$

$60 \times 10 = 600\ en\ 10\ min$

$50 \times 10 = 500\ en\ 10\ min$

$600 - 500 = 100 = 2\ min$

Distancia 900 m

Consideran que la distancia de la escuela debe ser divisible entre 50 y 60 para que los tiempos de llegada sean números enteros. Además, la diferencia de tiempos de llegada debe ser 3 minutos (2 minutos que faltan más 1 minuto que sobra).

Fig. 5.9. Representación gráfica del recorrido de Tammy
Fuente: Elaboración propia

Las posibles distancias son: 300 m, 600 m, 900 m, 1,200 m…

Para la distancia de 300 m, los tiempos de llegada son 6 minutos y 5 minutos.

Teniendo que la diferencia es 1 minuto.

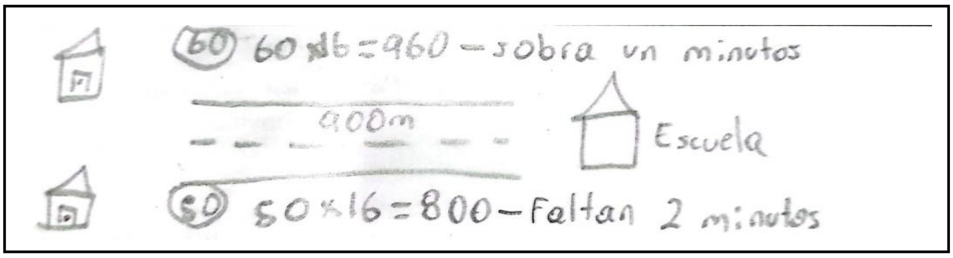


Fig. 5.10.
Representación gráfica del recorrido de Tammy
Fuente: Elaboración propia

Para la distancia de 600 m, los tiempos de llegada son 12 minutos y 10 minutos. La diferencia es 2 minutos. Por eso, tal distancia no cumple las condiciones del problema.

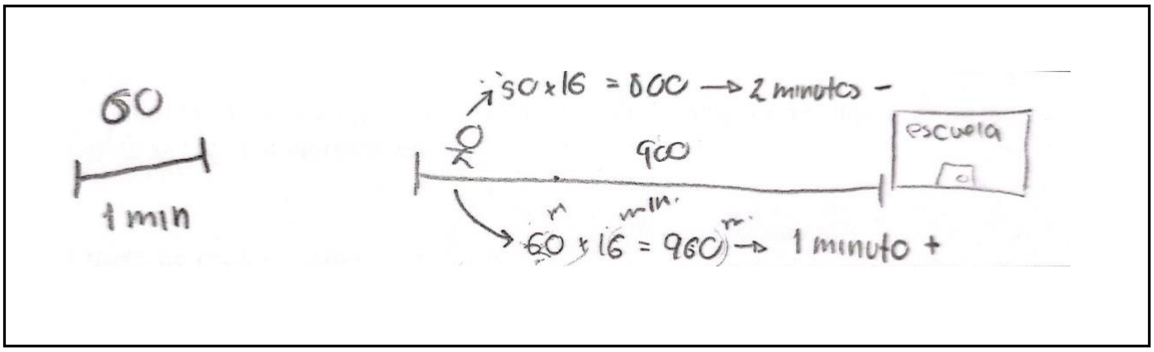


Fig. 5.11. Representación gráfica del recorrido de Tammy
Fuente: Elaboración propia

Para la distancia de 900 m, los tiempos de llegada son 18 minutos y 15 minutos. La diferencia es 3 minutos. Entonces, la distancia de 900 metros cumple las condiciones del problema.

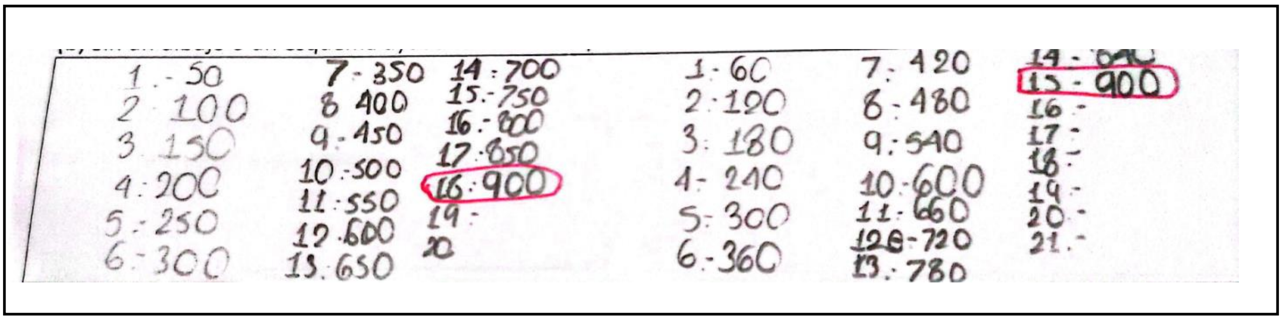


Fig. 5.12 Representación gráfica del recorrido de Tammy
Fuente: Elaboración propia

5.2.4. Respuestas incorrectas para el problema de Tammy

Algunas respuestas aritméticas no llegaron a consolidarse debido a malos cálculos o mal manejo de los datos, por ejemplo, el siguiente participante trata de encontrar una proporcionalidad entre la distancia y el tiempo, estableciendo recorrido de 11 minutos total desde su casa a la escuela.

Ejemplo de la respuesta de un alumno

Por cada 50 m se hace un minuto, pero llega dos minutos tarde son 100 m si caminas 60 m por minuto llega a la escuela un minuto temprano si la escuela está a 11 minutos está recorriendo 100 m y un minuto menos antes de la hora.

Dos minutos tarde son 100 m Si camina los 60,10 minutos cumple los 100 Menos 1 minuto llega antes

El alumno después considera el minuto de anticipación con el que llega así que a los 10 min que camina 60 m le resta 1 minuto, considerando ahora 9 minutos de viaje. Este nuevo dato lo usa sin hacer un desglose más profundo dando como resultado 540 metros.

(2c) Realiza las operaciones planeadas para responder la pregunta sobre la distancia hasta la escuela de Tammy.

$$\frac{50*2}{100} \quad \frac{60*10}{600} \quad \frac{50*10}{500} \quad \frac{60*9}{540}$$

100 m de diferencia, pero sería la hora exacta un minuto antes 10-1=9

(2d) La distancia hasta la escuela de Tammy es 540 metros.

Una razón de cambio entre las distancias parecía el método que encontró este participante sin embargo la claridad de sus operaciones y la falta de dominio en los conceptos de velocidad le arrojaron una respuesta equivocada.

Ejemplo de la respuesta de un alumno

50 m -> 1 min 2 min tarde

60 m -> 1 min 1 min temprano

D=____________x min

$$\frac{60}{50} = 1.02 \qquad 1.62 \times 120 = 2.$$

(2d) La distancia hasta la escuela de Tammy es 4 km.

(2c) Demuestra que la distancia encontrada hasta la escuela de Tammy es correcta.

$$d = \frac{v}{t} = 60/1\,\text{min} = \frac{60}{60} = 1$$

Poco más de la mitad de los alumnos de nivel bachillerato no intentaron el problema de Tammy. En su mayoría, comenzaron haciendo un dibujo, pero no procedían a hacer alguna operación.

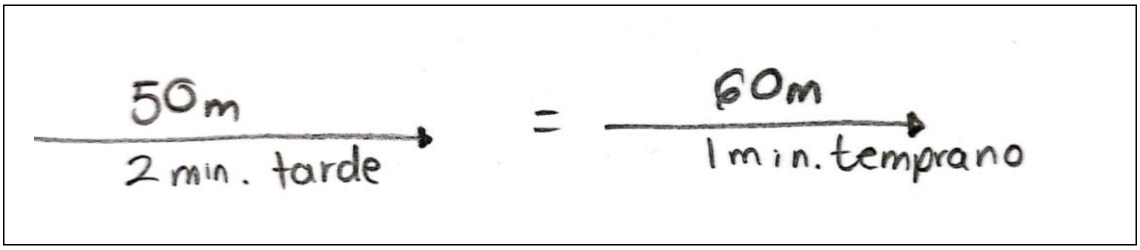


Fig. 5.13. Representación gráfica del recorrido de Tammy
Fuente: Elaboración propia

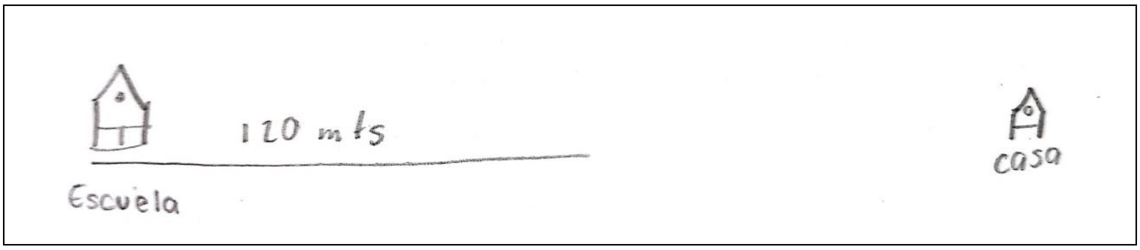


Fig. 5.14 Representación gráfica del recorrido de Tammy
Fuente: Elaboración propia

5.3 Universidad

En el nivel universitario se aplicó la prueba de manera individual y grupal a los estudiantes en el curso "Desarrollo de habilidades del pensamiento complejo" (DHPC) en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas. Para las 30 pruebas aplicadas, los resultados globales fueron los siguientes:

- 4 estudiantes (**13** %) respondieron correctamente a los dos problemas.
- 1 alumno (**3** %) respondió correctamente al problema de Tammy.
- 14 alumnos (**47** %) respondieron correctamente al problema de los dulces.

- 11 (**37 %**) alumnos no tuvieron ningún acierto.

Para hacer un análisis más detallado, se está considerando una prueba previa de medición a su razonamiento lógico y reflexión cognitiva.

5.3.1 Respuestas correctas

5.3.2 Respuestas correctas para el problema de los dulces (Individual)

En su mayoría los alumnos que contestaron correctamente al problema de los dulces ocuparon dos métodos, la manera algebraica y la manera aritmética por tanteo.

En este caso particular podemos observar cómo hay más claridad al momento de establecer las ecuaciones y hay menos pasos para su resolución.

Ejemplo de la respuesta de un alumno

$3x + 16 = y$ ecuación por estudiante y 16 dulces sobrantes.

$5x - 4 = y$ ecuación de 5 dulces por estudiante y cuatro dulces faltantes.

$$3x + 16 = 5x - 4$$

$$20 = 2x$$

$$10 = x$$

10 estudiantes

En las diferentes respuestas aritméticas que dan los participantes es recurrente el uso de gráficos cuando se utiliza este método.

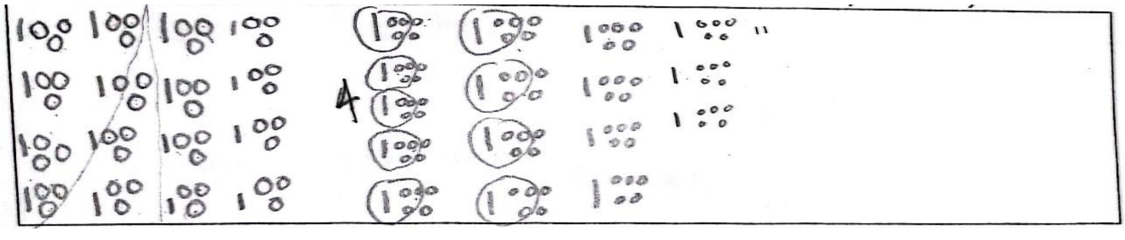


Fig. 5.15. Representación gráfica de la repartición de dulces

Fuente: Elaboración propia

Este alumno encontró la respuesta apoyándose de los dulces restantes por la cantidad repartida, considerando que el producto de un número multiplicado por tres para posteriormente restarle los dieciséis.

Ya una vez obtenido el resultado lo multiplicó por cinco y le sumó los 4 dulces que ya sobraban.

Ejemplo de la respuesta de un alumno

$$3 \times 8 = 24 \quad 6 \times 8 = 40 \quad 3 \times 9 = 27 + 16 = 43 \quad 5 \times 9 = 45$$

$$16 - 20$$

$$2 \times 10 = 20$$

$$3 \times 10 = 30$$

$$5 \times 10 = 50$$

46

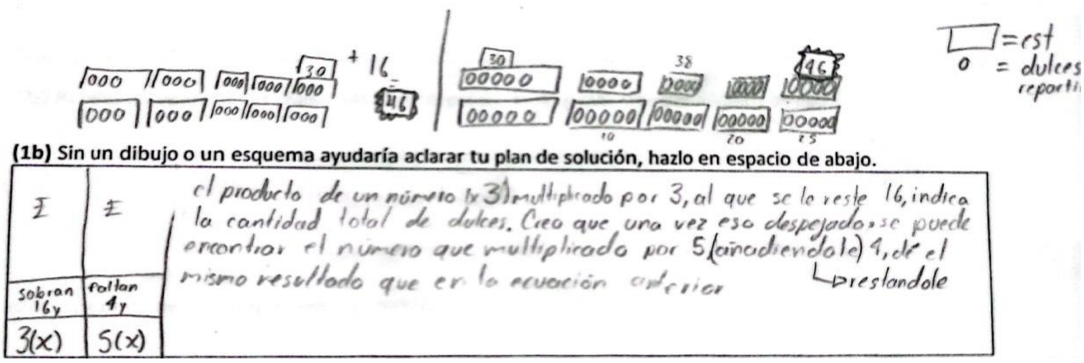


Fig. 5.15. Representación gráfica de la repartición de dulces
Fuente: Elaboración propia

5.3.3. Respuestas grupales para el problema de los dulces

El 70 % de los grupos resolvieron el problema de los dulces de manera algebraica, en ocasiones ayudándose de gráficos muy primitivos para comprobar sus respuestas o reforzar su razonamiento.

Ejemplo de la respuesta de un grupo

$x - 3y = 16 \qquad -3y = 16$

$x - 5y = -4 \qquad -x + 5y = 4$

$2y = 20 \qquad y = 10$

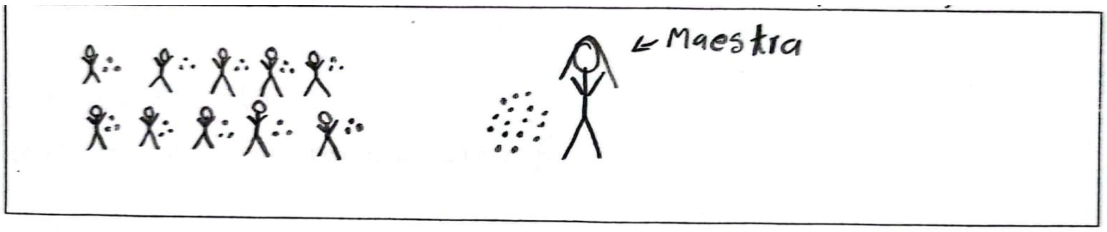


Fig.5.16 Representación gráfica de la repartición de dulces
Fuente: Elaboración propia

En otra solución grupal se puede observar la utilización de líneas representando cada dulce para dos situaciones posibles múltiplos de 3 y múltiplos de 5, seguido de la comprobación gráfica considerando los 16 dulces que sobran.

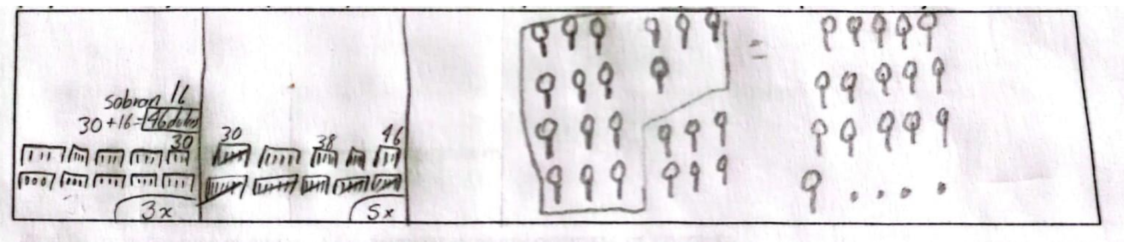


Fig. 5.17. Representación gráfica de la repartición de dulces
Fuente: Elaboración propia

5.3.1. Respuestas individuales incorrectas

En el siguiente caso podemos ver que el alumno intentó plantear un sistema de ecuaciones a partir de una razón de proporcionalidad. Aunque establece las ecuaciones, no son las indicadas para resolver el problema llevándolo a una respuesta incorrecta.

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_1}{3} = 16y$$

$$\frac{x_2}{y_2} = \frac{x_2}{5} = -4y_2$$

$$x_1 = 16y * 3$$

$$x_2 = -4y_2 * 5$$

El razonamiento que siguio esta alumna fue encontrar un número que al estar multiplicado por 5 y 3 los resultados den una diferencia de 4.

Sin embargo, al considerar los dulces que le sobran y al hacer la repartición ahora de 5 dulces, el resultado propuesto ya no satisface la respuesta.

Ejemplo de la respuesta de un alumno

$$3\ X\ 6 = 18 + 16 = 34$$

$$5\ X\ 6 = 30 + 4 = 34$$

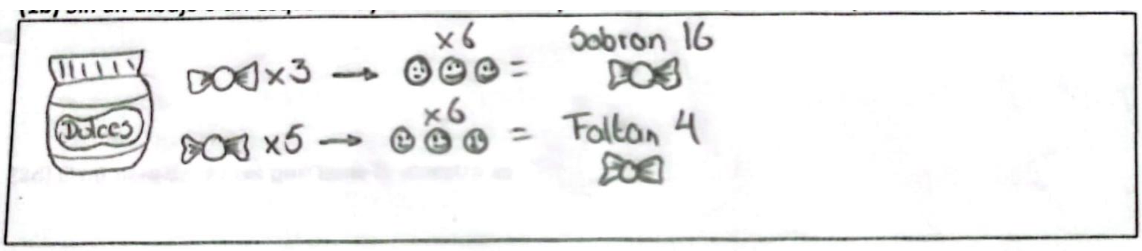


Fig. 5.17. Representación gráfica de la repartición de dulces
Fuente: Elaboración propia

5.3.2. Respuestas individuales correctas para el problema de Tammy

Un alumno se basa en los tiempos para poder establecer las ecuaciones y una vez que encuentra el tiempo lo ocupa para obtener la distancia, partiendo de la definición de velocidad $v = \frac{d}{t}$

$$\boldsymbol{d = \frac{50m}{1min}\,(t+2)}$$

$$\boldsymbol{d = \frac{60m}{1min}\,(t-1)}$$

$$\boldsymbol{\frac{50m}{1min}\,(t+2) = \frac{60m}{1min}\,(t-1) \rightarrow \frac{50\,min\,1\,min}{60min\,1\,min}\,(t+2) = t-1}$$

$$\boldsymbol{\frac{50m}{60}\,(t+2) = t-1 \qquad \frac{5}{6}(t+2) = t-1 \rightarrow 5t+10 = 6t-6 \rightarrow t = 16\,min}$$

$$\boldsymbol{d = \frac{50m}{1m}(16+2) \rightarrow d = 900m}$$

Otra manera de llegar a al resultado muy similar a la anterior, partiendo de la búsqueda del tiempo para sustituir en la ecuación de velocidad.

Ejemplo de la **respuesta del alumno**

$$\boldsymbol{50x + 100 = 60x - 60}$$

$$\boldsymbol{100 + 60 = 60x - 50x}$$

$$\boldsymbol{x = 16\,min}$$

$$\boldsymbol{\frac{1.50m}{min} \rightarrow 800\,metros}$$

$$\boldsymbol{\frac{2.6m}{min} \rightarrow 960\,metros}$$

800 metros más lo que le falta o sea 2 min, entonces es 900 metros

960 metros menos el minuto antes es 900 metros

El último método utilizado para el problema de Tammy es considerando la diferencia de tiempo que es 3 minutos entre 60 y 50.

$$\boldsymbol{18 * 50 = 900m}$$

$$18 * 60 = 1080m - (60X3) = 900\ m$$

5.3.2. Respuestas incorrectas para el problema de Tammy (Individual)

Dentro de las respuestas incorrectas poco convencionales hasta ahora encontramos el intento de un alumno por graficar el movimiento de Tammy en una grafica de distancia contra tiempo, de manera discreta.

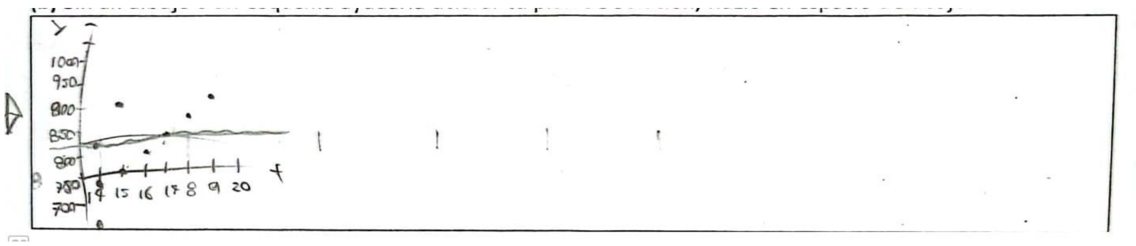


Fig. 5.18. Representación gráfica del recorrido de Tammy
Fuente: Elaboración propia

En su examen no se encontran más detalle, pero con su grafica propone un resultado de 845 metros, muy cercano al resultado correcto.

Otro de los pocos intentos por resolver el problema de Tammy es una expresión, presentada abajo. Sin embargo, su sentido algebraico dista mucho de entender el concepto del problema que es la velocidad y su descomposición algebraica.

$$y = 50\frac{y+1}{60} + 2$$

$$y = \frac{50y}{60} + \frac{50}{60} + 2$$

$$y - \frac{5}{6}y = \frac{5}{6} + 2$$

5.3.3. Respuestas grupales correctas para el problema de Tammy

El comportamiento de la prueba grupal fue reflejo de aquellos participantes que lograron contestar correctamente a la pregunta y convencieron a sus compañeros del resultado obtenido.

Dentro de las respuestas que brindaron los grupos únicamente dominaron dos formas:

Algebraica

$$\frac{\mathbf{50}\boldsymbol{m}}{\mathbf{60}}\ (\boldsymbol{t}+\mathbf{2})=\boldsymbol{t}-\mathbf{1} \qquad \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}(\boldsymbol{t}+\mathbf{2})=\boldsymbol{t}-\mathbf{1}\rightarrow \mathbf{5}\boldsymbol{t}+\mathbf{10}=\mathbf{6}\boldsymbol{t}-\mathbf{6}\rightarrow \boldsymbol{t}=\mathbf{16}\ \boldsymbol{min}$$

$$\boldsymbol{d}=\frac{\mathbf{50}\boldsymbol{m}}{\mathbf{1}\boldsymbol{m}}(\mathbf{16}+\mathbf{2})\rightarrow \boldsymbol{d}=\mathbf{900}\boldsymbol{m}$$

Aritmética

$$\boldsymbol{d}=\mathbf{50}(\mathbf{16}+\mathbf{2})=\mathbf{50}*\mathbf{18}=\mathbf{900}\boldsymbol{m}$$

$$\boldsymbol{d}=\mathbf{60}*(\mathbf{16}-\mathbf{1})=\mathbf{60}*\mathbf{15}=\mathbf{900}\ \boldsymbol{m}$$

Probablemente en el dialogo grupal los participantes encontraron más fundamentada la solución algebraica incluso en aquellos casos en dónde anteriormente se apostaba por otro método.

5.4. Soluciones expertas para los problemas usados en la investigación

Para poder evaluar el grado de creatividad de las diversas soluciones correctas de los alumnos, es útil presentar una variedad de las posibles soluciones expertas para los dos problemas de sobra y falta.

5.4.1. El problema de los dulces

"Una maestra tiene una bolsa con dulces. Si ella da a cada estudiante 3 dulces, le quedan 16 dulces. Para dar a cada estudiante 5 dulces, le faltarían 4 dulces más.

¿Cuántos estudiantes tiene la maestra?

¿Cuántos dulces tiene la maestra?"

Solución algebraica

Usando el símbolo "e" para a el número de estudiantes y "d" para el número de dulces, la información dada se puede expresar mediante dos ecuaciones construidas desde dos diferentes ideas iniciales.

La primera idea refleja fielmente el proceso y el resultado del reparto:

$$d-3e=16$$

$$d-5e=-4.$$

La segunda idea expresa el número de dulce como la suma de los dados a los estudiantes y los que quedaron y los que faltaron (con signo negativo):

$$d = 3e + 16$$

$$d = 5e + (-4) = 5e - 4.$$

Los dos sistemas de ecuaciones son equivalentes, pues el primero se transforma fácilmente en el segundo.

Igualando las expresiones para el número de dulces, se obtiene la ecuación para el número de estudiantes:

$$3e + 16 = 5e - 4.$$

De esta ecuación se obtiene e = 10 (2 e = 20). Entonces, la maestra tiene 10 estudiantes.

Insertando tal valor en la ecuación d = 3e + 16, el número de dulces es d = 46. La maestra tiene 46 dulces en la bolsa.

Verificación Para dar 5 dulces a cada uno de sus 10 estudiantes, la maestra necesitaría 50 dulces. Como solamente tiene 46 dulces, le faltarían 4 dulces. Ese resultado coincide con la segunda información en el anunciado en el problema.

Tres soluciones aritméticas

1. Con 16 dulces sobrantes, la maestra podría aumentar el número de dulces de 3 a 5 a ***8 estudiantes***. Para aumentar el número de dulces de 3 a 5 a todos estudiantes, le faltan 4 dulces. Eso implica que todavía hay **2 estudiantes** que se quedaron con 3 dulces.
   Entonces, la maestra tiene 10 estudiantes. De éstos, 8 estudiantes podrían tener 5 dulces (que suman 40 dulces) y 2 estudiantes quedarían con 3 dulces (que suman 6 dulces). En total, la maestra tiene 46 dulces.

2. Para dar a cada estudiante 2 dulces más, la maestra necesita 20 dulces (16 dulces que sobraron y 4 dulces que le faltan). Entonces, el número de estudiantes es 10.

El número de dulces disponible basta para que 8 estudiantes tengan 5 dulces (que suman 40) y que 2 estudiantes se quedan con 3 dulces (que suman 6 dulces). Por eso, la maestra dispone de 46 dulces.

3. Suponiendo que la maestra tiene 1 estudiante, el número de dulces implicado (por dos modos de reparto, a cada estudiante 3 o 5 dulces) sería:

   Si le da 3 dulces y le quedan 16 dulces, el número de dulces que tiene es 19 (3+16=19).

   Si para darle 5 dulces le faltarían 4 dulces, el número de dulces que tiene es 1 -> (1-5 =- 4). La diferencia de números de dulces implicados es

   19 – 1 = **18.**

   Suponiendo que la maestra tiene 2 estudiantes, el número de dulces implicado sería:

   Si les da 3 dulces y le quedan 16 dulces, el número de dulces que tiene es 22 -> (6 + 16 = 22).

   Si para darles 5 dulces le faltarían 4 dulces, el número de dulces que tiene es 6 -> (6 – 10 = - 4).

   La diferencia de números de dulces implicados es 22 – 6 = **16.**

   Suponiendo que la maestra tiene 3 estudiantes, el número de dulces implicado sería:

   Si les da 3 dulces y le quedan 16 dulces, el número de dulces que tiene es 25

   (9 + 16 = 25).
   Si para darles 5 dulces le faltarían 4 dulces, el número de dulces que tiene es 11 -> (11 – 15 = - 4).
   La diferencia de números de dulces implicados es 25 – 11 = **14.**
   Se nota el siguiente patrón de los cambios:

Al aumentar el número de estudiantes por 1, la diferencia de números de dulces implicados disminuye por 2.

Para que la diferencia de 14 se vuelve cero, el número supuesto de estudiantes debería aumentar por 7 y sería 10 (3 + 7 = 10).

Suponiendo que la maestra tiene 10 estudiantes, el número de dulces implicado sería:

Si les da 3 dulces y le quedan 16 dulces, el número de dulces que tiene es 46 -> (30 + 16) 46).

Si para darles 5 dulces le faltarían 4 dulces, el número de dulces que tiene es 46 -> (46 – 50 = - 4).

La diferencia de números de dulces implicados es 46 – 46 =0

Entonces, usando el razonamiento hipotético y reconociendo el patrón de los cambios, se llega que la maestra tiene 10 estudiantes y 46 dulces.

5.4.2. El problema de Tammy

"Cada mañana Tammy camina a la escuela. Si camina 50 metros por minuto, llega a la escuela dos minutos tarde. Si camina 60 metros por minuto, llega a la escuela un minuto temprano. ¿Qué tan lejos está la escuela de Tammy?"

Dos soluciones algebraicas

Se usarán los siguientes símbolos:

- d - la distancia a que se encuentra la escuela de Tammy;
- t – la duración de la caminata para llegar a tiempo;
- v_1 = 50 m/min – velocidad a que se llega tarde
- v_2 = 60 m/min – velocidad a que se llega temprano
- t_1 = 2 minutos – el tiempo faltante
- t_2 = 1 minuto – el tiempo sobrante

1. Igualando las expresiones para la distancia

La distancia hasta la escuela *d* se puede expresar de dos maneras:

$$d = v_1(t + t_1)$$

$$d = v_2(t - t_2).$$

Igualando estas dos expresiones, se obtiene:

$$v_2(t - t_2) = \ v_1(t + t_1).$$

El despeje para *t* da:

$$t = \frac{v_1 t_1 + \ v_2 t_2}{v_2 - v_1} = \frac{100\ m + 60\ m}{10\ \frac{m}{min}} = 16\ minutos.$$

De la primera ecuación para la distancia se obtiene:

$$d = 50\ \frac{m}{min}(16\,\mathrm{min} + 2\ \mathrm{min}) = 900\ \mathrm{metros}.$$

2. Igualando las expresiones para el tiempo exacto

El tiempo exacto *t* puede expresar de dos maneras:

$$t = \frac{d}{v_1} - t_1$$

$$t = \frac{d}{v_2} + t_2.$$

Igualando estas dos expresiones, se obtiene:

$$\frac{d}{v_1} - t_1 = \frac{d}{v_2} + t_2$$

o

$$\frac{d}{v_1} - \ \frac{d}{v_2} = t_1 + t_2$$

o

$$\frac{(v_{2-}v_1)d}{v_1 v_2} = t_1 + t_2.$$

El despeje para *d* da:

$$d = \frac{v_1 v_2 (t_1 + t_2)}{v_{2-} v_1} = \frac{3000\ \frac{m^2}{min^2} \cdot 3\ min}{10\ \frac{m}{min}} = 900\ metros.$$

Es importante notar que, en este caso, ***no se debe conocer el tiempo exacto***.

Los curiosos lo pueden obtener de la primera ecuación para el tiempo exacto:

$$t = \frac{900\ m}{50 \frac{m}{min}} - 2\ \mathrm{min} = 16\ minutos.$$

5.4.3 Dos soluciones aritméticas
1. Posiciones en el tiempo exacto

En el tiempo exacto, a Tammy le faltarían 100 metros para llegar a escuela (a velocidad de 50 m/min) o Tammy podría recorrer 60 metros adicionales (a velocidad de 60 m/min). La distancia entre tales dos posiciones es 160 metros y se debe a la diferencia de las velocidades de 10 m/min. Entonces, el tiempo exacto es 16 minutos.

Para llegar a escuela a velocidad de 60 m/min, Tammy necesita un minuto menos, es decir, 15 minutos. Entonces, la distancia de la escuela es 900 metros.

Verificación Para llegar a escuela a velocidad de 50 m/min, Tammy necesita dos minutos más, es decir, 18 minutos. Entonces, la distancia de la escuela es 900 metros.

2. La diferencia de tiempos para recorrer la misma distancia

La distancia de la escuela debe ser divisible entre 50 y 60 para que los tiempos de llegada sean números enteros. Además, la diferencia de tiempos de llegada debe ser 3 minutos (2 minutos que faltan más 1 minuto que sobra).

Las posibles distancias son: 300 m, 600 m, 900 m, 1,200 m.

Para la distancia de 300 m, los tiempos de llegada son 6 minutos y 5 minutos. La diferencia es 1 minuto. Por eso, tal distancia no cumple las condiciones del problema.

Para la distancia de 600 m, los tiempos de llegada son 12 minutos y 10 minutos. La diferencia es 2 minutos. Por eso, tal distancia no cumple las condiciones del problema.

Para la distancia de 900 m, los tiempos de llegada son 18 minutos y 15 minutos. La diferencia es 3 minutos. Entonces, ***la distancia de 900 metros cumple las condiciones del problema***.

5.5 Relación entre el razonamiento lógico y reflexión cognitiva con los resultados de los problemas de los dulces y de Tammy

En la Tabla 3 se presentan los puntajes individuales en las pruebas del razonamiento lógico (PRL) y de la de reflexión cognitiva (PRC) y un puntaje global (en la cuarta columna) que es la suma de ambos puntajes.

<table>
<tr><th>PUNTAJES INDIVIDUALES EN LA PRUEBA DEL RAZONAMIENTO LÓGICO (PRL)</th><th>PUNTAJES INDIVIDUALES EN LA PRUEBA DE LA REFLEXIÓN COGNITIVA (PRC)</th><th>PUNTAJE GLOBAL (NIVEL COGNITIVO)</th><th>RANGO DEL PUNTAJE TOTAL</th><th>PROMEDIO POR RANGO DEL PUNTAJE TOTAL</th></tr>
<tr><td>10</td><td>4</td><td>14</td><td rowspan="4">14 - 16</td><td rowspan="4">14</td></tr>
<tr><td>9</td><td>5</td><td>14</td></tr>
<tr><td>10</td><td>4</td><td>14</td></tr>
<tr><td>9</td><td>5</td><td>14</td></tr>
<tr><td>9</td><td>4</td><td>13</td><td rowspan="8">10 - 13</td><td rowspan="8">11.5</td></tr>
<tr><td>8</td><td>4</td><td>12</td></tr>
<tr><td>7</td><td>5</td><td>12</td></tr>
<tr><td>8</td><td>4</td><td>12</td></tr>
<tr><td>8</td><td>4</td><td>12</td></tr>
<tr><td>8</td><td>4</td><td>12</td></tr>
<tr><td>8</td><td>4</td><td>12</td></tr>
<tr><td>8</td><td>4</td><td>12</td></tr>
</table>

7	**3**	**10**		
7	**3**	**10**		
6	**4**	**10**		
7	**2**	**9**	**7 - 9**	**8.1**
7	**2**	**9**		
8	**1**	**9**		
2	**7**	**9**		
6	**2**	**8**		
5	**2**	**7**		
6	**1**	**7**		
7	**0**	**7**		
6	**0**	**6**	**4 - 6**	**5.3**
5	**0**	**5**		
5	**0**	**5**		
2	**0**	**2**	**0-3**	**1.5**
0	**1**	**1**		

Tabla 3. Los niveles cognitivos de los estudiantes universitarios. Fuente: Creación propia

De la última columna podemos notar que:

Dos alumnos obtuvieron resultados con puntajes entre 0 y 3.

Tres alumnos obtuvieron resultados con puntajes entre 4 y 6.

Ocho alumnos obtuvieron resultados con puntajes entre 7 y 9.

Once alumnos obtuvieron resultados con puntajes entre 10 y 13.

Cuatro alumnos obtuvieron resultados con puntajes entre 14 y 16.

Puntaje entre 14 y 16

Cabe destacar que a pesar de ser el grupo con las calificaciones más altas el puntaje máximo alcanzado en promedio es de 14 puntos. De los cuatro alumnos que obtuvieron 14 puntos en promedio, la mitad **(50 %)** obtuvieron ambas respuestas correctas en la prueba de los dulces y Tammy.

Los métodos algebraicos para resolver ambos problemas fueron recurrentes, entre estos alumnos hay gran similitud en la forma de plantear la solución.

Alumno 1

(1a) Describe con palabras y sin operaciones matemáticas el razonamiento con que piensas encontrar el número de los estudiantes.

La maestra tiene 46 dulces y 10 estudiantes

$$\boldsymbol{y - 3x = 16}$$
$$\boldsymbol{y - 5x = -4}$$

$$\boldsymbol{y = 16 + 3x}$$
$$\boldsymbol{(16 + 3x) - 5x = -4}$$

$$\boldsymbol{16 - 2x = -4}$$
$$\boldsymbol{-2x = -\,20}$$

$$\boldsymbol{x = 10}$$
$$\boldsymbol{y = 10 + 30}$$

$$\boldsymbol{y = 46}$$
$$\boldsymbol{y - 50 = -4}$$

$$\boldsymbol{y = 46}$$

Alumno 2

(1a) Describe con palabras y sin operaciones matemáticas el razonamiento con que piensas encontrar el número de los estudiantes.

Haré una ecuación que vincule el número de estudiantes con el número de dulces que tiene la maestra y así podría resolverla y conocer tanto el número de estudiantes como el número de dulces si “x” es el número de estudiantes y “y” el número de dulces entonces tenemos que

$$\boldsymbol{3x + 16 = y\,,5x = y + 4}$$

Otra observación importante es que los estudiantes no utilizaron recursos gráficos elaborados para comprobar sus resultados y en algunos casos en la zona destinada para dibujos simplemente escribían sus ecuaciones.

Alumno 1

(1f) Si un dibujo o un esquema ayudaría aclarar tu plan de solución, hazlo en espacio de abajo.

$$\mathbf{30 * 10 = 30,\quad 5 * 10 = 50}$$
$$\boldsymbol{x - 30 = 16}$$
$$\boldsymbol{x - 50 = -4}$$
$$\boldsymbol{x = 46}$$

(1g) Realiza las operaciones planeadas para responder la pregunta sobre el número de dulces.

$$\mathbf{30 * 10 = 30,\quad 5 * 10 = 50}$$

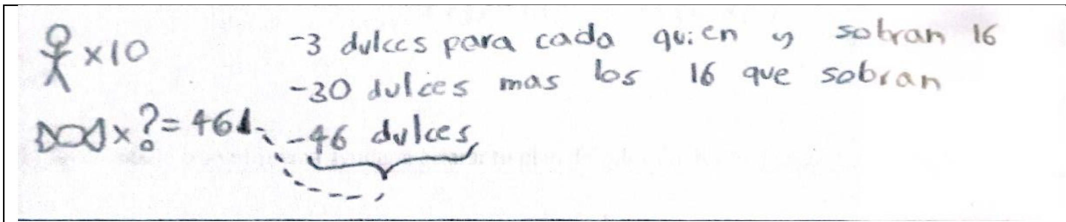
$$\boldsymbol{x - 30 = 16}$$

$$\boldsymbol{x - 50 = -4}$$

$$\boldsymbol{x = 46}$$

Alumno 2

1f) Si un dibujo o un esquema ayudaría aclarar tu plan de solución, hazlo en espacio de abajo.



(1g) Realiza las operaciones planeadas para responder la pregunta sobre el número de dulces.

$$\boldsymbol{y = 16 + 3x}$$
$$\boldsymbol{y = 10 + 30}$$

$$y = 46$$

Podemos ver cómo el uso de métodos algebraicos en la resolución de problemas matemáticos implica la utilización de diferentes símbolos, variables y ecuaciones para representar y manipular relaciones y cantidades, en este caso entre los dulces y el número de alumnos.

El álgebra proporciona un lenguaje preciso y poderoso para describir y resolver el problema de los dulces, los métodos algebraicos usados se basan en reglas lógicas y estructuras matemáticas bien definidas.

Para el problema de Tammy, tenemos formas de plantear la solución muy similar al problema de los dulces, cómo lo vemos a continuación.

Alumno 1

(2b) Si un dibujo o un esquema ayudaría aclarar tu plan de solución, hazlo en el espacio de abajo.

(2c) Realiza las operaciones planeadas para responder la pregunta sobre la distancia hasta la escuela de Tammy.

$$50t + 100 = m$$

$$60t - 60 = m$$

$$50t + 100 = 60t - 60$$

$$50t - 60t = -60 - 100$$

$$-10t = -160$$

$$t = 16\ seg$$

$$50(16) + 100 = m$$

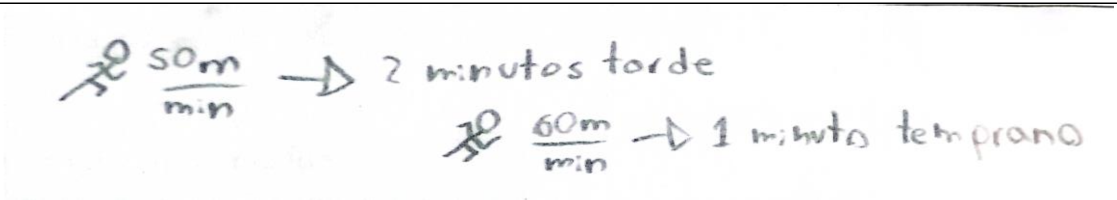
$$\mathbf{800 + 100 = 900}$$

(2d) La distancia hasta la escuela de Tammy es

900 m

Alumno 2

(2b) Si un dibujo o un esquema ayudaría aclarar tu plan de solución, hazlo en el espacio de abajo.



(2c) Realiza las operaciones planeadas para responder la pregunta sobre la distancia hasta la escuela de Tammy.

$$\mathbf{850 - 840}$$

$$\mathbf{60 * 15 = 900}$$

$$\mathbf{50 * 18 = 900}$$

$$\mathbf{900 - 60 = 840}$$

$$\mathbf{900 - 50 = 850}$$

Una llega 1 minuto temprano y otra 2 minutos tarde

(2d) La distancia hasta la escuela de Tammy es

900 m

A pesar de que las expresiones pudieran parecer algo diferentes, el razonamiento lógico es muy similar. De esta manera los estudiantes pueden abordar problema de Tammy de manera sistemática y estructurada.

En la evaluación de los dos problemas el **50 %** de los alumnos coincidió en que la dificultad de ambos problemas era igual. Estos mismos alumnos fueron aquellos que obtuvieron las dos respuestas correctas, Por otra parte, los alumnos que tuvieron únicamente el problema de los dulces bien coinciden en que el problema de Tammy es más difícil.

El puntaje entre 10 y 13

El siguiente grupo comprendido con los puntajes de 10 a 13 y con un puntaje promedio de 11.5 en su prueba de razonamiento lógico y reflexión cognitiva es el grupo más numeroso con 11 miembros, de los cuales únicamente dos alumnos **(18 %)** pudieron resolver los dos problemas de la prueba de los dulces y de Tammy.

Aunque en este grupo, también, se encontraron planteamientos algebraicos, varios alumnos propusieron respuestas aritméticas apoyadas con ecuaciones al momento de su demostración como lo vemos a continuación.

Alumno 1

(1a) Describe con palabras y sin operaciones matemáticas el razonamiento con que piensas encontrar el número de los estudiantes.

Tomé como base el número inicial de los estudiantes con 3 dulces más los 16 restantes después tomé la discrepancia de los cuatro dulces faltantes para llegar al resultado.

(1b) Si un dibujo o un esquema ayudaría a aclarar tu plan de solución, hazlo en el espacio de abajo.

(1c) Realiza las operaciones planeadas para responder la pregunta sobre el número de estudiantes.

$$(\mathbf{10 * 3}) + \mathbf{16} = \mathbf{46}$$

$$(10 * 5) - 4 = 46$$

(1d) El número de estudiantes que tiene la maestra es

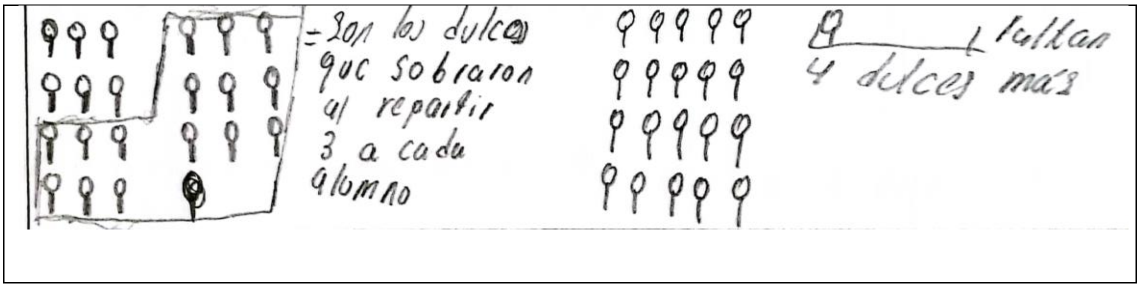
10 alumnos

Alumno 2

(1a) Describe con palabras y sin operaciones matemáticas el razonamiento con que piensas encontrar el número de los estudiantes.

3 dulces y le sobraron 16 dulces 16 entre 3 igual a 5 y sobra un dulce si le quedaban 16 dulces al repartir 3 a cada alumno como mínimo tiene 5 alumnos y si le faltaban cuatro dulces para dar 5 a cada 1 entonces hay que encontrar un múltiplo del 3 que haga realidad los datos que muestra.

(1b) Si un dibujo o un esquema ayudaría a aclarar tu plan de solución, hazlo en el espacio de abajo.



(1c) Realiza las operaciones planeadas para responder la pregunta sobre el número de estudiantes.

$$(10 * 3) + 16 = 46$$

$$(10 * 5) - 4 = 46$$

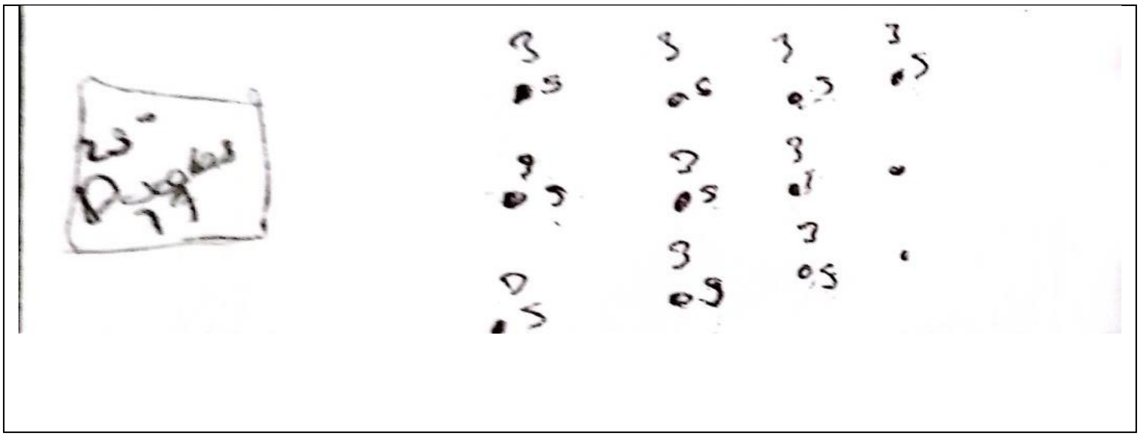
(1d) El número de estudiantes que tiene la maestra es

10 alumnos

No todos los planteamientos aritméticos propuestos en este grupo parten de una estructura sólida y sistemática. También, pudimos encontrar intentos basados en la prueba y error de esta manera los alumnos plantean operaciones en las que van considerando diferentes valores posibles hasta encontrar aquellos que satisfagan las condiciones iniciales, por ejemplo:

Alumno 3

(1b) Si un dibujo o un esquema ayudaría a aclarar tu plan de solución, hazlo en el espacio de abajo.



(1c) Realiza las operaciones planeadas para responder la pregunta sobre el número de estudiantes.

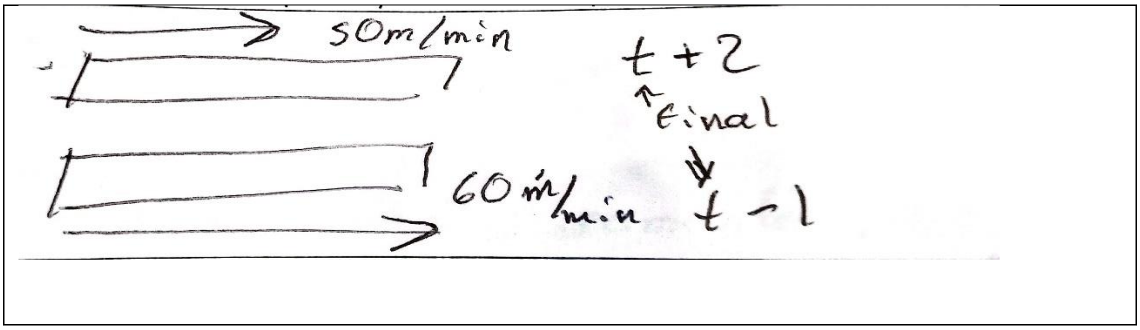
$$10 * 5 = 50\,, 3 * 10 + 16 = 46\,, 50 - 46 = 4$$

A medida que el alumno realiza diferentes intentos, es probable que comience a notar patrones y regularidades en los resultados obtenidos. Esta habilidad de reconocimiento de patrones es importante en el razonamiento lógico y cognitivo ya que puede indicar que el estudiante está buscando conexiones y estableciendo relaciones entre los datos y las soluciones.

En este grupo encontramos únicamente dos alumnos (**18** %) que tuvieron la solución correcta para el problema de Tammy, utilizando dos métodos diferentes (un método algebraico y un método aritmético). En estos dos resultados podemos comparar de manera detallada la manera de plantear y entender la situación dada en el contexto del problema. Ambos alumnos de manera individual obtuvieron un puntaje de 12 puntos en su prueba de razonamiento lógico y reflexión cognitiva.

Alumno 1

(2b) Si un dibujo o un esquema ayudaría aclarar tu plan de solución, hazlo en el espacio de abajo.



(2c) Realiza las operaciones planeadas para responder la pregunta sobre la distancia hasta la escuela de Tammy.

$$\boldsymbol{d = 50\frac{min}{m} \rightarrow t + 2}$$

$$\boldsymbol{d = 60m/1min(t - 1)}$$

$$\boldsymbol{50\frac{min}{m} \rightarrow t + 2 = 60m/1min(t - 1)}$$

$$\boldsymbol{t - 1 \rightarrow 5t + 10 = 6t - 6 = 16\ min}$$

$$\boldsymbol{d = \frac{50m}{1m}\ (16 + 2) \rightarrow d = 900}$$

(2d) La distancia hasta la escuela de Tammy es

900 m

Alumno 2

(2a) Describe con palabras y operaciones matemáticas el razonamiento con el que piensas encontrar qué tan lejos está la escuela de Tammy.

La diferencia en tiempo es de 3 minutos entre 60 y 50.

$$\boldsymbol{18 * 50 = 900m}$$

$$\boldsymbol{18 * 60 = 1080m - (60 * 3) = 900m}$$

(2b) Si un dibujo o un esquema ayudaría aclarar tu plan de solución, hazlo en el espacio de abajo.

(2c) Realiza las operaciones planeadas para responder la pregunta sobre la distancia hasta la escuela de Tammy.

$$\mathbf{18 * 50 = 900}\boldsymbol{m}$$

$$\mathbf{18 * 60 = 1080}\boldsymbol{m} - \mathbf{(60 * 3) = 900}\boldsymbol{m}$$

(2d) La distancia hasta la escuela de Tammy es

900 m

El factor tiempo fue clave en ambas respuestas (algebraica y aritmética) ya que a partir de ahí se plantea la solución y posteriormente encuentran la distancia que recorre Tammy.

No se puede afirmar que una respuesta aritmética sea mejor que una respuesta algebraica, ni viceversa, ya que depende del contexto y del tipo de problema que se esté abordando.

La elección entre una respuesta aritmética y una respuesta algebraica dependerá del tipo de problema y del nivel de detalle y generalización requeridos.

Cómo podemos ver en las respuestas anteriores, una respuesta aritmética puede ser suficiente y más rápida de obtener, especialmente en problemas simples y directos. Sin embargo, en situaciones más complejas o cuando se busca una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos involucrados, una respuesta algebraica puede ser más apropiada.

No se puede establecer una jerarquía de superioridad entre una respuesta aritmética y una respuesta algebraica. Ambas son herramientas matemáticas importantes que se utilizan en diferentes contextos y situaciones, y su elección depende del tipo de problema y de los objetivos que se persigan en cada caso.

En la evaluación de dificultad de los dos problemas la mayoría de los alumnos coincide en que el problema de Tammy representa una dificultad mayor a pesar de que hayan tenido los dos problemas resueltos.

Sólo dos alumnos opinan diferente 1 concluye que la dificultad de los dos problemas es igual y otro considera el problema de la maestra y los dulces más difícil.

El puntaje entre 7 y 9

El grupo comprendido entre los puntajes 7 y 9 en la prueba de Razonamiento lógico y reflexión cognitiva obtuvo un promedio general de 8.1 De un total de 8 alumnos, solamente uno **(13 %)** obtuvo las dos respuestas correctas al problema de dulces y de Tammy. Dos obtuvieron sólo la respuesta de los dulces y el cinco restantes **(62.5 %)** no obtuvo ninguna respuesta correcta.

Dentro de las 3 respuestas que dieron los alumnos cabe destacar una solución dónde el alumno utiliza métodos gráficos para encontrar la distancia a la que se encuentra la escuela de Tammy. Este recurso gráfico *a groso modo* establece un punto solución de dos sistemas de ecuaciones resuelto a través de gráficas.

Alumno 1

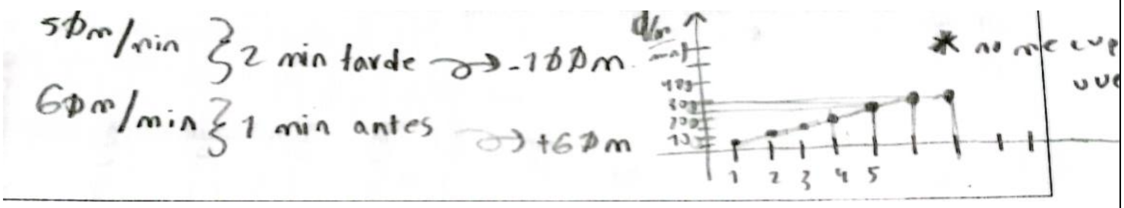
(2a) Describe con palabras y operaciones matemáticas el razonamiento con el que piensas encontrar qué tan lejos está la escuela de Tammy.

Ecuación en la que x es tiempo y 100 es por los 2 minutos tarde y 60 por el minuto temprano

$$*\, \boldsymbol{x - 2 = 60x + 1} \;\; (\boldsymbol{Esta\ no\ es})$$

$$\boldsymbol{50x + 100 = 60x + 60}$$

(2b) Si un dibujo o un esquema ayudaría aclarar tu plan de solución, hazlo en el espacio de abajo.



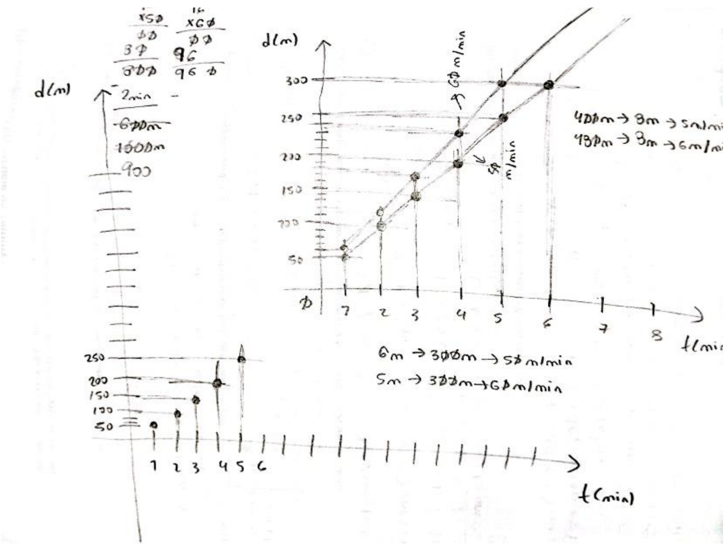


Ilustración 1 Respuesta gráfica Al problema de Tammy.

(2c) Realiza las operaciones planeadas para responder la pregunta sobre la distancia hasta la escuela de Tammy.

$$\mathbf{50x + 100 = 60x - 60}$$

$$\mathbf{100 + 60 = 60x - 50x}$$

$$\mathbf{160 = 10x}$$

$$\mathbf{x = 16\ minutos}$$

$$\mathbf{1.\ 50m/\min\ ,16\min\ \rightarrow 800m}$$

$$2.60\ m/\ min\ 16\ \mathrm{min}\ \ \rightarrow 900m$$

1.- 800 m más lo que le falta o sea 2 minutos entonces es 900 m

2.- 960 m menos el minuto antes es 900 m

(2d) La distancia hasta la escuela de Tammy es

900 m

El uso de gráficas y ecuaciones indica que el alumno está adoptando un enfoque más sistemático y estructurado para la resolución del problema.

Está utilizando herramientas matemáticas específicas para analizar y abordar el problema de manera precisa y organizada.

En este grupo las opiniones sobre la dificultad de los dos problemas están divididas en partes iguales en donde la primera mitad dice que el problema de la maestra y los dulces es más difícil y la otra mitad establece que el problema de Tammy es más difícil.

El puntaje entre 4 y 6

En el penúltimo grupo comprendido con puntajes de 4 a 6 y con un promedio general de 5.3 en la prueba de razonamiento lógico y reflexión cognitiva únicamente encontramos a 3 alumnos. Ninguno tuvo la solución correcta de dos problemas. Dos alumnos (**67 %**) obtuvieron la respuesta correcta para el problema de los dulces, uno de manera aritmética y otro de manera algebraica.

Alumno 1

(1a) Describe con palabras y sin operaciones matemáticas el razonamiento con que piensas encontrar el número de los estudiantes.

Si para darle 5 dulces a cada estudiante le faltan cuatro dulces entonces nos damos cuenta qué necesita 20 dulces ya que anteriormente le había sobrado 16 y al principio ya había entregado 3 dulces a cada uno.

(1b) Si un dibujo o un esquema ayudaría a aclarar tu plan de solución, hazlo en el espacio de abajo.

A cada alumno le faltarían dos dulces para que cada 1 tuviera 5

(1c) Realiza las operaciones planeadas para responder la pregunta sobre el número de estudiantes.

$$\mathbf{16 + 4 = 20\,,\quad \frac{20}{2} = 10\ \boldsymbol{alumnos}}$$

(1d) El número de estudiantes que tiene la maestra es

10 alumnos

Alumno 2

(1a) Describe con palabras y sin operaciones matemáticas el razonamiento con que piensas encontrar el número de los estudiantes.

Para esto debemos establecer un sistema de ecuaciones donde vamos a definir de la siguiente manera

$$\boldsymbol{y - 3x = 16}$$
$$\boldsymbol{y - 5x = -4}$$

Si el número total de dulces y hoy le Quito la cantidad que le daría a todos los estudiantes 5 x me faltarían cuatro dulces por eso se representa con – 4

(1b) Si un dibujo o un esquema ayudaría a aclarar tu plan de solución, hazlo en el espacio de abajo.

(1c) Realiza las operaciones planeadas para responder la pregunta sobre el número de estudiantes.

$$-3x = 16$$
$$y - 5x = -4$$

$$y = 16 + 3x$$
$$(16 + 3x) - 5x = -4$$

$$16 + 5x = -4$$
$$-2x = 20$$
$$-20 = 2x$$
$$-x = 10$$

(1d) El número de estudiantes que tiene la maestra es

10 alumnos

Analizando los resultados anteriores, podemos concluir que es posible tener un nivel de razonamiento lógico relativamente bajo y aun así resolver ciertos problemas matemáticos utilizando enfoques aritméticos y algebraicos, pero no problemas más abstractos como es el problema del Tammy.

El razonamiento lógico es una habilidad cognitiva que implica la capacidad de analizar, inferir y aplicar reglas y principios lógicos para llegar a conclusiones válidas.

Este grupo concluyó unánime que la dificultad del problema de Tammy es mucho mayor que el de los dulces.

El puntaje entre 0 y 3

En este grupo únicamente encontramos dos alumnos los cuales en promedio tienen un puntaje de 1.5 y ninguno de los dos pudo resolver los problemas.

Alumno 1

(1a) Describe con palabras y sin operaciones matemáticas el razonamiento con que piensas encontrar el número de los estudiantes.

3 dulces reparto inicial

16 dulces quedan

5 dulces se desean repartir

Cuatro dulces faltan

(1b) Si un dibujo o un esquema ayudaría a aclarar tu plan de solución, hazlo en el espacio de abajo.

Al tomar los datos que nos brinda el problema pueden podemos deducir que tiene 20 alumnos se multiplica la cantidad de dulces repartidos nos da 60 dulces agregamos los 16 dulces faltantes y dividimos el total entre la cantidad de alumnos de esta manera hacemos la demostración.

(1c) Realiza las operaciones planeadas para responder la pregunta sobre el número de estudiantes. $(\mathbf{20 * 3}) = \mathbf{60}$, $\mathbf{60 + 16 = 76 + 4 = 80}$

(1d) El número de estudiantes que tiene la maestra es **20 alumnos**

Estos alumnos con un bajo puntaje en su prueba de razonamiento lógico y reflexión cognitiva obviamente encontraron dificultades para resolver problemas matemáticos de sobra y falta.

Capítulo 6

CONCLUSIONES

Con base en los resultados presentados, es posible dar respuestas iniciales a las preguntas de investigación.

¿Qué estrategias usan los alumnos de diferentes niveles educativos para resolver dos problemas de sobra y falta?

> En niveles preuniversitarios, los alumnos exitosos usan la estrategia algebraica para el problema de dulces y estrategia aritmética para el problema de Tammy. Los alumnos menos exitosos, usan la estrategia de tanteo aritmético para el problema de dulces y no intentan resolver el problema de Tammy.
>
> En el nivel universitario, los alumnos exitosos usan la estrategia algebraica en ambos problemas.

¿Cómo influye la instrucción explícita de incluir una representación visual en la resolución de los problemas?

> Muy pocos alumnos acuden a las representaciones visuales. Cuando las usan, en niveles preuniversitarios, las representaciones visuales son pictóricas. En el nivel universitario, las representaciones visuales suelen ser, en el problema de Tammy, las gráficas posición – tiempo.

¿Cuál de los dos problemas de sobra y falta es más difícil para los alumnos?

> Basándose en los números de soluciones correctas y las explícitas evaluaciones de los alumnos, el problema de Tammy es mucho más difícil. Eso implica qué el contexto abstracto del problema (movimientos a diferentes velocidades) es para el gran número de alumnos un mayor reto conceptual que el contexto concreto y familiar (repartir dulces).

¿Qué relación hay entre los alumnos que presentan una alta calificación en su examen de medición en razonamiento lógico - cognitivo y el número de sus soluciones correctas de problemas de sobra y falta?

Sin lugar a dudas, este estudio demuestra que el puntaje en las pruebas de razonamiento lógico y reflexión cognitiva, aplicado en el nivel universitario, es un buen predictor del desempeño de los alumnos en la resolución de los problemas de sobra y falta.

Eso se notó con gran claridad en el problema de Tammy que requiere el manejo de pensamiento formal en un contexto poco experimentado por los alumnos.

En esta investigación se pudo observar que hay estudiantes que ingresan en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas que no son capaces de resolver ambos problemas. Lo preocupante es que hubo varios estudiantes que no presentaron ninguna solución correcta, un desempeño peor que el desempeño de algunos alumnos de secundaria y bachillerato. Tal hecho implica que el examen de admisión a la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla debería ser más riguroso.

Hay que destacar que este estudio *es el único en el nivel mundial* que explora las diferentes estrategias de resolver los problemas de sobra y falta empleadas por los alumnos de secundaria, bachillerato y universidad.

BIBLIOGRAFÍA

- Abrami, P. C., Bernard, R. M., Borokhovski, E., Waddington, D. I., Wade, C. A., & Persson, T. (2008). Strategies for teaching students to think critically: A meta-analysis. *Review of educational research, 78*(4), 1102-1131.
- Australian Mathematics Trust. (n.d.). AMC. Retrieved May 11, 2023, from https://www.amt.edu.au/mathematics/amc/.
- Bunge, M. (2019). *La investigación científica: Su estrategia y su filosofía*. Siglo Veintiuno Editores.
- Carr, R. (1751). *The young arithmetician and algebraist's companion*. M. Cooper and D. Wilson.
- Cattell, R. B. (1987). *Intelligence: Its structure, growth and action*. Elsevier.
- Chemla, K. (1997). Reflections on the world-wide history of the rule of false double position, or: How a loop was closed. *Centaurus, 39*, 97-120.
- Chew, T. (2008). *Singapore Math Challenge. Grade 3*+. Greensboro, NC: Thinking Kids.
- Davidson, J. E., & Sternberg, R. J. (1998). Smart problem solving: How metacognition helps. *Thinking & Reasoning, 4*(3), 271-294.
- Dunlosky, J., & Metcalfe, J. (2009). *Metacognition*. Sage Publications.
- Escudero, J. L. y Pérez, M. (2016). Técnicas de resolución de problemas. *Revista de Investigación Académica, 28*, 1-12.
- Emerson, W. (1763). *Cyclomathesis or An easy introduction to the several branches of the mathematics.* J. Nourse
- Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive-developmental inquiry. *American Psychologist, 34*(10), 906-911.
- Garofalo, J. (1989). Beliefs and their influence on mathematical performances. *Mathematics Teacher, 82*, 502-505.
- Goldin, Georgia (2013). *"Muéstrame lo que sabes": exploración de las representaciones de los estudiantes en las disciplinas STEM*. Prensa del Colegio de Maestros.

- Gómez, D. A., & De la Herrán Gascón, A. (2018). Desarrollo del pensamiento crítico en estudiantes de Educación Secundaria: diseño, aplicación y evaluación de un programa educativo. Profesorado, *Revista de Currículum y Formación del Profesorado, 22*(4), 269-285.
- Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842). Information Age Publishing.
- Jagodić, B., Mrkonjić, I. & Božičević, N. (2020). *Moja matematika 2. Udžbenik za učenike drugog razreda osnovne škole*. Drugo izdanje. Alka script.
- Johnson-Laird, P. N. (1983). Mental models: Towards a cognitive science of language, inference, and consciousness (No. 6). Harvard University Press.
- Kangshen, S., Crossley, J. N. & Lun, A. W. C. (1999). *The Nine Chapters on the Mathematical Art: Companion and Commentary.* Oxford University Press.
- Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for research in Mathematics Education, 37*(4), 297-312.
- Lerman, S. (2001). Cultural, discursive psychology: A sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics. *Educational studies in mathematics, 46*, 87-113.
- Lester, F. K. (Ed.). (2007). Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics. IAP.
- McAfee, O. D., & Leong, D. J. (1997). Assessing and guiding young children's development and learning. Allyn & Bacon, A Viacom Company, 160 Gould St., Needham Heights, MA 02194; Internet: www.abacon.com

- Monroy Sánchez, L. (2013). El cálculo mental como estrategia para potenciar las habilidades matemáticas en niños de primer grado de primaria. Recuperado el 5 de mayo de 2023, de https://dspace.um.edu.mx/handle/20.500.11972/793
- National Research Council. (2011). *Successful K-12 STEM education: Identifying effective approaches in science, technology, engineering, and mathematics*. National Academies Press.
- OCDE. (2020). PISA 2018 Results. Volume I: What Students Know and Can Do. Recuperado el 5 de mayo de 2023, de https://www.oecd-ilibrary.org/education/pisa-2018-results-volume-i_5f07c754-en
- OCDE. (n.d.). Evaluaciones PISA. OCDE. Retrieved May 11, 2023, from https://www.oecd.org/pisa/aboutpisa/
- OECD. (2019). PISA 2018 results: Volume III. What school life means for students' lives (Vol. III). OECD Publishing.
- Perkins, D. N., & Salomon, G. (1992). Transfer of learning. *International encyclopedia of education, 2*, 6452-6457.
- Piaget, J. (1950). *The psychology of intelligence*. Routledge & Kegan Paul.
- Ruiz, F. A. Z. (2017). Método de resolución de problemas y rendimiento académico en lógica matemática. *Opción: Revista de Ciencias Humanas y Sociales, 84*, 440-470.
- Schoenfeld, AH (1992). Sobre paradigmas y métodos: ¿Qué haces cuando los que conoces no hacen lo que tú quieres? Problemas en el análisis de datos en forma de cintas de video. *El Diario de las Ciencias del Aprendizaje , 2* (2), 179-214.
- Schraw, G., & Dennison, R. S. (1994). Assessing metacognitive awareness. *Contemporary Educational Psychology, 19*(4), 460-475.
- Schraw, G., & Moshman, D. (1995). Metacognitive theories. *Educational Psychology Review, 7*(4), 351-371.
- Siegler, R. S., & Lortie-Forgues, H. (2015). Conceptual knowledge of fraction arithmetic. *Journal of Educational Psychology, 107*(3), 909-918.

- TIMSS & PIRLS International Study Center. (n.d.). TIMSS. Boston College. Retrieved May 11, 2023, from https://timssandpirls.bc.edu
- Tropfke, J. (1980). *Geschichte de Elementarmathematik*. 4 Auflage. Walter de Gruyter.
- Vogel, K. (1954). *Die Practica des Algorismus Ratisbonensis. Ein Rechenbuch des Benediktinerklosters S. Emmeram aus der Mitte des 15. Jahrhunderts nach den Handshriften der Münchner Staatsbibliothek und der Stifsbibliothek St. Florian*. C. H. Beck.

ANEXO 1
Diferentes métodos de resolución de problemas de sobra y falta

1. *Método aritmético*

Matemático alemán Johanes Widmann presentó, en el año 1498, el problema de sobra y falta en el contexto de pagar a los trabajadores (sin mencionar la moneda):

> Si se paga a cada trabador 5, sobra 11. Si se pagaría a cada trabajador 9, faltaría 17. Se busca el número de trabajadores y el dinero disponible.

La solución fue la siguiente:

> Si a cada trabajador se paga 4 más, el monto pagado aumenta por 28 (11 + 17 = 28). Eso significa que el número de trabajadores es 7 (28/4 = 7). El dinero disponible es: (7 x 5) + 11 = (7 x 9) – 17 = 46.

2. *Método algebraico*

Matemático alemán Christoph Clavius presentó dos métodos de solución de problemas de sobra y falta. En el año 1583, el primer método presentado fue de "dos posiciones falsas "que tiene su origen el China cuando aparecieron estos problemas. Tal método algorítmico ("tanteo estructurado "), se va a ejemplificar más adelante.

Es importante mencionar que los alumnos de hoy en los problemas aritméticos acuden, muy a menudo, a la estrategia de tanteo, "jugando" con los números hasta encontrar la solución. Muy pocos tratan de encontrar el patrón de cambio que permite organizar, simplificar y reducir el número de pasos en el tanteo.

En su libro "Algebra ", publicado en el año 1608, Clavius presentó el siguiente problema:

> Un ciudadano encontró en frente de la puerta de su casa un número desconocido de personas pobres. A cada uno de ellos dio 7 monedas. Al hacer esto, en la mano le quedaron 24 monedas. Si hubiera querido dar a cada uno de ellos 9 monedas, le hubiera faltado 32 monedas adicionales. Se busca saber cuántos pobres hubo y cuántas monedas tenía el ciudadano en su mano.

Usando para el número de pobres el término "suma ", Clavius el número de monedas expresó como "7 sumas + 24". De la misma manera, tal número es, también, "9 sumas – 32".

Igualando estas dos expresiones, Clavius obtuvo: 7 sumas + 24 = 9 sumas – 32. Sumando a ambos lados 32, le quedó: 7 sumas + 56 = 9 sumas. Finalmente tenía: 56 = 2 sumas.

De este modo, el número de pobres es 28. El número de moneda es: (7 x 28) + 24 = (9 x 28) – 32 = 220.

En la simbología contemporánea, la relación inicial sería: 7 x + 24 = 9 x – 32.

En el siglo XVIII, el contexto de "dar dinero a los pobres (o a los méndigos)" y la solución algebraica fueron aceptados por la mayoría de los autores de los libros de texto matemáticas. En la Figura A1 se presenta un ejemplo:

No. 23.

One meeting a Company of Beggars, gives each four Pence, and had fixteen Pence left; but if he had given to each fix Pence, he would have wanted twelve Pence. I demand the Number of Beggars?

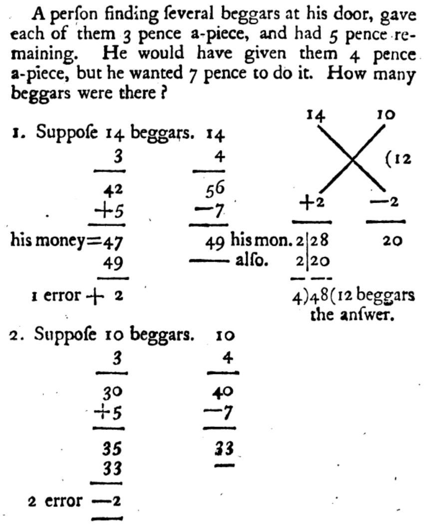
	1	$x =$ the Number of Beggars.
Then	2	$4x + 16 = 6x - 12$
$2 + 12$	3	$4x + 28 = 6x$
$3 - 4x$	4	$2x = 28$
$4 \div 2$	5	$x = 14$ the Number of Beggars.

Figura A1. La solución algebraica del problema de dar dinero a mendigos (Carr, 1751, p. 172).

3. *Método de "dos falsas posiciones "*

A pesar de la claridad conceptual y procedimental de los métodos aritmético y algebraico, en el siglo XVIII todavía hubo autores que presentaban en sus libros de texto el método de "dos falsas posiciones "que fue empleado, en diferentes formas, por los matemáticos chinos (Chemla, 1977). Aunque tal método algorítmico (de dos suposiciones que llevan a dos errores) genera las soluciones correctas, su lado conceptual es completamente obscuro. Los estudiantes solamente pueden memorizarlo sin saber por qué funciona.

Un ejemplo de tal método se presenta en la Figura A2:



A perſon finding ſeveral beggars at his door, gave each of them 3 pence a-piece, and had 5 pence remaining. He would have given them 4 pence a-piece, but he wanted 7 pence to do it. How many beggars were there?

1. Suppoſe 14 beggars. 14 × 3 = 42, +5, his money = 47; 14 × 4 = 56, −7, 49 his mon. alſo. 49 − 47: 1 error + 2

2. Suppoſe 10 beggars. 10 × 3 = 30, +5 = 35; 10 × 4 = 40, −7 = 33. 33 − 35: 2 error −2

14 × −2 = 28, 10 × +2 = 20 (12; 2|28, 2|20; 4)48(12 beggars the anſwer.

Figura A2. Un ejemplo de método de "dos posiciones falsas" (Emerson, 1763, Ejemplo 4, p. 145).

ANEXO 2
Las hojas de trabajo para los problemas de Dulces y Tammy

El reparto de dulces

1. Una maestra tiene una bolsa con dulces, si ella da a cada estudiante 3 dulces, le quedan 16 dulces, para dar a cada estudiante 5 dulces, le faltarían 4 dulces más.
¿Cuántos estudiantes tiene la maestra?
¿Cuántos dulces tiene la maestra?

(1a) Describe con palabras y sin operaciones matemáticas el razonamiento con que piensas encontrar el número de los estudiantes.

(1b) Si un dibujo o un esquema ayudaría a aclarar tu plan de solución, hazlo en el espacio de abajo.

(1c) Realiza las operaciones planeadas para responder la pregunta sobre el número de estudiantes.

(1d) El número de estudiantes que tiene la maestra es

(1e) Describe con palabras y sin operaciones matemáticas el razonamiento con que piensas encontrar el número de los dulces.

(1f) Si un dibujo o un esquema ayudaría aclarar tu plan de solución, hazlo en espacio de abajo.

(1g) Realiza las operaciones planeadas para responder la pregunta sobre el número de dulces.

(1h) El número de dulces que tiene la maestra es

(1i) Demuestra que el número de alumnos que encontraste es correcto.

(1j) Demuestra que el número de dulces que encontraste es correcto.

¿Qué tan lejos está la escuela de Tammy?

2. Cada mañana Tammy camina a la escuela. Si camina 50 metros por minuto, llega a la escuela dos minutos tarde. Si camina 60 metros por minuto, llega a la escuela un minuto temprano. ¿Qué tan lejos está la escuela de Tammy?

(2a) Describe con palabras y operaciones matemáticas el razonamiento con el que piensas encontrar qué tan lejos está la escuela de Tammy.

(2b) Si un dibujo o un esquema ayudaría aclarar tu plan de solución, hazlo en el espacio de abajo.

(2c) Realiza las operaciones planeadas para responder la pregunta sobre la distancia hasta la escuela de Tammy.

(2d) La distancia hasta la escuela de Tammy es

(2c) Demuestra que la distancia encontrada hasta la escuela de Tammy es correcta.

ANEXO 3

Prueba del Razonamiento Lógico (PRL)

Pregunta 1

Se necesita exprimir 4 naranjas para obtener seis vasos de jugo. ¿Qué cantidad de jugo se podría obtener con seis naranjas? (Considera que todas las naranjas son del mismo tamaño)

a. 7 vasos b. 8 vasos c. 9 vasos d. 10 vasos e. Otra respuesta

Razón

1. El número de vasos y el número de naranjas estarán siempre en la relación 3 a 2.
2. Con más naranjas, las diferencias serán menores.
3. La diferencia entre las cantidades será siempre de dos.
4. Con cuatro naranjas la diferencia era dos. Con seis naranjas la diferencia sería dos más.
5. No se podría predecir.

Pregunta 2

Usando las mismas naranjas de la pregunta 1. ¿Cuántas naranjas se necesitarían para hacer 15 vasos de jugo?

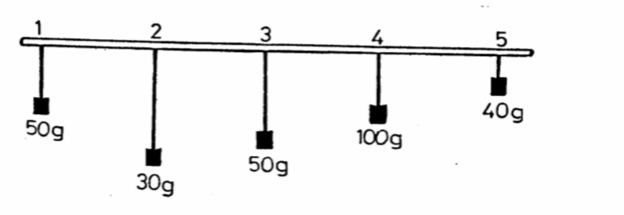
a. 7 naranjas y media b. 9 naranjas c. 10 naranjas d. 13 naranjas e. Otra respuesta

Razón

1. El número de naranjas y el número de vasos de jugo estarán siempre en la relación 2 a 3.
2. El número de naranjas será siempre menor que el número de vasos de jugo.
3. La diferencia entre las cantidades será siempre de dos.
4. El número de naranjas necesarias será la mitad del número de vasos de jugo
5. No se podría predecir

Pregunta 3

Supongamos que queremos hacer un experimento para averiguar si al modificar la longitud de un péndulo cambia también la cantidad de tiempo que tarda en oscilar de un lado a otro. ¿Qué péndulos deberíamos usar para realizar dicho experimento?



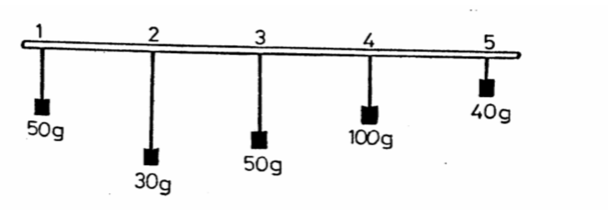
a. 1 y 4
b. 2 y 4
c. 1 y 3
d. 2 y 5
e. Todos

Razón

1. Compararíamos el péndulo más largo con el más corto.
2. Necesitaríamos comparar todos los péndulos entre sí.
3. Al aumentar la longitud tendríamos que disminuir el peso.
4. Los péndulos elegidos tendrían que tener todas las mismas longitudes y distinto peso.
5. Los péndulos elegidos tendrían que tener todos distinta longitud e igual peso.

Pregunta 4

Supongamos que queremos realizar un experimento para averiguar si al cambiar el peso del péndulo cambia también la cantidad de tiempo que tarda en oscilar de un lado a otro. ¿Qué péndulos tendríamos que usar para realizar dicha experiencia?



a. 1 y 4 b. 2 y 4 c. 1 y 3 d. 2 y 5 e. Todos

Razón

1. Compararíamos el péndulo más pesado con el más ligero.
2. Necesitaríamos comparar todos los péndulos entre sí.
3. Al aumentar el peso tendríamos que disminuir la longitud.

4. Los péndulos elegidos tendrían que tener diferente peso y la misma longitud.
5. Compararíamos péndulos de igual peso y distinta longitud.

Pregunta 5

Un jardinero compró un paquete que contenía 3 semillas de calabaza y 3 semillas de frijol. Si se extrae una semilla del paquete, ¿Cuál es la probabilidad de que ésta sea de frijol?

a. 1 de cada 2 b. 1 de cada 3 c. 1 de cada 4 d. 1 de cada 6 e. 4 de cada 6

Razón

1. Se necesitarían cuatro extracciones dado que las tres semillas de calabaza podrían suceder que se extrajesen seguidas.
2. Hay seis semillas entre las cuales ha de extraerse una de frijol.
3. De las tres semillas de frijol que hay se necesita extraer una.
4. La mitad de las semillas son de frijol.
5. Del total de seis semillas, además de la de frijol se podrían extraer tres de calabaza.

Pregunta 6

Un jardinero compró un paquete que contenía 21 semillas de diversas clases. La composición era la siguiente:

3 de flores pequeñas rojas	4 de flores pequeñas amarillas
5 de flores pequeñas naranjas	4 de flores grandes rojas
2 de flores grandes amarillas	3 de flores grandes naranjas

Si sólo ha de plantar una semilla, ¿cuál es la probabilidad de que la planta resultante tenga flores rojas?

a. 1 de cada 2 b. 1 de cada 3 c. 1 de cada 7 d. 1 de cada 21 e. Otra respuesta

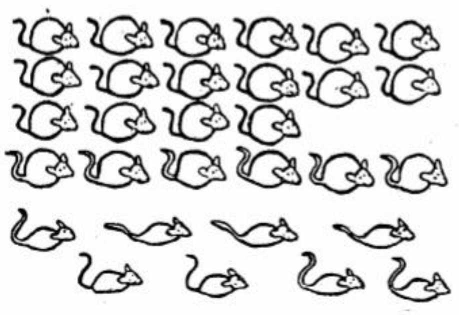
Razón

1. Ha de elegir una semilla entre aquellas que dan flores rojas, amarillas o naranjas.
2. 1/4 de las pequeñas y 4/9 de las grandes son rojas.
3. No importa que sean pequeñas o grandes. De las siete semillas rojas que hay se ha de elegir una.

4. Ha de seleccionar una semilla roja de un total de 21 semillas.
5. Siete de las 21 semillas darán flores rojas.

Pregunta 7

La siguiente figura representa una muestra de los ratones que viven en un campo. A partir de la figura, indica si es más probable que tengan cola negra los ratones gordos que los delgados.



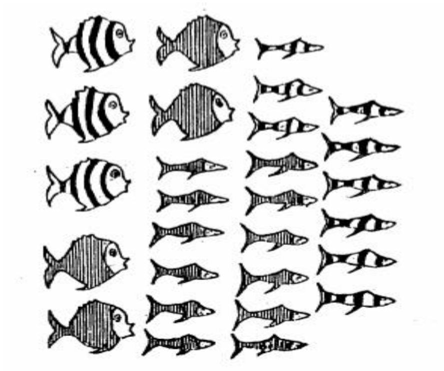
a. Sí. Los ratones gordos tienen mayor probabilidad de tener cola negra que los delgados.
b. No. Los ratones gordos no tienen más probabilidad de tener cola negra que los delgados.

Razón

1. 8/11 de los ratones gordos tienen cola negra y 3/4 de los ratones delgados tienen cola blanca.
2. Tanto alguno de los ratones gordos como alguno de los ratones delgados tienen cola blanca.
3. De los treinta ratones, 18 tienen cola negra y 12 cola blanca.
4. Ni todos los ratones gordos tienen cola negra, ni todos los delgados tienen cola blanca.
5. 6/12 de los ratones con cola blanca son gordos.

Pregunta 8

¿Es más probable que tengan rayas anchas los peces gordos que los peces delgados?



a. Sí
b. No

Razón

1. Unos peces gordos tienen rayas anchas y otros estrechas.
2. 3/7 de los peces gordos tienen rayas anchas.
3. 12/28 tienen rayas anchas y 16/28 las tienen estrechas.
4. 3/7 de los peces gordos y 9/21 de los peces delgados tienen rayas anchas.
5. Algunos de los peces con rayas anchas son delgados y otros son gordos.

Pregunta 9

Tres estudiantes de cada uno de los cursos de 1^0, 2^0rey 3^0 de preparatoria son candidatos al consejo escolar. La representación estará constituida por un estudiante de cada curso. Cada votante debe considerar todas las combinaciones posibles antes de decidir su voto.

Dos posibles combinaciones serían Tomas, José y Pedro (TJP); e Isabel, Carmen y María (ICM).

Has una lista con todas las combinaciones posibles usando los espacios que se ofrecen en la hoja de respuestas. Hay más espacios de los necesarios.

CONSEJO ESCOLAR

1^0 DE PREPA	2^0 DE PREPA	3^0 DE PREPA
Tomás (T)	José (J)	Pedro (P)
Isabel (I)	Carmen (C)	María (M)

Antonio (A) Beatriz (B) Luís (L)

Pregunta 10

Se prevé abrir en breve 4 tiendas en un nuevo centro comercial.

Optan por comprar los locales una peluquería (P), una farmacia (F), un supermercado (S) y una cafetería (C).

Cada uno de los negocios mencionados ha de ocupar uno de los locales previstos.

Una posible forma de ocupación sería PFSC.

Has una lista con todas las formas posibles de ocupación de los locales.

Hay más espacios den la hoja de respuestas de los que son necesarios.

1	2	3	4

ANEXO 4

Prueba de la Reflexión Cognitiva (PRC)

1. Una raqueta y una pelota cuestan 1.10 euros en total. La raqueta cuesta 1.00 euros más que la pelota. ¿Cuánto cuesta la pelota?
La pelota cuesta_ euros. ¿Cómo llegaste a tal respuesta?

2. Si cinco máquinas fabrican 5 piezas, ¿Cuánto tardan 100 máquinas en fabricar 100 piezas?
Las maquinas tardarán ___minutos. ¿Cómo llegaste a tal respuesta?

3. En un lago hay una zona cubierta de lirios. El área de lirios se hace el doble de grande cada día. Si el área de lirios tarda 48 días en cubrir el lago entero ¿Cuántos días tardarán los lirios en cubrir la mitad del lago?
Los lirios tardarán ___ días. ¿Cómo llegaste a tal respuesta?

4. Iván bebe un barril de agua en 6 días y maría puede beber el mismo barril en 12 días. ¿Cuántos días tardaran en beber tal barril de agua juntos?
Tardaran__ días. ¿Cómo llegaste a tal respuesta?

5. Julio ha recibido tanto la decimoquinta calificación más alta como la decimoquinta calificación más baja de la clase. ¿Cuántos estudiante hay en la clase?
Hay__________estudiantes en la clase. ¿Cómo llegaste a tal respuesta?

6. Un hombre compra una mercancía por 60 pesos, la vende por 70 pesos, la compra de nuevo por 80 pesos y, finalmente, la vende por 90 pesos. ¿Cuánta ganancia logro obtener?
Su ganancia fue de ___ pesos. ¿Cómo llegaste a tal respuesta?