



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Análisis del significado del concepto de modo en
experimentos con fotones individuales en óptica cuántica

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

Moroni Santiago García

Asesorado por

Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco

Puebla Pue.
Septiembre de 2020



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Análisis del significado del concepto de modo en
experimentos con fotones individuales en óptica cuántica

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

Moroni Santiago García

Asesorado por

Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco

Puebla Pue.
Septiembre de 2020

Título: Análisis del significado del concepto de modo en experimentos con fotones individuales en óptica cuántica

Estudiante: MORONI SANTIAGO GARCÍA

COMITÉ

Dr. Carlos Ignacio Robledo Sánchez
Presidente

Dr. Luis Manuel Arévalo Aguilar
Secretario

Dr. Cruz Meneses Fabián
Vocal

Vocal

Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco
Asesor

Agradecimientos

A mis padres *Agustín Santiago Alvarado* y *Susana García Ortega* por su apoyo incondicional y que en su manera tan especial siempre me han motivado e impulsado, por las palabras adecuadas en los momentos correctos y porque siempre han confiado y creído las cosas que me propongo.

A ti Karla que en tu forma única me impulsas, me apoyas y me inspiras a ser y dar lo mejor de mí.

A mis compañeros y amigos que con ellos esta travesía ha sido aun mejor de lo que imaginaba, que sin duda he crecido gracias a ellos.

Al Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco por su amistad, su gran apoyo, tiempo, valiosas observaciones y asesoría en la realización de este trabajo.

Gracias a todos aquellos que de una forma u otra forma son parte de este momento.

Índice general

Resumen	1
1. Introducción	3
2. Conceptos fundamentales de óptica	7
2.1. La luz como onda	7
2.2. Interferencia	8
2.3. Difracción	9
2.3.1. Principio de Huygens-Fresnel	9
2.3.2. Fórmula integral de Fresnel Kirchhoff para la difracción	9
2.4. Coherencia	11
3. El modo en óptica física	15
3.1. El interferómetro de Fabry-Perot	15
3.2. Cavidades resonantes	18
3.2.1. Modos longitudinales	19
3.2.2. Densidad de modos	19
3.3. Modos transversales	20
3.4. El modo en espacio libre	23
4. El modo en la óptica cuántica	25
4.1. El oscilador armónico cuántico	25
4.2. La cuantización del campo de radiación	27
4.3. Estados de Fock	33
4.4. Experimentos con fotones individuales	34
4.4.1. El modo para un fotón	38
5. Conclusiones	39
Bibliografía	41

Resumen

En el marco de la óptica cuántica, se han desarrollado experimentos que involucran configuraciones simples de la radiación electromagnética, fotones individuales en modos simples, permitiendo observar el comportamiento de estos en sus formas mas elementales conocidas.

En este trabajo se busca analizar el significado del concepto de modo para un fotón en experimentos con fotones individuales, para esto se analiza el concepto del modo desde su aparición en la óptica física, en los modos en el interferómetro de Fabry Perot[3] y en las cavidades ópticas[20], para después analizar su significado y uso en la cuantización del campo de radiación por Dirac[12], y en los estados de Fock[27], para finalmente analizar los experimentos de óptica cuántica de Mandel[29] y Santori[34] donde se ven involucrados fotones individuales en modos simples. Se encuentra que los fotones provenientes de una fuente de fotones indistinguibles interfieren a consecuencia de que tienen el mismo modo mostrando que el modo es un concepto fundamental en la óptica y determinante en el comportamiento de los fotones al producirse fenómenos como la interferencia, brindando mayor comprensión de estos fenómenos.

Capítulo 1

Introducción

Desde hace mucho tiempo la humanidad ha tratado de entender el porqué de la naturaleza y los fenómenos que en ella se observan, la física se encarga del estudio de estos fenómenos, así como de sus propiedades, en particular, en la naturaleza se manifiesta un tipo de movimiento singular que son las ondas o el movimiento ondulatorio, que son perturbaciones del medio que se mueven en el espacio, ejemplos de esto es lo que observamos cuando se arroja un piedra en un estanque, o la propagación del sonido, la luz, etc. Al ser estudiadas se han caracterizado y asociado a expresiones sinusoidales periódicas (que se repiten con el tiempo) teniendo una amplitud (que tan grande es la perturbación) y una fase (que involucra la frecuencia de la onda y su dirección).

Al continuar con el estudio de las ondas, se encontraron algunas propiedades adicionales cuando una onda esta confinada, ejemplo de esto es la vibración de una cuerda atada por los extremos, en donde, si inicialmente se da a la cuerda una forma de onda sinusoidal que se le ajusta, es decir, que la onda empieza en un punto y termina en el otro extremo, seguirá teniendo esa forma perfecta de onda sinusoidal y oscilará armónicamente con cierta frecuencia, es decir, esta cuerda puede tener movimientos sinusoidales pero solo a ciertas frecuencias “naturales”, este lleva a un concepto muy importante en física conocido como modo de vibración. Si se puede hallar un diagrama de movimiento de la cuerda que tenga la propiedad en cualquier punto se mueve en forma sinusoidal y que todos los puntos se muevan con la misma frecuencia, entonces se tiene lo que se conoce como modo de vibración[1, 2]. Posteriormente se planteo que cualquier movimiento se puede analizar suponiendo que es la suma de los movimientos de todos los modos de vibración diferentes, combinados con amplitudes y fases apropiadas, por lo que el modo es un concepto fundamental en la física.

Al ser la luz una onda electromagnética el concepto de modo se utiliza en la óptica física, nuevamente relacionándose a la frecuencia de la onda y ahora también a la polarización de la misma, es utilizado al estudiarse fenómenos como la interferencia, cuando al menos 2 campos electromagnéticos que comparten características como la polarización y la frecuencia, es decir, son del mismo modo, al interactuar, interfieren constructivamente (sus intensidades se suman) o destructivamente (sus intensidades se restan) formando una distribución de energía particular conocida como patrón o franjas de interferencia, para analizar este fenómeno se desarrollaron diversos aparatos conocidos como interferómetros, dependiendo de la forma en que se produce la interferencia se distinguen los interferómetros de división de frente de onda y los de división de amplitud, en particular, con el desarrollo del interferómetro de Fabry-Perot[3, 4] se sientan los antecedentes de las cavidades ópticas[20], que son regiones del espacio delimitadas por superficies reflectantes, donde los modos del campo eléctrico que satisfacen relaciones con la distancia entre las superficies reflectantes se preservan e interfieren[20].

El concepto tomó particular importancia en los estudios de Max Planck [7, 8], el consideraba que las ondas electromagnéticas estaban en equilibrio en el interior de una cavidad y que toda la radiación electromagnética que incidía sobre esta se emitía y absorbía por las paredes de la cavidad, a esta cavidad se le conoce como cuerpo negro. Planck supuso que había osciladores en las paredes de la cavidad y que cada oscilador podía absorber y emitir solo cantidades discretas de energía proporcionales a su frecuencia, descubre que los valores de la energía son múltiplos enteros de una energía fundamental que relacionaba una constante, la constante de Planck h y la frecuencia ν de la radiación involucrada, es decir, la energía de los modos del oscilador estaba cuantizada, lo que fue un precedente del desarrollo de la mecánica cuántica. Posteriormente con el desarrollo de la mecánica cuántica se formalizó la cuantización del oscilador armónico [23, 24].

Con los trabajos del efecto fotoeléctrico por Einstein [9], la naturaleza de onda-partícula de la luz y la materia por D’Broglie [10] entre otros, se continua con el desarrollo de la mecánica cuántica, y para la luz se encuentra que está conformada por “cuantos” a los que posteriormente se les conocería como “fotones” [11]. Posteriormente Dirac [12] realiza la cuantización del campo de radiación al llegar a una expresión para el Hamiltoniano del campo electromagnético que es análoga al Hamiltoniano del oscilador armónico, entonces asocia osciladores armónicos a los modos del campo de radiación encontrando expresiones para los operadores del campo eléctrico y magnético. Y nuevamente el concepto de modo esta presente, ya que los fotones creados de la excitación del campo de radiación heredan características de estos como al modo al que se asocian.

Años después y con apoyo en los conocimientos sobre la emisión estimulada, cuyas bases fueron propuestas por Einstein, se desarrolla el MASER (*Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation*) en 1953, siendo este un antecesor de el LASER (*Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*) creado en 1960 por T. H. Maiman [13], que es un desarrollo tecnológico que permitiría el estudio de los modos mas ampliamente. En sus forma simple consiste en una cavidad óptica resonante constituida por dos espejos de diferente reflectancia, entre los espejos hay un medio que es el material en donde mediante un bombeo comúnmente eléctrico u óptico se excitan los átomos de este y se produce la emisión estimulada, y los fotones generados viajan entre la cavidad hasta que alcanzan una intensidad conocida como intensidad de saturación generando un haz de luz láser. El láser es bastante utilizado en estos días, en áreas como la medicina, las comunicaciones, la computación, entre otras, pero también es fundamental para una gran cantidad de experimentos en óptica debido a la coherencia de la luz emitida, su intensidad y que la luz emitida es casi monocromática a diferencia de otras fuentes utilizadas anteriormente, con estas características se pueden distinguir ahora dos tipos de modos en la luz láser, los longitudinales (relacionados con la frecuencia) y los transversales (relacionados con el espacio).

A raíz de las contribuciones de R.J. Glauber [14, 15] en 1963 sobre la teoría cuántica de la coherencia óptica, se sientan las bases para una nueva área de la óptica, la óptica cuántica, donde ahora tanto la energía como los campos electromagnéticos están cuantizados, dando pie a nuevos experimentos en donde se ven involucrados fotones individuales permitiendo estudiar el comportamiento fundamental de estos. En 1978 Mandel *et al.* [29, 30, 33] diseñaron un experimento para medir los intervalos de tiempo en la detección de 2 fotones “gemelos” y por implicación la longitud de un paquete de onda al hacer interferir los fotones “gemelos” producidos en un proceso no lineal llamado generación paramétrica de diferencia de frecuencias que consiste en la creación de dos fotones (*signal e idler*) de menor energía a partir de un fotón (bombeo), como resultado de la interacción no lineal de un haz intenso de luz láser con un cristal con susceptibilidad a segundo orden. Demostraron además que si el tiempo de retardo esta en intervalo donde esta el 0, los 2 fotones del mismo modo se superponen y estos tomaran la misma salida en un divisor de haz manifestándose un efecto de agrupamiento. Posteriormente en 2002, Santori *et al* [34, 35] demostraron el mismo efecto usando una fuente de fotones individuales indistinguibles, es decir, que los fotones emitidos consecutivamente desde una fuente de fotones

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

individuales interfieren si pertenecen a un mismo modo, mostrando propiedades de los estados mas fundamentales de la luz, fotones individuales y un mismo modo, pero entonces ¿Cual es el significado de modo para un fotón?. En este trabajo de tesis se estudiará la definición y evolución del concepto de modo en óptica física, para mostrar su impacto en el establecimiento de la teoría de óptica cuántica y se analizará su significado en procesos de interacción de un solo fotón.

En el segundo capítulo se abordan algunos conceptos básicos de la óptica. Posteriormente en el tercer capítulo se trata el concepto de modo en óptica física partiendo del interferómetro de Fabry Perot para analizar los modos en las cavidades resonantes. En el cuarto capítulo se tratan algunos conceptos de la mecánica cuántica, se presenta el modo en la óptica cuántica al utilizarse en la cuantificación del campo de radiación y generando los llamados Estados de Fock y se presentan algunos experimentos de interferencia de dos fotones en los que sus modos juegan un papel importante para los resultados obtenidos, también se hace una discusión del concepto de modo en estos experimentos. Finalmente en el quinto capítulo se presentan las conclusiones.

Capítulo 2

Conceptos fundamentales de óptica

El estudio de la naturaleza de la luz ha llevado a varias percepciones de esta, Newton propuso que eran corpusculos luminosos, posteriormente Huygens propuso a la luz como una onda, y con los trabajos de Einstein [9] y D'Broglie[10] se considera una dualidad onda-partícula, bajo ciertas circunstancias se comporta como onda y en otras como partícula, en este capítulo los análisis partirán de considerar a la luz como una onda, que es a lo que se conoce como óptica física, y se muestran algunos conceptos como interferencia, difracción, coherencia, entre otros, que posteriormente se verán involucrados en el análisis del interferómetro de Fabry Perot y las cavidades resonantes en donde el concepto de modo en óptica aparece.

2.1. La luz como onda

La luz al ser considerada como una onda, sus campos eléctrico y magnético se modelan como tal, estos campos son vectores, para el caso del campo eléctrico se tiene

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \vec{p}, \quad (2.1)$$

donde

- E_0 es la amplitud de la onda
- $(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ es lo que se conoce como la fase de la onda
- \vec{k} es el vector de onda que indica la dirección de propagación de la onda
- ω es la frecuencia angular de la onda
- \vec{p} indica la dirección de \vec{E} , es decir su polarización.

Y satisface la ecuación de onda

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.2)$$

Además, cumple con el principio de superposición el cual refiere a que si 2 campos eléctricos satisfacen la ecuación de onda individualmente, la suma de estos también lo hace. Al origen de la onda electromagnética se le conoce como fuente.

2.2. Interferencia

Cuando 2 o mas ondas están presentes simultáneamente en la misma región el campo eléctrico es la suma de las fuentes de onda individuales, pero no es el caso con la intensidad, la intensidad de la superposición de 2 o mas ondas no es necesariamente la suma de sus intensidades. Esta diferencia es atribuida a la interferencia entre estas 2 ondas, esta interferencia depende de la relación entre las fases de las ondas que se superponen.

La intensidad en un punto P es proporcional al promedio temporal de la magnitud del campo eléctrico al cuadrado, es decir,

$$I = \epsilon v \langle \vec{E}^2 \rangle_T,$$

donde ϵ es la permitividad eléctrica del medio y v la velocidad de la onda en el medio. Puesto que solo se tratará las intensidades relativas dentro del mismo medio, se omitirá por el momento las constantes y se utilizará

$$I = \langle \vec{E}^2 \rangle_T, \quad (2.3)$$

si se consideran dos ondas se tiene

$$\vec{E}^2 = \vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2 + 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2,$$

entonces la intensidad es

$$I = I_1 + I_2 + I_{12},$$

con $I_1 = \langle \vec{E}_1^2 \rangle_T$, $I_2 = \langle \vec{E}_2^2 \rangle_T$ y $I_{12} = 2\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle_T$.

El termino I_{12} se denomina termino de interferencia , que después de calcularse obtenemos

$$I_{12} = |\vec{E}_1| |\vec{E}_2| \cos \delta,$$

con $|\vec{E}_1|$, $|\vec{E}_2|$ las magnitudes de los campos E_1 y E_2 respectivamente y δ la diferencia de fase resultante de la combinación de una diferencia de longitud de camino óptico y una diferencia del ángulo de desfase inicial.

Si \vec{E}_1 y \vec{E}_2 son perpendiculares, $I_{12} = 0$ e $I = I_1 + I_2$ y no se presenta interferencia.

Si además

$$I_1 = \langle \vec{E}_1^2 \rangle_T = \frac{|\vec{E}_1|^2}{2},$$

$$I_2 = \langle \vec{E}_2^2 \rangle_T = \frac{|\vec{E}_2|^2}{2},$$

la intensidad total es

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta \quad (2.4)$$

de donde en particular se distingue que para $\cos \delta = 1$ se produce una intensidad máxima conocida como *interferencia constructiva total*:

$$I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}, \quad (2.5)$$

y cuando $\cos \delta = 0$ se produce una intensidad mínima conocida como *interferencia destructiva total*:

$$I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}. \quad (2.6)$$

La interferencia no se observa si hay fluctuaciones y diferencias en las fases y frecuencias de las ondas ya que el promedio del término del $\cos \delta$ en el término de interferencia es 0 y el término de interferencia desaparece, es decir, si las ondas tienen características similares en su polarización y frecuencia estas interfieren, estas características de polarización y frecuencia definen el *modo* de la onda, así que, sólo ondas del mismo modo interfieren entre sí.

Para analizar y observar este fenómeno se desarrollaron diversos aparatos conocidos como *interferómetros*, que dependiendo de la forma en que se produce la interferencia se distinguen los interferómetros de división de frente de onda y los de división de amplitud.

2.3. Difracción

En general no hay una diferencia entre interferencia y difracción, se puede decir que cuando hay solo unas pocas fuentes que interfieren, el resultado se llama interferencia, si hay un gran número, la palabra difracción se usa más a menudo[2]. Y esto es lo que ocurre donde quiera que una parte del frente de una onda (superficies con igual fase) este obstruido de alguna manera, si al encontrar un obstáculo se altera la amplitud o la fase de una región del frente de onda, esto producirá *difracción*[16]. Comúnmente se estudia cuando la luz pasa a través de obstáculos o aberturas.

2.3.1. Principio de Huygens-Fresnel

Como este fenómeno es resultado de la naturaleza ondulatoria de la luz, se intentó resolver utilizando el principio de Huygens, pero este no puede explicar, por sí mismo el proceso de difracción. Esta dificultad se resolvió por Fresnel al añadir su concepto de interferencia, estableciendo el principio de Huygens-Fresnel:

“Cada punto sin obstrucción de un frente de onda, en un instante de tiempo determinado, sirve como fuente de trenes de onda secundarios esféricos (de la misma frecuencia que la onda primaria). La amplitud del campo óptico en cualquier punto más allá es la superposición de todos estos trenes de ondas”.[16]

Es decir, que los frentes de onda no solamente se unen para formar una envolvente del frente de onda, si no que interfieren unos con otros.

2.3.2. Fórmula integral de Fresnel Kirchhoff para la difracción

Kirchhoff [17, 18] realizó una teoría para la difracción que es una aproximación válida para longitudes de onda suficientemente pequeñas, es decir, cuando el tamaño de las aberturas difractantes es grande en comparación con λ . Puede visualizarse como resultado de la interacción de ondas electromagnéticas con alguna clase de obstrucción física.

A partir de la ecuación (2.2) que es la ecuación de onda, se puede encontrar una ecuación de onda independiente del tiempo conocida como la *Ecuación de Helmholtz*

$$\nabla^2 U + k^2 U = 0, \quad (2.7)$$

donde $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$ y U es la amplitud del campo.

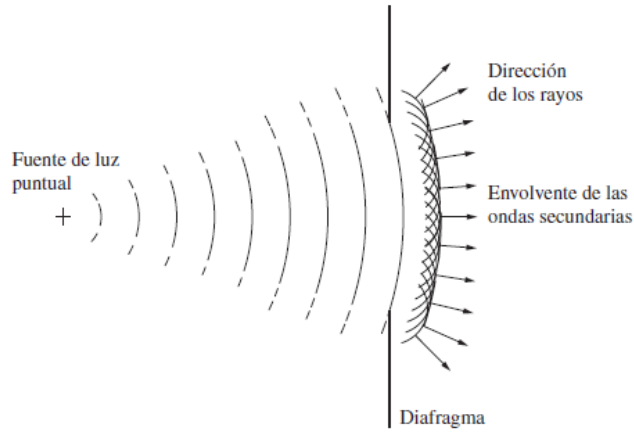


Figura 2.1: *Principio de Huygens para la difracción [5].*

La formulación de Kirchhoff para el problema de la difracción se basa en un teorema integral que expresa la solución de la ecuación de Helmholtz en un punto arbitrario sobre una superficie cerrada alrededor de ese punto.

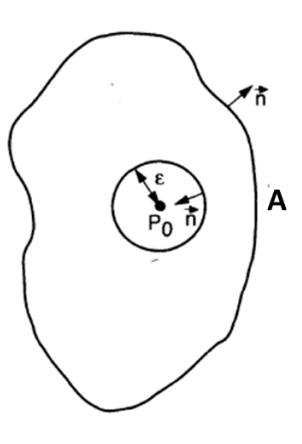


Figura 2.2: *Superficie en la formulación de Kirchhoff [17].*

El cálculo de esta solución U puede ser hecha auxiliándose del teorema de Green[17] y de considerar una onda esférica como función auxiliar en este teorema. Bajo estas consideraciones el teorema queda reducido a

$$\iint_A \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) dA = 0,$$

donde

- $G = \frac{e^{ikr}}{r}$ es la función auxiliar

- U la solución de la ec. de Helmholtz
- A la superficie de integración y la derivada parcial es normal a cada punto de A

Al resolverse tiene como solución *el teorema integral de Helmholtz y Kirchoff*:

$$U_P = \frac{1}{4\pi} \iint_A \left\{ \frac{\partial U}{\partial n} \left[\frac{e^{ikr}}{r} \right] - U \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{e^{ikr}}{r} \right] \right\} dA.$$

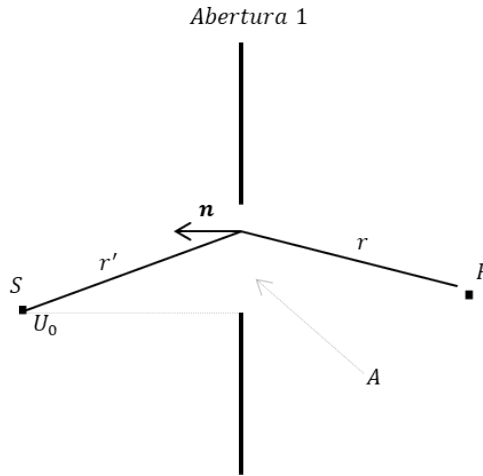


Figura 2.3: Abertura en la formula de Fresnel Kirchoff para la difracción.

Al aplicar el teorema a una abertura como la de la figura 2.3 y suponiendo que se ilumina con una onda esférica simple se obtiene la *formula de Fresnel Kirchoff para la difracción* con una fuente esférica:

$$U_p = -\frac{ik}{4\pi} \iint_A U_0 \frac{e^{ikr'}}{r'} \frac{e^{ikr}}{r} [\cos n, r - \cos n, r'] dA. \quad (2.8)$$

Este resultado será importante para el estudio de los modos en una cavidad resonante como se mostrará mas adelante.

2.4. Coherencia

Al estudiarse los fenómenos de la interferencia y la difracción se habla de los campos involucrados, pero no se debe olvidar que estos provienen de alguna fuente, por simplicidad en los cálculos se consideran ondas como la de la ecuación (2.1), es decir, ondas monocromáticas (de una sola frecuencia), pero tales fuentes completamente monocromáticas no existen en realidad, si no que las fuentes tienen un rango de frecuencias alrededor de un valor promedio, a tal intervalo se le conoce como ancho de banda. Debido a esto, se deben considerar estos anchos de banda en estos fenómenos y para que estos fenómenos puedan observarse completamente es necesario que existan relaciones en las fuentes, es decir, en las ondas involucradas y que estas relaciones se mantengan constantes.

En óptica física el término de coherencia óptica se utiliza para denotar una tendencia de 2 valores del campo a tener valores correlacionados en puntos distantes o en tiempos separados[14], describe la similitud estadística del campo en 2 puntos en el espacio y el tiempo[6].

Un proceso es coherente si esta caracterizado por la existencia de relaciones de fase en las ondas involucradas, en su estudio es común hablar de coherencia temporal y coherencia espacial.

La coherencia temporal se refiere a la estabilidad de la fase en el tiempo. El tiempo de coherencia es el intervalo temporal en el que podemos predecir razonablemente la fase de la onda en un punto dado del espacio, se puede interpretar como una medida de cuanto tiempo la fase en una fuente retiene una “memoria” del valor que tenía un un tiempo anterior y se define[18] como:

$$\tau_c = \frac{1}{\Delta\nu}. \quad (2.9)$$

La coherencia espacial esta relacionada con el frente de onda, si dos puntos desplazados lateralmente se hallan en el mismo frente de onda en un tiempo determinado, los campos en esos puntos serán coherentes espacialmente.

Si ahora se considera una fuente con ancho de banda estrecho en el análisis de interferencia, usando el experimento de Young, las 2 aberturas sirven como fuentes de ondas secundarias que se propagan hacia un punto P donde el campo considerándolo por simplicidad un escalar es:

$$E_p = K_1 E_1(t - t_1) + K_2 E_2(t - t_2), \quad (2.10)$$

donde $t_1 = r_1/c$ y $t_2 = r_2/c$ y a k_1 y K_2 se les denominan propagadores y dependen del tamaño de las aberturas y sus posiciones relativas respecto a P.

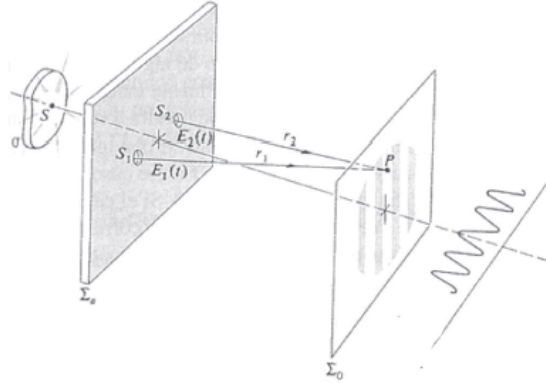


Figura 2.4: *Experimento de Young*[16].

La intensidad de acuerdo a (2.3) es

$$I = \langle E_p(t) E_p^*(t) \rangle_T,$$

que al desarrollarse se encuentra que

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \text{Re}[\langle K_1 K_2^* \langle E_1(t + \tau) E_2^* \rangle_T \rangle], \quad (2.11)$$

donde $\tau = t_2 - t_1$.

La parte del promedio temporal es una función de correlación cruzada a la que se le llama función de coherencia mutua de los campos S_1 y S_2 que se designa por

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle E_1(t + \tau)E_2^* \rangle_T. \quad (2.12)$$

Si esta función se normaliza, se obtiene el *grado de coherencia complejo* que se define como

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\langle |E_1|^2 \rangle \langle |E_2|^2 \rangle}}, \quad (2.13)$$

como $\gamma_{12}(\tau)$ es complejo entonces

$$\gamma_{12}(\tau) = |\gamma_{12}(\tau)|e^{i\Phi_{12}(\tau)}, \quad (2.14)$$

si además, $\Phi_{12}(\tau) = \alpha_{12}(\tau) - \phi$, entonces la ecuación (2.4) se puede expresar como

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}(\tau)| \cos(\alpha_{12}(\tau) - \phi). \quad (2.15)$$

Al termino $|\gamma_{12}(\tau)|$ se le denomina *grado de coherencia* [16], que de acuerdo a los valores que toma indica si hay coherencia o no

$$\begin{aligned} |\gamma_{12}(\tau)| = 1 &\longrightarrow \text{Coherencia Completa} \\ |\gamma_{12}(\tau)| = 0 &\longrightarrow \text{Incoherencia} \\ 0 < |\gamma_{12}(\tau)| < 1 &\longrightarrow \text{Coherencia Parcial} \end{aligned}$$

El concepto de coherencia es muy importante en óptica ya que en varios experimentos se utilizan funciones de correlación, como en los experimentos de Hanbury y Twiss [32] y en el desarrollo de su interferómetro de correlación, en donde se buscan correlaciones en las fluctuaciones de las intensidades de las fuentes involucradas, y es base para el trabajo de Glauber[14] y su teoría cuántica de la coherencia óptica, desarrollándose una área nueva de estudio, la óptica cuántica, permitiendo el desarrollo de nuevos experimentos como los que se mostrarán en el capítulo 4.

Capítulo 3

El modo en óptica física

3.1. El interferómetro de Fabry-Perot

El concepto de modo en óptica toma particular interés cuando se analiza el fenómeno de interferencia de la luz después de propagarse a través de 2 superficies parcialmente reflectantes. Un referente es el interferómetro de Fabry Perot, que es un instrumento óptico que consiste de un arreglo de 2 lentes y 2 espejos paralelos parcialmente reflectantes (parte de la luz se transmite y parte se refleja) y donde los espejos están separados por una distancia d [20], por lo que se presenta un análisis de este.

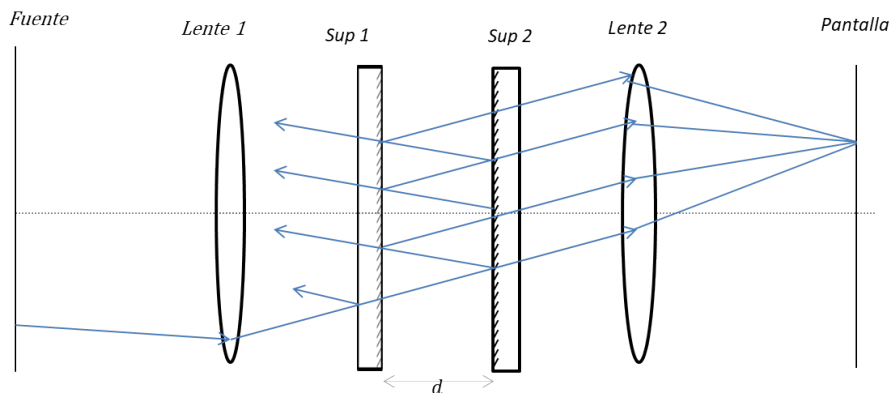


Figura 3.1: *Interferómetro de Fabry Perot.*

Para el análisis se realizan las siguientes consideraciones:

- El campo eléctrico debe ser θ en la superficie de los espejos (condición de frontera).
- El análisis se realiza con una onda plana de radiación electromagnética (el vector de polarización tiene una sola componente) de extensión infinita y amplitud E_0 .
- La superficie parcialmente reflectante también es infinita.
- Una porción de la onda es reflejada (con r el coeficiente de reflexión) y otra transmitida (con t el coeficiente de transmisión).
- La onda se propaga en el aire en todas las regiones por los que $n = 1$ para el índice de refracción.

CAPÍTULO 3. EL MODO EN ÓPTICA FÍSICA
3.1. EL INTERFERÓMETRO DE FABRY-PEROT

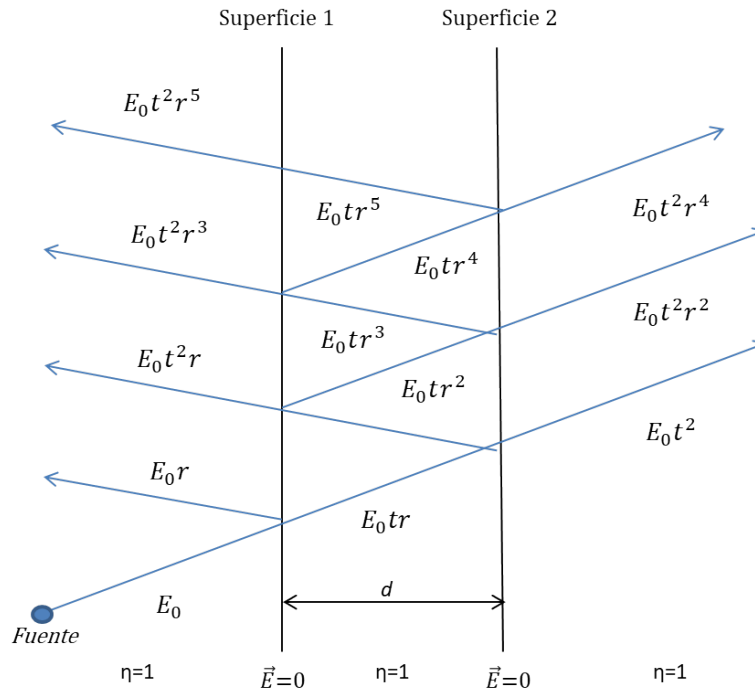


Figura 3.2: Propagación de la luz a través de 2 superficies parcialmente reflectantes.

Entonces un haz de luz llega a la primera superficie, una porción es transmitida y otra reflejada, el haz transmitido llega la segunda superficie donde nuevamente parte es reflejada y transmitida.

La diferencia de camino óptico es

$$2d \cos \theta. \tag{3.1}$$

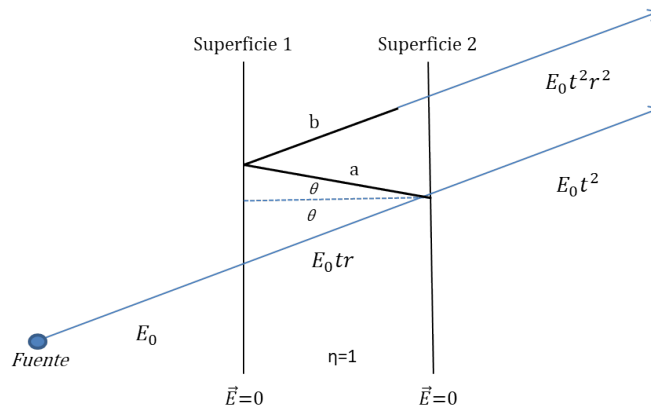


Figura 3.3: Diferencia de camino óptico de un haz de luz que se propaga a través de 2 superficies parcialmente reflectantes

Como se considera una onda plana de la forma e^{ikz} , donde z representa la dirección de propagación de la onda, se puede describir esta porción de la onda como $e^{i\phi}$, donde ϕ es un factor de

CAPÍTULO 3. EL MODO EN ÓPTICA FÍSICA
3.1. EL INTERFERÓMETRO DE FABRY-PEROT

fase, si además se considera a z como la diferencia de camino óptico, y la relación del número de onda $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ se tiene

$$kz = \phi = 2kd \cos \theta = \frac{2\pi}{\lambda} d \cos \theta, \quad (3.2)$$

de modo que la amplitud de campo transmitido es la suma de todas las porciones de la onda transmitidas después de las reflexiones en las dos superficies parcialmente reflectantes, es decir

$$E_t = E_0 t^2 + E_0 t^2 r^2 e^{i\phi} + E_0 t^2 r^4 e^{2i\phi} + \dots,$$

ó

$$E_t = E_0 t^2 [1 + r^2 e^{i\phi} + r^4 e^{2i\phi} + \dots] = E_0 t^2 \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} e^{in\phi}. \quad (3.3)$$

Considerando además que la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} e^{in\phi} = \frac{1}{1 - r^2 e^{i\phi}}, \quad (3.4)$$

Entonces sustituyendo (2.19) en (2.18) se obtiene la expresión para el campo total transmitido

$$E_t = \frac{E_0 t^2}{1 - r^2 e^{i\phi}}. \quad (3.5)$$

Como la cantidad medible en los experimentos es la intensidad conviene tener también la expresión para esta

$$I_t = |E_t|^2 = E_0^2 \frac{|t|^4}{|1 - r^2 e^{i\phi}|^2} = I_0 \frac{|t|^4}{|1 - r^2 e^{i\phi}|^2}. \quad (3.6)$$

Se considera además $r = |r| e^{i\frac{\phi_r}{2}}$ donde $\frac{\phi_r}{2}$ es el cambio de fase por 1 reflexión y si se define la transmitancia $T = t^2$, la reflectancia como $R = r^2$ y $\Phi = \phi + \frac{\phi_r}{2}$ se tiene

$$I_t = I_0 \frac{T^2}{|1 - R e^{i\Phi}|^2}, \quad (3.7)$$

además,

$$|1 - R e^{i\Phi}|^2 = (1 - R)^2 \left[1 + \frac{4R}{(1 - R)^2} \sin^2 \frac{\Phi}{2} \right], \quad (3.8)$$

y si se define

$$F' = \frac{4R}{(1 - R)^2}, \quad (3.9)$$

entonces sustituyendo (2.22), (2.23) y (2.24) en (2.21) se obtiene

$$I_t = I_0 \frac{T^2}{(1 - R)^2} \frac{1}{1 + F' \sin^2 \frac{\Phi}{2}}, \quad (3.10)$$

donde

$$\frac{1}{1 + F' \sin^2 \frac{\Phi}{2}} \quad (3.11)$$

CAPÍTULO 3. EL MODO EN ÓPTICA FÍSICA
3.2. CAVIDADES RESONANTES

es conocida como la *función de Airy*. Cuyos máximos se encuentran en $\frac{\Phi}{2} = n\pi$ y sus mínimos cuando $\frac{\Phi}{2} = \frac{(2n+1)\pi}{2}$.

Entonces los valores máximos de $\frac{I_t}{I_0}$ ocurren cuando $\frac{\Phi}{2} = n\pi$ con n un número entero, refiriéndose a este como Φ_{max}

$$\Phi_{max} = 2n\pi = \frac{4\pi}{\lambda}d \cos \theta + \phi_r.$$

Para simplificar los cálculos, se considera el caso en que $\theta = 0$ ($\cos \theta = 1$) y $\phi_r = 0$ para dieléctricos.

Entonces

$$\Phi_{max} = 2n\pi = \frac{4\pi}{\lambda_0}d, \quad (3.12)$$

de esto que

$$n = \frac{2d}{\lambda_0}, \quad (3.13)$$

entonces la longitud de onda para la cual ocurre un máximo es

$$\lambda^{max} = \frac{2d}{n}, \quad (3.14)$$

o en términos de frecuencia

$$\nu_n^{max} = \frac{nc}{2\eta d}, \quad (3.15)$$

tomando la diferencia de frecuencia entre frecuencias sucesivas

$$\nu_{n-1}^{max} - \nu_n^{max} = \frac{c}{2\eta d}, \quad (3.16)$$

De lo anterior se ve que la diferencia de frecuencia es independiente de n, entonces

$$\Delta\nu_{sep} = \frac{c}{2\eta d}, \quad (3.17)$$

y como se considera que la luz se propaga en el aire entonces $\eta = 1$ entonces

$$\Delta\nu_{sep} = \frac{c}{2d}. \quad (3.18)$$

Estos máximos ocurren en espaciados de frecuencia iguales que son independientes de los valores específicos de frecuencia o longitud de onda.

3.2. Cavidades resonantes

Con influencia en el interferómetro de Fabry-Perot se desarrollan las cavidades resonantes (espacios delimitados por paredes conductoras) en donde los modos “resonantes” juegan un papel muy importante y se hacen presentes para la creación del láser en donde se distinguen 2 tipos de modos, los longitudinales (relacionados con la frecuencia) y los transversales (relacionados con el espacio), los cuales se presentan a continuación.

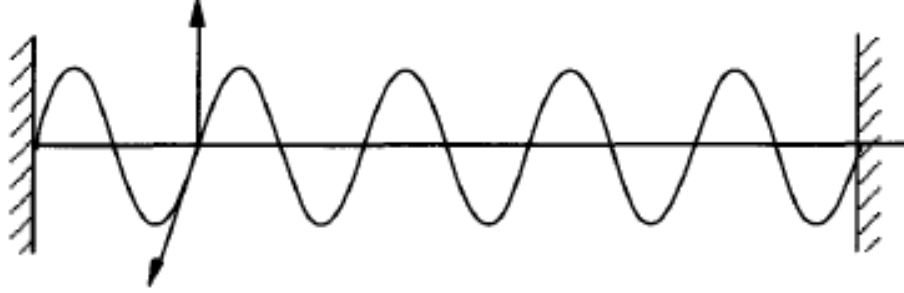


Figura 3.4: Onda electromagnética de frecuencia ν en una cavidad[26].

3.2.1. Modos longitudinales

En un láser 2 espejos separados por una distancia d forman la cavidad resonante por lo que el análisis descrito para el interferómetro de Fabry-Perot explica lo que ocurre dentro de esta cavidad, reescribiendo (2.29) tenemos:

$$d = n \left(\frac{\lambda^{max}}{2} \right), \quad (3.19)$$

lo cual indica que cada “acrecentamiento” de una onda ocurre cuando un múltiplo entero de la mitad de longitud de onda se ajusta en el espaciado de longitud d de la cavidad, tal que se satisfaga la condición de frontera de que el campo eléctrico debe ser 0 en las superficies de los espejos.

Cada una de estas ondas que se mantienen por ajustarse exactamente en el espaciado d de la cavidad es una onda estacionaria conocida como **modo**[20]. Estos modos resultan de los efectos de interferencia cuando la luz interactúa con 2 superficies reflectantes paralelas.

Entonces las frecuencias de los modos del láser están descritas por

$$\nu = \frac{nc}{2\eta d}, \quad (3.20)$$

Lo que indica que existe un numero infinito de frecuencias que se ajustan a tal cavidad, es decir, el numero total de modos presentes esta determinado por la separación d entre los espejos (como también por el ancho de banda del láser y el tipo de ensanchamiento). Estas ondas estacionarias de diferentes frecuencias son referidas como *modos longitudinales* porque están asociadas con la dirección longitudinal de la onda electromagnética con la cavidad.

3.2.2. Densidad de modos

El número de modos por unidad de frecuencia considerando $\eta = 1$ es

$$\frac{1}{\nu} = \frac{2d}{c} \quad (3.21)$$

en cada una de las dos polarizaciones ortogonales [21].

Entonces el numero de modos por unidad de frecuencia por unidad de longitud o en otras palabras la densidad de modos de la cavidad resonante es

$$M(\nu) = \frac{4}{c} \quad (3.22)$$

3.3. Modos transversales

Aunque en el análisis anterior se ha considerado un onda plana, el haz láser no es un onda plana, por lo que hay que considerar las consecuencias de tener una onda casi plana. El tamaño lateral del haz, con el tamaño finito de los espejos y otras aberturas limitantes con el amplificador, causarán difracción en el haz, lo que lleva a pérdidas en la cavidad del láser.

Se utilizará la formula de Fresnel Kirchoff para la difracción para este análisis.

$$U_p = -\frac{ik}{4\pi} \iint_A U_0 \frac{e^{ikr'}}{r'} \frac{e^{ikr}}{r} [\cos n, r - \cos n, r'] dA, \quad (3.23)$$

donde U_p representa la función de la amplitud de onda en P de todas las ondas secundarias desde una abertura 1, cada una originada en S con amplitud U_0 , la integral ocurre sobre toda la superficie 1.

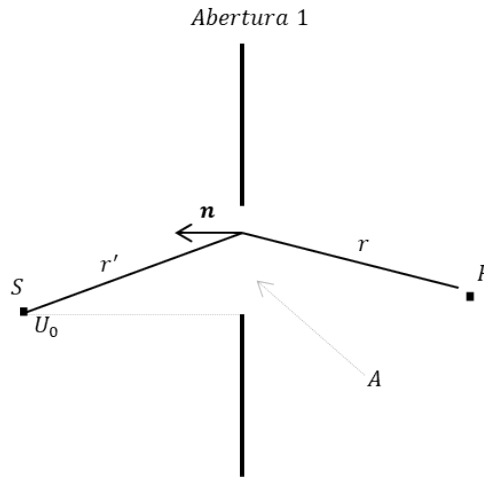


Figura 3.5: Abertura en la formula de Fresnel Kirchoff para la difracción.

Para el análisis se realizan las siguientes consideraciones:

- Espejos plano paralelos circulares separados por una distancia d
- Ondas esféricas de la forma $\frac{e^{ikr}}{r}$
- La magnitud de r' es contante sobre toda el área de la esfera de integración y el vector normal siempre apunta en dirección opuesta a r' ($\cos(n, r') = -1$)
- La fuente de luz S se origina desde la región de la amplificación del láser y esta localizada simétricamente entre los espejos

De modo que

$$U_p = -\frac{ik}{4\pi} \iint_A U_A \frac{e^{ikr'}}{r'} \frac{e^{ikr}}{r} [\cos n, r + 1] dA,$$

donde

$$U_A = U_0 \frac{e^{ikr'}}{r'}.$$

CAPÍTULO 3. EL MODO EN ÓPTICA FÍSICA
3.3. MODOS TRANSVERSALES

Para que se desarrolle un modo de estado estacionario la distribución de amplitud de la luz del primer espejo debe tener la misma dependencia espacial transversal del segundo espejo.

Se considera una función de punto de fuente $U(x, y)$ en el punto (x, y) en el primer espejo, que es la suma de las contribuciones de la radiación de todos los puntos dejando el segundo espejo que llegan a (x, y) del primer espejo.

El punto fuente $U(x, y)$ radía de vuelta al segundo espejo a un punto (x', y') con una función de amplitud $U'(x', y')$ en ese espejo después de viajar una distancia r y θ el ángulo entre \mathbf{d} y \mathbf{r} .

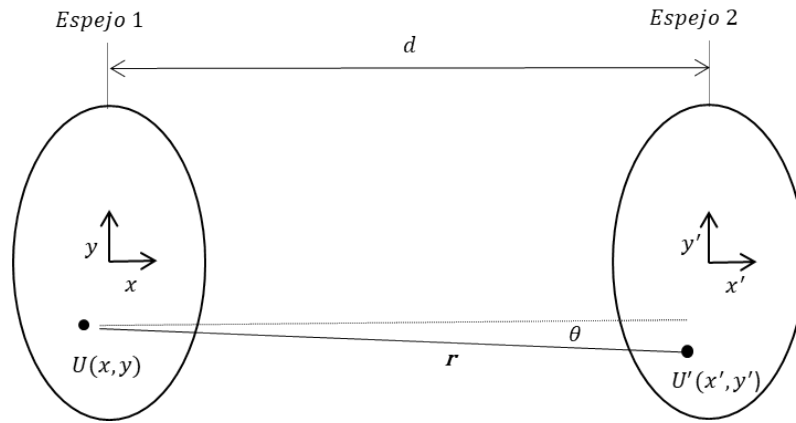


Figura 3.6: 2 espejos circulares paralelos considerados como la cavidad del láser.

Se quiere determinar la distribución $U'(x', y')$ a partir de $U(x, y)$. Para poder hacer un análisis mas sencillo y se facilite la aplicación de la formula integral de Fresnel-Kirchoff para la difracción se considera una descripción equivalente al considerar los 2 espejos transponiendose como una serie de aperturas sucesivas.

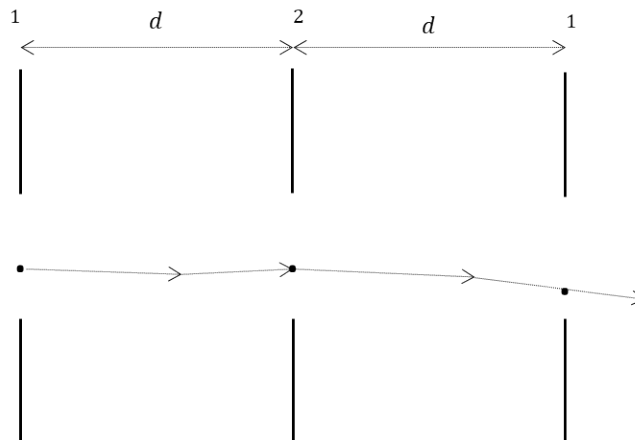


Figura 3.7: Descripción equivalente de las aperturas de una cavidad láser de 2 espejos reflectantes.

CAPÍTULO 3. EL MODO EN ÓPTICA FÍSICA
3.3. MODOS TRANSVERSALES

De modo que la formula integral de Fresnel Kirchoff para la difracción toma la forma

$$U'(x', y') = -\frac{ik}{4\pi} \iint_A U(x, y) \frac{e^{ikr}}{r} (\cos \theta + 1) dx dy. \quad (3.24)$$

Se requieren soluciones para el caso en que la luz ha rebotado una y otra vez entre los espejos, es decir, funciones que describan la luz que se origina en el espejo izquierdo y pase al derecho sin cambios en la forma transversal de la amplitud de función.

Lo que es equivalente a el caso en que la luz deje la abertura de la izquierda 1 pase por la abertura 2 y llegue a la abertura de la derecha 1 sin cambios en su forma, aunque reducida por un factor α .

Se necesitan soluciones tales que U' sea proporcional U para cada punto (x', y')

$$U'(x', y') = \alpha U(x', y') = \iint U(x, y) K(x, y, x', y') dx dy, \quad (3.25)$$

donde

$$K(x, y, x', y') = -\frac{ik}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} (\cos \theta + 1).$$

Además, se puede ver que la ec. (2.40) es una ecuación integral en U , donde K es el kernel de la ecuación y α el eigenvalor.

Existe un número infinito de soluciones U_n y α_n para la ec. (2.40), donde n es un numero entero. Estas soluciones corresponden a los *modos transversales*[20] porque representan la distribución de la amplitud del campo electromagnético en dirección transversal a la proyección del láser en la cavidad.

Podemos encontrar una solucion para (2.40) si se aproxima el kernel

$$K(x, y, x', y') = C e^{ik_1(x x' + y y')}, \quad (3.26)$$

así que al sustituir (2.41) en (2.40) se tiene

$$\alpha U(x', y') = C \iint U(x, y) e^{ik_1(x x' + y y')} dx dy, \quad (3.27)$$

de donde se observa que $U(x, y)$ es su propia transformada de Fourier para la cual la solución mas simple es una función Gaussiana

$$U(x, y) = e^{-\frac{\rho^2}{\omega^2}} = e^{-\frac{(x^2 + y^2)}{\omega^2}}, \quad (3.28)$$

donde $\rho^2 = (x^2 + y^2)$ es la distancia radial a cualquier parte del espejo desde el centro del mismo y ω es el valor de ρ para el cual la amplitud del campo eléctrico decrece a un valor $\frac{1}{e}$ del centro del espejo.

Funciones que son sus propias transformadas de Fourier generalmente pueden ser escritas como productos de polinomios de Hermite y la función de distribución Gaussiana

$$U_{pq}(x, y) = H_p\left(\frac{\sqrt{2}x}{\omega}\right) H_q\left(\frac{\sqrt{2}y}{\omega}\right) e^{-\frac{(x^2 + y^2)}{\omega^2}}. \quad (3.29)$$

En esta solución en la que hay simetría $x - y$, p y q son enteros que designan el orden de los polinomios de Hermite. Entonces cada conjunto (p, q) representa una distribución específica estable de la amplitud de la onda en uno de los espejos, o un modo transversal.

Se designan estas distribuciones de modos transversales como TEM_{pq} , tales modos pueden escribirse como TEM_{npq} , donde n designa el número de modo longitudinal. Cada modo transversal debe estar asociado con una onda estacionaria específica y por ende con un número de modo longitudinal n como también con únicos modos transversales p y q .

3.4. El modo en espacio libre

Para futuras secciones se considerarán los modos en el espacio libre, para este caso puede considerarse la cavidad como una mera región del espacio sin fronteras reales[25, 26, 27, 28], es decir, una cavidad imaginaria, manteniendo la validez de los resultados obtenidos previamente.

Capítulo 4

El modo en la óptica cuántica

El concepto de modo se hace presente en la óptica cuántica desde los planteamientos para cuantizar el campo de radiación, así como en los resultados de esta cuantización. El campo electromagnético es cuantizado por la asociación de osciladores armónicos para cada modo del campo de radiación[25], por lo que se realiza el análisis para la cuantización del oscilador armónico y después se hace la analogía para el campo de radiación y se hace uso de los resultados obtenidos.

A raíz de los trabajos de Glauber [14] se desarrolla una nueva área en la óptica, la óptica cuántica, que estudia las interacciones de la luz con la materia considerando a la luz no como una onda clásica, si no con sus características cuánticas como onda y partícula (fotón). En particular se estudian fenómenos en los que intervienen solamente algunos fotones, como la interferencia de 2 fotones. En este capítulo se revisan los experimentos de Mandel L.[27] y Santori C. [34] en donde se ve involucrada la interferencia de 2 fotones y se analizan los resultados los cuales dependen del modo de los fotones involucrados y se discute el concepto de modo para un fotón.

4.1. El oscilador armónico cuántico

Por simplicidad se realiza el análisis para el caso unidimensional[23, 24], pero puede extenderse el resultado a 3 dimensiones. El Hamiltoniano del oscilador armónico que a su vez es la expresión para la energía es

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \quad (4.1)$$

donde

- p es el momento.
- m la masa del oscilador que de aquí en adelante se considerará como una masa unitaria, es decir, $m = 1$.
- ω la frecuencia angular.
- x la posición.

Para cuantizar el oscilador armónico es necesario identificar las observables, para este sistema la única observable es precisamente H , por lo que se promueve a H a operador hermitiano

$$H \rightarrow \hat{H}$$

además de que

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \quad (4.2)$$

CAPÍTULO 4. EL MODO EN LA ÓPTICA CUÁNTICA
4.1. EL OSCILADOR ARMÓNICO CUÁNTICO

Para el análisis posterior es conveniente pasar de la representación (\hat{x}, \hat{p}) a la representación $(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$ que son conocidos como los operadores de aniquilación y creación respectivamente u operadores escalera porque aumentan o disminuyen el eigenvalor de un operador y se realiza con una transformación lineal definida[23] como

$$\hat{a} = \frac{1}{(2\hbar\omega)^{1/2}}[\omega\hat{x} + i\hat{p}], \quad (4.3)$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{(2\hbar\omega)^{1/2}}[\omega\hat{x} - i\hat{p}], \quad (4.4)$$

Usando las relaciones de conmutación canónica se tiene

$$\begin{aligned} [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] &= 1 \\ [\hat{a}, \hat{a}] &= 0 \\ [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] &= 0 \end{aligned}$$

Se define[23] el operador de número N el cual es hermitiano

$$\hat{N} = \hat{a}\hat{a}^\dagger, \quad (4.5)$$

del cual se puede ver que

$$\hat{N} = \hat{a}\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\hbar\omega}(\hat{H} - \frac{1}{2}\omega\hbar),$$

o reescribiendo

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{N} + \frac{1}{2}), \quad (4.6)$$

dado que \hat{H} es una función lineal de \hat{N}

$$[\hat{N}, \hat{H}] = 0, \quad (4.7)$$

entonces \hat{H} y \hat{N} conmutan y tienen eigenkets comunes. Se puede escribir la ecuación de eigenvalores para \hat{H} como

$$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad (4.8)$$

y la ecuación de eigenvalores para \hat{N} como

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle, \quad (4.9)$$

entonces para el Hamiltoniano también se tiene

$$\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega(\hat{N} + \frac{1}{2})|n\rangle = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})|n\rangle. \quad (4.10)$$

De (4.8) y (4.10)

$$E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}), \quad (4.11)$$

de donde se observa que la energía del oscilador armónico esta cuantizada en múltiplos enteros de $\hbar\omega$.

CAPÍTULO 4. EL MODO EN LA ÓPTICA CUÁNTICA
4.2. LA CUANTIZACIÓN DEL CAMPO DE RADIACIÓN

También se puede ver que

$$\hat{N}\hat{a}^\dagger|n\rangle = (n+1)(\hat{a}^\dagger|n\rangle) \quad (4.12)$$

y

$$\hat{N}\hat{a}|n\rangle = (n-1)(\hat{a}|n\rangle) \quad (4.13)$$

lo que demuestra que $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ y $\hat{a}|n\rangle$ son eigenkets de \hat{N} con eigenvalores $(n+1)$ y $(n-1)$ respectivamente. Lo que significa que \hat{a}^\dagger crea cuantos $\hbar\omega$ y \hat{a} destruye cuantos $\hbar\omega$.

La ecuación

$$\hat{N}\hat{a}|n\rangle = (n-1)\hat{a}|n\rangle \quad (4.14)$$

implica que $\hat{a}|n\rangle$ y $|n-1\rangle$ son en realidad el mismo ket, requiriendo que los kets estén normalizados se encuentra que

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad (4.15)$$

de manera similar, se considera la ecuación

$$\hat{N}\hat{a}^\dagger|n\rangle = (n+1)\hat{a}^\dagger|n\rangle, \quad (4.16)$$

que implica que $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ y $|n+1\rangle$ son el mismo ket, requiriendo que estos kets estén normalizados se encuentra que

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (4.17)$$

Además, si se aplica sucesivamente el operador \hat{a} al vector de estado $|n\rangle$ físicamente hay un límite, que es conocido como el estado base o estado de mínima energía $|0\rangle$. Se define [23]

$$\hat{a}|0\rangle = 0. \quad (4.18)$$

Se puede representar el vector de estado $|n\rangle$ como la aplicación sucesiva del operador de creación \hat{a}^\dagger , es decir

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle. \quad (4.19)$$

De esta manera se han construido eigenkets comunes de \hat{H} y \hat{N} , tienen una base común $\{|n\rangle\}$, la cual es ortonormal

$$\langle n'|n\rangle = \delta_{n'n},$$

con su relación de completitud

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \mathbf{I}$$

4.2. La cuantización del campo de radiación

Consideraremos el campo clásico electromagnético propagándose en espacio libre, además se considera ausencia de fuentes como cargas y corrientes. Estos campos satisfacen las ecuaciones de

CAPÍTULO 4. EL MODO EN LA ÓPTICA CUÁNTICA
4.2. LA CUANTIZACIÓN DEL CAMPO DE RADIACIÓN

Maxwell que toman la forma

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}(r, t)}{\partial t}, \quad (4.20)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(r, t)}{\partial t}, \quad (4.21)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad (4.22)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (4.23)$$

Por conveniencia se representa el campo electromagnético libre por el potencial vectorial $\vec{A}(r, t)$ en la norma Coulomb ($\nabla \cdot \vec{A} = 0$)[27], que satisface

$$\nabla^2 \vec{A}(r, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(r, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (4.24)$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (4.25)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (4.26)$$

Se hace una expansión en series de Fourier en términos de los modos de ondas planas para el potencial vectorial

$$\vec{A}(r, t) = \frac{1}{\varepsilon_0^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}}} \sum_k \vec{A}_k(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}, \quad (4.27)$$

$$\text{con } \vec{k} \cdot \vec{A} = 0$$

Al sustituir (4.27) en (4.24) y resolver la ecuación se obtienen soluciones generales de la forma

$$\vec{A}_k(t) = \vec{C}_k e^{-i\omega t} + \vec{C}_{-k}^* e^{i\omega t}, \quad (4.28)$$

donde \vec{C}_k es un vector y dado que el potencial vectorial $\vec{A}(r, t)$ es real nos lleva a que $\vec{A}_{-k}(t) = \vec{A}_k^*(t)$.

Se escribe \vec{C}_k en 2 componentes ortogonales, se escoge una base ortonormal real para representar los 2 estados de polarización ε_{k1} , ε_{k2} que satisface

$$\vec{k} \cdot \varepsilon_{ks} = 0,$$

$$\varepsilon_{ks} \cdot \varepsilon_{ks'} = \delta_{ss'},$$

$$\varepsilon_{k1} \times \varepsilon_{k2} = \frac{\mathbf{k}}{k} = \kappa,$$

CAPÍTULO 4. EL MODO EN LA ÓPTICA CUÁNTICA
4.2. LA CUANTIZACIÓN DEL CAMPO DE RADIACIÓN

Asi que

$$\vec{C}_k = \sum_{s=1}^2 c_{ks} \varepsilon_{ks}. \quad (4.29)$$

Al hacer las sustituciones correspondientes tenemos para el potencial vectorial que

$$\begin{aligned} A(r, t) &= \frac{1}{\varepsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_k \sum_s [c_{ks} \varepsilon_{ks} e^{-i\omega t} + c_{-ks}^* \varepsilon_{-ks}^* e^{i\omega t}] e^{ik \cdot r}, \\ A(r, t) &= \frac{1}{\varepsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_k \sum_s [U_{ks}(t) \varepsilon_{ks} e^{i(k \cdot r)} + U_{ks}(t)^* \varepsilon_{ks}^* e^{-i(k \cdot r)}], \end{aligned} \quad (4.30)$$

donde

$$U_{ks}(t) = c_{ks} e^{-i\omega t}.$$

De las relaciones (4.25) y (4.26) se pueden calcular los campos \vec{E} y \vec{B} .

$$E(r, t) = \frac{i}{\varepsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_k \sum_s \omega [U_{ks}(t) \varepsilon_{ks} e^{ik \cdot r} - c.c.], \quad (4.31)$$

$$B(r, t) = \frac{i}{\varepsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_k \sum_s [U_{ks}(t) (k \times \varepsilon_{ks}) e^{ik \cdot r} - c.c.]. \quad (4.32)$$

Ahora sustituyendo estos campos en la expresión para la energía del campo electromagnético

$$H = \frac{1}{2} \int_{L^3} [\varepsilon_0 E^2(r, t) + \frac{1}{\mu_0} B^2(r, t)] d^3 r, \quad (4.33)$$

considerando un volumen de una cavidad imaginaria en el espacio L^3 y que

$$\int_{L^3} e^{i(k-k') \cdot r} d^3 r = L^3 \delta_{kk'},$$

$$(k \times \varepsilon_{ks}^*) \cdot (k' \times \varepsilon_{ks'}) = k^2 \varepsilon_{ks}^* \cdot \varepsilon_{ks'} = k^2 \delta_{ss'},$$

se obtiene

$$H = 2 \sum_k \sum_s \omega^2 |U_{ks}(t)|^2, \quad (4.34)$$

para la cuantización del campo es indispensable escribir H en forma de Hamiltoniano, es decir, introduciendo variables canónicas reales $q_{ks}(t)$ y $p_{ks}(t)$ que satisfagan las ecuaciones de Hamilton [22]

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_{ks}} &= \frac{\partial q_{ks}}{\partial t} = \dot{q}_{ks}, \\ \frac{\partial H}{\partial q_{ks}} &= -\frac{\partial p_{ks}}{\partial t} = -\dot{p}_{ks}, \end{aligned}$$

las cuales se definirán por[27]

$$q_{ks}(t) = [U_{ks}(t) + U_{ks}^*(t)], \quad (4.35)$$

$$p_{ks}(t) = -i\omega [U_{ks}(t) - U_{ks}^*(t)], \quad (4.36)$$

CAPÍTULO 4. EL MODO EN LA ÓPTICA CUÁNTICA
4.2. LA CUANTIZACIÓN DEL CAMPO DE RADIACIÓN

así que el Hamiltoniano resultante es

$$H = \frac{1}{2} \sum_k \sum_s [p_{ks}^2 + \omega^2 q_{ks}^2(t)], \quad (4.37)$$

y esta expresión se puede ver como un sistema de osciladores armónicos independientes.

Entonces se puede expresar el potencial vectorial, el campo eléctrico y magnético en términos de estas nuevas variables

$$A(r, t) = \frac{1}{2\varepsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_k \sum_s [(q_{ks}(t) + \frac{i}{\omega} p_{ks}(t)) \varepsilon_{ks} e^{i(k \cdot r)} + c.c.], \quad (4.38)$$

$$E(r, t) = \frac{1}{2\varepsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_k \sum_s [(\omega q_{ks}(t) + i p_{ks}(t)) \varepsilon_{ks} e^{i(k \cdot r)} - c.c.], \quad (4.39)$$

$$B(r, t) = \frac{1}{2\varepsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_k \sum_s [(q_{ks}(t) + \frac{i}{\omega} p_{ks}(t)) (k \times \varepsilon_{ks}) e^{i(k \cdot r)} - c.c.]. \quad (4.40)$$

De este resultado se puede ver que a cada oscilador se le puede asociar un modo normal de oscilación del campo de radiación electromagnético, de modo que podemos interpretar el campo electromagnético como una suma de modos normales de oscilación, los cuales en analogía con el oscilador armónico, estarán cuantizados llevándonos a los resultados deseados para cuantizar este campo.

Para describir el campo electromagnético en mecánica cuántica es necesario asociar operadores en el Espacio de Hilbert con las variables dinámicas. Para esto se le asocia un operador a cada variable canónica

$$q \rightarrow \hat{q}$$

$$p \rightarrow \hat{p}$$

De los postulados de la mecánica cuántica se sabe que cada par de operadores canónicamente conjugados $\hat{q}_{ks}(t)$, $\hat{p}_{ks}(t)$, tienen conmutador $i\hbar$. Como las variables clásicas con 2 diferentes modos están desacopladas, los operadores del espacio de Hilbert conmutan, es decir,

$$[\hat{q}_{ks}(t), \hat{p}_{k's'}(t)] = i\hbar \delta_{kk'}^3 \delta_{ss'}, \quad (4.41)$$

$$[\hat{q}_{ks}(t), \hat{q}_{k's'}(t)] = 0, \quad (4.42)$$

$$[\hat{p}_{ks}(t), \hat{p}_{k's'}(t)] = 0 \quad (4.43)$$

Entonces al asociar estos operadores a las variables canónicas, el Hamiltoniano, el potencial vectorial, el campo eléctrico y el campo magnético se asocian a operadores, en este caso los operadores serán \hat{H} , \hat{A} , \hat{E} , \hat{B} respectivamente y se encontrará una expresión para cada uno.

Para el operador Hamiltoniano se tiene

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_k \sum_s [\hat{p}_{ks}^2 + \omega^2 \hat{q}_{ks}^2(t)], \quad (4.44)$$

pero este es el operador Hamiltoniano del oscilador armónico, de modo que el análisis es análogo

CAPÍTULO 4. EL MODO EN LA ÓPTICA CUÁNTICA
4.2. LA CUANTIZACIÓN DEL CAMPO DE RADIACIÓN

al del oscilador armónico cuántico que ya se realizó en la sección anterior.

Se introducen los operadores de aniquilación y creación usados para el oscilador armónico cuántico

$$\hat{a}_{ks}(t) = \frac{1}{(2\hbar\omega)^{1/2}}[\omega\hat{q} + i\hat{p}], \quad (4.45)$$

$$\hat{a}_{ks}^\dagger(t) = \frac{1}{(2\hbar\omega)^{1/2}}[\omega\hat{q} - i\hat{p}], \quad (4.46)$$

de lo cual

$$\hat{q} = \left(\frac{\hbar}{2\omega}\right)^{1/2}[\hat{a} + \hat{a}^\dagger], \quad (4.47)$$

$$\hat{p} = i\left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)^{1/2}[\hat{a} - \hat{a}^\dagger], \quad (4.48)$$

y satisfacen

$$[\hat{a}_{ks}, \hat{a}_{k's'}^\dagger] = \delta_{kk'}^3 \delta_{ss'},$$

$$[\hat{a}_{ks}, \hat{a}_{k's'}] = 0,$$

$$[\hat{a}_{ks}^\dagger, \hat{a}_{k's'}^\dagger] = 0,$$

además del factor $(\frac{\hbar}{2\omega})^{1/2}$, los operadores $\hat{a}_{ks}(t)$ y $\hat{a}_{ks}^\dagger(t)$ corresponden a las amplitudes complejas $U_{ks}(t)$, $U_{ks}^*(t)$ y tienen la misma dependencia temporal y pueden ser escritos como

$$\hat{a}_{ks}(t) = \hat{a}_{ks}(0)e^{-i\omega t}, \quad (4.49)$$

$$\hat{a}_{ks}^\dagger(t) = \hat{a}_{ks}^\dagger(0)e^{i\omega t}, \quad (4.50)$$

Sustituyendo $\hat{q}_{ks}(t)$ y $\hat{p}_{ks}(t)$ en termino de $\hat{a}_{ks}(t)$ y $\hat{a}_{ks}^\dagger(t)$ en el operador Hamiltoniano \hat{H} se obtiene

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_k \sum_s \hbar\omega [\hat{a}_{ks}(t)\hat{a}_{ks}^\dagger(t) + \hat{a}_{ks}^\dagger(t)\hat{a}_{ks}(t)] \quad (4.51)$$

ó

$$\hat{H} = \sum_k \sum_s \hbar\omega \left[\hat{a}_{ks}^\dagger(t)\hat{a}_{ks}(t) + \frac{1}{2} \right] \quad (4.52)$$

De la misma forma se encuentran las expresiones para el potencial vectorial, el campo eléctrico y el campo magnético

$$\hat{A}(r, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_k \sum_s \left(\frac{\hbar}{2\omega\epsilon_0}\right)^{1/2} [\hat{a}_{ks}(t)\epsilon_{ks}e^{ik\cdot r} + h.c.], \quad (4.53)$$

$$\hat{E}(r, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_k \sum_s \left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0}\right)^{1/2} [i\hat{a}_{ks}(t)\epsilon_{ks}e^{ik\cdot r} + h.c.], \quad (4.54)$$

$$\hat{B}(r, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_k \sum_s \left(\frac{\hbar}{2\omega\epsilon_0}\right)^{1/2} [i\hat{a}_{ks}(t)(k \times \epsilon_{ks})e^{ik\cdot r} + h.c.], \quad (4.55)$$

que al contener los operadores \hat{a}_{ks} y \hat{a}_{ks}^\dagger que estan asociados a cada modo normal de oscilación

CAPÍTULO 4. EL MODO EN LA ÓPTICA CUÁNTICA
4.2. LA CUANTIZACIÓN DEL CAMPO DE RADIACIÓN

del campo electromagnético, proporcionan expresiones para representar las interacciones de los modos del campo con un estado de un sistema en estudio.

Haciendo analogía al análisis del oscilador armónico, se introduce el operador de número

$$\hat{n}_{ks} = \hat{a}_{ks}^\dagger(t)\hat{a}_{ks}(t), \quad (4.56)$$

de modo que

$$\hat{H} = \sum_k \sum_s \hbar\omega \left[\hat{n}_{ks}(t) + \frac{1}{2} \right]. \quad (4.57)$$

Además, en analogía a la ecuación (3.15), (3.17) y (3.18)

$$\hat{a}_{ks}^\dagger |n_{ks}\rangle = \sqrt{n_{ks} + 1} |n_{ks} + 1\rangle, \quad (4.58)$$

$$\hat{a}_{ks} |n_{ks}\rangle = \sqrt{n_{ks}} |n_{ks} - 1\rangle, \quad (4.59)$$

con

$$\hat{a}_{ks} |0_{ks}\rangle = 0.$$

El espectro de \hat{n}_{ks} es el conjunto de enteros no negativos 0, 1, 2, 3... etc. El operador \hat{n}_{ks} es conocido como el operador de número para el modo (k, s) donde k es el vector de onda y s la polarización y la base de vectores de estado $|n_{ks}\rangle$ sobre la que actúa se conoce como los números de ocupación para las excitaciones de los modos del campo.

En óptica cuántica es común y conveniente separar los operadores \hat{E}, \hat{B} en dos partes

$$\hat{E}(r, t) = \hat{E}^{(+)}(r, t) + \hat{E}^{(-)}(r, t), \quad (4.60)$$

$$\hat{B}(r, t) = \hat{B}^{(+)}(r, t) + \hat{B}^{(-)}(r, t), \quad (4.61)$$

la parte que tiene los operadores de aniquilación

$$\hat{E}^{(+)}(r, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_k \sum_s \left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0} \right)^{1/2} [i\hat{a}_{ks}(t)\varepsilon_{ks}e^{ik\cdot r}], \quad (4.62)$$

$$\hat{B}^{(+)}(r, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_k \sum_s \left(\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0} \right)^{1/2} [i\hat{a}_{ks}(t)(k \times \varepsilon_{ks})e^{ik\cdot r}], \quad (4.63)$$

y la parte con los operadores de creación

$$\hat{E}^{(-)}(r, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_k \sum_s \left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0} \right)^{1/2} [i\hat{a}_{ks}^\dagger(t)\varepsilon_{ks}e^{-ik\cdot r}], \quad (4.64)$$

$$\hat{B}^{(-)}(r, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_k \sum_s \left(\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0} \right)^{1/2} [i\hat{a}_{ks}^\dagger(t)(k \times \varepsilon_{ks})e^{-ik\cdot r}], \quad (4.65)$$

que son conocidos respectivamente como las partes de frecuencia *positiva* y *negativa* de los operadores $\hat{E}(r, t)$ y $\hat{B}(r, t)$. Los nombres podrían parecer anti intuitivos, ya que el signo positivo esta asociado con las componentes de operadores de destrucción y el signo negativo con las componentes de los operadores de creación[25].

4.3. Estados de Fock

Juntos todos los operadores \hat{n}_{ks} forman un Conjunto Completo de Observables que Conmutan (CCOC) para el campo. Como los operadores correspondientes a los diferentes modos k, s operan sobre diferentes subespacios de Hilbert, podemos formar un vector de estado caracterizando el campo entero tomando el producto directo de $|n_{ks}\rangle$ vectores de estado sobre todos los modos, es decir,

$$\prod_{k,s} |n_{ks}\rangle,$$

tal estado es conocido como *estado de Fock* del campo de radiación y es caracterizado por un conjunto (infinito) de números $n_{k_1s_1}, n_{k_2s_2} \dots$ etc. para *todos los modos del campo*. Utilizando una notación mas corta $|\{n\}\rangle$ para todo el conjunto n_{ks} se tiene

$$|\{n\}\rangle = \prod_{k,s} |n_{ks}\rangle,$$

Entonces el estado de Fock $|\{n\}\rangle$ es un eigenestado del operador de numero para el modo k, s

$$\hat{n}_{ks}|\{n\}\rangle = n_{ks}|\{n\}\rangle. \quad (4.66)$$

Se define el operador total de número \hat{n} sumando \hat{n}_{ks} sobre todos los modos

$$\hat{n} = \sum_{k,s} \hat{n}_{ks}, \quad (4.67)$$

entonces

$$\hat{n}|\{n\}\rangle = \left(\sum_{k,s} \hat{n}_{ks} \right) |\{n\}\rangle = n|\{n\}\rangle, \quad (4.68)$$

entonces el estado de Fock $|\{n\}\rangle$ es también un eigenestado de \hat{n} , con un eigenvalor que es el número total de n sumado sobre todos los modos.

Se puede formar cualquier estado de Fock aplicando repetidamente los operadores \hat{a}_{ks}^\dagger al vacío $|vac\rangle = |0, 0, 0, \dots\rangle$

$$|\{m\}\rangle = \prod_{k,s} \left[\frac{(\hat{a}_{ks}^\dagger)^{m_{ks}}}{\sqrt{m_{ks}!}} \right] |vac\rangle. \quad (4.69)$$

Las excitaciones discretas o cuantos del campo electromagnético, correspondientes a los números de ocupación $\{n\}$, son usualmente llamados *fotones*. Entonces se ha definido a los fotones como excitaciones cuánticas de los modos normales del campo electromagnético, y se ha asociado con ondas planas con vector de onda k y polarización s [27]. Entonces un estado $|\dots, 0, 0, 1_{ks}, 0, 0, \dots\rangle$ describe un estado con un fotón de vector de onda k y polarización s .

Hasta aquí el concepto de modo ha sido particularmente importante ya que se han descrito los campos electromagnéticos como una suma de los modos normales de oscilación, se han asociado operadores a estos campos y se han asociado los operadores de creación y aniquilación a las amplitudes, además, estos operadores de creación \hat{a}_{ks}^\dagger y de aniquilación \hat{a}_{ks} se han asociado para que interactúen con los modos del campo y creen o destruyan fotones, los cuales al ser creados heredan las características de los modos del campo de radiación del cual provienen, relacionando de esta manera al fotón con los modos de oscilación del campo.

4.4. Experimentos con fotones individuales

Con el avance de la tecnología y el desarrollo de la teoría de óptica cuántica se permitieron realizar experimentos en donde se ven involucrados solo algunos fotones, lo que permitió encontrar propiedades y comportamientos de los mismos [32]. En los experimentos de óptica cuántica es necesario considerar los aparatos de medición, como el uso de fotodetectores para encontrar coincidencias en la detección de varios fotones y el desarrollo de las expresiones matemáticas para estos, en los experimentos a continuación descritos se utilizaron 2 fotodetectores, por lo que es importante mencionar algunas expresiones matemáticas relacionadas con la detección simultánea en 2 fotodetectores. Cabe recalcar que en los experimentos relacionados con la cuántica, a diferencia de la teoría clásica, se habla de probabilidades.

Entonces es necesario encontrar la probabilidad de detectar coincidencias en 2 fotodetectores en x_1 y en x_2 . Se consideran 2 fuentes A y B que emiten fotones de 1 solo modo, la probabilidad para un estado de Fock $|1_A, 1_B\rangle$ es

$$P_{12}(x_1, x_2)\delta x_1\delta x_2 = K_1K_2\langle\hat{E}^{(-)}(x_1)\hat{E}^{(-)}(x_2)\hat{E}^{(+)}(x_2)\hat{E}^{(+)}(x_1)\rangle\delta x_1\delta x_2, \quad (4.70)$$

donde K_1, K_2 son constantes de cada detector y $\hat{E}^{(+)}$ es de la forma descrita en la ecuación (3.62). Sustituyendo se obtiene

$$P_{12}(x_1, x_2)\delta x_1\delta x_2 = 2K_1K_2\delta x_1\delta x_2\left\{1 + \cos\left(\frac{2\pi(x_1 - x_2)}{L}\right)\right\}. \quad (4.71)$$

Debido al término del coseno la probabilidad exhibe interferencia. Cuando $|x_1 - x_2| = (n + \frac{1}{2})L$ con $n = 0, 1, 2, \dots$ $P_{12}(x_1, x_2) = 0$ presentándose interferencia destructiva, y cuando $|x_1 - x_2| = nL$ entonces $P_{12}(x_1, x_2) = 4K_1K_2$ presentándose interferencia constructiva.

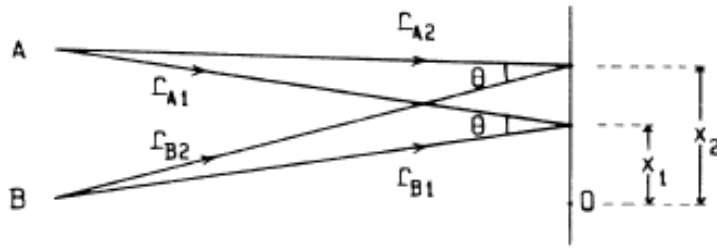


Figura 4.1: Geometría del experimento de interferencia[33]

En particular L. Mandel *et al.*[29] realizaron un experimento para medir el intervalo de tiempo en la detección entre 2 fotones, y por la implicación longitud de un paquete de onda de fotón, producidos en un fenómeno óptico no lineal llamado *generación paramétrica espontánea de diferencia de frecuencias* que consiste en la creación de dos fotones (*signal e idler*) de menor energía a partir de un fotón (bombeo), como resultado de la interacción no lineal de un haz intenso de luz láser con un cristal con susceptibilidad a segundo orden. La técnica está basada en la interferencia de 2 amplitudes de probabilidad de 2 fotones en la detección de estos fotones.

CAPÍTULO 4. EL MODO EN LA ÓPTICA CUÁNTICA
4.4. EXPERIMENTOS CON FOTONES INDIVIDUALES

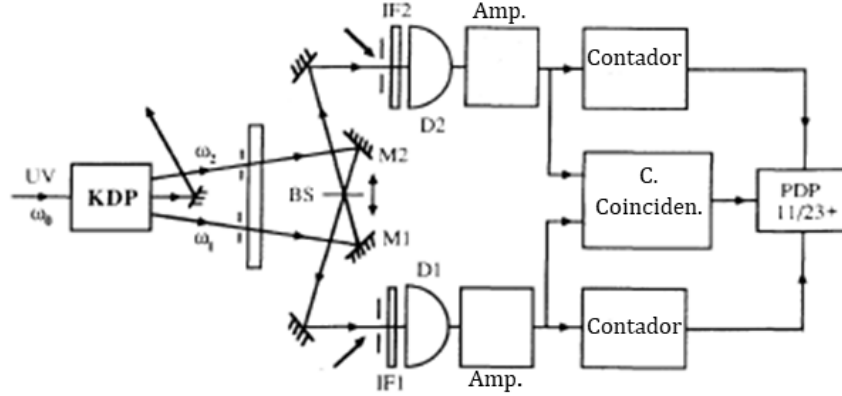


Figura 4.2: Arreglo del experimento de Mandel[29]

El experimento consiste en que un haz coherente de frecuencia ω_0 de Argón cae en un cristal KDP de 8 cm de largo, donde algunos de los fotones incidentes se separan en 2 de mas baja frecuencia, que son dirigidos a un divisor de haz por los espejos $M2$ y $M1$, estos interfieren y son detectados por los fotodetectores $D1$ y $D2$. La interferencia ocurre en el divisor de haz para el cual se tienen 4 configuraciones posibles cada una con una amplitud de probabilidad.

Si se toma el estado a la salida del resultado de la generación paramétrica de diferencia de frecuencias, es decir, el estado de Fock para 2 fotones que entran al divisor de haz $\langle 1_{01}, 1_{02} \rangle$ se puede ver que el estado de salida es

$$|\psi_{salida}\rangle = (R - T)|1_1, 1_2\rangle + i(2RT)^{1/2}|2_1, 0_2\rangle + i(2RT)^{1/2}|0_1, 2_2\rangle \quad (4.72)$$

donde R y T son la reflectancia y transmitancia del divisor de haz con $R + T = 1$.

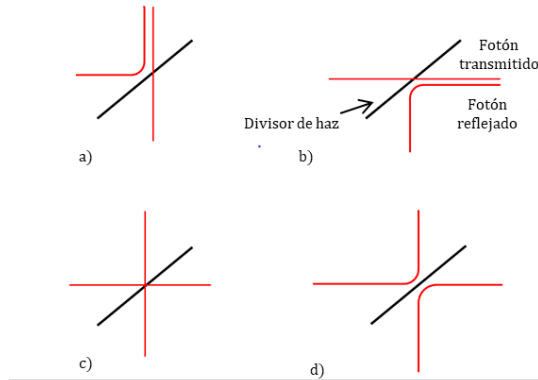


Figura 4.3: Configuraciones posibles de los fotones en el divisor de haz. **a) y b)** Uno transmitido y uno reflejado. **c)** Los 2 transmitidos. **d)** Los 2 reflejados

Si se considera un divisor de haz 50% : 50%, es decir, $R = \frac{1}{2} = T$, el primer termino es 0 por la

CAPÍTULO 4. EL MODO EN LA ÓPTICA CUÁNTICA
4.4. EXPERIMENTOS CON FOTONES INDIVIDUALES

interferencia destructiva de las correspondientes amplitudes de probabilidad de los 2 fotones.

$$|\psi_{salida}\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(|2_1, 0_2\rangle + |0_1, 2_2\rangle) \quad (4.73)$$

Es decir, que para las condiciones anteriores, nunca será posible detectar 1 fotón del mismo modo en cada detector al mismo tiempo, sino que el resultado es que los 2 fotones al encontrarse en el divisor de haz se “juntán” siguiendo la misma la salida del divisor de haz.

En la practica, estos fotones no son monocromáticos, de modo que en el experimento se representa el estado de estos 2 fotones como una superposición lineal

$$|\Psi\rangle = \int d\omega \phi(\omega_1, \omega_0 - \omega_1) |\omega_1, \omega_0 - \omega_1\rangle \quad (4.74)$$

donde $\phi(\omega_1, \omega_2)$ es una función de peso con su pico en $\omega_1 = \frac{1}{2}\omega_0 = \omega_2$

Las mediciones de coincidencias corresponden a la integración sobre todo un tiempo τ de la probabilidad $P_{12}(\tau)$ [29] es

$$P_{12}(\tau) = K|G(0)|^2\{T^2|g(\tau)|^2 + R^2|g(2\delta\tau - \tau)|^2 - RT[g^*(\tau)g(2\delta\tau - \tau) + c.c]\} \quad (4.75)$$

donde $G(\tau)$ es la transformada de fourier de una función de peso $\phi(\frac{\omega_0}{2} + \omega, \frac{\omega_0}{2} - \omega)$ y $g(\tau) = \frac{G(\tau)}{G(0)}$.

Y el número esperado N_c de coincidencias para los fotones observados es[29]

$$N_c = C \left[R^2 + T^2 - 2RT \frac{\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)g(\tau - 2\delta\tau)d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} g^2(\tau)d\tau} \right] \quad (4.76)$$

donde C es una constante.

La gráfica del número de coincidencias N_c contra el desplazamiento $\delta\tau$ mostrará un valle agudo cerca de $\delta\tau = 0$.

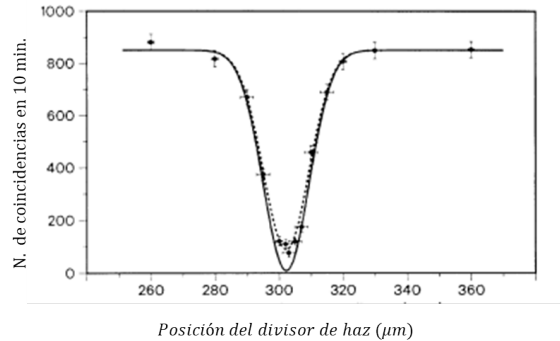


Figura 4.4: Número de coincidencias medidas como función del desplazamiento del divisor de haz $c\delta\tau$, superpuesta se muestra la curva teórica de la ecuación (4.7) con $R/T = 0,95$ y $\Delta\omega = 3 * 10^{13}rads^{-1}$. [29]

Entonces para este experimento se observa que para ciertas posiciones simétricas del divisor de

CAPÍTULO 4. EL MODO EN LA ÓPTICA CUÁNTICA
4.4. EXPERIMENTOS CON FOTONES INDIVIDUALES

haz, la razón de coincidencias de los 2 fotones cae a un porcentaje bajo con respecto a los valores en los extremos consecuencia de la interferencia de probabilidad de los 2 fotones.

Se podría pensar que este fenómeno se produce debido a que los 2 fotones fueron generados a partir de 1 en la generación paramétrica espontánea de diferencia de frecuencias y que de alguna manera están relacionados, pero en un experimento posterior Santori *et al.* [34] muestran que a partir de una fuente de fotones individuales el mismo fenómeno se presenta.

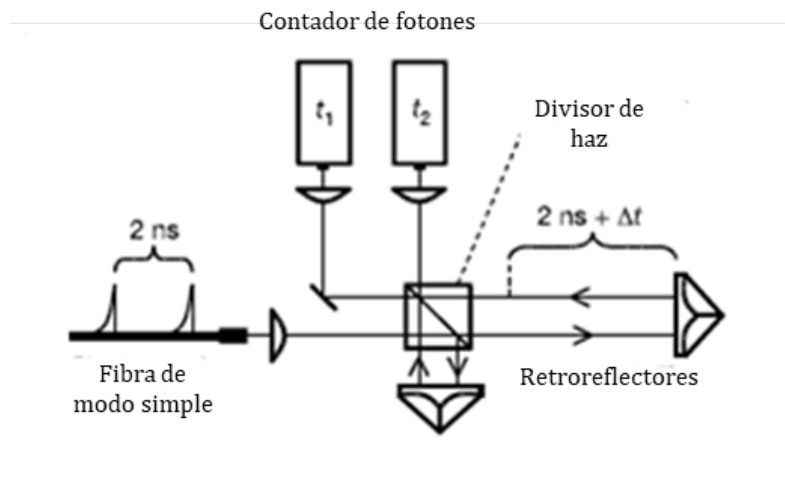


Figura 4.5: Arreglo del experimento de Santori[34].

La fuente del experimento usada son pilares de microcavidades que contienen puntos cuánticos de InAs, en estas cavidades se encontraron 1 o 2 puntos cuánticos en resonancia en un modo fundamental de la cavidad, la emisión de los puntos cuánticos fue recolectada y una polarización simple fue seleccionada, por lo que los fotones generados por esta fuente son casi indistinguibles, al compartir la misma polarización y casi la misma frecuencia.

En el experimento el punto cuántico es excitado cada 13 ns por un par de pulsos con igual intensidad con 2 ns de separación, entonces 2 pulsos emergen de una fibra óptica de modo simple, estos son separados en 2 en el divisor de haz con un brazo $(2ns + \Delta t)$ mas largo que el otro, después se recombinan en un punto diferente en el mismo divisor de haz. Las 2 salidas del interferómetro llevan a contadores de fotones y se genera un histograma de correlación de fotones de un retraso de tiempo relativo $\tau = t_2 - t_1$ para la coincidencia en la detección de los 2 fotones, donde t_1 y t_2 son los tiempos en los que los fotones son detectados en los detectores 1 y 2.

En el centro de la gráfica se observan 5 picos, que corresponden a 3 tipos de eventos de coincidencias. Para los picos 1 y 5 $\tau = \pm 4ns$, el primer fotón sigue el brazo corto del interferómetro y el segundo el brazo largo y 1 fotón es detectado en cada contador. Para los picos 2 y 4 $\tau = \pm 2ns$ ambos fotones siguen el mismo brazo del interferómetro. Para el pico 3 $\tau = 0$, el primer fotón sigue el brazo largo y el segundo fotón el corto y se encuentran nuevamente en el divisor de haz, solo para este caso la interferencia de los 2 fotones ocurre, y para una interferencia “perfecta” de 2 fotones el pico 3 desaparece.

De esto ultimo se concluye que el comportamiento de los fotones de juntarse cuando se encuentran en la salida del divisor de haz también se presenta con fotones individuales no influyendo

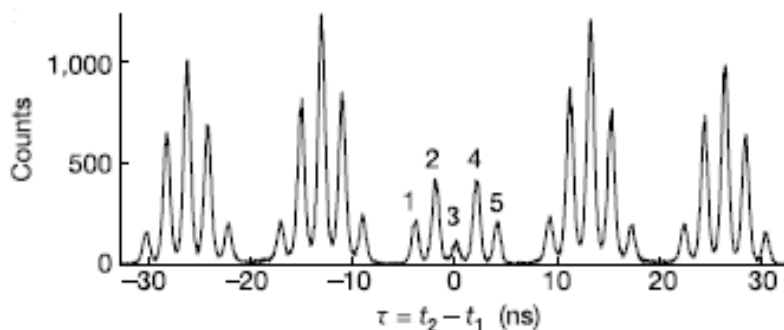


Figura 4.6: *Histograma que muestra las coincidencias de 2 fotones en el experimento de Santori*[34].

si estos son creados a partir de un fotón como lo son en la generación paramétrica de diferencia de frecuencias, pero si con la condición de que los fotones estén en el mismo modo.

4.4.1. El modo para un fotón

Cabe recalcar que los fotones pueden estar en el mismo estado dado que el fotón es un bosón [36, 37] y no esta sujeto a ningún principio de exclusión como lo están los fermiones[24], es decir, debido a que el fotón es un bosón puede estar en el mismo modo que otro fotón en el experimento, pero eso solo nos dice que puede estar en el mismo modo, pero no que significa el modo para el.

En estos experimentos se han tratado con las configuraciones mas simples de las interacciones electromagnéticas, fotones individuales en modos simples[35], y resultado de esta interacción se produce una interferencia en sus amplitudes de probabilidad de lo cual se puede concluir que dichos fotones estaban en el mismo modo, y si no interferían, no lo estaban.

Se han descrito a los fotones como excitaciones discretas de un conjunto de modos del campo electromagnético el cual al cuantizarse se le asociaron osciladores armónicos simples a los modos de oscilación del campo, y el fotón hereda del campo electromagnético su modo, del cual en el campo el modo define una polarización y una frecuencia, pero esto carece de sentido viendo al fotón como una partícula.

La dificultad que se ha presentado al tratar de conceptualizar al fotón en si [38, 39], hace que se presente una dificultad al tratar de definir el concepto de modo para un fotón, ya que hasta el momento solo se menciona como el uso de este concepto ayuda en la idealización del campo electromagnético, y su uso en la cuantización del mismo. En el experimento anterior el concepto de modo ayuda a describir la interferencia de 2 fotones, pero no su significado en si.

Capítulo 5

Conclusiones

Se concluye que el concepto de modo es esencial en el estudio de la óptica, en la óptica física partiendo del interferómetro de Fabry Perot el modo describe la polarización y frecuencia de las ondas electromagnéticas, ayudando a desarrollos tecnológicos como el láser donde la comprensión de los modos en las cavidades permitieron la invención de este, y donde el concepto parece estar bien conceptualizado.

En la óptica cuántica el concepto permitió las formulaciones de la cuantización del campo de radiación electromagnética y poder expresar estados del sistema (estados de Fock). También está involucrado en las configuraciones más simples de la radiación electromagnética como se vio en el experimento de Santori *et al.* donde se encuentra que los fotones provenientes de una fuente de fotones indistinguibles interfieren a consecuencia de que tienen el mismo modo mostrando que el modo es un concepto fundamental en la óptica y determinante en el comportamiento de los fotones al producirse fenómenos como la interferencia, brindando mayor comprensión de estos fenómenos.

La dificultad que durante años se ha presentado acerca en la comprensión de fenómenos cuánticos y el concepto del fotón en si, hace que se dificulte el tratar de definir el concepto de modo para un fotón, ya que se menciona que el fotón hereda el modo de oscilación excitado del campo electromagnético del cual proviene, hablando más bien del modo del campo, pero no describiéndonos que es el modo para el fotón. Los experimentos analizados indican más bien que ocurre como resultado de la interacción de los modos, si los fotones estaban en el mismo modo interferían, pero no nos dice su significado en si para el fotón. Y la idea que se dio de los modos aplicada a las ondas, carece de sentido viendo al fotón como partícula.

Así que hasta ahora parece ser que la pregunta ¿Cuál es el significado del modo para un fotón? permanece sin respuesta, y más bien la pregunta a plantear es ¿Qué hacen los modos en los fotones?, puesto que los experimentos y la conceptualización de los modos nos describen más bien el resultado de la interacción de estos modos heredados al fotón y los resultados obtenidos en la teoría y la práctica nos siguen llevando a nuevos conocimientos como resultado de la interacción de los modos más que del significado de estos.

Bibliografía

- [1] French A.P. , *Vibrations and Waves*, W.W.Norton & Company (1971)
- [2] Feynman R. P., Legihon R. B. & Sands M. *The Feynman Lectures on Physics, Mainly mechanics, Radiations and Heat, Volume 1* Addison Weasley (1963).
- [3] Mulligan J. F., *Who were Fabry and Pérot*, American Journal of Physics 66, 797 (1998)
- [4] Fabry C. and Perot A., *Théorie et applications d'une nouvelle méthode de spectroscopie interférentielle*, Ann. Chim. Phys. 16 (1899), 115.
- [5] Malacara D. *Óptica Básica* Fondo de Cultura Economica, 3ra edición, 2015
- [6] Wolf E. *Introduction to the Theory of Coherence and Polarization of Light* Cambridge University Press, 2007.
- [7] Planck, M. , *On the improvement of Wein's equation for the espectrum* Verh. Dtsch. Phys. Ges. Berlin 2,202 – 4, (1900)
- [8] Planck, M., *On the theory of the energy distribution law of the normal spectrum*, ibid 2, 237 – 45(1900).
- [9] Einstein, A., *On a heuristic point of view about the creation and conversion of light*, An. Physik 17,132-48(1905).
- [10] De Broglie L.V.P.R. *Tesis doctoral:Recherches sur la théorie des quanta*, Paris, (1924).
- [11] Lewis G.N. *The conservation of photons*, Nature 118: 874-875.(1926).
- [12] Dirac, P.A.M., *The quantum theory of the emission and absorption of radiation*, Proc. R.Soc. Lond. A 114,243-65 (1927).
- [13] Maiman, T.H., *Stimulated optical radiation in ruby*, Nature 187,493-4 (1960),
- [14] Glauber, R.J., *The quantum theory of optical coherence*, Phys. Rev. 130, 2529-39(1963)
- [15] Glauber, R.J., *Coherent and incoherent states of the radiation field*, Phys. Rev. 131, 2766-88(1963).
- [16] Hetch E. *Optica*. Addison Wesley, 2000.
- [17] Goodman J. W. *Introduction to Fourier Optics*. Mc Graw-Hill, 1996.
- [18] Klein M.V. & Furtak T. E. *Optics*. John Wiley & Sons, 1986.
- [19] G. Kirchhoff, Berl Ber. (1882), 641; Ann d. physik.(2), 18 (1883), 663; Ges Abh. Nachir, 22
- [20] Silfvast W. *Laser fundamentals*. Cambridge University Press, 371 – 84.(2004)

- [21] Saleh B.E.A. & Teich. M.C., *Fundamentals of Photonics* John Wiley and Sons, 1991.
- [22] Torres G.F., *An Introduction to Hamiltonian Mechanics*. Birkhäuser, 2018.
- [23] Sakurai J.J. & Napolitano J., *Modern Quantum Mechanics*. Adisson Wesley, 2010.
- [24] Cohen-Tannoudji, C., DIu B., Laloe F. *Quantum mechanics*. Francia: John Wiley & Son, 481-502. (1977).
- [25] Loudon R., *The quantum theory of light.*, Oxford University Press., 2000.
- [26] Scully M. O., & Zubairy M. S., *Quantum Optics.*, Cambridge University Press. 1997.
- [27] Mandel L. & Wolf E., *Optical Coherence and Quantum Optics* Cambridge University Press. 1995.
- [28] Meystre P., Sargent M. *Elements of Quantum Optics*. Springer. 2007
- [29] Hong, C. K., Ou, Z. Y. & Mandel, L., *Measurement of Subpicosecond Time Intervals between Two Photons by Interference* Phys. Rev. Lett. 59, 2044–2047 (1987).
- [30] Ghosh R., Hong, C. K., Ou, Z. Y. & Mandel, L., *Interference of two photons in parametric down conversion* Phys. Rev. Lett. A. 39, 3962 (1986).
- [31] Boyd R. W., *Nonlinear Optics* Academic Press (2008).
- [32] Brown R. H. & Twiss R. Q., *Correlation between photons in two coherent beams of light*. Nature 177 (4479), 27-29 (1956).
- [33] Ghosh R. & Mandel, L., *Observation of Nonclassical Effects in the Interference of Two Photons* Rev. Lett. 59, 1903 (1987).
- [34] Santori C., Fattal D., Vuc kovic' J., Solomon G. S. & Yamamoto Y., *Indistinguishable photons from a single-photon device*. Nature 419, 594–597 (2002).
- [35] Grangier, P., *Single photons stick together*. Nature 419, 577 (2002).
- [36] Gerry C & Knight P, *Introductory Quantum Optics*. Cambridge University Press. (2005).
- [37] Gilbert G., Aspect A., Fabre C. *Introduction to Quantum Optics From the Semi-classical Approach to Quantized Light*. Cambridge University Press. (2010).
- [38] Finkelstein D., *What is a photon?* OPN Optics & Photonics News, Vol. 14. No. 10, 12-17 , October (2003)
- [39] Loudon R., *What is a photon?* OPN Optics & Photonics News, Vol. 14. No. 10, 6-11. October (2003)