



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE
PUEBLA

FACULTAD DE ECONOMÍA
LICENCIATURA EN FINANZAS

VALUACIÓN DE OPCIONES CON LA CURVA
CICLOIDE

SEPTIEMBRE 2021

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN FINANZAS

PRESENTA:
MAURICIO MÉNDEZ CAMPOS

DIRECTOR DE TESIS: M. F. GUILLERMO CAMPOS
RANGEL

ASESOR DE TESIS: M. F. GUILLERMO CAMPOS
RANGEL

Dedicatoria:

A mi familia y a mi Angie, con mucho amor y cariño.

Contenido

Introducción.....	1
I. Características de las opciones.....	2
1.1 Rasgos básicos.....	2
1.2 Mercado Mexicano de Derivados.....	7
1.3 Marco legal mexicano.....	11
II. Breve historia de las opciones.....	14
2.1 La Burbuja del Misisipi.....	21
2.2 La quiebra del banco Barings.....	24
III. Valuación de una prima de opción.....	27
3.1 Efectos de los parámetros de la prima en su valor.....	27
3.2 Estrategias básicas.....	32
3.3 La paridad put-call.....	36
3.4 Pioneros.....	39
3.5 Bachelier y Bronzin.....	41
3.6 Sprenkle, Boness y Samuelson.....	48
3.7 Procesos estocásticos.....	52
3.8 Black-Scholes-Merton.....	60
3.8.1 La ecuación diferencial parcial.....	61
3.8.2 La solución.....	67
3.8.3 Las literales griegas.....	75
3.9 Cox, Ross y Rubinstein.....	82
3.10 Heston.....	88
3.11 Otros modelos.....	92
IV. Metodología.....	97
4.1 La cicloide.....	98
4.2 Acciones.....	103
4.2.1 Volatilidad de las acciones.....	104
4.3 Metodología.....	106
4.4 Comparación.....	108
Conclusiones.....	123
Referencias.....	124
ANEXO I: Modelos en Microsoft Office Excel.....	132
ANEXO II: Black-Scholes-Merton y metodología presentada en Python.....	148
Índice de Figuras, Tablas y Gráficas.....	157

Introducción

En la presente tesis se abordan los instrumentos derivados conocidos como ‘opciones’. Con base en la bibliografía revisada, se construye una sencilla metodología para valuar estos instrumentos. Los resultados de la investigación se dividen en cuatro capítulos. En el primero se tratan las características cualitativas de estos instrumentos, el mercado formal y su marco legal en México.

En el segundo, se expone el trayecto histórico de las opciones, acompañadas de sus pares los futuros. En el tercero, se presenta la cuestión de su valuación: parámetros, estrategias, la paridad put-call y los principales modelos de valuación existentes, sobre todo el Black-Scholes-Merton, el Cox-Ross-Rubinstein y el de Heston.

Finalmente, en el cuarto se expone a la curva cicloide, a los activos subyacentes escogidos en esta tesis, las acciones, y la propia metodología concebida. Esta valuación es comparada con los modelos Black-Scholes-Merton y Cox-Ross-Rubinstein. El uso de la cicloide es para sustituir a la curva parabólica (o raíz cuadrada) como representante del paso del tiempo.

También se incluyen dos anexos. En el primero, algunos de los modelos mostrados construidos en Microsoft Office Excel y en el segundo, el Black-Scholes-Merton y la metodología presentada en lenguaje de programación Python. Esto con la finalidad de que cualquiera pueda replicar los resultados presentados.

I. Características de las opciones

En este capítulo se aborda la parte cualitativa de las opciones desde tres ópticas: la académica, a través de la obra del canadiense John C. Hull: “Introducción a los mercados de futuros y opciones” (2009a); la práctica: los folletos y el Reglamento Interior del Mercado Mexicano de Derivados (MexDer, 2019) y la legal, con las leyes federales en la materia.

1.1 Rasgos básicos

Una opción (estándar o vainilla), es un título derivado que proporciona a su comprador (la posición larga o long) a cambio del pago de una prima, el derecho de comprar o vender un activo subyacente a un precio de ejercicio o strike convenido, pero no la obligación de hacerlo, en una determinada fecha o antes de esta. El emisor del título (la posición corta, short o suscriptora) tiene la obligación de vender o comprar el activo subyacente convenido si así lo decide el poseedor de la opción, su contraparte. La propia opción puede cambiar de valor en cualquier momento antes de vencimiento. El título deja de existir después de esta fecha (Hull, 2009a; Mercado Mexicano de Derivados, 2019; Mercado Mexicano de Derivados, 2013a; Mercado Mexicano de Derivados, 2013b).

La contraparte de ambas posiciones es la cámara de compensación, que en el caso mexicano se denomina “Asigna, Compensación y Liquidación” (Mercado Mexicano de Derivados, 2019, p. 8). Se describirán sus funciones en la siguiente sección.

¿Por qué tomar posiciones en opciones? Apostar por la volatilidad esperada del precio del activo subyacente o de la propia opción (volatilidad implícita), para obtener ingresos, adquirir un seguro contra movimientos bruscos en los precios, tomar posiciones cubiertas, abaratar una inversión aprovechando el apalancamiento, mejorar el rendimiento de activos ya comprados, comprar con descuento o vender por encima del precio de mercado (Mercado Mexicano de Derivados, 2013a, pp. 8-9; Mercado Mexicano de Derivados, 2013b, p. 20).

¿Qué activos subyacentes? En MexDer (Mercado Mexicano de Derivados, s.f.b), sobre Futuros del IPC, sobre el dólar de EEUU, una canasta de acciones nacionales y un TRACK. En otros mercados, formales e informales también puede ser cualquier activo financiero o incluso instrumentos derivados. En la Tabla 1.1 Se enlistan dichas acciones.

Tabla 1.1

Acciones	Clave	Acciones	Clave	Acciones	Clave
ALFA A	AL	GAP B	GP	OMA B	OM
ALSEA	AA	GMéxico	GM	ORBIA	OR
ASUR B	AS	GMXT	GX	PE&OLES	PE
América Móvil L	AX	GRUMA B	GR	PINFRA	PI
Cemex CPO	CX	KOF UBL	KO	Tlevisa CPO	TV
FEMSA UBD	FE	LALA B	LL	Walmex V	WA
Naftrac ISHRS	NA				

Fuente: Adaptación de la tabla contenida en Mercado Mexicano de Derivados, (s.f.b). Nota: Naftrac ISHRS es un Track, un instrumento que replica el comportamiento de otros títulos, pero MexDer lo agrupa aquí.

El tamaño de los contratos de opción en MexDer es de 100 títulos para acciones y el TRACK, \$10.00 pesos mexicanos por cada punto del IPC y \$10,000.00 USD el tamaño para la opción sobre el dólar (Mercado Mexicano de Derivados, 2013a).

En cuanto a primas, al menos en México, “Las primas de las Opciones sobre acciones se cotizan en pesos y centavos de peso por cada acción, aún cuando el tamaño del contrato sea de 100 acciones” (Mercado Mexicano de Derivados, 2013a, p. 5). Para MexDer, “LA PRIMA ES REALMENTE EL OBJETO DE NEGOCIACIÓN” (Mercado Mexicano de Derivados, 2013a, p. 5), pues la posición larga puede optar por vender la opción si es que esta sube de precio y la posición corta comprarla si el valor de esta disminuye por debajo del valor inicial de esta (Mercado Mexicano de Derivados, 2013b).

¿Qué factores influyen en la valuación (*pricing*) de la prima? El valor de la prima es una puja entre oferta y la demanda, pero para formar un primer precio teórico, se consideran: a) Precio del activo subyacente (S_t), b) Precio de ejercicio (K), c) Tasa de interés libre de riesgo (en MexDer la THIE al plazo que corresponda; r), d) Dividendos a pagar (D), e) Tiempo a vencimiento (t en cualquier momento antes de vencimiento, T en éste) y f) Volatilidad (σ) de los rendimientos del subyacente (Mercado Mexicano de Derivados, 2013a; Hull, 2009a). A través del Capítulo III se describirán otros parámetros propuestos por diversos autores.

En “Las treinta preguntas más frecuentes sobre opciones” de MexDer (2013a) hay una tabla con la distancia mínima entre precios de ejercicio para acciones que “siempre serán múltiplos del intervalo especificado” (Mercado Mexicano de Derivados, 2013a, p. 5):

Tabla 1.2

Precio inferior subyacente	Precio superior subyacente	Intervalo en Precio de ejercicio
0	5	0.20
5.5	10	0.50
11	20	1.00
22	50	2.00
55	200	5.00
210	en adelante	20.00

Fuente: tabla contenida en Mercado Mexicano de Derivados, (2013a, p. 5) con información de BMV.

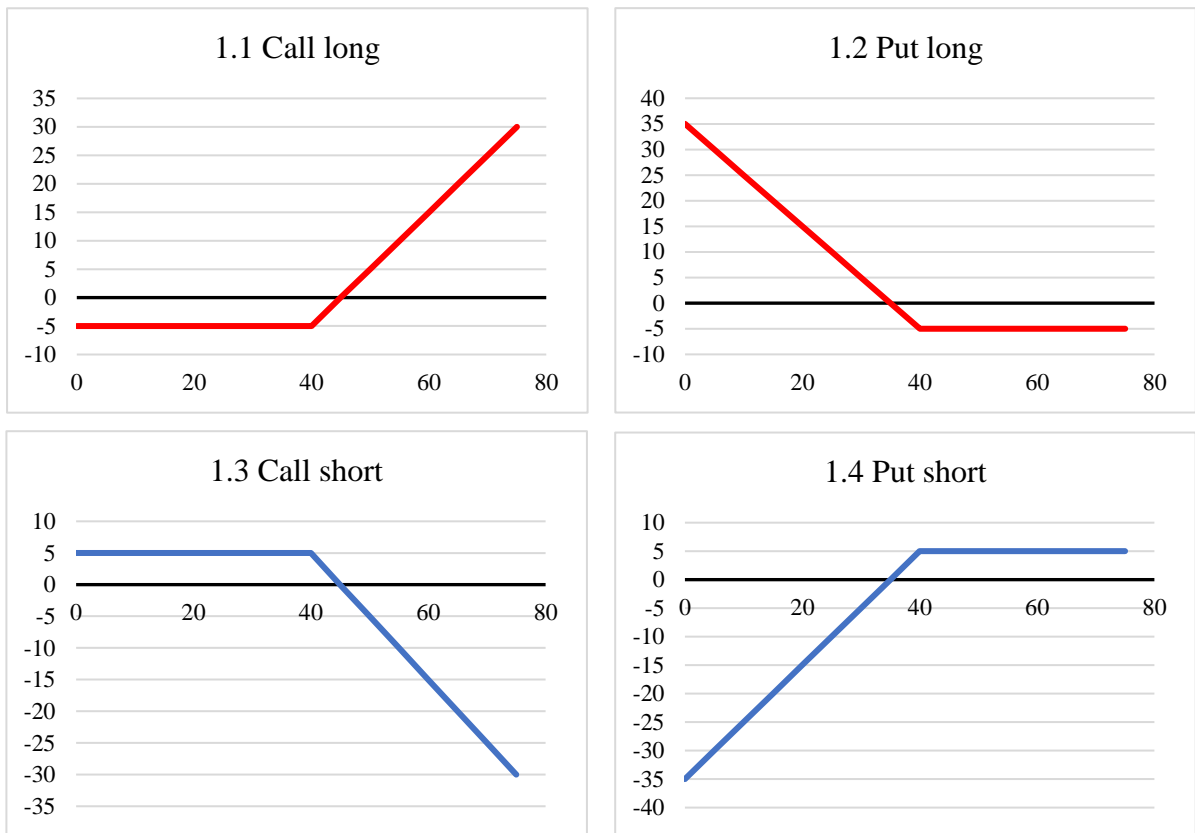
Tratándose de dividendos, las opciones no pagan dichos derechos a las posiciones largas, si se quiere el derecho a dicho pago, “el ejercicio de un Call tiene que solicitarse a más tardar cuatro días hábiles antes del pago del dividendo” (Mercado Mexicano de Derivados, 2013a, p. 4). Además, “el precio de la Opción también se verá influido por el anuncio y reparto de dividendos” (Mercado Mexicano de Derivados, 2013b, p. 9). En cuanto a splits (aumento o disminución de la cantidad de acciones en circulación), los contratos tienen el respectivo cambio proporcional (Mercado Mexicano de Derivados, 2013b)

Existen, a su vez, dos tipos de opciones (no confundir con estilos), de compra (call) y de venta (put), en ambas se puede adoptar las dos posiciones (comprador, larga o *long*; suscriptor, *writer*, vendedor, corta o *short*): call long, call short, put long y put short (Hull, 2009a). Los beneficios de las cuatro posiciones mencionadas en el momento T (es decir, al final) son, respectivamente (Hull, 2009a, p. 189):

$$\begin{aligned} \text{máx}(S_T - K, 0); & & - \text{máx}(S_T - K, 0) = \text{mín}(K - S_T, 0) \\ \text{máx}(K - S_T, 0); & & - \text{máx}(K - S_T, 0) = \text{mín}(S_T - K, 0) \end{aligned}$$

Las diferencias $S_t - K$ y $K - S_t$ representan el valor intrínseco de call y put, el resto de factores aportan valor extrínseco. Para ejemplificar, se presentan cuatro gráficas que representan estas posiciones. Con $K = \$40$, costo de las primas: \$5 (establecido de forma arbitraria). El eje de las ordenadas representa la utilidad y las abscisas, cambios en S_t :

Gráficos 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4



Fuente: elaboración propia con información de Hull (2009a, pp. 186-189).

Quien se posiciona call long, tiene inicialmente una salida de efectivo (el pago por la prima), que es una pérdida neta de \$5 hasta que el precio supera el strike de \$40 (si no lo hace, se mantiene como única pérdida); conforme el precio supera ese nivel, su ganancia aumenta: tiene el derecho de comprar *más barato* que el mercado. Teóricamente, la ganancia de esta posición cuando se trata de acciones no tiene límites, pues no los hay para la cotización que puedan alcanzar estos instrumentos de capital (Hull, 2009a). Las ganancias de esta posición son proporcionales a las pérdidas de su contraparte.

Quien se posiciona call short, recibe inicialmente el pago de la prima, los \$5, su ganancia, que mantiene si la volatilidad del precio del activo no aumenta o este precio disminuye por debajo del strike, y pierde conforme ambas crecen: tiene que vender *por debajo* del mercado. Esta posición es peligrosa si no se cuenta con los activos subyacentes, las pérdidas pueden ser muy grandes (Hull, 2009a).

Análogamente, la posición put long tiene una salida inicial de efectivo, la prima, \$5, conforme el precio cae, por debajo de \$40 su ganancia crece. En este caso, si la acción llega a valer \$0, la utilidad máxima será de \$35 (\$40 – \$5). Si el precio aumenta más de \$40, convenientemente no se ejercerá el derecho, pues se vendería *más barato* que el mercado. La contraparte, la posición put short, recibe al inicio el pago de la prima \$5 y pierde a medida que el precio disminuye, pues comprará por encima del precio de mercado, la pérdida máxima es la misma que la utilidad máxima de put long (Hull, 2009a).

A diferencia de las posiciones call, las ganancias y pérdidas de put están acotadas. Estas posiciones son entonces una apuesta, bajista o neutral (en el precio del subyacente) para call short y put long y alcista para call long y put short (Stoll, 1969). Aunado a esto, dependiendo de los precios spot y de ejercicio, las opciones se pueden considerar *in the money* (call long: $S > K$; put long: $K > S$), *at the money* (call y put long: $K = S$) y *out the money* (call long: $K > S$; put long: $S > K$) y viceversa para la short (Hull, 2009a, p. 193).

En MexDer, las opciones sobre acciones son de estilo americano (Mercado Mexicano de Derivados, 2013b). Pero hay más: opciones sobre acciones para directivos de una empresa (estimulo productivo) que se pueden ejecutar después de varios años (warrants); bonos convertibles a acciones de la empresa emisora que incluyen opciones call sobre esas mismas acciones, y las ‘options pools’, que son una prestación corporativa que proporciona el derecho a comprar acciones de la empresa si se vuelve pública en el futuro (Hull, 2009a).

Además de una amplia gama de estilos de opciones exóticas: “Chooser”, en las que la posición larga decide si serán call o put (Chen, 2019, párr. 12). “Compound”, opciones sobre opciones (Chen, 2019, párr. 13). “Barrier”, que se ejecutan o expiran si el activo subyacente alcanza cierto precio (Chen, 2019, párr. 15). “Binary”, pagan un monto acordado de acuerdo a la dirección del precio del subyacente: si sube o baja (Chen, 2019, párr. 18). “Bermuda” las cuales se pueden ejecutar varias veces antes de la fecha ejercicio (Chen, 2019, párr. 21) “Quantity-adjusting”, sobre subyacentes extranjeros, pero con tipo de cambio fijo (Chen, 2019, párr. 22). “Look-back” en las que se fija el precio de ejercicio hasta el final, el cual es el mejor que haya alcanzado el subyacente durante la vida de la opción (Chen, 2019, párr. 26).

“Asian” en la que se usa el precio promedio del subyacente durante la vida de la opción, se compara con el precio de ejercicio y se juzga la conveniencia de ejercer a este

último (Chen, 2019, párr. 28). “Basket”, la cual basa su valor en la volatilidad de dos o más activos subyacentes (Chen, 2019, párr. 29). “Extendible”, permite extender la maduración de la opción (Chen, 2019, párr. 31). “Spread”, la cual usa la distancia o spread entre dos activos subyacentes diferentes como su propio subyacente (Chen, 2019, párr. 32).

“Shout” se puede fijar un precio del subyacente que se considere conveniente durante la vida de la opción, si el precio mejora en la madurez de la opción, la posición corta usa este último precio, si empeora, se respeta el precio fijado previamente (Chen, 2019, párr. 33). “Range”, el pago en la madurez de este tipo de títulos depende de la distancia entre el precio máximo y mínimo que alcance el activo subyacente durante la vida de la opción (Chen, 2019, párr. 34).

Además, la teoría de valuación de estos instrumentos derivados también se puede aplicar a la toma de decisiones corporativas. A esta versión se le conoce como “opciones reales” (Venegas Martínez, 2008). Existen también las “notas estructuradas”, contratos no estandarizados, es decir a la medida entre los negociantes. Por lo general combinan un bono y una opción con diferentes límites (cap, floor y collar) (Venegas Martínez, 2008). Finalmente, la versión más extravagante que fue encontrada en el transcurso de la investigación, son las “opciones potencia”, donde la posición long tiene el derecho al valor intrínseco ($S - K$), pero con S_T elevada a una potencia (Venegas Martínez, 2008).

1.2 Mercado Mexicano de Derivados

En esta sección se exponen aspectos relevantes de las opciones conforme su operación en MexDer a través del Reglamento Interior de Mexder (Mercado Mexicano de Derivados, 2019) y algunos folletos de esta misma institución. Mexder, es parte de Grupo Bolsa Mexicana de Valores, y se considera “como mercado reconocido por la ley en cuanto a operaciones con instrumentos derivados (Código Fiscal de la Federación, 2019, p. 12). En el portal Padrón de Entidades Supervisadas de la Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV) se puede encontrar su registro como “Bolsa de Contratos de Valores (CNBV, 2021).

Operación

Acerca de las fechas de ejercicio, los días hábiles son de lunes a viernes excepto los de asueto que señale la Comisión Nacional Bancaria y de Valores. Los vencimientos son trimestrales: marzo, junio, septiembre y diciembre, “hasta por un año” (Mercado Mexicano de Derivados, 2013a, p. 12). Para las opciones sobre acciones, el TRACK y el futuro sobre el IPC, la fecha de vencimiento (ejercicio) y también último día de negociación “es el tercer viernes del mes de vencimiento y si fuera inhábil sería el día hábil inmediato anterior” (Mercado Mexicano de Derivados, 2013a, p. 12). Sobre el vencimiento de las opciones sobre el dólar, “es el lunes de la semana que corresponde al tercer miércoles del mes de vencimiento y si fuera inhábil sería el día hábil inmediato anterior” (Mercado Mexicano de Derivados, 2013a, p. 12).

De hecho, esta es una “costumbre internacional” (Bolsa Mexicana de Valores, 2019, párr. 2). Precisamente por esta serie de vencimientos, el volumen de negociación de los subyacentes aumenta tanto, que se experimentan episodios de alta volatilidad, a este fenómeno se le conoce como “Quadruple Witching Day”, por la maduración de futuros y opciones sobre el IPC y acciones (Bolsa Mexicana de Valores, 2019, párr. 2).

Como las opciones sobre acciones se pueden ejercer antes de vencimiento, se debe notificar a Asigna de la operación si es que se desea ejercer antes de esa fecha. La asignación de esta cámara es “en forma aleatoria entre las posiciones vendedoras” (Mercado Mexicano de Derivados, 2013a, p. 15). La operación se notifica a Bolsa Mexicana de Valores un día después y un día más para la entrega de los subyacentes (48 h) (Mercado Mexicano de Derivados, 2013a). Las opciones europeas y las americanas que no han sido ejercidas a vencimiento Asigna las ejerce automáticamente si presentan ganancias, a menos que la posición larga exprese lo contrario (Mercado Mexicano de Derivados, 2013a).

Sobre las agrupaciones de opciones en MexDer, las Clases son “todos los Contratos de Derivados de un mismo tipo que tienen como objeto o referencia un mismo Activo Subyacente” (Mercado Mexicano de Derivados, 2019, p. 8). Las Clases, a su vez se agrupan en Series: “Tratándose de Contratos de Opción, son los Contratos pertenecientes a una misma Clase con igual Precio de Ejercicio, Estilo, Fecha de Vencimiento y procedimiento de liquidación” (Mercado Mexicano de Derivados, 2019, p. 18).

En operación, MexDer diferencia tres momentos, las Ordenes, “Son las instrucciones de compra o de venta de una Clase y/o Serie, según corresponda dependiendo del tipo de

Contrato de Derivado, giradas por parte de un Cliente” (Mercado Mexicano de Derivados, 2019, p. 15). Las Posturas son la “oferta para comprar o vender un número de Contratos de una Clase y/o Serie, según corresponda dependiendo del tipo de Contrato de Derivado, a un precio determinado (...)” (Mercado Mexicano de Derivados, 2019, p. 16).

Las Pujas, a su vez son “La variación mínima permitida en el movimiento del precio de una Clase y/o Serie, según corresponda dependiendo del tipo de Contrato de Derivado” (Mercado Mexicano de Derivados, 2019, p. 17). Finalmente, las Posiciones Abiertas, son el “número de contratos abiertos y no liquidados (“sin cerrar”) de un mismo producto” (Mercado Mexicano de Derivados, 2013a, p. 14).

El horario para la operación de opciones en MexDer es de 7:30 h hasta 15:00 h excepto las opciones sobre dólares: de 7:30 h hasta 14:00 h (Mercado Mexicano de Derivados, 2013b, p. 22).

ASIGNA

En MexDer, la cámara de compensación de transacciones (“clearing corporation”) es un fideicomiso conocido como “Asigna, Compensación y Liquidación”. El cual, como su nombre lo indica, compensa y liquida contratos derivados celebrados en MexDer, funge de contraparte de las operaciones llevadas a cabo en MexDer y presta atesoramiento y registro de información de operaciones y contratos derivados (Mercado Mexicano de Derivados, 2019, p. 8). “Asigna se convierte en el comprador para el que vende, y en el vendedor para el que compra. Esto sucede en todas y cada una de las operaciones efectuadas en MexDer” (Mercado Mexicano de Derivados, 2013a, p. 10).

Asigna “exige Aportaciones Iniciales Mínimas (AIM’s) al vendedor de Opciones Call y/o Put sobre cualquier activo subyacente, mientras las mantenga vendidas; o al comprador si ejerce su derecho sobre las Opciones en acciones que el vendedor le haya vendido (...)” (Mercado Mexicano de Derivados, 2013a, p. 12).

El otro sistema importante en MexDer es el Sistema Electrónico de Negociación. Proporcionado para la celebración de contratos entre participantes del mercado (Mercado Mexicano de Derivados, 2019).

Cuentas

Existen dos cuentas relevantes, la Cuenta Global, que “Es la cuenta administrada por un Operador o por un Socio Liquidador en donde se registran las operaciones con Contratos de Derivados de uno o varios Clientes (...)” (Mercado Mexicano de Derivados, 2019, p. 11). Y la Cuenta Derivados, “(...) número de cuenta individual que asigna la Bolsa (...), a solicitud del Socio Liquidador, a cada Cliente, Operador, Participante de un Mercado Extranjero Reconocido (...) para identificar sus Operaciones (...) o bien, una Cuenta Derivados administrativa para agrupar órdenes (...)” (Mercado Mexicano de Derivados, 2019, p. 11).

Sujetos

Existen 3 grupos importantes en la operación de MexDer, los Operadores, los Participantes de Mercado Extranjero Reconocido y los Socios Liquidadores. Los tres grupos tienen acceso al Sistema Electrónico de Negociación, pueden administrar Cuentas Globales, convertirse en Proveedores de liquidez conforme a la Bolsa lo requiera y emitir Posturas sobre Clases o Series (Mercado Mexicano de Derivados, 2019).

Los Operadores son personas morales socios o no de la Bolsa, cuya función sea actuar como comisionista de Socios Liquidadores, celebran Contratos de Derivados, y transmiten Órdenes para la celebración de Contratos de Derivados listados en bolsas de derivados internacionales (Mercado Mexicano de Derivados, 2019). A su vez, el Operador puede convertirse en Formador de Mercado, “que deberá mantener en forma permanente y por cuenta propia, cotizaciones de compra y venta de Contratos de Derivados” (Mercado Mexicano de Derivados, 2019, p. 13). El Operador puede contratar a una persona física para que lleve a cabo sus funciones en el Sistema Electrónico de Negociación, el “Operador de Mesa” (Mercado Mexicano de Derivados, 2019, p. 15).

La CNBV considera a estos sujetos como Entidades reguladas. Tienen el registro de 32 instituciones como operadores: Actinver, Credit Suisse, Inbursa, Invex (Banco y Casa de Bolsa), JP Morgan, Banorte, Monex (Banco y Casa de Bolsa), Mulvita, Santander, Ve por Más (Banco y Casa de Bolsa), Bank of America, BBVA Bancomer, Finamex, CI Casa de Bolsa, Citi, GAMAA, GBM, Goldman Sachs, GFD, Interactive Broker UK, Intercam, Quali, Morgan Stanley, NAFIN, Scotiabank Inverlat, Tullet, Vector y dos de Virtu (CNBV, 2021).

Los Participantes de un Mercado Extranjero Reconocido, son miembros que participan en bolsas de derivados extranjeras con las que MexDer tiene acuerdo y que son aprobados por esta (Mercado Mexicano de Derivados, 2019). Finalmente, el Socio Liquidador es un fideicomiso que tiene la finalidad de liquidar y celebrar contratos de derivados a cuenta propia o de sus clientes en MexDer y transmitir órdenes a otras bolsas de derivados internacionales (Mercado Mexicano de Derivados, 2019).

Al igual que los operadores, ante la CNBV existen seis Socios Liquidadores, Banco Santander y Scotiabank Inverlat tienen dos cada uno, una cuenta propia y otra de terceros. Además de BBVA Bancomer y Grupo Bursátil Mexicano (GBM), ambos con una cuenta propia (CNBV, 2021).

1.3 Marco legal mexicano

En México, las leyes federales que reglamentan estos instrumentos son la Ley del Mercado de Valores (Cámara de Diputados, 2005), la Ley de Fondos de Inversión (Cámara de Diputados, 2001), y la Ley General de Títulos y Operaciones de Crédito (Cámara de Diputados, 1932). El Código Fiscal de la Federación (Cámara de Diputados, 1981), la Ley del Impuesto sobre la Renta (Cámara de Diputados, 2013) y la Ley del Impuesto al Valor Agregado (Cámara de Diputados, 1979) contienen las reglas impositivas. A continuación, se presenta una tabla con los artículos más relevantes:

Tabla 1.3 Leyes mexicanas

Mercado de Valores
2°, fracc. XXIV Se reconoce como “valores” a los títulos opcionales (Cámara de Diputados, 2005).
65° Capacidad de sociedades anónimas y casas de bolsa para emitir opciones, (posicionarse corto) (Cámara de Diputados, 2005).
66° Los subyacentes pueden ser: acciones, títulos de crédito que representen acciones, canastas de acciones (tracs o ETF's), índices accionarios o similares a todos estos que estén listados en el sistema internacional de cotizaciones (SIC) tanto de mercados nacionales y extranjeros reconocidos. Los títulos opcionales deberán emitirse con las denominaciones correspondientes a prima de emisión y precio de ejercicio, expresados en moneda nacional o porcentualmente, en relación con el precio de referencia del activo subyacente (Cámara de Diputados, 2005).

<p>67° Contenido de los contratos de opción: denominación call o put; lugar y fecha de emisión; denominación social de la posición corta; datos del activo subyacente; vigencia que incluye fecha de ejercicio; número de opciones en la emisión; número de activos subyacentes y la prima; precio de ejercicio; contingencias del subyacente; responsable de la emisión (Cámara de Diputados, 2005).</p>
<p>171° fracc. VI. Facultad de las Casas de Bolsa de operar con instrumentos derivados a cuenta propia o de terceros (Cámara de Diputados, 2005).</p>
<p>171° fracc. XVII Recibir recursos del público para operaciones derivadas (Cámara de Diputados, 2005).</p>
<p>171° fracc. XIX Emitir opciones sobre sus propias acciones (complemento del artículo 65) (Cámara de Diputados, 2005).</p>
<p>255° Las empresas que suministren sistemas para operar con valores deben difundir las cotizaciones de las opciones que se negocien en ese sistema (Cámara de Diputados, 2005).</p>
<p>322° La valuación de opciones a cargo solo de ‘proveedores de precios’ (Cámara de Diputados, 2005).</p>
<p>324° fracc. IV Para ser proveedor de precios, se debe proporcionar, entre otros, la metodología para valorar instrumentos derivados (Cámara de Diputados, 2005).</p>
<p>327° fracc. I El proveedor de precios debe tener un comité para mantener actualizadas estas metodologías (Cámara de Diputados, 2005).</p>
<p>328° Los proveedores de precios deben notificar los valores actualizados a CNBV (Cámara de Diputados, 2005).</p>
<p>331° Los proveedores no pueden entregar diferentes valuaciones de un mismo instrumento derivado (y otros títulos) a distintos clientes (Cámara de Diputados, 2005).</p>
<p>Fondos de inversión</p>
<p>2° Consideración de instrumentos derivados como “activos objeto de inversión” (Cámara de Diputados, 2001).</p>
<p>15° Capacidad de los Fondos de hacer operaciones de reporto con instrumentos derivados (Cámara de Diputados, 2001).</p>
<p>Títulos y Operaciones de Crédito</p>
<p>261° El reporto es, básicamente lo que conocemos como “venta corta”; el que toma los títulos en préstamo debe proceder con las obligaciones de la posición corta de una opción, pero con fondos del que prestó los títulos. Esto complementa el Art. 15 de la Ley de Fondos de Inversión (Cámara de Diputados, 1932).</p>
<p>Código Fiscal</p>
<p>16° A Establece qué son las operaciones derivadas para esta ley, entre ellas las opciones. Establece al rendimiento obtenido de la operación con opciones como objeto de gravamen (Cámara de Diputados, 1981)</p>
<p>16° C Tratamiento a la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) y a Mercado Mexicano de Derivados (MEXDER) como “mercados reconocidos” (Cámara de Diputados, 1981).</p>
<p>Impuesto al Valor Agregado (IVA)</p>
<p>15° fracc. XI No pagaran IVA servicios por operaciones con derivados (Cámara de Diputados, 1979).</p>
<p>41° fracc. IV Estados y Municipios no cobrarán impuestos locales sobre derivados (Cámara de Diputados, 1979).</p>

Impuesto Sobre la Renta (ISR)

20° Para determinar ganancia acumulable o pérdida deducible (en mercados reconocidos) para las dos posiciones. Hay dos fracciones relevantes, la I indica que si la liquidación en efectivo, a los Recursos recibidos/pagados se les resta los Recursos pagados/recibidos; y la fracción IV que dice que, si no hay ejercicio, se registra ganancia para la posición corta y pérdida para la larga, según sea el caso de los participantes que tengan el título (Cámara de Diputados, 2013).

21° Tratándose de opciones *over the counter*, las acumulaciones y deducciones que permite la ley solo aplican hasta que la operación se haya liquidado, es decir, en el ejercicio (Cámara de Diputados, 2013).

28° fracc. XIX No son deducibles las pérdidas por operaciones con derivados “cuando los términos convenidos no correspondan a los que se hubieren pactado con o entre partes independientes en operaciones comparables” (Cámara de Diputados, 2013. p. 43).

28° fracc. XXIV No son deducibles las primas de opción *over the counter* (Cámara de Diputados, 2013).

129° fracc. IV Tasa del 10% a las ganancias de capital, incluyendo las que provienen de instrumentos derivados (Cámara de Diputados, 2013).

Fuente: elaboración propia con información de las leyes citadas.

¿Muchas propiedades y reglas? Un concepto simple pero poderoso requiere un marco de funcionamiento adecuado. ¿Qué ha llevado a una reglamentación y funcionamiento tan robustos en México y el mundo? El sentido común dicta que es la experiencia, y la experiencia histórica no es poca, como se verá en el siguiente capítulo.

II. Breve historia de las opciones

En este capítulo se describe el viaje histórico de las opciones, acompañadas a veces por sus pares, los futuros. Con acontecimientos principales y formación de mercados. Después, se revisan dos casos en los que se considera que estos instrumentos fueron actores relevantes.

Aristóteles. El gran filósofo en su obra “Política”, específicamente en el Capítulo IV del Primer Libro, sobre la adquisición de bienes, describe una operación que llevó a cabo su colega Tales de Mileto:

Gracias a sus conocimientos en astronomía pudo presumir, desde el invierno, que la recolección próxima de aceite sería abundante, y al intento de responder a algunos cargos que se le hacían por su pobreza, de la cual no había podido librarle su inútil filosofía, empleó el poco dinero que poseía en darlo en garantía para el arriendo de todas las prensas de Mileto y de Quíos; y las obtuvo baratas, porque no hubo otros licitadores. Pero cuando llegó el tiempo oportuno, las prensas eran buscadas de repente por un crecido número de cultivadores, y él se las subarrendó al precio que quiso. La utilidad fue grande; (...). (Aristóteles, 345 a.C., p. 17).

Bajo una óptica actual, en el relato de Aristóteles, Tales de Mileto básicamente compró una opción o futuro de venta, es decir, se posicionó largo en el mercado (o put long) y además escogió el precio de ejercicio en el vencimiento. Esta es una operación que puede ser entendida bajo la perspectiva de estos instrumentos, o de sus semejantes, los futuros.

Al menos para Occidente esta es una de las más viejas referencias a operaciones de este tipo. En Mesopotamia, hacia el siglo XIX a.C. ya había operaciones con derivados, algunas de las cuales se conservaron en tablillas de barro en escritura cuneiforme, Van de Mieroop (2005) citado por Weber (2009, p. 434) tradujo al inglés lo siguiente: “Thirty wooden, ten of 3.5 meters each, twenty of 4 meters each, in the month Magrattum Akshak-shemi will give to Damqanum. Before six witnesses (their names are listed). The year that the golden throne of Sin of Warhum was made” [Treinta maderas, diez de 3.5 metros cada una, veinte de 4 metros cada una, en el mes Magrattum, Akshak-shemi entregará a Damqanum. Ante seis testigos (con nombres listados). El año que el dorado trono del pecado de Warhum fue hecho].

En el siglo XVIII A.C., existe una tablilla que detalla una operación larga: a cambio de plata, se recibirán semillas de sésamo en un plazo de seis meses (Van de Mieroop (2005),

citado por Weber, 2009, p. 435). Para el s. XV a.C. este tipo de contratos se extendió por las naciones vecinas, pero con otras mercancías como el trigo en Egipto, Asiria, Anatolia y en las islas del Egeo (Kummer y Pauletto (2012), citados en Fisanotti, 2014, p. 11). Los contratos a plazo fueron usados más tarde en Grecia y Roma para cosechas de trigo egipcias (Weber (2010), citado en Fisanotti, 2014, p.11).

Sobre la operación mercantil en el siglo II en Roma, Weber (2009, p. 438) dice que: “The available sources only support the conclusion that Roman derivatives included contracts for future delivery of goods that initially were held until the delivery date and that were traded over-the-counter after some unknown date” [Las fuentes disponibles solo sostienen la conclusión de que los derivados romanos incluían contratos para futuras entregas de bienes que inicialmente fueron mantenidos hasta la fecha de entrega y que fueron intercambiados en mercados over-the-counter después de una fecha desconocida].

Ya en la Alta Edad Media europea (s. V-IX), Weber (2009) sostiene que el comercio de futuros continuo en Bizancio después del colapso del Imperio Romano de Occidente y que los judíos sefardíes trajeron a la Hispania Romana el comercio con futuros en el primer milenio de nuestra era. Swan (2000) (citado por Weber, 2009) indica que también en los monasterios cristianos había intercambio de futuros.

La evolución de las opciones, sigue el rastro del poder político y comercial: de Génova, el eje comercial y financiero se muda a Brujas (s. XV), Amberes (s. XVI) y más tarde a Ámsterdam (s. XVII). Tras la “Revolución Gloriosa”, el desarrollo bursátil pululó en Londres. Culminando el viaje, en Chicago, Estados Unidos. Ahí abren dos bolsas dedicadas al comercio de futuros y opciones sobre materias primas.

A finales de la Baja Edad Media (s. X-XV) Poitras (2009a, p. 7) cuenta que en la ciudad de Génova, además de ser un importante puerto comercial se realizaban “ferias”, que consistían en un sistema centralizado de pagos y anotaciones en cuentas. Contemplaban un proceso de compensación de posiciones y exposición a diferentes signos monetarios y un foro arbitral (autoridad) de banqueros reconocidos determinaba los tipos de cambio aplicables. Más que un mercado de derivados, es uno de cambios, con sistema de compensación de posiciones, clave en el funcionamiento de un mercado de derivados funcional.

Además, Matteo Salonia (2020) señala que, en un episodio de 1530, el rey Francisco I de Francia solicitaba fondos al gobierno de Génova, tal como esta ciudad proveía crédito a la

Corona española. Los genoveses contestaron que el rey hispano “lo había hecho negociando en el mercado de capitales y pidiendo prestado dinero a ciudadanos privados genoveses, familias aristocráticas y prestamistas profesionales. Si el rey francés necesitaba fondos, era muy bienvenido a hacer lo mismo” (Salonia, 2020, párr. 6).

A finales del siglo XIII, los Duques de Brabante (Amberes) impulsaron políticas de apertura comercial, como la ausencia de requisitos de contratación de intermediarios locales. La disminución de los costos, la competencia que esto produjo con la vecina ciudad de Brujas y que más participantes entraran al mercado mejoró la liquidez y propició el acercamiento de especuladores (van Houtte (1966) citado en Poitras, 2009a). En 1531, abre formalmente la bolsa de Amberes (Poitras, 2009b).

En Amberes se lograron dos avances: hacia 1540, el trading de los contratos a terceros y la mecánica de “pago de diferencias” y los contratos premium, las primeras opciones (Weber, 2009). Sobre los segundos, Van der Wee (1977) (citado en Poitras, 2009a, p. 13) dice que:

The development of difference dealing was accompanied by the emergence of ‘premium contracts’ where: “The buyer made a contract for future delivery at a fixed price, but with the condition that he could reconsider after two or three months: he could then withdraw from the contract provided that he paid a premium to the vendor (stelligelt) [El desarrollo de la negociación de ‘diferencias’ fue acompañada por el surgimiento de “contratos premium” donde: “El comprador hacía un contrato para una entrega futura a un precio fijo, pero con la condición de que podría reconsiderar después de dos o tres meses: él podría, retirarse del contrato con el pago de una prima al vendedor (stelligelt)”].

La continuidad de la influencia de Amberes fue interrumpida desde el episodio conocido como “la furia española”, un saqueo por parte del ejército español en 1576 (Poitras, 2009a). El relevo lo toma Ámsterdam con casi un siglo de esplendor. En esa misma época, en Londres se funda en 1571 la Royal Exchange (Poitras, 2009a) por Sir Thomas Gresham (Weber, 2009).

En Ámsterdam, Poitras (2009a) relata que en 1611 el establecimiento permanente de un edificio para bolsa: “(...) marks a symbolic beginning of Dutch commercial supremacy. During the 17th and 18th centuries, trading of forward and option contracts on the Amsterdam exchange exhibited many essential features of exchange trading in modern

derivative markets” [(...) marca un simbólico inicio de la supremacía comercial neerlandesa. Durante los siglos XVII y XVIII el trading de contratos de futuros y opciones en la bolsa de Ámsterdam presentan muchas características de trading de modernos mercados de derivados”] (Poitras, 2009a, p. 15). Es también en Ámsterdam donde se diferencia por primera vez activos financieros y materias primas a granel (Poitras, 2009a).

En 1637, en Holanda estalla la Burbuja de los Tulipanes, que “llevó a que los contratos de opciones y ventas a plazo fueran vilipendiados, cancelados por una fracción de su valor o, lisa y llanamente, incumplidos” (Garber (1989), citado en Fisanotti, 2014, p. 14).

En 1688 José Penso de la Vega Passariño publica “Confusión de Confusiones: Diálogos curiosos entre un filósofo agudo, un mercader discreto y un accionista erudito describiendo el negocio de las Acciones, su origen, su etimología, su realidad, su juego y su enredo”. Escrito en el español de la época, De la Vega lo escribe después de una estancia en Ámsterdam. En este libro a las opciones se les conoce como “opsies”: “Los flamencos lo llamaron OPSIE, derivado del verbo latino *Optio Optionis*, que significa elección, porque queda a elección del que lo da el poder pedir o entregar la partida al que lo recibe” (De la Vega, 1688, p. 48).

A continuación, algunas citas seleccionadas referentes al uso de opciones en la bolsa de valores de Ámsterdam: “Dad OPSIES y sabréis el límite de la pérdida, pudiendo ser la ganancia inimaginable y mucho mayor que la esperanza” (De la Vega, 1688, p. 39). “(...) pues, aunque no ganéis la primera vez con los opsies, no arriesgáis el crédito, ni mancháis el honor. Insistid en darlos a largo plazo y raro será que perdáis todo el capital (...)” (De la Vega, 1688, p. 39). “los OPSIES, son unos premios o cantidades que se dan para asegurar las partidas o conseguir las ganancias, las cuales sirven de velas para navegar felices en la bonanza y de anclas para navegar con seguridad en las tormentas” (De la Vega, 1688, p. 46).

“La quinta estratagema es tomar la mayor cantidad de opsies a entregar, para que tengan que vender los que pagan la prima; (...)” [posicionarse call short] (De la Vega, 1688, pp. 296-297). “La sexta es dar cuantos opsies encuentren a recibir, para que los que los toman no se atrevan a comprar más, estando ya obligados; con lo que les queda el campo prácticamente libre y el triunfo casi seguro [put long]” (De la Vega, 1688, p. 297).

El primer documento del que se tiene conocimiento sobre un contrato de opción negociado en Londres es del 29 de julio de 1687: “(...) a covenant by Sir Bazill Firebrass of

Mark Lane to deliver £1,000 East India stock en 200 to Sir Thomas Davill on or before March 1, 1688, in return for a premium of 150 guineas” [un trato entre Sir Bazill Firebrass de Mark Lane para entregar £1,000 libras esterlinas en acciones de la East India en £200 a Sir Thomas Davill en o antes del 1° de marzo de 1688, como retorno por una prima de 150 guineas [monedas de oro de la época]] (Dickson (1967), citado en Poitras, 2009b, p. 499).

En 1688 acontece la Revolución Gloriosa en Inglaterra, una nueva monarquía constitucional establece reformas financieras que darán forma al Banco de Inglaterra (1694) y a bonos soberanos ingleses (1696) (Weber, 2009). La experiencia de Ámsterdam es exportada a las islas británicas: la nueva casa gobernante proviene de esta región. El londinense John Houghton (1694), en su semanario “A Collection for Improvement of Agriculture and Trade”, dedica los números de junio y julio de 1694 a las nuevas técnicas de trading con opciones, tanto calls (conocidas como “refusals”) como puts (Weber, 2009). En el evento conocido como “burbuja del Mar del Sur” (1711-1720), acontecida contemporáneamente, aparecen los warrants (Weber, 2009).

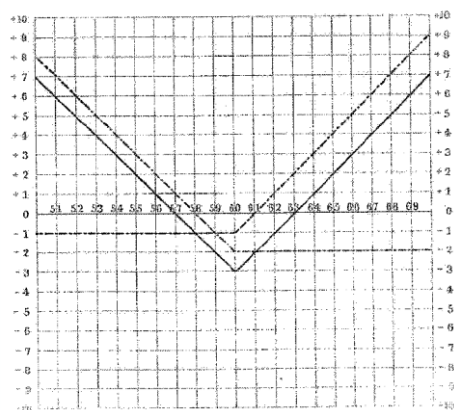
Como consecuencia del episodio sobre las burbujas de la Compañía de las Indias Francesas (que será revisado en la próxima sección) y la burbuja mencionada en el párrafo anterior, en las que las opciones fueron actores relevantes, la operación con estos instrumentos en Londres fue frenada por la “Sir John Barnard Act”, sancionada en 1733 (Weber, 2009). El estallido de estas burbujas estuvo casi sincronizado, en el mismo año, 1720, en mayo en Paris y en septiembre en Londres (Weber, 2009; Velde, 2009).

En 1810 en Francia en el Código Penal se estableció pena de cárcel al comercio de derivados sobre bonos del gobierno francés. Años después Coffinière (1824) (citado por Weber, 2009) publica “Die Stockbörse und der Handel mit Staatspapieren” (La bolsa de valores y el trading de bonos del gobierno). El autor aparentemente es francés, pero la edición que cita Weber es alemana. En este manual Coffinière tacha de inmoral las operaciones con derivados, comparándolas con apuestas. Weber sostiene que su postura se debió a la prohibición mencionada al principio de este párrafo.

En 1857, el francés Proudhon (citado por Weber, 2009) publica “Manuel du spéculateur à la bourse” en el que clasifica a las opciones como *marchés à primes* o *marchés libres*, las call como *achat à prime* y las puts como: *vente à prime*. Y a las operaciones de venta corta como reports (*¿eran las operaciones conocidas en México como “de reporto”?*).

Weber (2009) considera que Henry Lefèvre (1870) y Moser (1875), popularizaron el uso de *profit charts*, gráficos financieros, para ilustrar operaciones con opciones (no necesariamente los inventores, pues en París y Berlín ya llevaban al menos una década utilizándose). En la Figura 2.1 se presenta la estrategia “bottom Straddle” (véase la Gráfica 3.20) y retomada por Weber (2009):

Figura 2.1



Fuente: Imagen tomada directamente de Weber (2009, p. 456).

La pista del dinero continua en Norteamérica, el trading de opciones sobre acciones data al menos de 1790 (Poitras, 2009a). En Chicago se fundó el 3 de abril de 1848 el Board Trade of the City of Chicago (CBOT) con 82 miembros, una bolsa de derivados que comenzó con futuros sobre materias primas (Poitras, 2009a). Más tarde abrieron también el Chicago Produce Exchange en 1874, el Coffe, Sugar and Cocoa Exchange, más tarde conocido como New York Mercantile Exchange, NYMEX, en 1872 y el Chicago Butter and Egg Board en 1898, conocido ahora como CME¹ (Poitras, 2009a, p. 32). En 2007 CME y CBOT se fusionan, un año más tarde adquieren NYMEX.

Se sabe que el incremento de la popularidad de las opciones en el siglo XIX se debió en parte al incremento de emisión de acciones de empresas ferrocarrileras e industriales en EEUU (Poitras, 2009b). En el CBOT las opciones eran conocidas como “privileges” [privilegios], y sus primas eran conocidas como “bid” y “offer” (las actuales put y call) (Poitras, 2009a; Nelson, 1904).

¹ Más información sobre la historia de CME en este enlace de la empresa: <https://www.cmegroup.com/stories/>

Hacia fines del siglo XIX, ya se negociaban en EEUU las “options pools” (opciones exóticas mencionadas en el Capítulo I) que fueron parte de la burbuja de precios y manipulación de mercado que precedió al ‘crack’ de 1929 (Poitras, 2009a). Pero la ley de Valores de 1934 autorizó a la SEC vigilar este mercado y así nació la Asociación de corredores y formadores de mercado de Put y Call (PCBDA) (Poitras, 2009a).

En 1973 abre el Chicago Board Options Exchange² (CBOE). Y un año después el Commodity Futures Trading Commission (CFTC) un ente regulador autónomo del gobierno de EEUU para vigilar el mercado de derivados, incluyendo a las opciones (Poitras, 2009a). En estas décadas surge la denominación de “derivados” para esta familia de instrumentos bursátiles (Swan (2000), citado por Weber, 2009).

En México, antes de la intromisión de MexDer, entre 1978 y 1982 en la Bolsa Mexicana de Valores se operaban futuros sobre la cotización peso/dólar y entre 1983 y 1986 se operaron futuros sobre acciones y petrobonos (Mercado Mexicano de Derivados, s.f.a.). Los afamados bonos Brady (1989) tenían, entre sus reglas de operación “una cláusula de recompra, que es una opción ligada al promedio de precio del petróleo Istmo” (Mercado Mexicano de Derivados, s.f.a.).

Para 1992, en la BMV se empezaron a operar opciones sobre acciones, TRACS e índices. Inclusive, se negociaron opciones sobre ADR’s (American Depositary Receipt) de la acción Telmex L en el CBOE (Mercado Mexicano de Derivados, s.f.a.). La formación de MexDer comenzó en 1994, el cual forma parte del Grupo Bolsa Mexicana de Valores, que financió esta nueva bolsa de derivados (Mercado Mexicano de Derivados, 2013c). El inicio de operaciones fue el 15 de diciembre de 1998 (Mercado Mexicano de Derivados, 2013c). En 2014 se introduce VIMEX, índice que mide la volatilidad implícita de las opciones sobre futuros del IPC (Mercado Mexicano de Derivados, s.f.d., p. 2).

La operación y excesos de algunos de los instrumentos derivados más recientes, como los CDO (Collateralized Debt Obligation) (Tardi, 2021), CDS (Credit Default

² Un breve repaso a la historia de CBOE, está disponible en este enlace de la empresa: <https://www.cboe.com/aboutcboe/history>

Swap) (Chen, 2021) y las MBS (Mortgage-Backed Security) (Kagan, 2021) tuvieron parte en el estallido de la crisis de 2008.

2.1 La Burbuja del Misisipi

Una parte de la historia de la “Compagnie des Indes” francesa está ligada a un hombre: John Law. Quien manipuló al gobierno francés para llevar a cabo un experimento monetario de dinero fiat. La obra de François R. Velde, *Was John Law's System a bubble? The Mississippi Bubble revisited* (2009) narra este episodio ocurrido a principios del siglo XVIII.

El componente interesante del sistema que ideó John Law, es que autoridades del banco central de Francia (también ideado por él) y las de esta compañía (que lo incluían también), manipularon el precio de las acciones de esta, llevándolo a una burbuja. Opciones de compra provocaron parte de la escalada de precios (Velde, 2009). El 23 de mayo de 1718, John Law publicó en la *Gazzete d'Amsterdam* (en un intento por impulsar el precio de las acciones de la compañía) sus intenciones de comprar opciones de compra para beneficiar a quienes ya poseían acciones de la misma. La oferta era la siguiente:

In exchange for a 2 percent premium, the writer of the option would commit to delivering one share (along with any unmatured dividend coupon) at any time of Law's choosing within the following year, at the price of 70 percent of face value. (...) this guaranteed the owner of 100L in billets d'Etat a minimum 76L payoff: the 4 percent minimum dividend on the share in the course of the year, the 70 percent strike price and the 2 percent premium of the option (...). A similar offer appeared a year later in the *Amsterdamse Courant*. This time, Law was buying European options (...) at a price of 200L in January 1720. In this instance, rather than providing insurance to hesitant subscribers, Law was signaling that he believed the stock was heading up. [A cambio de una prima del 2% [el texto no aclara el método para valorar esta prima, al parecer, como porcentaje del precio de la acción] el suscriptor de la opción se comprometía a entregar una acción (además de cualquier cupón dividendo no vencido) en cualquier momento que Law escogiese del siguiente año [opción estilo americana] a un precio del 70% [para obtener el valor de la suscripción, dividir el precio spot entre 0.7] de su

valor de caratula [valor a la par o nominal]. (...) esto garantizaba al poseedor de 100 libras, una recompensa mínima de 76 libras: 4% en dividendos sobre el precio de la acción, el 70% como precio de ejercicio y el 2% de la prima call de opción. (...). Una oferta similar aparece un año más tarde en el Amsterdamse Courant. Esta vez, Law compraba opciones tipo europea a un precio de 200 libras en enero de 1720. En este caso, más que infundir seguridad a suscriptores que dudaban, la señal que mandaba Law era su creencia de que las acciones estaban subiendo] (Velde, 2009, p. 111).

Esto, al principio de la burbuja. Año y medio después, el pago de las primas de las opciones provoca una caída en el precio de la acción en otoño de 1719:

The problem here was not share dilution, but a liquidity crunch due to the upcoming deadline for making payments on the subscriptions. (...). In late October the first monthly payment on the September issue was coming due, but obligingly a decree of September 20 consolidated the monthly payments into quarterly payments and postponed the first one to December. This allowed the share price to pass the 6,000L (...). In late December, then, the first payment was due on the September issue, and since it combined three monthly payments, it amounted to 1,500L. Speculators started selling some of their subscriptions in order to finance the payment on the rest, and this pushed prices down. From a peak of 9,525L on December 2, the price of the shares had drifted down to 9,250L on December 9 and then plummeted to 7,430L on December 14. [El problema aquí no fue la disolución de precio [Por las emisiones del 14 y 30 de septiembre de 1719] más bien una crisis de liquidez, dado que los pagos de las suscripciones se aproximaban [las suscripciones de contratos de opción referidos en la cita anterior]. (...) A finales de octubre, vencía el pago mensual de la emisión de septiembre, pero un decreto obligatorio del 20 de septiembre consolidó los pagos mensuales en trimestrales, posponiendo el primer pago hasta diciembre. Esto impulsó el precio a 6,000 libras (...). Hacia finales de diciembre, el primer pago de la emisión de septiembre combinaba tres pagos mensuales y ascendía a 1,500 libras. Los especuladores comenzaron a vender algunas de sus suscripciones (primas de opción) para financiar el pago del resto [para mantener vivo el

contrato de opción era requerido el pago de la prima de 2%] y esto empujó los precios a la baja. Desde un pico de 9,525 libras el 2 de diciembre, el precio cayó a 9,250 libras el día 9 de ese mes y luego se desplomó a 7,430 libras] (Velde 2009, p. 112).

Tabla 2.1

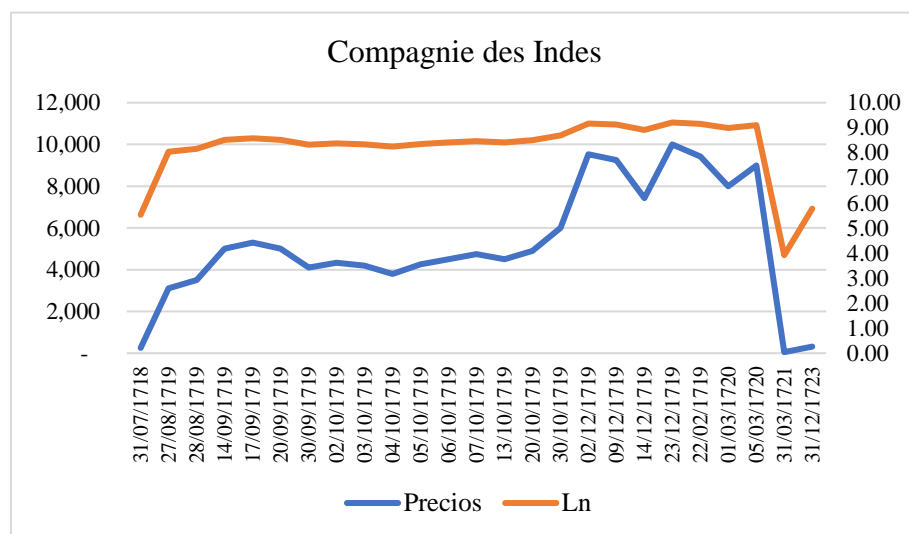
Fecha	Precios	Ln	Eventos
23/05/1718			Oferta de compra de opciones call
31/07/1718	250	5.52	Oferta inicial
27/08/1719	3,100	8.04	
28/08/1719	3,500	8.16	Conversión de bonos del gobierno
14/09/1719	5,000	8.52	Emisión de acciones por 500 millones
17/09/1719	5,300	8.58	
20/09/1719	5,000	8.52	
30/09/1719	4,100	8.32	Emisión de acciones, también por 500 millones
02/10/1719	4,335	8.37	
03/10/1719	4,200	8.34	
04/10/1719	3,800	8.24	Junta de la administración de la compañía para impulsar las acciones
05/10/1719	4,250	8.35	El banco central de Francia anuncia compras de las acciones por 4500
06/10/1719	4,500	8.41	
07/10/1719	4,750	8.47	
13/10/1719	4,500	8.41	El banco central continua el programa de compra
20/10/1719	4,900	8.50	Decreto (12/oct) aclara que no habrá más suscripciones, se impulsa el precio
30/10/1719	6,000	8.70	Pago de primas de opción se convierten en trimestrales, precio sube
02/12/1719	9,525	9.16	
09/12/1719	9,250	9.13	
14/12/1719	7,430	8.91	La falta de liquidez por el pago de las primas de opción empuja los precios a la baja
23/12/1719	10,000	9.21	Ventana de compra/venta de acciones y suscripciones de opciones (30/dic)
22/02/1720	9,425	9.15	Fin de la ventana de compra/venta, los precios caen
01/03/1720	8,000	8.99	El día 29 se anuncia un dividendo de 200 libras
05/03/1720	9,000	9.10	Law establece otra ventana de compra/venta
05/05/1720			Mayo 1720, la compañía ha comprado 1,319 millones en sus propias acciones
31/03/1721	50	3.91	21 de mayo 1720, Debacle de precios
31/12/1723	320	5.77	Agosto 1720, Law intenta controlar la oferta monetaria, la confianza se pierde

Fuente: elaboración propia con información de Velde (2009, pp. 108-113).

En la burbuja de los Mares del Sur, experimentada en Inglaterra, contemporánea a este episodio, también había calls que se pagaban periódicamente para obtener la acción al final,

como en este caso (Shea, citado por Weber, 2009). Del texto de Velde (2009, pp. 108-113), se extrajo la siguiente serie de precios, Gráfica 2.1 y Tabla 2.1 (en libras, monedas francesas de la época). La tabla contiene un resumen de eventos relevantes (en verde fechas exactas, en amarillo las aproximadas y en letras rojas, los eventos a los que se refieren las citas). Y la gráfica contiene la serie en escala nominal y logarítmica.

Gráfica 2.1



Fuente: elaboración propia con información de Velde (2009, pp. 108-113).

Después del desastre, el gobierno francés impuso penas y restricciones a las actividades bursátiles, tanto en títulos como en commodities (como se mencionó antes en este capítulo), especialmente sobre ventas cortas (Weber, 2009). Como conclusión, las opciones pueden impulsar burbujas de precios, así como también reventarlas.

2.2 La quiebra del banco Barings

El siguiente caso aborda a las opciones desde la perspectiva del abuso de confianza. Banco Barings no necesita presentación, fundado en 1762, siempre bajo la dirección de la familia Barings. Las notas para esta sección provienen de la investigación para la revista *Economic Quarterly* (otoño 1995), titulada: “*Derivatives Debacles: Case Studies of Large Losses in Derivatives Markets*” escrito por Anatoly Kuprianov.

La tradición familiar terminó, según cuenta Kuprianov, cuando: “(...) on February 24, 1995, when Peter Baring, the bank’s chairman, contacted the Bank of England to explain that a trader in the firm’s Singapore futures subsidiary had lost huge sums of money speculating on Nikkei-225 stock index futures and options”. [“El 24 de febrero de 1995, Peter Baring, el presidente del banco llamó al Banco de Inglaterra para explicar que un trader de la subsidiaria del banco en Singapur dedicada a los futuros tuvo una gran pérdida de dinero especulando en futuros y opciones del Nikkei-225”] (Kuprianov, 1995, p. 20).

En 1992 Barings envía a Nicholas Leeson a Singapur a la filial que tiene el banco en ese país destinado al mercado local de derivados (SIMEX). Esta filial se llamaba Barings Future Singapore BFS. Ese mismo año, Lesson solicita permiso para operar en el SIMEX y más tarde lo autorizan y le delegan la dirección de la división. Nunca separó las actividades de liquidación de operaciones y trading (Kuprianov, 1995).

Las negociaciones de Leeson siempre fueron a nombre de Barings en futuros sobre el Nikkei-225 y bonos japoneses a 10 años (JGB) tanto en SIMEX como en Osaka Securities Exchange OSE. El diferencial por tipos de cambio proporcionaba oportunidades de arbitraje. También comenzó a negociar sobre derivados de la bolsa de valores de Tokio. Como tenía bajo su mando la liquidación de operaciones y el trading, Leeson pudo inventar ganancias inexistentes. Las pérdidas las registraba en la famosa cuenta 88888 (Kuprianov, 1995).

La estrategia de Leeson consistía en opciones sobre futuros del Nikkei-225. Tomó posiciones cortas en compra y venta (call y put short). Esta posición proporciona ingresos iniciales a la posición corta y se beneficia cuanto más “out the money” se encuentre la opción y con baja volatilidad. Pero si se revierte la situación implica pérdidas potenciales para esta posición, como la que tenía este sujeto (Kuprianov, 1995).

Para el 1° de enero de 1995, Leeson poseía 37,925 posiciones call y 32,967 posiciones put. Ambas sobre el Nikkei-225, además de mil futuros sobre el mismo índice. El terremoto en Kobe, Japón, el 17 de enero provocó una caída en los mercados japoneses (Kuprianov, 1995). El Nikkei cerró el martes 17 con 19,241 puntos, para el lunes 23 en 17,785 puntos, una caída del 7.5% en 1 semana (para la serie histórica véase la fuente original: <https://indexes.nikkei.co.jp/en/nkave/archives/data>).

Esos días Leeson tuvo una pérdida por 68 millones de libras. Posteriormente, compró futuros tanto del Nikkei-225 y vendió sus posiciones en bonos japoneses. El Nikkei-225

avanzó a 18,667 puntos para el 6 de febrero, con este avance, pudo recuperar parte de las pérdidas, que ya acumulaban 253 millones de libras. Durante todo febrero, la posición *margin call* de BFS alcanzó 742 millones de libras. El 23 de febrero, después de ser requerido por sus superiores británicos, Leeson escapó de Singapur (Kuprianov, 1995).

El monto total de las pérdidas, por 927 millones de libras, superó con creces al capital del banco de 440 millones. ING adquirió días después el banco por solo 1 libra (Kuprianov, 1995). Las estrategias con opciones mal gestionadas pueden ser muy peligrosas. Las opciones son relevantes históricamente, además de peligrosas. Por su probada relevancia, es necesario valuarlas adecuadamente, como se verá en el siguiente capítulo.

III. Valuación de una prima de opción

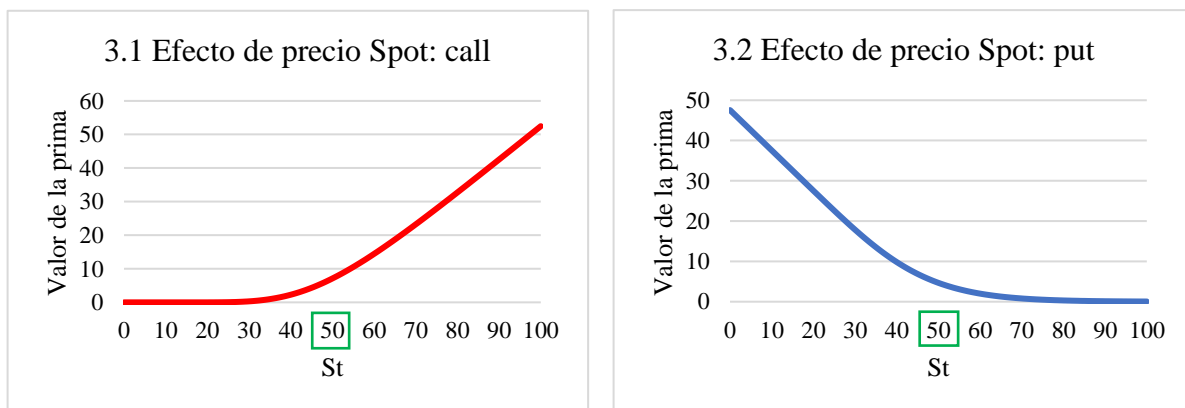
En este capítulo se revisan los modelos más relevantes para el cálculo del valor de una prima de opción; primero, los efectos que ejercen los parámetros en el valor de la prima bajo el modelo Black-Scholes, después algunas estrategias con opciones. Más adelante, se describe la paridad Put-Call. Seguido por las primeras publicaciones formales: las obras de Bachelier y Bronzin, Sprenkle, Boness y Samuelson. Luego, se presentan los procesos estocásticos.

La siguiente se divide en cuatro partes: la ecuación diferencial parcial planteada por Black y Scholes, la solución de esta, las “griegas” y la volatilidad. El trabajo de Cox, Ross y Rubinstein posteriormente y el trabajo de Heston antes del final, en el cual se encuentran algunos modelos “menores”. Estos trabajos son los más referenciados en artículos y libros para valorar opciones por participantes de mercado. Por esta relevancia se les examina.

3.1 Efectos de los parámetros de la prima en su valor

A continuación, se presenta el efecto gráfico y su interpretación desde la posición larga para los elementos de la prima en el modelo Black-Scholes, suponiendo *ceteris paribus*. El ejemplo se toma de Hull (2009a, pp. 211-212). En el ejemplo: $S_t = \$50$, $K = \$50$, $T = 1$ año, $\sigma = 30\%$ anual y $r = 5\%$. En el eje de las ordenadas, la aportación al valor de la prima, en las abscisas, los parámetros.

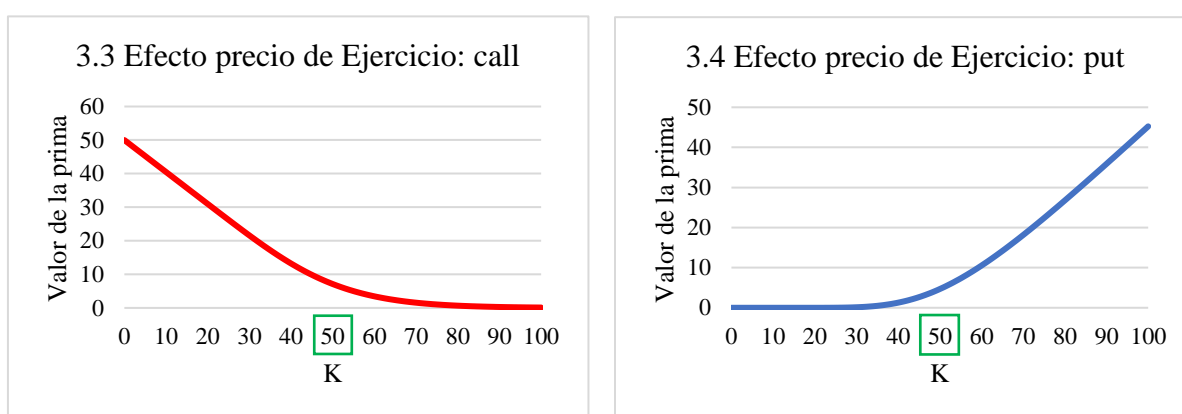
Gráficas 3.1, 3.2



Fuente: Elaboración propia con base en Hull (2009a, pp. 211-212).

Precio Spot ($K = \$50$ resaltado en cuadro verde): efecto directo, para call a un precio de Ejercicio dado, mientras más aumenta el precio Spot por encima de este valor, el valor de la prima aumenta casi proporcionalmente, es decir, el valor Intrínseco de esta prima ($S - K$) aumenta. Si S se encuentra en un nivel debajo de K , la aportación al valor de la prima es cada vez más pequeño. Para put, a un precio de Ejercicio dado, entre más caiga el precio, el valor intrínseco de esta ($K - S$) aumenta. Caso contrario si $S > K$ (Mercado Mexicano de Derivados, 2013b).

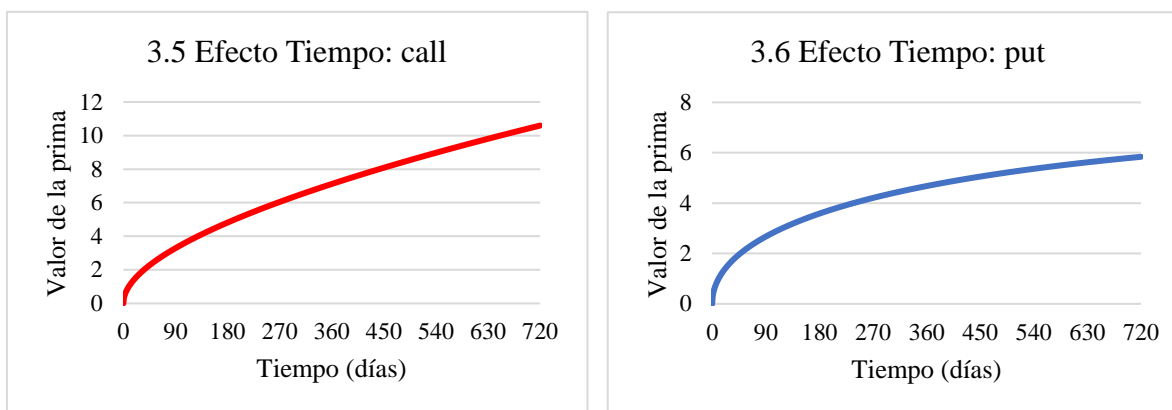
Gráficas 3.3 y 3.4



Fuente: Elaboración propia con base en Hull (2009a, pp. 211-212).

Precio de Ejercicio ($S_t = \$50$ resaltado en cuadro verde): para call, a un precio Spot inicial dado, mientras más alto sea el precio de Ejercicio de este, agregará nulo valor a la prima, pues es un sinsentido comprar más caro que el mercado. Por el contrario, si es cada vez menor con respecto de S_t , el valor intrínseco aumenta ($S - K$). En el caso de put entre más alto el precio de Ejercicio respecto a S_t , el valor intrínseco ($K - S$) aumenta, el derecho de vender por encima del mercado es más costoso. Caso contrario si $S > K$ (Mercado Mexicano de Derivados, 2013b).

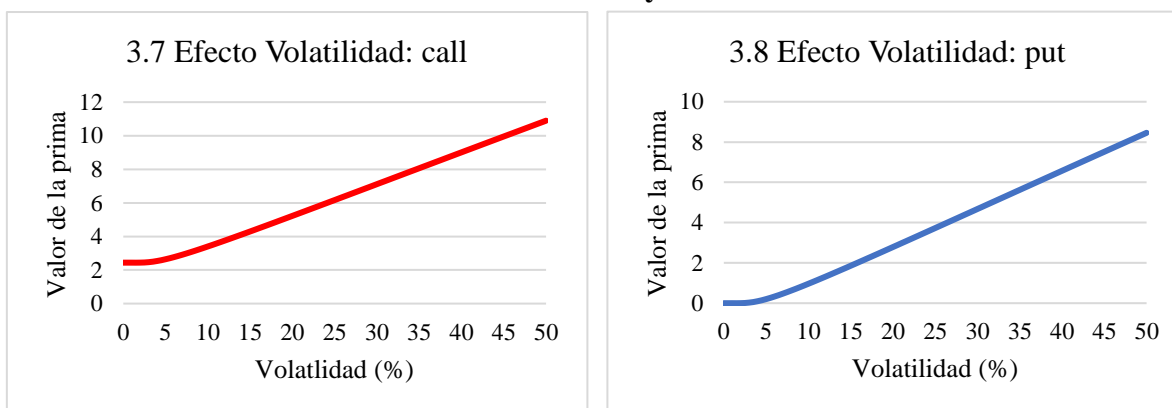
Gráficas 3.5 y 3.6



Fuente: Elaboración propia con base en Hull (2009a, pp. 211-212).

Tiempo a vencimiento (días en abscisas): “Las Opciones pierden valor con el paso del tiempo, de manera que, si ninguna otra variable cambia, sólo con el paso de los días el valor de una Opción es menor” (Mercado Mexicano de Derivados, 2013b, pp. 8-9). La razón es la incertidumbre en cuanto al precio del activo subyacente en el futuro. Cuánto más cerca este la fecha de ejercicio, hay más certeza sobre la cotización que pueda alcanzar el activo (Mercado Mexicano de Derivados, 2013b).

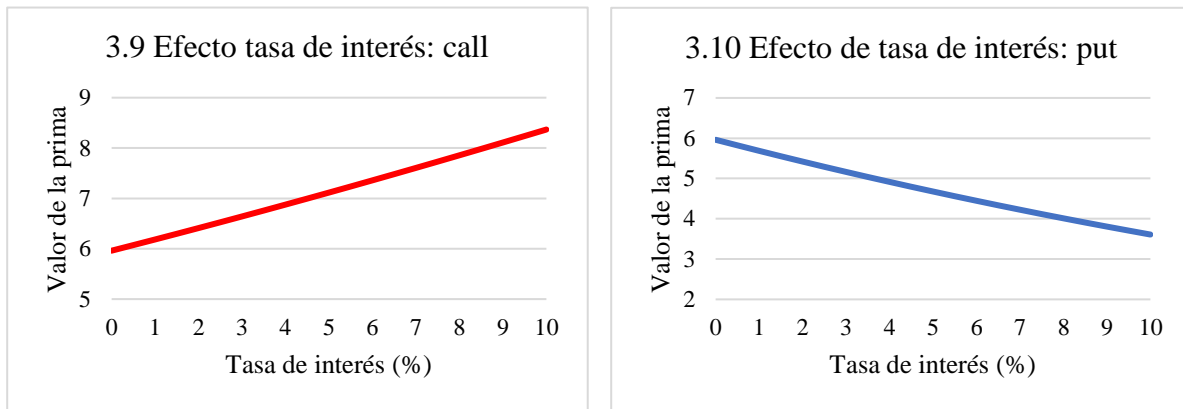
Gráficas 3.7 y 3.8



Fuente: Elaboración propia con base en Hull (2009a, pp. 211-212).

Volatilidad (volatilidad % anual en abscisas): Efecto directo en ambas primas, conforme esta aumenta, el valor de las primas aumentará. Ante mayores oscilaciones de S_t , la probabilidad de expirar in the money desde out the money aumenta (Mercado Mexicano de Derivados, 2013b).

Gráficas 3.9 y 3.10

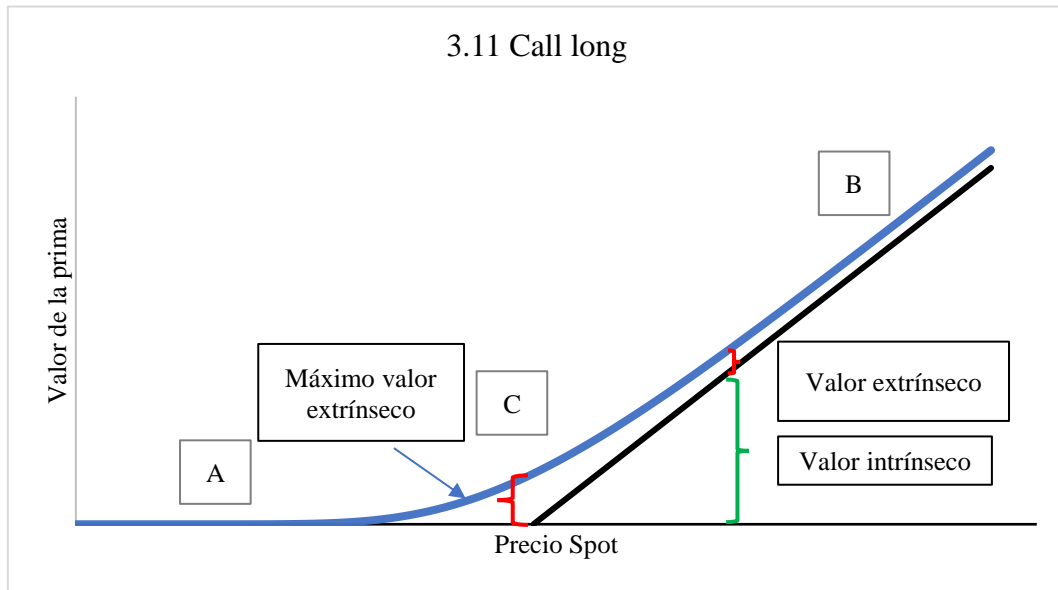


Fuente: Elaboración propia con base en Hull (2009a, pp. 211-212).

Tasa de interés libre de riesgo (tasa % en abscisas): la tasa de interés aumenta el valor de la call (disminuye el de put) pues el rendimiento esperado de instrumentos de capital aumenta, mantener en portafolio acciones (u otros títulos) en lugar de valores públicos hace que los participantes esperen más de ellos (Hull, 2009a).

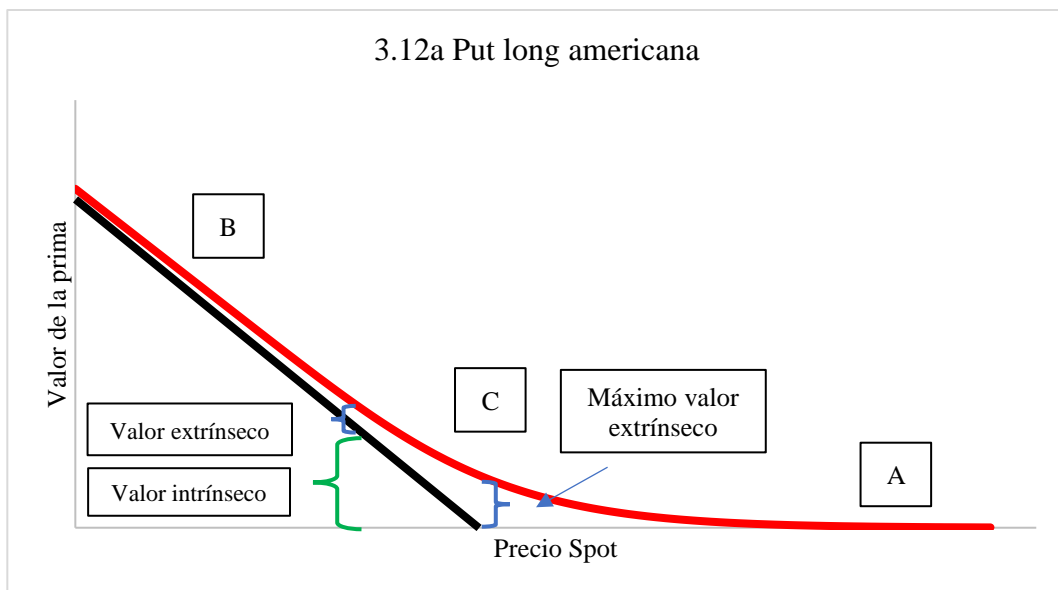
También con base en Black-Scholes se muestran las siguientes gráficas, con $t < T$. En una opción call (Gráfica 3.11) el valor intrínseco (recta negra) crece a medida que $S > K$. La distancia entre esta y la curva azul es el valor extrínseco. Cuando $S = K$ solo se cuenta con valor extrínseco y es el punto donde este es mayor. Si $S \leq K$, solo se cuenta con valor extrínseco. En put americanas (Gráfica 3.12a) el valor intrínseco aumenta conforme $K > S$. Mismo caso de valor extrínseco, en $S = K$ y $S < K$ (Neftci, 2008, pp. 196-201):

Gráfica 3.11



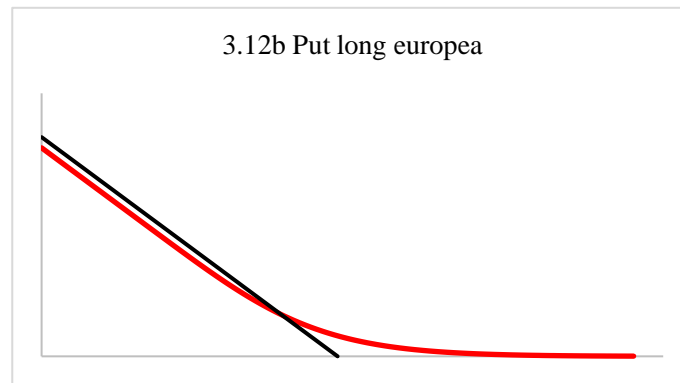
Fuente: Elaboración propia con base en Neftci (2008, pp. 199-200).

Gráfica 3.12a



Fuente: Elaboración propia con base en Neftci (2008, p. 199).

Gráfica 3.12b



Fuente: Elaboración propia con base en Hull (2009a, p. 223).

Sobre la Gráfica 3.12b, “Como hay algunas circunstancias convenientes para ejercer de manera anticipada una opción de venta americana se deduce que esta opción siempre vale más que la opción de venta europea correspondiente” (Hull, 2009a, p. 223), una call europea “debe valer en ocasiones menos que su valor intrínseco” (Hull, 2009a, p. 223). Por esta razón, la línea negra que describe el valor intrínseco se encuentra por encima de la curva.

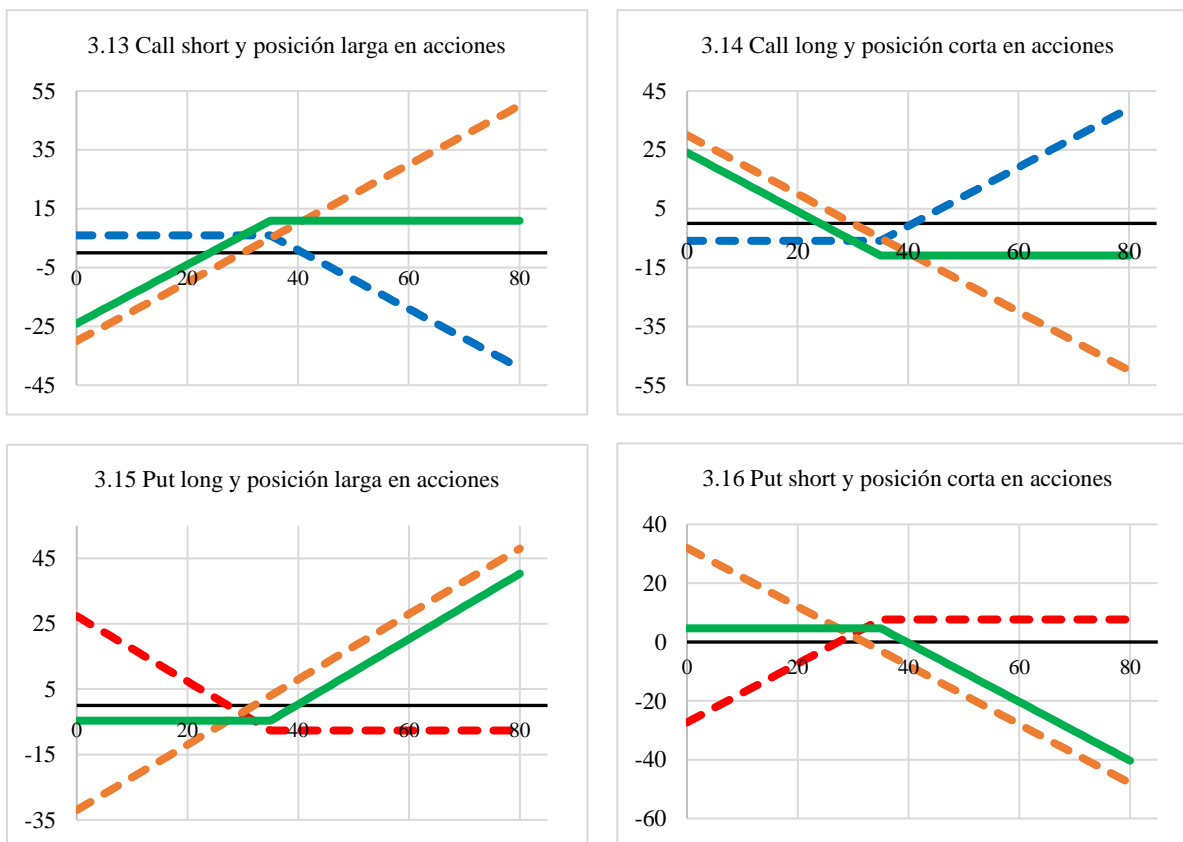
En las Gráficas 3.11 y 3.12a, las curvas sobre los puntos A tienen una pendiente cercana a cero, cambios marginales en el valor de la prima. En el punto B, cerca de 1, de hecho, la recta negra tiene esa pendiente; quiere decir que los cambios del valor de la prima son casi proporcionales al incremento en cada unidad del precio del activo subyacente (lo dicho anteriormente). Y alrededor del punto C, la pendiente es de aproximadamente 0.5 (Neftci, 2008). Por supuesto que, en este ejemplo K , t , σ , y r se mantienen constantes.

3.2 Estrategias básicas

Ahora, se presentan estrategias que se pueden llevar a cabo con posiciones en opciones combinadas con acciones. Las líneas verdes representan la utilidad (ordenadas) obtenida de cada estrategia conforme el precio spot del activo subyacente (abscisas) oscila. Las líneas naranjas representan posiciones largas sobre acciones (pendiente positiva) y cortas sobre los mismos instrumentos (pendiente negativa). Las líneas punteadas azules son las posiciones call y las rojas, las put. Las posiciones sobre opciones en cada gráfica son, respectivamente:

call short, call long, put long y put short (Hull, 2009a). Los datos son ficticios con $K = \$35$, tampoco se contempla el valor presente de las ganancias en ningún ejemplo.

Gráficas 3.13, 3.14, 3.15, 3.16



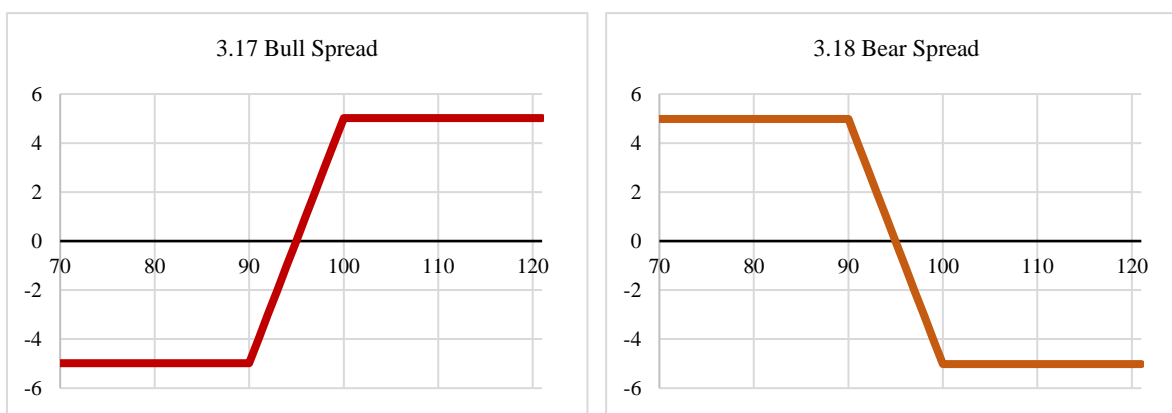
Fuente: Elaboración propia con base en Hull (2009a, p. 230).

Posicionarse corto en acciones proporciona ingresos iniciales que se pueden convertir en pérdidas potenciales, especialmente cuando se combinan con put short (Gráfica 3.16); combinar una posición corta en acciones con call long limita las pérdidas (Gráfica 3.14) (Hull, 2009a). Por el contrario, posicionarse largo en acciones en combinación con call short o put long (Gráficas 3.13 y 3.15) si bien incurre en pérdidas iniciales, si S_t aumenta, puede proporcionar ganancias en ambos casos, en especial con put long (Hull, 2009a). Es posible tener call o put sin siquiera haberlas adquirido directamente: la Gráfica 3.13 forma a put short, 3.14 a put long, 3.15 a call long y 3.16 a call short.

También se pueden seguir estrategias suponiendo la combinación de ambas posiciones de los dos tipos de opciones. Se ejemplifica con los siguientes datos ficticios: K_1

= \$90, $K_2 = \$95$ y $K_3 = \$100$ ($K_1 < K_2 < K_3$). Tiempo a vencimiento, volatilidad y tasa de interés constantes. Una estrategia alcista es *Bull spread* y su contraparte bajista, es el *Bear spread*, ambos se pueden formar con dos call o dos put. En el caso de Bull, $K_{long} < K_{short}$. Formar con call esta estrategia implica inversión inicial, a diferencia de hacerlo con puts (Hull, 2009a). En Bear, ahora $K_{short} < K_{long}$ y también es al revés el flujo inicial: hacerlo con puts implica inversión y con calls, ingresos iniciales. Estas estrategias sirven, entre otras, para limitar riesgos por alzas o bajas bruscas (Hull, 2009a).

Gráficas 3.17 y 3.18

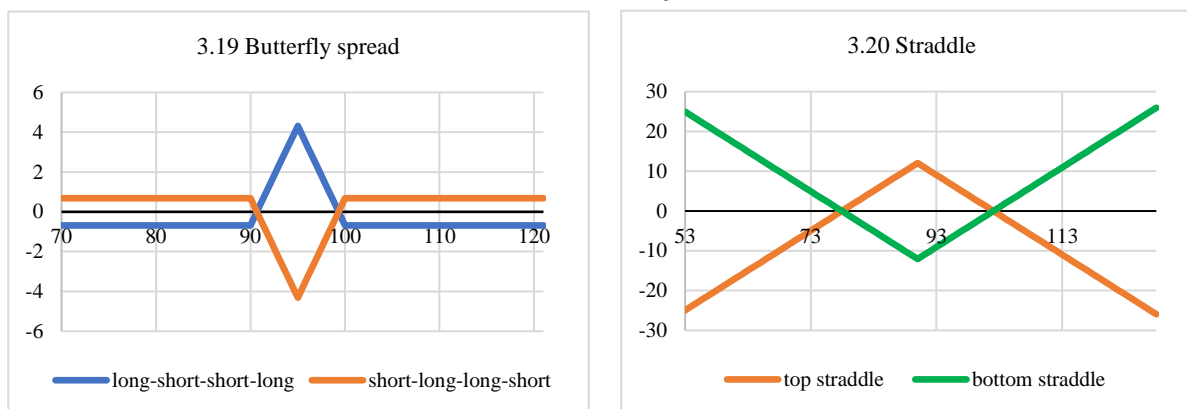


Fuente: Elaboración propia con base en Hull (2009a, p. 231 y p. 234).

El *Butterfly spread* (Gráfica 3.19) incluye a cuatro tipos de contratos y tres diferentes precios de ejercicio. Hay dos tipos básicos (ya sea con call o put), las posiciones $K_{long} < K_{short} = K_{short} < K_{long}$ y $K_{short} < K_{long} = K_{long} < K_{short}$. El primer tipo de Butterfly espera que haya nulas variaciones en el precio y si las hay, las pérdidas están acotadas. La segunda espera que los precios varíen, si no, hay pérdidas (Hull 2009a).

Los Straddle (Gráfica 3.20) consisten en combinar dos posiciones largas (bottom) o cortas (top) de una call y una put al mismo precio de ejercicio. Quienes se posicionan largo, invierten al inicio y esperan que el precio varíe y quienes lo hacen al revés, reciben un flujo inicial y esperan que el precio no oscile tanto (Hull 2009a). Una estrategia top Straddle es justo la que tenía Nick Leeson en opciones sobre futuros del Nikkei-225 que provocó la debacle de Barings (Kuprianov, 1995). Esta estrategia históricamente ha sido de las más revisadas, al menos desde 1875 por Moser (Weber, 2009) y por Castelli (1877).

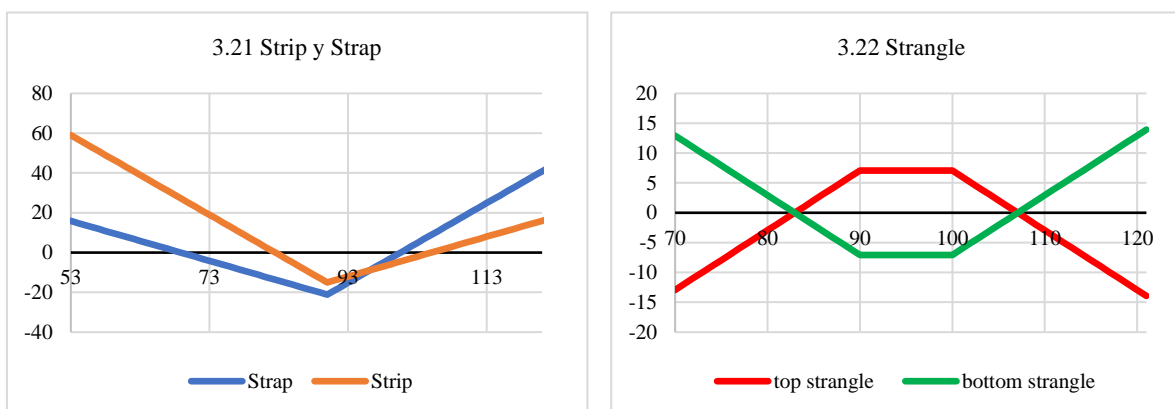
Gráficas 3.19 y 3.20



Fuente: Elaboración propia con base en Hull (2009a, p. 237 y p. 240).

Los Strips y Straps (Gráfica 3.21) son una percepción de una postura long acerca de la dirección que esté tomando el precio. Si se considera que disminuye (strips), se adquieren dos put y un call. Si el presentimiento es alcista (straps), entonces son dos call y un put (Hull, 2009a). Los Strangles (Gráfica 3.22) se parecen a los Straddle, solo que las ganancias y pérdidas están limitadas. Para perder o ganar el precio del subyacente debe oscilar más que en un Straddle. Si se forman long: $K_{call\ long} > K_{put\ long}$ se conoce como bottom vertical y si short: $K_{call\ short} > K_{put\ short}$, top vertical (Hull 2009a).

Gráficas 3.21 y 3.22



Fuente: Elaboración propia con base en Hull (2009a, p. 241, p. 242).

Obviamente, las estrategias descritas son básicas y de ejemplos académicos. Existen varios libros dedicados al estudio y difusión de estrategias con estos instrumentos. Una de las obras dedicadas a la difusión de estrategias con estos instrumentos es “The Bible of

Options Strategies” (2005) de Guy Cohen editado por Pearson Education e impreso en Estados Unidos. Un libro con información basta y clara.

3.3 La paridad put-call

En esta sección se describe la paridad de los dos tipos de primas de opción. Primero, el argumento de Stoll (1969) y después una notación moderna de Hull (2009a). Hans R. Stoll, en su artículo “The Relationship Between Put and Call Option Prices” (1969) presenta los siguientes supuestos: mercado competitivo, sin obstáculos, incierto, sin costos de transacción ni cuentas de margen, los beneficios de tomar ambas posiciones (larga y corta) son iguales y las opciones son mantenidas por la posición larga hasta vencimiento.

En la notación de Stoll (1969, p. 805): V_t , valor de un paquete de cien acciones en el tiempo t ; P_t , precio de la put en t ; C_t , valor de call en t ; i_t , tasa de interés libre de riesgo en t ; las opciones son suscritas en $t = 0$. Además, la tasa de interés es equivalente en los distintos periodos de maduración de las opciones (Stoll, 1969). Se consideran los siguientes flujos: entrada por una call short, salida por put long y préstamo por una posición larga en acciones por V a la tasa i (Stoll, 1969). Para Stoll, el interés del préstamo y su valor presente son, respectivamente: $V*i$ y $\frac{V*i}{1+i}$. Considerando los flujos, se tiene (Stoll, 1969, p. 805):

$$C - \frac{V*i}{1+i} - P = M \quad (3.3.1)$$

Ahora, entrada por una put short, salida por call long y una posición corta en acciones, con la misma mecánica de flujos de efectivo (Stoll, 1969, p. 805):

$$P + \frac{V*i}{1+i} - C = N \quad (3.3.2)$$

Finalmente, se supone que $M = N$, posiciones neutrales (Stoll, 1969, p. 805):

$$\begin{aligned} \text{Call short} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \text{Long} \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix} + \text{Put long} \begin{bmatrix} 0 \\ +1 \end{bmatrix} &= \text{Neutral} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \text{Put short} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \text{Short} \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix} + \text{Call long} \begin{bmatrix} +1 \\ 0 \end{bmatrix} &= \text{Neutral} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Se obtiene así la paridad put-call formulada por Stoll (después de manipulación algebraica) (Stoll, 1969, p. 805):

$$C - P = \frac{V*i}{1+i} \quad (3.3.3)$$

La exposición de Hull (2009a) comienza con los límites superiores del valor de una prima de opción y sin considerar dividendos. Por cuestiones de no arbitraje por una valuación neutral al riesgo, el precio de la prima call no puede superar el precio spot de la acción, pues “un arbitrajista podría obtener fácilmente una utilidad libre de riesgo al comprar la acción y vender la opción de compra” (Hull, 2009a, p. 214), aunque en plazos de tiempo muy largos, se puede igualar su valor (Black y Scholes, 1973). Y el de la prima put no puede superar el precio de ejercicio (misma situación de call; en el caso de put europea, no puede superar el valor presente de K) (Hull, 2009a). Por lo tanto, el *límite superior* para call y put es (Hull, 2009a, p. 214):

$$c \leq S_0 \quad p \leq Ke^{-rT} \quad (3.3.4)$$

Para una call europea, un *límite inferior* para la prima es (Hull, 2009a, p. 214):

$$S_0 - Ke^{-rT} \quad (3.3.5)$$

Este es el valor intrínseco al momento de emisión. Como es europea, se considera el valor presente del precio de ejercicio K. Se pueden formar dos portafolios: en el primero, una call long europea más un valor equivalente a Ke^{-rT} , y en el segundo, se adquiere una acción. Ahora, en el futuro momento T, una inversión de Ke^{-rT} será igual a K, si a vencimiento la posición está in the money ($S_T > K$) se ejercerá la opción, la posición se cerrará con K; el portafolio valdrá S_T . Si está out the money ($K > S_T$) en el momento T, la opción expira sin ejercerse y ese portafolio valdrá K. Justo en el momento T, el valor del primer portafolio es (Hull, 2009a, p. 215):

$$\max(S_T, K) \quad (3.3.6)$$

El segundo portafolio en el momento T vale S_T y ya vimos que la primera puede valer justo eso en el mismo momento “(...) y puede valer más que ésta al vencimiento de la opción. Se deduce que, al no haber oportunidades de arbitraje, esto también debe ser cierto hoy” (Hull, 2009a, p. 215):

$$c + Ke^{-rT} \geq S_0 \quad (3.3.7)$$

Si en lugar de S_0 se tuviera S_T , se tendría un problema, pues se afirmó que $\max(S_T, K)$. Para corroborar esta desigualdad, en la calculadora Black-Scholes en Excel (véase ANEXO I) se introdujeron los siguientes valores: $S_0 = \$90$, $K = \$100$, $r = 7\%$, $\sigma = 27\%$, $T = 120$ días, con $Ke^{-rT} = 97.6936$. La prima call fue igual a \$2.7704. Si in the money, $S_0 = \$110$, call = \$14.381928, se mantiene pues el enunciado. Entonces, en el momento t_0 la desigualdad se cumplía. En un caso extremo, bajo los mismos datos se supuso un precio Spot de \$304, el

cuál es el último precio -sin considerar decimales- en los que la desigualdad se mantenía; a partir de \$305 se convierte en igualdad. Todo esto en el momento t_0 , es decir, cuando aún quedan 120 días a vencimiento.

La expresión (4.3.8) se puede reescribir como (Hull, 2009a, p. 215):

$$c \geq S_0 - Ke^{-rT} \quad (3.3.8)$$

“Como lo peor que puede ocurrirle a una opción de compra es que venza sin valor, su valor no puede ser negativo. Esto significa que $c \geq 0$ ” (Hull, 2009a, p. 215). Es decir (Hull, 2009a, p. 215):

$$c \geq \max(S_0 - Ke^{-rT}, 0) \quad (3.3.9)$$

Luego, el límite inferior para una put europea: análogo a (3.3.5), valor intrínseco (Hull, 2009a, p. 216):

$$Ke^{-rT} - S_0 \quad (3.3.10)$$

Se suponen otros dos portafolios, el tercero, compuesto por una put long europea y una acción y el cuarto por un monto Ke^{-rT} . Si a vencimiento la opción del primer portafolio se encuentra *in the money* ($K > S_T$), se cierra la posición y el portafolio vale K . Si se encuentra *out the money* ($S_T > K$), no se ejerce y el portafolio vale S_T . En el momento T , el valor del portafolio es (Hull, 2009a, p. 217):

$$\max(S_T, K) \quad (3.3.11)$$

Del cuarto portafolio, si se invierte Ke^{-rT} , en el momento T , tendremos K . Es decir, el tercer portafolio valdrá igual que el cuarto. Análogo a la expresión (3.3.7), se tiene (Hull, 2009a, p. 217):

$$p + S_0 \geq Ke^{-rT} \quad (3.3.12)$$

Para comprobar, se usó el mismo ejemplo para demostrar la desigualdad (3.3.7). En el momento inicial, la prima put es igual a \$10.4640 y en ese momento la desigualdad se cumple. Cuando disminuye S_t , se sigue teniendo hasta que baja de \$31, cuando se convierte en igualdad. (3.3.12) se puede expresar como (Hull, 2009a, p. 217):

$$p \geq Ke^{-rT} - S_0 \quad (3.3.13)$$

“Como lo peor que puede ocurrirle a una opción de venta es que venza sin valor, su valor no puede ser negativo” (Hull, 2009a, p. 217). Entonces, y similar a (3.3.9) (Hull, 2009a, p. 217):

$$p \geq \max(Ke^{-rT} - S_0, 0) \quad (3.3.14)$$

Si call y put coinciden en T y en K , se deduce que las ecuaciones (3.3.7) y (3.3.12) son iguales, por lo tanto (Hull, 2009a, p. 217):

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0 \quad (3.3.15)$$

Esta es la paridad put-call. Si se cuenta con el valor de una de las primas se puede deducir el valor de la otra (Hull, 2009a). Retomando los datos usados en esta sección, call = \$2.7704, put = \$10.4640, $Ke^{-rT} = \$97.6936$ y $S_0 = \$90$, con estos datos, la paridad se cumple: $\$100.4640 = \100.4640 . Si la paridad no se cumple, se presentan oportunidades de arbitraje, una prima puede estar “barata” o “cara” y con eso se pueden establecer diversas estrategias.

$$\text{Bajo la notación de Stoll: } C - P = S_0 - Ke^{-rT} \quad (3.3.16)$$

Con los mismos datos del ejemplo: $(2.7704 - 10.4640) = (90 - 97.6936) = -7.6936$; es decir, se sigue cumpliendo la paridad. Si fuesen opciones americanas, es decir, se pueden ejercer antes de vencimiento, la paridad es (Hull, 2009a, p. 220) [para diferenciar de las opciones europeas se usa C y P en mayúsculas]:

$$S_0 - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT} \quad (3.3.17)$$

Si hay pago de dividendos, (3.3.8) y (3.3.13) ahora consideran ese flujo (Hull, 2009a, p. 224):

$$c \geq S_0 - D - Ke^{-rT} \quad (3.3.18) \quad p \geq D + Ke^{-rT} - S_0 \quad (3.3.19)$$

Y las ecuaciones de paridad europea y americana quedan así (Hull, 2009a, p. 224):

$$c + D + Ke^{-rT} = p + S_0 \quad (3.3.20) \quad S_0 - D - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT} \quad (3.3.21)$$

Por lo anterior, se debe tener en cuenta esta limitación: esta paridad es necesaria en cualquier modelo de valuación, una condición *sine qua non*.

3.4 Pioneros

Además de los libros mencionados en el Capítulo II: José de la Vega (1688) “Confusión de Confusiones”, Houghton (1694) “Collection for the improvement of agriculture and trade”, Coffinière (1824) “Die Stockbörse und der Handel mit Staatspapieren” y Proudhon (1857), con “Manuel du spéculateur à la bourse”. Se puede decir que las publicaciones contemporáneas aparecen en la segunda mitad del siglo XIX.

Con obras como las de Jules Regnault (1863), con “Calcul des chances et philosophie de la bourse”, Henry Lefèvre (1870) “Théorie élémentaire des opérations de bourse”, James Moser (1870) “Die Lehre von den Zeitgeschäften und deren Combinationen” y finalmente Charles Castelli (1877), haciendo lo propio con “The Theory of ‘Options’ in stocks and

shares”. Lefèvre y Moser también se mencionaron en el capítulo anterior, las de Regnault y Castelli se encontraron digitalizadas en internet, aunque no disponibles para ser descargadas.

Sobre el libro de Jules Regnault (1863), en el transcurso de esta investigación se encontró una copia original digitalizada en el portal web archive.org. Esta obra no es exclusiva de opciones, pero Zimmermann (2009b, p. 266) comenta que “(...) he was the first (and based on our current knowledge: for several decades the only) researcher interested in the modelling of financial market prices and to advocate the random walk model with normally distributed prices” [(...) fue el primero (y basado en nuestro conocimiento: por varias décadas el único) investigador interesado en el modelaje de mercados financieros y en abogar por el modelo de caminata aleatoria con distribución normal de los precios].

Además de que fue un convencido determinista, en cuanto al uso de probabilidad aplicada a mercados financieros (Zimmermann, 2009b), al menos 37 años antes que Bachelier, también llegó a la conclusión de que la volatilidad (standard deviations) son directamente proporcionales a la raíz cuadrada del tiempo \sqrt{t} .

Charles Castelli publicó en Londres en 1877 “The Theory of “Options” in Stocks and Shares”. La obra no es tan rigurosa, pero es un tratado formal sobre opciones. Las definiciones no distan mucho de las ya tratadas en esta obra. Castelli no llama propiamente “Options” a los instrumentos, sino a la transacción (Castelli, 1877).

También, a través de todo su libro recurre a ejemplos que usan cobertura y que consideran una valuación lineal de la prima, que además es una parte porcentual del total de la transacción (Castelli, 1877). Castelli (1877, p. 7) afirma que: “(...). The Premium, which is payable when the option expires, fluctuates according to the variations of the Stock to be contracted” [la prima que es pagadera a vencimiento fluctuará acorde a las variaciones de las acciones a contratar]. También, que cada contrato equivale a cien acciones, como hoy en día.

Los ejemplos incluyen estrategias, como las vistas en la sección 3.2. Al inicio de la Parte V, titulada “The ‘Put-and-Call’”, Castelli prácticamente describe un top Straddle (Gráfica 4.20) (Castelli, 1877). Finalmente, hay que resaltar que el estilo de opciones que describe es europeo. A pesar de ejercer a vencimiento, se considera que el propio instrumento se negocia antes de esa fecha.

A principios del siglo XX, se tienen las obras de Bachelier, Bronzin (a cuyas publicaciones se les dedica la siguiente sección), Higgins y Nelson. La obra de Leonard R.

Higgins “The put-and-call” (1902) no fue hallada, pero si la de Samuel Armstrong Nelson, operador bursátil -al igual que Castelli- que publicó en 1904 “The ABC of Options and Arbitrage” en el cual, se cita al libro de Higgins. De hecho, Nelson le dedica el Capítulo VI de su libro a los trabajos de Higgins y Castelli, incluso cita la definición de ambos para las opciones (Nelson, 1904).

También indica que el término *Straddle* es jerga propia de Wall Street (Nelson, 1904, p. 13). Nelson cita a Higgins (1902) en cuanto a que esta estrategia es el tercer tipo de opción, además de call y put (Nelson, 1904). El autor indica la diferencia entre los contratos en Nueva York y Londres, mientras que en el primero el ejercicio puede ser antes de la fecha pactada, en la segunda plaza solo es en la fecha de ejercicio (Nelson, 1904). Quizás -y esto es una presunción de quién esto escribe- desde entonces ya se diferenciaba a los dos principales estilos existentes, el americano y el europeo. A través del libro de Nelson, se encuentran detalles de las operaciones tanto en Londres como en Nueva York.

La información que aporta este autor es más rica que la que aporta Castelli, pues inclusive refiere a la operación londinense (y en general, la europea) como más científica y complicada que la de sus pares de estadounidenses. Igual que en Castelli (1877), el valor de la prima de opción también se entiende como porcentaje del precio, que es una suma de costos, volatilidad promedio (semanal, mensual y bimestral) y margen de beneficios (Nelson, 1904). Al igual que los ejemplos de Castelli, también describe operaciones cubiertas (“against”, en lugar de hedge). Finalmente, se compara el funcionamiento de la opción con un seguro (*insurance*) común (Nelson, 1904).

3.5 Bachelier y Bronzin

A pesar de existir trabajos previos, se considera a la obra de Louis Jean-Baptiste Alphonse Bachelier “Theorie de la Speculation” (1900) como el inicio de la moderna teoría financiera. Redescubierta por Paul Samuelson en la década de los 60’s (Venegas Martínez, 2008).

La tesis de Bachelier trata sobre la probabilidad de eventos o resultados en los mercados financieros, precios, futuros, opciones, spreads: “(...) to establish the probability law for the price fluctuations that the market admits at this instant” [(...) establecer la ley de probabilidad para las fluctuaciones del precio que el mercado admite en un instante dado]

(Bachelier, 1900, p. 1). A su vez, indica que antes de la fecha de ejercicio (describe opciones de estilo europeo) el spread (el diferencial del precio de un futuro y la prima de una opción, ambos sobre el mismo subyacente) disminuye: el paso del tiempo le resta valor a la opción. También presenta argumentos similares a la neutralidad al riesgo (Bachelier, 1900).

La primera parte de la tesis es acerca de los precios. Bachelier argumenta que el precio p , es una función $f(p)$. Una probabilidad representada por una ordenada, cuyas abscisas son los distintos precios. Los precios pueden variar entre $-\infty$ y $+\infty$ (es decir, la posibilidad de precios negativos en acciones), con x_0 siendo el precio absoluto en el momento t_0 . De existir desviaciones, la curva resultante es simétrica a la original (Bachelier, 1900, p. 11). El autor busca la probabilidad que el precio de un activo tome un valor 'z' en el periodo $t_1 + t_2$ dado que en el periodo t_1 fue x (i. e. esperanza condicional), se tiene (Bachelier, 1900, p. 12):

$$p = p_0 e^{-\pi^2 p_0 x^2} \quad (3.5.1)$$

La curva de probabilidad que representa la ecuación anterior está dada por la siguiente función cuya ordenada máxima es en el origen. Donde k es una constante de normalización (Bachelier, 1900, p. 16):

$$x = \pm \frac{1}{p_0 \sqrt{2\pi}} = \pm \sqrt{2\pi k} \sqrt{t} \quad (3.5.2)$$

Esta probabilidad está gobernada por la ley [de probabilidad] de Gauss. Lo anterior, pero como función del tiempo, con H como constante (Bachelier, 1900, p. 13):

$$p = \frac{H}{\sqrt{t}} e^{-\frac{H^2 x^2}{t}} \quad (3.5.3)$$

La expectativa positiva total es (Bachelier, 1900, p. 13): $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Hx}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\pi H^2 x^2}{t}} dx = \frac{\sqrt{t}}{2\pi H}$ (3.5.4)

Suponiendo que la constante k corresponde a $t = 1$. Con $H = 1/2\pi k$. La expresión definitiva para la probabilidad buscada (Bachelier, 1900, p. 13):

$$p = \frac{1}{2\pi k \sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4\pi k^2 t}} \quad (3.5.5)$$

La esperanza es proporcional a la raíz cuadrada del paso del tiempo (Bachelier, 1900, p 13):

$$\int_{-\infty}^{\infty} p x dx = k \sqrt{t} \quad (3.5.6)$$

La probabilidad de que el precio spot se supere en el periodo t , aumenta conforme el tiempo lo hace (Bachelier, 1900, p. 17):

$$\mathcal{P} = \int_x^{\infty} dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\pi k} \sqrt{t}}} e^{-\lambda^2} d\lambda \quad (3.5.7)$$

La probabilidad en un intervalo dado (conocido actualmente en probabilidad como ‘distribución acumulada’) está dada por [nula si $t = 0$ o $t = \infty$] (Bachelier, 1900, p. 17):

$$\int_{x_1}^{x_2} p dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x_1}{2\sqrt{\pi k \sqrt{t}}}}^{\frac{x_2}{2\sqrt{\pi k \sqrt{t}}}} e^{-\lambda^2} d\lambda \quad (3.5.8)$$

La mediana del spread denotada con α alrededor de t , suponiendo que el precio tiene la misma probabilidad de mantenerse en un intervalo dado, como salirse de él (es decir $1/2$) es (Bachelier, 1900, p. 18):

$$\int_0^{\alpha} p dx = \frac{1}{4} = \Theta \left(\frac{\alpha}{2k\sqrt{\pi}\sqrt{t}} \right) = \frac{1}{2} \quad (3.5.9)$$

Bachelier resuelve de la siguiente manera: $\alpha = 2 * 0.4769 k \sqrt{\pi} \sqrt{t} = 1.668 k \sqrt{t}$. En todo el texto no aparece 0.4769, no indica como lo obtuvo. Suponiendo que Θ representa a la función seno, tenemos $\text{seno}(0.5) = 0.4794$ pero es solo suposición de quien esto escribe. Aunque el resultado presentado también tiene un detalle, solucionando tal y como se muestra e inclusive relajando el número de decimales para π , se obtiene 1.69, no 1.66.

La ley de probabilidad que rige la relación entre el spread y la prima de opción se señala a continuación. Se comprende que m representa algún precio menor al precio de ejercicio³, h representa el spread y x los distintos precios; entonces: para una posición call long, los precios entre $-\infty$ y m y entre m y $m + h$ implican pérdidas y entre $m + h$ e ∞ , ganancias; como integrales, los tres casos son (Bachelier, 1900, pp. 21-22):

$$h \int_{-\infty}^m p dx \quad (4.5.10) - \int_m^{m+h} p(m+h-x) dx \quad (4.5.11) \int_{m+h}^{\infty} p(x-m-h) dx \quad (3.5.12)$$

$$\text{O bien:} \quad h + m \int_m^{\infty} p dx = \int_m^{\infty} px dx \quad (3.5.13)$$

Si el spread es igual al valor de la prima, es decir $m = 0$, para Bachelier es una “opción simple”, y en este caso se usa la letra a (Bachelier, 1900, p. 22):

$$a = \int_0^{\infty} px dx = \int_0^{\infty} \frac{x}{2\pi k \sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4\pi k^2 t}} dx = k \sqrt{t} \quad (3.5.14)$$

Esta integral representa la posibilidad de beneficios posicionándose en una opción simple (Bachelier, 1900, p. 23). De esta expresión, se concluye que el valor de una opción

³ La terminología “true prices”, “true spreads”, “declaration of options” de las que proviene m no se han encontrado en la literatura moderna. Estaban basados en las *Rentes*, bono perpetuo de la 3er República Francesa.

simple es proporcional a la raíz cuadrada del tiempo transcurrido (Bachelier, 1900). Si se expresa la integral anterior como función de a , se tiene (Bachelier, 1900, p. 23):

$$p = \frac{1}{2\pi a} e^{-\frac{x^2}{4\pi a^2}} \quad (3.5.15)$$

Para un intervalo dado (Bachelier, 1900, p. 23): $\frac{1}{2\pi a} \int_0^u e^{-\frac{x^2}{4\pi a^2}} \quad (3.5.16)$

Esta probabilidad es independiente de a y por extensión del tiempo (Bachelier, 1900, p. 23). Si $u = a$ (Bachelier, 1900, p. 23):

$$\int_0^a p \, dx = \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{24\pi^2} + \frac{1}{320\pi^3} - \dots = 0.155 \dots \quad (3.5.17)$$

Entonces: $\int_a^\infty p \, dx = \frac{1}{2} - \int_0^a p \, dx = 0.345 \dots \quad (4.5.18)$

La serie anterior fue corroborada en Excel y es correcta. Así pues, “The probability of profit for the acquirer of a simple option is independent of the expiry date. Its value is 0.345” [La probabilidad de ganancias para el tenedor de una opción simple es independiente de la fecha de expiración. Su valor es: 0.345] (Bachelier, 1900, p. 23).

En el caso de una operación Straddle, la probabilidad de obtener ganancias para la posición corta está dada por (Bachelier, 1900, p. 23):

$$2 \int_0^{2a} p \, dx = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{3\pi^2} + \frac{2}{10\pi^3} - \dots = 0.56 \quad (3.5.19)$$

Al igual que (3.5.17), esta expresión también fue corroborada en Excel y esta vez resultó 0.575, un error de al menos una centésima. Para la posición larga, simplemente: $1 - 0.56 = 0.44$ (Bachelier, 1900, p. 24). Hasta este punto, Bachelier indica que k , usada desde la ecuación (3.5.5) cuando $t = 1$, representa el “Coefficient of Instability”, un concepto que se conoce actualmente como *volatilidad*. Se aclara que solo se puede aproximar. Se denota como (Bachelier, 1900, p. 24):

$$a = k\sqrt{t} \quad (3.5.20)$$

En el resto de la tesis presenta resultados y tratados matemáticos para otros instrumentos financieros. Se considera la versión de Venegas Martínez como relevante para esta investigación, por lo que se muestra a continuación. Considerando que en la época de Bachelier en París se negociaban opciones “francesas”, es decir, cuya prima es pagada a vencimiento, independientemente de que termine out o in the money. Se tiene la siguiente versión del modelo del galo (Venegas Martínez, 2008, p. 124):

$$C = \int_K^{\infty} s f_{S_T|S_0}(s|S_0) ds - e^{-rT} K \Phi\left(-\frac{K}{\sigma\sqrt{t}}\right) \quad \text{Con: } f_{S_T|S_0}(s|S_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma} e^{-\frac{(s-s_0)^2}{2\sigma^2 t}}$$

Aquí está presente la función de densidad de la distribución normal (es la derivada de la probabilidad acumulada de esa distribución), pero con el elemento tiempo agregado. Si se pagara la prima antes de vencimiento, simplemente se agrega un factor de descuento (Venegas Martínez, 2008, p. 124):

$$c = e^{-rT} \int_K^{\infty} s f_{S_T|S_0}(s|S_0) ds - e^{-rT} K \Phi\left(-\frac{K}{\sigma\sqrt{t}}\right)$$

Mientras los resultados de esta investigación se estaban escribiendo, el 21 de abril de 2020 los futuros sobre el WTI entraron en terreno negativo (para la serie histórica véase: <https://fred.stlouisfed.org/graph/?g=NPX>). Ante tal evento, el Chicago Mercantil Exchange (CME, 2020) emitió un comunicado donde la cámara de compensación de esa bolsa introduce el modelo de Bachelier para la valuación de opciones sobre futuros.

Si se tiene en cuenta que el día 21 de abril, ese contrato de futuros cotizó al cierre en \$ -37.63 USD y usando los datos predefinidos para los contratos que vencen el 17 de agosto de este año, con $K = \$39$, $T = 60$ días aproximadamente, una tasa de interés libre de riesgo de 0.31% y una volatilidad de 20.10%, en la calculadora de opciones de Chicago Mercantil Exchange (s.f.) el valor para una put es de \$76.59 y cero para call.

Bronzin

A continuación, se expone lo más relevante del trabajo del alemán Vinzenz Bronzin: “Theorie der Prämieneschäfte” (Teoría del negocio de las primas) (1908). Se usa la traducción al inglés encontrada en la antología “Vinzenz Bronzin’s Option Pricing Models. Exposition and Appraisal” (2009) editada por Wolfgang Hafner y Heinz Zimmerman y traducida a ese idioma por Igor Uszczapowski.

Para Bronzin, las opciones son instrumentos que acompañan a un futuro, sirven para decidir si se ejecuta la compra o venta del subyacente en la fecha estipulada del futuro a un precio B , pero las opciones tienen su propio precio de ejercicio. Además, se les llama “dout contracts”; a la posición long, “conditional” (denotado como P_1) y a short como “contrained” (P_2) (Bronzin, 1908). La prima se pagaba hasta el vencimiento o poco antes de él. También señala que una posición corta muy grande es peligrosa (¿Nick Leeson?). Explica la operación

de cobertura ('covered') y la versión germana del Straddle, nombrado como 'Stellage contracts' (Bronzin, 1908).

Después, se divide a las primas como normales y como 'skewed' (sesgadas). Las normales (descritas hasta el momento), es cuando a vencimiento, coinciden el precio del futuro y el precio strike de la opción (at the money). El segundo tipo es cuando hay un spread entre ambos, denotado con M (en terminología actual, ¿qué tanto está la opción *in the money*?) (Bronzin, 1908). Este segundo tipo, parece ser más cercano a las opciones actuales, pues un negociante buscaría que la opción no quede at the money. Asimismo, presenta su versión de la paridad put-call, dada como (Bronzin, 1908, p. 133):

$$P_2 = P_1 + M \quad (3.5.21)$$

En la notación moderna, se considera un valor presente, en este caso es inexistente pues la prima se paga el día del vencimiento. Como Bachelier, Bronzin refiere a las fluctuaciones del mercado. Se denota con ω y con ω_1 las fluctuaciones por encima y por debajo del precio futuro B (para Zimmermann (2009a) es el límite superior de la probabilidad), se tiene (Bronzin, 1900, p. 154):

$$\int_0^\omega f(x)dx + \int_0^{\omega_1} f_1(x)dx = 1 \quad (3.5.22)$$

Como función (Bronzin, 1900, p. 154):

$$F(x) = \int_x^\omega f(x)dx \quad y \quad F_1(x) = \int_x^{\omega_1} f_1(x)dx \quad (3.5.23)$$

Donde F(x) indica la probabilidad de que el precio de mercado supere determinado valor x (Zimmermann, 2009a). Ahora, los contratos "normales" donde la ganancia (ω) en el punto B + x está denotada como x - P y las pérdidas (ω_1) en B - x están denotadas como -P. Para las posiciones call y put long respectivamente (Bronzin, 1908, p. 157):

$$P_1 = \int_0^\omega xf(x)dx \quad P_2 = \int_0^{\omega_1} xf_1(x)dx \quad (3.5.24)$$

De las opciones "skewed", para call y put respectivamente (Bronzin, 1908, pp. 159-160):

$$P_1 = \int_M^\omega (x - M)f(x)dx \quad y \quad P_2 = \int_0^M (M - x)f(x)dx + \int_0^{\omega_1} (M + x)f_1(x)dx \quad (3.5.25)$$

Las expresiones anteriores son generalizaciones de la (3.5.23) (Bronzin, 1908). Donde x es el spread entre el precio del futuro B y el precio spot del subyacente; M, como se mencionó antes, es a su vez, el spread entre el precio strike de la opción y el precio futuro B. Parte del artículo de Zimmermann (2009a), "A Review and Evaluation of Bronzin's Contribution from a Financial Economics Perspective" está enfocado en el trabajo de Bronzin

a partir de la sección 8 del capítulo I de la segunda parte. La exposición sobre los resultados del resto de la investigación se apoya en este artículo.

Se retoma de (3.5.25) el valor para P_1 (la call), de las opciones que Bronzin llama “skewed”, de la cual se obtienen algunas ecuaciones diferenciales, para call y put (Bronzin, 1908, pp. 164-165):

$$\frac{\partial P_1}{\partial M} = - \int_M^\omega f(x)dx = -F(M) \quad \frac{\partial P_2}{\partial M} = 1 - \int_M^\omega f(x)dx \quad (3.5.26)$$

El signo negativo está dado por la definición de la regla de Leibniz para el límite inferior de este tipo de integrales (Bronzin, 1908). Donde $F(M)$ es la probabilidad de que sea ejercida la opción (Zimmermann, 2009a). La segunda derivada es (Bronzin, 1908, p. 164):

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial M^2} = f(M) \quad (3.5.27)$$

Donde $f(M)$ es la distribución de densidad de la función en $x = M$ (Zimmermann, 2009a, p. 216). Ahora, P_1 en función de M (Bronzin, 1908, p. 164):

$$P_1 = - \int F(M)dM + C \quad (3.5.28)$$

Sobre esta expresión, Bronzin (1908, p. 164) dice que: “can be accomplished in a fashion quite different compared to the direct evaluation of its integral, which in turn may be of great advantage, depending upon which form function $f(x)$ takes” [puede alcanzarse de una manera muy diferente comparada con la valuación directa de su integral, que a su vez, puede ser de gran ventaja, dependiendo de la forma que adopte la función $f(x)$]. Esa es la clave, la forma que adopte $f(x)$, que es justo lo que explora Bronzin en el resto de su obra y lo que analiza Zimmermann. Bronzin propone buscar $F(X)$ (3.5.23) (es decir, la función primitiva de $f(x)$), usando el proceso de mínimos cuadrados (econometría).

Bronzin propone seis funciones: constante (distr. rectangular), lineal (distr. triangular), cuadrática, exponencial, normal y binomial. Aquí se presentan solo la versión cuadrática y normal. Dada la expresión (3.5.22), todas las funciones que propone Bronzin cumplen (Bronzin, 1908, p. 169):

$$\int_0^\omega f(x)dx = \int_0^{\omega_1} f_1(x)dx = \frac{1}{2} \quad (3.5.29)$$

A continuación, se presentan las formas más importantes de estas:

Distribución cuadrática (Bronzin, 1908, pp. 170-182; Zimmermann, 2009a, p. 225):

Función: $f(x) = a + bx + cx^2$ Densidad: $f(x) = \frac{3(\omega-x)^2}{2\omega^3}$

Constantes: $a = \frac{3}{2\omega}$, $b = \frac{-3}{\omega^2}$, $c = \frac{3}{2\omega^3}$

Núcleo de precios (primera derivada (4.2.26)): $-F(M) = -\frac{(\omega-M)^3}{2\omega^3}$

Call (P_1 en función de M , (4.2.28)): $P_1 = \frac{(8\omega-M)^4}{8\omega^3}$

Call y put at the money: $P = \frac{\omega}{8}$

Distribución normal ($\omega = \infty$) (Bronzin, 1908, pp. 188-190; Zimmermann, 2009a, p. 229):

Densidad: $f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$

Núcleo de precios (primera derivada (4.2.26)): $-F(M) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-t^2} dt$

Call (P_1 en función de M , (4.2.28)): $P_1 = \frac{e^{-M^2 h^2}}{2h\sqrt{\pi}} - F(M)$

Call y put at the money: $P = \frac{1}{2h\sqrt{\pi}}$

Zimmermann (2009a, p. 248), presenta la siguiente simplificación del modelo de Bronzin a notación actual:

$$P_1 = BN(z_2 + \sigma) - (K - B)N(z_2) \text{ con: } z_2 = -\frac{K-B}{\sigma}$$

Con $B =$ Precio del futuro del activo subyacente, $N(\cdot) =$ Distribución normal acumulada. Con la paridad put-call se obtendría la prima put. *La distribución normal no debe ser estandarizada, sino, el modelo solo mostrara valor intrínseco para call.

3.6 Sprenkle, Boness y Samuelson

En el transcurso de la investigación se encontró la obra original de Paul Samuelson (1965) “Rational theory of warrant pricing”, pero “Warrant prices as indicators of expectations and preferences” (1961, 1964) de C. M. Sprenkle y “Elements of a theory of stock-option value” (1964) de J. Boness no fueron halladas accesibles. Afortunadamente Zimmermann (2009a) presenta estos modelos bajo notación actual.

Sprenkle

En el modelo de C. M. Sprenkle (1961), los precios de los activos siguen una distribución log normal (contrario a la concepción de Bachelier, que consideraba precios negativos), estos

precios tienen a su vez una trayectoria browniana. La pendiente del rendimiento de los activos (α) es positiva. Finalmente, la aversión al riesgo (η) es reconocida, pero no descontada (o tasa cero) por eso la segunda parte de la ecuación no tiene factor de descuento. Para obtener put, se aplica simplemente la paridad put-call. Se tiene (Zimmermann, 2009a, p. 248):

$$\text{Call} = Se^{\alpha T}N(z_2 + \sigma) - K(1 - \eta)N(z_2) \quad \text{Donde: } z_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right) * T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Boness

J. Boness (1964) postula que los precios de los activos también siguen una distribución log normal, y por ende, siguen un movimiento geométrico browniano, así como el rendimiento esperado de los activos (α) es positiva; este rendimiento esperado se usa para descontar la segunda parte de la ecuación. z_2 es igual que en el modelo de Sprenkle. También se puede usar la paridad put-call para obtener el valor de put. Entonces (Zimmermann, 2009a, p. 248):

$$\text{Call} = SN(z_2 + \sigma) - Ke^{-\alpha T}N(z_2)$$

Para ejemplificar, se supondrá que α se estima mediante el modelo *Capital Asset Pricing Model* (CAPM)⁴. Para el vector de precios de Apple (AAPL) (Nasdaq, 2020a) y los puntos del índice S&P 500 (^GSPC) (Nasdaq, 2020b) en el intervalo 07/06/2019 a 08/06/2020, y un *yield* de 0.17% de los títulos del bono soberano de EEUU a 10 años (US10YT) en este mismo periodo, se obtuvo un CAPM (α) = 0.2%. Con esta α , y con $r = 1.49\%$, $T = 60$ días, $\sigma = 40\%$, $S_t = \$350$ y $K = \$320$, para el modelo de Boness se obtiene $\text{call} = \$65.284138$ y $\text{put} = \$34.490457$. En el ANEXO I se encuentran un código en VBA para este modelo.

Samuelson

El trabajo del segundo Nobel de Economía, Paul Samuelson no necesita presentación, de hecho, podría decirse que este fue uno de sus trabajos “menores”. El artículo contiene varios pasajes interesantes antes de la descripción del modelo, de hecho, desde la primera página

⁴ Modelo que proporciona el rendimiento que *se debería esperar* por un determinado activo financiero. Esta dado por: $R_f + \beta(R_m - R_f)$. La tasa de interés libre de riesgo, más la diferencia entre el rendimiento de mercado y la tasa anterior, multiplicada por la beta del activo (donde $\beta = \text{cov}(R_{\text{activo}}, R_{\text{mercado}}) / \text{var}_{\text{mercado}}$).

aclara que el Movimiento Browniano Geométrico fue concepción suya para corregir las imperfecciones del modelo de Bachelier (el uso del movimiento Browniano aritmético, que implica precios negativos para las acciones) (Samuelson, 1965, p.13):

To correct this, I introduce the “geometric” or “economic Brownian motion”, with the property that every dollar of market value is subject to the same multiplicative or percentage fluctuations per unit time regardless of the absolute price of stock. This led to the log-normal process for which the value of a call or warrant has these two desired properties: for short times, the \sqrt{t} law holds with good approximation, and for $t \rightarrow \infty$, the value of the call approaches the value of the common stock. [Para corregir esto, presento el “movimiento Browniano geométrico” o “económico”, con la propiedad de que cada dólar de valor de mercado está sujeto a las mismas fluctuaciones multiplicativas o porcentuales por unidad de tiempo, independientemente del precio absoluto del precio de la acción. Esto conduce al proceso log-normal para el cual el valor de la call o warrant tiene estas dos propiedades deseadas: para periodos cortos, la ley \sqrt{t} se mantiene con buena aproximación y para $t \rightarrow \infty$, el valor de la call se aproxima al valor de las acciones].

Cabe resaltar que nunca se refiere a estos instrumentos como “opciones”, sino como “warrants” o simplemente calls, además de que abarca tanto estilo americano como europeo. (Samuelson, 1965). Después describe las herramientas probabilísticas que usará en su modelo. Se introduce el primer axioma de su teoría, el numeral α , como antes Sprenkle y Boness, que indica la tasa de crecimiento del retorno esperado para las acciones (el subyacente), que es constante y establece que el precio de la acción es una distribución de probabilidad definida (Samuelson, 1965, p. 14 y p. 20):

$$E[X_{t+T}|X_t] = \int_0^{\infty} X dP(X, X_t; T) = X_t e^{\alpha t}, \alpha \geq 0 \quad (3.6.1)$$

Donde X denota el precio de la acción. El límite inferior de la integral es cero, de acuerdo a la cita larga anterior. También describe su concepción del movimiento Browniano geométrico (Samuelson, 1965, pp. 15-17), donde se introduce el uso de la distribución log-normal para su modelo. Después de establecer la base matemática, presenta las características de estos instrumentos y argumentos de no arbitraje. El segundo axioma reza:

las opciones también poseen expectativa de crecimiento esperado, como las acciones (Samuelson, 1965, p. 19):

$$\beta \geq \alpha = \log_e \int_0^\infty X dp(X, x; 1) \geq 0 \quad (3.6.2)$$

Entonces, α y β representan estas dos ideas. Cuando $\beta = \alpha \geq 0$, es decir el rendimiento de la opción y de la acción son iguales, “there is never any advantage in converting the warrant before the end of its life” (no hay ventaja en convertir el warrant antes del final de su vida [es decir, como el estilo americano]) (Samuelson 1965, p. 22), entonces (Samuelson 1965, p. 22):

$$F(x, T) = e^{-\beta T} \int_0^\infty F(X, 0) dP(X, x; T) = e^{-\beta T} \int_1^\infty (X - 1) dP(X, x; T) \quad (3.6.3)$$

Dado $\beta = \alpha$, se tiene (Samuelson, 1965, p. 23):

$$P(x; T) = N(\log x, \mu t, s\sqrt{t}) \text{ con } N(y; 0, 1) = N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (3.6.4)$$

Cuando $\beta > \alpha \geq 0$, de la función anterior, resulta (Samuelson, 1965, p. 24):

$$x \geq F(x, T) \geq \text{Max}[0, x - 1, e^{-\beta S} \int_0^\infty F(X, T - S) dP(X, x; S)] \quad (3.6.5)$$

A su vez, sugiere que para obtener α calculando una media porcentual por unidad de tiempo, o bien: $E[X_{t+1}]/X_t = e^\alpha$. Para β , despejar de: $\gamma = \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\sigma^2}\right) + \sqrt{\left[\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\sigma^2}\right]^2 + 2\left[\frac{\beta}{\sigma^2} - \frac{\alpha}{\sigma^2}\right]}$ estimando primero σ^2 (Samuelson, 1965, p. 29). El problema en general con el modelo de Samuelson tanto para α como para β es que son valores desconocidos que deben ser estimados.

Zimmermann (2009a, p. 248) también presenta el modelo de Samuelson a notación actual, con z_2 igual al modelo de Sprenkle: $\text{Call} = Se^{(\alpha-\beta)T} N(z_2 + \sigma) - Ke^{-\beta T} N(z_2)$.

Al igual que con Bachelier, también se considera relevante la inclusión de la versión actual del modelo de Samuelson de Venegas Martínez (2008, p. 127). Si $\beta \geq \alpha \geq 0$, entonces:

$$c = S_0 e^{(\alpha-\beta)T} - Ke^{-\beta T} + e^{-\beta T} (K\Phi(-d) - \int_0^K s f_{S_T|S_t}^{(\alpha)}(s|S_T) ds)$$

$$\text{Con: } f_{S_T|S_0}^\alpha(s|S_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma} e^{-\frac{(s-s_0)^2}{2\sigma^2 t}} \quad \text{y } d = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) * T}{\sigma\sqrt{T}}$$

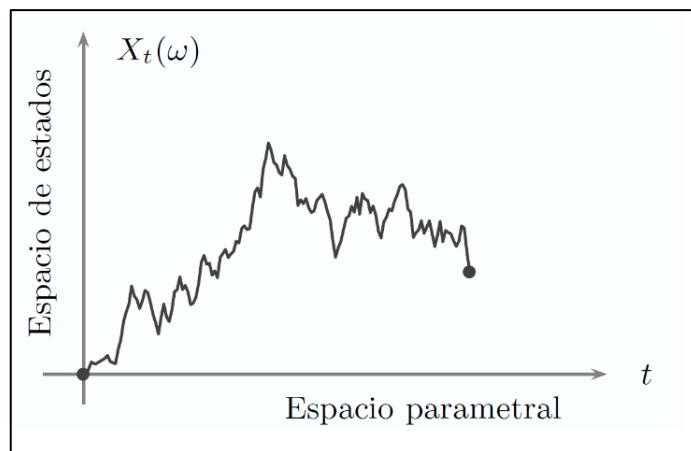
$$\text{Si } \beta = \alpha = 0, \text{ cambia por: } c = S_0 \Phi(d + \sigma\sqrt{t}) - Ke^{-\alpha T} \Phi(d)$$

3.7 Procesos estocásticos

En esta sección se describen conceptos básicos de matemáticas estocásticas para entender el movimiento Browniano geométrico, clave en el modelo Black-Scholes-Merton. La ruta temática es la de Rincón (2011): definición, caminata aleatoria, propiedad de Márkov, cadena de Márkov, martingala y filtración, Movimiento Browniano y proceso de Wiener, cálculo estocástico de Itô, ecuaciones integrales (diferenciales) estocásticas y finalmente el Movimiento Browniano Geométrico.

Para definir un proceso estocástico (PE), se parte de un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) : “Un *proceso estocástico* es una colección de variables aleatorias $\{X_t; t \in T\}$ parametrizada por un conjunto T , llamado *espacio parametral*, y con valores en un conjunto S llamado *espacio de estados*” (Rincón, 2011, p. 1). Donde: X_t “El estado de un sistema al tiempo t ” (Rincón, 2011, pp. 1-2). $t \in T$ puede ser discreta: $\{1, 2, \dots\}$ o continua: $[0, \infty)$; finalmente, $X_t \in S \subseteq \mathbb{R}$ En la Gráfica 3.23 se presentan los espacios de estados y parametral con una trayectoria estocástica continua.

Gráfica 3.23



Fuente: Tomado directamente de Rincón (2011, p. 2).

Caminata aleatoria (Rincón, 2011): proceso estocástico a tiempo discreto $\{X_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$ que pasa en un paso a la izquierda (-1 o probabilidad ‘ q ’) o en otro paso a la derecha ($+1$ o probabilidad ‘ p ’) con $p + q = 1$, así para cada estado del proceso. “Dado que estas probabilidades no dependen de n , se dice que son homogéneas en el tiempo, es decir, son las

mismas para cualquier valor de n ” (Rincón, 2011, p. 6). Si $p = q = \frac{1}{2}$ la caminata regresa al origen (Rincón, 2011).

Proceso de Márkov: (Rincón, 2011, p. 3) el proceso $\{X_t: t = 0, 1, \dots\}$ donde $X_t \in S$ es discreto, si “para cualesquiera estados x_0, x_1, \dots, x_{n-1} (pasado), x_n (presente), x_{n+1} (futuro) en S , se cumple la igualdad:

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n)” \text{ [propiedad de Márkov]}$$

Esto quiere decir que la historia del proceso hasta X_{n-1} es irrelevante cuando se conoce x_n , por eso se quita $X_0 = x_0$ (Rincón, 2011). “En particular, los sistemas dinámicos deterministas dados por una ecuación diferencial pueden considerarse procesos de Márkov pues su evolución futura queda determinada por la posición inicial del sistema y una ley de movimiento especificada” (Rincón, 2011, p. 3). La caminata aleatoria cumple esta propiedad (Rincón, 2011).

Cadenas de Márkov (Rincón, 2011, pp. 23-27): “Proceso estocástico a tiempo discreto $\{X_n: n = 0, 1, \dots\}$ con espacio de estados discreto $S \subseteq \{0, 1, 2, \dots\}$ que satisface la propiedad de Márkov”. A la distribución de la variable aleatoria X_0 , es decir $\{P(X_0 = 0), P(X_0 = 1), \dots\}$ se le llama distribución inicial. Se supone que esta distribución es conocida; en algunas ocasiones se presumirá que la cadena inicia en un valor determinado, es decir, que la distribución inicial está concentrada en un solo punto: a partir del valor inicial de la Cadena de Márkov se generan al azar los subsecuentes valores de acuerdo con las siguientes probabilidades de transición en un paso (recordar que estas cadenas son discretas). (Rincón, 2011).

A la probabilidad $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P_{ij}(n, n+1)$ se le llama “probabilidad de transición del estado i , en el tiempo n , al estado j en el tiempo $n+1$ ” (Rincón, 2011, p. 24). Esta probabilidad de transición es estacionaria en el tiempo si no depende de n . Estas probabilidades a tiempo discreto pueden establecerse como matrices (Rincón, 2011).

Martingalas (Rincón, 2011): sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad, y sea $\{F_n\}_{n \geq 1}$ una filtración (conjunto $F = (F_t)_{t \in T}$ de σ -álgebras tales que $F_t \subset F$ para toda $t \in T$). Este conjunto es creciente en el sentido de que $F_s \subset F_t$ cuando $s, t \in T$ y $s \leq t$; así, F_t representa la

información disponible hasta el momento t . Si se adapta un proceso estocástico a una filtración, “el valor que tome X_t en t depende solo de la información disponible en t ”. (Venegas Martínez, 2008, pp. 35-36). La caminata aleatoria cumple propiedades de martingala (Venegas Martínez, 2008). Se dice que un proceso a tiempo discreto $\{X_n: n \geq 1\}$ es una martingala respecto de una filtración $\{F_n\}_{n \geq 1}$ si (Rincón, 2011):

- a) es integrable;
- b) es adoptado a la filtración;
- c) para cualquier $n \geq 1$, $E(X_{n+1} | F_n) = X_n$

En el caso de las martingalas a tiempo continuo, sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad, y sea $\{F_t\}_{t \geq 0}$ una filtración: Se dice que un proceso a tiempo continuo $\{X_t: t \geq 0\}$ es una martingala respecto de una filtración $\{F_t\}_{t \geq 0}$ si (Rincón, 2011):

- a) es integrable;
- b) es adoptado a la filtración;
- c) para cualquiera $0 \leq S \leq t$, $E(X_t | F_S) = X_S$

Movimiento Browniano (MB)

Se tiene espacio de probabilidad (Ω, F, P) , movimiento cuyas trayectorias tienen las siguientes propiedades (Rincón, 2011):

- a) las trayectorias son continuas;
- b) los desplazamientos son erráticos y parecen no tener relación uno con otro en intervalos de tiempo distintos (independientes);
- c) la partícula sometida a observación tiene múltiples colisiones.

Sobre la relación entre la caminata aleatoria y el Movimiento Browniano, Venegas Martínez (2008, p. 49) dice que: “Las trayectorias de este proceso son continuas pues el movimiento Browniano es el límite en tiempo continuo de una caminata aleatoria discreta (...) las propiedades de martingala y de Márkov son heredadas al movimiento Browniano”.

MB a una dimensión: movimiento unidimensional de parámetro σ^2 es un proceso estocástico $\{B_t: t \geq 0\}$ con valores en \mathbb{R} que cumple con [En otras literaturas, se usa W_t , (por proceso estocástico de Wiener) en lugar de B_t (por Browniano)] (Rincón, 2011, p. 207; Venegas Martínez, 2008, pp. 33-34):

1. $B_0 = 0$ c.s. [aunque no necesariamente] y con probabilidad: $P[B(0)] = 1$; * ‘c.s’ significa “casi seguramente”.

2. tiene trayectorias continuas;

3. tiene incrementos (variables aleatorias) estocásticamente independientes, si $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, entonces:

$$B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$$

4. tiene incrementos estacionarios:

$$B(t + Dt) - B(t) \stackrel{d}{=} B(s + Ds) - B(s), \quad \forall s, t: 0 \leq s \leq t \in [0, \infty)$$

5. para $0 \leq S < t$: $B_t - B_s \sim N(0, s^2(t - s))$.

Donde: $E(B_t) = 0$; $\text{var}(B_t) = s^2t$

Definición: Sea $t > 0$ y sean $x, y \in \mathbb{R}$.

Se define $P(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2t}} * e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2t}}$ [Función de densidad de la distribución normal (pdf)]

$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}} dy$ [Función de Distribución de probabilidad acumulada (cdf)]

Proposición: si $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, entonces el vector $(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n})$ tiene función de densidad $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(t_1, 0, x_1) * P(t_2 - t_1, x_1, x_2) \dots P(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n)$.

MB estándar (Rincón, 2011, pp. 208-209; Venegas Martínez, 2008, p. 35; Hull, 2009b, pp. 261-263):

1. Se dice que un movimiento Browniano es estándar cuando $\sigma^2 = 1$;

2. se denota por $\{B_t^x : t \geq 0\}$ es un movimiento que inicia en x (aunque no necesariamente);

3. un movimiento Browniano n -dimensional es un proceso de la forma $(B_1(t), \dots, B_n(t))$ en donde las coordenadas son movimientos Brownianos unidimensionales e independientes.

Se tiene entonces:

a) $E(B_t) = 0$;

b) $\text{var}(B_t) = E(B_t^2) = t$ (de donde se obtiene la famosa relación \sqrt{t});

c) $E(B_t - B_s) = t - s, 0 \leq S < t$;

d) $\text{cov}(B_s, B_t) = S \wedge t$;

e) para $0 < S < t$: $B_s | (B_t = y) \sim N(y*s/t, (t-s)*s/t)$ con B_s una variable aleatoria.

El movimiento Browniano cumple con la propiedad de Márkov (Rincón, 2011, pp. 210-211):

$$P(B_{t_{n+1}} \in A \mid B_{t_1} = X_1, \dots, B_{t_n} = X_n) = P(B_{t_{n+1}} \in A \mid B_{t_n} = X_n)$$

Donde: $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1}$; $X_1, \dots, X_n \in \mathbb{R}$; A es un conjunto de Borel.

A su vez, el movimiento Browniano es una martingala continua (Rincón, 2011, p. 211):

- a) Es integrable, $E(B_t) = 0$;
- b) es adaptado a su filtración natural $\{F_t\}_{t \geq 1}$;
- c) satisface que, para $0 \leq S < t$, $E(B_t \mid F_S) = B_S$ c.s.

Muy importante: sea $t_0 \geq 0$ fijo. Con probabilidad = 1, $\{B_t\}$ no es diferenciable en la forma clásica en t_0 y aún no lo es en ningún punto $t > 0$ (Rincón, 2011, pp. 216-217).

*¿Comportamiento fractal?

Variación cuadrática media de una caminata aleatoria en tiempo arbitrario (Venegas Martínez, 2008, p. 48). La variación cuadrática de W_n (una caminata aleatoria) es

$$v_t^2 = E[v_n^2(t)] = t$$

De aquí se obtiene la famosa relación \sqrt{t} .

Cálculo estocástico

El movimiento Browniano no es diferenciable de la forma clásica en ningún punto. El trabajo de Kiyoshi Itô en la década de los cincuenta, está enfocado en el cálculo de este tipo de procesos. Su aportación en japonés no se consultó directamente, sino a las simplificaciones de los autores citados en esta sección. “La integral estocástica de Itô de un proceso simple X (...), respecto del movimiento Browniano, denotado por $I(X)$, se define como la variable aleatoria” (Rincón, 2011, p. 240):

$$I(X) = \int_0^T X_s dB_s = \sum_{k=0}^{n-1} X^{(k)} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})$$

“(…) la integral estocástica es el límite en media cuadrática de una suma de términos que comprenden incrementos independientes de un movimiento Browniano” (Venegas Martínez, 2008, p. 69).

Fórmula de Itô. Teniendo funciones que tienen hasta una segunda derivada, y que esta sigue siendo una función continua, se tiene (Rincón, 2011, p. 250):

$$f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s)ds$$

La forma general para resolver $f(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$, está dada por (Rincón, 2011, p. 252):

$$\int_0^t B_s^n dB_s = \frac{1}{n+1}B_t^{n+1} - \frac{1}{2} \int_0^t nB_s^{n-1}ds$$

Su forma como derivada (Rincón, 2011, p. 251): $df(B_t) = f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}f''(B_t)dt$

La anterior fórmula está construida con la serie de Taylor. Para ilustrar el funcionamiento de esta fórmula, se usa el ejemplo visto en Rincón (2011, p. 251): si $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ resolviendo con lo anterior, se tiene:

$$\frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}B_0^2 = \int_0^t B_s dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t 1 ds \quad \text{reordenando: } \int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t$$

Ecuaciones diferenciales estocásticas

Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad, $\{B_t\}$ un movimiento Browniano unidimensional adaptado a la filtración $\{F_t\}$. “Sean $b(t, x)$ y $\sigma(t, x)$ dos funciones de $[0, T] * \mathbb{R}$ en \mathbb{R} . Una ecuación estocástica es una ecuación de la forma:

$$dX_t = b(t, X_t)dt + s(t, X_t)dB_t$$

definida para valores de t en el intervalo $[0, T]$, y con condición inicial la variable aleatoria X_0 que se presupone F_0 -medible e independiente del movimiento Browniano. La ecuación anterior se interpreta como la ecuación integral:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$$

en donde la primera es una integral de Riemann, mientras que la segunda es una integral estocástica de Itô. Al proceso X_t , se le llama proceso de Itô (Rincón, 2011, p. 253)”. Algunas notaciones como la de Venegas Martínez (2008, p. 58) usan μ en lugar de b y a esa expresión la denominan “Lema de Itô”.

Los coeficientes $b(t, X_t)$, $\sigma(t, X_t)$ y el origen X_0 son conocidos, obviamente el proceso X_t no lo es. A su vez, $b(t, X_t)$ es el coeficiente de tendencia (drift o deriva), mientras que $\sigma(t, X_t)$ es el coeficiente de difusión (Rincón, 2011). “El proceso solución puede interpretarse como el estado de un sistema que evoluciona de manera determinista gobernado por la parte

no aleatoria de la ecuación (la tendencia), pero alterado por un ruido aditivo dado por la integral estocástica (la difusión)” (Rincón, 2011, p. 253).

Para resolver ecuaciones diferenciales estocásticas se usa una variante de la fórmula de Itô presentada. Suponiendo que $\{X_t\}$ es un proceso de Itô dado por:

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

y $f(t, x)$ es una función con primera derivada en t , que sigue siendo continua y hasta con segunda derivada en X que también sigue siendo continua, entonces el proceso $Y_t = f(t, X_t)$ también es un proceso de Itô que satisface (Rincón, 2011, p. 255):

$$dY_t = f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X_t)(dX_t)^2$$

Rincón, nombra a esta expresión como “Fórmula de Itô II” (Rincón, 2011, p. 255). Venegas Martínez (2008, pp. 58-59) presenta las siguientes versiones integrales y diferenciales de lo anterior:

$$X_t := x_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s$$

$$f(X_t, t) = f(x_0, 0) + \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial X_s} \mu_s + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f^2}{\partial X_s^2} \sigma_s^2 \right) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial X_s} \sigma_s dW_s$$

$$df(X_t, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial X_t} \mu_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f^2}{\partial X_t^2} \sigma_t^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial X_t} \sigma_t dW_t$$

Movimiento Browniano Geométrico (económico o exponencial):

La definición dada por Rincón (2011, p. 258): “Sean μ y $\sigma > 0$ dos constantes, y $x_0 > 0$ (a diferencia del movimiento browniano normal, que comienza en cero). El Movimiento Browniano Geométrico es el proceso solución de la ecuación estocástica:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t$$

$$X_0 = x_0$$

Donde dB_t denota la parte estocástica; sin esta, solo se tiene: $dX_t = \mu X_t dt$, con solución $X_t = x_0 e^{\mu t}$. Como se podrá notar, la primera parte de esa ecuación es una función en el sentido determinista, de hecho, describe la trayectoria seguida por un activo financiero que se capitaliza exponencialmente; la segunda parte, es la estocástica: la volatilidad de los activos financieros (Rincón, 2011). La solución a la ecuación planteada (Rincón, 2011, p. 258):

$$X_t = x_0 \exp[(\mu - 1/2\sigma^2)t + \sigma B_t]$$

Propiedades estadísticas (Rincón, 2011, p. 260):

1. $E(X_t) = x_0 e^{\mu t}$
2. $\text{var}(X_t) = x_0^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1)$
3. $\text{cov}(X_t, X_s) = x_0^2 e^{\mu(s+t)} (e^{\sigma^2 s} - 1)$ para $0 \leq s \leq t$

Si x_0 es una variable que representa precios, se tiene (Venegas Martínez, 2008, p. 39):

$$S_t = S_0 \exp[(\mu - 1/2\sigma^2)t + \sigma B_t]$$

La forma logarítmica:

$$\ln(S_t) = \ln(S_0) + (\mu - 1/2\sigma^2)t + \sigma B_t$$

La distribución de lo anterior es normal y con los siguientes momentos:

1. $E[\ln(S_t)] = \ln(S_0) + (\mu - 1/2\sigma^2)t$
2. $\text{var}[\ln(S_t)] = \sigma^2 t$

La ecuación $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t$ sirve para simplificar modelos a notación actual.

La versión en tiempo discreto está dada por (Hull, 2009b, p. 266):

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma t \sqrt{\Delta t} = \Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S t \sqrt{\Delta t}$$

Distribución del rendimiento logarítmico del subyacente (Venegas Martínez, 2008, pp. 150-151 y p. 193; Hull, 2009a, pp. 270-271):

Si $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$, aplicando lema de Itô, se obtiene: $d(\ln S_t) = (\mu - 1/2\sigma^2)T + \sigma dB_t$

A tiempo discreto, $\Delta t = T - t$, se tiene: $\ln S_T - \ln S_0 = (\mu - 1/2\sigma^2)(T - t) + \sigma \sqrt{T-t} \varepsilon$

Con $\varepsilon \sim N(0, 1)$, entonces:

$$\ln S_T - \ln S_0 \sim \Phi \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma^2 T \right] = \ln S_T \sim \Phi \left[\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma^2 T \right]$$

Ejemplo (Hull, 2009a, pp. 270-271): se suponen $S_t = \$40$, rendimiento esperado (μ) de esa misma acción: 16% anual, volatilidad: 20% anual, $T = 6$ meses (1/2 año), se sustituye:

$$\ln S_T \sim \Phi \left[\ln 40 + \left(0.16 - \frac{0.20^2}{2} \right) 0.5, \sigma^2 T \right] = \ln S_t \sim \Phi(3.7588, 0.02)$$

En su ejemplo, Hull utiliza una confianza del 95%, lo que implica 1.96 desviaciones estándar de la media (si fuera del 99.99%, serían hasta 4 desviaciones), y suponiendo que si $s^2T = 0.02$, la raíz cuadrada es 0.1414, entonces (resuelto en Excel):

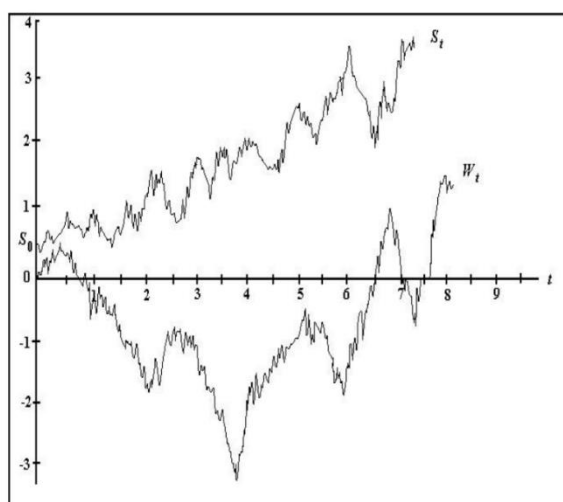
$$3.7588 - (1.96*0.1414) < \ln S_T < 3.7588 + (1.96*0.1414)$$

Se resuelve el logaritmo: $e^{3.7588 - (1.96*0.1414)} < S_T < e^{3.7588 + (1.96*0.1414)}$ que equivale a su vez a: $32.5135 < S_T < 56.5963$ es decir, “hay una probabilidad de 95% de que el precio de la acción en seis meses esté entre 32.51 y 56.59” (Hull, 2009a, p. 271).

Para la media: $40e^{0.16*0.5} = 43.3314$ Y la varianza: $40^2 e^{2*0.16*0.5}(e^{0.2*0.2*0.5} - 1) = 37.9303$.

Finalmente, la Gráfica 3.24 presenta la comparación entre el movimiento browniano geométrico (S_t) y el aritmético (W_t) (el primero no toma valores por debajo de cero).

Gráfica 3.24



Fuente: Tomado directamente de Venegas Martínez (2008, p. 40).

3.8 Black-Scholes-Merton

Esta sección está separada en tres partes. En la primera, se presenta la ecuación diferencial planteada por Fischer Black y Myron Scholes, después su solución. Finalmente, las literales griegas del modelo.

3.8.1 La ecuación diferencial parcial

A continuación, se describe un mecanismo de cobertura (hedging) presentado en ‘Ingeniería Financiera’ de Salih N. Neftci (2008). Esta operación conduce a una serie de flujos de efectivo que se van a considerar como derivadas parciales, que a su vez forman una ecuación diferencial. Con K , T , t , S_t , r y σ ; $C(t)$ indica el valor *justo* de una prima call en el momento t . Se tiene la siguiente función (Neftci, 2008, p. 196):

$$C(t) = C(S_t, t, r, K, \sigma, T) \quad (3.8.1)$$

Si r , K y T son constantes se simplifica (Neftci, 2008, p. 196):

$$C(t) = C(S_t, t) \quad (3.8.2)$$

Las derivadas parciales respecto a S_t , la segunda de S_t y t son (Neftci, 2008, pp. 196-197):

$$\frac{\partial C(S_t, t)}{\partial S_t} = C_s \quad (4.8.3) \quad \frac{\partial^2 C(S_t, t)}{\partial S_t^2} = C_{ss} \quad (3.8.4) \quad \frac{\partial C(S_t, t)}{\partial t} = C_t \quad (3.8.5)$$

Si S_t aumenta, presumiblemente lo hará el valor de la prima $C(t)$ y viceversa (Neftci, 2008, p. 197). El valor de C_s oscila entre (Neftci, 2008, p. 197):

$$0 < C_s < 1 \quad (3.8.6)$$

La segunda derivada también es mayor que cero (3.8.7) (Neftci, 2008). Mientras que (3.8.5), tiene una pendiente negativa, pues el paso del tiempo le resta valor a la opción (véase la Gráfica 3.5) (Neftci, 2008, p. 197):

$$0 < C_{ss} \quad (3.8.7) \quad C_t < 0 \quad (3.8.8)$$

Bajo la perspectiva de un formador de mercado, se tienen opciones call europeas con valor $C(t)$, con K , T , S_t , r y se supone una situación inicial donde $K = S_t$. Este formador ‘se pone largo en el mercado’. No dispone de recursos propios, por lo tanto, la operación debe ser financiada y cubierta. En este ejemplo, se toman recursos a tasa r y además se pueden hacer operaciones en corto (Neftci, 2008).

Ante el riesgo de disminución de la cotización del subyacente -que hace perder valor a la call- es preferible cubrirse con una operación en corto: si ΔS_t en la posición larga, entonces $-\Delta S_t$ en la posición corta. Aunque hay un problema, la función descrita por $C(t)$ (véase Gráfica 3.11) no es lineal y la posición corta en acciones si lo es. Entonces, retomando (3.8.3) ante cambios en S_t , el valor de la opción cambia en (Neftci, 2008, p. 202):

$$\Delta C(t) \cong C_s \Delta S_t \quad (3.8.9)$$

La respuesta de la posición corta es, en este caso (Neftci, 2008, p. 202):

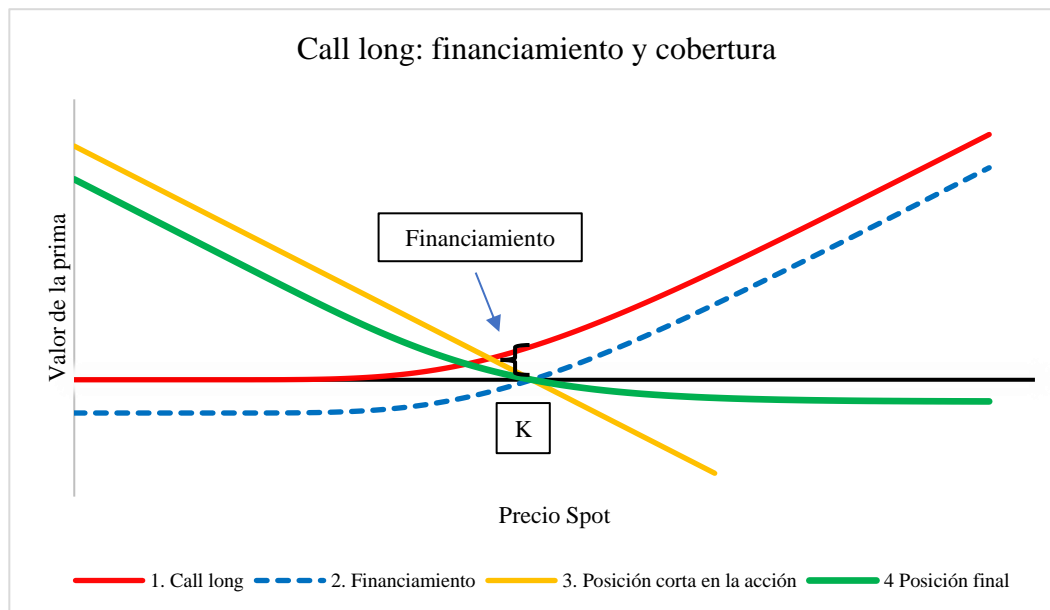
$$-\Delta S_t \quad (3.8.10)$$

Toda la respuesta del portafolio está dada por (Neftci, 2008, p. 202):

$$V_t = \{\text{posición larga } C(t), \text{ posición corta } S_t\} \quad (3.8.11)$$

En la Gráfica 3.25 se describe la operación: la call financiada (azul) y la posición corta sobre la acción (amarillo) se suman, resultando en la utilidad (verde).

Gráfica 3.25



Fuente: Elaboración propia con base en Neftci (2008, pp. 203-204).

En el momento t , a un cambio en S_t , el valor del portafolio es (Neftci, 2008, p. 202):

$$\Delta V_t \cong C_S \Delta S_t - \Delta S_t \quad (3.8.12) \quad (3.8.9 \text{ y } 3.8.10)$$

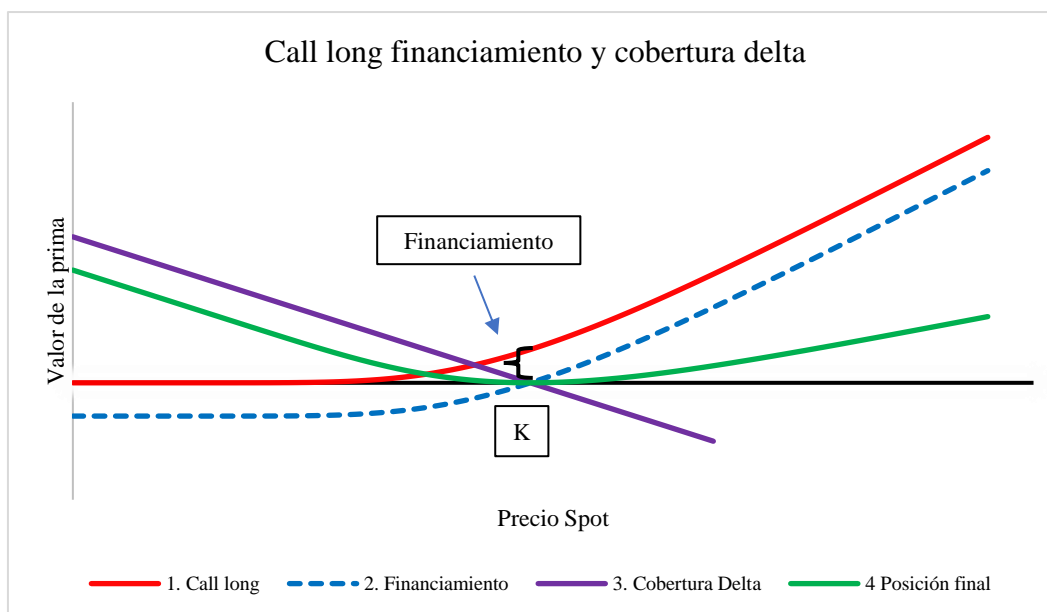
$$\Delta V_t = (C_S - 1) \Delta S_t < 0 \quad (3.8.13)$$

¿Por qué (3.8.13) es menor a cero? En (3.8.6) se establece que $0 < C_S < 1$. Ahora, se adapta una nueva cobertura, una posición corta de C_S unidades de S_t . Y se considera el financiamiento de call (Neftci, 2008, p. 204):

$$V_t = \left\{ \begin{array}{l} \text{posición larga en una unidad de } C(t), \text{ solicitud en préstamo} \\ \text{de } C(t), \text{ posición corta en } C_S \text{ unidades de } S_t \end{array} \right\} \quad (3.8.14)$$

En la Gráfica 3.26 se presenta cómo queda ahora la posición. Para obtenerla, se debe multiplicar el precio de la acción a vender en corto por la delta obtenida. Presumiblemente se eliminan los riesgos derivados de cambios en el precio spot.

Gráfica 3.26



Fuente: elaboración propia con base en Neftci (2008, p. 206).

Se suponen cambios en V_t (valor de la prima) tenemos (Neftci, 2008, p. 204):

$$\Delta V_t \cong [C(S_t + \Delta S_t, t) - C(S_t, t)] - C_s \Delta S_t \quad (3.8.15)$$

Se reconocen en esta ecuación los tres elementos de (3.8.15): call long (3.8.2) considerando ahora los cambios en S_t , su financiamiento y la posición corta como su cobertura. La parte de call long es aproximada con series de Taylor (Neftci, 2008, p. 205):

$$C(S_t + \Delta S_t, t) = C(S_t, t) + \frac{\partial C(S_t, t)}{\partial S_t} \Delta S_t + R \quad (3.8.16)$$

Con R representando al resto de la serie de Taylor. Se sustituye entonces (3.8.16) en (3.8.15), se obtiene (Neftci, 2008, p. 205):

$$\Delta V_t \cong \left[C(S_t, t) + \frac{\partial C(S_t, t)}{\partial S_t} \Delta S_t + R - C(S_t, t) \right] - C_s \Delta S_t \quad (3.8.17)$$

Se retoma (3.8.3) y con manipulación algebraica se tiene (Neftci, 2008, p. 205):

$$\Delta V_t \cong R \quad (3.8.18)$$

El siguiente término de la serie de Taylor -y el más grande de ellos- es (Neftci, 2008, p. 205):

$$\Delta V_t \cong \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C(S_t, t)}{\partial S_t^2} (\Delta S_t)^2 \quad (3.8.19)$$

Ahora, se retoma la expresión (3.8.2): $C(t) = C(S_t, t)$, lo que se acaba de revisar es la cobertura ante una S_t estática, ahora se examina el caso de los efectos del paso del tiempo a esta posición cubierta que se ha descrito. Se considera una secuencia de oscilaciones simples en S_t alrededor de un punto inicial $S_{t0} = S^0$, se permite que (Neftci, 2008, p. 205):

$$t_0 < t_1 < \dots < t_n \quad (3.8.20) \quad \text{con:} \quad t_i - t_{i-1} = \Delta \quad (3.8.21)$$

Hay periodos consecutivos separados en Δ unidades de tiempo. S_t oscila a una tasa anual de σ , alrededor de $S_{t0} = S^0$ (Neftci, 2008). Aunque por supuesto esta es una simplificación: el punto S^0 siempre está cambiando (una vuelta redonda con esta simplificación es: $S^0 \rightarrow S^0 + \Delta S \rightarrow S^0$). “Con $\Delta S = \sigma S^0 \sqrt{\Delta}$ las oscilaciones serán proporcionales a $\sqrt{\Delta}$ ” (Neftci, 2008, p. 206). En el ejemplo, estas oscilaciones tienen tres posibles valores, S^- , S^0 y S^+ , como cadenas de Márkov: $P(S^0|S^+) = 1$, $P(S^0|S^-) = 1$, $P(S^-|S^0) = \frac{1}{2}$, $P(S^+|S^0) = \frac{1}{2}$ (Neftci, 2008, p. 206). Esto se puede ver como (Neftci, 2008, p. 206):

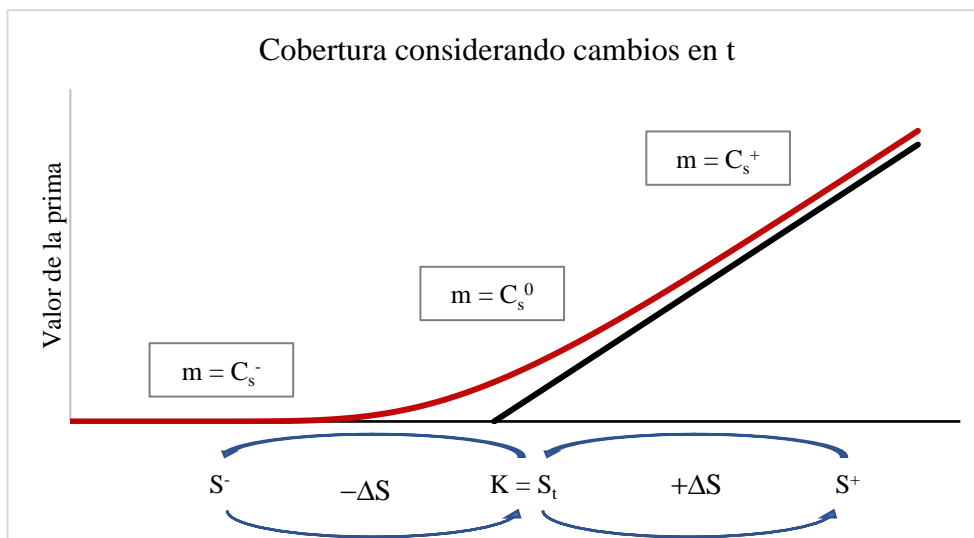
$$S^+ = S^0 + \Delta S \quad (3.8.22) \quad S^- = S^0 - \Delta S \quad (3.8.23)$$

Se deduce que mientras S_t se mueve, la derivada C_S también lo hace, entre los valores C_S^+ , C_S^0 y C_S^- , que tienen la siguiente relación (Neftci, 2008, p. 208):

$$C_S^- < C_S^0 < C_S^+ \quad (3.8.24)$$

La Gráfica 3.27 representa ahora estos cambios:

Gráfica 3.27



Fuente: elaboración propia con base en Neftci, (2008, p. 207).

Esta relación para toda t_i . Como C_S cambia de valor, la razón de cobertura (delta Δ) a través de una posición corta también lo hará. La ganancia viene cuando hay un desplazamiento de S_t^0 a S^- , es decir, las acciones bajan de precio (que es justo la condición necesaria para generar ganancias en una posición corta) como hay que disminuir la posición corta, se compra una porción de acciones que previamente se habían vendido en corto para disminuir la posición y así ajustarla al cambio. Se pueden hacer operaciones en corto cuando el precio está alto con respecto a S_t^0 y cubrirse cuando cae por debajo de éste. Algo similar ocurre cuando avanza a S^+ , se vende en corto alto y se recompra más barato si regresa a S_t^0 (Neftci, 2008). Entonces (Neftci, 2008, p. 208):

$$(C_S^+ - C_S^0)[(S^0 + \Delta S) - S^0] = (C_S^+ - C_S^0)\Delta S \quad (3.8.25)$$

Donde $(C_S^+ - C_S^0)$ es el tamaño de la posición corta en S_t que se tiene después de cada desplazamiento del precio. $(C_S^+ - C_S^0)$ es (3.8.3): “a medida que S_t se desplaza desde S_{t0} hasta un nuevo nivel denotado por $S_{t0} + \Delta S$. Es posible convertir $(C_S^+ - C_S^0)\Delta S$ en una tasa de cambio después de multiplicar por y dividir entre ΔS ” (Neftci, 2008, p. 208), así:

$$(C_S^+ - C_S^0)\Delta S = \frac{C_S^+ - C_S^0}{\Delta S} (\Delta S)^2 \quad (3.8.26)$$

A medida que $\Delta S \rightarrow 0$, se obtiene (3.8.4), es decir (Neftci, 2008, p. 208):

$$\frac{C_S^+ - C_S^0}{\Delta S} \rightarrow \frac{\partial^2 C(S_t, t)}{\partial S_t^2} \quad (3.8.27)$$

Las ganancias por vuelta redonda y por unidad de tiempo están dadas (Neftci, 2008, p. 208):

$$(C_S^+ - C_S^0)\Delta S \cong \frac{\partial^2 C(S_t, t)}{\partial S_t^2} (\Delta S)^2 \quad (3.8.28)$$

$$\frac{\partial^2 C(S_t, t)}{2\partial S_t^2} (\Delta S)^2 \quad (3.8.29)$$

A pesar de esto, no hay oportunidad de arbitraje, al menos teóricamente hablando, por otros costos e ingresos existentes. El formador de mercado no cuenta con recursos propios, y para tomar una posición larga en call, tuvo que pedir un préstamo. Suponiendo tasa constante, para un periodo Δ , se tiene un costo de interés igual a (Neftci, 2008, p. 209):

$$rC\Delta \quad (3.8.30)$$

Ahora, el tiempo disminuye al valor de la prima (Gráfica 3.5) el equivalente a la derivada parcial (3.8.5) multiplicada por Δ unidades de tiempo (Neftci, 2008, p. 209):

$$\frac{\partial C(S_t, t)}{\partial t} \Delta = C_t \Delta \quad (3.8.31)$$

También, se supone que los ingresos percibidos de la venta en corto al principio de la operación se invierten a la misma tasa de interés a la que se tomó el préstamo, los ingresos percibidos son para cada Δ unidades de tiempo (Neftci, 2008, p. 209):

$$rS_t C_S \Delta \quad (3.8.32)$$

Ahora, sumemos todos estos flujos de efectivo para obtener una ecuación diferencial parcial. Si S_t sigue un movimiento browniano geométrico (aplicar cálculo estocástico) y la volatilidad anual es constante, la ecuación (3.8.29) queda como sigue (Neftci, 2008, p. 209):

$$\frac{1}{2} C_{SS} \sigma^2 S_t^2 \Delta \quad (3.8.33)$$

Se suman ahora las ecuaciones (3.8.30, 3.8.32 y 3.8.33) y se igualan a (3.8.31). Es decir, se suman todos los flujos y se igualan a la pérdida diaria del valor de la vida de la opción, esto para cumplir la no oportunidad de arbitraje (Neftci, 2008, p. 210):

$$\frac{1}{2} C_{SS} \sigma^2 S_t^2 \Delta + r C_S S_t \Delta - r C \Delta = -C_t \Delta \quad (3.8.34)$$

Reorganizando y quitando términos comunes, se obtiene la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes (Neftci, 2008, p. 210):

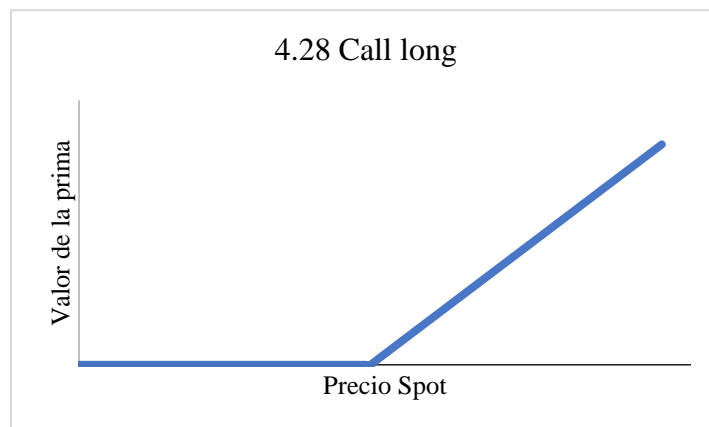
$$\frac{1}{2} C_{SS} \sigma^2 S_t^2 + r C_S S_t - r C + C_t = 0 \quad (3.8.35)$$

La condición de frontera está dada en el momento T (Neftci, 2008, p. 210):

$$C(S_T, T) = \max[S_T - K, 0] \quad (3.8.36)$$

Para cualquier valuación, mientras se acerca T, el valor de la prima call tiende a ser exactamente el valor intrínseco. En el momento de la expiración, se tienen tres flujos, liquidar el entero del préstamo, si este no fue pagadero en partes, la ejecución de la propia opción y el cierre de la posición corta (Neftci, 2008).

Gráfica 3.28



Fuente: constructo propio con base en Neftci (2008, p. 210).

Justo en el momento previo al vencimiento T , cuando S_t está muy cercano a S_T , la pendiente de la curva $C(S_t, T)$ estará muy cercana a cero o a uno, la cobertura C_S se acercará a 1 si $S_T > K$ o a 0 si $S_T < K$. Visualmente en la Gráfica 3.28 se observa la curva de call si $T \rightarrow 0$ (Neftci, 2008, p.210), que también es el mínimo valor de call en este caso (Black y Scholes, 1973, p. 638):

Si la situación es $S_T > K$ si la posición se encuentra cubierta con una operación corta, se anulan mutuamente (pendientes opuestas). En cada momento t y suponiendo que la ecuación (3.8.35) se cumple, la posición completa debería cubrir los flujos. “El precio de la opción $C(t)$, considerado de esta manera, es la suma descontada de todas las ganancias y pérdidas provenientes de una posición en la opción cubierta por delta en las que incurrirá el negociante con base en la volatilidad esperada de S_t ” (Neftci, 2008, p. 210).

3.8.2 La solución

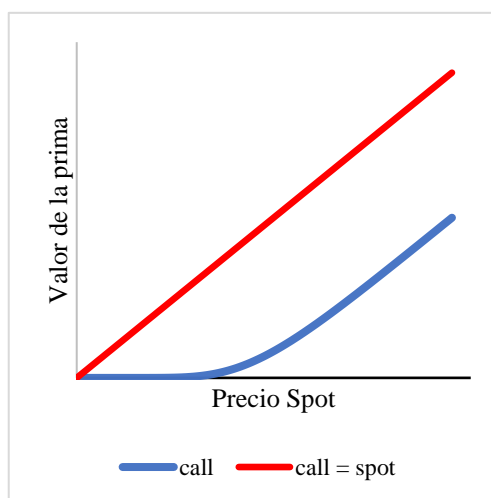
Un par de artículos pasaron a la historia de las finanzas, “The Pricing of Options and Corporate Liabilities” publicado conjuntamente por Fischer Black y Myron Scholes y “Theory of Rational Option Pricing” de Robert C. Merton ambos divulgados en 1973. Este modelo proporcionó la base de la moderna valuación de opciones, y dos de estos autores, Scholes y Merton obtuvieron el Premio Nobel de Economía de 1997 por estos trabajos. Primero se describirá el artículo de Black y Scholes y después brevemente el de Merton. En el ANEXO I se encuentran las fórmulas para Excel y VBA, en el ANEXO II el código en Python de este modelo.

La introducción del artículo de Black y Scholes, contiene definiciones similares a las que ya se vieron en el Capítulo I. El enfoque es sobre primas call cuyo subyacente es una acción. Se refiere al portafolio que se concibió desde la sección 3.3, que consiste en una acción y efectivo igual a K (en el artículo, un bono con valor nominal a K) y el valor intrínseco de la opción como la diferencia entre S_t y K (Black y Scholes, 1973).

Se indica que si el tiempo a vencimiento “is very far” [está muy lejos] el valor de la opción se acerca al valor de la acción (Black y Scholes, 1973, p. 638), esto es, tiene pendiente igual a 1. La misma conclusión de Samuelson vista anteriormente. La explicación es que al

ser muy largo el periodo, el valor presente de K , es muy pequeño, tanto que la diferencia $S_t - K$ es insignificante (Black y Scholes, 1973). Retomando la Gráfica 3.11, con $K = \$50$, $S_t = \$50$, $r = 5\%$, $\sigma = 30\%$ y un rango de precios spot entre $\$0$ y $\$100$, haciendo pruebas y suponiendo dos decimales, se alcanza una pendiente igual a 1, como una posición larga en acciones, en un tiempo a vencimiento de 64087 días (175.5 años aproximadamente). En la Gráfica 3.29, en azul un tiempo a vencimiento de 360 días y en rojo el ejemplo:

Gráfica 3.29



Fuente: Elaboración propia con base en Black y Scholes (1973, p. 638).

En esta parte del trabajo también se establece que el precio del subyacente y el tiempo a vencimiento son las causas de la volatilidad del valor de una opción (Black y Scholes, 1973). Es por esto que σ es constante en su solución. Después se indica que el modelo expuesto por Thorp y Kassouf en “Beat the Market” (1967) son usados como la base del propio. Estos autores calcularon el valor de un warrant construyendo una curva de “precios actuales”, después se establece una posición cubierta. Pero señalan que ellos no consideraron que una posición en tal equilibrio es igual al rendimiento de un activo sin riesgo (un bono), es decir, la tasa libre de riesgo (Black y Scholes, 1973).

Posteriormente, se exponen los supuestos de su modelo (Black y Scholes, 1973, p. 640):

- i) La tasa de interés a corto plazo es conocida y constante a través del tiempo;
- ii) el precio de la acción sigue una caminata aleatoria en tiempo continuo, con varianza proporcional al cuadrado de su precio, por lo anterior, la distribución de precios al final de

un periodo finito es log-normal (movimiento Browniano geométrico). La tasa de retorno sobre la acción es constante;

iii) no hay pago de dividendos;

iv) la opción es de estilo europeo;

v) no hay costos de transacción para la acción ni la opción;

vi) posibilidad de pedir prestado cualquier fracción del valor del instrumento a la tasa de interés libre de riesgo a corto plazo (como se hizo en la sección anterior);

vii) posibilidad de venta en corto sin limitaciones.

Hull (Hull, 2009a) agrega un par de observaciones a estos supuestos:

viii) no hay oportunidades de arbitraje libres de riesgo (teóricamente hablando, los instrumentos negociados que dependen de otros títulos, pueden ser valuados suponiendo que los participantes son neutrales al riesgo; esa es la razón por la que el modelo Black-Scholes no incluye al rendimiento esperado de la acción);

ix) la negociación de valores es continua (fin de semana y feriados incluidos).

A su vez, Venegas Martínez (2008, p. 128) adiciona también que:

x) volatilidad del precio de la acción es constante;

xi) el mercado donde se comercia con las acciones es líquido y divisible;

xii) información simétrica para todos los participantes del mercado.

Black y Scholes parten de los argumentos de Thorp y Kassouf: una posición cubierta que consiste en una posición larga en una acción y una corta en una opción. El precio de la acción y el tiempo como principales parámetros que proporcionan valor a la prima, todas las demás constantes (tasa de interés libre de riesgo, volatilidad y precio de ejercicio) (Black y Scholes, 1973). Teniendo en cuenta estos dos elementos principales (S_t , t), se tiene la siguiente función (Black y Scholes, 1973, p. 641):

$$w(S, t) \tag{3.8.2.1}$$

Después, muestran su propia versión de la derivada parcial de esa función con respecto a S_t , que actualmente se conoce como delta y proporcionan pequeños ejemplos como el visto en la sección anterior (Black y Scholes, 1973, p. 641):

$$1/w_1(S, t) \tag{3.8.2.2}$$

El subíndice 1 en w indica una derivada parcial con respecto a S_t . Ahora (como se ha mencionado antes) la posición en una acción es una recta y la opción es una curva convexa, el espacio entre ambas lo denominan *equity*, dado por (Black y Scholes, 1973, pp. 641-642):

$$S - w/w_1 \quad (3.8.2.3)$$

El cambio en un intervalo corto Δt (Black y Scholes, 1973, pp. 641-642):

$$\Delta S - \Delta w/w_1 \quad (3.8.2.4)$$

Despejando Δw y expandiendo con serie de Taylor (Black y Scholes, 1973, p. 642):

$$\Delta w = w_1 \Delta S + \frac{1}{2} w_{11} v^2 S^2 \Delta t + w_2 \Delta t \quad (3.8.2.5)$$

Donde v^2 representa la varianza de la acción; el subíndice 11 representa la segunda derivada parcial de (3.8.2.1) con respecto a S , a su vez, el subíndice 2 representa la primera derivada parcial de esa función con respecto a t . Los superíndices representan potencias. Si se sustituye (3.8.2.5) en (3.8.2.4), se obtiene (Black y Scholes, 1973, p. 642):

$$-\left(\frac{1}{2} w_{11} v^2 S^2 + w_2\right) \frac{\Delta t}{w_1} \quad (3.8.2.6)$$

Se suponen ganancias en equity en una posición cubierta, dado equilibrio, la ganancia debería ser igual a $r\Delta t$, donde r es la tasa libre de riesgo (Black y Scholes, 1973, pp. 642-643). Entonces el cambio en equity (3.8.2.6) debe ser igual al valor de equity (3.8.2.3) multiplicado por $r\Delta t$, así (Black y Scholes, 1973, p. 643):

$$-\left(\frac{1}{2} w_{11} v^2 S^2 + w_2\right) \frac{\Delta t}{w_1} = \left(S - \frac{w}{w_1}\right) r \Delta t \quad (3.8.2.7)$$

Se simplifica de ambos lados eliminando el término Δt , y se desarrolla algebraicamente para llegar a (Black y Scholes, 1973, p. 643):

$$w_2 = r w - r S w_1 - \frac{1}{2} v^2 S^2 w_{11} \quad (3.8.2.8)$$

$$0 = -w_2 + r w - r S w_1 - \frac{1}{2} v^2 S^2 w_{11}$$

Que es lo mismo que (3.8.35). En la fecha de ejercicio (T), hay dos valores límites (de una ecuación diferencial) que están dados por (Black y Scholes, 1973, p. 643):

$$w(S, T) = \begin{cases} S - K, & S \geq K \\ 0, & S < K \end{cases} \quad (3.8.2.9)$$

La fórmula que proporcionan los autores para (3.8.2.8) dada la condición límite (3.8.2.9) está expresada como [el movimiento geométrico browniano está implícito aquí] (Black y Scholes, 1973, p. 643):

$$w(x, t) = e^{r(t-T)} y \left[\left(\frac{2}{v^2} \right) \left(r - \frac{1}{2} v^2 \right) \left[\ln \frac{x}{c} - \left(r - \frac{1}{2} v^2 \right) (t - T) \right], - \left(\frac{2}{v^2} \right) \left(r - \frac{1}{2} v^2 \right)^2 (t - T) \right] \quad (3.8.2.10)$$

Las ecuaciones diferenciales se vuelven (Black y Scholes, 1973, p. 644):

$$y_2 = y_{11} \quad (3.8.2.11)$$

La condición límite (4.8.2.9) se torna ahora (Black y Scholes, 1973, p. 644):

$$y(u, 0) = \begin{cases} 0, & u < 0 \\ c \left[e^{u(\frac{1}{2}v^2)/(r-\frac{1}{2}v^2)} - 1 \right], & u \geq 0 \end{cases} \quad (3.8.2.12)$$

Como (3.8.2.11) es la ecuación de difusión de calor, los autores usan la solución de Churchill (1963) y la adaptan a su trabajo (Black y Scholes, 1973, p. 644):

$$y(u, s) = 1/\sqrt{2\pi} \int_{-\frac{u}{\sqrt{2s}}}^{\infty} c \left[e^{(u+q\sqrt{2s})(\frac{1}{2}v^2)/(r-\frac{1}{2}v^2)} - 1 \right] e^{-\frac{q^2}{2}} dq \quad (3.8.2.13)$$

Finalmente, se sustituye (3.8.2.13) en (3.8.2.10), se obtiene así el famoso resultado (Black y Scholes, 1973, p. 644):

$$Call = S_t \phi(d_1) - K e^{-rT} \phi(d_2) \quad Put = K e^{-rT} \phi(-d_2) - S_t \phi(-d_1) \quad (3.8.2.14)$$

$$\text{Donde: } d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T-t)}{\sigma\sqrt{T}} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T-t)}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \quad (3.8.2.15)$$

Ya sea que se use la fórmula para put dada o la paridad put-call, se obtiene el mismo resultado. El tiempo se mide en años de 360 días. A continuación, un ejemplo: $S_t = \$71$, $K = \$74$, $r = 4.5\%$, $\sigma = 28\%$, $T = 90$ días. Introduciendo los datos a la fórmula se obtiene: $call = \$3.029455$, $put = \$5.201621$ que coinciden con los resultados proporcionados por Hull.

Venegas Martínez (2008) presenta un desglose detallado sobre la solución de Black y Scholes, el cual se considera pertinente incluir en esta investigación. Se retoma la ecuación diferencial parcial que plantearon estos economistas (3.8.36) o (3.8.2.8), Con la misma condición límite (3.8.2.9), se hace la siguiente sustitución (Venegas Martínez, 2008, p. 130):

$$c(S_t, t) = B(t, T)G(u, (S_t, \tau), \tau) \quad (3.8.2.16)$$

$$\text{Donde: } B(t, T) = e^{-r(T-t)} \quad u \equiv u(S_t, \tau) = \frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^2 \ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + \tau$$

$$\tau = \frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^2 (T - t) \quad (3.8.2.17)$$

Que a su vez son la sustitución de (4.8.2.10). Con estas nuevas funciones, se procede a resolver las respectivas derivadas parciales (Venegas Martínez, 2008, p. 130):

$$\frac{\partial c}{\partial t} = rBG + B \left(\frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) = rBG - B \left(\frac{\partial G}{\partial u} \left(\frac{2}{\sigma^2} \right) \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^2 - B \frac{\partial G}{\partial \tau} \left(\frac{2}{\sigma^2} \right) \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^2 \right)$$

$$\frac{\partial c}{\partial S_t} = B \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial S_t} = B \frac{\partial G}{\partial u} \left(\frac{2}{\sigma^2} \right) \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \frac{1}{S_t}$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} = -B \frac{\partial G}{\partial u} \left(\frac{2}{\sigma^2} \right) \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \frac{1}{S_t^2} + B \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \left(\frac{2}{\sigma^2} \right)^2 \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^2 \frac{1}{S_t^2}$$

Se agrupa nuevamente como en (3.8.36) (Venegas Martínez, 2008, p. 130):

$$rBG - B \left(\frac{\partial G}{\partial u} \left(\frac{2}{\sigma^2} \right) \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^2 - B \frac{\partial G}{\partial \tau} \left(\frac{2}{\sigma^2} \right) \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^2 + rS_t \left[B \frac{\partial G}{\partial u} \left(\frac{2}{\sigma^2} \right) \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \frac{1}{S_t} \right] + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \left[-B \frac{\partial G}{\partial u} \left(\frac{2}{\sigma^2} \right) \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \frac{1}{S_t^2} + B \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \left(\frac{2}{\sigma^2} \right)^2 \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^2 \frac{1}{S_t^2} \right] - rc = 0 \quad (3.8.2.18)$$

Ahora, se simplifica considerando que $rc = rBG$ y también eliminando el término común 'B' (Venegas Martínez, 2008, p. 130):

$$-\frac{\partial G}{\partial u} \left(\frac{2}{\sigma^2} \right) \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^2 - \frac{\partial G}{\partial \tau} \left(\frac{2}{\sigma^2} \right) \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^2 + r \left[\frac{\partial G}{\partial u} \left(\frac{2}{\sigma^2} \right) \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \right] + \left[-\frac{\partial G}{\partial u} \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \left(\frac{2}{\sigma^2} \right) \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^2 \right] = 0 \quad (3.8.2.19)$$

Se vuelve a agrupar (Venegas Martínez, 2008, p. 131):

$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} - \frac{\partial G}{\partial \tau} \right) \left(\frac{2}{\sigma^2} \right) \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^2 + \frac{\partial G}{\partial u} \left(-\frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^2 + r \left(\frac{2}{\sigma^2} \right) \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) - \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \right) = 0 \quad (3.8.2.20)$$

Si se desarrolla algebraicamente el segundo factor del segundo sumando resulta igual a cero, entonces, para el resto de la expresión se tiene que (Venegas Martínez, 2008, p. 131):

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} = \frac{\partial G}{\partial \tau} \quad (3.8.2.21)$$

Lo anterior, es una versión de la ecuación de calor. En este punto, si $t = T$, entonces $\tau = 0$, luego (Venegas Martínez, 2008, p. 131):

$$u = \frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^2 \ln \left(\frac{S_t}{K} \right)$$

Resolviendo para S_t se tiene (Venegas Martínez, 2008, p. 131): $S_t = K \exp \left(\frac{\frac{1}{2} \sigma^2 u}{r - \frac{1}{2} \sigma^2} \right)$

Por lo anterior, la condición límite (3.8.2.9) se convierte a (Venegas Martínez, 2008, p. 131):

$$G_0(u) \equiv G(u, 0) = \max \left(K \exp \left(\frac{\frac{1}{2} \sigma^2 u}{r - \frac{1}{2} \sigma^2} \right) - K, 0 \right) = K \max \left(\exp \left(\frac{\frac{1}{2} \sigma^2 u}{r - \frac{1}{2} \sigma^2} \right) - 1, 0 \right) \quad (3.8.2.22)$$

Es decir, el límite superior se convirtió en el primer término del movimiento Browniano geométrico. Si $u < 0$, $G_0(u) = 0$. La condición frontera de la ecuación diferencial parcial de calor es (Venegas Martínez, 2008, p. 131):

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} = \frac{\partial G}{\partial \tau}, \quad -\infty < u < \infty, \quad \tau > 0; \quad G(u, 0) = G_0(u) \quad -\infty < u < \infty$$

La solución de la ecuación de calor, está dada por (Venegas Martínez, 2008, p. 131):

$$G(u, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} G_0(s) e^{-\frac{1}{2}((s-u)/\sqrt{2\tau})^2} ds = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{\Lambda_s}^{\infty} K \left(e^{\frac{1}{2}\sigma^2 s / r - \frac{1}{2}\sigma^2} - 1 \right) e^{-\frac{1}{2}((s-u)/\sqrt{2\tau})^2} ds \quad (3.8.2.23)$$

Donde (Venegas Martínez, 2008, p. 131):

$$\Lambda_s = \left\{ s \mid \exp\left(\frac{\frac{1}{2}\sigma^2 u}{r - \frac{1}{2}\sigma^2}\right) > 1 \right\}$$

Para simplificar, se aplica ‘cambio de variable’: $q = \frac{s-u}{\sqrt{2\tau}}$, y despejando para s : $s = u + q\sqrt{2\tau}$,

además, $ds = \sqrt{2\tau}dq$. Sustituyendo para q y s (Venegas Martínez, 2008, p. 132):

$$G(u, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{\Lambda_q}^{\infty} K \left(e^{\frac{1}{2}\sigma^2(u+q\sqrt{2\tau})/r - \frac{1}{2}\sigma^2} - 1 \right) e^{-\frac{1}{2}q^2} \sqrt{2\tau} dq$$

Donde (Venegas Martínez, 2008, p. 132):

$$\Lambda_q = \{q \mid q > -u/\sqrt{2\tau}\}$$

Entonces (Venegas Martínez, 2008, p. 132):

$$G(u, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\Lambda_q}^{\infty} K e^{\frac{1}{2}\sigma^2(u+q\sqrt{2\tau})/r - \frac{1}{2}\sigma^2} e^{-\frac{1}{2}q^2} dq - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\Lambda_q}^{\infty} K e^{-\frac{1}{2}q^2} dq = \mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2 \quad (3.8.2.24)$$

Con $-u/\sqrt{2\tau}$, sustituyendo con (3.8.2.17) y desarrollando algebraicamente, se tiene (Venegas Martínez, 2008, p. 132):

$$u/\sqrt{2\tau} = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T-t)}{\sigma\sqrt{T}} \quad (3.8.2.25)$$

Ahora (Venegas Martínez, 2008, p. 130):

$$\Lambda_q = \{q \mid q > -u/\sqrt{2\tau}\} = \left\{ q \mid -\infty < q < \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T-t)}{\sigma\sqrt{T}} \right\} \quad (3.8.2.26)$$

Se resuelve (3.8.2.24) (Venegas Martínez, 2008, p. 132): $\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\Lambda_q}^{\infty} K e^{-\frac{1}{2}q^2} dq$

Para fortuna del modelo, se tiene implícita ahí la distribución normal, entonces lo anterior (Venegas Martínez, 2008, p. 132):

$$\mathcal{L}_1 = K\Phi(d_2) \quad \text{con } d_2 = u/\sqrt{2\tau} = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T-t)}{\sigma\sqrt{T}} \quad (3.8.2.27)$$

Con esto, se resuelve la segunda parte de la integral (3.8.2.24). Para la primera parte, se considera la exponencial del integrando, se sustituye u con el valor dado en (3.8.2.17), se obtiene (Venegas Martínez, 2008, p. 133):

$$\frac{1}{2}\sigma^2(u + q\sqrt{2\tau})/r - \frac{1}{2}\sigma^2 = \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T - t) + \sigma\sqrt{T - t}q \quad (3.8.2.28)$$

Luego de simplificar, el primer integrando de (3.8.2.24) (Venegas Martínez, 2008, p. 133):

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\Lambda_q}^{\infty} K e^{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T - t) + \sigma\sqrt{T - t}q} e^{-\frac{1}{2}q^2} dq = S_t e^{r(T - t)} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\Lambda_q}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(q - \sigma\sqrt{T - t})^2} dq \quad (3.8.2.29)$$

Un cambio de variable para simplificar lo anterior, $z = q - \sigma\sqrt{T - t}$ y $dz = dq$, entonces (Venegas Martínez, 2008, p. 133):

$$\mathcal{L}_2 = S_t e^{r(T - t)} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\Lambda_q}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \quad (3.8.2.30)$$

Retomando de (3.8.2.26): $q > -u/\sqrt{2\tau}$, que, despejando del último cambio de variable se tiene: $q = z + \sigma\sqrt{T - t}$, se consigue (Venegas Martínez, 2008, p. 133):

$$z + \sigma\sqrt{T - t} > -\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T - t)}{\sigma\sqrt{T}} = z > -\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T - t)}{\sigma\sqrt{T}}$$

Con lambda (análogo a (3.8.2.26)) (Venegas Martínez, 2008, p. 133):

$$\Lambda_z = \left\{ z \mid -\infty < z < \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T - t)}{\sigma\sqrt{T}} \right\} \quad (3.8.2.31)$$

Entonces (Venegas Martínez, 2008, p. 134):

$$\mathcal{L}_2 = S_t e^{r(T - t)} \Phi(d_1) \text{ con: } d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T - t)}{\sigma\sqrt{T}} \quad (3.8.2.32)$$

Finalmente, de (3.8.2.23), (3.8.2.27) y (3.8.2.32), se tiene (Venegas Martínez, 2008, p. 134):

$$G(u, \tau) = \mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2 = S_t e^{r(T - t)} \Phi(d_1) - K \Phi(d_2)$$

Eso para la función $G(u, \tau)$, pero considerando (3.8.2.16) (Venegas Martínez, 2008, p. 134):

$$c(S_t, t) = B(t, T)G(u, (S_t, \tau), \tau) = e^{-r(T - t)} (S_t e^{r(T - t)} \Phi(d_1) - K \Phi(d_2))$$

Resolviendo, se muestra el modelo Black-Scholes (Venegas Martínez, 2008, p. 134):

$$\begin{aligned} Call &= S_t \phi(d_1) - K e^{-rT} \phi(d_2) & Put &= K e^{-rT} \phi(-d_2) - S_t \phi(-d_1) \\ \text{Donde: } d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T - t)}{\sigma\sqrt{T}} & d_2 &= \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T - t)}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T - t} \end{aligned}$$

El artículo de Merton, esencialmente explica los detalles “finos” del modelo que se ha descrito, a través de teoremas divididos por secciones. En cuanto a los parámetros que conforman el valor de una opción, cambia la tasa de interés libre de riesgo por el rendimiento de un bono gubernamental (Merton, 1973, p. 144).

La primera sección es sobre las restricciones del modelo. En este apartado se describen las características de las opciones. Se explica la diferencia entre opciones y warrants: las primeras tienen una oferta agregada de cero, en cuanto a acciones se refiere, dejando intacto el rendimiento esperado de estas, los warrants implican que el emisor debe emitir nuevas acciones para poder hacer frente a las ejecuciones (Merton, 1973, pp. 142-143). El primer teorema es acerca de establecer un portafolio neutral al riesgo, tal como hicieron sus colegas (Merton, 1973). El segundo, establece la condición por la que una opción de estilo americano no debe ejercerse antes de vencimiento, por lo tanto, es equivalente a una de estilo europeo.

El tercero, es el argumento que da origen a la Gráfica 3.29, es decir, que ante periodos largos de tiempo a vencimiento (infinito para Merton), con precio de ejercicio mayor que cero, una call vale lo mismo que la acción (Merton, 1973), pero una put con la misma condición temporal vale cero (Merton, 1973). También se describe una aparente contradicción, con el mismo tiempo a vencimiento (infinito), una opción con un precio de ejercicio igual a cero también tiene el valor de la acción. Para el cuarto teorema se describe la convexidad de la propia opción (Merton, 1973).

Además, presenta la versión del modelo con un activo que paga dividendos (Merton, 1973). Bajo notación moderna, r_{DIV} representa el dividend yield (Venegas Martínez, 2008, p. 239), se tiene pues:

$$Call = S_t e^{-r_{DIV}T} \phi(d_1) - K e^{-rT} \phi(d_2) \quad Put = K e^{-rT} \phi(-d_2) - S_t e^{-r_{DIV}T} \phi(-d_1)$$

Donde: $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - r_{DIV} + \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T-t)}{\sigma\sqrt{T}}$ $d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - r_{DIV} - \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T-t)}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$

(3.8.33)

3.8.3 Las literales griegas

Como el mercado no es estático, es necesario cubrir las “sensibilidades” que experimenta el valor de la prima a cambios de cada uno de sus parámetros. A cada uno de estas sensibilidades

se les conoce como “literales griegas”: delta, gamma, theta, vega y rho, como las principales. Sirven para ajustar el valor de una opción conforme sus parámetros cambian y como indicadores de cobertura. Se obtienen como derivadas parciales del modelo usado para valorar una prima. Para esta sección, se supondrá que emanan del Black-Scholes. Ya se han mostrado de forma indirecta anteriormente, retomando (3.8.35), se tiene:

$$\frac{1}{2}\Gamma\sigma^2S_t^2 + r\Delta S_t - rC + \Theta = 0$$

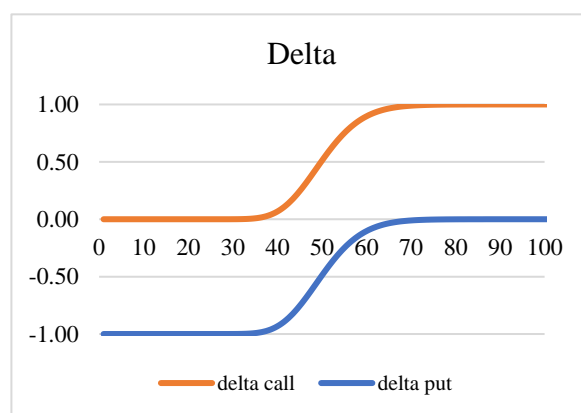
Delta Δ

Indica la sensibilidad del valor de la opción ante cambios locales en el precio del activo subyacente (S_t). Como derivada parcial (teniendo en mente (3.8.3) (Neftci, 2008, p. 220):

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\frac{(T-t)(r+\frac{1}{2}\sigma^2)+\ln(\frac{S_t}{K})}{\sqrt{(T-t)}\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \quad \text{concisamente como: } N(d_1)$$

El resultado anterior es una delta para call long, si fuera call short, $-N(d_1)$, para put long, simplemente: $N(d_1) - 1$ y put short: $1 - N(d_1)$ (Hull, 2009a, p. 330). Delta tiene pendiente positiva para call y negativa para put y siempre $0 < \Delta \leq 1$ (para ser igual a 1, se requiere que $T \rightarrow 0$) (Neftci, 2008, pp. 220-221). En este modelo, la delta depende del resto de los elementos de la prima, además de S_t . Más, el resultado tiene la forma de una función de probabilidad acumulativa (Neftci, 2008).

Gráfica 3.30



Fuente: Elaboración propia con base en Hull (2009a, p. 331).

Con este indicador, se puede establecer una posición neutral: el agente de mercado que se posicione call short, debe posicionarse largo en Δ acciones y viceversa. En el caso de

put long, se debe posicionarse largo en Δ acciones y viceversa, esto es, un portafolio delta neutral (Hull, 2009a). En la Gráfica 3.30 se presenta a delta conforme el precio spot (abscisas) se mueve (entre 0 y 100), con $K = \$50$, $r = 5\%$, $\sigma = 30\%$, $T = 90$ días.

Gamma Γ

Esta griega es una derivada de delta con respecto al precio spot del activo subyacente (la segunda derivada, pues). Si delta indica la sensibilidad del valor de la prima ante cambios en S_t , gamma indica la sensibilidad de delta ante ellos (Neftci, 2008). La ecuación (Neftci, 2008, p. 224):

$$\Gamma = \frac{1}{S_t \sigma \sqrt{T-t}} * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2}$$

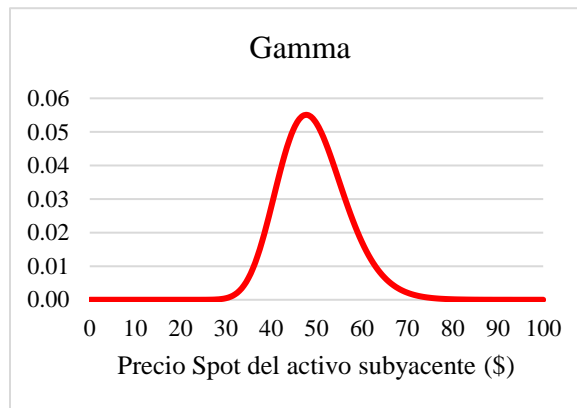
La segunda parte de este producto es la función de densidad de la distribución normal ($N'(d_1)$). Mientras más *at the money* se encuentre la opción, más alto es el valor de gamma y disminuye conforme esta se situó *in o out the money* (Neftci, 2008). Si el resultado de delta es la función de probabilidad acumulativa, gamma forma la función de densidad de probabilidad [acampanada].

De (3.8.35) se recupera $1/2\Gamma\sigma^2S_t^2$, ante cambios en S_t en el tiempo Δt , la cobertura delta neutral para un portafolio queda ahora como (Hull, 2009a, p. 338):

$$\text{delta neutral} = \theta\Delta t + \frac{1}{2}\Gamma\sigma^2S_t^2$$

Si se requiere hacer a un portafolio no solo delta neutral sino también gamma neutral, no es con la compra venta de subyacentes, como con delta, sino con lo propio con opciones, agregando la relación $-\Gamma/\Gamma_T$ donde Γ = gamma del protafolio, Γ_T = gamma de las opciones a comprar/vender. Se debe señalar que gamma, a diferencia de delta, es el mismo valor para call y para put. Además de que el valor se considera negativo si se está posicionado corto en el mercado (Neftci, 2008). La Gráfica 3.31 representa el comportamiento de gamma. Se han reocupado los datos usados para construir delta. Mesocúrtica, leptocúrtica, negativa, pero siempre conserva su forma de función de densidad.

Gráfica 3.31

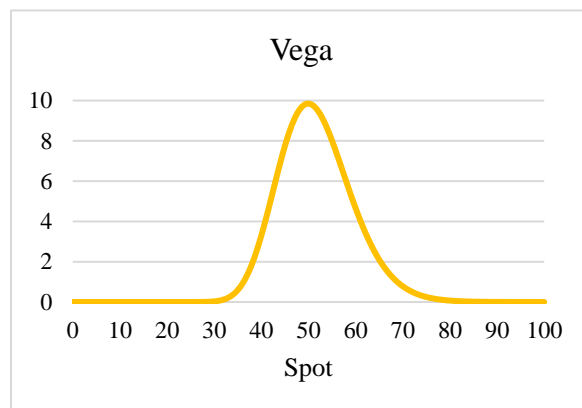


Fuente: elaboración propia con información de Hull (2009a, p. 339).

Vega v

A pesar de que uno de los supuestos de Black-Scholes es una volatilidad constante, esta griega (por cierto, no es parte de ese alfabeto, pero así se le llama y se usa el símbolo de ‘nu’ minúscula) muestra la sensibilidad del valor de la prima ante cambios en la volatilidad del subyacente. Al igual que gamma, es mayor mientras más *at the money* se encuentre la opción (Neftci, 2008). Las coberturas usando esta griega implican -al igual que gamma- la compraventa de las propias opciones (Neftci, 2008). La Gráfica 3.32 representa cómo luce vega ante cambios en S_t .

Gráfica 3.32



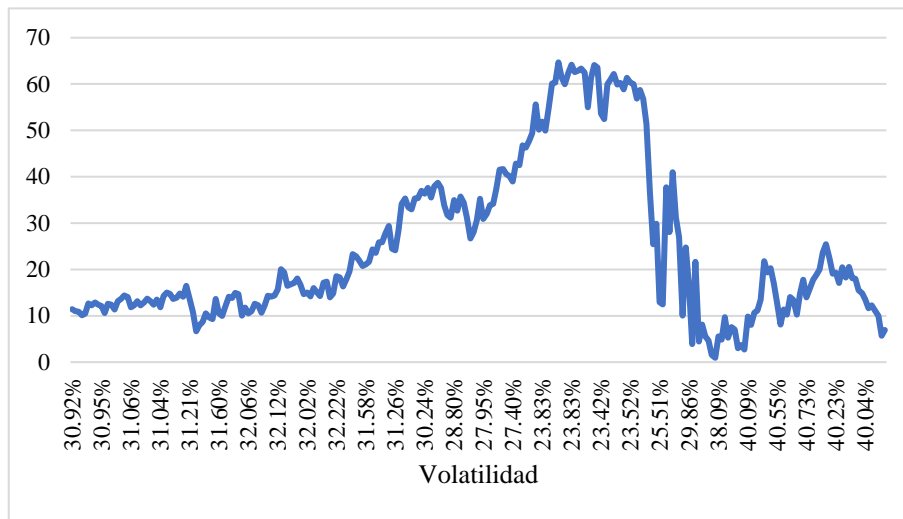
Fuente: elaboración propia con base en Hull (2009a, p. 343).

Se tiene la siguiente fórmula de vega para call y put (Hull, 2009a, p. 342):

$$v = S_0 \sqrt{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2}$$

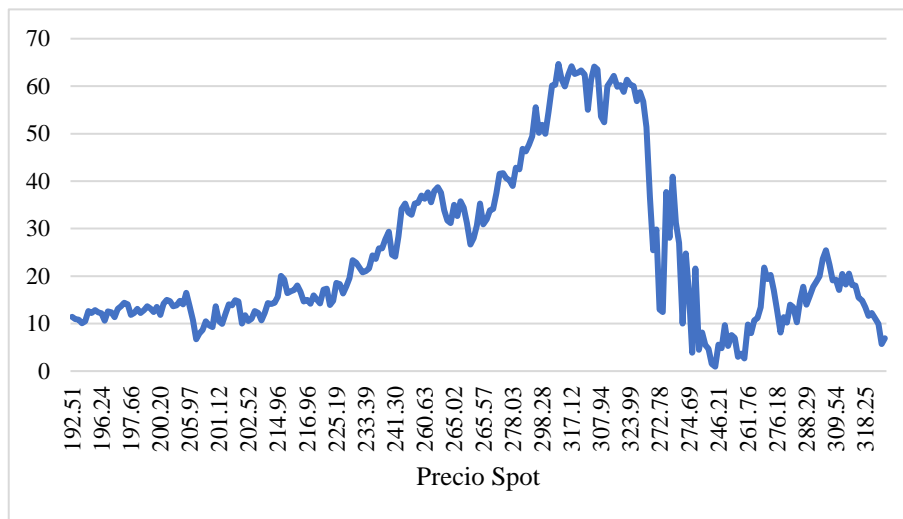
Para llegar a un portafolio vega neutral, se usa una relación parecida a la de gamma: $-v/v_T$ (Hull, 2009a, p. 342). ¿Cómo luce vega cuando lo que cambia es la propia volatilidad? Con un ejemplo real de Apple (APPL) (Nasdaq, 2020a) con datos reales de la cotización *al cierre* de la acción en el intervalo de fechas entre el 07 de junio de 2018 y el 08 de junio de 2020 (503 datos), con precio de ejercicio seleccionado de \$332.50 sin considerar dividendos). Se construyeron las gráficas 3.33a, 3.33b y 3.33c.

Gráfica 3.33a



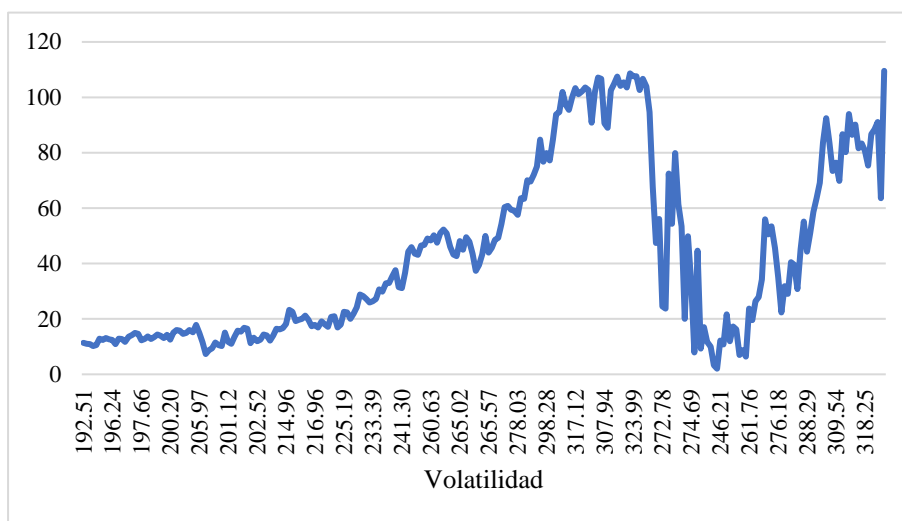
Fuente: concepción propia con base en lo aprendido en esta investigación.

Gráfica 3.33b



Fuente: concepción propia con base en lo aprendido en esta investigación.

Gráfica 3.33c



Fuente: concepción propia con base en lo aprendido en esta investigación.

Para construir, se consideraron los primeros 252 datos (los de 2018-2019) para un primer dato de volatilidad anual, después, con el resto de los datos de 2019-2020 se fue actualizando la volatilidad anual a cada dato cotizado. Con tasa de interés y precio de ejercicio constantes. Se construyeron así las gráficas 3.33a, 3.33b y 3.33c.

Las Gráficas 3.33a y 3.33b (mismos datos, en la primera, volatilidad en las abscisas, en la segunda, el precio spot) muestran lo que sucede con vega conforme la volatilidad cambia. Nótese que en la meseta se forma cuando más cerca se encuentra la opción at the money. A pesar de que en las últimas cotizaciones también lo está, casi se llega a expiración: el efecto del paso del tiempo. Finalmente, ¿cómo luce si el tiempo a vencimiento permanece constante? Esto se muestra en la Gráfica 3.33c.

Theta Θ

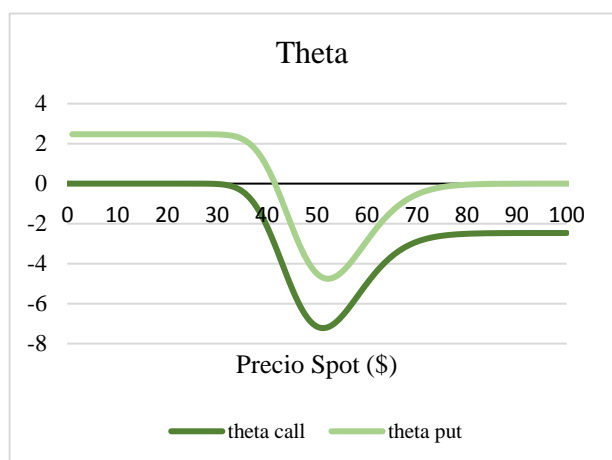
Esta literal indica los efectos del paso del tiempo. Reparar en que, a diferencia del resto de las derivadas parciales, theta es un cambio uniforme constante. Se tiene que theta para call y put, respectivamente, es $(N'(d_1)$ y $N'(d_2)$ denota la función de densidad de la distribución normal) (Hull, 2009a, p. 335):

$$\Theta_{call} = -\frac{S_0 N'(d_1) \sigma}{2\sqrt{T}} - rK e^{-rT} N(d_2) \quad \Theta_{put} = -\frac{S_0 N'(d_1) \sigma}{2\sqrt{T}} + rK e^{-rT} N(d_2)$$

Con d_1 y d_2 como en (3.8.2.15). Theta conduce a resultados negativos, excepto en el caso de una put in the money o una call in the money “sobre una divisa con una tasa de interés

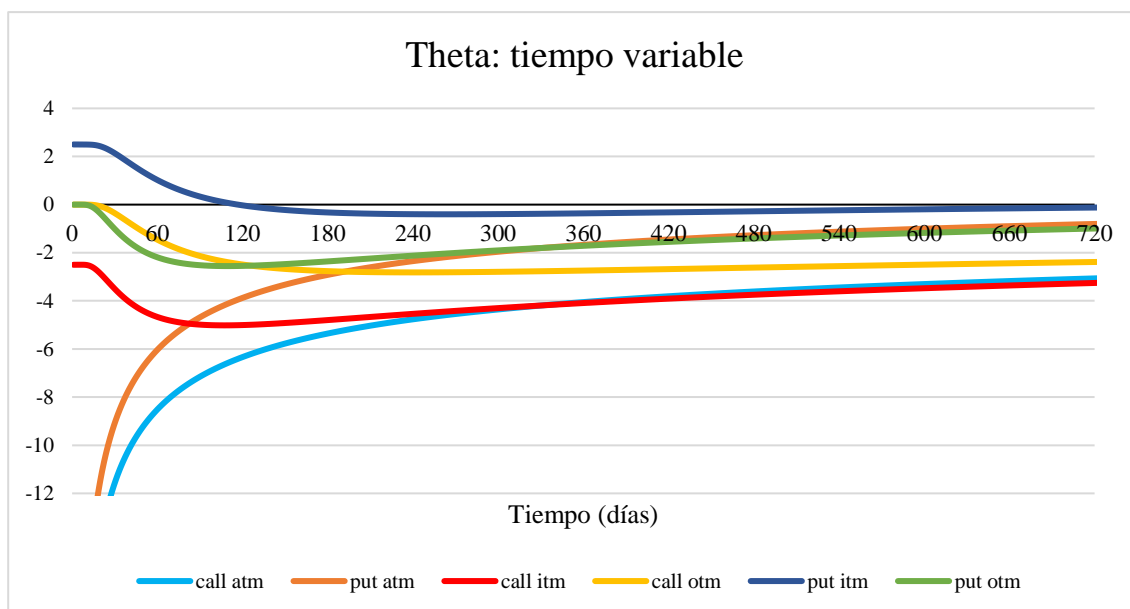
muy alta” (Hull, 2009a, p. 336). En la Gráfica 3.34 se muestra el comportamiento de theta a medida que cambia el precio spot del activo subyacente, mismos datos de gráficas anteriores. ¿Cómo lucen las curvas si en lugar de que el precio varíe, lo hiciera el propio tiempo? En la Gráfica 3.35 se muestra este efecto (se consideran 720 días para facilitar la visualización):

Gráfica 3.34



Fuente: Elaboración propia con base en Hull (2009a, p. 336).

Gráfica 3.35



Fuente: elaboración propia, la mitad de las series con base en Hull (2009a, p. 337).

Theta call y theta put at the money no se contemplan completas en la gráfica, pues cuando $T \rightarrow 0$ el valor de estas tiende a menos infinito ($-\infty$). Resulta curioso que las curvas de call in the money y call at the money partan de valores semejantes y a partir de que quedan aproximadamente 8 meses a vencimiento, estas se bifurcan. Lo mismo pasa con put at the money y put out the money.

Rho ρ

Representa la sensibilidad del valor de la prima con respecto a cambios en la tasa de interés. Así como la tasa de interés tiene poca influencia en la valuación de la prima, su derivada parcial también tiene un pequeño efecto. Se tiene la siguiente fórmula para call y put respectivamente (Hull, 2009a, p. 343):

$$\rho = KTe^{-rT}N(d_2) \quad \rho = -KTe^{-rT}N(-d_2)$$

Con d_1 y d_2 como en (3.8.2.15). Su representación gráfica es muy simple, se parece a las Gráficas 3.9 y 3.10. por lo que no se agregan. A través de todo el capítulo 15 de Hull (2009a) se pueden encontrar diversos ejemplos de cobertura usando griegas.

Griegas con dividendos

Para obtener las griegas considerando pago de dividendos, simplemente se agrega el factor $e^{-r_{DIV}T}$ para delta, gamma y vega. Para rho se calculan ahora dos para call y dos para put, descontando con r_{DIV} y r . Todas con d_1 y d_2 de (3.8.2.33). Para theta call y put se tiene:

$$\Theta = r_{DIV}S_0e^{-r_{DIV}T}N(d_1) - \left(\frac{S_0e^{-r_{DIV}T}\sigma}{2\sqrt{T}}N'(d_1) - rKe^{-rT}N(d_2)\right)$$

$$\Theta = rKe^{-rT}N(-d_2) - rS_0e^{-r_{DIV}T}N(-d_1) - \frac{S_0e^{-r_{DIV}T}N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}}$$

3.9 Cox, Ross y Rubinstein

Si el Black-Scholes es el modelo para valorar opciones más comentado en literatura financiera, el Cox-Ross-Rubinstein (también conocido como “binomial”), es el segundo más referenciado. Utilizado para valorar generalmente opciones estilo americano. Esta sección está dedica a exponer los resultados del artículo “Option Pricing A Simplified Approach”

publicado en 1979 por John C. Cox, Stephen A. Ross y Mark Rubinstein. Aunque como ellos reconocen, William Sharpe (otros de los grandes de la teoría financiera) proporcionó ideas (Cox, Ross, Rubinstein, 1979, p. 229).

La base de este modelo consiste en una apreciación binomial del precio de la acción desde un punto inicial en el tiempo t (que es discreto), donde el precio del subyacente -acción- puede subir o bajar. Como los demás, la triada de autores también comienza describiendo las características básicas de las opciones. Después, presentan los argumentos de no arbitraje para un portafolio en condiciones de neutralidad al riesgo, que, dada esa característica, debería al menos rendir lo mismo que la tasa de interés libre de riesgo (Cox, et al., 1979).

Se establece a los precios de ejercicio y spot, la volatilidad y la tasa de interés (constante) como los parámetros que definen el valor de la prima. Tampoco hay costos de transacción ni límites a operaciones en corto (Cox, et al., 1979). Además, se respeta el valor máximo a vencimiento (valor intrínseco), cero si queda out the money y $S - K$ en el caso de call y $K - S$ en el de put si queda in the money (Cox, et al., 1979).

Después se fija la notación: si el rendimiento de la acción aumenta (u), al precio de la acción se denota como S_u y a la opción como C_u , si este disminuye, d , y se denota como S_d y C_d ; p , la probabilidad de que el rendimiento de la acción aumente, $(1 - p)$ de que disminuya. Para mantener la condición libre de riesgo, se requiere $u > r > d$ (Cox, et al., 1979, p. 232).

Para continuar el argumento de “portafolio neutral al riesgo”, se construyen dos portafolios (para cada dirección que pueda tomar S_0) con Δ acciones y B bonos (no aclara si son cupón cero, pero para términos prácticos, lo son) y con Δ y B escogidos arbitrariamente en este punto (Cox, et al., 1979, p. 233):

$$\Delta S_u + rB = C_u \quad \Delta S_d + rB = C_d \quad (3.9.1)$$

Despejando para ambas expresiones, se tiene (Cox, et al., 1979, p. 233):

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{S_0 u - S_0 d} \quad B = \frac{u C_d - d C_u}{r u - r d} \quad (3.9.2)$$

Si la condición de no arbitraje se mantiene, entonces (Cox, et al., 1979, p. 234):

$$C = \Delta S + rB = \frac{C_u - C_d}{u - d} + \frac{u C_d - d C_u}{(u - d)r} = \left[\left(\frac{r - d}{u - d} \right) C_u + \left(\frac{u - r}{u - d} \right) C_d \right] / r \quad (3.9.3)$$

La expresión (3.9.3) se puede simplificar a (Cox, et al., 1979, p. 234):

$$\text{Si } p \equiv \frac{r - d}{u - d} \text{ y } (1 - p) \equiv \frac{u - r}{u - d}, \text{ entonces } C = [p C_u + (1 - p) C_d] / r \quad (3.9.4)$$

También explican que la call es independiente de la aversión al riesgo del agente que negocia con ella. A su vez, S_t es una variable aleatoria (Cox, et al., 1979). Definen el valor esperado de los rendimientos de la acción como (Cox, et al., 1979, p. 235):

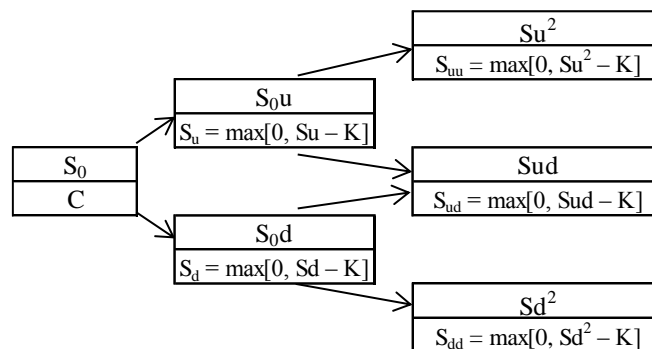
$$pS_{0u} + (1 - p)S_{0d} \quad (3.9.5)$$

En este punto, los autores mencionan que el valor de call son valores futuros descontados en un mundo neutral al riesgo (Cox, et al., 1979) (semejante a la cita de Neftci al final de la sección 3.8.1 (Neftci, 2008, p. 210)). Ahora, suponiendo hasta dos periodos (Cox, et al., 1979, pp. 235-236):

$$C_u = [pC_{uu} + (1 - p)C_{ud}]/r \quad \text{y} \quad C_d = [pC_{ud} + (1 - p)C_{dd}]/r \quad (3.9.6)$$

Si se visualiza como un árbol binomial hasta dos pasos:

Figura 3.1



Fuente: Elaboración propia en el software DerivaGem, con base en (Cox, et al., 1979, p. 233 y p. 236).

Este árbol puede seguir creciendo. Si tuviera los dos pasos, el máximo valor es, por ejemplo, cómo se indica, $\max[0, S_u^2 - K]$ y si fuera un solo nodo, sería hasta $\max[0, S_u - K]$. Una generalización para n pasos, está dada por (Cox, et al., 1979, p. 238):

$$C = \left[\sum_{j=0}^n \left(\frac{n!}{j!(n-j)!} \right) p^j (1-p)^{n-j} \max[0, u^j d^{n-j} S - K] \right] / r^n$$

Si tomamos 'a' como el mínimo número de pasos ascendentes para S_0 para que una call quede in the money en los siguientes n pasos, entonces 'a' es el entero no negativo más pequeño que hace que: $u^a d^{n-a} S > K$; aplicando logaritmo en ambos lados de la desigualdad, 'a' entonces es el entero no negativo más pequeño, más grande que: $\log(K/Sd^n)/\log(u/d)$, entonces (Cox, et al., 1979, p. 238):

Para toda $j < a$: $\max = [0, u^j d^{n-j} S - K] = 0$

Y para toda $j \geq a$: $\max = [0, u^j d^{n-j} S - K] = u^j d^{n-j} S - K$

Entonces (Cox, et al., 1979, p. 238):

$$C = [\sum_{j=0}^n \left(\frac{n!}{j!(n-j)!} \right) p^j (1-p)^{n-j} [u^j d^{n-j} S - K]] / r^n \quad (3.9.7)$$

La expresión anterior como portafolio (Cox, et al., 1979, p. 239):

$$Z < C = S [\sum_{j=a}^n \left(\frac{n!}{j!(n-j)!} \right) p^j (1-p)^{n-j} \left(\frac{u^j d^{n-j}}{r^n} \right)] - Kr^{-n} [\sum_{j=a}^n \left(\frac{n!}{j!(n-j)!} \right) p^j (1-p)^{n-j}] \quad (3.9.8)$$

Finalmente, presentan su fórmula sintetizada [los autores usan Φ en lugar de B , que es la letra usada actualmente para denotar la distribución binomial y que es usada aquí] (Cox, et al., 1979, p. 239):

$$C = SB[a; n, p'] - Kr^{-n} B[a; n, p] \quad (3.9.9)$$

Donde: $p \equiv (r-d)/(u-d)$ y $p' \equiv (u/r)p$ y si $a > n$, $C = 0$

Aunque en términos prácticos, se puede programar una generalización de (3.9.4) retrocediendo desde el último nodo del árbol (pasos 'n'). Para calcular las literales u , d y p de otra forma se tiene (Cox, et al., 1979, p. 249):

$$u = e^{\sigma\sqrt{t/n}} \quad d = e^{-\sigma\sqrt{t/n}} \quad p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\mu/\sigma)\sqrt{t/n} \quad (3.9.10)$$

Lo último relevante del artículo es la convergencia al modelo Black-Scholes: entre más pasos, más próximo a ese valor (Cox, et al., 1979).

El camino que sigue John C. Hull, se puede retomar desde delta (Hull, 2009a, p. 249):

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{S_0 u - S_0 d}$$

La expresión anterior muestra cómo cambia el valor de la opción mientras se desplaza entre los nodos del árbol (que es desplazamiento en el tiempo) (Hull, 2009a). El valor presente del portafolio a tasa libre de riesgo es (Hull, 2009a, p. 249):

$$(S_0 u \Delta - C_u) e^{-rT}$$

Entonces, el costo de la cartera en el presente es el primer nodo (Hull, 2009a, p. 250):

$$S_0 \Delta - C$$

Entonces, se igualan estas dos últimas expresiones: (Hull, 2009a, p. 250):

$$S_0 \Delta - C = (S_0 u \Delta - C_u) e^{-rT}$$

Despejando para C (Hull, 2009a, p. 250): $C = S_0 \Delta (1 - ue^{-rT}) + C_u e^{-rT}$

Sustituyendo la expresión anterior para Δ , en la anterior (Hull, 2009a, p. 250):

$$C = e^{-rT}[pC_u + (1 - p)C_d] \quad \text{con: } p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}$$

Lo anterior es análogo a (3.9.4), pero en lugar de r , Hull agrega el factor de descuento e^{-rT} . La expresión al interior de la ecuación anterior: $pC_u + (1 - p)C_d$ es el beneficio esperado de la opción (Hull, 2009a, pp. 250-251). Visto de esta forma, se puede decir, que el beneficio esperado es multiplicado por un factor de descuento e^{-rT} . Para el valor esperado de la opción en T (Hull, 2009a, p. 251):

$$E(S_T) = pS_{0u} + (1 - p)S_{0d}$$

Si se sustituye el valor dado para p en la última expresión (Hull, 2009a, p. 251):

$$E(S_T) = S_0 e^{rT}$$

El lector podrá notar que la expresión anterior es la primera parte del movimiento Browniano geométrico. Si se consideran hasta dos pasos, (T cambia por Δt) las expresiones anteriores quedan como (Hull, 2009a, p. 255):

$$C = e^{-r\Delta t}[pC_u + (1 - p)C_d] \quad \text{y} \quad p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

$$C_u = e^{-r\Delta t}[pC_{uu} + (1 - p)C_{ud}] \quad \text{y} \quad C_d = e^{-r\Delta t}[pC_{ud} + (1 - p)C_{dd}]$$

Para determinar los valores de u y d , se sigue como lo hicieron originalmente Cox, Ross y Rubinstein (3.10.10) (Hull, 2009a, p. 258). Si hay pago de dividendos, cuyo rendimiento es q , entonces, las ganancias de capital están dadas como $r - q$, las ecuaciones anteriores quedan así (Hull, 2009a, p. 261):

$$pS_{0u} + (1 - p)S_{0d} = S_0 e^{(r-q)\Delta t} \quad \text{y} \quad p = \frac{e^{(r-q)\Delta t} - d}{u - d}$$

Cabe resaltar que además de ser útil en la valuación de opciones estilo americano, también lo es para evaluar estilo europeo (Hull, 2009a, p. 253 y p. 360). Para el estilo americano hay que evaluar para cada nodo, comparar el valor intrínseco de cada uno con el valor dado por la fórmula.

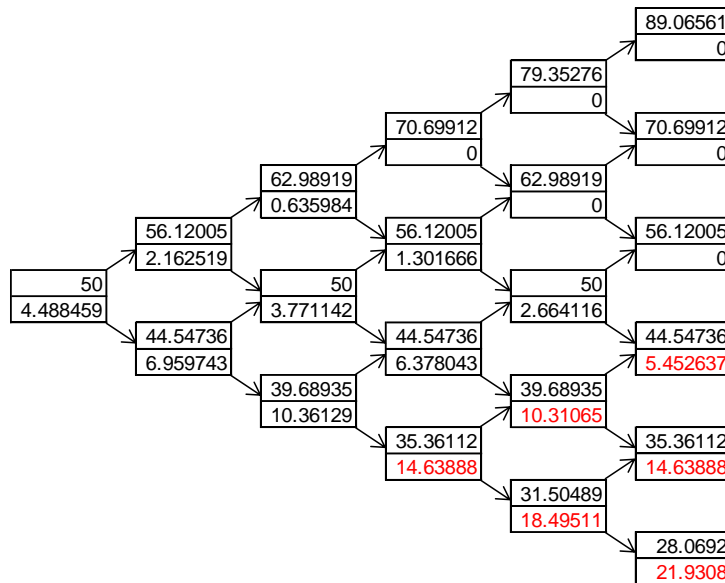
Finalmente, las griegas: (Hull, 2009a, p.363):

$$\text{Delta: } \Delta = \frac{C_u - C_d}{S_0 u - S_0 d}$$

$$\text{Gamma: } \Gamma = \frac{[(C_{22} - C_{21}) / (S_0 u^2 - S_0)] - [(C_{21} - C_{20}) / (S_0 - S_0 d^2)]}{h} \quad \text{con: } h = 0.5(S_0 u^2 - S_0 d^2)$$

$$\text{Theta: } \Theta = \frac{C_{21} - C_{00}}{2\Delta t} \quad \text{Vega: } \nu = \frac{C^* - C}{\Delta\sigma}$$

Figura 3.2



Fuente: Captura de resultados en DerivaGem.

Figura 3.3

to	t1	t2	t3	t4	t5
50.0000	56.1200	62.9892	70.6991	79.3528	89.0656
6.3595	9.8734	14.8597	21.5256	29.7677	39.0656
6.3595	9.8734	14.8597	21.5256	29.7677	39.0656
4.3190	2.1141	0.6360	0.0000	0.0000	0.0000
4.4885	2.1625	0.6360	0.0000	0.0000	0.0000
	44.5474	50.0000	56.1200	62.9892	70.6991
	2.8493	4.9066	8.2481	13.4041	20.6991
	2.8493	4.9066	8.2481	13.4041	20.6991
	6.6628	3.6721	1.3017	0.0000	0.0000
	6.9597	3.7711	1.3017	0.0000	0.0000
		39.6894	44.5474	50.0000	56.1200
		0.7794	1.5491	3.0791	6.1200
		0.7794	1.5491	3.0791	6.1200
		9.8555	6.1753	2.6641	0.0000
		10.3613	6.3780	2.6641	0.0000
Spot			35.3611	39.6894	44.5474
Call europea			0.0000	0.0000	0.0000
Call americana			0.0000	0.0000	0.0000
Put europeo			13.8125	9.8957	5.4526
Put americano			14.6389	10.3106	5.4526
				31.5049	35.3611
				0.0000	0.0000
				0.0000	0.0000
				18.0802	14.6389
				18.4951	14.6389
					28.0692
					0.0000
					0.0000
					21.9308
					21.9308

Fuente: Elaboración propia en Excel con base en el modelo Cox-Ross-Rubinstein.

Con el ejemplo de Hull (2009a, p. 360): $S_0 = \$50$, $K = \$50$, $\sigma = 40\%$ anual, $r = 10\%$, $T = 5$ meses ($5/12$), $n = 5$ pasos se presentan los resultados bajo este modelo. En Excel (Figura 3.3; véase el ANEXO I) se muestran los estilos europeo y americano para call y put. En DerivaGem (Figura 3.2), solo put binomial americano.

3.10 Heston

Black-Scholes-Merton postula que el movimiento browniano geométrico gobierna el comportamiento del subyacente, ¿qué hay del resto de variables que conforman el valor de la prima? El precio de ejercicio (K) es una constante, a menos que se trate de una opción exótica este valor no cambiará. Pero, ¿y la volatilidad, la tasa de interés y el tiempo? El artículo de Steven L. Heston “A Closed-form Solution for Options with Stochastic Volatility” (1993) está enfocado en un modelo para opciones call que considera volatilidad estocástica. El artículo solo presenta resultados, un desarrollo algebraico más detallado se encuentra en el capítulo 27 de Venegas Martínez (2008, pp. 305-314).

En la introducción de su trabajo, Heston describe algunas limitaciones del modelo Black-Scholes y también menciona a autores que antes que él, publicaron modelos que consideran volatilidad estocástica. Él ofrece “(...) a closed-form solution for the price of a European call option when the spot asset [returns] is correlated with volatility [stochastic], and it adapts the model to incorporate stochastic interest rates”* [(...) una solución cerrada para el precio de una opción call europea cuando los [rendimientos] del precio spot del activo están correlacionado con la volatilidad [estocástica] y adapta el modelo para incorporar tasas de interés estocásticas] (Heston, 1993, p. 328). *Corchetes en la cita propios.

Primero, Heston ofrece su propia ecuación diferencial parcial, cuya solución está dada por “las funciones características⁵ de las probabilidades neutrales al riesgo como soluciones de una ecuación diferencial parcial de segundo orden” (Venegas Martínez, 2008, p. 305).

⁵ Función de valor complejo en el vector de números reales (usa números imaginarios). Characteristic function. Encyclopedia of Mathematics. URL: http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Characteristic_function&oldid=46319

Heston comienza la exposición de su trabajo mostrando la difusión de los rendimientos del precio spot del activo subyacente al tiempo t (Heston, 1993, p. 328):

$$dS(t) = \mu S dt + \sqrt{v(t)} S dz_1(t) \quad (3.10.1)$$

En este caso, la letra griega v (upsilon) representa la propia volatilidad y $z_1(t)$ denota un proceso de Wiener (Heston, 1993). Ahora, si $\sqrt{v(t)}$ sigue un proceso estocástico Ornstein-Uhlenbeck, se tiene (Stein y Stein (1991), citados por Heston, 1993, p. 328):

$$d\sqrt{v(t)} = -\beta\sqrt{v(t)}dt + \delta dz_2(t) \quad (3.10.2)$$

Ahora, lo que menciona Heston al principio del artículo: z_2 y z_1 están correlacionados. Para resolver lo anterior, se usa cálculo estocástico, entonces $v(t)$ (Heston, 1993, p. 329):

$$dv(t) = [\delta^2 - 2\beta v(t)]dt + 2\delta\sqrt{v(t)}dz_2(t) \quad (3.10.3)$$

Lo anterior, reescrito con el proceso estocástico “raíz cuadrada” (Cox, Ingersoll y Ross (1985) citados por Heston, 1993, p. 329):

$$dv(t) = \kappa[\theta - v(t)]dt + \sigma\sqrt{v(t)}dz_2(t) \quad (3.10.4)$$

Donde κ (kappa) representa un parámetro de reversión media, θ la media a largo plazo de la varianza y σ la volatilidad de la volatilidad (Rouah, Vainberg, 2007). Para simplificar el desarrollo, antes de considerar tasa de interés estocástica, se considera un factor de descuento “clásico” para un bono (no aclara si es cuponado o no) (Heston, 1993, p. 329):

$$P(t, t + \tau) = e^{-r\tau} \quad (3.10.5)$$

Ahora, establece su propia versión de una ecuación diferencial parcial que considera todos los flujos de efectivo [análogo a 3.8.35] (Heston, 1993, p. 329):

$$\frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \rho\sigma vS \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} + rS \frac{\partial U}{\partial S} + \{\kappa[\theta - v(t)] - \lambda(S, v, t)\} \frac{\partial U}{\partial v} - rU + \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad (3.10.6)$$

Donde U denota una función. Atención con la expresión anterior. Si se tiene en mente (3.8.2.8), el segundo término es la correlación entre los rendimientos del precio del activo subyacente y la volatilidad (ambos estocásticos), el cuarto es delta, el quinto es la volatilidad con la primera parte de la expresión (3.10.4) y un término $\lambda(S, v, t)$ no especificado; el sexto es el préstamo para financiar la operación y el séptimo y último es el tiempo. ¿El primero y el tercero? El autor no lo menciona, pero parece ser gamma separada en dos términos.

El término $\lambda(S, v, t)$ representa “the price of volatility risk” (precio del riesgo de volatilidad) en función del precio del subyacente, la volatilidad y el tiempo; para opciones sobre acciones el valor de éste es diferente de cero (Lamoureux y Lastrapes (1993), citados por Heston, 1993, p. 329). Para el valor de $\lambda(S, v, t)$, se usa el modelo de consumo de Breeden (1979) (citado por Heston, 1993, p. 329):

$$\lambda(S, v, t)dt = \gamma \text{Cov}[dv, dC(t)/C(t)] \quad (3.10.7)$$

Con $C(t)$, la tasa de consumo y γ , la aversión relativa al riesgo de un inversor (*¿cómo en Sprenkle?*) (Heston, 1993, p. 329). Ahora, el proceso estocástico de consumo en equilibrio general (Cox, Ingersoll y Ross (1985) citados por Heston, 1993, p. 329):

$$dC(t) = \mu_c v(t)Cdt + \sigma_c \sqrt{v(t)}Cdz_3(t) \quad (3.10.8)$$

“where consumption growth has constant correlation with the spot asset return” (donde el crecimiento del consumo tiene una correlación constante con los rendimientos del precio spot del activo [subyacente]) (Heston, 1993, p. 329). Esto genera una prima por riesgo proporcional a v , $\lambda(S, v, t) = \lambda v$. Además de heterocedasticidad condicional para el crecimiento del consumo como en los retornos de activos, de los modelos de Breeden y Cox, Ingersoll y Ross, solo se usan las funciones, ningún otro supuesto (Heston, 1993). Para (4.10.6) se presentan las siguientes condiciones fronteras (Heston, 1993, p. 330):

$$\begin{aligned} U(S, v, T) &= \text{Max}(0, S - K); & U(0, v, t) &= 0; & \frac{\partial U}{\partial S}(\infty, v, t) &= 1 \\ rS \frac{\partial U}{\partial S}(S, 0, t) + \kappa \theta \frac{\partial U}{\partial v}(S, 0, t) - rU(S, 0, t) + U_t(S, 0, t) &= 0 & U(S, \infty, t) &= S \end{aligned} \quad (3.10.9)$$

La primera de ellas es la condición general de toda la ecuación, al momento T de expiración. En la segunda, cuando el precio del activo subyacente es cero, todo el conjunto tiene el mismo valor; cuando el precio de este es infinito, entonces es uno. Si la volatilidad tiene un valor infinito (tercera condición), entonces el valor de la ecuación es igual al precio spot. Y la cuarta condición “se desprende inmediatamente de (3.10.6) al sustituir $v = 0$ ” (Venegas Martínez, 2008, p. 309). La forma solución de la ecuación es similar a la ya familiar (Heston, 1993, p. 330):

$$C(S, v, t) = SP_1 - KP(t, T)P_2 \quad (3.10.10)$$

Donde (t, T) es el factor de descuento para K (Rouah, Vainberg, 2007). Para resolver, Heston recomienda reescribir en forma logarítmica: $x = \ln(S)$ (Heston, 1993). Ahora, sustituyendo (3.10.10) en (3.10.6), se obtiene (Heston, 1993, p. 330):

$$\frac{1}{2}v \frac{\partial^2 P_j}{\partial x^2} + \rho\sigma v \frac{\partial^2 P_j}{\partial x \partial v} + \frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 P_j}{\partial v^2} + (r + u_j v) \frac{\partial P_j}{\partial x} + (a_j - b_j v) \frac{\partial P_j}{\partial v} + \frac{\partial P_j}{\partial t} = 0 \quad (3.10.11)$$

Para $j = 1, 2$ se tiene $u_1 = 1/2$, $u_2 = -1/2$, $a = \kappa\theta$, $b_1 = \kappa + \lambda - \rho\sigma$, $b_2 = \kappa + \lambda$

A su vez, la nueva ecuación diferencial parcial tiene la siguiente condición de frontera (análogo a 3.10.9) (Heston, 1993, p. 330):

$$P_j(x, v, T; \ln[K]) = 1_{\{x \geq \ln[K]\}} \quad (3.10.12)$$

Si x (recordar que $x = \ln[S]$) sigue un proceso estocástico (Heston, 1993, pp. 330-331):

$$dx(t) = [r + u_j v]dt + \sqrt{v(t)}dz_1(t); \quad dv = (a_j - b_j v)dt + \sigma\sqrt{v(t)}dz_2(t) \quad (3.10.13)$$

Con los mismos valores para u_j , a_j y b_j , entonces P_j “is the conditional probability that the option expires in-the-money” [es la probabilidad condicional de que la opción expire in the money] (Heston, 1993, p. 331), es decir, se convierte en:

$$P_j(x, v, T; \ln[K]) = \Pr[x(T) \geq \ln[K] \mid x(t) = x, v(t) = v] \quad (3.10.14)$$

Para resolver el par de probabilidades, se recurre a sus funciones características, que satisfacen (3.10.11), ambas sujetas a la siguiente condición inicial (Heston, 1993, p. 331):

$$f_j(x, v, T; \phi) = e^{i\phi x} \quad (3.10.15)$$

Donde i , representa el concepto de número imaginario (funciones características). La función solución está dada por (Heston, 1993, p. 331):

$$f_j(x, v, t; \phi) = e^{C(T-t; \phi) + D(T-t; \phi)v + i\phi x} \quad (3.10.16)$$

Con: $C(\tau; \phi) = r\phi i\tau + \frac{a}{\sigma^2} \left\{ (b_j - \rho\sigma\phi i + d)\tau - 2\ln \left[\frac{1 - ge^{d\tau}}{1 - g} \right] \right\};$

$$D(\tau; \phi) = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d}{\sigma^2} \left[\frac{1 - e^{d\tau}}{1 - ge^{d\tau}} \right];$$

$$g = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d}{b_j - \rho\sigma\phi i - d}; \quad d = \sqrt{(\rho\sigma\phi i - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j\phi i - \phi^2)}$$

Finalmente, con manipulación algebraica, Heston presenta (1993, p. 331):

$$P_j(x, v, T; \ln[K]) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Re} \left[\frac{e^{-i\phi \ln[K]} f_j(x, v, T; \phi)}{i\phi} \right] d\phi \quad (3.10.17)$$

En resumidas cuentas, para resolver para call (3.10.10), se necesita P_1 y P_2 , probabilidades que se obtienen con funciones características. La solución de la integral

anterior no se puede resolver de forma ‘normal’, se deben usar aproximaciones numéricas (Venegas Martínez, 2008). Heston señala que con (3.10.10), (3.10.16) y (3.10.17) se puede obtener el valor de call. Existen diversos métodos numéricos para resolver las funciones características de este modelo.

3.11 Otros modelos

En esta última sección del capítulo se presentan algunos modelos que se han considerado en esta investigación como “menores”. Cada uno tiene su propia fuente original en publicaciones formales, pero la mayoría son revisados desde Venegas Martínez (2008).

Whaley

Robert E. Whaley, también conocido por haber desarrollado el índice VIX, desarrolló un modelo de valuación de opciones estilo americano. En 1981 publicó “On the Valuation of American Call Options on Stocks with Known Dividends”. La premisa básica del modelo consiste en la existencia de un precio S_{τ}^* tal que, a partir de él, es óptimo ejercer una opción americana (Venegas Martínez, 2008).

Se denota con t la fecha en la que se pagan los dividendos. Para encontrar tal S_{τ}^* , se presupone la existencia de precios limpios y sucios (P_t) (en el sentido del precio limpio y sucio de un bono cuponado), los cuales tienen tres momentos en el tiempo: antes, en el momento del pago y después de este. Estos momentos son los siguientes (Venegas Martínez, 2008, p. 343) (αD_{τ} representa dicho pago):

$$S_t = P_t - \alpha D_{\tau} e^{-r(\tau-t)} \text{ donde } t < \tau, 0 < \alpha \leq 1; \quad S_{\tau} = P_{\tau} - \alpha D_{\tau}; \quad S_t = P_t \text{ para } \tau < t < T$$

Para encontrar S_{τ}^* se puede resolver la siguiente expresión (Venegas Martínez, 2008, p. 344):

$$c_{BS}(S_{\tau}^*, \tau; T - \tau, K) = S_{\tau}^* + \alpha D_{\tau} - K$$

Ahora, se supone que esta opción americana es igual a un portafolio que contiene a su vez tres opciones europeas cuya valuación está dada por (Venegas Martínez, 2008, p. 344):

$$C(S_t, t; T, K) = S_t[\Phi_1(b_1) + \Phi_2(a_1, -b_1, -\rho)] - Ke^{-r(T-t)}[\Phi_1(b_2)e^{-r(T-t)} + \Phi_2(a_2, -b_2, -\rho)] + \alpha D_{\tau} e^{-r(T-t)}\Phi_1(b_2)$$

Donde:
$$a_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

$$b_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{S_t^*}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(\tau-t)}{\sigma\sqrt{\tau-t}} \quad b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{\tau-t} \quad \rho = \sqrt{\frac{\tau-t}{T-t}}$$

Aquí, Φ_2 denota una distribución normal bivariada y Φ_1 la misma distribución a una sola variable. Venegas Martínez (2008) anexa un código en Visual Basic (VBA) del modelo, que es usado para resolver el ejemplo que este autor muestra. Se tienen los siguientes datos: $K = \$100$, $t = 0$, $T = 2$ (años), $\tau = 1$, $\alpha D_\tau = 5$, $r = 4\%$, $\sigma = 20\%$, $S_t^* = \$123.581855$. Para comprobar el S_t^* proporcionado, se optó por el método iterativo incluido en Excel “Solver”. El resultado es el mismo de Venegas Martínez. Cabe resaltar que si $T < \tau$, el algoritmo deja de funcionar. Resultó en (Venegas Martínez, 2008, p. 346):

Tabla 3.1

Precio sucio	Precio limpio	Whaley	Black-Scholes
80	75.196	3.275	3.208
85	80.196	4.962	4.808
90	85.196	7.129	6.820
95	90.196	9.794	9.239
100	95.196	12.954	12.048
105	100.196	16.581	15.215
110	105.196	20.626	18.703
115	110.196	25.025	22.470
120	115.196	29.708	26.476

Fuente: elaboración con base en Venegas Martínez (2008, p. 346) y su código en VBA (2008, pp. 346-348).

Leland, Hoggardm, Whalley y Wilmott

Este modelo parte de Black-Scholes (estilo europeo) para cubrir la cuestión de los costos de transacción. Primero Leland, H. E. en 1985 con “Option Pricing and Replication with Transaction Costs” y después Hoggard, T., A. E. Whalley, y P. Wilmott en 1994 con “Hedging Option Portfolios in the Presence of Transaction Costs”. Ellos agregan los costos desde la ecuación diferencial parcial (4.8.35) para así resolver desde el principio. La solución está dada por (Venegas Martínez, 2008, pp. 395-396):

$$c = c_{BS}(S_t, t; \sigma_h, A) \equiv S_t \Phi(d_h) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_h - \sigma_h \sqrt{T-t})$$

Donde A representa los costos, y h un intervalo de tiempo.

Con:
$$d_h = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma_h^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma_h \sqrt{T-t}}$$

Además:
$$\sigma_h^2 = \sigma^2 \pm A\sigma \sqrt{\frac{8}{\pi h}} \quad \text{que conduce a: } \sigma_h^2 < \sigma^2$$

En la expresión anterior, por lo general es ‘menos’, pero si d_h conduce a valores negativos, se procede a sumar, pues la raíz de valores negativos conlleva el uso de números complejos que no están previstos en el modelo. Esto, porque gamma es negativa. Menos para posiciones largas y más para posiciones cortas (Venegas Martínez, 2008, p. 396).

Y también:
$$\sigma > A\sqrt{\frac{8}{\pi h}} \quad \text{que a su vez implica: } \sigma\sqrt{h} > A$$

Si existen costos fijos A_1 (al comienzo de la operación), A_3 costos porcentuales por valor de operación y A_2 costos porcentuales por volumen iguales a cero, se tiene (Venegas Martínez, 2008, p. 396): σ

$$c = c_{BS}(S_t, t; \sigma_h, A_3) \pm \frac{A_1}{rh} (1 - e^{-r(T-t)})$$

Más en el caso de una call short y menos en caso contrario. La fórmula anterior puede dar lugar a valores negativos y si h tiende a cero (intervalos de tiempo muy pequeños), el valor de la prima tiende a infinito (Venegas Martínez, 2008).

Se describirá un ejemplo con los datos de un ejercicio propuesto en Venegas Martínez (2008, p. 397): $S_t = \$42$, $K = \$43$, $r = 0.049$, $T = 90$ días, $\sigma = 0.08$, $h = 1$ semana (1/52), $A_1 = 0.10$, $A_3 = 0.01$. Se obtuvieron los siguientes resultados: call = \$0.8312, put \$1.3077; call long: \$-0.460847, call short: \$ 2.123293; put long: \$ 0.015616, put short: \$ 2.599756 En el Black-Scholes original (sin costos), se tiene simplemente: call \$0.466431 y put = \$0.932276

Barone-Adesi y Whaley

Este modelo, presentado en “Efficient Analytic Approximation of American Option Values” (1987) también valúa opciones estilo americano. Desarrollado por Giovanni Barone-Adesi y [el mismo] Robert E. Whaley en 1987. Parte del argumento, gira en torno al hecho de que el derecho que proporcionan las opciones americanas de ejercer el instrumento antes de vencimiento las hace superiores en valor sobre las europeas (Venegas Martínez, 2008). El desarrollo de este par de autores consiste en una prima compuesta por una parte Black-

Scholes y el valor de ejercicio anticipado (Venegas Martínez, 2008). Primero, la función (Venegas Martínez, 2008, p. 336):

$$\varepsilon(S_t, t) = C(S_t, t) - C_{BS}(S_t, t)$$

Donde ε (épsilon) representa el premio por ejercicio anticipado. La ecuación diferencial parcial propuesta es la siguiente (Venegas Martínez, 2008, p. 336):

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial S_t^2} + (r - q) S_t \frac{\partial \varepsilon}{\partial S_t} - r \varepsilon = 0$$

Con q representando el rendimiento de los dividendos. Ahora, el valor de una prima call con este modelo está dado por (Venegas Martínez, 2008, p. 338):

$$C(S_t, \tau) = \begin{cases} C_{BS}(S_t, \tau) + A_2 \left(\frac{S_t}{S^*}\right)^{q_2}, & \text{si } S_t < S^* \\ S_t - K, & \text{si } S_t \geq S^* \end{cases}$$

Donde A_2 (Venegas Martínez, 2008, p. 338): $A_2 = \frac{S^*}{q_2} \{1 - e^{-q\tau} \Phi[d_1(S^*)]\} > 0$

A su vez, q_2 (Venegas Martínez, 2008, p. 337): $q_2 = \frac{-N + \sqrt{N^2 + 4(M/g)}}{2}$

Además (Venegas Martínez, 2008, p. 336): $M = 2r\sigma^{-2}$ y $N = 2(r - q)\sigma^{-2} - 1$

Y también (Venegas Martínez, 2008, p. 337): $g = 1 - e^{-r\tau}$

Por supuesto que existen más modelos de valuación. La literatura que se ha revisado para construir este capítulo está compuesta por los trabajos más relevantes. Revisar todos los modelos alargaría la labor de esta investigación y colmaría los objetivos de esta. Algunos de los trabajos más recientes que el buscador del portal de bibliotecas de nuestra Universidad considera relevantes son los siguientes y que quien esto escribe encontró interesantes.

Por ejemplo: “Tug-of-war, market manipulation and option pricing” (2017) de Kaj Nyström y Mikko Parviainen, en el cuál, además de desarrollar su propia versión de una ecuación diferencial estocástica, los autores muestran como las dos posturas, long y short, juegan a un *tug-of-war* para intentar sacar la máxima ganancia de su posición.

“Good Volatility, Bad Volatility and Option Pricing” (2019) de Bruno Feunou and Cédric Okou. Proponen un modelo de valuación en el que los precios del subyacente tienen una dinámica de “semi-varianza” al alza y a la baja, es decir, un trabajo basado en volatilidad, considerando que esta tiene “saltos”.

El más extravagante de los recientes, al parecer de esta redacción, es “New analytical option pricing models with Weyl–Titchmarsh theory” (2012) de Jin E Zhang y Yishen Li. Los cuales proponen un modelo de valuación usando la teoría de Weyl-Titchmarsh, que, en resumidas cuentas, surge de las ecuaciones de Schrödinger. Es decir, aplicación de teoría de física cuántica en finanzas.

A cualquier iniciado en opciones a simple vista le parecerá que el valor intrínseco es el valor más “natural” para una opción. Bueno, por lo visto, es más complicado que eso. Diversas consideraciones, desde la naturaleza de las variaciones de los componentes de la prima, hasta el costo del dinero en toda la economía. El valor de una opción es como un rompecabezas, la clave es encontrar configuraciones realistas y sencillas.

IV. Metodología

En este capítulo se exponen los resultados de una metodología construida para esta tesis. Primero se expondrán los supuestos teóricos de la curva cicloide. Después, lo propio de las acciones y la volatilidad de sus rendimientos. Más adelante la propia metodología. Finalmente, la comparación del producto con algunos de los modelos que se revisaron anteriormente.

Los economistas por lo general asumen *ceteris paribus* para simplificar sistemas evidentemente dinámicos y poder abstraerlos. Quienes se dedican al estudio de la teoría financiera asumen un mundo donde todos son neutrales al riesgo y bajo ese principio, valúan instrumentos a la tasa libre de riesgo (la curva o yield de los bonos soberanos), ahorrándose así el problema de estimar rendimientos esperados individualmente. Las ventajas de estos supuestos parecen ser lo suficiente robustos (y simplificadores) al momento de construir un modelo: cero costos de transacción, neutralidad al riesgo, liquidez perfecta, etc.

En el caso de las opciones se puede comprender la simplificación que diversos autores hacen del ambiente en el que se desarrollan los parámetros que definen el valor de estos instrumentos. En el caso de Bachelier, es comprensible que haya intentado establecer la distribución de probabilidad del precio del subyacente desde el momento t_0 , pues se trataba de opciones estilo francés (la prima se paga a vencimiento). También es entendible que Sprenkle, Boness y Samuelson hayan postulado conocer los parámetros de rendimiento esperado del subyacente, el de la propia opción y la aversión al riesgo para poder ‘descontar’ de forma adecuada.

¿La vía ‘adecuada’ entonces consiste en tratar de pronosticar la trayectoria futura de determinado parámetro de una opción?, ¿estimar tasas de rendimiento con base en el pasado para esperar que se sigan comportando igual? ¿O seguir la propuesta de Black, Scholes y Merton? Suponer que se tiene una call cubierta, que todos los flujos que genera toda la posición son derivadas parciales, de las cuales se forma una ecuación diferencial parcial. Después, considerando un comportamiento de movimiento browniano geométrico para la trayectoria descrita por el activo subyacente, resolver la ecuación planteada. No contiene ‘valores ni ratios esperados’ para descontar valores futuros: el valor de la prima se calcula de acuerdo a los datos ‘en el momento’.

También se podrían usar árboles binomiales, trinomiales o los que la imaginación permita, para que otra vez con base en el pasado, establecer la trayectoria de precios -o la variable escogida- que seguirá la opción y el subyacente. O, además del precio spot, hacer a la volatilidad (u otro parámetro) estocástico también. Agregar costos de transacción, encontrar momentos S_t de ejercicio “adecuados” (para las opciones americanas), etc.

Hasta la escritura de esta investigación, se vislumbró que, por sus propiedades, la función parabólica junto a su inversa, la raíz cuadrada, son de las funciones más usadas en todo tipo de disciplinas. En finanzas, \sqrt{t} , respaldada por los supuestos del Movimiento Browniano Geométrico, se encuentra por todas partes. Y tal como se estableció en la hipótesis, se decidió usar algo distinto para representar el tiempo, la curva cicloide como sustituta de dicha función.

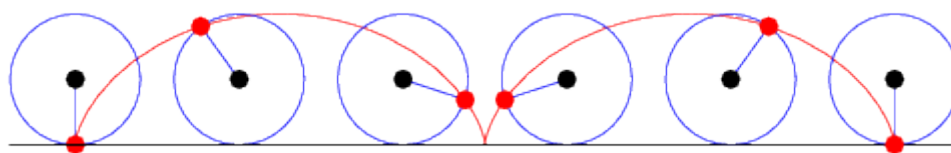
La elección no fue trivial. En una biografía de Leibniz, se descubrió un viejo reto matemático conocido popularmente como “la garra del león”, en el que presumiblemente Sir Isaac Newton resolvió un par de problemas planteados por Jacob Bernoulli en cuestión de unas horas (Muñoz Santoja, 2013). La solución a uno de ellos es la cicloide, que, junto a sus propiedades braquistócrona y tautócrona llamó poderosamente la atención.

4.1 La cicloide

Como otras curvas, la cicloide tiene su propia historia. Corcho Gutiérrez (2017) sostiene que la primera publicación formal fue de Evangelista Torricelli (discípulo de Galileo) en 1644. Aunque, como dice también Corcho Gutiérrez, ya había trabajos previos de Père Marin Mersenne y de Gilles Persone de Roberval en 1634. Hacia 1686, Gottfried Wilhelm Leibniz formuló la ecuación para esta curva. Más tarde, Huygens usaría la propiedad tautócrona de la cicloide para su trabajo con péndulos. Finalmente, y como mencioné antes, Jacob Bernoulli formula en 1696 el problema para encontrar la curva braquistócrona, que resultó ser la cicloide.

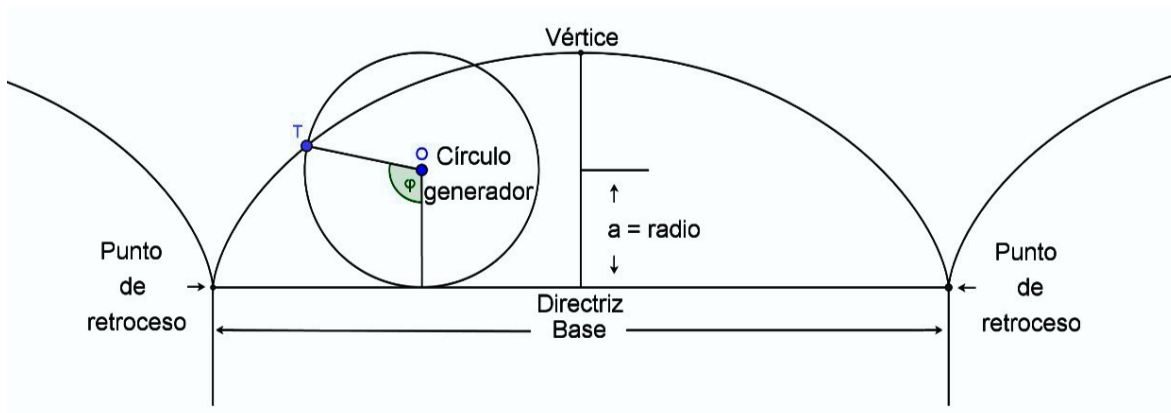
Las funciones trigonométricas tienen muchas utilidades. Dos de ellas, seno y coseno, construidas como una ecuación paramétrica forman una curva, la cicloide, que tiene curiosas propiedades. La curva está definida como: “(...) the locus of a point on the rim of a circle of radius a rolling along a straight line” [(...) el lugar de un punto en el borde de un círculo de radio a que rueda a lo largo de una línea recta] Weisstein (2003, párr. 1). Visualmente:

Figura 4.1a



Fuente: tomado directamente de Weisstein (2003).

Figura 4.1b



Fuente: tomado directamente de Corcho Gutiérrez (2017, p 5).

Tanto en ‘La cicloide’ de Corcho Gutiérrez (2017) y en ‘A Book of Curves’ de Lookwood (1961) aparecen instrucciones para construirla ‘a mano’. Como se dijo antes, esta no es una función, se construye con una ecuación paramétrica, que es como sigue (Loockwood, 1961, p. 82; Corcho Gutiérrez, 2017, p. 8; Weisstein, 2003, párr. 4):

$$cicloide: \begin{cases} x = a(\theta - \text{sen}(\theta)) \\ y = a(1 - \text{cos}(\theta)) \end{cases}$$

Donde a representa el radio, θ , el ángulo en radianes; $\text{sen}(t)$ y $\text{cos}(t)$ representan las funciones seno y coseno respectivamente. En el caso de la longitud de un solo arco generado y el área debajo de dicho arco, están dados por (Weisstein, 2003, párr. 9; Loockwood, 1961, p. 84; Corcho Gutiérrez, 2017, p. 24):

$$L = 8a; \quad A = 3\pi a^2$$

Aplicando cálculo diferencial para ecuaciones paramétricas, las derivadas primera y segunda (siempre calculadas con radianes; no importa cuánto mida el radio, el valor de las derivadas nunca cambia) están dadas por (Corcho Gutiérrez, 2017, p. 8):

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\sin(\theta)}{1 - \cos(\theta)} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{1}{1 - \cos(\theta)}$$

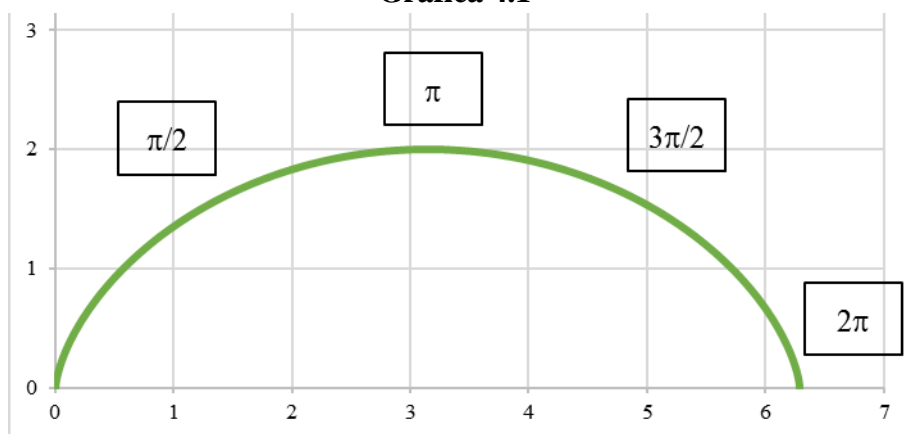
La cuestión de curvatura, tangente, normal, evolvente, evoluta y otras definiciones geométricas no son descritas en esta investigación, pues no se consideran relevantes al propósito. Esta curva tiene dos propiedades especiales: braquistócrona y tautócrona. La primera consiste en que, al lanzar un objeto (suponiendo ausencia de fricción) de un punto A hacia un punto inclinado B, la trayectoria que ocupa menos tiempo en llegar al punto B es la que describe un tramo de cicloide. De hecho, braquistócrona (del griego) quiere decir “intervalo de tiempo más corto”.

Por su parte, la propiedad tautócrona refiere a que, si se deja deslizar diversos objetos a lo largo de media cicloide invertida, no importa desde dónde partan, todos llegarán al mismo tiempo al final del trayecto (Weisstein, s.f., párr. 1). Tautócrona (también del griego) significa “mismo tiempo”. Según Corcho Gutiérrez (2017) fue el físico Christiaan Huygens, quién concluyó que dicha propiedad la tiene esta curva. Él llegó a la siguiente relación (Corcho Gutiérrez, 2017, p. 58):

$$\text{tiempo (en segundos)} = \sqrt{\frac{a}{g}}$$

Tiempo que pasa por cada segundo una esfera al moverse por la cicloide. Donde a = radio, g = aceleración de la gravedad. Para saber en qué tiempo llega al punto más bajo de la cicloide, multiplicar lo anterior por π (punto en que, en radianes $\pi = 180^\circ$). Para esta investigación, se construyó esta curva usando las funciones trigonométricas en Excel, con radio = 1. Primero, una columna de 1 en 1 hasta 360 (grados). Después, convertir en radianes; ahora usar las ecuaciones paramétricas y graficar. En la Figura 4.2 se muestra el resultado:

Gráfica 4.1



Fuente: constructo propio.

Tabla 4.1

Grados	RAD	X	Cicloide	$\sqrt{x} = 1$	$\sqrt{x} = 0.5$
0	0.000	0.00000	-	-	-
1	0.017	0.00000	114.589	531.169	751.187
2	0.035	0.00001	57.290	187.801	265.591
3	0.052	0.00002	38.188	102.230	144.575
4	0.070	0.00004	28.636	66.404	93.909
5	0.087	0.00008	22.904	47.518	67.200
6	0.105	0.00014	19.081	36.151	51.125
7	0.122	0.00023	16.350	28.691	40.575
8	0.140	0.00034	14.301	23.486	33.214
9	0.157	0.00048	12.706	19.685	27.839
10	0.175	0.00066	11.430	16.810	23.773
11	0.192	0.00088	10.385	14.573	20.609
12	0.209	0.00115	9.514	12.792	18.090
13	0.227	0.00146	8.777	11.347	16.047
14	0.244	0.00182	8.144	10.155	14.362
15	0.262	0.00224	7.596	9.159	12.952
16	0.279	0.00271	7.115	8.316	11.760
17	0.297	0.00325	6.691	7.595	10.741
18	0.314	0.00386	6.314	6.973	9.861
19	0.332	0.00453	5.976	6.431	9.095
20	0.349	0.00528	5.671	5.957	8.424
21	0.367	0.00611	5.396	5.538	7.832
22	0.384	0.00702	5.145	5.167	7.307
23	0.401	0.00802	4.915	4.835	6.838
24	0.419	0.00911	4.705	4.538	6.417
25	0.436	0.01029	4.511	4.270	6.038
26	0.454	0.01156	4.331	4.027	5.695
27	0.471	0.01294	4.165	3.807	5.384
28	0.489	0.01442	4.011	3.607	5.100
29	0.506	0.01600	3.867	3.423	4.841
30	0.524	0.01770	3.732	3.255	4.603
31	0.541	0.01951	3.606	3.100	4.384
32	0.559	0.02144	3.487	2.957	4.182
33	0.576	0.02349	3.376	2.825	3.996
34	0.593	0.02566	3.271	2.703	3.823
35	0.611	0.02797	3.172	2.589	3.662
90	1.571	0.57	1.000	0.662	0.936
180	3.142	2.35619	0.000	0.282	0.399
270	4.712	4.28429	-1.000	0.209	0.296
360	6.283	4.71239	-	0.199	0.282

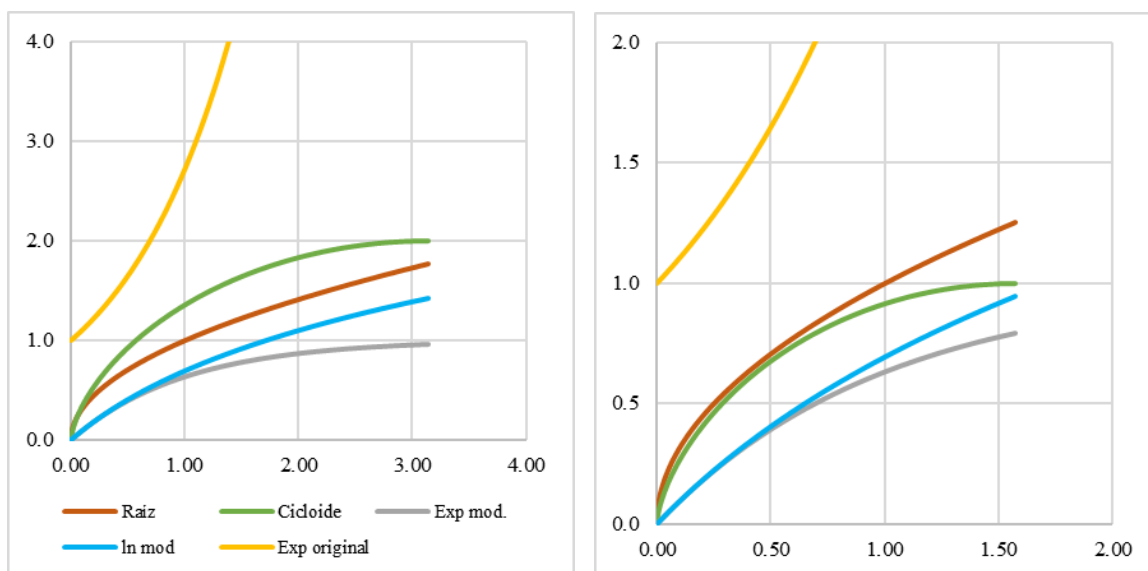
Fuente: constructo propio

Es evidente que, en π , $y = 2a$, siempre. En radianes, 180° es igual a π ; con un radio $(a) = 1$, $x(\text{rad } 180^\circ) = \pi$. Si radio = 2, entonces $x(\text{rad } 180^\circ) = 2\pi$. Es decir, $x(\text{rad } 180^\circ) = a\pi$.

A continuación, en la Tabla 4.1, una comparación entre las primeras derivadas de la cicloide y de la raíz cuadrada ($1/2x^{\frac{1}{2}}$). Como se dijo líneas antes, la derivada de la cicloide se calcula con radianes, en el caso de raíz cuadrada, se hará con las variables x obtenidas de la ecuación paramétrica, para radio = 1 y 0.5.

Cuando el radio es igual a 0.5, las pendientes de ambas curvas se parecen más, tal cómo se puede visualizar en la Gráfica 4.2b. Esta es la medida para el radio elegido para esta metodología. Al comparar una cicloide hasta π (media cicloide) con $a = 1$ (Gráfica 4.2a) con las funciones raíz cuadrada (\sqrt{x}), exponencial acondicionada ($-\exp(-x)+1$) y logarítmica acondicionada: $\ln(x+1)$ (estas toman su variable x de la misma para la cicloide), se obtiene:

Gráfica 4.2a y 4.2b



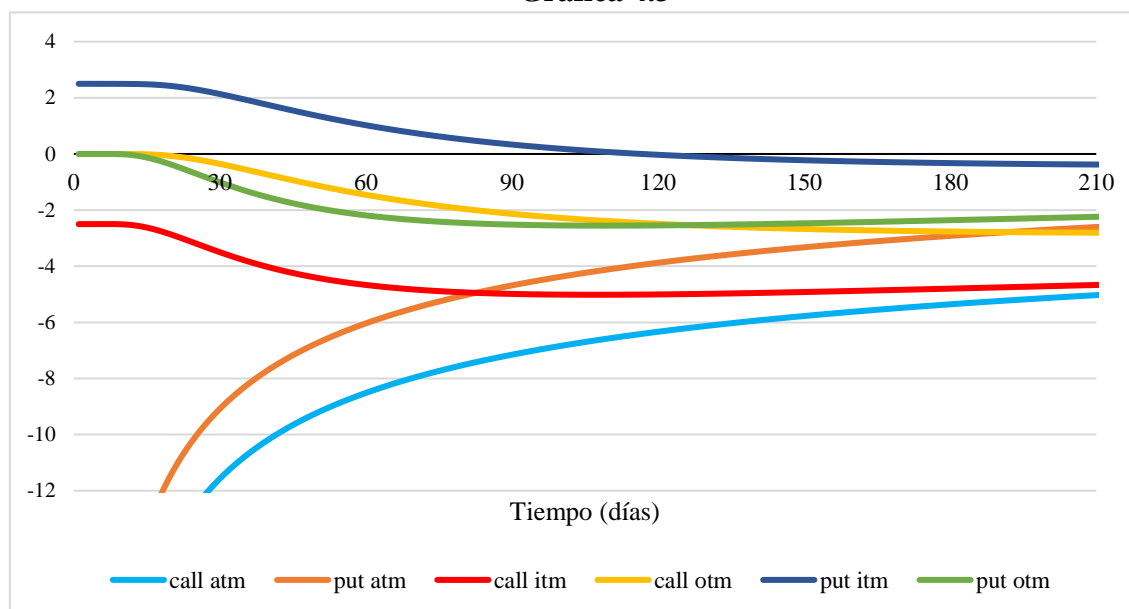
Fuente: constructo propio.

La cicloide y el tiempo

Como se dijo en la sección 3.1, entre más largo sea el tiempo a vencimiento, la incertidumbre sobre el precio final del subyacente es mayor, que si se estuviera cerca de la fecha de ejercicio. Ese es el motivo principal del porqué el tiempo agrega valor. El tiempo por lo general está representado como una raíz cuadrada, pero no necesariamente agrega ese valor directamente.

Esta metodología tiene un límite temporal, solo alcanza hasta 180 días (o en términos de radianes, hasta π) por la naturaleza de la curva cicloide. Entonces, el plazo máximo de las opciones valuadas de esta manera debe ser de 180 días. Si el plazo es mayor, simplemente $T = 1$. La Gráfica 3.35 muestra la sensibilidad de la prima ante el paso del tiempo con la griega theta en el modelo Black-Scholes. Teniendo eso en mente, los cambios en el tiempo comienzan a ser significativos hasta pasados 210 días. En el caso de las opciones in y out the money, los cambios en la tendencia de theta son significativos después de 180 días. Esa misma gráfica, pero solo con 210 días:

Gráfica 4.3



Fuente: elaboración propia, la mitad de ella con información de Hull (2009a, p. 337).

4.2 Acciones

En la sección 1.1 se mencionaron algunos títulos que sirven como subyacente de una opción, entre ellos, las acciones. Quizás ningún otro título sea más conocido por el público que estos instrumentos de capital. Prácticamente igual de viejas que las opciones, se encuentran en todas las plazas financieras del mundo.

Cuando una sociedad mercantil -la emisora- ha crecido lo suficiente, la gerencia de esta decide emitir estos títulos, que son representaciones alícuotas de su capital, para

‘levantar’ recursos del Gran Público Inversionista. Bodie, Kane y Marcus (2009, p. 35) señalan sobre estos instrumentos: “represent ownership shares in a corporation. Each share of common stock entitles its owner to one vote on any matters of corporate governance that are put to a vote at the corporation’s annual meeting and to a share in the financial benefits of ownership” [representan acciones de propiedad en una corporación. Cada acción proporciona a su tenedor un voto sobre cualquier asunto del gobierno corporativo que se ponga a votación en la reunión anual de la compañía y a recibir una parte de los beneficios financieros].

No todas las acciones proporcionan derechos de voto, las emisoras emiten varias series, algunas de las cuales no proporcionan dicho beneficio. La Ley del Mercado de Valores (Cámara de Diputados, 2005) contempla cuatro series accionarias principales. En el caso de las sociedades mercantiles, la “B”, por bursátil (Artículo 22º) y la “F”, para las filiales (artículo 165º). Para casas de bolsa, la “O”, ordinaria y “L”, capital social adicional, aunque de derecho a voto limitado. Aun así, la ley en ese mismo artículo contempla que el dividendo de ambas series sea igual.

Diaz Mata y Aguilera Gómez (2013) distinguen dos tipos de acciones en cuanto a beneficios: las que pagan dividendos (participación en la utilidad) y las que proporcionan ganancias de capital (diferencial positivo de precios). Estos autores también clasifican a estos títulos por su operación (Diaz Mata y Aguilera Gómez, 2013, p. 122-123):

- AAA (o ‘Blue chips’), las más distinguidas;
- acciones que generan ingresos, las que pagan consistentemente dividendos;
- de crecimiento;
- especulativas;
- con comportamiento cíclico: van en sintonía con el estado de la economía;
- defensivas, contra cíclicas a la economía y al propio mercado (beta negativa);
- de mediana capitalización, emisiones de empresas ‘medianas’.

4.2.1 Volatilidad de las acciones

A la volatilidad de los rendimientos de la acción (y en general de cualquier activo subyacente) se le puede considerar histórica, implícita, local (generalización de la implícita), estocástica

y futura (ARCH) (Neftci, 2008). Para las acciones, Hull, (2009a, p. 274) define la volatilidad histórica como: “la volatilidad del precio de una acción se define como la desviación estándar del rendimiento proporcionado por la acción en un año, expresado con una composición continua”.

Si el cambio Δt es pequeño y $\sigma^2 \Delta t$ representa la varianza, entonces la desviación estándar en el tiempo Δt es igual a $\sigma \sqrt{\Delta t}$. En el caso de σ , esta debe ser estimada como desviación estándar de los rendimientos diarios de la acción (Hull, 2009a). Ejemplo: si $\sigma = 12\%$ anual, entonces a un mes: $0.12 * \sqrt{1/12} = 0.0346 = 3.46\%$ mensual aproximadamente. Y si $S_t = \$19$, entonces: $3.46\% * 19 = \$0.65c$, la variación en términos monetarios a un mes. Se pueden obtener el logaritmo neperiano (ln) para cada rendimiento diario, y de esta serie, obtener la desviación estándar. Para esta investigación, se hicieron ambos cálculos y la diferencia es de una o dos milésimas, por lo que para fines de este documento, se utilizó la primera forma.

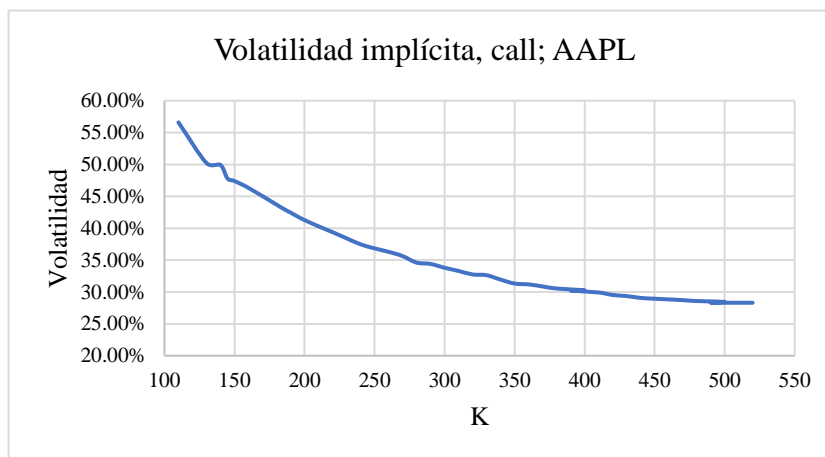
A continuación, un ejemplo con datos reales de la cotización *al cierre* de la acción de Apple (APPL) (Nasdaq, 2020a) en el intervalo de fechas entre el 07 de junio de 2019 y el 08 de junio de 2020, construido en Excel con base en Hull (2009a, pp. 275-276), donde $T(n) = 252$ días, $S_0 = \$187.91$. Con $\sigma \sqrt{\Delta t}$ respetando a σ como la desviación estándar muestral de los rendimientos, se tiene: $\sigma \sqrt{252} = 39.8261\%$. Se consultó en el sitio web Bolsamania.com la volatilidad de los rendimientos de esta acción a un año en la sección de “Análisis de Riesgo” y señaló una volatilidad de 40.17% anual, pero considerando 250 sesiones (véase: <https://www.bolsamania.com/accion/APPLE/analisis-riesgo>).

Cuando se introducen los parámetros en la fórmula Black-Scholes, la volatilidad es explícita, es decir, es un dato conocido. Cuando se trata de volatilidad implícita, es un reflejo del problema de una volatilidad constante en este modelo. El mercado tiene sus propios valores para las primas. Si mediante métodos numéricos se obtiene σ del modelo B-S y con el valor de la prima dado, se obtiene dicha volatilidad (Neftci, 2008).

Ante diferentes valores de K y vistos de forma gráfica, se forman “sesgos” conocidos popularmente como “smiles” o “skews”: *sonrisas de volatilidad* (Neftci, 2008). Como la volatilidad implícita difiere de la volatilidad histórica, se puede tomar este dato para tomar posiciones, si se anticipa una baja volatilidad se puede optar por posiciones cortas y

viceversa. La siguiente gráfica fue elaborada con datos de Yahoo! Finanzas (2020) con opciones de Apple negociadas el 22 de junio, T = 17 de septiembre de 2021 (87 días), K en abscisas:

Gráfica 4.4



Fuente: Elaboración propia con información de: <https://es-us.finanzas.yahoo.com/quote/AAPL/options?p=AAPL>

VIMEX

Este es el índice de volatilidad implícita que calcula Mercado Mexicano de Derivados: “El Índice de Volatilidad México, VIMEX, está diseñado para medir las expectativas de volatilidad que los inversionistas tienen del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de la Bolsa Mexicana de Valores” (Mercado Mexicano de Derivados, s.f.d., p. 2). Está calculado con base en opciones trimestrales sobre futuros del IPC, tanto en calls como en puts “El VIMEX refleja la volatilidad esperada de corto plazo (90 días naturales) del IPC y utiliza precios de Opciones en lugar de precios de acciones, porque las Opciones reflejan lo que los compradores y vendedores esperan que ocurra en el mercado accionario” (Mercado Mexicano de Derivados, s.f.d., p. 2).

4.3 Metodología

Siempre se debe tener en cuenta que los modelos de valuación para estos instrumentos sirven como *referencia*, no necesariamente son una fuente *última* de precios en un mercado de

derivados funcional, ni formal ni informal. En un libre mercado tiene más peso la oferta y la demanda correspondiente.

Parámetros

Se consideran el precio spot (S_t), el precio de ejercicio (K), conocido y constante; tiempo a vencimiento (T), tasa de interés libre de riesgo (r) y dividendos (div). Los flujos de efectivo que implican los costos de transacción, la aversión al riesgo, la volatilidad y otros parámetros estocásticos, el rendimiento de la propia opción y métodos por árboles binomiales quedan descartados.

Premisas

Los siguientes son los fundamentos que sostienen la propuesta:

- i) El activo subyacente es una acción, representación alícuota de una sociedad mercantil que ha emitido estos títulos de capital en un mercado bursátil. Por su naturaleza, no pueden tener precios negativos. El rendimiento esperado sobre estas no es constante. No se considera que siga un movimiento browniano geométrico.
- ii) El precio de ejercicio K es constante en toda la vida de la opción.
- iii) El paso del tiempo, con $[t, T]$ hasta 180 días, está representado por la curva cicloide.
- iv) Se considera una cicloide con radio = 0.5.
- v) La tasa de interés es la TIIE al plazo correspondiente (Mercado Mexicano de Derivados, 2013a, p. 6) y ajustada a las abscisas de la curva cicloide.
- vi) No hay costos de transacción.
- vii) No hay oportunidades de arbitraje, los activos se pueden descontar a la tasa libre de riesgo. Esto implica neutralidad al riesgo.
- viii) No se considera la volatilidad de los rendimientos de la acción.

En el momento t_0 de la suscripción de una call europea, el valor intrínseco está dado por:

$$S_0 - Ke^{-rT} \quad (4.1) \quad (3.3.5)$$

Quien se posiciona largo en acciones espera que el precio de estas aumente. Teóricamente, antes de un pago de dividendos, el valor de la acción *debería* caer ligeramente (Ross, Westerfield y Jaffe, 2012). Una simple revisión en cualquier portal web que tenga los

registros de precios históricos de una acción con el respectivo pago de dividendos, mostrará que, por lo general, después de la fecha ‘ex dividendo’, el precio cae ligeramente. Pero esta no es la regla: como se dijo líneas atrás, en un mercado funcional cuentan más la oferta y la demanda. ¿Se puede usar el factor de descuento para S_t de Merton cuando hay dividendos, es decir, $S_t * e^{-r \text{div} T}$? No, porque se trata de resultados de una ecuación diferencial, y este no es el caso.

En esta metodología S_t , está acotada por su variación diaria menos su dividend yield:

$$S_t * (1 + \Delta S_t - \text{div.yield}) \quad (4.2)$$

El paso del tiempo está representado por la curva cicloide hasta 180 días, no más, donde $t = 1$ y a partir de ahí, disminuye:

$$t(x,y), \text{ con } \begin{cases} x = a(\theta - \sin(\theta)) \\ y = a(1 - \cos(\theta)) \end{cases} \quad (4.3)$$

Para call y put respectivamente:

$$\max[0, ((S_t * (1 + \Delta S_t - \text{div.yield})) - Ke^{-rT})] + t(x,y) \quad (4.4)$$

$$\max[0, (Ke^{-rT} - (S_t * (1 + \Delta S_t - \text{div.yield})))] + t(x,y) \quad (4.5)$$

Donde $\Delta S_t = (S_t - S_{t-1})/S_{t-1}$. Finalmente, con la paridad put-call:

$$c + Ke^{-rT} - S_t (1 + \Delta S_t - \text{div.yield}) = p \quad (4.6)$$

Verbigracia. $K = \$220$, $S_1 = \$240$, $S_2 = \$245$, $r = 4\%$, $T = 115$ días, $\text{div.yield} = 1.86\%$; los resultados son: call = \$29.051703, put = \$0.711309; comprobación de la paridad, se tiene: $Ke^{-rT} = \$217.206773$, $S_t (1 + \Delta S_t - \text{div}) = \245.547167 ; $\$29.051703 + \$217.206773 - \$245.547167 = \0.711309

4.4 Comparación

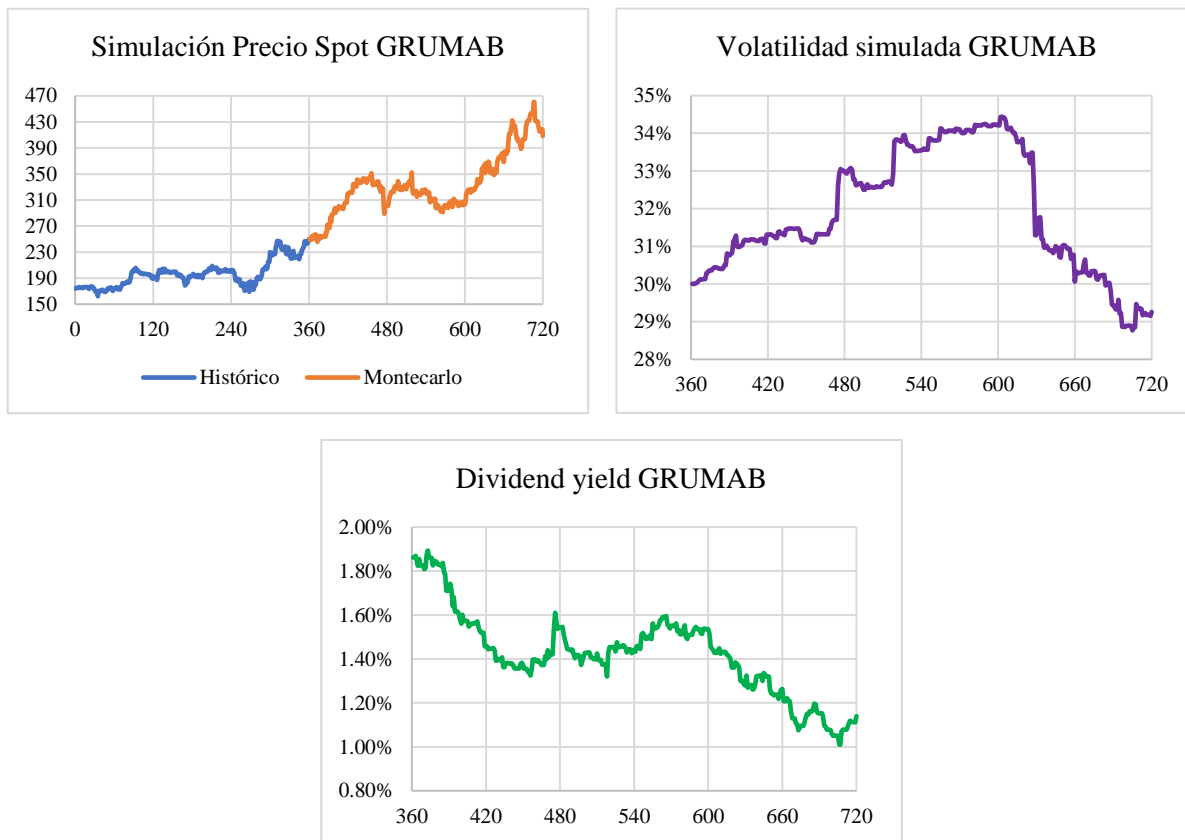
Para esta sección se usan los modelos Black-Scholes-Merton (BSM) y Cox-Ross-Rubinstein (CRR) (estilo europeo). Para CRR, el software DerivaGem considera cada paso como 1 día, en el plazo correspondiente. Por ejemplo, para $T = 90$, se introducen en el software 90 pasos. El software representa gráficamente las posibles trayectorias hasta diez pasos, que no necesariamente coinciden con la trayectoria simulada para S_t .

La comparación se realizará con información de la acción GRUMAB (ISI Emerging Markets Group EMIS, 2020b) que es un activo subyacente en MexDer (Mercado Mexicano de Derivados, s.f.b), con su respectiva curva de rendimiento de dividendos (*dividend yield*).

Este último se obtiene fraccionando los dividendos pagados en un año por una acción entre el precio S_t de la misma (Chen, 2020, párr. 1). El vector de precios original está ubicado entre el 26 de junio de 2019 y el 26 de junio de 2020 (un año). Acción y periodo tomados sin un criterio en particular. En todas las gráficas a continuación, las abscisas representan los días.

Para simular una trayectoria de precios con base en este espacio de tiempo (Gráfica 4.5), se ha utilizado el método Montecarlo (véase ANEXO I) en Excel (Option Trader, 2017). Con los resultados de este, se obtiene también la volatilidad (Gráfica 4.6) y el dividend yield (Gráfica 4.7). GRUMAB paga dividendos en enero, abril, julio y octubre. Los últimos cuatro fueron de \$1.1625 MXN por acción, se supondrá que se mantienen constantes.

Gráficas 4.5, 4.6 y 4.7

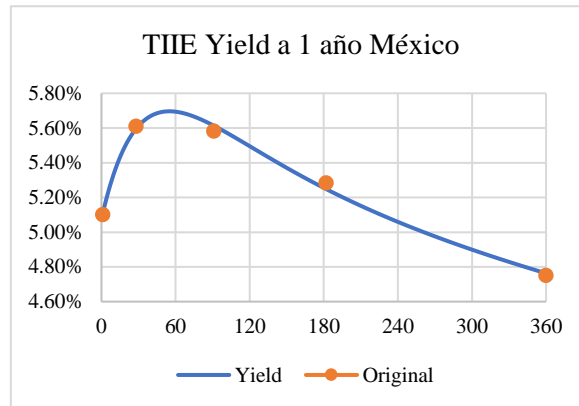


Fuente: elaboración propia con simulación Montecarlo (Option Trader, 2017) y ISI Emerging Markets Group EMIS (2020).

Las curvas de tasas de interés o yield (Gráfica 4.8) son construidas en Excel con el algoritmo Nelson-Siegel-Svensson (MithrilMoney, 2013) (Para detalles matemáticos, véase

Venegas Martínez, 2008, pp. 647-657). Los rendimientos de la TIEE son conseguidos del sitio web Sistema de Información Económica (Banco de México, 2020) con datos al 26 de junio de 2020. En el ANEXO I se muestra cómo construir el algoritmo.

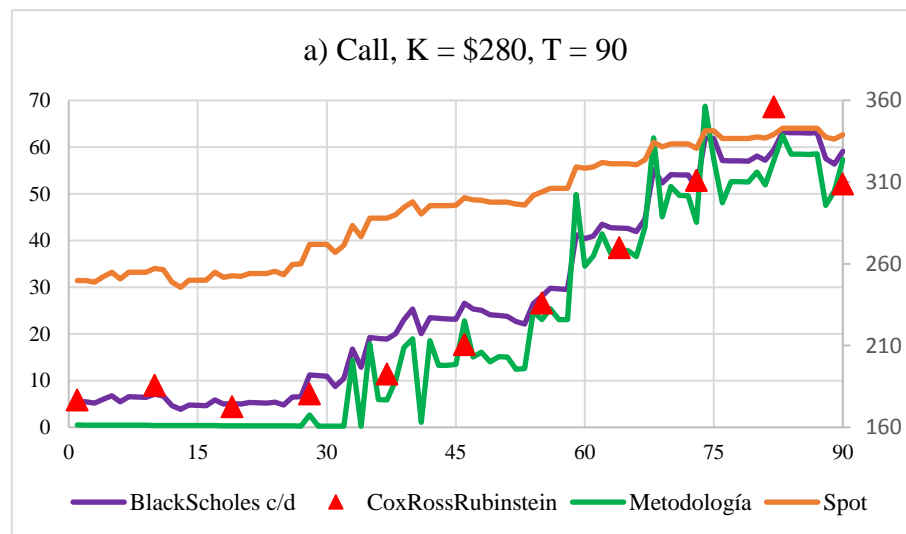
Gráfica 4.8

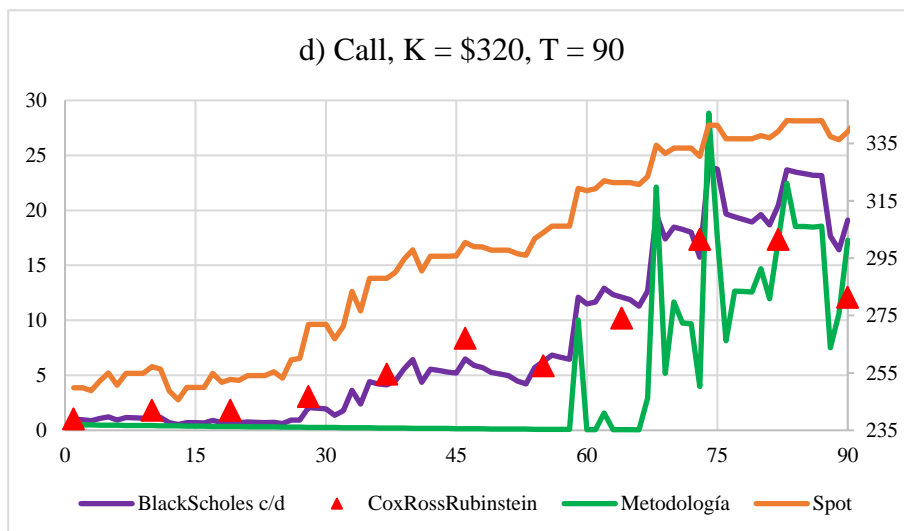
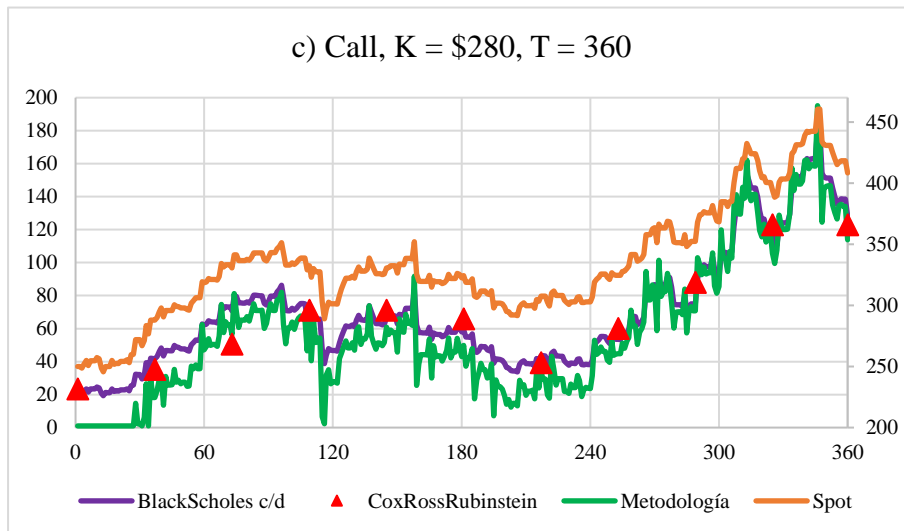
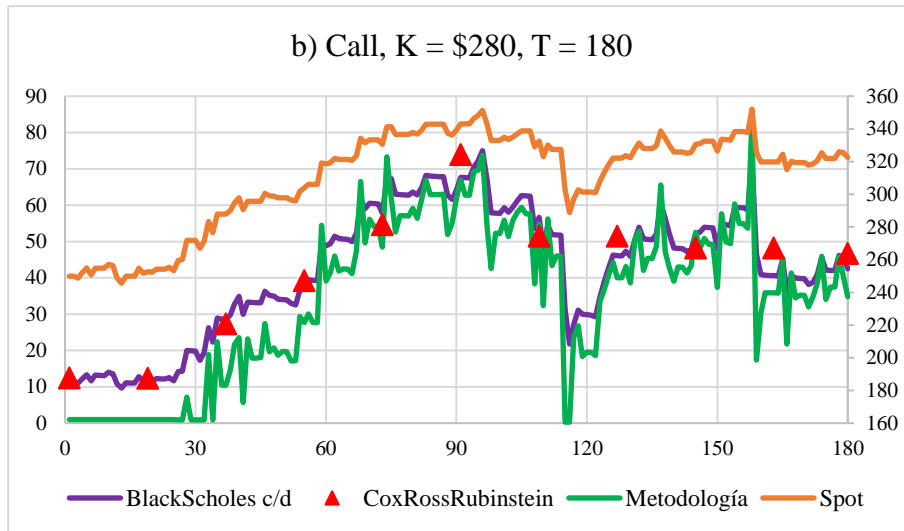


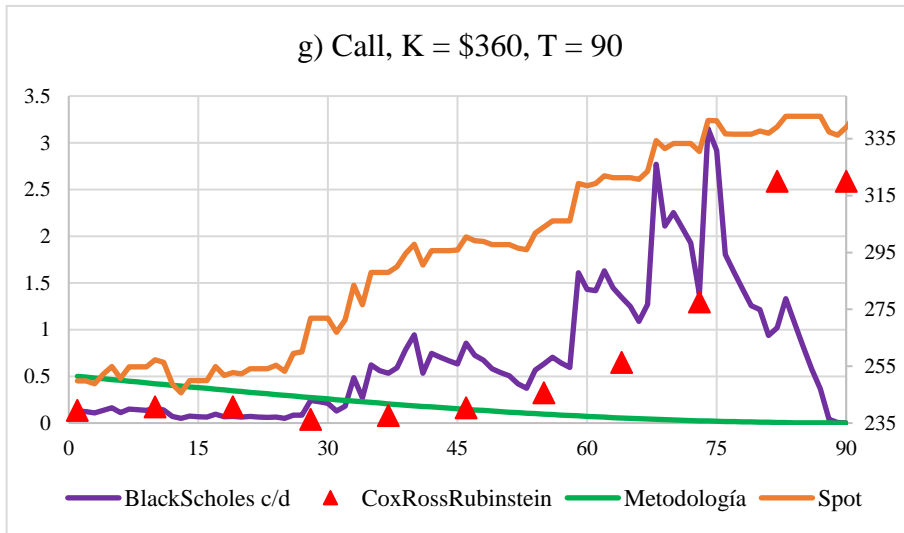
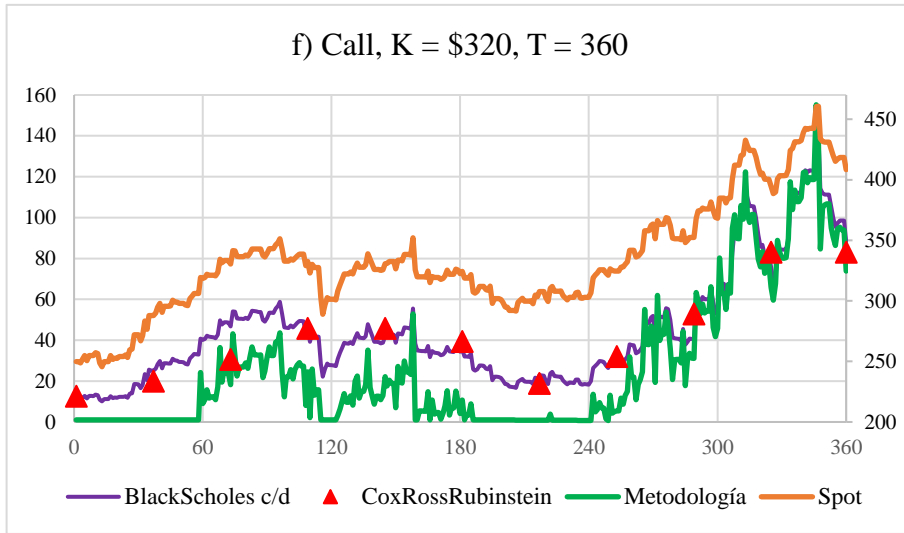
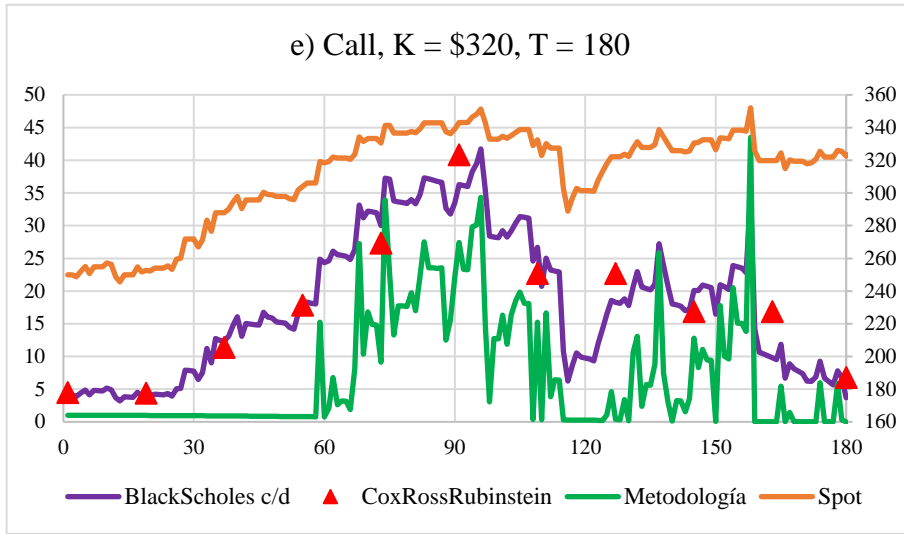
Fuente: elaboración propia con el algoritmo Nelson-Siegel-Svensson (MithrilMoney, 2013)

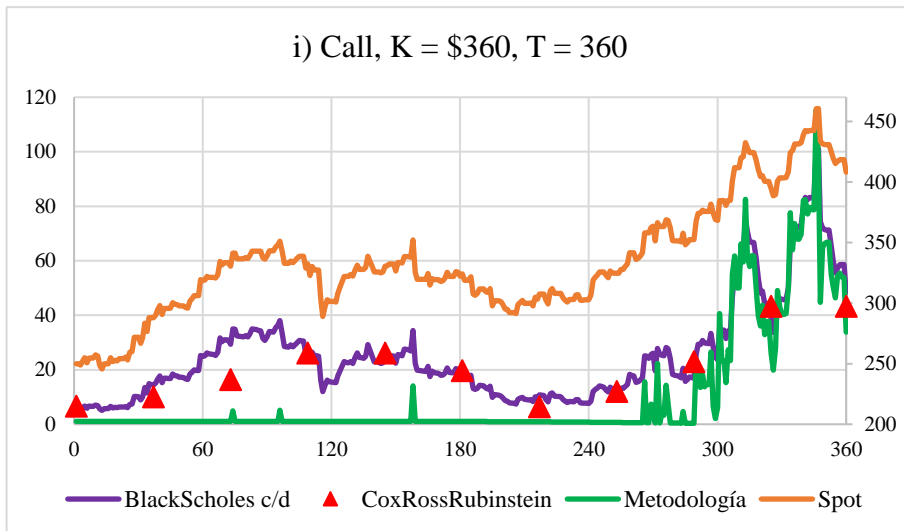
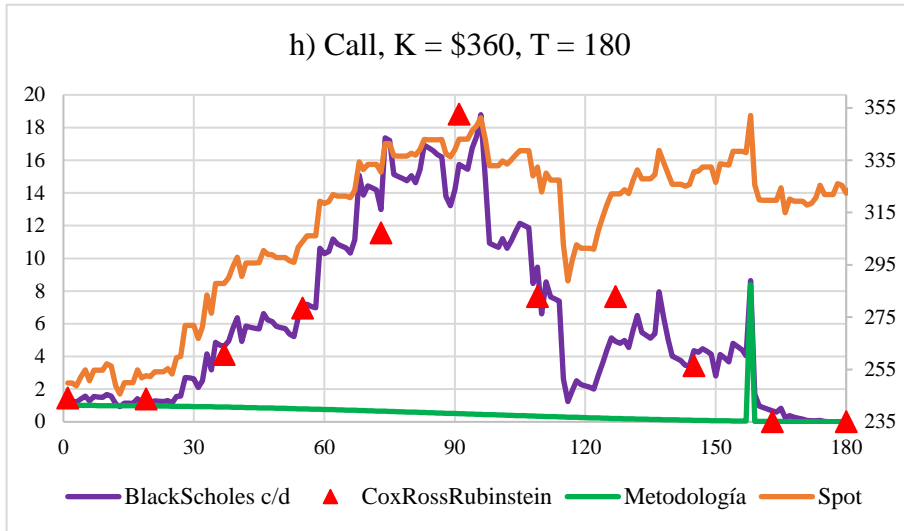
Con base en la Tabla 1.2, para acciones con precio spot superior a \$210, la distancia entre precios de ejercicio (K) es de al menos \$20 MXN. En el caso de GRUMAB, los valores para K considerados son \$280, \$320 y \$360. Los periodos de tiempo a vencimiento son 90, 180 y 360 días (siempre en las abscisas). En las Gráficas 4.9(a-i) se presentan las comparaciones para call, y en las 4.9(a-i) para put. Después se presentan dos tablas, call, K = \$280, T = 90 y put, K = \$320, T = 90 para visualizar dato por dato las comparaciones.

Gráficas 4.9(a-i)



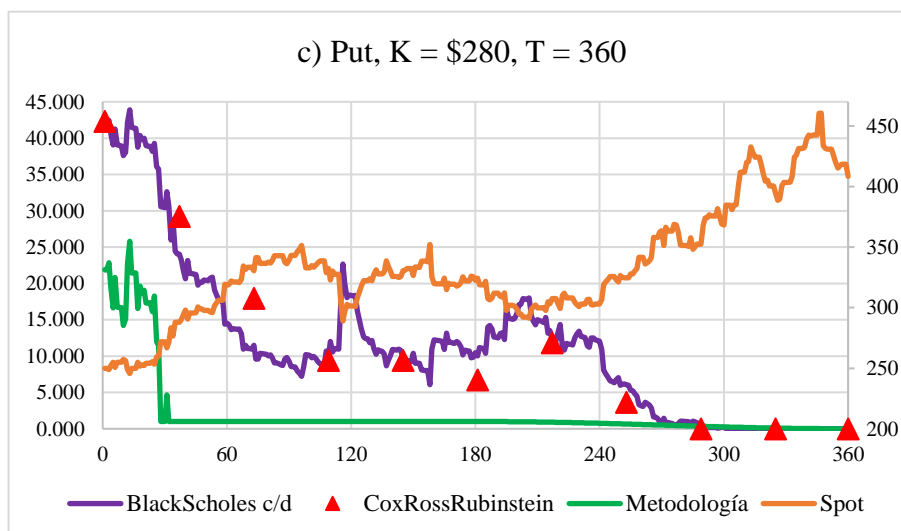
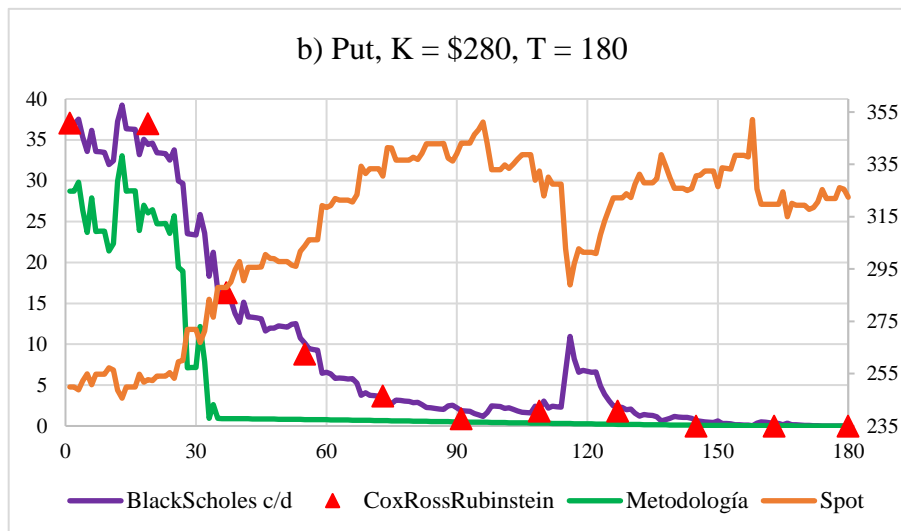
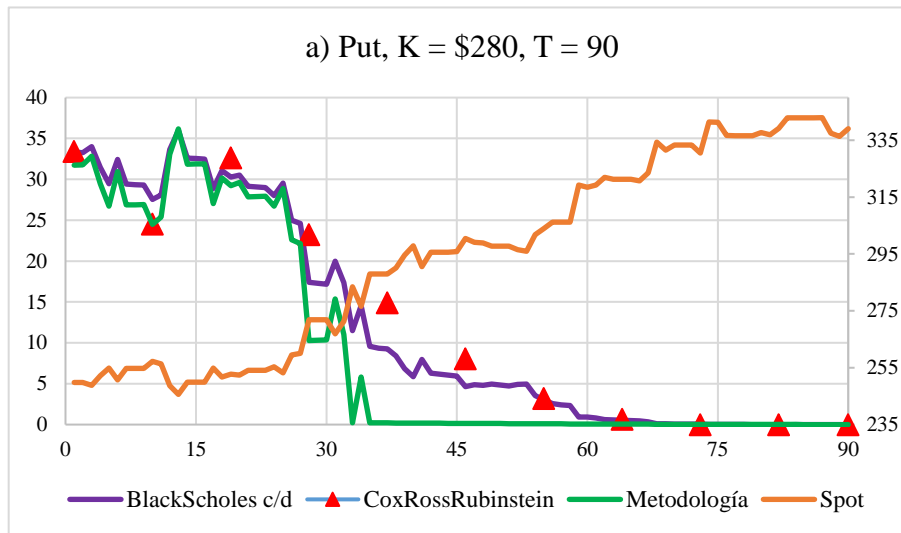


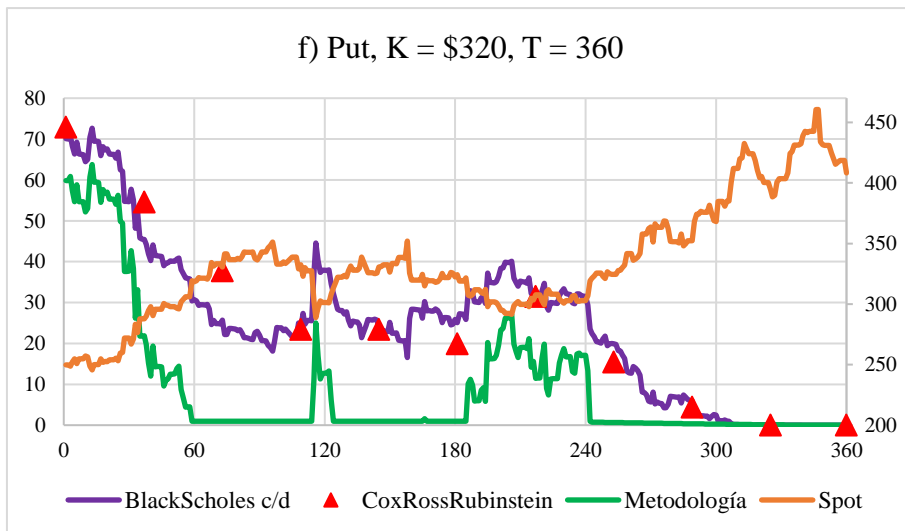
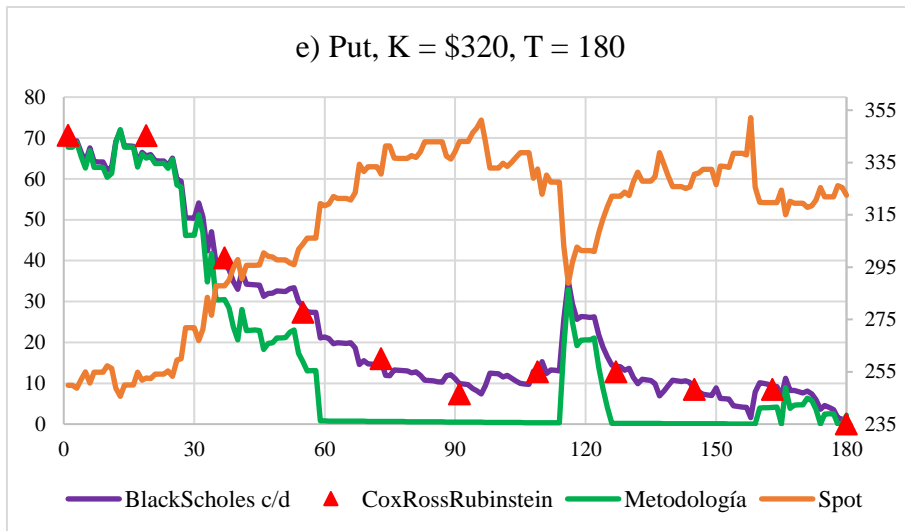
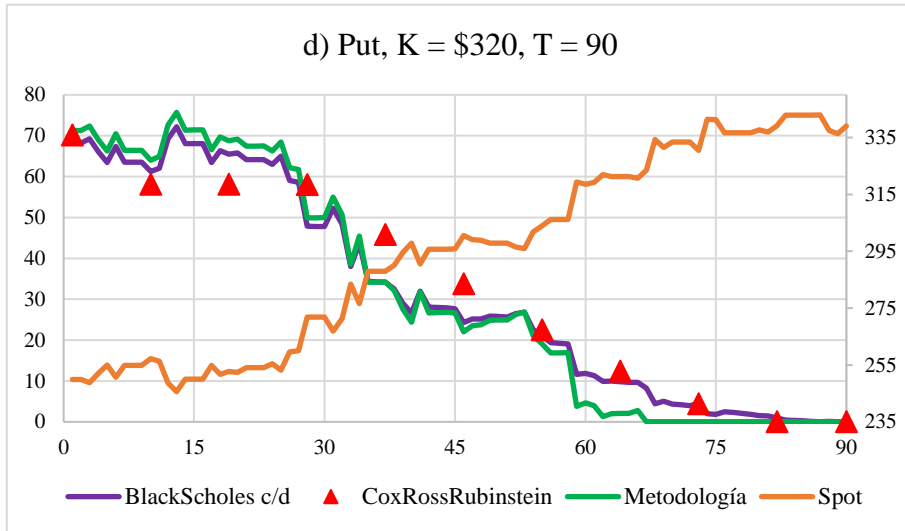


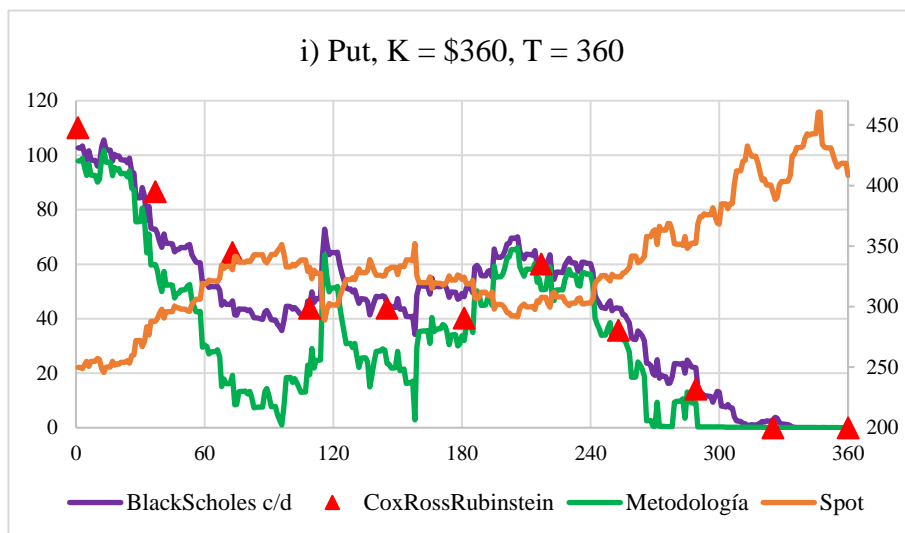
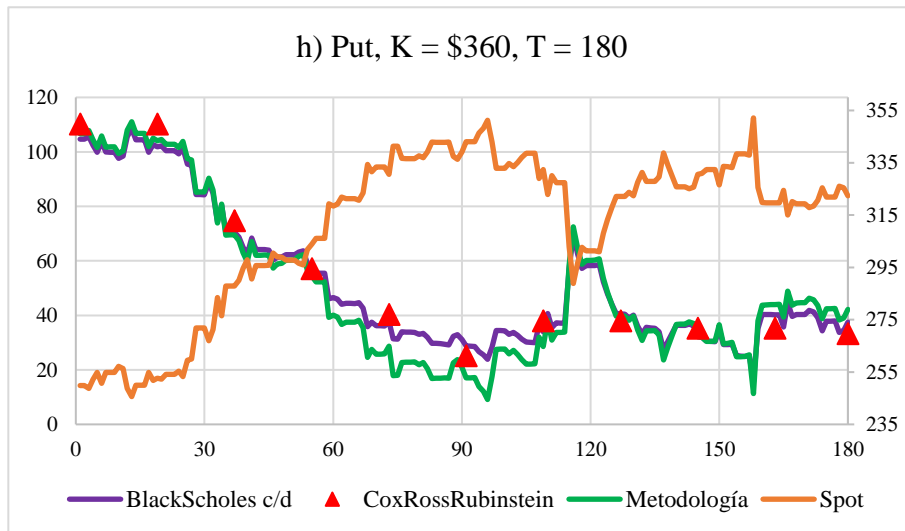
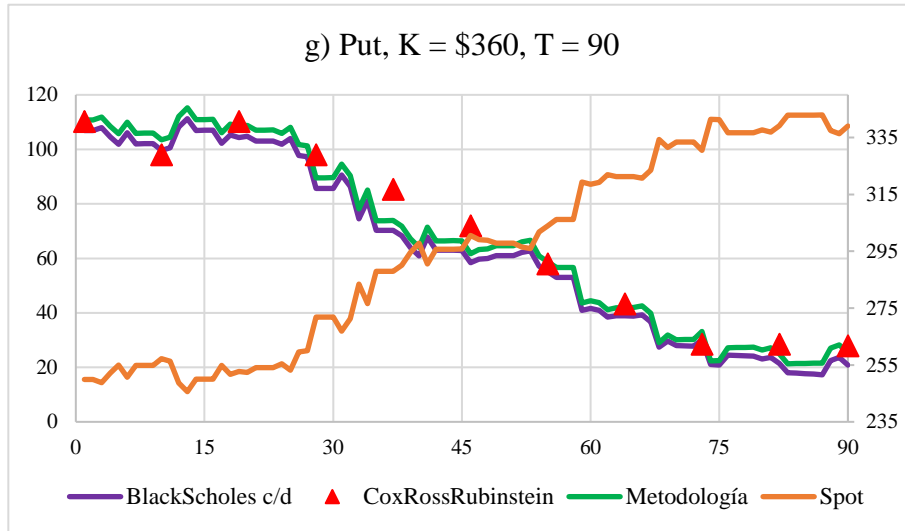


Fuente: constructos propios con base en lo visto en esta investigación.

Gráficas 4.10(a-i)







Fuente: constructos propios con base en lo visto en esta investigación.

Tabla 4.2a

Call; T = 90; K = \$280								
S _t	T	σ	r	div-yield	Cicloide	BSM c/d	CRR	Metodología
249.85	90	30.0013%	5.1060%	1.8611%	0.5000	5.559528	5.895933	0.500000
249.85	89	30.0012%	5.1360%	1.8611%	0.4913	5.490940		0.491274
248.78	88	30.0051%	5.1647%	1.8691%	0.4826	5.149585		0.482550
252.17	87	30.0310%	5.1923%	1.8440%	0.4738	5.991342		0.473832
254.91	86	30.0465%	5.2189%	1.8242%	0.4651	6.725359		0.465122
250.70	85	30.0872%	5.2444%	1.8548%	0.4564	5.467897		0.456422
254.80	84	30.1228%	5.2688%	1.8250%	0.4477	6.567664		0.447736
254.80	83	30.1226%	5.2923%	1.8250%	0.4391	6.488312		0.439065
254.80	82	30.1207%	5.3148%	1.8250%	0.4304	6.407690		0.430413
257.24	81	30.1292%	5.3364%	1.8076%	0.4218	7.084172	9.046925	0.421783
256.34	80	30.1327%	5.3571%	1.8140%	0.4132	6.718312		0.413176
248.71	79	30.2910%	5.3769%	1.8696%	0.4046	4.611942		0.404596
245.62	78	30.3116%	5.3958%	1.8932%	0.3960	3.855263		0.396044
249.96	77	30.3572%	5.4140%	1.8603%	0.3875	4.793158		0.387524
249.96	76	30.3559%	5.4313%	1.8603%	0.3790	4.717664		0.379039
249.96	75	30.3560%	5.4479%	1.8603%	0.3706	4.642368		0.370590
254.85	74	30.4105%	5.4638%	1.8246%	0.3622	5.878914		0.362181
251.75	73	30.4394%	5.4789%	1.8470%	0.3538	4.964607		0.353814
252.71	72	30.4403%	5.4933%	1.8401%	0.3455	5.131650	4.399416	0.345492
252.34	71	30.4394%	5.5071%	1.8427%	0.3372	4.954975		0.337216
254.12	70	30.4149%	5.5202%	1.8299%	0.3290	5.334272		0.328990
254.12	69	30.4056%	5.5326%	1.8299%	0.3208	5.245251		0.320816
254.12	68	30.4049%	5.5445%	1.8299%	0.3127	5.159044		0.312697
255.36	67	30.3973%	5.5558%	1.8209%	0.3046	5.410891		0.304634
253.22	66	30.4120%	5.5665%	1.8363%	0.2966	4.754785		0.296632
259.54	65	30.5050%	5.5766%	1.7916%	0.2887	6.515324		0.288691
260.04	64	30.4987%	5.5862%	1.7882%	0.2808	6.574391		0.280814
271.91	63	30.8058%	5.5953%	1.7102%	0.2730	11.211411	7.165066	2.662513
271.91	62	30.8032%	5.6039%	1.7102%	0.2653	11.089927		0.265264
271.91	61	30.7567%	5.6120%	1.7102%	0.2576	10.948091		0.257595
266.92	60	30.7902%	5.6196%	1.7421%	0.2500	8.727266		0.250000
271.28	59	30.8262%	5.6268%	1.7141%	0.2425	10.454976		0.242481
283.45	58	31.1302%	5.6335%	1.6405%	0.2350	16.726800		14.285420
276.56	57	31.1915%	5.6399%	1.6814%	0.2277	12.865124		0.227680
287.93	56	31.2883%	5.6458%	1.6150%	0.2204	19.252826		17.791912
287.93	55	30.9883%	5.6513%	1.6150%	0.2132	18.990391		5.904519

287.93	54	30.9810%	5.6564%	1.6150%	0.2061	18.851590	11.419237	5.855972
290.05	53	30.9839%	5.6612%	1.6032%	0.1991	20.081517		10.048761
294.63	52	31.0159%	5.6656%	1.5782%	0.1922	23.085536		17.112377
297.90	51	31.0298%	5.6696%	1.5609%	0.1853	25.318147		18.976828
290.53	50	31.1418%	5.6734%	1.6005%	0.1786	20.050896		1.076030
295.67	49	31.1762%	5.6768%	1.5727%	0.1720	23.480430		18.574809
295.67	48	31.1697%	5.6799%	1.5727%	0.1654	23.341075		13.297858
295.67	47	31.1552%	5.6827%	1.5727%	0.1590	23.197793		13.248590
295.80	46	31.1470%	5.6852%	1.5720%	0.1527	23.151025		13.462724
300.51	45	31.1790%	5.6874%	1.5474%	0.1464	26.548076	17.725916	22.772546
299.07	44	31.1853%	5.6893%	1.5548%	0.1403	25.315678		15.074507
298.90	43	31.1824%	5.6910%	1.5557%	0.1343	25.044119		16.103684
297.80	42	31.1853%	5.6925%	1.5614%	0.1284	24.076467		14.038586
297.80	41	31.1535%	5.6937%	1.5614%	0.1226	23.924763		15.082724
297.80	40	31.1501%	5.6946%	1.5614%	0.1170	23.781092		15.033353
296.53	39	31.1391%	5.6954%	1.5681%	0.1114	22.679424		12.444890
295.99	38	31.1405%	5.6959%	1.5710%	0.1060	22.131832		12.584463
301.77	37	31.1918%	5.6962%	1.5409%	0.1007	26.461360		24.757948
303.91	36	31.1925%	5.6963%	1.5301%	0.0955	28.055148	26.637139	23.088803
306.15	35	31.1962%	5.6962%	1.5189%	0.0904	29.790322		25.387393
306.15	34	31.0776%	5.6959%	1.5189%	0.0855	29.636569		23.082748
306.15	33	31.0719%	5.6955%	1.5189%	0.0807	29.508294		23.033748
319.29	32	31.3085%	5.6948%	1.4564%	0.0760	41.206655		49.834153
318.51	31	31.3109%	5.6940%	1.4599%	0.0714	40.389828		34.520411
319.23	30	31.3104%	5.6931%	1.4566%	0.0670	40.975154		36.695364
321.95	29	31.3151%	5.6920%	1.4443%	0.0627	43.464027		41.393234
321.28	28	31.3044%	5.6907%	1.4473%	0.0585	42.746375		37.260204
321.28	27	31.2737%	5.6893%	1.4473%	0.0545	42.664295	38.449722	37.880044
321.28	26	31.2626%	5.6877%	1.4473%	0.0506	42.585421		37.831773
320.66	25	31.2135%	5.6861%	1.4501%	0.0468	41.911646		36.546549
323.48	24	31.2206%	5.6843%	1.4375%	0.0432	44.555060		42.777688
334.35	23	31.3806%	5.6823%	1.3908%	0.0397	55.160990		61.980579
331.51	22	31.3927%	5.6803%	1.4027%	0.0364	52.304311		45.045855
333.36	21	31.3389%	5.6781%	1.3949%	0.0332	54.087195		51.527111
333.36	20	31.3380%	5.6758%	1.3949%	0.0302	54.042521		49.618481
333.36	19	31.3094%	5.6735%	1.3949%	0.0272	53.998898		49.571208
330.52	18	31.2936%	5.6710%	1.4069%	0.0245	51.142281	52.828064	43.883172
341.39	17	31.4470%	5.6684%	1.3621%	0.0218	61.928656		68.731998
341.33	16	31.4471%	5.6657%	1.3623%	0.0194	61.838909		57.352068
336.65	15	31.4761%	5.6630%	1.3812%	0.0170	57.131731		48.066528

336.62	14	31.4730%	5.6601%	1.3814%	0.0149	57.062380		52.565991
336.62	13	31.4712%	5.6572%	1.3814%	0.0128	57.028449		52.554333
336.62	12	31.4680%	5.6542%	1.3814%	0.0109	56.995274		52.508250
337.69	11	31.4640%	5.6512%	1.3770%	0.0092	58.037010		54.614977
336.90	10	31.4662%	5.6480%	1.3803%	0.0076	57.205726		51.894048
339.16	9	31.4695%	5.6448%	1.3710%	0.0062	59.435940	68.605238	57.185294
342.92	8	31.4717%	5.6415%	1.3560%	0.0049	63.165277		62.425780
342.87	7	31.4704%	5.6382%	1.3562%	0.0037	63.083790		58.477550
342.87	6	31.3857%	5.6348%	1.3562%	0.0027	63.052733		58.482963
342.87	5	31.2356%	5.6314%	1.3562%	0.0019	63.021724		58.438204
342.94	4	31.1571%	5.6279%	1.3559%	0.0012	63.061087		58.534309
337.43	3	31.2069%	5.6243%	1.3781%	0.0007	57.522288		47.492298
336.30	2	31.2104%	5.6207%	1.3827%	0.0003	56.363750		50.615985
339.09	1	31.1821%	5.6170%	1.3713%	0.0001	59.118650	52.114130	57.290437

Fuente: constructo propio con base en lo visto en esta investigación.

Tabla 4.2b

Put; T = 90; K = \$320								
S _t	T	σ	r	div-yield	Cicloide	BSM c/d	CRR	Metodología
249.85	90	30.0013%	5.1060%	1.8611%	0.5000	68.236370	70.149994	71.241125
249.85	89	30.0012%	5.1360%	1.8611%	0.4913	68.218852		71.253845
248.78	88	30.0051%	5.1647%	1.8691%	0.4826	69.206781		72.335412
252.17	87	30.0310%	5.1923%	1.8440%	0.4738	66.023554		68.963920
254.91	86	30.0465%	5.2189%	1.8242%	0.4651	63.466551		66.237819
250.70	85	30.0872%	5.2444%	1.8548%	0.4564	67.377025		70.467851
254.80	84	30.1228%	5.2688%	1.8250%	0.4477	63.547872		66.386394
254.80	83	30.1226%	5.2923%	1.8250%	0.4391	63.532407		66.406882
254.80	82	30.1207%	5.3148%	1.8250%	0.4304	63.517959		66.428495
257.24	81	30.1292%	5.3364%	1.8076%	0.4218	61.251551	58.157589	64.011177
256.34	80	30.1327%	5.3571%	1.8140%	0.4132	62.065896		64.933362
248.71	79	30.2910%	5.3769%	1.8696%	0.4046	69.239046		72.588099
245.62	78	30.3116%	5.3958%	1.8932%	0.3960	72.195336		75.705766
249.96	77	30.3572%	5.4140%	1.8603%	0.3875	68.054763		71.389551
249.96	76	30.3559%	5.4313%	1.8603%	0.3790	68.053394		71.417051
249.96	75	30.3560%	5.4479%	1.8603%	0.3706	68.053310		71.445402
254.85	74	30.4105%	5.4638%	1.8246%	0.3622	63.443943		66.588616
251.75	73	30.4394%	5.4789%	1.8470%	0.3538	66.363028		69.714199
252.71	72	30.4403%	5.4933%	1.8401%	0.3455	65.461590	58.157589	68.793420
252.34	71	30.4394%	5.5071%	1.8427%	0.3372	65.805007		69.186769

254.12	70	30.4149%	5.5202%	1.8299%	0.3290	64.121949		67.444291
254.12	69	30.4056%	5.5326%	1.8299%	0.3208	64.121148		67.477097
254.12	68	30.4049%	5.5445%	1.8299%	0.3127	64.122385		67.510548
255.36	67	30.3973%	5.5558%	1.8209%	0.3046	62.942756		66.298060
253.22	66	30.4120%	5.5665%	1.8363%	0.2966	64.982102		68.475617
259.54	65	30.5050%	5.5766%	1.7916%	0.2887	59.031777		62.192735
260.04	64	30.4987%	5.5862%	1.7882%	0.2808	58.559957		61.728333
271.91	63	30.8058%	5.5953%	1.7102%	0.2730	47.857935	58.012425	49.899870
271.91	62	30.8032%	5.6039%	1.7102%	0.2653	47.828963		49.936697
271.91	61	30.7567%	5.6120%	1.7102%	0.2576	47.790876		49.974014
266.92	60	30.7902%	5.6196%	1.7421%	0.2500	52.234349		54.998345
271.28	59	30.8262%	5.6268%	1.7141%	0.2425	48.302187		50.670528
283.45	58	31.1302%	5.6335%	1.6405%	0.2350	38.026062		38.539205
276.56	57	31.1915%	5.6399%	1.6814%	0.2277	43.722105		45.470100
287.93	56	31.2883%	5.6458%	1.6150%	0.2204	34.424530		34.138149
287.93	55	30.9883%	5.6513%	1.6150%	0.2132	34.255759		34.178035
287.93	54	30.9810%	5.6564%	1.6150%	0.2061	34.187147	45.814570	34.218294
290.05	53	30.9839%	5.6612%	1.6032%	0.1991	32.489397		32.145924
294.63	52	31.0159%	5.6656%	1.5782%	0.1922	29.014830		27.602648
297.90	51	31.0298%	5.6696%	1.5609%	0.1853	26.617941		24.377015
290.53	50	31.1418%	5.6734%	1.6005%	0.1786	31.952102		31.783987
295.67	49	31.1762%	5.6768%	1.5727%	0.1720	28.065146		26.688999
295.67	48	31.1697%	5.6799%	1.5727%	0.1654	27.973483		26.731229
295.67	47	31.1552%	5.6827%	1.5727%	0.1590	27.878619		26.773748
295.80	46	31.1470%	5.6852%	1.5720%	0.1527	27.689851		26.684850
300.51	45	31.1790%	5.6874%	1.5474%	0.1464	24.290431	33.811279	22.019918
299.07	44	31.1853%	5.6893%	1.5548%	0.1403	25.179552		23.499540
298.90	43	31.1824%	5.6910%	1.5557%	0.1343	25.199842		23.718600
297.80	42	31.1853%	5.6925%	1.5614%	0.1284	25.880154		24.859975
297.80	41	31.1535%	5.6937%	1.5614%	0.1226	25.769958		24.904028
297.80	40	31.1501%	5.6946%	1.5614%	0.1170	25.668849		24.948307
296.53	39	31.1391%	5.6954%	1.5681%	0.1114	26.499497		26.265083
295.99	38	31.1405%	5.6959%	1.5710%	0.1060	26.806640		26.849265
301.77	37	31.1918%	5.6962%	1.5409%	0.1007	22.548035		21.108597
303.91	36	31.1925%	5.6963%	1.5301%	0.0955	20.982123	22.496714	19.021875
306.15	35	31.1962%	5.6962%	1.5189%	0.0904	19.388890		16.828115
306.15	34	31.0776%	5.6959%	1.5189%	0.0855	19.213906		16.873612
306.15	33	31.0719%	5.6955%	1.5189%	0.0807	19.077384		16.919292
319.29	32	31.3085%	5.6948%	1.4564%	0.0760	11.617530		3.822588
318.51	31	31.3109%	5.6940%	1.4599%	0.0714	11.826604		4.648648

319.23	30	31.3104%	5.6931%	1.4566%	0.0670	11.309097		3.972885
321.95	29	31.3151%	5.6920%	1.4443%	0.0627	9.888323		1.295818
321.28	28	31.3044%	5.6907%	1.4473%	0.0585	10.004605		2.011962
321.28	27	31.2737%	5.6893%	1.4473%	0.0545	9.812844	12.368601	2.058634
321.28	26	31.2626%	5.6877%	1.4473%	0.0506	9.624426		2.105457
320.66	25	31.2135%	5.6861%	1.4501%	0.0468	9.700931		2.771564
323.48	24	31.2206%	5.6843%	1.4375%	0.0432	8.275887		0.043227
334.35	23	31.3806%	5.6823%	1.3908%	0.0397	4.453810		0.039748
331.51	22	31.3927%	5.6803%	1.4027%	0.0364	5.073931		0.036408
333.36	21	31.3389%	5.6781%	1.3949%	0.0332	4.343406		0.033210
333.36	20	31.3380%	5.6758%	1.3949%	0.0302	4.154196		0.030154
333.36	19	31.3094%	5.6735%	1.3949%	0.0272	3.954380		0.027241
330.52	18	31.2936%	5.6710%	1.4069%	0.0245	4.541782	4.446419	0.024472
341.39	17	31.4470%	5.6684%	1.3621%	0.0218	1.963249		0.021848
341.33	16	31.4471%	5.6657%	1.3623%	0.0194	1.813817		0.019369
336.65	15	31.4761%	5.6630%	1.3812%	0.0170	2.453629		0.017037
336.62	14	31.4730%	5.6601%	1.3814%	0.0149	2.266234		0.014852
336.62	13	31.4712%	5.6572%	1.3814%	0.0128	2.069514		0.012815
336.62	12	31.4680%	5.6542%	1.3814%	0.0109	1.869963		0.010926
337.69	11	31.4640%	5.6512%	1.3770%	0.0092	1.497715		0.009186
336.90	10	31.4662%	5.6480%	1.3803%	0.0076	1.422932		0.007596
339.16	9	31.4695%	5.6448%	1.3710%	0.0062	0.937670	0.000000	0.006156
342.92	8	31.4717%	5.6415%	1.3560%	0.0049	0.460592		0.004866
342.87	7	31.4704%	5.6382%	1.3562%	0.0037	0.344099		0.003727
342.87	6	31.3857%	5.6348%	1.3562%	0.0027	0.232944		0.002739
342.87	5	31.2356%	5.6314%	1.3562%	0.0019	0.137831		0.001903
342.94	4	31.1571%	5.6279%	1.3559%	0.0012	0.066118		0.001218
337.43	3	31.2069%	5.6243%	1.3781%	0.0007	0.110598		0.000685
336.30	2	31.2104%	5.6207%	1.3827%	0.0003	0.043411		0.000305
339.09	1	31.1821%	5.6170%	1.3713%	0.0001	0.000278	0.000000	0.000076

Fuente: constructo propio con base en lo visto en esta investigación.

Comentarios a los resultados

Para ser una metodología que no considera la volatilidad, los resultados que proporciona esta son erráticos. Si la opción está out the money, el valor tanto de call como put está acotado al valor en t de la cicloide. Esta es la causa de la alta volatilidad observada: si la opción entra a out the money, el valor de la prima caerá demasiado e inmediatamente.

Los resultados del proceso propuesto se asemejan más a ambos modelos en cuanto a put se refiere, particularmente en: $K = \$320$, $T = 90$ días (Gráfica 4.9, d), $K = \$360$, $T = 360$ días (Gráfica 4.9, g) y $K = \$360$, $T = 180$ días (Gráfica 4.9, h). En el caso de call, la propuesta se asemeja a los modelos en $K = \$280$, $T = 180$ días (4.8, b), $K = \$280$, $T = 360$ días (4.8, c) y $K = \$320$, $T = 360$ días (4.8, f). Aunque no necesariamente es preciso.

Las opciones fueron valuadas suponiendo que son estilo europeo. A esta metodología no se le impuso condición límite (o frontera) porque no se trataba de una ecuación diferencial. Por lo que su uso para otros estilos no está limitado.

Por los resultados, esta metodología es útil para valorar en mercados *bull* (alcistas) en el caso de call y *bear* (bajistas) en el caso de put. En mercados sin tendencia clara o participantes que tengan posiciones que apostaron con base en la volatilidad implícita y esperan que la opción entre fuerte a in the money desde out the money, puede no ser tan útil (como es evidente en las gráficas 4.9g, 4.9h y 4.10c).

Se puede decir entonces que describir el paso del tiempo con otra función no necesariamente es mejor, pues el valor extrínseco de las opciones está subordinada a otras variables además del factor temporal, por lo tanto, es incompleta. Salvo para casos ilustrativos como los escenarios antes mencionados.

Conclusiones

A través de toda esta investigación se describieron las características cualitativas de las opciones, su origen, evolución, valuación y una sencilla metodología propuesta. Las opciones son instrumentos versátiles con diversos usos, pero con las más finas reglas, estilos y tipos. El único límite a la variedad de ellas es la imaginación humana.

Con reglas endebles (más la codicia, ingrediente humano), estos contratos pueden ser peligrosos. Aumentar el combustible de un desastre o ser el origen de él. Es imperativo tener un robusto sistema legal y marco operativo claro para operar con ellos, pues el monto de las pérdidas o ganancias puede enriquecer individuos o arruinar instituciones enteras.

Por el grado de complejidad de sus características, existe más de un siglo de investigaciones y propuestas sobre cuál es el valor *adecuado* de las opciones. Y ese fue el motivo principal de esta investigación, aportar una línea de investigación a esta literatura, aunque sea mínima.

De esa inquietud surgió esta metodología que usa la curva cicloide como un parámetro para el valor del tiempo. Se utilizaron S_t , K , r , el dividend yield y la cicloide representando la función del paso del tiempo. El proceso tiene trayectorias similares a los resultados de los modelos Black-Scholes-Merton y Cox-Ross-Rubinstein en cuanto a prima put se refiere y más 'volátil' si se compara con la prima call. Aunque limitada a una prima que se encuentra *in the money*.

Referencias

- Aristóteles. (345 a.C.). *Política*. Biblioteca digital One More Library. (Traducción de Azcárate 1875, última revisión 2017).
- Bachelier, Luis. (1900). *The Theory of Speculation* (Teoría de la especulación) (Traducido del francés al inglés por D. May, 2011). *Annales scientifiques de l' École Normale Supérieure*, Sér. 3, 17 (1900), p. 21-86
- Banco de México. (2020). *Tasas de Interés Interbancarias - (CF111)*. Sistema de Información Económica, Banxico. Recuperado de: <https://www.banxico.org.mx/SieInternet/consultarDirectorioInternetAction.do?sector=18&accion=consultarCuadro&idCuadro=CF111&locale=es>
- Black, F. Scholes, M. (1973). *The Pricing of Options and Corporate Liabilities* (Valuación de opciones y pasivos corporativos). *The Journal of Political Economy*. vol. 81, núm. 3. (May - jun., 1973). pp. 637-654.
- Bodie, Z. Kane, A. Marcus, A. J. (2009). *Investments* (Inversiones). 8va Ed. Nueva York. Ed. McGraw-Hill.
- Bolsa Mexicana de Valores. (2019). “*Quadruple Witching Day*”: *el impacto de los derivados en el mercado*. Hablemos de Bolsa. Recuperado de: <https://blog.bmv.com.mx/2019/10/quadruple-witching-day-el-impacto-de-los-derivados-en-el-mercado/>
- Bronzin, Vinzenz. (1908). *Theorie der Prämien-geschäften* (Teoría de los contratos de prima). En: Hafner, W. y Zimmermann H. ‘Vinzenz Bronzin’s Option Pricing Models Exposition and Appraisal’. 1era ed. Berlín. Editorial Springer
- Cámara de Diputados del Honorable Congreso de la Unión. (27 de agosto de 1932). *Ley General de Títulos y Operaciones de Crédito*. Diario Oficial de la Federación. Recuperado de: http://www.diputados.gob.mx/LeyesBiblio/pdf/145_220618.pdf
- . (29 de diciembre de 1978). *Ley del Impuesto al Valor Agregado*. Diario Oficial de la Federación. Recuperado de: http://www.diputados.gob.mx/LeyesBiblio/pdf/77_091219.pdf

- (31 de diciembre de 1981). *Código Fiscal de la Federación*. Diario Oficial de la Federación. Recuperado de: http://www.diputados.gob.mx/LeyesBiblio/pdf/8_090120.pdf

- (04 de junio de 2001). *Ley de Fondos de Inversión*. Diario Oficial de la Federación. Recuperado de: http://www.diputados.gob.mx/LeyesBiblio/pdf/69_130614.pdf

- (30 de diciembre de 2005). *Ley del Mercado de Valores*. Diario Oficial de la Federación. Recuperado de: http://www.diputados.gob.mx/LeyesBiblio/pdf/LMV_090119.pdf

- (11 de diciembre de 2013). *Ley del Impuesto Sobre la Renta*. Diario Oficial de la Federación. Recuperado de: http://www.diputados.gob.mx/LeyesBiblio/pdf/LISR_091219.pdf

- Castelli, Charles. (1877). *The Theory of "Options" in stocks and shares* (La Teoría de las "Opciones" en títulos y acciones). Londres. ed. Fredc. C. Mathieson, Bartholomew House Bank. Disponible en: <https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=wu.89088276217&view=1up&seq=9>

- Chen, James. (2019). *Exotic Option* (Opciones exóticas). Investopedia. Recuperado de: <https://www.investopedia.com/terms/e/exoticooption.asp>

- (2020). *Dividend Yield* (Curva de dividendos). Investopedia. Recuperado de: <https://www.investopedia.com/terms/d/dividendyield.asp>

- (2021). *Credit Default Swaps (CDS)* (Intercambio de incumplimiento crediticio). Investopedia. Recuperado de: <https://www.investopedia.com/terms/c/creditdefaultswap.asp>

- Chicago Mercantile Exchange Clearing. (2020). *Switch to Bachelier Options Pricing Model* [Cambio a modelo de valuación de opciones de Bachelier]. CME Notices. Recuperado de: <https://www.cmegroup.com/notices/clearing/2020/04/Chadv20-171.html>

- Chicago Mercantile Exchange. (s.f.) *Options Calculator* [Calculadora de opciones]. CME Tools. Recuperado de: <https://www.cmegroup.com/tools-information/quickstrike/options-calculator.html>

- Comisión Nacional Bancaria y de Valores CNBV. (2021). *Búsqueda de Entidades*. Padrón de Entidades Supervisadas. Recuperado de: <https://www.cnbv.gob.mx/Paginas/BusquedaEntidades.aspx>

- Corcho Gutiérrez, Fernando Manuel. (2017). *La cicloide* (Trabajo de Fin de Grado). Universidad de Sevilla, Facultad de Matemáticas. Sevilla, España.
- Cox, J.C. Ross, S.A. Rubinstein, M. (1979). *Option Pricing A Simplified Approach* (Valuación de opciones una aproximación simplificada). Journal of Financial Economics núm. 7 (1979) pp. 229-263
- De la Vega Pasariño, José. (1688). *Confusión de Confusiones: Diálogos curiosos entre un filósofo agudo, un mercader discreto y un accionista erudito describiendo el negocio de las Acciones, su origen, su etimología, su realidad, su juego y su enredo*. (Actualización simplificada a español moderno por Ricardo Fornero, 2016). Ámsterdam. Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/301806781_Confusion_de_confusiones_de_Jose_de_la_Vega_con_notas_aclaratorias
- Díaz Mata, Alfredo y Aguilera Gómez, Víctor Manuel. (2013). *Introducción al Mercado Bursátil. Invierta en la bolsa de valores*. 2da Ed. Ciudad de México. Ed. McGraw-Hill Interamericana.
- Feunou, B. Okou, C. (2019). *Good Volatility, Bad Volatility, and Option Pricing* (Volatilidad Buena, volatilidad mal, y valuación de opciones). Journal of Financial & Quantitative Analysis. Abril 2019. Vol. 54. pp. 695-727.
- Fisanotti, Leandro. (2014). *Antecedentes históricos de los mercados de futuros y opciones: cobertura y especulación*. Invenio Revista de investigación académica núm.. 33. pp. 9-19.
- Heston, S.L. (1993). *A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options* (Solución cerrada para opciones con volatilidad estocástica con aplicaciones para bonos y divisas). The Review of Financial Studies 1993 vol. 6, núm. 2, pp. 327-343
- Hull, John C. (2009a). *Introducción a los mercados de futuros y opciones* (Traducido al español por Sánchez Carrión, de Options, Futures and other derivatives). 6ta ed. Ciudad de México, Editorial Pearson Educación. (Obra original publicada en 2008).
- . (2009b). *Options, Futures and other derivatives* (Opciones, Futuros y otros derivados). 7ma ed. Nueva Jersey. ed. Pearson Education, Inc.

- ISI Emerging Markets Group EMIS. (2020). *GRUMA, S.A.B. DE C.V. (MÉXICO)* [Sitio web]. Recuperado de: https://www.emis.com/php/company-profile/MX/Gruma_SAB_de_CV_es_1223662.html
- Kagan, Julia. (2021). Mortgage-Backed Security (MBS). (Título respaldado en hipotecas). Investopedia. Recuperado de: <https://www.investopedia.com/terms/m/mbs.asp>
- Kuprianov, Anatoli. (1995). *Derivatives Debacles: Case Studies of Large Losses in Derivatives Markets* (Debacles de derivados: Estudios de caso sobre grandes pérdidas en mercados de derivados). *Economic Quarterly* vol. 81/4 Fall.
- Lockwood, E. H. (1961). *A Book of Curves* (El libro de las curvas). 1era Ed. Cambridge. Cambridge University Ed.
- Mercado Mexicano de Derivados. (s.f.a.). *Antecedentes*. MexDer. Recuperado de: <http://www.mexder.com.mx/wb3/wb/MEX/antecedentes>
- . (s.f.b). *Contratos listados en MEXDER*. MexDer. Recuperado de: http://www.mexder.com.mx/wb3/wb/MEX/contratos_opcion
- . (s.f.d). *VIMEX Índice de Volatilidad México*. MexDer. Recuperado de: http://www.mexder.com.mx/wb3/wb/MEX/MEX_Repositorio/vtp/MEX/1f0a_vimex/rid/21/_mto/3/VIMEX.pdf
- . (2013a). *Las treinta Preguntas más frecuentes sobre opciones*. MexDer. Recuperado de: http://www.mexder.com.mx/wb3/wb/MEX/MEX_Repositorio/vtp/MEX/1ef6_publicaciones/rid/21/_mto/3/Las_30_preguntas.pdf
- . (2013b). *Opciones para obtener lo mejor de la Bolsa*. MexDer. Recuperado de: http://www.mexder.com.mx/wb3/wb/MEX/MEX_Repositorio/vtp/MEX/1ef6_publicaciones/rid/21/_mto/3/Opciones_para_obtener_lo_mejor_de_la_Bolsa.pdf
- . (2013c). *Una Introducción*. MexDer. Recuperado de: http://www.mexder.com.mx/wb3/wb/MEX/MEX_Repositorio/vtp/MEX/1ef6_publicaciones/rid/21/_mto/3/UnaIntroduccionESP.pdf

-. (2016). *Cálculo del precio o prima de liquidación diaria para opciones*. MexDer. Recuperado de: http://www.mexder.com.mx/wb3/wb/MEX/MEX_Repositorio/vtp/MEX/21a0_ipc/rid/21/_mto/3/20161007_Aviso_Calculo_de_Precios_Metodologia_Heston_VF.pdf

-. (2019). *Reglamento Interior de MEXDER*. MexDer. Recuperado de: http://www.mexder.com.mx/wb3/wb/MEX/MEX_Repositorio/vtp/MEX/1ea7_reglamento_interior_mexder/rid/21/_mto/3/MexDerCompulsa_Reglamento_Interior_Actualizado_16_enero_2019.pdf?repfop=view&reptp=1ea7_reglamento_interior_mexder&repfiddoc=6597&repinline=true

Merton, Robert C. (1973). *Theory of Rational Option Pricing* (Teoría sobre valuación racional de opciones). *The Bell Journal of Economics and Management Science*, vol. 4. núm. 1 (Spring, 1973). pp. 141-183.

MithrilMoney. (28 de junio de 2013). *Generating a Yield Curve with the Nelson-Siegel-Svensson Method, Excel Library, Video 00020* (Generando una Curva Yield con el método Nelson-Siegel-Svensson, Libro de Excel, Video 00020). [Archivo de video]. Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=uQnA9j_FvAg

Muñoz Santoja, José. (2013). *Leibniz: la invención del cálculo infinitesimal*. 3era ed. Cayfosa, España. ed. EDITEC.

Nasdaq Inc. (2020a). *AAPL Historical Data*. Apple Inc. Common Stock (AAPL) [Sitio web]. Recuperado de: <https://www.nasdaq.com/market-activity/stocks/aapl/historical>

-. (2020b). *SPX Historical Data*. S&P 500 (SPX) [Sitio web]. Recuperado de: <https://www.nasdaq.com/market-activity/index/spx/historical>

Neftci, Salih N. (2008). *Ingeniería Financiera* (Traducido al español por: Jaime Gómez Mont Araiza de Principles of Financial Engineering). 1era Ed. Ciudad de México. ed. McGraw-Hill Interamericana.

Nelson, Samuel A. (1904). *The ABC of Options and Arbitrage* (El ABC de las Opciones y Arbitraje). Nueva York. The Wall Street Journal Library.

- Nyström, K. Parviainen, M. (2017). *Tug-of-war, market manipulation, and option pricing* ('Tira y afloja', manipulación de mercados y valuación de opciones). *Mathematical Finance*. Abril 2017. Vol. 27. pp. 279-312.
- Option Trader. (05 de marzo de 2017). *Monte Carlo Simulation of Stock Price Movement* (Simulación Monte Carlo del movimiento del precio de una acción). [Archivo de video]. Recuperado de: <https://www.youtube.com/watch?v=IZLfxzwhOkg>
- Poitras, Geoffrey. (2009a). *From Antwerp to Chicago: The History of Exchange Traded Derivative Security Contracts* (De Amberes a Chicago: Historia del trading de los contratos de instrumentos derivados). *Revue d'Histoire des Sciences Humaines* núm. 20, septiembre 2009
- . (2009b). *The Early History of Option Contracts* (Historia temprana de los contratos de opción). En: Hafner, W. y Zimmermann, H. *Vinzenz Bronzin's Option Pricing Models*. Editorial Springer
- Regnault, Jules. (1863). *Calcul des chances et philosophie de la bourse* (Cálculo de posibilidades y filosofía bursátil). Paris. Ed. Pilloy.
- Rincón, Luis. (2011). *Introducción a los procesos estocásticos*. UNAM. Recuperado de: <http://lya.fciencias.unam.mx/lars>
- Ross, S. A. Westerfield, R. W. Jaffe, J. F. (2012). *Finanzas Corporativas* (Traducido al español por Carril Villareal y Gómez Mont Araiza) 9na ed. Ciudad de México. Ed. McGraw Hill/Interamericana Editores.
- Rouah, F. C., Vainberg, G. (2007). *Option Pricing Models and Volatility Using Excel-VBA* (Modelos de valuación de opciones y volatilidad usando Excel-VBA). 1era ed. Nueva Jersey. Ed. John Wiley & Sons, Ltd.
- Salonia, Matteo. (2020). *La defensa privada en la historia de Génova*. Mises Wire. Mises Institute. Recuperado de: <https://mises.org/es/wire/la-defensa-privada-en-la-historia-de-genova>
- Samuelson, Paul A. (1965). *Rational Theory of Warrant Pricing* (Teoría racional de valuación de warrants). *Industrial Management Review*, 6:2 (1965: Spring) pp. 13-39

- Stoll, Hans R. (1969). *The Relationship Between Put and Call Option Prices* (La relación entre los precios de las opciones Put y Call). *The Journal of Finance*. vol. 24. núm. 5, dic. 1969. pp. 801-824
- Tardi, Carla. (2021). Collateralized Debt Obligation (CDO). (Obligaciones de deuda collateral). Investopedia. Recuperado de: <https://www.investopedia.com/terms/c/cdo.asp>
- Velde, François R. (2009). *Was John Law's System a bubble? The Mississippi Bubble revisited* (¿Era el Sistema de John Law una burbuja? Revisión de la Burbuja del Mississippi). En: Atack, J. y Neal, L. *The Origins and Development of Financial Markets and Institutions From the Seventeenth Century to the Present*. Primera edición. Nueva York. ed. Cambridge University Press.
- Venegas Martínez, Francisco. (2008). *Riesgos financieros y económicos*. 2da ed. Ciudad de México. ed. Cengage Learning Editores.
- Weber, Ernst Juerg. (2009). *A Short History of Derivative Security Markets* (Una Historia Corta de los Mercados de Instrumentos Derivados). En: Hafner, W. y Zimmermann, H. *Vinzenz Bronzin's Option Pricing Models*. Ed. Springer
- Weisstein, Eric W. (2003). *Cycloid* (Cicloide). De: Math World—A Wolfram Web Resource. Recuperado de: <https://mathworld.wolfram.com/Cycloid.html>
- . (s.f.) *Tautochrone Problem* (El Problema de la Tautócrona). De: MathWorld—A Wolfram Web Resource. Recuperado de: <https://mathworld.wolfram.com/TautochroneProblem.html>
- Yahoo! Finance. (2020a). *Apple Inc. (AAPL)*. [Sitio web] Yahoo! Finance. Recuperado de: <https://es-us.finanzas.yahoo.com/quote/AAPL?p=AAPL&.tsrc=fin-srch>
- Zhang, J. Li, Y. (2012). *New analytical option pricing models with Weyl–Titchmarsh theory* (Nuevos modelos analíticos de valuación de opciones con la teoría Weyl–Titchmarsh). *Quantitative Finance*. Julio 2012, Vol. 12. pp. 1003-1010.
- Zimmermann, Heinz. (2009a). *A Review and Evaluation of Bronzin's Contribution from a Financial Economics Perspective* (Revisión y evaluación de la contribución de Bronzin desde una perspectiva de la economía financiera). En: Hafner, W. y Zimmermann, H. 'Vinzenz Bronzin's Option Pricing Models Exposition and Appraisal' (2009). ed. Springer

- (2009b). *Probabilistic Roots of Financial Modelling: A Historical Perspective* (Raices probabilísticas del modelaje financiero: Una perspectiva histórica). En: Hafner, W. y Zimmermann, H. 'Vinzenc Bronzin's Option Pricing Models Exposition and Appraisal' (2009). ed. Springer

ANEXO I: Modelos en Microsoft Office Excel

En este anexo se presentan fórmulas en Excel para los modelos Black-Scholes, Boness, Cox-Ross-Rubinstein, Método Montecarlo, Construcción de curva de descuento (con el algoritmo Nelson-Siegel-Svensson) y la metodología presentada, para obtener los resultados y las gráficas mostradas.

Black-Scholes-Merton

Incluye el cálculo de sus literales griegas. A continuación, una captura de cómo debería quedar la hoja de cálculo:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	S	94.6	DELTA			GAMMA		Taylor		Theta	Vega	Rho		
2	K	105	Delta Call	0.382287	N'D1		0.381447	DMC	0.889503	THC	25.515884	RHC		
3	R	4.75	Delta Put	-0.617713	G		0.020030	DMP	-1.310497	-8.765726		15.803726		
4	DE	28.47				D-G Call	0.426352	DNTC	0.430758	THP		RHP		
5	T	180				D-G Put	-0.573648	DNTP	-0.569242	-3.895284		RHP		
6	R.DIV	5										-35.464090		
7	Cambios		DELTA.DIV			GAMMA.DIV		Taylor.DIV		Theta.DIV	Vega.DIV	Rho.DIV		
8	S2	96.8	Delta Call	0.327612	N'D1		0.364698	DMC	0.765945	THC	23.793191	RHLC		
9	R2	5.00	Delta Put	-0.647698	G		0.018677	DMP	-1.379737	-6.519821		13.636866		
10	DE2	31.11				D-G Call	0.368702	DNTC	0.372811	THP		RHLP		
11	T2	165				D-G Put	-0.606608	DNTP	-0.602499	-6.262594		RHLP		
12	R.DIV 2	5.1										RHEC		
13	# cont. C	50	Acciones									RHEC		
14	# cont. P	70	Acciones									RHEP		
15	D1	-0.299480	D1*	-0.423665								RHEP		
16	D2	-0.500794	D2*	-0.624978								RHEP		
17	ND1	0.382287	ND1*	0.335905								RHEP		
18	ND2	0.308258	ND2*	0.265993								RHEP		
19	CALL	4.556883	Delta	5.397914	D-Gamma	5.494857	Taylor	5.446386	5.794276					
20	PUT	12.492513		11.133544		11.230487		11.182016	11.604671					
21			Cobertura C	1911.43		2131.76		2153.79						
22			Cobertura P	-4323.99		-4015.54		-3984.69						
23	CALL	3.718328	Delta.DIV	5.277629	D-Gamma.DIV	4.529472	Taylor.DIV	4.484273	4.888466					
24	PUT	13.989641		11.067577		12.655102		12.609904	12.845441					
25			Cobertura C	1638.06		1843.51		1864.05						
26			Cobertura P	-4533.89		-4246.26		-4217.50						

En las celdas B1:B6, B8:B12 y B13:B14 se introducen datos, D13 y D14 deben tener listas desplegables para seleccionar entre divisas y acciones. Las fórmulas, son las siguientes:

Call y put en t_0 y considerando acciones que NO pagan dividendos:

$$B15 \quad [D1]$$

$$=(((LN(\$B\$1/\$B\$2))+((\$B\$3/100)+((0.5*((\$B\$4/100)^2)))))*(\$B\$5/360)))/((\$B\$4/100)*(\text{RAIZ}(\$B\$5/360)))$$

$$B16 [D2] = (\$B\$15 - ((\$B\$4/100) * \text{RAIZ}(\$B\$5/360)))$$

$$B17 [ND1] = \text{DISTR.NORM.ESTAND}(\$B\$15)$$

$$B18 [ND2] = \text{DISTR.NORM.ESTAND}(\$B\$16)$$

$$B19 [Call] = ((\$B\$1 * \$B\$17) - (\$B\$2 * (\text{EXP}(-(\$B\$3/100) * (\$B\$5/360)))) * \$B\$18))$$

$$B20 [PUT] = (\$B\$19 + (\$B\$2 / (\text{EXP}((\$B\$3/100) * (\$B\$5/360)))) - \$B\$1)$$

Call y put en t_n (presumiblemente los elementos de la prima cambiaron de valor) y considerando acciones que SI pagan dividendos:

E15 [D1*] =(((LN(\$B\$1/\$B\$2))+(((\$B\$3/100)-(\$B\$6/100)+((0.5*(\$B\$4/100)^2))))*(\$B\$5/360)))/(((\$B\$4/100)*(RAIZ(\$B\$5/360))))
 E16 [D2*] =(\$E\$15-(((\$B\$4/100)*RAIZ(\$B\$5/360)))
 E17 [ND1*] =DISTR.NORM.ESTAND(\$E\$15)
 E18 [ND2*] =DISTR.NORM.ESTAND(\$E\$16)
 B23 [Call*] =(((EXP((- \$B\$6*\$B\$5)/36000))*\$B\$1*\$E\$17)-((EXP(-(\$B\$3*\$B\$5)/36000))*\$B\$2*\$E\$18))
 B24 [Put*] = \$B\$23+(\$B\$2*(EXP((- \$B\$3*\$B\$5)/36000)))-(\$B\$1*(EXP((- \$B\$6*\$B\$5)/36000)))

Call y put considerando cambios, es decir las coberturas de las literales griegas y sin considerar acciones que pagan dividendos:

Colocar en E13 “Acciones” (sin las comillas) y en E14 “Divisas”. En la celda D13, usar la herramienta de Excel de Validación de datos: [Cinta de opciones de Excel] Datos>>[Grupo] Herramientas de datos>>Validación de datos>>Configuración>>Permitir>>[Seleccionar] Lista>>Origen =E\$13:E\$14>>ACEPTAR. Proceder igual con la celda D14.

E2 [Delta call] = \$B\$17
 E3 [Delta put] = \$B\$17-1
 E19 [Call delta] = \$B\$19+(\$E\$2*(\$B\$8-\$B\$1))
 E20 [Put delta] = \$B\$20+(\$E\$3*(\$B\$8-\$B\$1))
 E21 [Cobertura delta call] = (SI(\$D\$13="Acciones", \$B\$13*100, SI(\$D\$13="Divisas", \$B\$13*10000)))*\$E\$2
 E22 [Cobertura delta put] = (SI(\$D\$14="Acciones", \$B\$14*100, SI(\$D\$14="Divisas", \$B\$14*10000)))*\$E\$3
 G2 [N'D1] =DISTR.NORM.ESTAND.N(\$B\$15,FALSO)
 G3 [Gamma] = \$G\$2/(\$B\$1*(\$B\$4/100)*(RAIZ(\$B\$5/360)))
 G4 [Delta-Gamma para call] = \$E\$2+(\$G\$3*(\$B\$8-\$B\$1))
 G5 [Delta-Gamma para put] = \$E\$3+(\$G\$3*(\$B\$8-\$B\$1))
 G19 [Prima Delta-Gamma call] = \$B\$19+(\$G\$4*(\$B\$8-\$B\$1))
 G20 [Prima Delta-Gamma put] = \$B\$20+(\$G\$5*(\$B\$8-\$B\$1))

G21 [Cobertura delta-gamma call]
 $= (SI(\$D\$13="Acciones", \$B\$13*100, SI(\$D\$13="Divisas", \$B\$13*10000))) * \$G\4

G22 [Cobertura delta-gamma put]
 $= (SI(\$D\$14="Acciones", \$B\$14*100, SI(\$D\$14="Divisas", \$B\$14*10000))) * \$G\5

I2 [Delta modificada para call (Taylor)] $= ((\$E\$2 * (\$B\$8 - \$B\$1)) + (0.5 * \$G\$3 * ((\$B\$8 - \$B\$1)^2)))$

I3 [Delta modificada para put (Taylor)] $= ((\$E\$3 * (\$B\$8 - \$B\$1)) + (0.5 * \$G\$3 * ((\$B\$8 - \$B\$1)^2)))$

I4 [Delta neutral para call (Taylor) para cobertura] $= (\$E\$2 + (0.5 * \$G\$3 * ((\$B\$8 - \$B\$1)^2)))$

I5 [Delta neutral para put (Taylor) para cobertura] $= ((\$E\$3 + (0.5 * \$G\$3 * ((\$B\$8 - \$B\$1)^2)))$

I19 [Prima call Taylor] $= \$B\$19 + \$I\2

I20 [Prima put Taylor] $= \$B\$20 + \$I\3

I21 [Cobertura Taylor call]
 $= (SI(\$D\$13="Acciones", \$B\$13*100, SI(\$D\$13="Divisas", \$B\$13*10000))) * \$I\4

I22 [Cobertura Taylor put]
 $= (SI(\$D\$14="Acciones", \$B\$14*100, SI(\$D\$14="Divisas", \$B\$14*10000))) * \$I\5

J3 [Theta call] $= (((-((\$B\$1 * \$B\$4) / 100) / (2 * (RAIZ(\$B\$5 / 360)))) * \$G\$2) - (((\$B\$3 * \$B\$2) / 100) * (EXP((- \$B\$3 * \$B\$5) / 36000)) * \$B\$18))$

J5 [Theta put] $= (((-((\$B\$1 * \$B\$4) / 100) / (2 * (RAIZ(\$B\$5 / 360)))) * \$G\$2) + (((\$B\$3 * \$B\$2) / 100) * (EXP((- \$B\$3 * \$B\$5) / 36000)) * (1 - \$B\$18)))$

K2 [Vega] $= \$B\$1 * (RAIZ(\$B\$5 / 360)) * \$G\2

L3 [Rho call] $= \$B\$2 * (\$B\$5 / 360) * (EXP((- \$B\$3 * \$B\$5) / 36000)) * \$B\18

L5 [Rho put] $= -\$B\$2 * (\$B\$5 / 360) * (EXP((- \$B\$3 * \$B\$5) / 36000)) * (1 - \$B\$18)$

J19 [Prima call considerando Delta-Gamma (Taylor), Theta, Vega y Rho]
 $= \$B\$19 + \$I\$2 + (\$J\$3 * ((\$B\$5 - \$B\$11) / 360)) + (\$K\$2 * ((\$B\$10 - \$B\$4) / 100)) + (\$L\$3 * ((\$B\$9 - \$B\$3) / 100))$

J20 [Prima call considerando Delta-Gamma (Taylor), Theta, Vega y Rho]
 $= \$B\$20 + \$I\$3 + (\$J\$5 * ((\$B\$5 - \$B\$11) / 360)) + (\$K\$2 * ((\$B\$10 - \$B\$4) / 100)) + (\$L\$5 * ((\$B\$9 - \$B\$3) / 100))$

Call y put considerando cambios, es decir las coberturas de las literales griegas y considerando acciones que pagan dividendos:

E8 [Delta call] $= (EXP((- \$B\$6 * \$B\$5) / 36000)) * \$E\17

E9 [Delta put] $= (EXP((- \$B\$6 * \$B\$5) / 36000)) * (\$E\$17 - 1)$

E23 [Call delta] $= \$B\$19 + (\$E\$8 * (\$B\$8 - \$B\$1))$

E24 [Put delta] $= \$B\$20 + (\$E\$9 * (\$B\$8 - \$B\$1))$

E25 [Cobertura delta call]
 $= (SI(\$D\$13="Acciones", \$B\$13*100, SI(\$D\$13="Divisas", \$B\$13*10000))) * \$E\8

E26 [Cobertura delta put]
 $= (SI(\$D\$14="Acciones", \$B\$14*100, SI(\$D\$14="Divisas", \$B\$14*10000))) * \$E\9

G8 [N'D1] =DISTR.NORM.ESTAND.N(\$E\$15,FALSO)

G9 [Gamma] =(((EXP((-
 $\$B\$6*\$B\$5)/36000))) * \$G\$8) / (\$B\$1 * (\$B\$4/100) * (RAIZ(\$B\$5/360)))$

G10 [Delta-Gamma para call] = $\$E\$8 + (\$G\$9 * (\$B\$8 - \$B\$1))$

G11 [Delta-Gamma para put] = $\$E\$9 + (\$G\$9 * (\$B\$8 - \$B\$1))$

G23 [Prima Delta-Gamma call] = $\$B\$23 + (\$G\$10 * (\$B\$8 - \$B\$1))$

G24 [Prima Delta-Gamma put] = $\$B\$24 + (\$G\$11 * (\$B\$8 - \$B\$1))$

G25 [Cobertura delta-gamma call]
 $= (SI(\$D\$13="Acciones", \$B\$13*100, SI(\$D\$13="Divisas", \$B\$13*10000))) * \$G\10

G26 [Cobertura delta-gamma put]
 $= (SI(\$D\$14="Acciones", \$B\$14*100, SI(\$D\$14="Divisas", \$B\$14*10000))) * \$G\11

I8 [Delta modificada para call (Taylor)] = $((\$E\$8 * (\$B\$8 - \$B\$1)) + (0.5 * \$G\$9 * ((\$B\$8 - \$B\$1)^2)))$

I9 [Delta modificada para put (Taylor)] = $((\$E\$9 * (\$B\$8 - \$B\$1)) + (0.5 * \$G\$9 * ((\$B\$8 - \$B\$1)^2)))$

I10 [Delta neutral para call (Taylor) para cobertura] = $(\$E\$8 * + (0.5 * \$G\$9 * ((\$B\$8 - \$B\$1)^2)))$

I11 [Delta neutral para put (Taylor) para cobertura] = $((\$E\$9 * + (0.5 * \$G\$9 * ((\$B\$8 - \$B\$1)^2))))$

I23 [Prima call Taylor] = $\$B\$23 + \$I\8

I24 [Prima put Taylor] = $\$B\$24 + \$I\9

I25 [Cobertura Taylor call]
 $= (SI(\$D\$13="Acciones", \$B\$13*100, SI(\$D\$13="Divisas", \$B\$13*10000))) * \$I\10

I26 [Cobertura Taylor put]
 $= (SI(\$D\$14="Acciones", \$B\$14*100, SI(\$D\$14="Divisas", \$B\$14*10000))) * \$I\11

J9 [Theta call] = $((\$B\$6/100) * \$B\$1 * (EXP((- \$B\$6 * \$B\$5)/36000)) * \$E\$17) -$
 $((\$B\$1 * (EXP((- \$B\$6 * \$B\$5)/36000)) * (\$B\$4/100)) / (2 * RAIZ(\$B\$5/360))) * \$G\$8) -$
 $((\$B\$3/100) * \$B\$2 * (EXP((- \$B\$3 * \$B\$5)/36000)) * \$E\$18)$

J11 [Theta put] = $((\$B\$3/100) * \$B\$2 * (EXP((- \$B\$3 * \$B\$5)/36000)) * (1 - \$E\$18)) -$
 $((\$B\$6/100) * \$B\$1 * (EXP((- \$B\$6 * \$B\$5)/36000)) * (1 - \$E\$17)) - ((\$B\$1 * (EXP((-$
 $\$B\$6 * \$B\$5)/36000)) * (\$B\$4/100)) / (2 * RAIZ(\$B\$5/360))) * \$G\$8)$

K8 [Vega] = $\$B\$1 * (EXP((- \$B\$6 * \$B\$5)/36000)) * (RAIZ(\$B\$5/360)) * \$G\8

L9 [Rho local call] = $\$B\$2 * (\$B\$5/360) * (EXP((- \$B\$3 * \$B\$5)/36000)) * \$E\18

L11 [Rho local put] = $-\$B\$2 * (\$B\$5/360) * (EXP(- \$B\$3 * \$B\$5/36000)) * (1 - \$E\$18)$

L13 [Rho extranjera call] = $\$B\$2 * (\$B\$5/360) * (EXP(- \$B\$6 * \$B\$5/36000)) * \$E\18

L15 [Rho extranjera put] = $-\$B\$2 * (\$B\$5/360) * (EXP((- \$B\$6 * \$B\$5)/36000)) * (1 - \$E\$18)$

J19 [Prima call considerando Delta-Gamma (Taylor), Theta, Vega y Rho]
 $= \$B\$23 + \$I\$8 + (\$J\$9 * ((\$B\$5 - \$B\$11)/360)) + (\$K\$8 * ((\$B\$10 - \$B\$4)/100)) + (\$L\$9 * ((\$B\$9 -$
 $\$B\$3)/100)) + (\$L\$13 * ((\$B\$12 - \$B\$6)/100))$

J20 [Prima call considerando Delta-Gamma (Taylor), Theta, Vega y Rho]
 $=B\$24+I\$9+(\$J\$11*((B\$5-B\$11)/360))+(\$K\$8*((B\$10-B\$4)/100))+(\$L\$11*((B\$9-B\$3)/100))+(\$L\$15*((B\$12-B\$6)/100))$

**

Black-Scholes-Merton en VBA

Las siguientes líneas de código aparecen en Rouah y Vainberg (2007, p. 113). La segunda línea de la segunda función ha sido modificada para usar logaritmo neperiano (ln, con constante 2.718282), pues la versión original contempla base 10. En Excel, abrir Visual Basic (VBA) e introducir estas líneas en un Módulo. También se puede ahorrar el espacio de la primera función simplemente usando “Application.NormSDist(X)” donde sea necesario:

```
Function Gauss(X)
```

```
Gauss = Application.NormSDist(X)
```

```
End Function
```

```
Function BS_call(S, K, r, T, v)
```

```
d = (((Log(S / K)) / (Log(2.718282))) + (T / 360) * (r + 0.5 * v ^ 2)) / (v * Sqr(T / 360))
```

```
BS_call = S * Gauss(d) - Exp(-r * (T / 360)) * K * Gauss(d - v * Sqr(T / 360))
```

```
End Function
```

```
Function BS_put(S, K, r, T, v)
```

```
BS_put = BS_call(S, K, r, T, v) - S + K * Exp(-r * (T / 360))
```

```
End Function
```

La versión del modelo que considera el dividend yield:

```
Function Gauss(X)
```

```
Gauss = Application.NormSDist(X)
```

```
End Function
```

```
Function BSdiv_call(S, K, r, T, v, div)
```

```
d = (((Log(S / K)) / (Log(2.718282))) + (T / 360) * ((r - div) + 0.5 * v ^ 2)) / (v * Sqr(T / 360))
```

```
BSdiv_call = S * Exp(-div * (T / 360)) * Gauss(d) - Exp(-r * (T / 360)) * K * Gauss(d - v * Sqr(T / 360))
```

```
End Function
```

```
Function BSdiv_put(S, K, r, T, v, div)
```

```
BSdiv_put = BSdiv_call(S, K, r, T, v, div) + Exp(-r * (T / 360)) * K - S * Exp(-div * (T / 360))
```

```
End Function
```

Boness

Una versión propia para VBA, con base en el código para Black-Scholes:

```
Function Gauss(X)
```

```
Gauss = Application.NormSDist(X)
```

```
End Function
```

```
Function Boness_call(S, K, T, v, a)
```

```
Z = (((Log(S / K)) / (Log(2.718282))) + (T / 360) * (a - 0.5 * v ^ 2)) / (v * Sqr(T / 360))
```

```
Boness_call = S * Gauss(Z + v) - Exp(-a * (T / 360)) * K * Gauss(Z)
```

```
End Function
```

```
Function Boness_put(S, K, T, v, a, r)
```

```
Boness_put = Boness_call(S, K, T, v, a) - S + K * Exp(-r * (T / 360))
```

```
End Function
```

Cox-Ross-Rubinstein

[Al final de las fórmulas, la captura de pantalla] En las celdas B3:B8 son para introducir los datos solicitados. En D1:I1 se introducen 0, 1, 2, 3, 4, 5 los cuales se sugiere poner en blanco. En D2:I2 a su vez, t0, t1, t2, t3, t4, t5. El código de color puede quedar a elección del lector.

```
B9 [u] =EXP((B$5/100)*(RAIZ((B$7/360)/B$8)))
```

```
B10 [d] =EXP((-B$5/100)*(RAIZ((B$7/360)/B$8)))
```

```
B11 [p] =((EXP((B$6/100)*((B$7/360)/B$8)))-B$10)/(B$9-B$10)
```

$$B12 [1 - p] = 1 - B\$11$$

$$B13 [e^{-rT}] = \text{EXP}((-B\$6/100)*((B\$7/360)/B\$8))$$

Para el crecimiento y decrecimiento de S_0 , se tiene:

$$D3 [t_0, S_0] = B3$$

$$E3 [t_1, S_{0u}] = \text{SI}(B\$8 >= E1, D3 * B\$9, 0)$$

$$F3 [t_2, S_{0u}^2] = \text{SI}(B\$8 >= F1, E3 * B\$9, 0)$$

$$G3 [t_3, S_{0u}^3] = \text{SI}(B\$8 >= G1, F3 * B\$9, 0)$$

$$H3 [t_4, S_{0u}^4] = \text{SI}(B\$8 >= H1, G3 * B\$9, 0)$$

$$I3 [t_5, S_{0u}^5] = \text{SI}(B\$8 >= I1, H3 * B\$9, 0)$$

$$E8 [t_1, S_{0d}] = \text{SI}(B\$8 >= E1, D3 * B\$10, 0)$$

$$F8 [t_2, S_{0d}] = \text{SI}(B\$8 >= F1, E3 * B\$10, 0)$$

$$G8 [t_3, S_{0d}] = \text{SI}(B\$8 >= G1, F3 * B\$10, 0)$$

$$H8 [t_4, S_{0d}^2] = \text{SI}(B\$8 >= H1, G3 * B\$10, 0)$$

$$I8 [t_5, S_{0d}^3] = \text{SI}(B\$8 >= I1, H3 * B\$10, 0)$$

$$F13 [t_2, S_{0d}^2] = \text{SI}(B\$8 >= F1, E8 * B\$10, 0)$$

$$G13 [t_3, S_{0d}] = \text{SI}(B\$8 >= G1, F8 * B\$10, 0)$$

$$H13 [t_4, S_{0d}] = \text{SI}(B\$8 >= H1, G8 * B\$10, 0)$$

$$I13 [t_5, S_{0d}] = \text{SI}(B\$8 >= I1, H8 * B\$10, 0)$$

$$G18 [t_3, S_{0d}^3] = \text{SI}(B\$8 >= G1, F13 * B\$10, 0)$$

$$H18 [t_4, S_{0d}^2] = \text{SI}(B\$8 >= H1, G13 * B\$10, 0)$$

$$I18 [t_5, S_{0d}] = \text{SI}(B\$8 >= I1, H13 * B\$10, 0)$$

$$H23 [t_4, S_{0d}^4] = \text{SI}(B\$8 >= H1, G18 * B\$10, 0)$$

$$I23 [t_5, S_{0d}^3] = \text{SI}(B\$8 >= I1, H18 * B\$10, 0)$$

$$I28 [t_5, S_{0d}^5] = \text{SI}(B\$8 >= I1, H23 * B\$10, 0)$$

Para call europea en cada nodo:

$$D4 [t_0, S_0] = \text{SI}(B\$8 = D\$1, \text{MAX}((D3 - B\$4), 0), (((B\$11 * E4) + (B\$12 * E9)) * \text{EXP}(- (B\$6/100) * ((B\$7/360)/B\$8))))$$

$$E4 [t_1, S_{0u}] = SI(\$B\$8=E\$1, MAX((E3-\$B\$4), 0), (((\$B\$11 * F4) + (\$B\$12 * F9)) * EXP(-(\$B\$6/100) * ((\$B\$7/360)/\$B\$8))))$$

$$F4 [t_2, S_{0u}^2] = SI(\$B\$8=F\$1, MAX((F3-\$B\$4), 0), (((\$B\$11 * G4) + (\$B\$12 * G9)) * EXP(-(\$B\$6/100) * ((\$B\$7/360)/\$B\$8))))$$

$$G4 [t_3, S_{0u}^3] = SI(\$B\$8=G\$1, MAX((G3-\$B\$4), 0), (((\$B\$11 * H4) + (\$B\$12 * H9)) * EXP(-(\$B\$6/100) * ((\$B\$7/360)/\$B\$8))))$$

$$H4 [t_4, S_{0u}^4] = SI(\$B\$8=H\$1, MAX((H3-\$B\$4), 0), (((\$B\$11 * I4) + (\$B\$12 * I9)) * EXP(-(\$B\$6/100) * ((\$B\$7/360)/\$B\$8))))$$

$$I4 [t_5, S_{0u}^5] = SI(\$B\$8=I\$1, MAX((I3-\$B\$4), 0),)$$

$$E9 [t_1, Cd] = SI(\$B\$8=E\$1, MAX((E8-\$B\$4), 0), (((\$B\$11 * F9) + (\$B\$12 * F14)) * EXP(-(\$B\$6/100) * ((\$B\$7/360)/\$B\$8))))$$

$$F9 [t_2, Cud] = SI(\$B\$8=F\$1, MAX((F8-\$B\$4), 0), (((\$B\$11 * G9) + (\$B\$12 * G14)) * EXP(-(\$B\$6/100) * ((\$B\$7/360)/\$B\$8))))$$

$$G9 [t_3, Cu] = SI(\$B\$8=G\$1, MAX((G8-\$B\$4), 0), (((\$B\$11 * H9) + (\$B\$12 * H14)) * EXP(-(\$B\$6/100) * ((\$B\$7/360)/\$B\$8))))$$

$$H9 [t_4, Cu^2] = SI(\$B\$8=H\$1, MAX((H8-\$B\$4), 0), (((\$B\$11 * I9) + (\$B\$12 * I14)) * EXP(-(\$B\$6/100) * ((\$B\$7/360)/\$B\$8))))$$

$$I9 [t_5, Cu^3] = SI(\$B\$8=I\$1, MAX((I8-\$B\$4), 0),)$$

$$F14 [t_2, Cd^2] = SI(\$B\$8=F\$1, MAX((F13-\$B\$4), 0), (((\$B\$11 * G14) + (\$B\$12 * G19)) * EXP(-(\$B\$6/100) * ((\$B\$7/360)/\$B\$8))))$$

$$G14 [t_3, Cd] = SI(\$B\$8=G\$1, MAX((G13-\$B\$4), 0), (((\$B\$11 * H14) + (\$B\$12 * H19)) * EXP(-(\$B\$6/100) * ((\$B\$7/360)/\$B\$8))))$$

$$H14 [t_4, Cud] = SI(\$B\$8=H\$1, MAX((H13-\$B\$4), 0), (((\$B\$11 * I14) + (\$B\$12 * I19)) * EXP(-(\$B\$6/100) * ((\$B\$7/360)/\$B\$8))))$$

$$I14 [t_5, Cu] = SI(\$B\$8=I\$1, MAX((I13-\$B\$4), 0),)$$

$$G19 [t_3, Cd^3] = SI(\$B\$8=G\$1, MAX((G18-\$B\$4), 0), (((\$B\$11 * H19) + (\$B\$12 * H24)) * EXP(-(\$B\$6/100) * ((\$B\$7/360)/\$B\$8))))$$

$$H19 [t_4, Cd^2] = SI(\$B\$8=H\$1, MAX((H18-\$B\$4), 0), (((\$B\$11 * I19) + (\$B\$12 * I24)) * EXP(-(\$B\$6/100) * ((\$B\$7/360)/\$B\$8))))$$

$$I19 = SI(\$B\$8=I\$1, MAX((I18-\$B\$4), 0),)$$

$$H24 [t_4, Cd^4] = SI(\$B\$8=H\$1, MAX((\$H23-\$B\$4), 0), (((\$B\$11*I24)+(\$B\$12*I29))*EXP(-(\$B\$6/100)*((\$B\$7/360)/\$B\$8))))$$

$$I24 [t_5, Cd^3] = SI(\$B\$8=I\$1, MAX((\$I23-\$B\$4), 0),)$$

$$I29 [t_5, Cd^5] = SI(\$B\$8=I\$1, MAX((\$I28-\$B\$4), 0),)$$

Call americana para cada nodo:

$$D5 [t_0, C] = MAX(D3-\$B\$4, (((\$B\$11*E5)+(\$B\$12*E9))*EXP(-(\$B\$6/100)*((\$B\$7/360)/\$B\$8))), D4)$$

$$E5 [t_1, Cu] = MAX(E3-\$B\$4, (((\$B\$11*F5)+(\$B\$12*F9))*EXP(-(\$B\$6/100)*((\$B\$7/360)/\$B\$8))), E4)$$

$$F5 [t_2, Cu^2] = MAX(F3-\$B\$4, (((\$B\$11*G5)+(\$B\$12*G9))*EXP(-(\$B\$6/100)*((\$B\$7/360)/\$B\$8))), F4)$$

$$G5 [t_3, Cu^3] = MAX(G3-\$B\$4, (((\$B\$11*H5)+(\$B\$12*H9))*EXP(-(\$B\$6/100)*((\$B\$7/360)/\$B\$8))), G4)$$

$$H5 [t_4, Cu^4] = MAX(H3-\$B\$4, (((\$B\$11*I5)+(\$B\$12*I9))*EXP(-(\$B\$6/100)*((\$B\$7/360)/\$B\$8))), H4)$$

$$I5 [t_5, Cu^5] = SI(\$B\$8=I\$1, MAX((\$I3-\$B\$4), 0),)$$

$$E10 [t_1, Cd] = MAX(E8-\$B\$4, (((\$B\$11*F10)+(\$B\$12*F14))*EXP(-(\$B\$6/100)*((\$B\$7/360)/\$B\$8))), E9)$$

$$F10 [t_2, Cud] = MAX(F8-\$B\$4, (((\$B\$11*G10)+(\$B\$12*G14))*EXP(-(\$B\$6/100)*((\$B\$7/360)/\$B\$8))), F9)$$

$$G10 [t_3, Cu] = MAX(G8-\$B\$4, (((\$B\$11*H10)+(\$B\$12*H14))*EXP(-(\$B\$6/100)*((\$B\$7/360)/\$B\$8))), G9)$$

$$H10 [t_4, Cu^2] = MAX(H8-\$B\$4, (((\$B\$11*I10)+(\$B\$12*I14))*EXP(-(\$B\$6/100)*((\$B\$7/360)/\$B\$8))), H9)$$

$$I10 [t_5, Cu^3] = SI(\$B\$8=I\$1, MAX((\$I8-\$B\$4), 0),)$$

$$F15 [t_2, Cd^2] = MAX(F13-\$B\$4, (((\$B\$11*G15)+(\$B\$12*G19))*EXP(-(\$B\$6/100)*((\$B\$7/360)/\$B\$8))), F14)$$

$$G15 [t_3, Cd] = MAX(G13-\$B\$4, (((\$B\$11*H15)+(\$B\$12*H19))*EXP(-(\$B\$6/100)*((\$B\$7/360)/\$B\$8))), G14)$$

$$H15 \quad [t_4, \quad Cd] \quad =\text{MAX}(H13-\$B\$4,(((\$B\$11*I15)+(\$B\$12*I19))*\text{EXP}(-(\$B\$6/100)*((\$B\$7/360)/\$B\$8))),H14)$$

$$I15 \quad [t_5, \quad Cu] =\text{SI}(\$B\$8=I\$1,\text{MAX}((\$I13-\$B\$4),0),)$$

$$G20 \quad [t_3, \quad Cd^3] \quad =\text{MAX}(G18-\$B\$4,(((\$B\$11*H20)+(\$B\$12*H24))*\text{EXP}(-(\$B\$6/100)*((\$B\$7/360)/\$B\$8))),G19)$$

$$H20 \quad [t_4, \quad Cd^2] \quad =\text{MAX}(H18-\$B\$4,(((\$B\$11*I20)+(\$B\$12*I24))*\text{EXP}(-(\$B\$6/100)*((\$B\$7/360)/\$B\$8))),H19)$$

$$I20 \quad [t_5, \quad Cd] =\text{SI}(\$B\$8=I\$1,\text{MAX}((\$I18-\$B\$4),0),)$$

$$H25 \quad [t_4, \quad Cd^4] \quad =\text{MAX}(H23-\$B\$4,(((\$B\$11*I25)+(\$B\$12*I29))*\text{EXP}(-(\$B\$6/100)*((\$B\$7/360)/\$B\$8))),H24)$$

$$I25 \quad [t_5, \quad Cd^3] =\text{SI}(\$B\$8=I\$1,\text{MAX}((\$I23-\$B\$4),0),)$$

$$I30 \quad [t_5, \quad Cd^5] =\text{SI}(\$B\$8=I\$1,\text{MAX}((\$I28-\$B\$4),0),)$$

Put europea para cada nodo:

$$D6 \quad [t_0, \quad P] \quad =\text{SI}(\$B\$8=D\$1,\text{MAX}((D4-\$B\$4),0),(((\$B\$11*E6)+(\$B\$12*E11))*\text{EXP}(-(\$B\$6/100)*((\$B\$7/360)/\$B\$8))))$$

$$E6 \quad [t_1, \quad Pu] \quad =\text{SI}(\$B\$8=E\$1,\text{MAX}((E4-\$B\$4),0),(((\$B\$11*F6)+(\$B\$12*F11))*\text{EXP}(-(\$B\$6/100)*((\$B\$7/360)/\$B\$8))))$$

$$F6 \quad [t_2, \quad Pu^2] \quad =\text{SI}(\$B\$8=F\$1,\text{MAX}((F4-\$B\$4),0),(((\$B\$11*G6)+(\$B\$12*G11))*\text{EXP}(-(\$B\$6/100)*((\$B\$7/360)/\$B\$8))))$$

$$G6 \quad [t_3, \quad Pu^3] \quad =\text{SI}(\$B\$8=G\$1,\text{MAX}((G4-\$B\$4),0),(((\$B\$11*H6)+(\$B\$12*H11))*\text{EXP}(-(\$B\$6/100)*((\$B\$7/360)/\$B\$8))))$$

$$H6 \quad [t_4, \quad Pu^4] \quad =\text{SI}(\$B\$8=H\$1,\text{MAX}((H4-\$B\$4),0),(((\$B\$11*I6)+(\$B\$12*I11))*\text{EXP}(-(\$B\$6/100)*((\$B\$7/360)/\$B\$8))))$$

$$I6 \quad [t_5, \quad Pu^5] =\text{SI}(\$B\$8=I\$1,\text{MAX}((\$B\$4-\$I3),0),)$$

$$E11 \quad [t_1, \quad Pd] \quad =\text{SI}(\$B\$8=E\$1,\text{MAX}((E9-\$B\$4),0),(((\$B\$11*F11)+(\$B\$12*F16))*\text{EXP}(-(\$B\$6/100)*((\$B\$7/360)/\$B\$8))))$$

$$F11 \quad [t_2, \quad Pud] \quad =\text{SI}(\$B\$8=F\$1,\text{MAX}((F9-\$B\$4),0),(((\$B\$11*G11)+(\$B\$12*G16))*\text{EXP}(-(\$B\$6/100)*((\$B\$7/360)/\$B\$8))))$$

$$G11 \quad [t_3, \quad Pu] \quad =\text{SI}(\$B\$8=G\$1,\text{MAX}((G9-\$B\$4),0),(((\$B\$11*H11)+(\$B\$12*H16))*\text{EXP}(-(\$B\$6/100)*((\$B\$7/360)/\$B\$8))))$$

$$H11 [t_4, Pu^2] = SI(\$B\$8=H\$1, MAX((\$H9-\$B\$4), 0), (((\$B\$11*I11)+(\$B\$12*I16))*EXP(-(\$B\$6/100)*((\$B\$7/360)/\$B\$8))))$$

$$I11 [t_5, Pu^3] = SI(\$B\$8=I\$1, MAX((\$B\$4-\$I8), 0),)$$

$$F16 [t_2, Pd^2] = SI(\$B\$8=F\$1, MAX((F14-\$B\$4), 0), (((\$B\$11*G16)+(\$B\$12*G21))*EXP(-(\$B\$6/100)*((\$B\$7/360)/\$B\$8))))$$

$$G16 [t_3, Pd] = SI(\$B\$8=G\$1, MAX((G14-\$B\$4), 0), (((\$B\$11*H16)+(\$B\$12*H21))*EXP(-(\$B\$6/100)*((\$B\$7/360)/\$B\$8))))$$

$$H16 [t_4, Pud] = SI(\$B\$8=H\$1, MAX((\$H14-\$B\$4), 0), (((\$B\$11*I16)+(\$B\$12*I21))*EXP(-(\$B\$6/100)*((\$B\$7/360)/\$B\$8))))$$

$$I16 [t_5, Pu] = SI(\$B\$8=I\$1, MAX((\$B\$4-\$I13), 0),)$$

$$G21 [t_3, Pd^3] = SI(\$B\$8=G\$1, MAX((G19-\$B\$4), 0), (((\$B\$11*H21)+(\$B\$12*H26))*EXP(-(\$B\$6/100)*((\$B\$7/360)/\$B\$8))))$$

$$H21 [t_4, Pd^2] = SI(\$B\$8=H\$1, MAX((\$H19-\$B\$4), 0), (((\$B\$11*I21)+(\$B\$12*I26))*EXP(-(\$B\$6/100)*((\$B\$7/360)/\$B\$8))))$$

$$I21 [t_5, Pd] = SI(\$B\$8=I\$1, MAX((\$B\$4-\$I18), 0),)$$

$$H26 [t_4, Pd^4] = SI(\$B\$8=H\$1, MAX((\$H23-\$B\$4), 0), (((\$B\$11*I26)+(\$B\$12*I31))*EXP(-(\$B\$6/100)*((\$B\$7/360)/\$B\$8))))$$

$$I26 [t_5, Pd^3] = SI(\$B\$8=I\$1, MAX((\$B\$4-\$I23), 0),)$$

$$I31 [t_5, Pd^5] = SI(\$B\$8=I\$1, MAX((\$B\$4-\$I28), 0),)$$

Put americana para cada nodo

$$D7 [t_0, P] = MAX(\$B\$4-D3, (((\$B\$11*E7)+(\$B\$12*E12))*EXP(-(\$B\$6/100)*((\$B\$7/360)/\$B\$8))), D6)$$

$$E7 [t_1, Pu] = MAX(\$B\$4-E3, (((\$B\$11*F7)+(\$B\$12*F12))*EXP(-(\$B\$6/100)*((\$B\$7/360)/\$B\$8))), E6)$$

$$F7 [t_2, Pu^2] = MAX(\$B\$4-F3, (((\$B\$11*G7)+(\$B\$12*G12))*EXP(-(\$B\$6/100)*((\$B\$7/360)/\$B\$8))), F6)$$

$$G7 [t_3, Pu^3] = MAX(\$B\$4-G3, (((\$B\$11*H7)+(\$B\$12*H12))*EXP(-(\$B\$6/100)*((\$B\$7/360)/\$B\$8))), G6)$$

$$H7 [t_4, Pu^4] = MAX(\$B\$4-H3, (((\$B\$11*I7)+(\$B\$12*I12))*EXP(-(\$B\$6/100)*((\$B\$7/360)/\$B\$8))), H6)$$

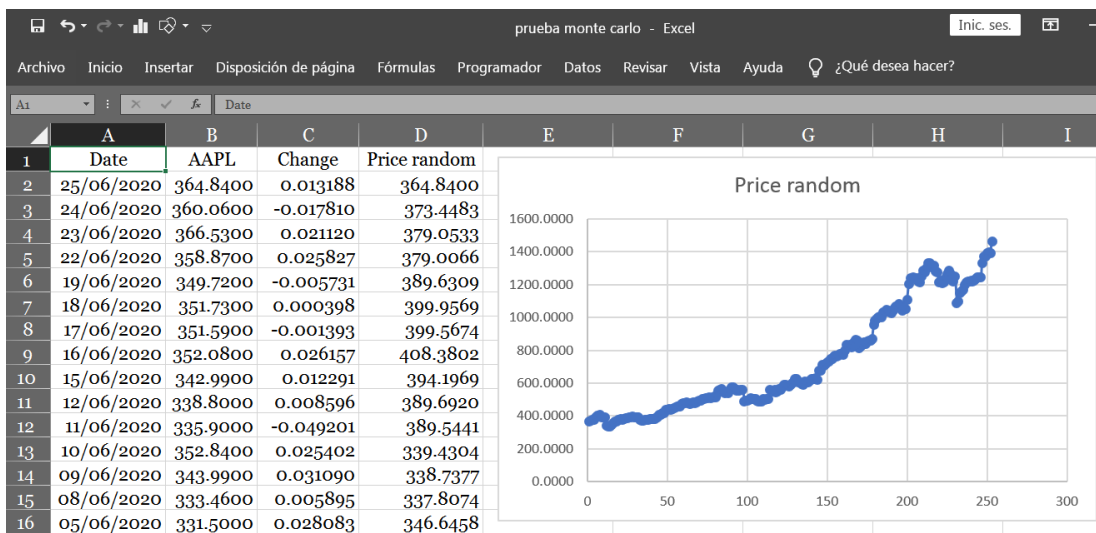
$I7 [t_5, Pu^5] = SI(\$B\$8=I\$1, MAX((\$B\$4-\$I3), 0),)$
 $E12 [t_1, Pd] = MAX(\$B\$4-E8, (((\$B\$11 * F12) + (\$B\$12 * F17)) * EXP(-$
 $(\$B\$6/100) * ((\$B\$7/360) / \$B\$8))), E11)$
 $F12 [t_2, Pud] = MAX(\$B\$4-F8, (((\$B\$11 * G12) + (\$B\$12 * G17)) * EXP(-$
 $(\$B\$6/100) * ((\$B\$7/360) / \$B\$8))), F11)$
 $G12 [t_3, Pu] = MAX(\$B\$4-G8, (((\$B\$11 * H12) + (\$B\$12 * H17)) * EXP(-$
 $(\$B\$6/100) * ((\$B\$7/360) / \$B\$8))), G11)$
 $H12 [t_4, Pu^2] = MAX(\$B\$4-H8, (((\$B\$11 * I12) + (\$B\$12 * I17)) * EXP(-$
 $(\$B\$6/100) * ((\$B\$7/360) / \$B\$8))), H11)$
 $I12 [t_5, Pu^3] = SI(\$B\$8=I\$1, MAX((\$B\$4-\$I8), 0),)$
 $F17 [t_2, Pd^2] = MAX(\$B\$4-F13, (((\$B\$11 * G17) + (\$B\$12 * G22)) * EXP(-$
 $(\$B\$6/100) * ((\$B\$7/360) / \$B\$8))), F16)$
 $G17 [t_3, Pd] = MAX(\$B\$4-G13, (((\$B\$11 * H17) + (\$B\$12 * H22)) * EXP(-$
 $(\$B\$6/100) * ((\$B\$7/360) / \$B\$8))), G16)$
 $H17 [t_4, Pud] = MAX(\$B\$4-H13, (((\$B\$11 * I17) + (\$B\$12 * I22)) * EXP(-$
 $(\$B\$6/100) * ((\$B\$7/360) / \$B\$8))), H16)$
 $I17 [t_5, Pu] = SI(\$B\$8=I\$1, MAX((\$B\$4-\$I13), 0),)$
 $G22 [t_3, Pd^3] = MAX(\$B\$4-G18, (((\$B\$11 * H22) + (\$B\$12 * H27)) * EXP(-$
 $(\$B\$6/100) * ((\$B\$7/360) / \$B\$8))), G21)$
 $H22 [t_4, Pd^2] = MAX(\$B\$4-H18, (((\$B\$11 * I22) + (\$B\$12 * I27)) * EXP(-$
 $(\$B\$6/100) * ((\$B\$7/360) / \$B\$8))), H21)$
 $I22 [t_5, Pd] = SI(\$B\$8=I\$1, MAX((\$B\$4-\$I18), 0),)$
 $H27 [t_4, Pd^4] = MAX(\$B\$4-H23, (((\$B\$11 * I27) + (\$B\$12 * I32)) * EXP(-$
 $(\$B\$6/100) * ((\$B\$7/360) / \$B\$8))), H26)$
 $I27 [t_5, Pd^3] = SI(\$B\$8=I\$1, MAX((\$B\$4-\$I23), 0),)$
 $I32 [t_5, Pd^5] = SI(\$B\$8=I\$1, MAX((\$B\$4-\$I28), 0),)$

Una captura de cómo debería quedar la hoja en Excel:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
2		*hasta 5 pasos		t0	t1	t2	t3	t4	t5
3	S	50		50.0000	56.1200	62.9892	70.6991	79.3528	89.0656
4	K	50		6.3595	9.8734	14.8597	21.5256	29.7677	39.0656
5	σ	40		6.3595	9.8734	14.8597	21.5256	29.7677	39.0656
6	r	10		4.3190	2.1141	0.6360	0.0000	0.0000	0.0000
7	T	150		4.4885	2.1625	0.6360	0.0000	0.0000	0.0000
8	n	5			44.5474	50.0000	56.1200	62.9892	70.6991
9	u	1.1224			2.8493	4.9066	8.2481	13.4041	20.6991
10	d	0.8909			2.8493	4.9066	8.2481	13.4041	20.6991
11	p	0.5073			6.6628	3.6721	1.3017	0.0000	0.0000
12	(1 - p)	0.4927			6.9597	3.7711	1.3017	0.0000	0.0000
13	e^{-rT}	0.9917				39.6894	44.5474	50.0000	56.1200
14						0.7794	1.5491	3.0791	6.1200
15						0.7794	1.5491	3.0791	6.1200
16						9.8555	6.1753	2.6641	0.0000
17						10.3613	6.3780	2.6641	0.0000
18				Spot			35.3611	39.6894	44.5474
19				Call europea			0.0000	0.0000	0.0000
20				Call americana			0.0000	0.0000	0.0000
21				Put europeo			13.8125	9.8957	5.4526
22				Put americano			14.6389	10.3106	5.4526
23								31.5049	35.3611
24								0.0000	0.0000
25								0.0000	0.0000
26								18.0802	14.6389
27								18.4951	14.6389
28									28.0692
29									0.0000
30									0.0000
31									21.9308
32									21.9308

Método Montecarlo

En el algoritmo mostrado en Option Trader (2017), se usa una serie de precios (variables) pasados. La cantidad de variables usadas es discreción de quien hace la prueba. Se ordenan las variables desde la última, hacia el pasado:



En la columna C, deben calcularse los cambios logarítmicos (base e):

C2 [cambios ln] =LN(B2/B3)

De esta forma, para todas las variables. Después, para calcular los precios aleatorios:

D2 [precio inicial] =B2

D3 [algoritmo]

=D2*EXP(K.ESIMO.MENOR(\$C\$2:\$C\$253,ALEATORIO.ENTRE(1,252)))

Y completar para el resto de la serie. En este caso fueron 252 observaciones, entonces en la fórmula anidada “=aleatorio.entre” los extremos deben ser 1 y el no. de observaciones. Por la naturaleza de “=aleatorio.entre” los resultados cambiarán continuamente.

Construcción de curva de descuento

El algoritmo se extrajo del video “*Generating a Yield Curve with the Nelson-Siegel-Svensson Method, Excel Library, Video 00020*” disponible en el canal del sitio web YouTube, “MithrilMoney” (2013). En la columna A deben colocarse los periodos de los bonos, en la B, los rendimientos correspondientes. Para los periodos que no tienen datos son los que este método proporciona. En la columna F se colocan los parámetros del algoritmo (β_1 , β_2 , β_3 , β_4 , λ_1 , λ_2) y en la G, sus valores iniciales, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 1.00 y 1.00, respectivamente. La columna C, tiene la fórmula para este modelo:

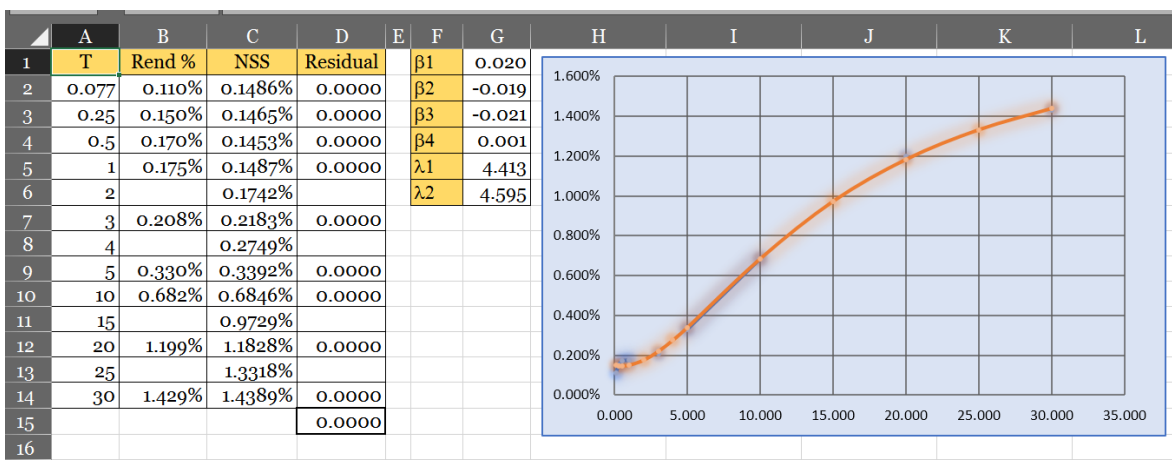
C2 =(\$G\$1)+(\$G\$2*((1-EXP(-A2/\$G\$5))/(A2/\$G\$5)))+(\$G\$3*(((1-EXP(-A2/\$G\$5))/(A2/\$G\$5))-(EXP(-A2/\$G\$5))))+(\$G\$4*(((1-EXP(-A2/\$G\$6))/(A2/\$G\$6))-(EXP(-A2/\$G\$6))))

Y arrastrar para el resto de la columna. Para D, Residuales, se tiene:

=SI(B2>0,POTENCIA(B2-C2,2),””)

Y arrastrar. En la celda al final de la columna D, se debe mostrar la suma de todos los valores de esta columna. Posteriormente, se debe usar la herramienta Solver [DATOS>>Análisis>>Solver]. Donde, “Establecer objetivo”, debe tener la celda que suma todos los valores de D (los residuales). “Cambiando las celdas de variables”, es el vector de

los parámetros, columna G. La opción “Convertir variables sin restricciones en no negativas” debe estar deseleccionada. Y seleccionar “Resolver”. De esta manera, se obtendrán valores estimados allí donde falten. En la siguiente captura de pantalla se muestra la tabla que contiene el algoritmo y una gráfica para ejemplificar. En las abscisas el tiempo y en ordenadas, la tasa de interés.



Metodología propia

Captura de pantalla:

	A	B	C	D	
1	$S(t - 1)$	248	Cicloide	1.0000	
2	S_t	250			
3	K	220	Comprobación de la paridad		
4	r	4.00%	$K * e^{-rT}$	215.643708	
5	T	180	$(1 + (\Delta S_t - \text{div.yield})) * S_t$	247.366129	
6	div.yield	1.86%	=D4-D5+B7	1.000000	put
7	Call	32.722421	=B8+D5-D4	32.722421	call
8	Put	1.000000			
9					

En el vector B1:B6 se introducen datos.

$$B7 \text{ [call]} = \text{MAX}(0, ((1 + ((B2 - B1) / B1) - B6) * B2) - (B3 * \text{EXP}(-B4 * (B5 / 360)))) + D1$$

$$B8 \text{ [put]} = \text{MAX}(0, (B3 * \text{EXP}(-B4 * (B5 / 360))) - ((1 + ((B2 - B1) / B1) - B6) * B2)) + D1$$

$$D1 \text{ [abscisa de cicloide]} = \text{SI}(B5 \leq 180, 0.5 * (1 - \text{COS}(\text{RADIANES}(B5))), 1)$$

Comprobación de la paridad:

$$D4 \text{ [K} * e^{-rT}] = (B3 * \text{EXP}(-B4 * (B5 / 360)))$$

$$D5 \text{ [(1 + (DSt - div.yield)) * St]} = ((1 + ((B2 - B1) / B1) - B6) * B2)$$

$$D7 \text{ [comprobación para put]} = B7 + D4 - D5$$

$$D8 \text{ [comprobación para call]} = B8 + D5 - D4$$

ANEXO II: Black-Scholes-Merton y metodología presentada en Python

A continuación, se presenta el código de Python (lenguaje disponible en: <https://www.python.org/downloads/>) para ejecutar el modelo Black Scholes (con y sin dividendos) y el proceso que se presenta en el Capítulo IV. El código puede ser ejecutado en Spyder, un entorno de programación que viene incluido en el paquete ‘Anaconda’, que es una distribución de ese lenguaje (se encuentra en: <https://www.anaconda.com/distribution/>) Se escogió este lenguaje por su versatilidad, sencillez y penetración actual en todas las industrias. El lector puede usar cualquier entorno de este lenguaje

```
"Modelo Black Scholes"
"Versión de Mauricio Méndez Campos para la tesis:"
"VALUACIÓN DE OPCIONES SOBRE ACCIONES"

from math import log, exp
from scipy import stats

"Definir el valor de los elementos de la prima"
print ("Calculadora de primas de opción, Black-Scholes")
print ("Inserte los siguientes valores")

S = float(input ("Precio Spot de la acción $: "))
K = float(input ("Precio de Ejercicio $: "))
T = float(input ("Tiempo a Vencimiento (días): "))
V = float(input ("Volatilidad %: "))
r = float(input ("Tasa de interes libre de riesgo %: "))

"Definir el tipo de activo subyacente"
cnt = int(input ("Activo subyacente, Acciones, 1. Divisas, 2: "))
numcont = int(input("Número de contratos:"))

"Valor de las primas"
d1=((log(S/K))+(((r/100)+(0.5*((V/100)**2)))*(T/360)))/((V/100)*((T/360)**0.5))
```

```
d2=d1-((V/100)*((T/360)**0.5))
```

```
CALL = (S* stats.norm.cdf(d1, 0, 1)) - ((K*exp(-(r/100)*(T/360))) * stats.norm.cdf(d2, 0, 1))
```

```
PUT = CALL+(K*(exp(-(r/100)*(T/360))))-S
```

```
print ("*****")
```

```
print ("Valor de D1: ")
```

```
print (d1)
```

```
print ("Valor de D2: ")
```

```
print (d2)
```

```
print ("*****")
```

```
print ("Prima Call: ")
```

```
print (CALL)
```

```
print ("Prima Put: ")
```

```
print (PUT)
```

```
print ("*****")
```

```
"Valor de los contratos total"
```

```
if cnt == 1:
```

```
    contratocall=CALL*100
```

```
    print ("Valor de cada contrato Call:")
```

```
    print (contratocall)
```

```
    contrtotcallacc=contratocall*numcont
```

```
    print ("Valor de toda la operacion: ")
```

```
    print (contrtotcallacc)
```

```
    print ("*****")
```

```
    contratoput=PUT*100
```

```
    print ("Valor de cada contrato Put:")
```



```

print (contratoput)
contrtotputacc=contratoput*numcont
print ("Valor de toda la operacion: ")
print (contrtotputacc)
print ("*****")
elif cnt == 2:
    contratocall=CALL*10000
    print ("Valor de cada contrato Call:")
    print (contratocall)
    contrtotcalldiv=contratocall*numcont
    print ("Valor de toda la operacion: ")
    print (contrtotcalldiv)
    print ("*****")
    contratoput=PUT*100
    print ("Valor de cada contrato Put:")
    print (contratoput)
    contrtotputdiv=contratoput*numcont
    print ("Valor de toda la operacion: ")
    print (contrtotputdiv)
    print ("*****")

```

"Griegas"

"Cambios en los elemntos de la prima"

```

print ("Inserte nuevos valores para los elementos de la prima")
S2 = float(input ("Cambio en el Precio Spot de la acción $: "))
T2 = int(input ("Dias restantes a Vencimiento (t días) *Necesariamente menor a T: "))
if T2>T:
    print ("Error, no puede ser mayor a T. Ingrese nuevamente")
    T2 = int(input ("Dias restantes a Vencimiento (días) *Necesariamente menor a T: "))
V2 = float(input ("Cambio en la Volatilidad %: "))

```

```
r2 = float(input ("Cambio en la Tasa de interes libre de riesgo %: "))
```

```
"delta"
```

```
print ("*****")
```

```
delta=stats.norm.cdf(d1, 0, 1)
```

```
print ("Delta Call:")
```

```
print (delta)
```

```
print ("Cobertura delta call:")
```

```
if cnt == 1:
```

```
    print (numcont*delta*100)
```

```
elif cnt == 2:
```

```
    print (numcont*(delta)*10000)
```

```
print ("Delta Put:")
```

```
print (delta-1)
```

```
print ("Cobertura delta put:")
```

```
if cnt == 1:
```

```
    print (numcont*(delta-1)*100)
```

```
elif cnt == 2:
```

```
    print (numcont*(delta-1)*10000)
```

```
print ("*****")
```

```
"gamma"
```

```
g = stats.norm.pdf(d1, 0, 1)
```

```
gamma=g/(S*(V/100)*((T/360)**0.5))
```

```
print ("Gamma: ")
```

```
print (gamma)
```

```
dgcall=(delta+(gamma*(S2-S)))
```

```
print ("Delta-gamma call")
```

```
print (dgcall)
```

```
print ("Cobertura delta-gamma call")
```

```
if cnt == 1:
```

```

    print (numcont*dgcall*100)
elif cnt == 2:
    print (numcont*(dgcall)*10000)
dgput=((delta-1)+(gamma*(S2-S)))
print ("Delta-gamma put")
print (dgput)
print ("Cobertura delta-gamma put")
if cnt == 1:
    print (numcont*dgput*100)
elif cnt == 2:
    print ((numcont*dgput)*10000)
print ("*****")

"delta-gamma-taylor"

dgtc=(delta*(S2-S)+(0.5*(gamma*((S2-S)**2)))
dgtp=((delta-1)*(S2-S)+(0.5*(gamma*((S2-S)**2)))
dntc=delta+(0.5*(gamma*((S2-S)**2)))
dntp=(delta-1)+(0.5*(gamma*((S2-S)**2)))

print ("Delta-gamma para call modificada por serie de Taylor:")
print (dgtc)
print ("Delta-gamma para put modificada por serie de Taylor:")
print (dgtp)
print ("Efecto en las primas")
print ("Call modificada:")
print (CALL+dgtc)
print ("Put modificada")
print (PUT+dgtp)

print ("Cobertura delta-gamma call (Taylor)")

```

```

if cnt == 1:
    print (numcont*dntc*100)
elif cnt == 2:
    print (numcont*(dntc)*10000)
print ("Cobertura delta-gamma put (Taylor)")
if cnt == 1:
    print (numcont*dntp*100)
elif cnt == 2:
    print (numcont*dntp*10000)
print ("*****")

"theta"
thetacall=(((S*(V/100))/(2*((T/360)**0.5)))*(stats.norm.pdf(d1, 0, 1)))-(((r/100)*K*exp(-
(r/100)*(T/360)))*(stats.norm.cdf(d2, 0, 1)))
thetaput=(((S*(V/100))/(2*((T/360)**0.5)))*(stats.norm.pdf(d1, 0, 1)))+(((r/100)*K*exp(-
(r/100)*(T/360)))*(1-(stats.norm.cdf(d2, 0, 1))))
print ("Theta call:")
print (thetacall)
print ("Theta put:")
print (thetaput)
print ("*****")

"vega"
vega=S*((T/360)**0.5)*g
print ("Vega:")
print (vega)
print ("*****")

"rho"
rhocall=K*(T/360)*(exp(-(r/100)*(T/360)))*stats.norm.cdf(d2, 0, 1)
rhoput=(-K)*(T/360)*(exp(-(r/100)*(T/360)))*(1-(stats.norm.cdf(d2, 0, 1)))

```

```

print ("Rho call:")
print (rhocall)
print ("Rho put:")
print (rhoput)
print ("*****")

"Primas considerando griegas (todos los cambios)"
call2=CALL+dgtc+(thetacall*((T-T2)/360))+(vega*((V2-V)/100))+(rhocall*((r2-r)/100))
put2=PUT+dgtp+(thetaput*((T-T2)/360))+(vega*((V2-V)/100))+(rhoput*((r2-r)/100))
print ("Nueva call:")
print (call2)
print ("Nueva put:")
print (put2)

"Dividendos"
print ("Call y put que consideran dividendos:")
divyield = float(input ("Dividend yield de la acción %: "))

"Valor de las primas que ahora consideran pago de dividendos"
d1dy=((log(S/K))+(((r/100)-
(divyield/100))+0.5*((V/100)**2)))*(T/360))/((V/100)*((T/360)**0.5))
d2dy=d1dy-((V/100)*((T/360)**0.5))
CALLdy = (S*exp(-(divyield/100)*(T/360))*stats.norm.cdf(d1dy, 0, 1)) - ((K*exp(-
(r/100)*(T/360))) * stats.norm.cdf(d2dy, 0, 1))
PUTdy = CALLdy+(K*(exp(-(r/100)*(T/360))))-(S*exp(-(divyield/100)*(T/360)))

print ("Valor de cada contrato Call (div):")
print (CALLdy)
print ("Valor de cada contrato Put (div):")
print (PUTdy)

```

Metodología de la tesis

"Metodologia para la tesis:"

"Valuacion de opciones sobre acciones"

"por: Mauricio Méndez Campos"

```
import math
```

```
"Definir el valor de los elementos de la prima"
```

```
print ("Calculadora de primas de opción, Black-Scholes")
```

```
print ("Inserte los siguientes valores")
```

```
St1 = float(input ("Precio Spot de la acción en t-1, $: "))
```

```
St2 = float(input ("Precio Spot de la acción en t, $: "))
```

```
K = float(input ("Precio de Ejercicio $: "))
```

```
T = float(input ("Tiempo a Vencimiento (días): "))
```

```
r = float(input ("Tasa de interes libre de riesgo %: "))
```

```
divyield = float(input ("Dividend yield de la acción %: "))
```

```
"Abcisas de la curva cicloide"
```

```
radio = float(input("Inserte radio de la circunferencia generatriz:"))
```

```
cicloide = radio*(1-math.cos(math.radians(T)))
```

```
print ("Valor de la cicloide en este punto:")
```

```
print (cicloide)
```

```
if T <=180:
```

```
    call      =      max(0,((St2*(1+((St2-St1)/St1)-(divyield/100)))-(K*math.exp((-r*T)/36000))))+cicloide
```

```
    put       =      max(0,((K*math.exp((-r*T)/36000))-(St2*(1+((St2-St1)/St1)-(divyield/100)))))+cicloide
```

```

print ("Call:")
print (call)
print ("Put:")
print (put)
else:
    call1 = max(0,((St2*(1+((St2-St1)/St1)-(divyield/100)))-(K*math.exp((-r*T)/36000))))+1
    put1 = max(0,((K*math.exp((-r*T)/36000))-(St2*(1+((St2-St1)/St1)-(divyield/100)))))+1
    print ("Call:")
    print (call1)
    print ("Put:")
    print (put1)

```

Índice de Figuras, Tablas y Gráficas

Figura 2.1 Straddle en Moser (1875).....	19
Figura 3.1 Ejemplo de árbol binomial hasta dos pasos.....	84
Figura 3.2 Solución de modelo binomial en DerivaGem.....	87
Figura 3.3 Solución de modelo binomial en hoja de Excel propia.....	87
Figura 4.1a Construcción de curva cicloide (Weisstein).....	99
Figura 4.1b Construcción de curva cicloide (Corcho Gutierrez).....	99
Tabla 1.1 Subyacentes en contratos estandarizados en MexDer.....	3
Tabla 1.2 Intervalos para precios de ejercicio en el caso de acciones.....	4
Tabla 1.3 Leyes mexicanas sobre derivados	11
Tabla 2.1 Histórico de precios de Compagnie des Indes	23
Tabla 3.1 Ejemplo de Whaley.....	93
Tabla 4.1 Comparación entre las derivadas de cicloide y raíz cuadrada.....	101
Tabla 4.2a Comparación de modelos Call, $K = \$320$, $T = 90$ días.....	117-119
Tabla 4.2b Comparación de modelos Put, $K = \$320$, $T = 90$ días.....	119-121
Gráfica 1.1 Call long.....	5
Gráfica 1.2 Call Short.....	5
Gráfica 1.3 Put Long.....	5
Gráfica 1.4 Put Short.....	5
Gráfica 2.1 Histórico de precios de Compagnie des Indes	24
Gráfica 3.1 Efecto de movimientos en precios spot en call.....	27
Gráfica 3.2 Efecto de movimientos en precios spot en put.....	27
Gráfica 3.3 Efecto de distintos precios de ejercicio en call	28
Gráfica 3.4 Efecto de distintos precios de ejercicio en put	28
Gráfica 3.5 Efecto del paso del tiempo en call	29
Gráfica 3.6 Efecto del paso del tiempo en put	29
Gráfica 3.7 Efecto de movimientos en volatilidad del subyacente en call	29
Gráfica 3.8 Efecto de movimientos en volatilidad del subyacente en put	29
Gráfica 3.9 Efecto de cambios en la tasa de interés libre de riesgo en call.....	30

Gráfica 3.10 Efecto de cambios en la tasa de interés libre de riesgo en put.....	30
Gráfica 3.11 Call.....	31
Gráfica 3.12a Put.....	31
Gráfica 3.12b Put.....	32
Gráfica 3.13 Call short + Long	33
Gráfica 3.14 Call long + short	33
Gráfica 3.15 Put long + Long	33
Gráfica 3.16 Put short + Short	33
Gráfica 3.17 Bull spread	34
Gráfica 3.18 Bear spread	34
Gráfica 3.19 Butterfly spread	35
Gráfica 3.20 Straddle	35
Gráfica 3.21 Strip y Strap	35
Gráfica 3.22 Strangle	35
Gráfica 3.23 Ejemplo de Proceso estocástico	52
Gráfica 3.24 Movimiento Browniano Aritmético y Geométrico	60
Gráfica 3.25 Call long: financiamiento y cobertura corta.....	62
Gráfica 3.26 Call long: financiamiento y cobertura delta.....	63
Gráfica 3.27 Cobertura dinámica en t.....	64
Gráfica 3.28 Mínimo valor de call.....	66
Gráfica 3.29 Máximo valor de call y valor en condiciones normales.....	68
Gráfica 3.30 Delta.....	76
Gráfica 3.31 Gamma.....	78
Gráfica 3.32 Vega.....	78
Gráfica 3.33a Vega con volatilidad no constante (volatilidad en las abscisas).....	79
Gráfica 3.33b Vega con volatilidad no constante (precio spot en las abscisas).....	79
Gráfica 3.33c Vega con volatilidad no constante, tiempo constante (precio spot en las abscisas).....	80
Gráfica 3.34 Theta.....	81
Gráfica 3.35 Theta cuando el tiempo pasa.....	81
Gráfica 4.1 Curva Cicloide en Excel.....	100

Gráfica 4.2a Comparación de curvas, cuando radio = 1.....	102
Gráfica 4.2b Comparación de curvas, cuando radio = 0.5.....	102
Gráfica 4.3 Theta hasta 210 días (con base en la Gráfica 3.35).....	103
Gráfica 4.4 Ejemplo de volatilidad implícita.....	106
Gráfica 4.5 Simulación de S_t con Montecarlo para GRUMAB.....	109
Gráfica 4.6 Simulación de s con Montecarlo para GRUMAB.....	109
Gráfica 4.7 Dividend Yield para GRUMAB.....	109
Gráfica 4.8 Curva de rendimientos TIE.....	110
Gráfica 4.9a Comparación de modelos Call, $K = \$280$, $T = 90$ días.....	110
Gráfica 4.9b Comparación de modelos Call, $K = \$280$, $T = 180$ días.....	111
Gráfica 4.9c Comparación de modelos Call, $K = \$280$, $T = 360$ días.....	111
Gráfica 4.9d Comparación de modelos Call, $K = \$320$, $T = 90$ días.....	111
Gráfica 4.9e Comparación de modelos Call, $K = \$320$, $T = 180$ días.....	112
Gráfica 4.9f Comparación de modelos Call, $K = \$320$, $T = 360$ días.....	112
Gráfica 4.9g Comparación de modelos Call, $K = \$360$, $T = 90$ días.....	112
Gráfica 4.9h Comparación de modelos Call, $K = \$360$, $T = 180$ días.....	113
Gráfica 4.9i Comparación de modelos Call, $K = \$360$, $T = 360$ días.....	113
Gráfica 4.10a Comparación de modelos Put, $K = \$280$, $T = 90$ días.....	114
Gráfica 4.10b Comparación de modelos Put, $K = \$280$, $T = 180$ días.....	114
Gráfica 4.10c Comparación de modelos Put, $K = \$280$, $T = 360$ días.....	114
Gráfica 4.10d Comparación de modelos Put, $K = \$320$, $T = 90$ días.....	115
Gráfica 4.10e Comparación de modelos Put, $K = \$320$, $T = 180$ días.....	115
Gráfica 4.10f Comparación de modelos Put, $K = \$320$, $T = 360$ días.....	115
Gráfica 4.10g Comparación de modelos Put, $K = \$360$, $T = 90$ días.....	116
Gráfica 4.10h Comparación de modelos Put, $K = \$360$, $T = 180$ días.....	116
Gráfica 4.10i Comparación de modelos Put, $K = \$360$, $T = 360$ días.....	116