



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Análisis hamiltoniano y simpléctico para gravedad
en tres dimensiones sin dinámica

Tesis presentada como requisito para
obtener el título de Licenciatura en Física

presenta

Harold Osmart Ochoa Gutiérrez

asesorado por

Dr. Alberto Escalante Hernández

Dr. Roberto Cartas Fuentevilla

Julio

2017

Resumen

En esta tesis se realiza el análisis Hamiltoniano de una teoría de gravedad en tres dimensiones sin dinámica, propuesta por Viqar Husain. Se reportan las transformaciones de norma y los paréntesis de Dirac. Además, se realizó un análisis a la teoría usando el formalismo de Faddeev-Jackiw (FJ), donde se encontraron las transformaciones de norma y se calcularon los paréntesis generalizados de FJ. De manera alterna, se verifica que coinciden los paréntesis de FJ con los de Dirac. Por último, se discute brevemente las similitudes y ventajas de cada uno de estos formalismos.

Palabras clave: *sistemas singulares, gravedad, análisis Hamiltoniano, análisis de Faddeev-Jackiw, teorías de norma.*

Agradecimientos

Al Dr. Gerardo F. Torres del Castillo por todas sus clases en los últimos años y sus horas de asesorías que me fueron de gran ayuda, por mostrarme parte de cómo entiende la física, lo cual aprecio mucho, y por darme sus consejos.

Al Dr. Alberto Escalante Hernández por su apoyo económico y académico en este último año. También agradezco que me haya mostrado el camino que se debe recorrer para poder hacer investigación de frontera.

A todos mis amigos por acompañarme todos estos años en la carrera, por todas las horas que compartimos en el café y por haberme dado experiencias únicas, en especial a mi amigo Marco Esperón Pintos.

A mis padres por su apoyo incondicional desde que nací, por todo su amor y por toda su paciencia, que sin ellos, nada de esto hubiese sido posible.

A mi tío Ricardo Sierra Palacios, que ha sido como mi segundo padre, por todo su apoyo y cariño que ha dado desde pequeño.

Índice general

Introducción	1
1. Formalismo de Dirac-Bergmann	5
1.1. Definiciones y resultados elementales	5
1.2. Sistemas singulares	7
1.2.1. Hamiltoniano primario	8
1.2.2. Constricciones secundarias	12
1.2.3. Condiciones sobre los multiplicadores	14
1.2.4. Hamiltoniano total	15
1.3. Teorías de norma	15
1.3.1. Constricciones de primera y segunda clase	16
1.3.2. Separación de constricciones de primera y segunda clase	18
1.3.3. Transformaciones de norma	19
1.3.4. Paréntesis de Dirac	21
1.3.5. Hamiltoniano extendido	22
1.3.6. Álgebra entre transformaciones de norma	24
1.3.7. Fijación de norma	25
1.3.8. Grados de libertad	25
1.3.9. Observable	26
2. Formalismo de Faddeev-Jackiw	27
2.1. Ecuaciones de movimiento	27
2.2. Lagrangiano singular	30
2.3. Simetría de norma	31
3. Análisis de la acción de Husain	33
3.1. Equivalencia entre la acción de Palatini y la acción de Chern-Simons	33
3.2. Análisis de Dirac	34
3.3. Análisis de Faddeev-Jackiw	39
4. Conclusiones	45
A. Aclaraciones matemáticas	47
A.1. Delta de Dirac	47
A.1.1. Propiedades	47
A.2. Tensores	48

B. Cálculo variacional	51
B.1. Variaciones	51
B.2. Derivada variacional	51
B.3. Paréntesis de Poisson	54
B.3.1. Propiedades	56
C. Geometría diferencial	59
C.1. Variedades	59
C.1.1. Variedades Riemannianas y Pseudoriemannianas	61
C.1.2. k-formas	62
C.2. Haces fibrados	63
C.2.1. Tétrada	65
C.2.2. Métrica interna	66
C.2.3. Conexión	67
C.2.4. Conexión interna	68
C.2.5. Curvatura	69
D. Teorías de Chern-Simons	71
D.1. Formas de Chern-Simons	73
E. Simetrías y constricciones en gravedad	75
E.1. Simetrías	75
E.2. Constricciones	76
Bibliografía	79

Introducción

A lo largo de la historia, los físicos han desarrollado diferentes teorías que aparentemente no tenían relación entre sí, pero posteriormente lograron unificarse. Por citar algunos ejemplos, se tienen por separado, la electrodinámica y la mecánica Newtoniana como teorías que entran en esta categoría. En particular, la unificación de esas teorías se ha conseguido por las siguientes tres razones; 1) la observación de nuevos fenómenos, 2) la consistencia matemática entre las teorías y 3) la creación de nuevos conceptos. De esta manera se dio paso a teorías más generales que tienen como casos particulares a las teorías conocidas. En efecto, Sir. Isaac Newton al publicar su obra *Principios matemáticos de la filosofía natural* (1687), introdujo el concepto de fuerza y escribió su ecuación de gravitación universal, con lo que mostró que la cinemática celeste descrita por las leyes de Johannes Kepler¹, y los trabajos de Galileo Galilei², en realidad son parte de una misma teoría, lo que hoy se conoce como la mecánica Newtoniana. Otro ejemplo lo dieron Michael Faraday y James Clerk Maxwell. Por un lado, Faraday descubrió la inducción electromagnética en 1831 gracias a una serie de experimentos con corrientes, con la cual encontró una relación entre el campo eléctrico y el campo magnético. Por otro lado, Maxwell escribió matemáticamente los resultados de Faraday y dio consistencia matemática al conjunto de ecuaciones que describen la electricidad y el magnetismo en su obra *Una teoría del campo electromagnético* (1865), de esta forma, se unificaron ambas teorías en una sola, actualmente conocida como electrodinámica. En adición, se dio una explicación a los fenómenos ópticos como oscilaciones de los campos antes mencionados. Un último ejemplo es la unificación hecha por Albert Einstein en su teoría de Relatividad General (RG). Para su desarrollo, Einstein se inspiró en el principio de Mach, el cual versa *La inercia de cualquier sistema es el resultado de su interacción con el resto del universo* (1893). Después de un arduo trabajo, pudo concluir que la materia-energía determina la forma del espacio-tiempo y viceversa, como se puede ver en las llamadas ecuaciones de Einstein

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu},$$

donde $G_{\mu\nu}$ el tensor de curvatura de Einstein, $T_{\mu\nu}$ el tensor de energía-momento, G la constante de la gravitación universal y c la constante de la velocidad de la luz. De esta manera, los conceptos de espacio, tiempo y materia quedan unificados en lo que se conoce como la dinámica de la geometría del espacio-tiempo. Estas tres unificaciones han mostrado ser muy provechosas para el conocimiento humano, pues se obtuvo una explicación a observaciones

¹ *Astronomía nueva* (1609) para la primera y segunda ley, y *Epítome astronómico Copernicano* (1617-1621) para la tercera ley.

² Principalmente por su obra *Discursos y demostraciones matemáticas en torno a dos nuevas ciencias referidas a la mecánica y a los movimientos locales* (1638).

antes incomprensibles, se entendió que algunos fenómenos de naturaleza aparentemente distinta, en realidad son manifestación de diferentes propiedades de un mismo fenómeno y se consiguieron predicciones que posteriormente se observaron en el laboratorio, entre otras cosas.

En este mismo contexto, a mediados del siglo XX, se había logrado construir dos teorías que explicaban muy bien los datos experimentales de sus respectivos campos de aplicación, por un lado estaba la Teoría Cuántica de Campos (TCC) y por otro lado la RG. La primera explica la estructura de la materia y los fenómenos a escalas subatómicas, y la segunda la dinámica del cosmos y los fenómenos a grandes escalas. Sin embargo, no existe una teoría que logre unificar TCC con RG, la llamada gravedad cuántica, con la que podríamos estudiar escenarios tales como el Big Bang [1]. Los físicos han optado por formular gravedad cuántica buscando consistencia matemática y conceptual entre ambas teorías. No obstante, a pesar de que se ha hecho un arduo trabajo teórico desde los años 50's hasta el día de hoy, el problema de la gravedad cuántica no se ha logrado resolver, sin embargo, se tienen dos propuestas que podrían resolver dicho problema; una es la Gravedad Cuántica de Lazos (GCL) y la otra es la Teoría Supersimétrica de Cuerdas (TSC). GCL es una teoría que busca unificar RG y mecánica cuántica, conservando sus principios y simetrías, en particular las simetrías de RG, a saber, invariancia ante difeomorfismos e independencia de fondo [2]. La teoría tiene la virtud de describir el campo gravitacional sin necesidad de recurrir a métodos perturbativos, lo cual es de relevancia, pues conserva las simetrías de RG, además la teoría ya ha arrojado predicciones, como que el espacio-tiempo a la escala de Planck ($10^{-33}cm$) es granular, es decir, se tienen cuantos de área y volumen [2]. Pero así como GCL tiene éxitos, también tiene problemas, pues no se ha logrado reproducir RG a bajas energías o lo que es lo mismo a distancias mucho mayores a la escala de Planck [2]. Por otro lado, TSC es una teoría que parte de la suposición de que los objetos elementales de la naturaleza no son partículas, sino pequeños objetos unidimensionales llamados cuerdas, las cuales oscilan con diferentes frecuencias, asociando cada frecuencia a una partícula, entre ellas al gravitón, partícula hipotéticamente portadora del campo gravitacional. Además, la teoría debe recurrir a un conjunto de hipótesis adicionales para su consistencia, como son la existencia de 6 dimensiones espaciales extra, así como la compactación de dichas dimensiones y la existencia de supersimetría³. No obstante, la teoría no presenta independencia de fondo, sin embargo, hay evidencia de que existe una teoría más general que no es perturbativa, la llamada teoría M , con la que podría rescatarse las simetrías de RG.

Podemos mencionar que existen al menos dos formas más de abordar el problema de gravedad cuántica; 1) obtener evidencia experimental y 2) construir una teoría que extienda los principios de la mecánica cuántica y/o RG, pero que aún así explique a la gravedad tanto a nivel cuántico como clásico. Por un lado, la obtención de datos experimentales parece aún lejana, pues no se cuenta con la tecnología adecuada para su estudio. Sin embargo hay algunas propuestas interesantes que podrían realizarse en un plazo razonable, como la posibilidad de que la presencia de gravedad cuántica logre dispersar en vacío a fotones y neutrinos emitidos por una explosión de rayos gamma [3, 4]. Por otro lado, la formulación de una teoría que extienda los principios de la mecánica cuántica y/o RG, es una idea que pocos científicos

³Esto puede hacer pensar al lector que la teoría no es muy alentadora, pues la historia nos a enseñado que regularmente la teoría más simple suele ser la correcta, tal como ocurrió entre la relatividad especial y el éter, sin embargo, podría no ser así.

toman en serio, pero personas como Erik Verlinde (2010) apuestan a esta idea. En general, él propone que la gravedad y la dinámica del espacio-tiempo son un fenómeno emergente debido al principio holográfico [5], similar a como ocurre con la temperatura debido al movimiento aleatorio de las moléculas.

Por otra parte, para resolver el problema de la gravedad cuántica desde el punto de vista de GCL, la comunidad científica usualmente se ha inclinado por partir de una teoría de campos clásica y posteriormente cuantizarla. El método más usado es el llamado canónico, el cual consiste en Hamiltonizar una teoría singular, para luego promover a las variables dinámicas a operadores y finalmente cuantizar la teoría. Debido a que se trabaja con una teoría singular, usualmente trae consigo una simetría muy importante, llamada simetría de norma. Teorías de importancia física como la electrodinámica, RG y las teorías de Yang-Mills son teorías de norma, es decir, teorías con una clase de equivalencia entre sus estados físicos. La Hamiltonización puede efectuarse de varias formas, la más usada es el formalismo Hamiltoniano de Dirac [6]. No obstante, es un algoritmo largo debido a que se necesita separar a las constricciones entre primera y segunda clase, por lo que en años relativamente recientes se han dado alternativas, tales como el formalismo simpléctico de Faddeev-Jackiw [7–9], el cual es matemáticamente más económico que el formalismo de Dirac y se espera que sean equivalentes⁴.

Atendiendo este contexto, en esta tesis se aborda una teoría que es un modelo de juguete, el cual es de interés porque analiza las simetrías de una teoría topológica, lo cual está estrechamente relacionado con gravedad [10–13]; es independiente de fondo y no tiene dinámica, lo que la vincula con la restricción Hamiltoniana, que es de gran interés para la física actual, pues no se conoce mucho de ella a nivel cuántico. Además de que un modelo de juguete puede servir como laboratorio para probar nuevos métodos e ideas físicas. En este sentido, la presente tesis se centra en estudiar los formalismos de Dirac y FJ, así como en la aplicación de los mismos a una acción propuesta por Viqar Husain [14] y finalmente se comparan los resultados de ambos formalismos. La acción propuesta por Husain, es una teoría que surge de una teoría de Chern-Simon en tres dimensiones con grupo interno ISO(2), esto lleva a tener una métrica degenerada y es necesario definir un álgebra de Lie con dos generadores y constante cosmológica [14]. Esta acción tiene la propiedad de que su Hamiltoniano extendido es debilmente cero, lo cual coincide con otras formulaciones que describen RG, como ADM, Ashtekar, entre otras [15]. Esta teoría no tiene dinámica en el contexto clásico, pues si se hace una foliación a la subvariedad del espacio fase donde ocurre la dinámica del sistema y se hace evolucionar, se obtiene el mismo estado físico [14].

El presente trabajo de investigación está estructurado de la siguiente forma. En el capítulo uno, se explica el formalismo de Dirac, partiendo de definiciones básicas del formalismo Lagrangiano aplicado a teoría de campos hasta llegar a las transformaciones de norma y los paréntesis de Dirac. En el capítulo dos, se estudia el formalismo de FJ y al igual que en el capítulo anterior, con dicho método se estudian las transformaciones de norma y se construyen los paréntesis generalizados de FJ. En el capítulo tres se aplican los formalismos mencionados anteriormente a la acción propuesta y finalmente en el capítulo cuatro se dan las conclusiones.

⁴Regularmente son equivalentes, sin embargo, al desarrollar el marco teórico del método, formalmente existe ambigüedad en la equivalencia.

Además se tiene un conjunto de apéndices donde se explica la matemática esencial para esta tesis, la cual posiblemente no sea conocida por estudiantes de licenciatura.

Finalmente es importante mencionar que del presente trabajo se obtuvo una publicación en la revista *Annals of Physics* [16].

Capítulo 1

Formalismo de Dirac-Bergmann

1.1. Definiciones y resultados elementales

El concepto de densidad Lagrangiana es el símil de Lagrangiana para un sistema continuo. Así, la densidad Lagrangiana local queda definida por la funcional¹

$$L = L\left(t, q^n(t), \frac{dq^n(t)}{dt}\right) \rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{L}(x, \Phi(x), \partial_\mu \Phi(x)) , \quad (1.1)$$

donde x denota el conjunto de coordenadas que describen a la variedad, el subíndice $\mu = 0, \dots, 3$ corre sobre el número de parámetros y Φ es un campo tensorial definido sobre una variedad Pseudoriemanniana orientada² espacio-temporal \mathcal{M} . En este trabajo \mathcal{L} depende solo de derivadas de primer orden, pero en general puede depender de derivadas de cualquier orden. Una diferencia importante respecto al caso discreto, es que ahora las coordenadas generalizadas son cada una de las componentes del campo.

Llamaremos Lagrangiana a la integral sobre el espacio de la densidad Lagrangiana

$$L = \int \mathcal{L}(x, \Phi(x), \partial_\mu \Phi(x)) d^3x, \quad (1.2)$$

sin embargo, en la práctica es común que \mathcal{L} no dependa de x explícitamente.

Para un campo tensorial Φ_a , se define la acción local como³

$$S[\Phi_a(x)] \equiv \int_D \mathcal{L}(\Phi_a(x), \partial_\mu \Phi_a(x)) d^4x = \int dt L , \quad (1.3)$$

¹Comentemos dos cosas. Uno, a lo largo de la tesis, llamaremos de manera indistinta Lagrangiana tanto a la densidad Lagrangiana como a la Lagrangiana en sí. Dos, a manera de transición, los campos pueden ser vistos como una descripción puntual y discreta de n partículas en el límite cuando $n \rightarrow \infty$ (véase [17], Capítulo 13), donde cada partícula tiene al menos un grado de libertad y por consiguiente, desde este punto de vista, un campo tiene infinitos grados de libertad.

²Véase Apéndice C.

³Comentemos dos cosas. Uno, hay formas más generales de definir a la acción, véase por ejemplo [18, 19], pero usualmente esta es la que se usa en la literatura. Dos, esta ecuación se cumple siempre que las coordenadas x sean ortogonales, si no es así, el factor faltante para el diferencial de volumen se incluye implícitamente en el diferencial.

donde el subíndice $a = 1, 2, \dots, N$ y $\mu = 0, \dots, 3$. Aplicando el principio variacional, las ecuaciones de Euler-Lagrange (E-L) para acciones locales, están dadas por⁴

$$\frac{\delta S}{\delta \Phi_a} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} = 0. \quad (1.4)$$

Supondremos que la variedad \mathcal{M} se puede descomponer como $\Sigma \times \mathbb{R}$, es decir, en una parte espacial y una temporal, de esta forma, podemos reescribir las ecuaciones (1.4) en términos de derivadas variacionales como

$$\frac{\delta S}{\delta \Phi_a} = \frac{\delta_0 \mathcal{L}}{\delta \Phi_a} - \frac{d}{dt} \frac{\delta_0 \mathcal{L}}{\delta \dot{\Phi}_a} = 0, \quad (1.5)$$

donde el subíndice 0 denota que es a tiempo fijo.

Al desarrollar la derivada de la ecuación 1.4, encontramos que la matriz Hessiana queda definida como

$$H_{ab} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_a) \partial (\partial_\mu \Phi_b)}. \quad (1.6)$$

Si $\det H_{ab} \neq 0$ se dirá que es un *sistema regular*, de lo contrario se dirá que es un *sistema singular*, que es el caso de interés para nosotros.

Definición 1.1 Definimos a la densidad de momento generalizado como

$$P^a(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}(\Phi_a(x), \partial_\mu \Phi_a(x))}{\partial \dot{\Phi}_a(x)}. \quad (1.7)$$

Aplicando la transformada de Legendre a la Lagrangiana, con P^a y $\dot{\Phi}_a$ las variables conjugadas, obtenemos la densidad Hamiltoniana

$$\mathcal{H} \equiv \left[\dot{\Phi}_a P^a - \mathcal{L} \right]_{\dot{\Phi}_a = V_a}, \quad (1.8)$$

así

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Phi_a(x), \partial_i \Phi_a(x), P^a(x)), \quad (1.9)$$

donde el subíndice $i = 1, 2, 3$ corre sobre las coordenadas espaciales.

Llamaremos Hamiltoniana ó Hamiltoniano canónico a la integral sobre el espacio de la densidad Hamiltoniana

$$H = \int \mathcal{H}(\Phi_a(x), \partial_i \Phi_a(x), P^a(x)) d^3x. \quad (1.10)$$

⁴Véase [17], Capítulo. 13.

De esta forma, usando (1.8) y comparando las derivadas variacionales, las ecuaciones de movimiento en el formalismo Hamiltoniano están dadas por⁵

$$\dot{\Phi}_a = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P^a}, \quad (1.11)$$

$$\dot{P}^a = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi_a} + \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_i \Phi_a)} \right), \quad (1.12)$$

si se reescriben en términos de derivadas variacionales, las ecuaciones (1.11) y (1.12) toman la forma⁶

$$\dot{\Phi}_a = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta P^a}, \quad \dot{P}^a = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Phi_a}, \quad (1.13)$$

además, usando la definición de paréntesis de Poisson, dada por

Definición 1.2 Sean \mathcal{F}, \mathcal{G} dos funcionales que dependen de $\Phi_a(x)$ y $P^a(x)$, se define el paréntesis de Poisson de \mathcal{F} y \mathcal{G} como

$$\{\mathcal{F}(x), \mathcal{G}(y)\} \equiv \int \left[\frac{\delta \mathcal{F}(x)}{\delta \Phi_a(z)} \frac{\delta \mathcal{G}(y)}{\delta P^a(z)} - \frac{\delta \mathcal{F}(x)}{\delta P^a(z)} \frac{\delta \mathcal{G}(y)}{\delta \Phi_a(z)} \right] d^3 z. \quad (1.14)$$

De esta forma, usando la definición 1.14, las ecuaciones de Hamilton (1.11) y (1.12) se reescriben como⁷

$$\dot{\Phi}_a = \{\Phi_a, \mathcal{H}\}, \quad (1.15)$$

$$\dot{P}^a = \{P^a, \mathcal{H}\}, \quad (1.16)$$

y en general para una funcional F que depende de Φ_a , $\partial_i \Phi_a$ y P^a , su evolución temporal está dada por

$$\dot{F} = \{F, \mathcal{H}\}. \quad (1.17)$$

1.2. Sistemas singulares

Para sistemas singulares existen ciertas relaciones que se obtiene directamente de (1.7), llamadas *constricciones primarias* y tales relaciones tienen la forma

$$\varphi_1^m(\Phi_a, \partial_i \Phi_a, P^a) \approx 0, \quad (1.18)$$

donde Φ_a es alguno de los N campos tensoriales, $m = 0, \dots, M$, con $M \leq N$ y se ha usado el símbolo \approx en vez del símbolo $=$, para indicar que las relaciones son cero solo sobre la superficie de constricciones, de lo cual se habla algunas líneas más abajo. Notar que estas constricciones

⁵Véase [17], Capítulo 13.

⁶Véase ecuación (B.19) y (B.20) de Apéndice B.

⁷En el Apéndice B se hacen todos los cálculos.

definen al sistema en cuestión, de igual forma a como las constricciones de un sistema de partículas lo hacen en mecánica clásica de sistemas regulares⁸.

Estas constricciones definen una subvariedad llamada *superficie de constricciones primarias*. Notemos que hay solo $M' \leq M$ constricciones independientes⁹, pues es posible que algunas de ellas dependan de las otras, por lo que la subvariedad tiene dimensión M' . Si la subvariedad original en el espacio de configuraciones es de dimensión N , al existir constricciones tendremos una variedad en el espacio fase de dimensión $2N - M'$, por lo que no hay una relación uno a uno entre ambos espacios.

Para saber el número de constricciones primarias independientes, es suficiente con calcular el rango de la matriz Hessiana H_{ab}

$$\text{rango}(H_{ab}) = N - M', \quad (1.19)$$

pues si hay una restricción, habrá al menos una $\dot{\Phi}_a$ que no pueda invertirse y por ende una función multivaluada de variable $\dot{\Phi}_a$, o lo que es lo mismo se puede encontrar una relación funcional entre alguna de las $\dot{\Phi}_a$ y otra de ellas.

A la superficie de constricciones primarias se les impone la condición de que su dimensión M' no cambie conforme el sistema evoluciona, pues de ser así, habría ambigüedad en las constricciones y el sistema no quedaría bien definido. Formalmente lo que se pide es lo que se llama *condiciones de regularidad*, las cuales están dadas por

$$\text{rango} \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial (\Phi_a, \partial_i \Phi_a, P^a)} \right) = M' = \text{cte}. \quad (1.20)$$

1.2.1. Hamiltoniano primario

El Hamiltoniano canónico se tiene que redefinir cuando hay constricciones por el hecho de que no es posible despejar todas las $\dot{\Phi}_a$. A continuación deduciremos un hamiltoniano que es adecuado para sistemas con constricciones primarias¹⁰. Consideremos el siguiente conjunto de ecuaciones¹¹

$$P^{V_a} = \frac{\partial \mathcal{L}^v}{\partial V_a}, \quad \dot{\Phi}_a = V_a, \quad (1.21)$$

donde el superíndice v significa que se ha sustituido $\dot{\Phi}_a$ por V_a .

⁸Tomemos un ejemplo básico de mecánica para aclarar la idea: un péndulo de masa m y longitud l . Este tiene como restricción que la longitud $l = \text{cte}$, notar que sin esta condición se pierde la naturaleza del propio sistema, pues si l varía como $l(t) = \Theta(t_0 - t)l_0(1 - t)$ con Θ la función escalón de Heaviside, en algún momento nos quedaremos sin péndulo y por ende perderíamos la naturaleza oscilante del sistema.

⁹Las constricciones dependientes no siempre es fácil hallarlas y en algunos casos es imposible debido a obstrucciones topológicas. En caso de que se tengan, se dice que el sistema es *reducible*.

¹⁰Esta deducción se extrajo de la referencia [20], Capítulo 2.

¹¹Las V_a no necesariamente son $\dot{\Phi}_a$ expresadas en términos de variables del espacio fase.

Por otro lado, observemos que las ecuaciones de E-L (1.4) se pueden separar como

$$\partial_0 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \Phi_a)} \right) + \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \Phi_a)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} = 0, \quad (1.22)$$

dado que el primer término es \dot{P} , podemos expresar las ecuaciones de E-L en la siguiente forma

$$\dot{P}^{V_a} = \frac{\partial \mathcal{L}^v}{\partial \Phi_a} - \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}^v}{\partial(\partial_i \Phi_a)} \right). \quad (1.23)$$

Definamos una función que tiene la misma forma a una transformada de Legendre

$$\mathcal{H}^* \equiv P^{V_a} V_a - \mathcal{L}^v, \quad (1.24)$$

esta función depende de $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}^*(\Phi_a, \partial_i \Phi_a, P^{V_a}, V_a)$, pues existen V_a que no pueden expresarse en términos de Φ_a , $\partial_i \Phi_a$ y P^{V_a} . Ahora tomemos $d\mathcal{H}^*$, por un lado

$$d\mathcal{H}^* = P^{V_a} dV_a + V_a dP^{V_a} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}^v}{\partial \Phi_a} d\Phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}^v}{\partial(\partial_i \Phi_a)} d(\partial_i \Phi_a) + \frac{\partial \mathcal{L}^v}{\partial V_a} dV_a \right), \quad (1.25)$$

por otro lado

$$d\mathcal{H}^* = \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial V_a} dV_a + \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial P^{V_a}} dP^{V_a} + \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \Phi_a} d\Phi_a + \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial(\partial_i \Phi_a)} d(\partial_i \Phi_a), \quad (1.26)$$

entonces

$$\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial V_a} = P^{V_a} - \frac{\partial \mathcal{L}^v}{\partial V_a}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \Phi_a} = -\frac{\partial \mathcal{L}^v}{\partial \Phi_a}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial P^{V_a}} = V_a, \quad (1.27)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial(\partial_i P^{V_a})} = -\frac{\partial \mathcal{L}^v}{\partial(\partial_i \Phi_a)}, \quad (1.28)$$

sustituyendo la ecuación (1.21-1) en (1.27-1), la ecuación (1.21-2) en (1.27-3) y la ecuación (1.23) en (1.27-2) obtenemos

$$\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial V_a} \approx 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \Phi_a} = -\dot{P}^{V_a} - \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}^v}{\partial(\partial_i \Phi_a)} \right), \quad \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial P^{V_a}} = \dot{\Phi}_a, \quad (1.29)$$

donde la primera ecuación es cero solo en la superficie de constricciones. Si además derivamos (1.28) como sigue

$$\partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial(\partial_i \Phi_a)} \right) = -\partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}^v}{\partial(\partial_i \Phi_a)} \right), \quad (1.30)$$

sustituyendo esta ecuación en (1.29) se obtiene

$$\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial V_a} \approx 0, \quad P \dot{V}_a = -\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \Phi_a} + \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial (\partial_i \Phi_a)} \right), \quad \dot{\Phi}_a = \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial P^{V_a}}. \quad (1.31)$$

Notar que dos de estas ecuaciones tienen la misma forma que las ecuaciones de Hamilton, entonces, al igual que en el caso regular, podemos reescribir estas ecuaciones en términos de paréntesis de Poisson

$$\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial V_a} \approx 0, \quad \dot{P}^{V_a} = \{P^{V_a}, \mathcal{H}^*\}, \quad \dot{\Phi}_a = \{\Phi_a, \mathcal{H}^*\}. \quad (1.32)$$

Ahora separemos las N velocidades en l velocidades resolubles y M que no lo son de la siguiente forma

$$\mathcal{V}_r = V_r, \quad r = 1, \dots, l, \quad (1.33)$$

$$u_m = V_{l+m}, \quad m = 1, \dots, M. \quad (1.34)$$

Al sustituir ambas V 's en \mathcal{H}^* y fijándonos en la primera ecuación de (1.32), obtenemos

$$\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial u_m} \approx 0, \quad (1.35)$$

pues para V_r , la última ecuación de (1.32) es resoluble y por tanto $\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial V_r}$ es idénticamente cero.

Consideremos las V_a que se pueden escribir como $V_a = \bar{V}_a(\Phi_m, \Pi^m, u_m)$. Denotaremos $F|_{V_a=\bar{V}_a}$ como \bar{F} , con $F = F(V_a)$. Notar que al sustituir \bar{V}_a en (1.35), no hay dependencia de u_m pues si así fuera tendríamos el caso de V_r , así

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{H}}^*}{\partial u_m} = \Pi^m - \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}^v}{\partial u_m} = \varphi_1^m, \quad (1.36)$$

donde la última igualdad es posible por identificación de las constricciones φ_1^m definidas en la sección anterior.

Así, después de hacer la sustitución mencionada, la ecuación (1.32) toma la forma

$$\varphi_1^m \approx 0, \quad P \dot{V}_a = \{P^{V_a}, \bar{\mathcal{H}}^*\}, \quad \dot{\Phi}_a = \{\Phi_a, \bar{\mathcal{H}}^*\}. \quad (1.37)$$

Observar que

$$V_a \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial V_a} = V_a P^a - V_a \frac{\partial \mathcal{L}^v}{\partial V_a} \quad \Leftrightarrow \quad V_a P^a = V_a \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial V_a} + V_a \frac{\partial \mathcal{L}^v}{\partial V_a}, \quad (1.38)$$

entonces

$$\mathcal{H}^* = V_a \frac{\partial \mathcal{L}^v}{\partial V_a} + V_a \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial V_a} - \mathcal{L}^v, \quad (1.39)$$

luego

$$\bar{\mathcal{H}}^* = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}^v}{\partial V_a} V_a - \bar{\mathcal{L}}^v + V_a \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}^*}{\partial V_a}, \quad (1.40)$$

sin embargo

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}^v}{\partial V_a} V_a - \bar{\mathcal{L}}^v, \quad (1.41)$$

así

$$\bar{\mathcal{H}}^* = \mathcal{H} + \mathcal{V}_a \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}^*}{\partial \mathcal{V}_a} + u_m \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}^*}{\partial u_m}, \quad (1.42)$$

como $\bar{\mathcal{H}}^*$ no depende de \mathcal{V}_a , entonces

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_C + u_m \varphi_1^m, \quad (1.43)$$

donde renombramos a \mathcal{H} por \mathcal{H}_C , pues a lo largo del formalismo aparecerán más Hamiltonianos y es importante reconocer al canónico. A este nuevo Hamiltoniano se le llama *Hamiltoniano primario* y lo denotaremos por \mathcal{H}_1 . Notemos que (1.37) son las ecuaciones de movimiento de \mathcal{H}_1 .¹² A las u_m se les llama multiplicadores de Lagrange debido a la similitud en la forma de la ecuación y el contexto del problema con el método para hallar puntos extremos de una funcional sujeta a alguna restricción.

De manera análoga al caso no degenerado, para cualquier funcional F que depende de $\Phi's$, $\partial\Phi's$ y $P's$, se tiene que $\dot{F} = \{F, \mathcal{H}_1\}$. Esta ecuación se puede simplificar usando las propiedades del paréntesis de Poisson

$$\begin{aligned} \dot{F} &= \{F, \mathcal{H}_1\} \\ &= \{F, \mathcal{H}_C\} + \{F, u_m \varphi_1^m\} \\ &= \{F, \mathcal{H}_C\} + u_m \{F, \varphi_1^m\} + \{F, u_m\} \varphi_1^m, \end{aligned} \quad (1.44)$$

donde se usó la propiedad [I] de la sección B.3.1 en la segunda igualdad y la propiedad [III] de la misma sección en la tercera igualdad.

Dado que una de las ecuaciones de movimiento de \mathcal{H}_1 exige que $\varphi_1^m \approx 0$, entonces sobre la superficie de constricciones se tiene que

$$\dot{F} = \{F, \mathcal{H}_C\} + u_m \{F, \varphi_1^m\}. \quad (1.45)$$

Es posible que al evolucionar en el tiempo a las constricciones primarias, emerjan más restricciones, es por ello que se necesita analizar más a detalle este caso.

¹²También es posible deducir las ecuaciones de movimiento usando el principio variacional, donde la acción está dada por $S_1(\Phi_a, \partial_i \Phi_a, P^a, u_m) = \int_D (\dot{\Phi}_a P^a - \mathcal{H}_C - u_m \phi_1^m) d^4 x$.

1.2.2. Constricciones secundarias

Comencemos esta sección demostrando el siguiente resultado

Proposición 1.1 *Sea F una función del espacio fase tal que es cero sobre la superficie de constricciones $\varphi^m \approx 0$, con todas las constricciones independientes entre sí, entonces*

$$F = f_m \varphi^m, \quad (1.46)$$

para algunas funciones f_m .

Prueba.

Dado que es posible elegir localmente constricciones independientes φ^m como las primeras coordenadas de un sistema coordenado (y^m, x_α) con $y^m \equiv \varphi^m$, entonces se tiene sobre la superficie de constricciones

$$0 = F(0, x), \quad (1.47)$$

así

$$\begin{aligned} F(y, x) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} F(ty^m, x) dt \\ &= y^m \int_0^1 \frac{d}{dm} F(ty^m, x) dt \\ &= f_m \varphi^m, \end{aligned} \quad (1.48)$$

con¹³

$$f^m = \int_0^1 \frac{d}{dm} F(ty^m, x) dt. \quad (1.49)$$

con esto, damos por terminada la prueba.

Tal como sucede con la mecánica de partículas de sistemas regulares, exigimos que las constricciones primarias φ_1^m no tengan evolución temporal, a esto se le conoce como *condiciones de consistencia*, así

$$\dot{\varphi}_1^n = \{\varphi_1^n, \mathcal{H}_C\} + u_m \{\varphi_1^n, \varphi_1^m\} \approx 0, \quad (1.50)$$

esta condición permite hallar el valor explícito de algunos multiplicadores de Lagrange u_m , como se verá en las siguientes líneas. Definamos

$$h^n \equiv \{\varphi_1^n, \mathcal{H}_C\}, \quad (1.51)$$

$$W^{nm} \equiv \{\varphi_1^n, \varphi_1^m\}. \quad (1.52)$$

De esta manera, tenemos cuatro posibles escenarios

¹³Esta es solo una prueba local, para una prueba global véase [6] Capítulo. 1.

- [I] Si $h^n \neq 0$ y $\det(W^{nm}) \neq 0$, entonces el sistema es invertible y se pueden conocer todas las u_m

$$u_m = -h^n (W^{nm})^{-1}. \quad (1.53)$$

Sustituyendo (1.53) en (1.45)

$$\dot{F} = \{F, \mathcal{H}_C\} - \{F, \varphi_1^m\} (\{\varphi_1^m, \varphi_1^n\})^{-1} \{\varphi_1^n, \mathcal{H}_C\} \equiv \{F, \mathcal{H}_C\}_D, \quad (1.54)$$

se define un nuevo paréntesis llamado *paréntesis de Dirac*, del cual se hablará más adelante. Hay que notar que si encontramos todos los multiplicadores, el sistema tiene evolución única.

- [II] Si $h^n \neq 0$ y $\det(W^{nm}) = 0$. Sea $r = \text{rango}(W^{nm})$, entonces W^{nm} tendrá vectores nulos \mathfrak{U}^a , con $a = 1, \dots, M - r$, con los cuales tenemos que

$$W^{nm} \mathfrak{U}_n^a \approx 0, \quad (1.55)$$

luego, contrayendo (1.50) con los vectores nulos \mathfrak{U}^a y usando la ecuación (1.55), obtenemos que

$$h^n \mathfrak{U}_n^a \approx 0, \quad (1.56)$$

entonces, en caso de que no sean vectores trivialmente nulos, pueden surgir nuevas relaciones llamadas *constricciones secundarias*

$$\varphi_2^{m'} \approx 0, \quad m' = M + 1, \dots, L'. \quad (1.57)$$

Donde la igualdad débil hace referencia a una nueva superficie de constricciones, pero no se hará distinción con la superficie de constricciones primarias para evitar demasiada notación.

- [III] Si $h^n = 0$ y $\det(W^{nm}) = 0$, el sistema tiene $M - r$ soluciones no triviales y el resto triviales.
- [IV] Si $h^n = 0$ y $\det(W^{nm}) \neq 0$, el sistema solo tiene soluciones triviales.

A las constricciones secundarias se les exige que igualmente se conserven en su evolución temporal, pero ahora tanto con las constricciones primarias como con las secundarias¹⁴, esto es

¹⁴Se puede exigir que solo se conserven respecto a las constricciones primarias, pero se hace respecto a todas las constricciones dado que tomamos la conjetura de Dirac como cierta (véase el final de la Sección 1.85).

$$\dot{\varphi}^{n'_2} = \{\varphi_2^{n'}, \mathcal{H}_C\} + u_m \{\varphi_2^{n'}, \varphi^m\} \stackrel{\mathcal{S}_2}{\approx} 0, \quad (1.58)$$

con \mathcal{S}_2 la superficie definida por la intersección de la superficie de constricciones primarias con la superficie de constricciones secundarias.

Haciendo un análisis análogo al del Hamiltoniano primario se obtiene un nuevo Hamiltoniano, llamado *Hamiltoniano secundario*, definido por

$$\mathcal{H}_2 \equiv \mathcal{H}_C + u_{\bar{m}} \varphi^{\bar{m}}, \quad (1.59)$$

cuyas ecuaciones de movimiento son

$$\varphi^{\bar{m}} \stackrel{\mathcal{S}_2}{\approx} 0, \quad \dot{F} = \{F, \mathcal{H}_2\}. \quad (1.60)$$

con $\bar{m} = 1, \dots, M, M+1, \dots, L'$.

Ahora se tiene el mismo escenario del principio de esta sección, en caso de encontrar nuevas constricciones (llamadas terciarias) se repite el proceso nuevamente y así consecutivamente hasta ya no encontrar más constricciones nuevas. Luego del proceso mencionado, se tendrá el siguiente Hamiltoniano

$$\mathcal{H}_L \equiv \mathcal{H}_C + u_\mu \varphi^\mu, \quad (1.61)$$

$$\varphi^\mu \stackrel{\mathcal{S}}{\approx} 0, \quad \dot{F} = \{F, \mathcal{H}_L\}, \quad (1.62)$$

donde φ^μ es el conjunto de todas las constricciones encontradas, cuyo número total es $L = M + L' + L'' + \dots + L^{(l)}$ y \mathcal{S} denota la intersección de todas las superficies de restricción y $\mu = 1, \dots, L$. Al conjunto de constricciones secundarias, terciarias, etc. se les llamará simplemente secundarias, pues en este formalismo no es relevante su distinción.

1.2.3. Condiciones sobre los multiplicadores

Hay que observar que la solución a los multiplicadores de Lagrange no es única, pues

$$\dot{\varphi}^\nu = \{\varphi^\nu, \mathcal{H}_C\} + u_\mu \{\varphi^\nu, \varphi^\mu\} \stackrel{\mathcal{S}}{\approx} 0, \quad (1.63)$$

es un conjunto de ecuaciones lineales no homogéneas, entonces, en general los multiplicadores de Lagrange tienen la forma

$$u_\mu = U_\mu + V_\mu, \quad (1.64)$$

donde U_μ es una solución particular y V_μ es la solución general de la ecuación homogénea

$$V_\mu \{\varphi^\nu, \varphi^\mu\} \stackrel{\mathcal{S}}{\approx} 0, \quad (1.65)$$

la cual, en general es una combinación lineal de soluciones linealmente independientes de la parte homogénea, entonces

$$u_\mu = U_\mu + v_c V_\mu^c, \quad (1.66)$$

donde v_c son funciones arbitrarias, pues no se les impuso ninguna condición, $\mu = 1, \dots, L$ y $c = 1, \dots, A$ con $A \leq L$. Esta arbitrariedad tiene mucho que ver con una simetría importante llamada simetría de norma, de lo cual se hablará más adelante.

Observar que las funciones v_c aparecen solo en los casos [II] y [III] de la sección 1.2.2.

1.2.4. Hamiltoniano total

Notemos que al sustituir los multiplicadores (1.66) en (1.61) obtenemos

$$\mathcal{H}_L = \mathcal{H}_C + (U_\mu + v_c V_\mu^c) \varphi^\mu, \quad (1.67)$$

$$\mathcal{H}_L = \mathcal{H}' + v_c \varphi^c \equiv \mathcal{H}_T, \quad (1.68)$$

con

$$\mathcal{H}' \equiv \mathcal{H}_C + U_\mu \varphi^\mu, \quad (1.69)$$

$$\varphi^c \equiv V_\mu^c \varphi^\mu, \quad (1.70)$$

y $\mu = 1, \dots, L$. A este nuevo hamiltoniano se le llama *Hamiltoniano total*.

De esta forma, las ecuaciones de movimiento sobre la superficie de constricciones toman la forma

$$\dot{F} = \{F, \mathcal{H}'\} + v_c \{F, \varphi^c\} = \{F, \mathcal{H}_T\}, \quad (1.71)$$

así, las ecuaciones de movimiento del sistema tienen una parte totalmente determinada y una parte arbitraria por la presencia de los coeficientes v_a .

1.3. Teorías de norma

Es importante mencionar que se tiene dos significados para el término teoría de norma. Para la física de partículas elementales, una teoría de norma es aquella que puede ser expresada en términos de conexiones valuadas en el álgebra de Lie de algún grupo, al cual se le llama grupo de simetría, que deja invariante la acción al actuar sobre esta. Aquí se definirá una teoría de norma como aquella que posee las llamadas transformaciones de norma, que al ser aplicadas a las ecuaciones de movimiento y a la acción extendida las deja invariantes.

En la sección 1.2.2 se vio que si se determinan todos los multiplicadores de Lagrange, el sistema evoluciona sin ambigüedad alguna, tal como sucede en los sistemas regulares. Sin embargo, si no pueden determinarse todos los multiplicadores, existe una arbitrariedad en la evolución del sistema como se mostró en la sección 1.2.3. Un ejemplo bastante conocido de teoría de norma, es la transformación encontrada en los potenciales de electrodinámica clásica, a saber $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \xi$. Esta transformación no modifica las ecuaciones de movimiento del sistema, $\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0$, con $F^{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$ ¹⁵. Para este caso, se pueden hallar las transformaciones fácilmente, pero para teorías más complicadas las transformaciones no son evidentes.

En las siguientes secciones se mostrará que los generadores de las transformaciones de norma son combinaciones lineales de unas constricciones llamadas constricciones de primera clase.

1.3.1. Constricciones de primera y segunda clase

El conjunto de constricciones φ^μ contiene todas las constricciones que posee el sistema, sin embargo, no siempre estas transformaciones son las adecuadas para describir la evolución del sistema. Para ello definamos las constricciones de primera y segunda clase.

Definición 1.3 Sea F una funcional del espacio fase. Diremos que es de primera clase si

$$\{F, \varphi^\mu\} \stackrel{S}{\approx} 0, \quad (1.72)$$

con $\mu = 1, \dots, L$.

Si F no cumple con la condición anterior se dirá que es de segunda clase. En la literatura se denota a las constricciones de primera y segunda clase como γ y χ respectivamente.

Notar que por la proposición 1.1, las constricciones de primera clase toman la forma

$$\{F, \varphi^\mu\} = f^\rho{}_\rho \varphi^\mu \stackrel{S}{\approx} 0. \quad (1.73)$$

Ahora demostraremos tres resultados muy importantes.

Proposición 1.2 Las constricciones $\varphi^c = V_\mu^c \varphi^\mu$ definidas en la ecuación (1.69), son de primera clase.

Prueba.

$$\begin{aligned} \{\varphi^c, \varphi^\mu\} &= \{V_\nu^c \varphi^\nu, \varphi^\mu\} \\ &= V_\nu^c \{\varphi^\nu, \varphi^\mu\} + \{V_\nu^c, \varphi^\mu\} \varphi^\nu \\ &\stackrel{S}{\approx} V_\nu^c \{\varphi^\nu, \varphi^\mu\}, \end{aligned} \quad (1.74)$$

donde se usó la regla de Leibniz (propiedad [III] de la sección B.3.1) en la segunda igualdad y en la tercera igualdad se usó la igualdad débil de las constricciones φ^μ . Dado que V_ν^c es la solución de la ecuación (1.65), podemos concluir que

¹⁵Véase [21], Parte 1, Capítulo 5 y Parte 1, Capítulo 6

$$\{\varphi^c, \varphi^\mu\} \stackrel{S}{\approx} 0. \quad (1.75)$$

Proposición 1.3 *El Hamiltoniano $\mathcal{H}' = \mathcal{H}_C + U_\mu \varphi^\mu$ definido en la ecuación (1.70) es de primera clase.*

Prueba.

Partiendo de (1.63) y sustituyendo (1.64)

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{S}{\approx} \{\varphi^\nu, \mathcal{H}_C\} + u_\mu \{\varphi^\nu, \varphi^\mu\} \\ &= \{\varphi^\nu, \mathcal{H}_C\} + U_\mu \{\varphi^\nu, \varphi^\mu\} + V_\mu \{\varphi^\nu, \varphi^\mu\}, \end{aligned} \quad (1.76)$$

usando (1.65)

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{S}{\approx} \{\varphi^\nu, \mathcal{H}_C\} + U_\mu \{\varphi^\nu, \varphi^\mu\} \\ &= \{\varphi^\nu, \mathcal{H}_C\} + \{\varphi^\nu, U_\mu \varphi^\mu\} - \{\varphi^\nu, U_\mu\} \varphi^\mu \\ &\stackrel{S}{\approx} \{\varphi^\nu, \mathcal{H}_C\} + \{\varphi^\nu, U_\mu \varphi^\mu\} \\ &= \{\varphi^\nu, \mathcal{H}'\}, \end{aligned} \quad (1.77)$$

donde se usó la la regla de Leibniz (propiedad [III] de la sección B.3.1) en la segunda igualdad, en la tercera igualdad se usó la igualdad débil de las constricciones φ^μ y en la cuarta igualdad se usó la linealidad (propiedad [I] de la sección B.3.1). Con esto, damos por terminada la prueba.

De estos dos resultados, es evidente que \mathcal{H}_T definido en la sección 1.2.4, está conformado de sólo constricciones de primera clase.

Proposición 1.4 *El paréntesis de Poisson de dos cantidades de primera clase es una cantidad de primera clase.*

Prueba

Sean F y G dos cantidades de primera clase, $\{F, \varphi^\mu\} = f^\rho{}_\rho \varphi^\mu$ y $\{G, \varphi^\mu\} = g^\rho{}_\rho \varphi^\mu$. Consideremos $\{\{F, G\}, \varphi^\mu\}$ y usemos la identidad de Jacobi, propiedad [IV] de la sección B.3.1

$$\begin{aligned} \{\{F, G\}, \varphi^\mu\} &= \{\{F, \varphi^\mu\}, G\} - \{\{G, \varphi^\mu\}, F\} \\ &= \{f^\rho{}_\rho \varphi^\mu, G\} - \{g^\rho{}_\rho \varphi^\mu, F\} \\ &= f^\rho{}_\rho \{\varphi^\mu, G\} + \{f^\rho{}_\rho, G\} \varphi^\mu - g^\rho{}_\rho \{\varphi^\mu, F\} - \{g^\rho{}_\rho, F\} \varphi^\mu \\ &= (f^\mu{}_\rho g^\rho{}_\alpha - g^\mu{}_\rho f^\rho{}_\alpha) \varphi^\alpha + (\{f^\mu{}_\rho, G\} - \{g^\mu{}_\rho, F\}) \varphi^\mu \stackrel{S}{\approx} 0, \end{aligned} \quad (1.78)$$

donde en la tercera igualdad se usó la regla de Leibniz (propiedad [III] de la sección B.3.1) y en última igualdad se hizo uso de la proposición 1.1 de la sección 1.2.2.

1.3.2. Separación de constricciones de primera y segunda clase

Determinar si una constricción es de primera clase o no, no siempre es una tarea sencilla, pues podría tomarse cada una de las constricciones primarias y secundarias y calcular los paréntesis entre cada una de ellas y determinar cuáles son de primera y cuáles de segunda, sin embargo esto no es correcto, pues en general éstas son combinaciones de constricciones primarias y secundarias¹⁶.

Proposición 1.5 *Sea $\{\varphi^\mu\}$ el conjunto de constricciones primarias y secundarias de un sistema singular, y sea la matriz $\mathcal{W} = \{\varphi^\alpha, \varphi^\beta\}$ con $\varphi^\alpha, \varphi^\beta \in \{\varphi^\mu\}$ tal que $\det(\mathcal{W}) = 0$, entonces el sistema tiene al menos una constricción de primera clase.*

Prueba.

Dado que $\det(\mathcal{W}) = 0$, el rango de \mathcal{W} es $R < L = \text{dimension de } \mathcal{W}$ y la nulidad es $L - R$, entonces existen $L - R$ vectores nulos ω^i tales que

$$\omega_\alpha^i \{\varphi^\alpha, \varphi^\beta\} \stackrel{S}{\approx} 0, \quad (1.79)$$

usando las propiedades del paréntesis de Poisson y el hecho de que $\varphi^\alpha \stackrel{S}{\approx} 0$, se obtiene que

$$\{\omega_\alpha^i \varphi^\alpha, \varphi^\beta\} \stackrel{S}{\approx} 0, \quad (1.80)$$

esta ecuación cumple con la definición (1.72), por lo tanto

$$\omega_\alpha^i \varphi^\alpha, \quad (1.81)$$

con $i = 1, \dots, L - R$ son constricciones de primera clase¹⁷.

Notar que al demostrar que existen $L - R$ constricciones de primera clase, también se demostró que existen R constricciones de segunda clase.

Dado que se pueden redefinir las constricciones φ^α como $A_\beta^\alpha \varphi^\beta$ ¹⁸ con A_β^α una matriz anti-simétrica e invertible, es posible hacer que la matriz \mathcal{W} tome la forma¹⁹

¹⁶Se debe aclarar que en muchos libros y artículos es común encontrar ejemplos donde no sea necesario el proceso de separación, por lo que se puede llevar una falsa impresión de esta parte del formalismo.

¹⁷Notar que las constricciones no pueden ser de otra forma, pues este conjunto ya contiene todas las constricciones de primera clase.

¹⁸Esto es posible porque siempre podemos cambiar de sistema coordenado, ver Apéndice A.

¹⁹Algunas veces es más fácil hacer esta redefinición varias veces hasta obtener la matriz deseada.

$$\mathcal{W} = \begin{array}{c} \varphi^0(x) \\ \varphi^1(x) \\ \vdots \\ \varphi^L(x) \end{array} \begin{pmatrix} \varphi^0(y) & \varphi^1(y) & \dots & \varphi^L(y) \\ \{\varphi^0, \varphi^0\} & \{\varphi^0, \varphi^1\} & \dots & \{\varphi^0, \varphi^L\} \\ \{\varphi^1, \varphi^0\} & \{\varphi^1, \varphi^1\} & \dots & \{\varphi^1, \varphi^L\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{\varphi^L, \varphi^0\} & \{\varphi^L, \varphi^1\} & \dots & \{\varphi^L, \varphi^L\} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \gamma^i(x) \\ \chi^\alpha(x) \end{array} \begin{pmatrix} \gamma^j(y) & \chi^\beta(y) \\ 0 & 0 \\ 0 & C^{\alpha\beta} \end{pmatrix},$$

donde

$$C^{\alpha\beta} \equiv \{\chi^\alpha(x), \chi^\beta(y)\}, \quad (1.82)$$

es antisimétrica e invertible²⁰. Es importante observar que la dimensión de C es par²¹.

Con esto se han separado las constricciones de primera clase de las de segunda y además se han expresado en una matriz muy simple, sin embargo, esta matriz no es única, pues es posible hacer otra redefinición con la que se obtenga el mismo resultado.

1.3.3. Transformaciones de norma

Una vez encontrada la subvariedad donde evoluciona el sistema, podemos elegir cualquier terna $(\Phi's, \partial_i\Phi's, P's)$ sobre la superficie, la cual representa un estado físico del sistema, sin embargo, en las ecuaciones de movimiento (1.71) es necesario especificar los coeficientes arbitrarios $v's$, por lo que no existe una única terna $(\Phi's, \partial_i\Phi's, P's)$ que especifique algún estado posterior al estado inicial. De esta forma, hay un conjunto de ternas $(\Phi's, \partial_i\Phi's, P's)$ que corresponden al mismo estado (ver Figura 1.1) y entonces cobra relevancia saber identificar dichos estados.

Para identificar el conjunto de estados equivalentes entre sí, hagamos una expansión en serie de Taylor de $F = F(\Phi, \partial_i\Phi, P)$ y observemos sólo la parte temporal hasta derivadas de primer orden²².

²⁰Es invertible porque la dimensión de C es igual al rango de \mathcal{W}

²¹Si R fuese impar, entonces $\det(C) = \det(C^t) = \det(-C) = \det(-\mathbb{I})\det(C) = (-1)^R\det(C)$, pero R es impar, entonces $\det(C) = -\det(C) \iff \det(C) = 0$, ¡pero eso contradice que sea invertible!. Es importante comentar que este resultado es sólo para sistemas bosónicos.

²²El símbolo \cong denota aproximación, mientras que el símbolo $\stackrel{S}{\approx}$ denota igualdad sobre la superficie de constricciones.

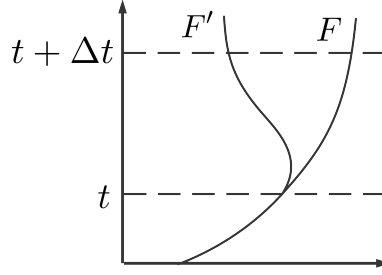


Figura 1.1: transformación de norma sobre la superficie de constricciones.

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \quad F(t + \delta t) &\cong F(t) + \dot{F}\delta t \\
 &\stackrel{S}{\approx} F(t) + \{F, \mathcal{H}_T\}\delta t \\
 &= F(t) + \{F, \mathcal{H}'\}\delta t + v_c\{F, \varphi^c\}\delta t,
 \end{aligned} \tag{1.83}$$

donde se usó la ecuación (1.71) en la segunda y tercer igualdad. Luego, si consideramos otra función F' que difiere de F solo en los coeficientes v_c por v'_c , es decir, $F'(t + \delta t) = F(t) + \{F, \mathcal{H}'\}\delta t + v'_c\{F, \varphi^c\}\delta t$, y luego se comparan, obtenemos las transformaciones buscadas, es decir

$$\delta F(t + \delta t) \equiv F(t + \delta t) - F'(t + \delta t) = \delta t(v_c - v'_c)\{F, \varphi^c\}, \tag{1.84}$$

$$\delta F(t + \delta t) = \epsilon_c\{F, \varphi^c\} \stackrel{S}{\approx} \{F, \epsilon_c\varphi^c\}, \tag{1.85}$$

con

$$\epsilon_c \equiv \delta t(v_c - v'_c). \tag{1.86}$$

Estas transformaciones se llaman *transformaciones de norma*, las cuales no modifican el estado físico del sistema y a las funcionales

$$\epsilon_c\varphi^c, \tag{1.87}$$

se les llama *generadores de norma*.

Es relevante mencionar que en principio los coeficientes v' 's dependen de Φ 's, $\partial_i\Phi$'s, P 's y t , sin embargo, regularmente se usa que dependen únicamente del tiempo.

Las constricciones de primera clase están muy relacionadas con las transformaciones de norma. Recapitemos los resultados. Por la proposición 1.2, sabemos que ϕ^c son constricciones de primera clase y por la proposición 1.4, el paréntesis de dos constricciones de primera clase,

también es de primera clase, en particular, si φ^μ y φ^ν son constricciones de primera clase, entonces $\{\varphi^\mu, \varphi^\nu\}$ es primera de clase. Se puede demostrar que $\{\varphi^\mu, \varphi^\nu\}$ genera transformaciones de norma²³

$$\delta F = \epsilon_\mu \eta_\nu \{F, \{\varphi^\mu, \varphi^\nu\}\}. \quad (1.88)$$

Se debe mencionar que existen constricciones sin relevancia física donde se muestra que no todas las constricciones secundarias de primera clase generan transformaciones de norma²⁴ y precisamente por ello se tomará como cierta la conjetura de Dirac (1991), que dice que **la evolución temporal de constricciones primarias de primera clase genera constricciones secundarias de primera clase.**

1.3.4. Paréntesis de Dirac

La utilidad de las constricciones de segunda clase radica en definir el paréntesis de Dirac y trabajar la evolución del sistema con este nuevo paréntesis como se verá en la siguiente sección. Este paréntesis se definió en la ecuación (1.54), sin embargo, la forma en que se definió este paréntesis no puede hacerse exactamente igual si existen constricciones de primera clase, en dado caso, se toman en cuenta sólo las constricciones de segunda clase.

Dado que la matriz $C^{\alpha\beta}$ (1.82) es invertible, definimos el paréntesis de Dirac como

Definición 1.4 Sean F y G dos funcionales del espacio fase, definimos el paréntesis de Dirac como

$$\{F, G\}_D \equiv \{F, G\} - \{F, \chi^\alpha\} C_{\alpha\beta} \{\chi^\beta, G\}. \quad (1.89)$$

donde $C_{\alpha\beta}$ es la matriz inversa de $C^{\alpha\beta}$ definida en la ecuación (1.82).

Este paréntesis tiene las siguientes propiedades²⁵

²³La demostración consiste en sustituir cuatro veces seguidas transformaciones de norma de la siguiente manera

- $F_1 \equiv F + \epsilon_a \{F, \varphi^a\}$.
- $F_2 \equiv F_1 + \eta_b \{F_1, \varphi^b\}$.
- $F_3 \equiv F_2 - \epsilon_c \{F_2, \varphi^c\}$.
- $F_4 \equiv F_3 - \eta_d \{F_3, \varphi^d\}$.

Despreciando terminos cuadráticos en ϵ y η , se puede escribir F_4 como

$$F_4 = F + \eta_a \epsilon_b \{F, \{\varphi^a, \varphi^b\}\}.$$

De esta forma

$$\delta F_4 = (\eta_a \epsilon_b - \eta'_a \epsilon'_b) \{F_4, \{\varphi^a, \varphi^b\}\}.$$

²⁴Véase [6] Capítulo 1, pag. 19.

²⁵Estas propiedades se pueden probar fácilmente directamente de la definición.

[I] Linealidad: $\{E, \alpha F + \beta G\}_D = \alpha\{E, F\}_D + \beta\{E, G\}_D$.

[II] Antisimetría: $\{E, F\}_D = -\{F, E\}_D$.

[III] Regla de Leibniz: $\{E, FG\} = \{E, F\}_D G + F\{E, G\}_D$.

[IV] Identidad de Jacobi: $\{E, \{F, G\}_D\}_D + \{G, \{E, F\}_D\}_D + \{F, \{G, E\}_D\}_D = 0$.

que son las propiedades que cumple el paréntesis de Poisson. Además cumple con las siguientes tres propiedades más

[V] Para toda F : $\{\chi^\alpha, F\}_D = 0$.

[VI] Para G primera clase y cualquier F : $\{F, G\}_D \stackrel{S}{\approx} \{F, G\}$.

[VII] Para E y F primera clase y cualquier G : $\{G, \{E, F\}_D\}_D \stackrel{S}{\approx} \{G, \{E, F\}\}$.

1.3.5. Hamiltoniano extendido

Hasta ahora hemos tratado la evolución del sistema con el Hamiltoniano total, que aunque contiene todas las constricciones, no es el Hamiltoniano más útil para manejar con facilidad las simetrías de norma. Por esta razón definimos el *Hamiltoniano extendido* como

$$\mathcal{H}_E \equiv \mathcal{H} + u_{\bar{a}}\gamma^{\bar{a}}, \quad (1.90)$$

donde \mathcal{H} es un Hamiltoniano de primera clase que en general es diferente a \mathcal{H}' .

Notemos que $\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_C + u_{\bar{a}}\gamma^{\bar{a}} + \lambda_\alpha\chi^\alpha$, pues al hacer la separación se conservó la misma información. Así, al exigir que las constricciones de segunda clase se conserven, podemos encontrar el valor de λ_α en términos de las variables canónicas

$$\begin{aligned} 0 \stackrel{S}{\approx} \dot{\chi}^\alpha &= \{\chi^\alpha, \mathcal{H}_E\} \\ &\stackrel{S}{\approx} \{\chi^\alpha, \mathcal{H}_C\} + u_{\bar{a}}\{\chi^\alpha, \gamma^{\bar{a}}\} + \lambda_\beta\{\chi^\alpha, \chi^\beta\} \\ &\stackrel{S}{\approx} \{\chi^\alpha, \mathcal{H}_C\} + \lambda_\beta C^{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (1.91)$$

donde el segundo término de la segunda igualdad es cero por haber constricciones de primera clase en el paréntesis y $C^{\alpha\beta}$ es la matriz que aparece en la ecuación (1.82), así

$$\Lambda_\beta \equiv \lambda_\beta(\Phi_a, \partial_i\Phi_a, P^a) \stackrel{S}{\approx} \{\chi^\alpha, \mathcal{H}_C\} C^{\alpha\beta}. \quad (1.92)$$

Definimos

$$\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_C + \Lambda_\alpha\chi^\alpha, \quad (1.93)$$

el cual es de primera clase como se verá a continuación

Proposición 1.6 *El Hamiltoniano \mathcal{H} es de primera clase.*

Prueba.

$$\begin{aligned}
0 \stackrel{S}{\approx} \dot{\phi}^\mu &= \{\phi^\mu, \mathcal{H}_T\} \\
&\stackrel{S}{\approx} \{\phi^\alpha, \mathcal{H}_C\} + u_{\bar{a}}\{\phi^\alpha, \gamma^{\bar{a}}\} + \Lambda_\beta\{\phi^\alpha, \chi^\beta\} \\
&\stackrel{S}{\approx} \{\phi^\alpha, \mathcal{H}_C\} + \Lambda_\beta\{\phi^\alpha, \chi^\beta\} \\
&= \{\phi^\alpha, \mathcal{H}_C\} + \{\phi^\alpha, \Lambda_\beta\chi^\beta\} - \{\phi^\mu, \Lambda_\beta\}\chi^\beta \\
&\stackrel{S}{\approx} \{\phi^\alpha, \mathcal{H}_C\} + \{\phi^\alpha, \Lambda_\beta\chi^\beta\} \\
&= \{\phi^\mu, \mathcal{H}\}, \tag{1.94}
\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad se usó la igualdad débil de las constricciones $\gamma^{\bar{a}}$ y χ^β , en la tercera igualdad se usó que el paréntesis de Poisson de constricciones $\gamma^{\bar{a}}$ con cualquier funcional es cero, en la cuarta igualdad se hizo uso de la regla de Leibniz (propiedad [III] de la sección B.3.1), en la quinta igualdad se volvió a usar la igualdad débil de las constricciones χ^β .

Entonces podemos ver que $\mathcal{H}_E = \mathcal{H}_C + \Lambda_\alpha\chi^\alpha + u_{\bar{a}}\gamma^{\bar{a}}$, es un Hamiltoniano de primera clase. De esta forma, las ecuaciones de movimiento se pueden reescribir como

$$\dot{F} = \{F, \mathcal{H}_E\}. \tag{1.95}$$

Dado que \mathcal{H}_E es de primera clase y usando la propiedad [VI] de la sección 1.3.4

$$\dot{F} \stackrel{S}{\approx} \{F, \mathcal{H}_E\}_D. \tag{1.96}$$

De esta forma, podemos trabajar con el paréntesis de Dirac la evolución del sistema. Otra propiedad importante del Hamiltoniano extendido es que su acción es un invariante de norma. La acción se define como

$$S_E(\Phi_a, \partial_i\Phi_a, P^a, \Lambda_\alpha, u_{\bar{a}}) = \int_D (\dot{\Phi}_a P^a - \mathcal{H}_C - \Lambda_\alpha\chi^\alpha - u_{\bar{a}}\gamma^{\bar{a}})d^4x, \tag{1.97}$$

del cual se pueden deducir las ecuaciones de movimiento a partir del principio variacional. Esta acción es de interés para nosotros pues es un invariante de norma, salvo por términos de frontera cuando las restricciones de primera clase son cuadráticas o de orden superior en los momentos o no son homogéneas de primer orden en los momentos, lo cual significa que

$$\delta S_E \stackrel{S}{\approx} 0, \tag{1.98}$$

esto se puede ver al variar los multiplicadores de Lagrange

$$\delta u_a = \dot{\epsilon}_a + u_c\epsilon_b C^{bc}_a + \Lambda_\alpha\epsilon_b C^{b\alpha}_a - \epsilon_b V^b_a, \tag{1.99}$$

$$\delta \Lambda_\alpha = u_c\epsilon_b T^{bc}_{\alpha\beta}\chi^\beta - \epsilon_b V^b_{\alpha\beta}\chi^\beta + \Lambda_\beta\epsilon_b C^{b\beta}_\alpha, \tag{1.100}$$

donde los coeficientes son los coeficientes encontrados en las ecuaciones (1.103) de la siguiente sección.

1.3.6. Álgebra entre transformaciones de norma

Los resultados de esta sección no se demuestran, simplemente se enunciarán²⁶. Por la ecuación (1.85), las transformaciones de norma tienen la forma

$$\delta_\epsilon y^i = R_{(0)\alpha}^i \epsilon^\alpha + R_{(1)\alpha}^i \dot{\epsilon}^\alpha + \cdots + R_{(s)\alpha}^i \frac{d^s \epsilon^\alpha}{dt^s} \equiv R_\alpha^i \epsilon^\alpha, \quad (1.101)$$

con y^i las variables que describen alguna acción S , los coeficientes $R_{(0)\alpha}^i, R_{(1)\alpha}^i, \dots, R_{(s)\alpha}^i$ dependen de y^i y sus derivadas, y ϵ^α son funciones arbitrarias del tiempo.

Dadas dos transformaciones de norma $\delta_\epsilon y^i$ y $\delta_\eta y^i$, definiendo $\{\delta_\epsilon, \delta_\eta\} y^i \equiv \delta_\epsilon(\delta_\eta y^i) - \delta_\eta(\delta_\epsilon y^i)$, es fácil mostrar que

▪

$$\{\delta_\epsilon, \delta_\eta\} y^i = \delta_\lambda y^i.$$

▪

$$\{\mu\delta_\epsilon + \nu\delta_\eta, \delta_\lambda\} y^i = \mu\{\delta_\epsilon, \delta_\lambda\} y^i + \nu\{\delta_\eta, \delta_\lambda\} y^i.$$

▪

$$\{\delta_\lambda, \{\delta_\epsilon, \delta_\eta\}\} y^i + \{\delta_\eta, \{\delta_\lambda, \delta_\epsilon\}\} y^i + \{\delta_\epsilon, \{\delta_\eta, \delta_\lambda\}\} y^i = 0.$$

Lo anterior claramente forma un álgebra, además es bien sabido que transformaciones que dejan algún objeto matemático invariante, obedecen los axiomas de grupo, por lo tanto, existe un grupo de Lie y un álgebra de Lie en las transformaciones de norma.

Se puede demostrar que existen transformaciones de norma de la forma $\delta_\epsilon y^i = (R_\alpha^i M_\alpha^\beta) \epsilon^\alpha$, con lo cual se puede concluir que

$$\delta y^i = \mu^\alpha R_\alpha^i + M^{ij} \frac{\delta S}{\delta y^j}, \quad (1.102)$$

donde $M^{ij} = -M^{ji}$.

En términos de constricciones de primera y segunda clase, podemos expresar el resultado anterior como

$$\begin{aligned} \{\gamma_a, \gamma_b\} &= C_{ab}{}^c \gamma_c + T_{ab}^{\alpha\beta} \chi_\alpha \chi_\beta \\ \{\gamma_a, \chi_\alpha\} &= C_{a\alpha}^b \gamma_b + C_{a\alpha}^\beta \chi_\beta \\ \{H, \gamma_a\} &= V_a{}^b \gamma_b + V_a^{\alpha\beta} \chi_\alpha \chi_\beta \\ \{H, \chi_\alpha\} &= V_\alpha^b \gamma_b + V_\alpha^\beta \chi_\beta. \end{aligned} \quad (1.103)$$

²⁶Para ello consulte la referencia [6], Capítulo 3.

1.3.7. Fijación de norma

Es posible eliminar la arbitrariedad encontrada en las ecuaciones de movimiento al imponer ciertas condiciones adecuadas a las transformaciones de norma para que haya una correspondencia uno a uno entre los estados y las variables canónicas, las cuales son permisibles porque no afectan al estado físico del sistema. A este proceso se le conoce como *fijación de norma*.

Antes de proseguir al algoritmo para fijar la norma, nos será útil introducir el concepto de *órbitas de norma*. Una órbita de norma es una subvariedad de la superficie de constricciones donde cada punto es físicamente equivalente, es decir, una órbita de norma es el conjunto de estados físicos equivalentes.

La forma de imponer estas condiciones en muchas ocasiones no es trivial, pues estas condiciones deben ser de tal manera que en cada órbita de norma toque uno y solo un punto a la vez. Además, el formalismo no proporciona dichas condiciones, por lo que se deben introducir a mano. En este trabajo, no es necesario fijar la norma en el formalismo de Dirac, sin embargo, sí lo es para el formalismo de Faddeev-Jackiw (FJ) como se verá en el siguiente capítulo, no obstante, las condiciones de fijación de norma en FJ no son las mismas.

Sean

$$\mathcal{C}^b(\Phi_a, \partial_i \Phi_a, P^a) \stackrel{S_G}{\approx} 0, \quad (1.104)$$

donde el superíndice b corre sobre el número de constricciones de primera clase²⁷ y S_G es una nueva superficie que reduce el tamaño del espacio fase, al que se le llama *espacio fase físico*. \mathcal{C}^b debe cumplir que

$$\epsilon_a \{\mathcal{C}^b, \gamma^a\} \stackrel{S}{\approx} 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon_a = 0, \quad (1.105)$$

lo cual significa que no hay generadores de norma y que

$$\det\{\mathcal{C}^b, \gamma^a\} \neq 0, \quad (1.106)$$

entonces, \mathcal{C}^b es invertible y no es débilmente cero, o lo que es lo mismo, \mathcal{C}^b son constricciones de segunda clase. De esta forma tendremos que redefinir el paréntesis de Dirac que incluya estas nuevas constricciones²⁸.

1.3.8. Grados de libertad

De manera similar a como se hace el conteo de grados de libertad en sistemas de partículas en mecánica clásica de sistemas regulares, el número de grados de libertad para teorías singulares

²⁷El número de constricciones de primera clase y el número de condiciones debe ser el mismo, pues las constricciones son linealmente independientes.

²⁸Es posible que \mathcal{C}^b tenga menos elementos que γ^a , entonces queda cierta arbitrariedad, que se le llama norma residual.

es el número total de coordenadas generalizadas menos el número de constricciones. Dicho esto, es razonable que el número de grados de libertad sea

$$GL = \frac{1}{2} \left[\left(\begin{array}{c} \text{Número de} \\ \text{variables} \\ \text{canónicas} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Número de} \\ \text{constricciones de} \\ \text{segunda clase} \end{array} \right) - 2 \left(\begin{array}{c} \text{Número de} \\ \text{constricciones de} \\ \text{primera clase} \end{array} \right) \right]. \quad (1.107)$$

El factor $\frac{1}{2}$ es debido a que se consideran coordenadas generalizadas solo a las Φ 's y no a sus momentos P 's, y el factor 2 es porque las constricciones de primera clase aparecen como generadores de norma y como restricciones en sí mismas.

Si al hacer el conteo de grados de libertad obtenemos cero, se dice que la teoría es topológica. En esta tesis se trabajará con una teoría de este tipo.

1.3.9. Observable

Para sistemas de partículas en mecánica clásica de sistemas regulares, los observables son aquellas cantidades que pueden expresarse en términos de variables del espacio fase, sin embargo, el equivalente para nosotros será el siguiente

Definición 1.5 Sea F una funcional del espacio fase, diremos que es un observable si

$$\{F, \gamma^a\}_D \stackrel{S}{\approx} 0. \quad (1.108)$$

Por último comentemos dos cosas. Primero, el significado físico de estas funcionales va más allá del propósito de esta tesis. Segundo, que llegados a este punto del formalismo, se procede a cuantizar por el método más conveniente, sin embargo, esto también excede los propósitos de esta tesis.

Capítulo 2

Formalismo de Faddeev-Jackiw

A diferencia del formalismo de Dirac discutido anteriormente, el formalismo de FJ tiene como marco de trabajo el Lagrangiano del sistema. Hay que mencionar que el formalismo desarrollado en el artículo original de FJ de 1988 [7], no es equivalente al formalismo de Dirac, por lo que se hizo una modificación a éste desarrollado por Leng Liao y Yong Chang Huang en 2007 [9], el cual sí coincide con el formalismo de Dirac. Este método tiene la virtud de no requerir de clasificación de constricciones en primera y segunda clase, lo cual es muy grato, pues la clasificación es una tarea difícil, además de que regularmente tiene un menor número de constricciones.

2.1. Ecuaciones de movimiento

Se busca que la Lagrangiana del sistema tenga la forma

$$\mathcal{L}^{(0)}\left(\xi, \dot{\xi}, \partial_i \xi\right) = a_A(\xi) \dot{\xi}^A - V^{(0)}(\xi, \partial_i \xi), \quad (2.1)$$

donde ξ es un símbolo abstracto que define nuevas variables que dependen de las variables originales, es decir $\xi = \xi(\Phi)$, a éstas nuevas variables se les llama variables simplécticas; la derivada ∂_i es una derivada espacial de la variedad \mathcal{M} , los índices A, B, C, \dots corren de $1, \dots, n$, donde n es el número de variables simplécticas y a $V^{(0)}$ se le llama potencial simpléctico.

Si la Lagrangiana tiene derivadas de orden superior a uno, es posible llevarla a la forma (2.1) a través del método de Orstrogradski [22].

Aplicando las ecuaciones de E-L dadas por la ecuación (1.4)

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \xi^B)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi^B} &= 0 \\ \Leftrightarrow \partial_0(a_A) \delta_B^A - \partial_i \left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial (\partial_i \xi^B)} \right) - \frac{\partial a_A}{\partial \xi^B} \dot{\xi}^A + \frac{\partial V^{(0)}}{\partial \xi^B} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad \frac{\partial a_B}{\partial \xi^A} \dot{\xi}^A - \frac{\partial a_A}{\partial \xi^B} \dot{\xi}^A + \frac{\partial V^{(0)}}{\partial \xi^B} - \partial_i \left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial (\partial_i \xi^B)} \right) &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad \left(\frac{\delta a_A}{\delta \xi^B} - \frac{\delta a_B}{\delta \xi^A} \right) \dot{\xi}^A &= \frac{\delta V^{(0)}}{\delta \xi^B}, \quad (2.2)
\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad se separó las derivadas espacial y temporal del primer término de la primera igualdad, se reordenaron los términos y se usó regla de la cadena en la tercera igualdad y finalmente, se cambiaron las derivadas parciales por derivadas variacionales (ecuaciones (B.19) y (B.20) de la sección B.2) en la última igualdad.

Definiendo a la matriz simpléctica como

$$f_{BA}^{(0)} \equiv \frac{\delta a_A}{\delta \xi^B} - \frac{\delta a_B}{\delta \xi^A}, \quad (2.3)$$

la ecuación (2.2) toma la forma

$$f_{BA}^{(0)} \dot{\xi}^A = \frac{\delta V^{(0)}}{\delta \xi^B}, \quad (2.4)$$

notar que $f^{(0)}$ es antisimétrica.

Para el caso regular, $f^{(0)}$ es invertible y entonces las ecuaciones de movimiento son

$$\dot{\xi}^A = \left(f_{BA}^{(0)} \right)^{-1} \frac{\partial V^{(0)}}{\partial \xi^B}, \quad (2.5)$$

las cuales son las ecuaciones de Hamilton en forma simpléctica¹.

A partir de la matriz inversa $(f^{(0)})^{-1}$, definimos el paréntesis generalizado de FJ como

$$\left(f_{AB}^{(0)} \right)^{-1} \equiv \{ \xi^A, \xi^B \}_{FJ}. \quad (2.6)$$

Ahora proseguimos a demostrar su equivalencia con el paréntesis de Dirac dado por la ecuación (1.89) definido en el capítulo anterior.

Proposición 2.1 *Sea $f^{(0)}$ invertible, entonces*

$$\left(f_{AB}^{(0)} \right)^{-1} = \{ \xi^A, \xi^B \}_D. \quad (2.7)$$

esto es, $(f^{(0)})^{-1}$ es igual al paréntesis de Dirac entre las variables simplécticas ξ^A .

Prueba.

Partiendo de la ecuación (2.1), obtenemos los momentos generalizados

¹Véase [17], Capítulo. 9, Sec. 4 y Sec. 5.

$$P^A \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}^A} = a_A(\xi) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^A = a_A(\xi) - P^A = 0. \quad (2.8)$$

Si existe $\{\varphi^A, \varphi^B\}^{-1}$, entonces

$$\begin{aligned} \{\varphi^A, \varphi^B\}^{-1} &= \{a_A - P^A, a_B - P^B\}^{-1} \\ &= \{a_A, a_B\}^{-1} - \{P^A, a_B\}^{-1} - \{a_A, P^B\}^{-1} + \{P^A, P^B\}^{-1} \\ &= \{a_B, P^A\}^{-1} - \{a_A, P^B\}^{-1} \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde se usó la regla de Leibniz (propiedad [I] de la sección B.3.1) en la segunda igualdad, en la tercera igualdad se usó la antisimetría (propiedad [II] de la sección B.3.1) y las propiedades [I] y [III] de la sección B.3. Luego, usando las propiedad [VIII] de la sección B.3, obtenemos que

$$\{\varphi^A, \varphi^B\}^{-1} = \frac{\delta a_B}{\delta \xi^A} - \frac{\delta a_A}{\delta \xi^B} = \left(f_{AB}^{(0)}\right)^{-1}. \quad (2.10)$$

Partiendo de la definición del paréntesis de Dirac (1.89)

$$\begin{aligned} \{\xi^A, \xi^B\}_D &= \{\xi^A, \xi^B\} - \{\xi^A, \varphi^C\} \left(f_{CD}^{(0)}\right)^{-1} \{\varphi^D, \xi^B\} \\ &= -(\{\xi^A, a_C\} - \{\xi^A, P^C\}) \left(f_{CD}^{(0)}\right)^{-1} (\{a_D, \xi^B\} - \{P^D, \xi^B\}) \\ &= \delta^{AC} \left(f_{CD}^{(0)}\right)^{-1} \delta^{DB} \\ &= \left(f_{AB}^{(0)}\right)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde se usó linealidad (propiedad [I] de la sección B.3.1) y la propiedad [I] de la sección B.3 en la segunda igualdad, en la tercera igualdad se volvió a usar la propiedad [I] de la sección B.3 y también se empleó la propiedad [IV] de la sección B.3.

Si $\{\varphi^A, \varphi^B\}^{-1}$ no existe, se hace un proceso análogo a la separación de constricciones de primera y segunda clase y se procede de la misma manera en la prueba.

Una vez probada la equivalencia entre ambos paréntesis, la ecuación (2.5) se puede reescribir como

$$\dot{\xi}^A = \{\xi^B, \xi^A\}_{FJ} \frac{\partial V^{(0)}}{\partial \xi^B}. \quad (2.12)$$

Por otro lado, para nosotros el caso de interés es cuando la matriz simpléctica (2.3) no es invertible.

2.2. Lagrangiano singular

Si $f^{(0)}$ no es invertible, entonces existe un conjunto de vectores nulos $\mathcal{V}^{(0)\alpha}$ con $\alpha = 1, \dots, m_0$ el número de vectores nulos. Al contraerse por la izquierda la ecuación (2.4) con los vectores nulos, obtendremos funciones igualadas a cero, o lo que es lo mismo, constricciones inherentes al sistema definidas por

$$\Omega^{(0)\alpha} \equiv \mathcal{V}^{(0)\alpha A} \frac{\delta V^{(0)}}{\delta \xi^A} = 0. \quad (2.13)$$

Estas constricciones son llamadas *constricciones de FJ* y en general son distintas a las constricciones encontradas en el formalismo de Dirac. Es importante notar que al pedir que $f^{(0)}$ se contraiga con los vectores nulos $\mathcal{V}^{(0)\alpha A}$, $f^{(0)}$ deja de ser antisimétrica por la forma en que se deben renombrar los índices para poder contraerse.

Análogamente al formalismo de Dirac, exigimos que $\Omega^{(0)}$ se conserve en el tiempo, esto es

$$\dot{\Omega}^{(0)\alpha} = \frac{\delta \Omega^{(0)\alpha}}{\delta \xi^A} \dot{\xi}^A = 0. \quad (2.14)$$

Dado que $f^{(0)}$ no es invertible, la ecuación (2.4) contiene parte de la información sobre la evolución del sistema, que junto con la ecuación (2.14), se recopila toda la información del sistema encontrada hasta el momento. Esta información puede reescribirse en una sola ecuación como

$$f_{A'B}^{(1)} \dot{\xi}^B = Z_{A'}^{(1)}(\xi), \quad (2.15)$$

donde A' corre sobre el número de variables $(1, \dots, n)$ y el número de vectores nulos $(1, \dots, m_0)$, es decir, $A' = 1, \dots, n'$ con $n' = n + m_0$; y $f^{(1)}$, $Z^{(1)}$ están definidos como

$$f_{A'B}^{(1)} \equiv \begin{pmatrix} f_{AB}^{(0)} \\ \frac{\delta \Omega^{(0)}}{\delta \xi^A} \end{pmatrix}, \quad Z_{A'}^{(1)}(\xi) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\delta V^{(0)}}{\delta \xi^A} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Dado que $f^{(1)}$ no es una matriz cuadrada, $f^{(1)}$ no es invertible, por lo que tendremos un nuevo conjunto de vectores nulos $\mathcal{V}^{(1)\alpha'}$ con $\alpha' = 1, \dots, m_1$ y al contraerlos con la ecuación (2.15), obtenemos que

$$\Omega^{(1)\alpha'} = \mathcal{V}^{(1)\alpha' A'} Z_{A'}^{(1)} = 0. \quad (2.17)$$

Llegados a este punto existen dos posibilidades, por un lado tenemos que (2.17) son idénticamente cero y por otro que pueden aparecer nuevas constricciones. Si (2.17) es idénticamente cero, el sistema ya no tiene más constricciones, si no es así, debemos pedir consistencia a las nuevas constricciones

$$\dot{\Omega}^{(1)\alpha'} = \frac{\delta \Omega^{(1)\alpha'}}{\delta \xi^A} \dot{\xi}^A = 0. \quad (2.18)$$

Ahora la información completa del sistema queda descrita con las ecuaciones (2.17) y (2.18). De esta forma, podemos reescribir nuevamente toda la información en una sola ecuación que

se define de manera análoga a (2.15). Este algoritmo debe repetirse hasta ya no encontrar nuevas constricciones o hasta encontrar identidades.

Ahora definimos una Lagrangiana que contiene toda la información del sistema

$$\mathcal{L}^{(1)}\left(\xi, \dot{\xi}, \partial_i \xi, \gamma\right) \equiv a_A(\xi) \dot{\xi}^A - \dot{\gamma}_b \Omega^b - V(\xi, \partial_i \xi), \quad (2.19)$$

donde Ω son todas las constricciones halladas, $\dot{\gamma}$ son funcionales arbitrarios² que se les llama multiplicadores de Lagrange asociadas a las constricciones Ω 's que se hallaron, el índice $b = 1, \dots, m$ y $V(\xi) = V^{(0)}|_{\Omega^c=0}$.

Si consideramos las variables originales ξ 's y los multiplicadores de Lagrange γ 's, podemos definir un nuevo conjunto de variables simplécticas dado por

$$\tilde{\xi}^{\tilde{A}} \equiv (\xi^A, \gamma_b) \quad (2.20)$$

y una nueva matriz simpléctica

$$\tilde{f}_{\tilde{A}\tilde{B}} \equiv \frac{\delta \tilde{a}_{\tilde{B}}}{\delta \tilde{\xi}^{\tilde{A}}} - \frac{\delta \tilde{a}_{\tilde{A}}}{\delta \tilde{\xi}^{\tilde{B}}}, \quad (2.21)$$

con $\tilde{a}_{\tilde{A}} \equiv a_{\tilde{A}} + \gamma_b \frac{\delta \Omega^b}{\delta \xi^A}$, de tal forma que obtenemos

$$\tilde{f}_{\tilde{A}\tilde{B}} \tilde{\xi}^{\tilde{B}} = \frac{\delta \tilde{V}}{\delta \tilde{\xi}^{\tilde{A}}}. \quad (2.22)$$

Si (2.21) no es singular, calculamos su inversa y obtenemos los paréntesis de FJ, con lo que habremos terminado. Si (2.21) no es invertible, significa que la teoría tiene transformaciones de norma, las cuales se obtienen contrayendo \tilde{f} con sus vectores nulos como se muestra a continuación.

2.3. Simetría de norma

Proposición 2.2 Sea $\tilde{\mathcal{V}}^{\tilde{\beta}}$ los vectores nulos de \tilde{f} , entonces

$$\delta \tilde{\xi}^{\tilde{A}} = \epsilon_{\tilde{\beta}} \tilde{\mathcal{V}}^{\tilde{\beta}\tilde{A}}, \quad (2.23)$$

donde $\epsilon_{\tilde{\beta}}$ es un parámetro infinitesimal. A $\epsilon_{\tilde{\beta}} \tilde{\mathcal{V}}^{\tilde{\beta}\tilde{A}}$ se les llamará generadores de transformaciones de norma, las cuales dejan invariante a la acción de la Lagrangiana (2.19).

²Notar que no afecta en nada si vemos a los multiplicadores de Lagrange como la derivada temporal de otra función.

Prueba.

Usando las ecuaciones de movimiento en la acción de la Lagrangiana (2.19)

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{\mathcal{M}} \left(\tilde{f}_{AB}^{\tilde{\xi}} \dot{\tilde{\xi}}^B - \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{\xi}^A} \right) \delta \tilde{\xi}^{\tilde{A}} d^4x \\ &= \int_{\mathcal{M}} \left(\tilde{f}_{AB}^{\tilde{\xi}} \dot{\tilde{\xi}}^B - \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{\xi}^A} \right) \epsilon_{\beta}^{\tilde{\beta}\tilde{A}} \tilde{\mathcal{V}}^{\tilde{\beta}\tilde{A}} d^4x,\end{aligned}\quad (2.24)$$

dado que $\tilde{f}_{AB}^{\tilde{\xi}} \epsilon_{\beta}^{\tilde{\beta}\tilde{A}} \tilde{\mathcal{V}}^{\tilde{\beta}\tilde{A}} = 0$ y $\epsilon_{\beta}^{\tilde{\beta}\tilde{A}} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{\xi}^A}$. Luego, definimos nuevas constricciones dadas por

$$\tilde{\Omega}^{\tilde{\beta}} \equiv \tilde{\mathcal{V}}^{\tilde{\beta}\tilde{A}} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{\xi}^A} = 0, \quad (2.25)$$

entonces $\delta S = \epsilon_{\beta}^{\tilde{\beta}} \tilde{\Omega}^{\tilde{\beta}} = 0$. Esto es, la variación de la acción es una combinación de constricciones, las cuales están igualadas a cero. Con esto, damos por terminada la prueba.

Finalmente daremos las ecuaciones de movimiento para sistemas con simetría de norma, para ello es necesario fijar la norma adecuadamente³, lo cual se logra imponiendo condiciones sobre las variables simplécticas, de tal manera que al definir una nueva matriz simpléctica \tilde{f}' con estas condiciones, ésta sea invertible. Para que se vea reflejada dicha condición en el sistema, se agrega a la Lagrangiana en forma de otra restricción dada por $\dot{\gamma}'_c \zeta^c$

$$\mathcal{L}^{(2)} \left(\xi, \dot{\xi}, \partial_i \xi, \gamma, \gamma' \right) = a_A(\xi) \dot{\xi}^A - \dot{\gamma}_b \Omega^b + \dot{\gamma}'_c \zeta^c - V(\xi, \partial_i \xi) \quad (2.26)$$

Al tomar a los multiplicadores asociados a las nuevas constricciones como variables dinámicas, se vuelve a extender el conjunto de variables simplécticas, que ahora están dadas por

$$\tilde{\xi}'^{\tilde{A}} \equiv (\xi^A, \gamma_b, \gamma'_c) \quad (2.27)$$

con la cual podemos construir \tilde{f}' . Invirtiendo \tilde{f}' obtenemos el paréntesis generalizado de FJ, dado por

$$\left(\tilde{f}'_{A\tilde{B}} \right)^{-1} \equiv \{ \tilde{\xi}'^{\tilde{A}}, \tilde{\xi}'^{\tilde{B}} \}_{FJ} \quad (2.28)$$

³Véase Sección 1.3.7 para compararlo con el formalismo de Dirac.

Capítulo 3

Análisis de la acción de Husain

3.1. Equivalencia entre la acción de Palatini y la acción de Chern-Simons

Para obtener una equivalencia entre la teoría de Palatini y la teoría de Chern-Simons, es bien sabido que en una teoría de Chern-Simons en tres dimensiones con constante cosmológica, se pueden definir tres grupos de simetría dados por $SO(4)$, $ISO(3)$ y $SO(3,1)$, dependiendo del signo de la constante cosmológica, la cual puede ser positiva, cero o negativa respectivamente [23–25]. El álgebra de los generadores de los anteriores grupos está dada por

$$[J_i, J_j] = \epsilon_{ij}{}^k J_k, \quad [J_i, K_j] = \epsilon_{ij}{}^k K_k, \quad [K_i, K_j] = s\epsilon_{ij}{}^k J_k, \quad (3.1)$$

donde $s = -1, 0, 1$, correspondiendo al signo de la constante cosmológica, $i, j, k = 1, 2, 3$ y J_i, K_i son rotaciones y boosts respectivamente. Para construir una teoría Chern-Simons equivalente a la acción estándar de Einstein, elegimos el siguiente producto interno

$$\langle J_i, K_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \langle J_i, J_j \rangle = 0 = \langle K_i, K_j \rangle. \quad (3.2)$$

Del apéndice D, sabemos que la acción de Chern-Simons en tres dimensiones tiene la forma

$$S_{CS}[A] = \int_{\mathcal{M}} Tr \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right), \quad (3.3)$$

usando la acción (3.3), el álgebra entre los generadores J_i, K_i dados por las ecuaciones (3.1) y el producto interno definido por las ecuaciones (3.2), la acción de Chern-Simons se escribe como

$$S_{CS}[A] = \frac{1}{\sqrt{|\Lambda|}} \int_{\mathcal{M}} \epsilon^{\mu\nu\rho} \left(\langle A_\mu, \partial_\nu A_\rho \rangle + \frac{1}{3} \langle A_\mu, [A_\nu, A_\rho] \rangle \right), \quad (3.4)$$

donde la conexión en términos de los generadores K_i y J_i está dada por

$$A_\mu = \omega_{\mu i} J^i + \sqrt{|\Lambda|} e_{\mu i} K^i, \quad (3.5)$$

con ω la conexión interna y e la triada. Luego, usando la definición de conexión dada por la ecuación (3.5), y usando las relaciones (3.1) y (3.2), la acción (3.4) se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
S_{CS}[\omega, e] = \frac{1}{\sqrt{|\Lambda|}} \int_{\mathcal{M}} \epsilon^{\mu\nu\rho} \left(\sqrt{|\Lambda|} e_{\mu}^i \partial_{\nu} \omega_{\rho i} + \sqrt{|\Lambda|} \omega_{\mu}^i \partial_{\nu} e_{\rho i} + \frac{1}{3} \epsilon_{ijk} \left(\sqrt{|\Lambda|} \omega_{\mu}^i \omega_{\nu}^j e_{\rho}^k - \sqrt{|\Lambda|} \omega_{\mu}^i \omega_{\rho}^k e_{\nu}^j \right. \right. \\
\left. \left. + \sqrt{|\Lambda|} \omega_{\nu}^j \omega_{\rho}^k e_{\mu}^i + \sqrt{|\Lambda|} |\Lambda| s e_{\mu}^i e_{\nu}^j e_{\rho}^k \right) \right) d^3x, \tag{3.6}
\end{aligned}$$

renombrando índices y permutándolos, obtenemos

$$\begin{aligned}
S_{CS}[\omega, e] = \int_{\mathcal{M}} \left(\epsilon^{\mu\nu\rho} e_{\mu}^i \left(\partial_{\nu} \omega_{\rho i} - \partial_{\rho} \omega_{\nu i} + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega_{\nu}^j \omega_{\rho}^k \right) + \frac{1}{3} s |\Lambda| \epsilon^{\mu\nu\rho} \epsilon_{ijk} e_{\mu}^i e_{\nu}^j e_{\rho}^k \right) d^3x \\
+ \int_{\mathcal{M}} \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_{\nu} (e_{\rho}^i \omega_{\mu i}) d^3x, \tag{3.7}
\end{aligned}$$

identificando la curvatura como $F_{\nu\rho i} = \partial_{\nu} \omega_{\rho i} - \partial_{\rho} \omega_{\nu i} + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega_{\nu}^j \omega_{\rho}^k$ y eliminando el término de frontera, obtenemos la acción de Palatini en tres dimensiones con constante cosmológica

$$S_P[\omega, e] = \int_{\mathcal{M}} \epsilon^{\mu\nu\rho} \left(e_{\mu}^i F_{\nu\rho i} + \frac{1}{3} \epsilon_{ijk} s |\Lambda| e_{\mu}^i e_{\nu}^j e_{\rho}^k \right) d^3x. \tag{3.8}$$

De esta forma, podemos ver que eligiendo la conexión, el álgebra y el producto interno adecuados, obtenemos que la acción de Palatini es equivalente a una acción de Chern-Simons, salvo por un término de frontera. Sin embargo, en esta tesis trabajaremos con un álgebra y conexión diferentes, lo cual tiene como consecuencia una teoría carente de dinámica, tal como se verá posteriormente.

3.2. Análisis de Dirac

En esta sección se hace con detalle el análisis canónico de la acción propuesta por Husain [14]. Se parte de una teoría Chern-Simons en tres dimensiones (véase ecuación (D.11)), donde se toma como espacio interno a $ISO(2)$, el cual da una métrica de espacio-tiempo degenerada $(0, +, +)$, la cual causa problemas en la acción, pero puede removerse al definir un álgebra de Lie con generadores P_i y J , y una constante cosmológica λ diferente de cero. Estos generadores satisfacen las siguientes relaciones

$$[P_i, P_j] = \lambda \epsilon_{ij} J, \quad [J, P_i] = \epsilon_{ij} P^j, \tag{3.9}$$

y tienen una métrica interna $(+, +)$ para λ positivo y $(-, +)$ para λ negativo; sin embargo nosotros consideraremos el caso para λ positivo. Finalmente se define la conexión como $A_{\alpha} \equiv e_{\alpha}^i P^i + \omega_{\alpha} J$ y el producto interno dado por

$$\langle J, J \rangle = 1, \quad \langle P_i, P_j \rangle = \lambda \delta_{ij}, \quad \langle J, P_i \rangle = 0, \tag{3.10}$$

de esta forma, al sustituirlo en la acción (3.3), obtenemos la siguiente acción

$$S[e, \omega] = \int_{\mathcal{M}} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \left[\omega_{\alpha} \partial_{\beta} \omega_{\gamma} + \lambda e_{\alpha}^i \partial_{\beta} e_{\gamma}^i + \lambda \epsilon_{ij} e_{\alpha}^i e_{\beta}^j \omega_{\gamma} \right] d^3x, \tag{3.11}$$

donde e_α^i es la diada que representa al campo gravitacional, ω_α es una conexión del espacio interno, al cual se le relaciona con el campo de norma, x^μ son las coordenadas de la variedad tres dimensional \mathcal{M} . Denotaremos con letras griegas a los índices de espacio-tiempo, los cuales corren de 0 a 2 y con letras latinas de mitad del alfabeto a los índices del espacio interno que toman valores $i, j, k, \dots = 1, 2$. Los índices internos pueden subir y bajar usándose la métrica η con signatura $(+, +)$. El número de variables del sistema es nueve, seis para la tétrada e_α^i y tres para la conexión ω_α .

Antes de proseguir a descomponer la variedad, es importante mencionar que la teoría tiene la propiedad de tener una dirección degenerada, es decir, que la variedad tiene una dirección privilegiada dada por

$$n_a = \epsilon^{\alpha\beta\gamma} e_\beta^i e_\gamma^j \epsilon_{ij}. \quad (3.12)$$

Esto es importante, pues se tiene una teoría candidata a resolver el problema del tiempo, pero de ello se hablará al final de esta sección.

Regresado al análisis de Dirac, supondremos que la variedad se puede descomponer como 2+1, es decir, que tiene topología $\mathcal{M} = \Sigma \times R$. De esta forma, la parte espacial se ha separado de la parte temporal y podemos escribir la densidad Lagrangiana como

$$\mathcal{L} = \epsilon^{0ab} \omega_b \dot{\omega}_a + \lambda \epsilon^{0ab} e_b^i \dot{e}_{ai} + \omega_0 \{ 2\epsilon^{0ab} \partial_a \omega_b + \lambda \epsilon^{0ab} \epsilon_{ij} e_a^i e_b^j \} + e_0^i \{ 2\lambda \epsilon^{0ab} \partial_a e_{bi} + 2\lambda \epsilon^{0ab} \epsilon_{ij} e_a^j \omega_b \}, \quad (3.13)$$

donde $a, b, c = 1, 2$.

Debido a que las variables dinámicas de la acción (3.11) son e_α^i y ω_β , la matriz Hessiana está dada por

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu e_\alpha^i) \partial(\partial_\mu e_\beta^j)} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu e_\alpha^i) \partial(\partial_\mu \omega_\beta)} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \omega_\alpha) \partial(\partial_\mu \omega_\beta)} = 0, \quad (3.14)$$

y es idénticamente cero, por lo que esperamos nueve constricciones primarias. Para identificarlas, calculemos los momentos canónicos conjugados

$$\Pi_i^\alpha = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{e}_\alpha^i} = \lambda \epsilon^{0ab} e_{bi}, \quad P^\alpha = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\omega}_\alpha} = \epsilon^{0ab} \omega_b. \quad (3.15)$$

Entonces podemos identificar las siguientes nueve constricciones primarias

$$\begin{aligned} \phi_i^a & : \Pi_i^a - \lambda \epsilon^{0ab} e_{bi} \approx 0, \\ \phi^a & : P^a - \epsilon^{0ab} \omega_b \approx 0, \\ \phi_i^0 & : \Pi_i^0 \approx 0, \\ \phi^0 & : P^0 \approx 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

De esta forma, el Hamiltoniano canónico toma la forma

$$\mathcal{H}_c = - \int \{e_0^i (2\partial_a \Pi_i^a + 2\lambda \epsilon_{ij} e_a^j P^a) + \omega_0 (2\partial_a P^a + \epsilon_{ij} e_a^i \Pi^{aj})\} d^2x, \quad (3.17)$$

y el Hamiltoniano primario se define como

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_c + \int [\lambda_a^i \phi_i^a + \lambda_a \phi^a + u_0^i \phi_i^0 + u_0 \phi^0] d^2x, \quad (3.18)$$

donde $\lambda_a^i, \lambda_a, u_0^i, u_0$ son multiplicadores de Lagrange que fuerzan a las restricciones primarias. Los paréntesis fundamentales de Poisson están dados por

$$\{e_\alpha^i(x), \Pi_j^\beta(y)\} = \delta_j^i \delta_\alpha^\beta \delta^2(x-y), \quad (3.19)$$

$$\{\omega_\beta(x), P^\alpha(y)\} = \delta_\beta^\alpha \delta^2(x-y). \quad (3.20)$$

A fin de saber si el sistema tiene constricciones secundarias, calculemos la condición de consistencia del sistema, con lo que obtenemos las siguientes tres constricciones

$$\psi_i : \partial_a \Pi_i^a + \lambda \epsilon_{ij} e_a^j P^a \approx 0, \quad (3.21)$$

$$\psi : \partial_a P^a + \frac{1}{2} \epsilon_{ij} e_a^i \Pi^{aj} \approx 0. \quad (3.22)$$

Al calcular la consistencia de las nuevas constricciones no se obtienen nuevas constricciones. De esta manera hemos obtenido el conjunto completo de constricciones del sistema, nueve constricciones primarias y tres secundarias.

Prosigamos a clasificarlas en constricciones de primera y segunda clase. Calculemos la matriz de 12×12 cuyas entradas son $\mathcal{W}^{ij} = \{\varphi^i, \varphi^j\}$, de la cual, sólo los siguientes paréntesis no se anulan

$$\begin{aligned} \{\phi_i^a(x), \phi_j^b(y)\} &= -2\lambda \epsilon^{ab} \eta_{ij} \delta^2(x-y), \\ \{\phi_i^a(x), \psi_j(y)\} &= \lambda \epsilon_{ij} P^a(y) \delta^2(x-y) + \lambda \epsilon^{ag} \eta_{ij} \partial_g \delta^2(x-y), \\ \{\phi^a(x), \phi^b(y)\} &= -2\epsilon^{ab} \delta^2(x-y), \\ \{\phi^a(x), \psi_j(y)\} &= -\lambda \epsilon^{ag} \epsilon_{jk} e_g^k \delta^2(x-y), \\ \{\phi^a(x), \psi(y)\} &= \epsilon^{ab} \partial_b \delta^2(x-y), \end{aligned} \quad (3.23)$$

esta matriz tiene rango 6 y nulidad 6, por lo que esperamos que 6 constricciones de primera clase y 6 de segunda clase. En este caso es simple determinar los multiplicadores de Lagrange, los cuales están dados por

$$\begin{aligned}
U_b &= \lambda \epsilon_{ij} e_0^i e_b^j - \omega_0 \partial_b, \\
U_a^i &= \epsilon_{ab} \epsilon_j^i e_0^j P^b - \frac{1}{2\lambda} \epsilon_{ab} \epsilon_j^i \omega_0 \pi^{bj} - e_0^i \partial_a - \frac{1}{2} \omega_0 \epsilon_j^i e_b^j,
\end{aligned} \tag{3.24}$$

y así obtener \mathcal{H}_T , el cual contiene solo constricciones de primera clase. Después de un complicado trabajo, se identificó que la estructura de las constricciones de primera clase está dada por

$$\begin{aligned}
\gamma_i^0 &: \Pi_i^0 \approx 0, \\
\gamma^0 &: P^0 \approx 0, \\
\gamma_i &= \partial_a \Pi_i^a + \lambda \epsilon_{ij} e_a^j P^a + \frac{1}{2} \epsilon_{ad} \epsilon_i^l P^d \phi_l^a - \frac{1}{2} \partial_a \phi_i^a - \frac{\lambda}{2} \epsilon_{ij} e_b^j \phi^b \approx 0, \\
\gamma &= \partial_a P^a + \frac{1}{2} \epsilon_{ij} e_a^i \Pi^{aj} - \frac{1}{4\lambda} \epsilon_{ad} \epsilon^{li} \Pi_l^d \phi_i^a - \frac{1}{4} \epsilon^{li} e_{la} \phi_i^a - \frac{1}{2} \partial_b \phi^b \approx 0,
\end{aligned} \tag{3.25}$$

donde se puede ver que γ es el equivalente a la restricción Gaussiana¹, γ_i esta relacionada con la restricción vectorial y no hay análoga a la restricción Hamiltoniana, en este sentido la teoría no tiene dinámica². De hecho, γ genera transformaciones Abelianas sobre el campo ω_a y rotaciones sobre el campo e_α^i . Observaremos este punto más adelante. Por lo tanto, las constricciones de segunda clase están dadas por

$$\begin{aligned}
\chi_i^a &: \Pi_i^a - \lambda \epsilon^{0ab} e_{bi} \approx 0, \\
\chi^a &: P^a - \epsilon^{0ab} \omega_b \approx 0.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Y es importante comentar que las dos primeras constricciones primarias (3.16) son las constricciones de segunda clase (3.26), las cuales ayudarán a construir los paréntesis de Dirac. Por otro lado, se identificó que el álgebra de constricciones está dada por

$$\begin{aligned}
\{\gamma_i(x), \gamma_j(y)\} &= \frac{\lambda}{2} \epsilon_{ij} \gamma \delta^2(x-y) - \frac{1}{2} \epsilon_{ac} \chi_j^c \chi_i^a \delta^2(x-y), \\
\{\gamma_i(x), \gamma(y)\} &= -\frac{1}{2} \epsilon_{il} \gamma^l \delta^2(x-y) - \frac{1}{4} \epsilon_{ab} \chi^b \chi_i^a \delta^2(x-y), \\
\{\gamma(x), \gamma(y)\} &= 0, \\
\{\gamma_i(x), \chi^a(y)\} &= \frac{1}{2} \epsilon_i^l \chi_l^a \delta^2(x-y), \\
\{\gamma_i(x), \chi_j^a(y)\} &= -\frac{\lambda}{2} \epsilon_{ij} \chi^a \delta^2(x-y),
\end{aligned} \tag{3.27}$$

donde podemos ver que el álgebra entre constricciones es cerrada y es consistente con las ecuaciones (1.103).

¹Se le llama restricción Gaussiana a cualquier restricción que contenga un término que sea la derivada espacial de algún momento.

²Véase [14]

Como ya se comentó, las constricciones de segunda clase coinciden con las primeras constricciones primarias, por lo que la matriz definida por la ecuación (1.82), está dada por

$$C^{ab}(x, y) = \begin{pmatrix} -2\lambda\epsilon^{ab}\eta_{ij} & 0 \\ 0 & -2\epsilon^{ab} \end{pmatrix} \delta^2(x - y), \quad (3.28)$$

y su inversa

$$C_{ab}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\lambda}\epsilon_{ab}\eta^{ij} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\epsilon_{ab} \end{pmatrix} \delta^2(x - y). \quad (3.29)$$

Por lo tanto, usando (3.29) obtenemos que los paréntesis de Dirac no nulos entre las variables e_a^i y ω_a , y los momentos Π_i^a y P^a están dados por

$$\begin{aligned} \{e_a^i(x), e_b^j(y)\}_D &= \frac{\epsilon_{ab}}{2\lambda}\eta^{ij}\delta^2(x - y), \\ \{\omega_a(x), \omega_b(y)\}_D &= \frac{1}{2}\epsilon_{ab}\delta^2(x - y), \\ \{e_a^i(x), \Pi_j^b(y)\}_D &= \frac{1}{2}\delta_a^b\delta^i_j\delta^2(x - y), \\ \{\Pi_i^a(x), \Pi_j^b(y)\}_D &= \frac{\lambda}{2}\epsilon^{ab}\eta_{ij}\delta^2(x - y), \\ \{P^a(x), P^b(y)\}_D &= \frac{1}{2}\epsilon^{ab}\delta^2(x - y), \\ \{\omega_a(x), P^b(y)\}_D &= \frac{1}{2}\delta_a^b\delta^2(x - y). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Con todo lo recabado hasta ahora, sólo falta obtener los generadores de las transformaciones de norma definidos por la ecuación (1.87), los cuales están dados por

$$G = \int [\Lambda^i\gamma_i + \theta\gamma + \zeta_0^i\gamma_i^0 + \Xi_0\gamma^0]d^2x, \quad (3.31)$$

así, las transformaciones de norma para las variables e_a^i y ω_a toman la forma

$$\begin{aligned} \delta e_a^i &= -\frac{1}{2}\partial_a\Lambda^i - \frac{\Lambda^k}{2}\epsilon_k^i\omega_a + \frac{\theta}{2}\epsilon_k^ie_a^k, \\ \delta\omega_a &= -\frac{1}{2}\partial_a\theta - \frac{1}{2}\Lambda^i\epsilon_{il}e_a^l, \end{aligned} \quad (3.32)$$

Con esto damos por terminado el análisis con el formalismo de Dirac. Ahora, con toda la información encontrada y usando la ecuación (1.107), podemos realizar el conteo de grados de libertad. Tenemos 18 variables dinámicas en total, 6 constricciones de primera clase y 6 más de segunda clase, por lo que usando la ecuación (1.107) concluimos que la teoría no tiene grados de libertad, así, tenemos una teoría topológica. Es importante comentar que en gravedad estándar en tres dimensiones, si el espacio-tiempo es topológicamente trivial, entonces no hay grados de libertad gravitacionales. Por otro lado, si el espacio-tiempo tiene un grupo

fundamental no trivial, entonces habrá grados de libertad globales.

Finalmente, expongamos explícitamente la ausencia de dinámica de la teoría, para ello, recordemos que la teoría posee una dirección degenerada dada por la ecuación (3.12). Si se calcula la derivada de Lie de e_α^i y ω_α en la dirección de N_a , obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_n e_\alpha^i &= \lambda \theta \epsilon^i_j e_\alpha^j \\ \mathcal{L}_n \omega_\alpha &= \partial_\alpha \theta \\ \mathcal{L}_n g_{\alpha\beta} &= 0.\end{aligned}\tag{3.33}$$

Esta derivada de Lie dice como es que 'fluye' alguno de los campos anteriores en la dirección N_a . Si hacemos el parámetro $\Lambda = 0$ en las transformaciones de norma dadas por (3.32), se obtienen los resultados de la ecuación (3.33), de esta forma, la teoría no tiene dinámica, pues el flujo es una transformación de norma.

Una vez terminado el análisis Hamiltoniano, prosigamos al análisis alternativo de FJ, para su comparación con el de Dirac.

3.3. Análisis de Faddeev-Jackiw

Ahora analicemos a la teoría con el formalismo de Faddeev-Jackiw. Para ello escribamos la densidad Lagrangiana (3.13) como

$$\overset{(0)}{\mathcal{L}} = \epsilon^{ab} \omega_b \dot{\omega}_a + \lambda \epsilon^{ab} e_b^i \dot{e}_{ai} - V^{(0)},\tag{3.34}$$

donde

$$V^{(0)} = -\omega_0 \{2\epsilon^{ab} \partial_a \omega_b + \lambda \epsilon^{ab} \epsilon_{ij} e_a^i e_b^j\} - e_0^i \{2\lambda \epsilon^{ab} \partial_a e_{bi} + 2\lambda \epsilon^{ab} \epsilon_{ij} e_a^j \omega_b\},\tag{3.35}$$

es el potencial simpléctico, las variables simplécticas están dadas por

$$\overset{(0)}{\xi} = (e_a^i, e_0^i, \omega_a, \omega_0),\tag{3.36}$$

y las 1-formas

$$\overset{(0)}{a} = (\lambda \epsilon^{ab} e_{bi}, 0, \epsilon^{ab} \omega_b, 0).\tag{3.37}$$

Así, la matriz simpléctica definida por la ecuación (2.3), está dada por

$$f_{ij}^{(0)} = \begin{pmatrix} 2\lambda \epsilon^{ag} \eta_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\epsilon^{ab} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^2(x-y),\tag{3.38}$$

donde podemos observar que $f^{(0)}$ es singular y tiene como vectores nulos a

$$\mathcal{V}_1^i = \left(0, v^{\epsilon^i}, 0, 0\right), \quad (3.39)$$

$$\mathcal{V}_2^i = \left(0, 0, 0, v^{\omega_0}\right), \quad (3.40)$$

donde v^{ϵ^i} y v^{ω_0} son funciones arbitrarias. Por lo tanto, de los vectores nulos obtenemos las siguientes constricciones de FJ.

$$\Omega_i^{(0)} = \int dx^2 V_1^i \frac{\delta}{\delta \epsilon^i} \int dy^2 V^{(0)}(\xi) = \epsilon^{ab} \partial_a e_{bi} + \epsilon^{ab} \epsilon_{ij} e_a^j \omega_b = 0, \quad (3.41)$$

$$\beta^{(0)} = \int dx^2 V_2^i \frac{\delta}{\delta \epsilon^i} \int dy^2 V^{(0)}(\xi) = \epsilon^{ab} \partial_a \omega_b + \frac{\lambda}{2} \epsilon^{ab} \epsilon_{ij} e_a^i e_b^j = 0, \quad (3.42)$$

Exijamos consistencia a estas constricciones para saber si el sistema tiene más constricciones de FJ. Para ello es necesario construir una nueva matriz simpléctica dada por la ecuación (2.15)

$$\bar{f}_{kj} \dot{\xi}^{(0)j} = Z_k(\xi), \quad (3.43)$$

donde

$$\bar{f}_{kj} = \begin{pmatrix} f_{ij}^{(0)} \\ \frac{\delta \Omega_i^{(0)}}{\delta \xi^{(0)j}} \\ \frac{\delta \beta^{(0)}}{\delta \xi^{(0)j}} \end{pmatrix}, \quad Z_k = \begin{pmatrix} \frac{\delta \mathcal{V}^{(0)}}{\delta \xi^{(0)j}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.44)$$

de esta forma, construimos la siguiente matriz simpléctica

$$\bar{f}_{ij} = \begin{pmatrix} 2\lambda \epsilon^{ag} \eta_{il} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\epsilon^{ag} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \epsilon^{ag} \eta_{il} \partial_a + \epsilon^{gb} \epsilon_{il} \omega_b & 0 & \epsilon^{ag} \epsilon_{ij} e_a^j & 0 \\ \lambda \epsilon^{ag} \epsilon_{il} e_a^i & 0 & \epsilon^{ag} \partial_a & 0 \end{pmatrix} \delta^2(x-y), \quad (3.45)$$

observemos que esta matriz no es cuadrada, sin embargo, podemos calcular sus vectores nulos, los cuales están dados por

$$\bar{\mathcal{V}}_1 = \left(\delta_k^l \partial_a v^k - \epsilon_k^l \omega_a v^k, 0, \lambda \epsilon_{lj} e_a^j v^l, 0, -2\lambda v^k, 0 \right), \quad (3.46)$$

$$\bar{\mathcal{V}}_2 = \left(\epsilon_j^l e_a^j v^\lambda, 0, -\partial_a v^\lambda, 0, 0, -2v^\lambda \right). \quad (3.47)$$

Por otro lado, Z_k está dado por

$$\bar{Z}_k = \begin{pmatrix} \frac{\delta V}{\delta \xi^i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda\omega_0\epsilon^{ab}\epsilon_{lj}e_b^j + 2\lambda\epsilon^{ba}\partial_b e_{0l} - 2\lambda\epsilon^{ab}\epsilon_{il}\omega_b e_0^i \\ \begin{matrix} (0) \\ -\Omega_i \end{matrix} \\ \epsilon^{ba}2\partial_b\omega_0 - 2\lambda e_0^i\epsilon^{ba}\epsilon_{ij}e_b^j \\ \begin{matrix} (0) \\ \beta \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

La contracción de los vectores nulos con \bar{Z}_k se hace cero. Efectivamente, si se contrae la matriz (3.45) con el primer vector nulo obtenemos que

$$\begin{aligned} \bar{V}_1^\mu \bar{Z}_\mu &= 2\lambda\omega_0\epsilon_{lj}\{\epsilon^{ab}\partial_a e_b^j + \epsilon^{jk}\epsilon^{ab}e_{ka}\omega_b\}v^l + 2\lambda e_0^i\epsilon_{il}\{\epsilon^{ab}\partial_a\omega_b + \frac{\lambda}{2}\epsilon^{kj}\epsilon^{ab}e_{ak}e_{bj}\} \\ &= \omega_0\epsilon_{lj}\Omega^j v^l + 2\lambda e_0^i\epsilon_{il}\beta v^i = 0, \end{aligned} \quad (3.49)$$

y de la contracción del segundo vector nulo obtenemos

$$\bar{V}_2^\mu \bar{Z}_\mu = e_{0i}\epsilon^{ij}\Omega_j v^\lambda = 0, \quad (3.50)$$

Por lo tanto, no hay más constricciones de FJ. Ahora proseguimos a agregar las constricciones al Lagrangiano simpléctico, introduciendo como multiplicadores de Lagrange a α y ζ , es decir

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(1)} &= \epsilon^{ab}\omega_b\dot{\omega}_a + \lambda\epsilon^{ab}e_{bi}\dot{e}_a^i - \left(\epsilon^{ab}\partial_a\omega_b + \frac{\lambda}{2}\epsilon^{ab}\epsilon_{ij}e_a^i e_b^j\right)\dot{\alpha} - \left(\epsilon^{ab}\partial_a e_{bi} + \epsilon^{ab}\epsilon_{ij}e_a^j\omega_b\right)\dot{\zeta}^i - V^{(1)}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

donde

$$V^{(1)} = V^{(0)}\Big|_{\substack{\Omega_i, \\ \beta}} = 0, \quad (3.52)$$

se anula por la covarianza general de la teoría. Se observa que $\dot{\alpha} = \omega_0$ y $\dot{\zeta}^i = e_0^i$ han sido tomadas en cuenta. Del Lagrangiano simpléctico (3.51), identificamos las siguientes variables simplécticas

$$\xi^{(1)} = (e_a^i, \zeta^i, \omega_a, \alpha) \quad (3.53)$$

y las 1-formas

$$a^{(1)} = \left(\lambda\epsilon^{ab}e_{bi}, -(\epsilon^{ab}\partial_a e_{bi} + \epsilon^{ab}\epsilon_{ij}e_a^j\omega_b), \epsilon^{ab}\omega_b, -(\epsilon^{ab}\partial_a\omega_b + \frac{\lambda}{2}\epsilon^{ab}\epsilon_{ij}e_a^i e_b^j) \right), \quad (3.54)$$

donde la nueva matriz simpléctica tiene la siguiente forma

$$f_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2\lambda\epsilon^{ag}\eta_{ij} & -\epsilon^{ag}\eta_{il}\partial_a - \epsilon^{gb}\epsilon_{il}\omega_b & 0 & -\lambda\epsilon^{ag}\epsilon_{il}e_a^i \\ \epsilon^{ag}\eta_{il}\partial_a + \epsilon^{gb}\epsilon_{il}\omega_b & 0 & \epsilon^{ag}\epsilon_{ij}e_a^j & 0 \\ 0 & -\epsilon^{ag}\epsilon_{ij}e_a^j & 2\epsilon^{ag} & -\epsilon^{ag}\partial_a \\ \lambda\epsilon^{ag}\epsilon_{il}e_a^i & 0 & \epsilon^{ag}\partial_a & 0 \end{pmatrix} \delta^2(x-y), \quad (3.55)$$

Podemos observar que la matriz es singular. De hecho, esto significa que el sistema tiene simetría de norma y es bien sabido que los vectores nulos de la matriz (3.55) son los generadores de simetría de norma. En efecto, los vectores nulos de la matriz (3.55) están dados por

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \left(\frac{\theta}{2}\epsilon_k^i e_a^k, 0, -\frac{1}{2}\partial_a\theta, -\theta \right), \\ \Gamma_2 &= \left(-\frac{1}{2}\partial_a\Lambda^i - \frac{\Lambda^k}{2}\epsilon_k^i\omega_a, -\lambda\Lambda^i, -\frac{1}{2}\Lambda^i\epsilon_{il}e_a^l, 0 \right), \end{aligned} \quad (3.56)$$

donde Λ y θ son parámetros de norma. Usando los vectores nulos, encontramos las siguientes transformaciones de norma de la teoría para las variables e_a^i y ω_a

$$\begin{aligned} \delta e_a^i &= -\frac{1}{2}\partial_a\Lambda^i - \frac{\Lambda^k}{2}\epsilon_k^i\omega_a + \frac{\theta}{2}\epsilon_k^i e_a^k, \\ \delta\omega_a &= -\frac{1}{2}\partial_a\theta - \frac{1}{2}\Lambda^i\epsilon_{il}e_a^l, \end{aligned} \quad (3.57)$$

donde podemos observar que estas transformaciones coinciden con aquellas encontradas en el esquema de Dirac. Además, ya hemos comentado que la teoría de Husain es invariante ante difeomorfismos y no hay análogo a la restricción Hamiltoniana. De hecho, podemos observar esos puntos redefiniendo los parámetros de norma como $\Lambda^i = 2e_a^i\tau^a$ y $\theta = -2\omega_a\tau^a$ y por lo tanto las transformaciones de norma toman la forma

$$\begin{aligned} \delta e_a^i &= \mathcal{L}_\tau e_a^i + \tau^b [\partial_a e_b^i - \partial_b e_a^i] + \tau^b \epsilon^i_k [e_a^k \omega_b - e_b^k \omega_a], \\ \delta\omega_a &= \mathcal{L}_\tau \omega_a + \tau^b [\partial_a \omega_b - \partial_b \omega_a + \tau^c \epsilon_{il} e_b^i e_a^l], \end{aligned} \quad (3.58)$$

que corresponde vía ecuaciones de movimiento a difeomorfismos y es una simetría interna de la teoría. De esta manera, hemos reproducido de otra manera los resultados obtenidos en [14].

Por otro lado, hemos mostrado que no hay más restricciones de FJ y que la teoría tiene simetría de norma, por lo tanto, a fin de obtener un tensor simpléctico, fijamos la norma temporal como

$$\begin{aligned} e_0^i &= 0, \\ \omega_0 &= 0, \end{aligned} \quad (3.59)$$

esto implica que $\alpha = cte$ y $\zeta^i = cte$. Así, agregando la norma temporal como restricción, la nueva Lagrangiana simpléctica está dada por

$$\mathcal{L}^{(2)} = \epsilon^{ab}\omega_b\dot{\omega}_a + \lambda\epsilon^{ab}e_{bj}\dot{e}_a^j - \left(\epsilon^{ab}\partial_a\omega_b + \frac{\lambda}{2}\epsilon^{ab}\epsilon_{ij}e_a^i e_b^j - \rho \right) \dot{\alpha} - \left(\epsilon^{ab}\partial_a e_{bi} + \epsilon^{ab}\epsilon_{ij}e_a^j \omega_b - \sigma_i \right) \dot{\zeta}^i, \quad (3.60)$$

donde elegimos las siguientes variables simplécticas

$$\xi^{(2)} = (e_a^i, \zeta^i, \omega_a, \alpha, \rho, \sigma_i) \quad (3.61)$$

y la 1-forma

$$a^{(2)} = \left(\lambda\epsilon^{ab}e_{bi}, -(\epsilon^{ab}\partial_a e_{bi} + \epsilon^{ab}\epsilon_{ij}e_a^j \omega_b - \sigma_i), \epsilon^{ab}\omega_b, -(\epsilon^{ab}\partial_a\omega_b + \frac{\lambda}{2}\epsilon^{ab}\epsilon_{ij}e_a^i e_b^j - \rho), 0, 0 \right). \quad (3.62)$$

Ahora, la matriz simpléctica toma la siguiente forma

$$f_{ij}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2\lambda\epsilon^{ag}\eta_{il} & -\epsilon^{ag}\eta_{il}\partial_a - \epsilon^{gb}\epsilon_{il}\omega_b & 0 & -\lambda\epsilon^{ag}\epsilon_{il}e_a^i & 0 & 0 \\ \epsilon^{ag}\eta_{il}\partial_a + \epsilon^{gb}\epsilon_{il}\omega_b & 0 & \epsilon^{ag}\epsilon_{ij}e_a^j & 0 & 0 & -\delta_j^i \\ 0 & -\epsilon^{ag}\epsilon_{ij}e_a^j & 2\epsilon^{ag} & -\epsilon^{ag}\partial_a & 0 & 0 \\ \lambda\epsilon^{ag}\epsilon_{il}e_a^i & 0 & \epsilon^{ag}\partial_a & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \delta^2(x-y), \quad (3.63)$$

obervemos que esta matriz es un tensor simpléctico y su inversa está dada por

$$f_{ij}^{(2)-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\lambda}\epsilon^{ag}\eta^{ij} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\epsilon_j^i}{2}e_a^j & \frac{1}{2\lambda}\left(-\delta_j^i\partial_a + \epsilon_j^i\omega_a\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_j^i \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\epsilon_{ab} & 0 & -\frac{1}{2}\partial_a & \frac{1}{2}\epsilon_{ij}e_a^j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\epsilon_j^i}{2}e_a^j & 0 & \frac{1}{2}\partial_a & -1 & 0 & \epsilon_{ij}\frac{\epsilon^{ab}}{2}\partial_a e_b^j \\ \frac{1}{2\lambda}\left(\delta_j^i\partial_a - \epsilon_j^i\omega_a\right) & -\delta_j^i & -\frac{1}{2}\epsilon_{ij}e_a^j & 0 & -\frac{\epsilon_{ij}\epsilon^{ab}}{2}\partial_a e_b^j & 0 \end{pmatrix} \times \delta^2(x-y). \quad (3.64)$$

Por lo tanto, del tensor simpléctico (3.64) podemos identificar los paréntesis generalizados de FJ, que están dados por

$$\begin{aligned}\{e_a^i, e_b^j\}_{FJ} &= \frac{1}{2\lambda} \epsilon_{ab} \eta^{ij} \delta^2(x-y), \\ \{\omega_a, \omega_b\}_{FJ} &= \frac{1}{2} \epsilon_{ab} \delta^2(x-y),\end{aligned}\tag{3.65}$$

de esta forma, podemos concluir que los paréntesis de FJ y de Dirac coinciden.

Capítulo 4

Conclusiones

Se realizó un análisis Hamiltoniano y simpléctico de la acción propuesta por V. Husain (3.11), la cual carece de dinámica. En el primero, se encontró la estructura completa de las constricciones de primera y segunda clase, los paréntesis fundamentales de Dirac y las transformaciones de norma; respecto a las constricciones, es importante mencionar que no se halló análogo a la restricción Hamiltoniana. En el segundo, se obtuvieron las constricciones de FJ, los paréntesis generalizados de FJ y las transformaciones de norma. En cuanto a las constricciones, se hallaron un menor número que en el análisis Hamiltoniano, las cuales, coinciden con las constricciones de Dirac, cuando se construyen los paréntesis de Dirac y se hacen las constricciones de segunda clase fuertemente cero.

Por otro lado, se corroboró que tanto los paréntesis de cada formalismo como las transformaciones de norma, coinciden como era de esperarse. En adición, es importante resaltar que en el formalismo Hamiltoniano, la separación de constricciones entre primera y segunda clase es una tarea difícil de efectuar, sin embargo, la identificación de constricciones de FJ es una tarea más simple, por lo que podemos decir que el formalismo de FJ es más económico y elegante.

Es importante comentar que de los resultados de esta tesis, se obtuvo la siguiente publicación en la revista *Annals of Physics* [16].

Apéndice A

Aclaraciones matemáticas

A.1. Delta de Dirac

La “función” delta de Dirac para más de una variable se define como

$$\delta(X - A) \equiv \delta(x_1 - a_1)\delta(x_2 - a_2) \cdots \delta(x_n - a_n) = \begin{cases} 0 & x_i \neq a_i \\ \infty & x_i = a_i \end{cases} \quad A, X \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{A.1})$$

tal que

$$\begin{aligned} \int \delta(X - A) d^n x &= 1 \\ \int \delta(X - A) F(X) dx &= F(A) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

donde la integral se evalúa sobre todo el espacio y F es una función integrable.

Es importante notar que la delta de Dirac no es una función en el sentido usual del cálculo, pues se sabe de cálculo elemental que la integral de una función idénticamente nula excepto en un punto es cero¹. Esta transformación pertenece a un nuevo tipo de aplicaciones que se les llama distribuciones².

A.1.1. Propiedades

Finalmente enlistaremos algunas de sus propiedades, las cuales se pueden demostrar fácilmente con la definición de delta de Dirac, usando integración por partes y regla de la cadena³.

¹Véase [26].

²La definición dada al inicio de la sección es un tanto informal, sin embargo para fines prácticos es suficiente con ello.

³Por ejemplo, demostremos [V]. Notar que en la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\delta(x - z)\delta(y - z)dz$ podemos tomar $F_1(z) = f(x, y)\delta(x - z)$ ó $F_2(z) = f(x, y)\delta(y - z)$ para poder evaluar la integral, así $\int_{-\infty}^{\infty} F_1(z)\delta(y - z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z - y)F_1(z)dz = F_1(y) = f(x, y)\delta(x - y)$ ó $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - z)F_2(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z - x)F_2(z)dz = F_2(x) = f(x, y)\delta(y - x)$. Usando la propiedad [I] concluimos que las integrales son iguales.

Sea f una función integrable y f' su derivada, entonces

$$\text{[I]} \quad \delta(x) = \delta(-x). \quad (\text{A.3})$$

$$\text{[II]} \quad f(x)\delta'(x) = -f'(x)\delta(x). \quad (\text{A.4})$$

$$\text{[III]} \quad \delta'(x) = \delta'(-x). \quad (\text{A.5})$$

con $\delta'(x)$ la derivada de $\delta(x)$.

$$\text{[IV]} \quad \partial_x \delta(x-y) = -\partial_y \delta(x-y). \quad (\text{A.6})$$

$$\text{[V]} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(x-z)\delta(y-z)dz = f(x,y)\delta(x-y). \quad (\text{A.7})$$

A.2. Tensores

Se debe aclarar que los tensores se pueden definir de dos maneras distintas, pero equivalentes. Por un lado se definen a partir del producto tensorial

Definición A.1 Sea V un espacio vectorial sobre un campo \mathcal{K} , que usualmente es \mathbb{R} y sea V^* el espacio dual asociado a V . Se define un tensor como la transformación

$$\mathcal{T} : \overbrace{V \otimes V \otimes \dots \otimes V}^{r \text{ veces}} \otimes \overbrace{V^* \otimes V^* \otimes \dots \otimes V^*}^{s \text{ veces}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\text{A.8})$$

que se denota

$$\mathcal{T}_{j_1, j_2 \dots j_r}^{i_1, i_2 \dots i_s}. \quad (\text{A.9})$$

Por otro lado, se definen mediante una regla de transformación entre dos bases coordenadas⁴. A continuación daremos una serie de definiciones y posteriormente se definirán los tensores.

Sean $x \equiv (x^1, x^2, \dots, x^N)$ y $\bar{x} \equiv (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^N)$ dos sistemas coordenados de dimensión N , que se relacionan entre sí por las transformaciones⁵

⁴Véase [27], Capítulo 4, Sec. 4.

⁵En general, cada sistema coordenado está definido sobre una carta de alguna variedad diferenciable (véase [21] Parte 1, Capítulo 3.).

$$x^i = x^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^N), \quad (\text{A.10})$$

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2, \dots, x^N). \quad (\text{A.11})$$

Se denotará al Jacobiano de las transformaciones $J\left(\frac{x}{\bar{x}}\right) = J\left(\frac{x^1, x^2, \dots, x^N}{\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^N}\right)$ solamente con J .

Definición A.2 Si $\mathcal{T}_{b_1 b_2 \dots b_r}^{a_1 a_2 \dots a_s}$ y $\bar{\mathcal{T}}_{j_1 j_2 \dots j_r}^{i_1 i_2 \dots i_s}$ se transforman como

$$\bar{\mathcal{T}}_{j_1 j_2 \dots j_r}^{i_1 i_2 \dots i_s} = J^W \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{a_1}} \frac{\partial \bar{x}^{i_2}}{\partial x^{a_2}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{i_s}}{\partial x^{a_s}} \frac{\partial x^{b_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \frac{\partial x^{b_2}}{\partial \bar{x}^{j_2}} \dots \frac{\partial x^{b_r}}{\partial \bar{x}^{j_r}} \mathcal{T}_{b_1 b_2 \dots b_r}^{a_1 a_2 \dots a_s}, \quad (\text{A.12})$$

se dirá que es un tensor r veces covariante y s veces contravariante⁶⁷.

Definición A.3 Se define la delta generalizada de Kronecker como

$$\delta_{mn\dots p}^{ij\dots k} := \begin{vmatrix} \delta_m^i & \delta_n^i & \dots & \delta_p^i \\ \delta_m^j & \delta_n^j & \dots & \delta_p^j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_m^k & \delta_n^k & \dots & \delta_p^k \end{vmatrix}, \quad (\text{A.13})$$

donde cada índice corre sobre un subconjunto de los naturales.

La delta generalizada de Kronecker tiene dos propiedades muy útiles⁸.

[I]

$$\epsilon^{k_1 k_2 \dots k_N} \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_N} = \delta_{j_1 j_2 \dots j_N}^{k_1 k_2 \dots k_N}. \quad (\text{A.14})$$

[II]

$$\epsilon_{k_1 k_2 \dots k_m i_1 i_2 \dots i_{N-m}} \epsilon^{j_1 j_2 \dots j_m i_1 i_2 \dots i_{N-m}} = (N-m)! \delta_{k_1 k_2 \dots k_m}^{j_1 j_2 \dots j_m}. \quad (\text{A.15})$$

Ahora enunciaremos algunos resultados sobre la métrica muy usados en la tesis.

Observar que el tensor métrico definido en el Apéndice C puede escribirse tensorialmente como $g_{ij} = \frac{\partial y^m}{\partial x^i} \frac{\partial y^m}{\partial x^j}$.

Proposición A.1 El tensor métrico es un tensor dos covariante.

⁶Si $W = 0$, se dice que es un tensor absoluto.

⁷Notar que las cantidades $\bar{\mathcal{T}}$ y \mathcal{T} son las mismas.

⁸Comentemos dos cosas. Uno, las propiedades pueden demostrarse fácilmente por inducción. Dos, para $n = 3$, obtenemos la conocida expresión $\delta_{mnp}^{ijp} = \epsilon^{ijp} \epsilon_{mnp} = \delta_m^i \delta_n^j - \delta_n^i \delta_m^j$.

Definimos al tensor métrico contravariante como⁹

$$g^{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial y^m} \frac{\partial x^j}{\partial y^m}. \quad (\text{A.16})$$

Proposición A.2 *Sea g el tensor métrico, entonces $g^{ij}g_{jk} = \delta_k^i$.*

⁹Al tensor métrico contravariante también se le llama tensor métrico conjugado.

Apéndice B

Cálculo variacional

El cálculo variacional es la rama de la matemática que extiende el cálculo infinitesimal a funcionales¹.

B.1. Variaciones

Definición B.1 Sea T el conjunto de tensores, definimos una funcional como la aplicación

$$F : T \rightarrow \mathbb{R}. \quad (\text{B.1})$$

Definición B.2 Sea $\Phi \in T$. Dada una trayectoria de Φ en el espacio de configuraciones, definimos una nueva trayectoria

$$\Phi(x, \alpha) \equiv \Phi(x) + \alpha\eta(x), \quad (\text{B.2})$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ y η una función arbitraria diferenciable tal que se desvanece en la frontera de la variedad, entonces la variación de Φ la definimos como

$$\delta\Phi(x) \equiv \Phi(x, \alpha) - \Phi(x, 0), \quad \delta\Phi|_{\partial D} = 0. \quad (\text{B.3})$$

Proposición B.1 Sea $\delta\Phi$ la variación del campo Φ , entonces

$$\delta(\partial_\mu\Phi) = \partial_\mu(\delta\Phi). \quad (\text{B.4})$$

B.2. Derivada variacional

Definición B.3 Sea F una funcional, definimos la derivada variacional como

$$\frac{\delta F[\Phi(x)]}{\delta\Phi(y)} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[\Phi(x) + \epsilon\delta(x-y)] - F[\Phi(x)]}{\epsilon}, \quad (\text{B.5})$$

donde $\delta(x-y)$ es la delta de Dirac.

¹Para un estudio más minucioso véase [28] y [29].

Proposición B.2 Sea $F[\Phi(x)] = a\partial_\mu\Phi(x)$ entonces

$$\frac{\delta[a\partial_\mu\Phi(x)]}{\delta\Phi(y)} = a\partial_\mu\delta(x-y). \quad (\text{B.6})$$

Prueba.

$$\begin{aligned} \frac{\delta[a\partial_\mu\Phi(x)]}{\delta\Phi(y)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{a\partial_\mu[\Phi(x) + \epsilon\delta(x-y)] - a\partial_\mu\Phi(x)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{a\partial_\mu\Phi(x) + \epsilon a\partial_\mu\delta(x-y) - a\partial_\mu\Phi(x)}{\epsilon} \\ &= a\partial_\mu\delta(x-y). \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

De igual forma es muy fácil mostrar que

$$\frac{\delta\Phi(x)}{\delta\Phi(y)} = \delta(x-y), \quad \frac{\delta C(x)}{\delta\Phi(y)} = 0, \quad (\text{B.8})$$

donde C es una funcional constante.

Definición B.4 Se define la suma, resta, multiplicación, división y composición de funcionales de la manera usual.

Se puede demostrar de manera casi análoga a la hecha en cálculo diferencial las siguientes propiedades

[I]

$$\frac{\delta G[\Phi(x)]H[\Phi(x)]}{\delta\Phi(y)} = G[\Phi(x)]\frac{\delta H[\Phi(x)]}{\delta\Phi(y)} + \frac{\delta G[\Phi(x)]}{\delta\Phi(y)}H[\Phi(x)]. \quad (\text{B.9})$$

[II]

$$\frac{\delta(G[\Phi(x)] \pm H[\Phi(x)])}{\delta\Phi(y)} = \frac{\delta G[\Phi(x)]}{\delta\Phi(y)} \pm \frac{\delta H[\Phi(x)]}{\delta\Phi(y)}. \quad (\text{B.10})$$

[III]

$$\frac{\delta\left(\frac{G[\Phi(x)]}{H[\Phi(x)]}\right)}{\delta\Phi(y)} = \frac{H[\Phi(x)]\frac{\delta G[\Phi(x)]}{\delta\Phi(y)} - \frac{\delta H[\Phi(x)]}{\delta\Phi(y)}G[\Phi(x)]}{H[\Phi(x)]^2}. \quad (\text{B.11})$$

[IV]

$$\frac{\delta G[H(\Phi(x))]}{\delta\Phi(z)} = \frac{\delta G[H(\Phi(x))]}{\delta H(\Phi(y))} \frac{\delta H(\Phi(y))}{\delta\Phi(z)}. \quad (\text{B.12})$$

Proposición B.3 Sea $F[\Phi(x)]$ una funcional, entonces

$$\frac{\delta F[\Phi(x)]}{\delta \Phi(y)} = \frac{\partial F[\Phi(x)]}{\partial \Phi(x)} \delta(x - y), \quad (\text{B.13})$$

a este resultado se le llama primera variación de $F[\Phi(x)]$ respecto a $\Phi(x)$.

Prueba

Hagamos una expansión en serie de Taylor de $F[\Phi(x, \alpha, \delta)]$, donde el tercer índice indica que $\eta(x) = \delta(x - y)$, así $\Phi(x, \alpha, \delta) = \Phi(x) + \alpha \delta(x - y)$, con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} F[\Phi(x, \alpha, \delta)] &= F[\Phi(x, \alpha, \delta)]|_{\Phi(x)} + \frac{\partial F[\Phi(x, \alpha, \delta)]}{\partial \Phi(x)} \Big|_{\Phi(x)} [\Phi(x, \alpha, \delta) - \Phi(x)] + \dots \\ &= F[\Phi(x)] + \frac{\partial F[\Phi(x, \alpha, \delta)]}{\partial \Phi(x)} \Big|_{\Phi(x)} \alpha \delta(x - y) + \dots, \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

si cortamos la serie en los dos primeros términos, se tiene la siguiente triple igualdad

$$\delta F[\Phi(x, \alpha, \delta)] = F[\Phi(x) + \alpha \delta(x - y)] - F[\Phi(x)] = \frac{\partial F[\Phi(x) + \alpha \delta(x - y)]}{\partial \Phi(x)} \Big|_{\Phi(x)} \alpha \delta(x - y) \quad (\text{B.15})$$

notemos que $\delta \Phi(x) = \alpha \delta(x - y)$. Si dividimos la igualdad anterior por α y tomamos el límite cuando $\alpha \rightarrow 0$, se obtiene la definición de derivada variacional, entonces

$$\frac{\delta F[\Phi(x)]}{\delta \Phi(y)} = \frac{\partial F[\Phi(x)]}{\partial \Phi(x)} \delta(x - y). \quad (\text{B.16})$$

Si no dividimos por α y tomamos el mismo límite

$$\delta F[\Phi(x)] = \frac{\partial F[\Phi(x)]}{\partial \Phi(x)} \delta \Phi(x). \quad (\text{B.17})$$

Con el mismo razonamiento se puede generalizar fácilmente a más de un campo

$$\delta F[\Phi_i(x)] = \sum_i \frac{\partial F[\Phi_i(x)]}{\partial \Phi_i(x)} \delta \Phi_i(x), \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{\delta F[\Phi_i(x)]}{\delta \Phi_i(y)} = \frac{\partial F[\Phi_i(x)]}{\partial \Phi_i(x)} \delta(x - y). \quad (\text{B.19})$$

Si $F = F[\Phi_i(x), \partial_\mu \Phi_i(x)]$, se procede de forma similar a la demostración anterior, pero ahora se corta la serie en el tercer sumando y obtenemos²

²Véase [18].

$$\frac{\delta F[\Phi_i(x), \partial_\mu \Phi_i(x)]}{\delta \Phi_i(y)} = \left\{ \frac{\partial F[\Phi_i(x), \partial_\mu \Phi_i(x)]}{\partial \Phi_i(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial F[\Phi_i(x), \partial_\mu \Phi_i(x)]}{\partial (\partial_\mu \Phi_i(x))} \right) \right\} \delta(x - y), \quad (\text{B.20})$$

al cual se le llama segunda variación de $F[\Phi_i(x), \partial_\mu \Phi_i(x)]$ respecto a $\Phi_i(x)$.

B.3. Paréntesis de Poisson

Esta sección está dedicada a demostrar la mayor parte de los siguientes resultados (se usarán los resultados del Apéndice A).

Proposición B.4 Sean Φ_a, Φ_b, P^a y P^b variables independientes del espacio fase de un sistema no necesariamente regular, entonces

$$[\text{I}] \quad \{\Phi_a(x), \Phi_b(y)\} = 0. \quad (\text{B.21})$$

$$[\text{II}] \quad \{P^a(x), P^b(y)\} = 0. \quad (\text{B.22})$$

$$[\text{III}] \quad \{\Phi_a(x), P^b(y)\} = \delta_a^b \delta(x - y). \quad (\text{B.23})$$

$$[\text{IV}] \quad \dot{\Phi}_a = \{\Phi_a, \mathcal{H}\}. \quad (\text{B.24})$$

$$[\text{V}] \quad \dot{P}^a = \{P^a, \mathcal{H}\}. \quad (\text{B.25})$$

Sea $F = F[\Phi_a(x), \partial_i \Phi_a(x), P^a(x)]$ ³

$$[\text{VI}] \quad \dot{F} = \{F, \mathcal{H}\}. \quad (\text{B.26})$$

Sea $F = F[\Phi_a(x)]$

$$[\text{VII}] \quad \{\Phi_a, F\} = \frac{\delta F}{\delta P^a}. \quad (\text{B.27})$$

Sea $F = F[P^a(x)]$

³Donde el subíndice i corre sobre las coordenadas espaciales.

[VIII]

$$\{F, P^a\} = \frac{\delta F}{\delta \Phi_a}. \quad (\text{B.28})$$

Dado que cada una de las variables del espacio fase es independiente de las otras, es evidente que

$$\frac{\delta \Phi_a(x)}{\delta P^b(y)} = 0 = \frac{\delta P^a(x)}{\delta \Phi_b(y)}, \quad (\text{B.29})$$

$$\frac{\delta \Phi_a(x)}{\delta \Phi_b(y)} = \delta_b^a \delta(x - y) = \frac{\delta P^a(x)}{\delta P^b(y)}. \quad (\text{B.30})$$

Prueba.[I]

Partiendo de la definición (1.14) y usando (1.21) y (1.23)

$$\{\Phi_a(x), \Phi_b(y)\} = \int \left[\frac{\delta \Phi_a(x)}{\delta \Phi_c(z)} \frac{\delta \Phi_b(y)}{\delta P^c(z)} - \frac{\delta \Phi_a(x)}{\delta P^c(z)} \frac{\delta \Phi_b(y)}{\delta \Phi_c(z)} \right] d^3 z = 0. \quad (\text{B.31})$$

De manera análoga se puede demostrar el segundo resultado.

Prueba.[III]

$$\begin{aligned} \{\Phi_a(x), P^b(y)\} &= \int \left[\frac{\delta \Phi_a(x)}{\delta \Phi_c(z)} \frac{\delta P^b(y)}{\delta P^c(z)} - \frac{\delta \Phi_a(x)}{\delta P_c(z)} \frac{\delta P^b(y)}{\delta \Phi_c(z)} \right] d^3 z \\ &= \int \delta_a^c \delta(x - z) \delta_c^b \delta(y - z) d^3 z \\ &= \int \delta_a^b \delta(x - z) \delta(y - z) d^3 z, \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

usando la propiedad 5. del Apéndice A.1 podemos concluir que

$$\{\Phi_a(x), P^b(y)\} = \delta_a^b \delta(x - y). \quad (\text{B.33})$$

Prueba.[IV]

Por razones de espacio omitimos los campos en \mathcal{H}

$$\begin{aligned} \{\Phi_a(x), \mathcal{H}(y)\} &= \int \left[\frac{\delta \Phi_a(x)}{\delta \Phi_c(z)} \frac{\delta \mathcal{H}(y)}{\delta P^c(z)} - \frac{\delta \Phi_a(x)}{\delta P^c(z)} \frac{\delta \mathcal{H}(y)}{\delta \Phi_c(z)} \right] d^3 z \\ &= \int \delta_a^c \delta(x - z) \frac{\delta \mathcal{H}(y)}{\delta P^c(z)} d^3 z, \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

dado que el Hamiltoniano solo depende de los momentos y no de sus derivadas, podemos usar la ecuación (B.20), así

$$\begin{aligned}
\{\Phi_a(x), \mathcal{H}(y)\} &= \int \delta(x-z)\delta(y-z) \frac{\partial \mathcal{H}(y)}{\partial P^a(y)} d^3z \\
&= \frac{\partial \mathcal{H}(y)}{\partial P^a(y)},
\end{aligned} \tag{B.35}$$

usando una de las ecuaciones de Hamilton (1.11)

$$\dot{\Phi}_a = \{\Phi_a, \mathcal{H}\}. \tag{B.36}$$

La demostración del quinto resultado es análoga.

Prueba.[VI]

Las funcionales F y \mathcal{H} dependen de $\Phi_a(x)$, $\partial_i \Phi_a(x)$ y $P^a(x)$, pero se omitirá por razones de espacio

$$\begin{aligned}
\{F(x), \mathcal{H}(y)\} &= \int \left[\frac{\delta F(x)}{\delta \Phi_c(z)} \frac{\delta \mathcal{H}(y)}{\delta P^c(z)} - \frac{\delta F(x)}{\delta P^c(z)} \frac{\delta \mathcal{H}(y)}{\delta \Phi_c(z)} \right] d^3z \\
&= \int \left[\frac{\delta F(x)}{\delta \Phi_c(z)} \frac{\partial \mathcal{H}(y)}{\partial P^c(z)} - \frac{\delta F(x)}{\delta P^c(z)} \left(\frac{\partial \mathcal{H}(y)}{\partial \Phi_a(z)} - \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{H}(y)}{\partial (\partial_i \Phi_a(z))} \right) \right) \right] d^3z \\
&= \int \left[\frac{\delta F(x)}{\delta \Phi_c(z)} \dot{\Phi}_a(z) \delta(y-z) + \frac{\delta F(x)}{\delta P^c(z)} \dot{P}^a(z) \delta(y-z) \right] d^3z,
\end{aligned} \tag{B.37}$$

usando la regla de la cadena y expresando la dependencia temporal explícitamente⁴.

$$\begin{aligned}
&= \int \left[\frac{\delta F(x)}{\delta \Phi_c(z)} \frac{\delta \Phi_c(z)}{\delta x_0} \delta(y-z) + \frac{\delta F(x)}{\delta P^c(z)} \frac{\delta P^c(z)}{\delta x_0} \delta(y-z) \right] d^3z \\
&= \int \dot{F}(z) \delta(y-z) d^3z \\
&= \dot{F}(y).
\end{aligned} \tag{B.38}$$

B.3.1. Propiedades

Por último mencionaremos que este paréntesis de Poisson tiene las mismas propiedades que el paréntesis de Poisson usual, pues las reglas de derivación para derivada covariante son las mismas que las de derivada usual (véase la sección B.2). Aquí las enlistamos solo por completitud.

Sean $E = E(\Phi_i, P^i)$, $F = F(\Phi_i, P^i)$ y $G = G(\Phi_i, P^i)$ funciones del espacio fase y $a, b \in \mathbb{R}$

$$[\mathbf{I}] \text{ Linealidad: } \{E, aF + bG\} = a\{E, F\} + b\{E, G\}.$$

⁴El subíndice 0 denota la coordenada temporal.

[II] Antisimetría: $\{E, F\} = -\{F, E\}$.

[III] Regla de Leibniz: $\{E, FG\} = \{E, F\}G + F\{E, G\}$.

[IV] Identidad de Jacobi: $\{\{E, F\}, G\} + \{\{F, G\}, E\} + \{\{G, E\}, F\} = 0$.

Apéndice C

Geometría diferencial

La geometría diferencial, es la rama de la matemática que estudia los objetos geométricos curvos a través del cálculo infinitesimal.

C.1. Variedades

Las definiciones usadas en este apéndice no son las más generales¹, pero si lo suficiente para nuestros fines.

Definición C.1 Sea U subconjunto abierto conexo de \mathbb{R}^k con $k \leq n$. Definimos un k -parche o carta coordenada a cualquier aplicación

$$\mathbf{q} : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad (\text{C.1})$$

$$\mathbf{q}(u^1, \dots, u^k) = (q^1(u^1, \dots, u^k), \dots, q^{n+1}(u^1, \dots, u^k)), \quad (\text{C.2})$$

que sea suave, invertible y los vectores tangentes de \mathbf{q} linealmente independientes, donde los vectores tangentes se definen como

$$\partial_i \mathbf{q} \equiv \left(\frac{\partial q^1}{\partial u^i}, \dots, \frac{\partial q^{n+1}}{\partial u^i} \right), \quad i = 1, \dots, k. \quad (\text{C.3})$$

Notar que una carta coordenada es simplemente una parametrización de un subconjunto de \mathbb{R}^{n+1}

Definición C.2 Sea $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Diremos que \mathcal{M} es una variedad² si puede cubrirse por k cartas coordenadas³, tales que si dos de ellas $\mathbf{q}_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ y $\mathbf{q}_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ con intersección no vacía, su composición

¹Véase [21] Parte 1, Capítulo 2-4.

²En inglés se le conoce como *manifold*.

³Esto quiere decir que cualquier punto de \mathcal{M} esta en la imagen de al menos una carta coordenada.

$$\phi_{ij} \equiv \phi_j \circ \phi_i^{-1} : \mathbf{q}_i^{-1}(\mathbf{q}_i(U_i) \cap \mathbf{q}_j(U_j)) \rightarrow U_j, \quad (\text{C.4})$$

es suave (ver Figura C.1), donde ϕ_i es \mathbf{q}_i^{-1} .

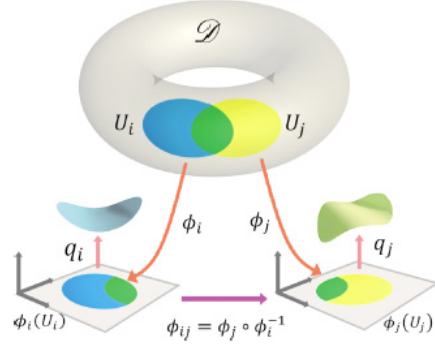


Figura C.1: variedad dos dimensional (dona).

Ejemplos

- n-esfera

$$S^n \equiv \{(q^1, \dots, q^{n+1}) | (q^1)^2 + \dots + (q^{n+1})^2 = 1\}. \quad (\text{C.5})$$

- n-cilindro⁴

$$C^n \equiv \{(q^1, \dots, q^{n+1}) | (q^1)^2 + \dots + (q^n)^2 = 1\}. \quad (\text{C.6})$$

Demos un par de comentarios

- La dimensión de \mathcal{M} es el valor de k .
- Se le llama ambiente al espacio \mathbb{R}^{n+1} donde se encuentra embebida la variedad.

Definición C.3 Sea \mathcal{M} una variedad de dimensión k . Definimos el espacio tangente de \mathcal{M} en $p \in \mathcal{M}$ como el espacio vectorial generado por el conjunto $\{\partial_\mu \mathbf{q}|_p \text{ t.q. } \mu = 1, \dots, k\}$ y lo denotamos por $T_p(\mathcal{M})$. Cuando se sobreentiende cual es la carta, se denota a la base de $T_p(\mathcal{M})$ simplemente por $\{\partial_\mu\}$.

Definición C.4 Definimos el fibrado tangente de \mathcal{M} como⁵

$$T\mathcal{M} = \cup_{p \in \mathcal{M}} T_p(\mathcal{M}). \quad (\text{C.7})$$

⁴El n-cilindro también se puede escribir como $S^{n-1} \otimes \mathbb{R}$.

⁵Comentemos dos cosas. Uno, $T\mathcal{M}$ tiene estructura de variedad, véase [21] Parte 2, Capítulo 2. Dos, bajo este contexto, a un solo espacio tangente también se le llama fibra tangente.

C.1.1. Variedades Riemannianas y Pseudoriemannianas

Definición C.5 Sea \langle, \rangle un producto interno definido sobre $T_p(\mathcal{M})$, definimos una métrica Riemanniana a la aplicación g que asocia un producto interno a cada $p \in \mathcal{M}$. Al par (\mathcal{M}, g) le llamaremos variedad Riemanniana.

Definición C.6 Definimos el tensor métrico como⁶

$$g : T_p(\mathcal{M}) \times T_p(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\text{C.8})$$

$$g_{ij} \equiv \langle \partial_i \mathbf{q}|_p, \partial_j \mathbf{q}|_p \rangle. \quad (\text{C.9})$$

Definición C.7 Sea \langle, \rangle un producto interno degenerado, definimos una pseudométrica definida sobre $T_p(\mathcal{M})$ a la aplicación \mathfrak{g} que asocia un producto interno degenerado a cada $p \in \mathcal{M}$. Al par $(\mathcal{M}, \mathfrak{g})$ le llamaremos variedad Pseudoriemanniana.

Fijémonos en un diferencial de longitud cuadrático en la vecindad de $p \in \mathcal{M}$, expresada en términos de coordenadas cartesianas⁷

$$ds^2 = (dq^1)^2 + \dots + (dq^{n+1})^2, \quad (\text{C.10})$$

expresando las coordenadas cartesianas en términos de las coordenadas de alguna carta y usando regla de la cadena, se puede llegar con cálculo directo a que

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j. \quad (\text{C.11})$$

Es importante notar que cada sumando es una forma cuadrática.

Definición C.8 Definimos la *signatura* de \mathfrak{g} como el par (p, q) , donde cada entrada es el número de formas cuadráticas en ds^2 , p para las positivas y q para las negativas.

Una forma diferente de definir una variedad Riemanniana es exigiendo que el tensor métrico de la variedad tenga solo signatura positiva, mientras que al tener signatura positiva y negativa queda definida una variedad Pseudoriemanniana.

Las variedades Pseudoriemannianas cuadrimensionales son usadas para describir el espacio-tiempo en GR, tres coordenadas para el espacio y una para el tiempo.

⁶Hay formas menos generales de definirla, por ejemplo en una base recíproca (véase [30] Parte 1, Capítulo 1.2), pero la esencia es que todas tienen la información necesaria para representar una n -ada en diferentes bases.

⁷Los diferenciales son 1-formas y por ende son tensores contravariantes, véase la Sección C.1.2.

Definición C.9 Llamaremos variedad Lorentziana a la variedad Pseudoriemanniana cuya pseudométrica tenga signatura $(p, 1)$.

El ejemplo más usado de una variedad Lorentziana es el espacio plano de Minkowski, cuya signatura es la más simple posible para una variedad cuatridimensional $(3, 1)$. Usualmente se denota la métrica como η y a la signatura como $(-, +, +, +)$ para referirse a la forma explícita de ds^2 , a saber

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.12})$$

C.1.2. k-formas

Definimos las 0-formas simplemente como las funciones escalares. Ahora definamos las 1-formas. Se les llamará 1-formas a los elementos del espacio dual del espacio tangente. Se denotará por df a las 1-formas y $\{dx^\nu\}$ a la base de dicho espacio, así $dx^\nu(\partial_\mu) = \delta_\mu^\nu$.

Consideremos la 1-forma definida por

$$d\mathbf{q}(v^\mu) = \partial_\mu \mathbf{q}|_p v^\mu, \quad (\text{C.13})$$

que es la derivada direccional. Se puede demostrar que la base canónica de la 1-forma anterior es el conjunto $\{dx^\mu \mid \mu = 1, \dots, k\}$ ⁸, así

$$d\mathbf{q} = \partial_\mu \mathbf{q}|_p dx^\mu, \quad (\text{C.14})$$

donde cada dx es un diferencial.

Prosigamos a definir las 2-formas. Dadas dos 1-formas $d\mathbf{q}_1, d\mathbf{q}_2$, definimos una 2-forma a la función ψ dada por

$$\psi(d\mathbf{q}_1, d\mathbf{q}_2) \equiv \det(\partial_\mu \mathbf{q}_1 \partial_\nu \mathbf{q}_2), \quad (\text{C.15})$$

la cual se denota como $d\mathbf{q}_1 \wedge d\mathbf{q}_2$. Esta función cumple con las siguientes dos propiedades

$$\begin{aligned} (a_1 d\mathbf{q}_1 + a_2 d\mathbf{q}_2) \wedge d\mathbf{q}_3 &= a_1 (d\mathbf{q}_1 \wedge d\mathbf{q}_3) + a_2 (d\mathbf{q}_2 \wedge d\mathbf{q}_3) \\ d\mathbf{q}_1 \wedge d\mathbf{q}_2 &= -d\mathbf{q}_2 \wedge d\mathbf{q}_1. \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Finalmente, una k-forma es la generalización natural de una 2-forma para k 1-formas, la cual cumple con las mismas dos propiedades para cualquier par de 1-formas, esto es

$$d\mathbf{q}_1 \wedge \dots \wedge d\mathbf{q}_i \wedge \dots \wedge d\mathbf{q}_j \wedge \dots \wedge d\mathbf{q}_k = d\mathbf{q}_1 \wedge \dots \wedge d\mathbf{q}_j \wedge \dots \wedge d\mathbf{q}_i \wedge \dots \wedge d\mathbf{q}_k. \quad (\text{C.17})$$

Linealidad

⁸Véase [21] Parte 1, Capítulo 4 y [31] Capítulo 8, Sec. 6.

Derivada exterior

Un operador muy útil en geometría diferencial y topología es el operador derivada exterior, el cual es un mapeo que convierte una k -forma en una $k+1$ -forma que cumple con las siguientes propiedades

- Sea f una 0-forma, entonces df es 1-forma.
- Sea α una k -forma y β una p -forma, entonces $d(d\alpha) = 0$ y $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k(\alpha \wedge d\beta)$.

C.2. Haces fibrados

Intuitivamente un haz fibrado es la generalización de un campo vectorial sobre \mathcal{M} , recordemos que un campo es el mapeo $f : \mathcal{M} \rightarrow V$ con V un espacio vectorial.

Definición C.10 Un haz fibrado⁹ consiste de dos variedades E y \mathcal{M} , y un mapeo

$$\pi : E \rightarrow \mathcal{M}. \quad (\text{C.18})$$

A E se le llama espacio total, a \mathcal{M} espacio base y a π proyección. Para cada $p \in \mathcal{M}$ existe una fibra definida por

$$E_p \equiv \{q \in E : \pi(q) = p\}, \quad (\text{C.19})$$

tal que $E = \cup_{p \in \mathcal{M}} E_p$. Esta es la razón por la que se le llama haz fibrado.

Un ejemplo muy claro y simple es el haz tangente. Intuitivamente un haz tangente es un campo vectorial que asigna un vector a cada punto de la variedad (ver Figura C.2).

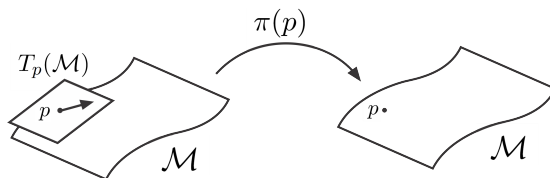


Figura C.2: haz tangente.

Definición C.11 Definimos al haz tangente de \mathcal{M} como el mapeo

$$\pi : T\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}. \quad (\text{C.20})$$

⁹En inglés se les conoce como *bundle*.

Es común que en la literatura se denote a un haz fibrado simplemente con E , así, para el haz tangente se denota como $T\mathcal{M}$.

Definición C.12 Se define a un haz trivial como aquel haz que $E = \mathcal{M} \times F$ y $\pi(p, f) = p$ para todo $(p, f) \in \mathcal{M} \times F$. Con F una fibra estándar.

Notar que

$$E_p = \{(p, f) \in \mathcal{M} \times F : \pi(p, f) = p\} = \{p\} \times F. \quad (\text{C.21})$$

Una propiedad de los haces triviales es que existe un diferomorfismo¹⁰ entre cada fibra E_p y la fibra F . Este tipo de haces tienen propiedades que uno suele buscar, sin embargo, los haces de mayor interés en gravitación, son los haces que son triviales solo localmente. Para poder definir estos haces, necesitamos definir los isomorfismos.

Definición C.13 Sea $\pi : E \rightarrow \mathcal{M}$ y $\pi' : E' \rightarrow \mathcal{M}'$ haces fibrados. Llamaremos morfismo al mapeo $\psi : E \rightarrow E'$ junto con el mapeo $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ tal que ψ mapea cada fibra E_p a la fibra $E'_{\phi(p)}$ (ver Figura C.3).

Si ψ y ϕ son difeomorfismos, se dirá que hay un isomorfismo sobre el haz fibrado π .

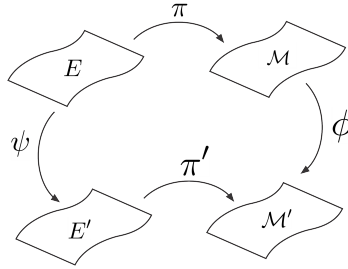


Figura C.3: morfismo.

Definición C.14 Sea $\pi : E \rightarrow \mathcal{M}$ un haz fibrado, decimos que hay una trivialización local¹¹ si para cada $p \in \mathcal{M}$ hay una vecindad U de p y un isomorfismo sobre π

$$\psi : E|_U \rightarrow U \times F, \quad (\text{C.22})$$

con

$$E|_U = \{q \in E : \pi(q) \in U\}, \quad (\text{C.23})$$

el cual envía cada fibra E_p a la fibra $\{p\} \times F$. En este caso $U = \mathcal{M} = \mathcal{M}'$, $E = E|_U$, $E' = U \times F$ y $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ es la transformación identidad (ver Figura C.4).

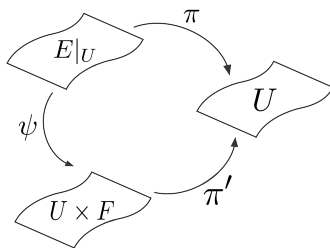


Figura C.4: trivialización local.

Es común que a ψ se le denote por ϕ y a la antigua ϕ se le omite.

Definición C.15 Se define al haz vector como el isomorfismo sobre el haz fibrado, cuya variedad $F = \mathbb{R}^n$ y \mathcal{M} es una variedad n -dimensional, así

$$\phi : E|_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^n. \quad (\text{C.24})$$

Se dijo al inicio de esta sección que un haz fibrado es una generalización de los campos vectoriales, esta generalización es lo que se llama sección.

Definición C.16 Sea $\pi : E \rightarrow \mathcal{M}$ un haz fibrado. Se define una sección de π a la función

$$s : \mathcal{M} \rightarrow E, \quad (\text{C.25})$$

tal que para cualquier $p \in \mathcal{M}$, $s(p) \in E_p$.

Esto quiere decir que una sección asigna a cada punto en el espacio base un vector en la fibra sobre el punto en cuestión.

C.2.1. Tétrada

Definición C.17 Sea \mathcal{M} una variedad n -dimensional orientada¹². Definimos un campo de referencia como el haz vector con trivialización local dado por

$$e : M \times \mathbb{R}^n \rightarrow T\mathcal{M}, \quad (\text{C.26})$$

mandando cada fibra $\{p\} \times \mathbb{R}^n$ de $M \times \mathbb{R}^n$ a su correspondiente espacio tangente $T_p(\mathcal{M})$.

¹⁰Un difeomorfismo en un mapeo biyectivo diferenciable.

¹¹Se puede mostrar que cualquier haz fibrado es trivialmente local, sin embargo no cualquiera lo es globalmente.

¹²Se dice que una variedad es orientada si puede definirse un diferencial de volumen en cada punto de \mathcal{M} , el cual se define como $dv = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, con g el determinante del tensor métrico.

Si \mathcal{M} es 4-dimensional, al campo de referencia se le llama tetrada o vierbein (dependiendo si se quiera griego o alemán), si es 3-dimensional, triada o dreibein y si es 2-dimensional, diada o zweibein.

C.2.2. Métrica interna

Dada una sección $s : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \times \mathbb{R}^n$, existe una base canónica $\{\xi\}$ dada por

$$\xi^i(p) = (0, 0, \dots, \underbrace{1}_{i\text{-ésimo lugar}}, \dots, 0), \quad (\text{C.27})$$

de esta forma podemos escribir

$$s = s^i \xi_i. \quad (\text{C.28})$$

Dada una tetrada, definimos

$$e(\xi_i) \equiv e_i^\alpha \partial_\alpha, \quad (\text{C.29})$$

donde e_i^α son funciones sobre \mathcal{M} y ∂_α la base coordenada de $T_p\mathcal{M}$. A \mathbb{R}^n se le conoce como *espacio interno*, a los índices latinos de la base $\{\xi\}$ se les llama índices internos y a los índices griegos se les llama espacio-temporales. En ocasiones se le denota a $e(\xi_i)$ simplemente como e_i .

Notar que hay un cierto parecido con el haz tangente.

Definición C.18 Sea s y s' secciones, definimos el siguiente producto interior

$$\eta(s, s') \equiv \eta_{ij} s^i (s')^j, \quad (\text{C.30})$$

donde η_{ij} es la métrica de Minkowski y se le llama métrica interna.

Definición C.19 Ahora definimos la métrica sobre campos vectoriales como

$$g(v, v') \equiv g_{ij} v^i (v')^j, \quad (\text{C.31})$$

con g_{ij} el tensor métrico.

Se dice que la tetrada es ortonormal si $g(e_i, e_j) = \eta_{ij}$. Cuando sucede esto, existen las siguientes relaciones¹³

$$\mathbf{[I]} \quad g_{\alpha\beta} = \eta_{ij} e_\alpha^i e_\beta^j. \quad (\text{C.32})$$

¹³Véase [21] Part. 3 Chap. 3.

[II]

$$\delta_j^i = e_\alpha^i e_j^\alpha. \tag{C.33}$$

donde e_α^i es la sección inversa de e_i^α y se le llama cotétrada.

C.2.3. Conexión

No es trivial la diferenciación de una sección de un haz fibrado, pues la definición de derivada requiere de dos puntos¹⁴, pero una sección esta definida en un solo punto, por lo que no es posible usar una definición similar, sin embargo, existe una forma de hacerlo llamada conexión.

Definición C.20 Sea E un haz vector sobre una variedad \mathcal{M} . Definimos una conexión D sobre \mathcal{M} , asignando cada campo vectorial v sobre \mathcal{M} una función

$$D_v : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E), \tag{C.34}$$

satisfaciendo las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} D_v(\alpha s) &= \alpha D_v s, \\ D_v(s + t) &= D_v s + D_v t, \\ D_v(fs) &= v(f)S + fD_v s, \\ D_{v+w}s &= D_v s + D_w s, \\ D_{fv}s &= fD_v s, \end{aligned} \tag{C.35}$$

con $v, w \in Vect(\mathcal{M})$, $s, t \in \Gamma(E)$, $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, donde $Vect(\mathcal{M})$ es el espacio vectorial de campos vectoriales sobre \mathcal{M} y $\Gamma(E)$ es el espacio vectorial de secciones sobre E ¹⁵ (ver Figura C.5).

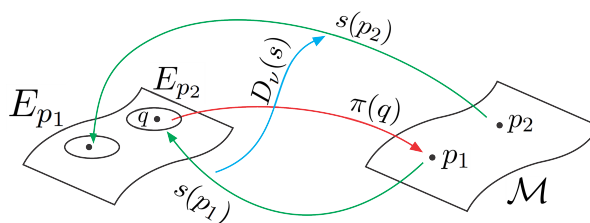


Figura C.5: cada semicírculo representa una fibra y la sección tiene como imagen un único punto de la fibra.

Para clarificar lo que es una conexión, tomemos como ejemplo una base $\{\partial_\mu\}$ del espacio $Vect(\mathcal{M})$ (se toma que los campos vectoriales están definidos sobre $T_p(\mathcal{M})$) y una base $\{e_i\}$ del espacio $\Gamma(E)$, notemos que¹⁶

¹⁴Por ejemplo, en el caso más sencillo $\frac{df}{dt} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, se necesita de los puntos x y Δx .

¹⁵A $D_v s$ también se le llama derivada covariante y se denota por $\nabla_v s$.

¹⁶Recordar e_i se puede expresar en términos de una combinación lineal de otra base y que $D_\mu : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$.

$$D_\mu e_j = A_{\mu j}^i e_i. \quad (\text{C.36})$$

Usando las propiedades de la definición anterior

$$D_v s = D_{v^\mu \partial_\mu} (s^i e_i) \quad (\text{C.37})$$

$$= v^\mu (\partial_\mu s^i + A_{\mu j}^i s^j) e_i, \quad (\text{C.38})$$

de esta forma podemos definir $(D_\mu s)^i$ como $\partial_\mu s^i + A_{\mu j}^i s^j$, la cual es la componente i de la derivada covariante $D_\mu s$. Además, podemos definir $A : \Gamma(E) \otimes \Gamma^*(E) \otimes T_p^*(\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$

$$A = A_{\mu j}^i e_i \otimes e^j \otimes dx^\mu, \quad (\text{C.39})$$

de tal forma que

$$A(v)s = A_{\mu j}^i v^\mu s^j e_i. \quad (\text{C.40})$$

Notar que podemos escribir $A_\mu = A_{\mu j}^i e_i \otimes e^j$, lo cual se asemeja mucho al potencial electromagnético¹⁷, por tal razón a A se le llama *potencial vectorial*, que es una generalización de éste.

Conexión plana estándar

Proposición C.1 Si D^0 es cualquier conexión sobre E con potencial vectorial A , entonces $D = D^0 + A$ también es una conexión, así

$$D_v^0 s = D_v^o s + A(v)s, \quad (\text{C.41})$$

para su demostración véase [21] Part. 3, Chap. 3.

En particular, si $D_v^0 s = v^\mu (\partial_\mu s^i) e_i$ se le llama a D^0 *conexión plana estándar* sobre E , que es la conexión que se usó anteriormente.

C.2.4. Conexión interna

Dado que e_α^i puede cambiarse por $e_\alpha^i \rightarrow \hat{e}_\alpha^i = \Lambda_k^i e_\alpha^k$, entonces

$$\begin{aligned} \hat{e}_\alpha^i \hat{e}_\beta^j \hat{\eta}_{ij} &= \Lambda_k^i \Lambda_l^j e_\alpha^k e_\beta^l \eta_{ij} \\ \Leftrightarrow \eta_{kl} &= \Lambda_k^i \hat{\eta}_{ij} \Lambda_l^j, \end{aligned} \quad (\text{C.42})$$

esta condición define al grupo de Lorentz, y de hecho este es el grupo interno más grande posible para tétradas ortonormales, por lo que podemos decir que la tétrada se comporta como vector sólo bajo transformaciones de Lorentz. Si queremos una conexión que transforme

¹⁷Véase [21] Parte 1, Capítulo 5 y Parte 1, Capítulo 6.

tétradas como vectores bajo transformaciones de Lorentz, es necesario definir una conexión plana estandar para las tétradas como (lo cual simplemente se enunciará)

$$(D_\mu e)^i = \partial_\mu e^i + \omega_{\mu j}^i e^j, \quad (\text{C.43})$$

cuyo potencial vectorial es ω_μ .

La conexión interna puede pensarse como un campo de norma generado por transformaciones de Lorentz locales.

C.2.5. Curvatura

Definición C.21 Sea E un haz vectorial sobre una variedad \mathcal{M} con conexión D . Definimos la curvatura de la conexión

$$F(u, w)s = D_v D_w s - D_w D_v s - D_{[v, w]} s, \quad (\text{C.44})$$

con $[v, w]$, el conmutador entre v y w ¹⁸.

Denotaremos a $F(\partial_\mu, \partial_\nu)$ como $F_{\mu\nu}$. Se puede mostrar que¹⁹

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu], \quad (\text{C.45})$$

donde A es el potencial vectorial.

Intuitivamente, la curvatura mide si hay o no transporte paralelo “exacto”, de lo cual no se hablará, pero se puede encontrar en cualquier libro de relatividad²⁰

¹⁸También llamado paréntesis de Lie.

¹⁹Véase [21] Parte 2, Capítulo 3. Por otro lado, notemos que el campo electromagnético y el potencial electromagnético tienen la misma relación salvo por $[A_\mu, A_\nu]$.

²⁰Es importante mencionar que cuando se exige que $D_\nu D_\mu s = D_\mu D_\nu s$, se obtiene la conexión de Levi-Civita y el potencial vectorial queda definido por los símbolos de Christoffel (véase [32] Capítulo 3).

Apéndice D

Teorías de Chern-Simons

En esta sección se da una introducción de las teorías de Chern-Simons, véase [33] para un estudio más detallado.

En teoría de haces fibrados, la curvatura F , como su nombre lo indica, tiene información local sobre cómo el haz fibrado se “dobla” sobre cada punto del espacio base. Como se menciona en el Apéndice C, cualquier haz fibrado es localmente trivial pero globalmente no necesariamente lo es, y esto depende sencillamente del tipo de conexiones que se pueden definir sobre el haz fibrado y que son compatibles con la estructura del mismo.

Dado que las conexiones son estructuras más complejas que la variedad en donde esta definida en sí, cabe preguntarse ¿por qué introducir estas estructuras? Una respuesta razonable es que las conexiones nos permiten construir invariantes topológicos de variedades, lo cual se relaciona mucho con teorías topológicas y a su vez con gravedad como se menciona en el Apéndice E.

Veremos que la teoría de clases características construye invariantes topológicos a través de polinomios invariantes definidos sobre haces fibrados.

Definición D.1 Sea G un grupo de Lie definido sobre la curvatura F^1 y \mathfrak{g} su álgebra asociada. Se define una aplicación multilineal simétrica G -invariante como

$$P : \bigotimes_r \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{F} \quad \text{con} \quad \mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \quad (\text{D.1})$$

donde $\bigotimes_r \mathfrak{g}$ es el producto exterior sobre todos los elementos del álgebra de Lie \mathfrak{g} , además, P satisface que

- P es simétrico para todo i, j

$$P(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_r) = P(A_1, \dots, A_j, \dots, A_i, \dots, A_r). \quad (\text{D.2})$$

¹Véase Sección C.2.5 del Apéndice C.

- Para todo $g \in G$, P es invariante

$$P(Ad_g(A_1), \dots, Ad_g(A_i), \dots, Ad_g(A_r)) = P(A_1, \dots, A_i, \dots, A_r), \quad (\text{D.3})$$

donde Ad_g es la matriz adjunta de la representación matricial de g .

Se denotará por $I^r(G)$ al conjunto de todas las funciones simétricas G – invariantes.

Con todo esto, podemos definir lo que es un polinomio invariante homogéneo, el cual es fundamental para las teorías de Chern-Simons

Definición D.2 Llamaremos a P un polinomio invariante homogéneo de grado r si

$$P : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{F}$$

$$P(A) = \underbrace{\bar{P}(A, \dots, A)}_{r\text{-veces}} \quad \text{con} \quad \bar{P} \in I^r(G). \quad (\text{D.4})$$

Se puede mostrar que la curvatura F es un elemento de \mathfrak{g} , por lo que tiene sentido operar $P(F)$. Aquí es donde cobra relevancia el estudio de los polinomios invariantes, pues se tiene el siguiente resultado de suma importancia para gravedad y otras áreas de la física

Proposición D.1 Teorema de Chern-Weyl

Sea P un polinomio invariante homogéneo de grado r y F la curvatura asociada a la conexión A , entonces

- $dP(F) = 0$, donde $dP(F)$ es la derivada exterior de $P(F)$. Lo anterior dicho en palabras es $dP(F)$ es una forma diferencial cerrada.
- $dP(F_2) - dP(F_1) = dTP_j$, es decir, es una forma diferencial exacta, donde

$$TP_j = j \int_0^1 \bar{P}_j(A, F_t, \dots, F_t) dt, \quad (\text{D.5})$$

con $F_t = t dA + t^2 A \wedge A$ y t es un parámetro. Notar que esto es un polinomio invariante homogéneo.

D.1. Formas de Chern-Simons

Como consecuencia del teorema Chern-Weyl (D.1) tenemos²

$$dP_j(F) = d\mathcal{C}_{2j-1}(A, F), \quad (\text{D.6})$$

con $\mathcal{C}_{2j-1} \in \mathfrak{g} \otimes \Omega^{2j-1}(\mathcal{M})$ y \mathcal{C}_{2j-1} toma la forma

$$\mathcal{C}_{2j-1} = j \int_0^1 \text{str}(A, F_t, \dots, F_t) dt, \quad (\text{D.7})$$

donde

$$\text{str}(A, F_t, \dots, F_t) \equiv \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \text{tr}(A_{\sigma(1)}, F_{t,\sigma(2)} \cdots, F_{t,\sigma(r)}), \quad (\text{D.8})$$

con S_r un grupo simétrico, es decir, el grupo formado por todos los automorfismos sobre algún conjunto dado, cuya operación de grupo es la composición de funciones.

El caso de interés para nosotros es cuando $j = 2$, en ese caso, la ecuación (D.7) se reduce a

$$\mathcal{C}_3(A) = \text{Tr} \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right). \quad (\text{D.9})$$

Las teorías Chern-Simons son teorías cuya acción se puede expresar en términos de la conexión como

$$S_{CS}[A] = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{C}_{2j-1}(A), \quad (\text{D.10})$$

para el caso $j = 2$ la acción se reduce a

$$S_{CS}[A] = \int_{\mathcal{M}} \text{Tr} \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right), \quad (\text{D.11})$$

la cual es la acción de interés para nosotros. Ahora prosigamos con el análisis de Hamiltoniano de trabajo.

²Véase [33], Capítulo 1, Sec. 2.

Apéndice E

Simetrías y constricciones en gravedad

La aportación más importante que dio RG fue el cambio en la concepción del espacio-tiempo y las simetrías que trae consigo, a saber, la independencia del espacio-tiempo de fondo y la invariancia bajo difeomorfismos. Como ya se había comentado en la introducción, GCL es una teoría que conserva las simetrías de RG y los principios de mecánica cuántica. En este capítulo se hablará de las constricciones que tiene RG.

E.1. Simetrías

Independencia del espacio tiempo de fondo

Como se mencionó en la introducción, la independencia del espacio-tiempo de fondo fijo significa que no hay un escenario donde evolucionen los campos. Lo anterior equivale a decir que una teoría independiente del espacio-tiempo de fondo es una teoría cuyos campos que definen a la teoría junto con el espacio-tiempo, son todos dinámicos. Por ejemplo, en el caso de Chern-Simons, el único campo presente es la conexión A , la cual se trata como variable dinámica. De igual manera, en el caso de GR, la variable dinámica que aparece en la acción de Einstein-Hilbert es el tensor métrico; de aquí se lo que usualmente se dice en los textos, que el hecho de que el espacio-tiempo sea dinámico equivale a la independencia del espacio-tiempo de fondo.

Invariancia bajo difeomorfismos

Existen dos tipos de invariancia ante difeomorfismos. El primero de ellos es la invariancia ante difeomorfismo activos, la cual puede verse como aquella que se mantiene invariante bajo un “arrastre de los campos” sobre la variedad. Debido a lo que ya se mencionó anteriormente, en una teoría independiente del espacio-tiempo de fondo todos los campos son dinámicos, si “arrastramos” todos los campos y sus interacciones la teoría resultante seguirá siendo básicamente equivalente, puesto que los puntos en la variedad sólo tienen importancia debido a lo que físicamente sucede en ellos, y si trasladamos todo el sistema (campos e interacciones) los puntos finales serán físicamente equivalentes a los primeros. Es en este sentido es que

la independencia del espacio-tiempo de fondo se traduce en la invariancia bajo difeomorfismos activos. Cuando se habla de invariancia del espacio-tiempo de fondo, en realidad se está hablando de invariancia ante difeomorfismos activos. El segundo tipo de invariancia ante difeomorfismos son los pasivos, los cuales son los que se enseñan usualmente en los textos de GR, es decir, cambios generales de coordenadas. Así, una teoría que es invariante bajo difeomorfismos pasivos, es aquella que se mantiene invariante bajo transformaciones generales de coordenadas, podemos citar como ejemplo a la teoría electromagnética. La teoría de Maxwell descrita por la siguiente acción

$$S_M[A] = -\frac{1}{4} \int_{\mathcal{M}} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x, \quad (\text{E.1})$$

es invariante bajo difeomorfismos pasivos, pero no bajo difeomorfismos activos.

Cuando una teoría posee ambas simetrías, se dice que la teoría posee covariancia general. Las teorías topológicas son importantes en gravedad porque éstas tienen covariancia general.

Definiciones formales

Formalmente, dada una variedad \mathcal{M} , un difeomorfismo activo ϕ es un mapeo suave invertible de \mathcal{M} en \mathcal{M} . Un campo escalar T en \mathcal{M} es un mapeo $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$. Dado un difeomorfismo ϕ y un nuevo campo escalar \bar{T} , se dirá que es un difeomorfismo activo si \bar{T} se transforma como

$$\bar{T}(P) = T(\phi(P)). \quad (\text{E.2})$$

Notar que las coordenadas no tienen ningún papel aquí.

Un sistema de coordenadas x en una variedad \mathcal{M} , d -dimensional, es un mapeo invertible y diferenciable de un conjunto abierto de \mathcal{M} a \mathbb{R}^d . Dado un campo T en \mathcal{M} , este mapeo determina la función $t : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $t(x) = T(P(x))$, llamada “el campo T en coordenadas x ”. Entonces un difeomorfismo pasivo es un mapeo invertible y diferenciable $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ que define un nuevo sistema de coordenadas x_0 en \mathcal{M} por $x(P) = \phi(x_0(P))$. El valor del campo T en coordenadas x_0 está dado por

$$t_0(x_0) = t(\phi(x_0)). \quad (\text{E.3})$$

Hay que tener cuidado de no confundir las ecuaciones (E.2) y (E.3), debido a la similitud que hay entre ellas.

E.2. Constricciones

Cuando GR se escribe en la forma ADM (véase [15]), aparecen dos constricciones, la llamada **constricción vectorial** y la **constricción Hamiltoniana**, las cuales están dadas por

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &\equiv \frac{1}{2^{(3)}e} \left(\pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{1}{2} (\pi^i_i)^2 - 2^{(3)}e^2 {}^{(3)}R - 4^{(3)}e^2 \lambda \right) \approx 0 \\
\mathcal{H}_a &\equiv -e_{ai}^{(3)} D_b \pi^{bi} \approx 0,
\end{aligned} \tag{E.4}$$

con $\pi^{ij} \equiv \pi^{ai} e_a^j$, ${}^{(3)}e \equiv \det(e_{ai})$, ${}^{(3)}D_a$ la conexión tal que ${}^{(3)}D_a e_{ai} = 0$ y R el escalar de Ricci, donde e_a^j es la tétrada y π^{ai} es el momento conjugado de la tétrada. La importancia de estas constricciones es la forma que tienen, \mathcal{H}_a es una restricción de un índice libre no polinomial y \mathcal{H} es una restricción sin índices también no polinomial. Es importante mencionar que usando el formalismo ADM no se ha podido cuantizar RG, así como ninguna otra teoría a excepción de GCL, sin embargo, esta teoría es incompleta. Por lo tanto, la cuantización de RG aún es un problema abierto en la física fundamental.

Bibliografía

- [1] A. Ashtekar and T. Pawłowski and P. Singh, Quantum nature of the big bang: Improved dynamics, *Physical Review D*, 2006.
- [2] C. Rovelli. *Quantum gravity*. Cambridge University Press, 2004.
- [3] J. Alfaroa and H. A. Morales-Tecotl and L. F. Urrutia, Loop quantum gravity and light propagation, *arXiv:hep-th/0108061v3*, 2002.
- [4] G. Amelino-Camelia and G. D’Amico and G. Rosati and N. Loreto, In-vacuo-dispersion features for GRB neutrinos and photons, *textitarXiv:1612.02765v1*, December 2016.
- [5] E. Verlinde. On the origin of gravity and the laws of Newton. *SISSA by Springer*, April 2010.
- [6] M. Henneaux and C. Teitelboim, *Quantization of Gauge systems*, Princeton university press, 1991.
- [7] L. Faddeev and R. Jackiw, Hamiltonian reduction of unconstrained and constrained systems, *Physical Review Letters*, 1988.
- [8] J. Barcelos and C. Wotzasek, *Modern Physics Letters A* 7.19, 1992.
- [9] Leng Liao and Yong Chang Huang, Non-equivalence of Faddeev–Jackiw method and Dirac–Bergmann algorithm and the modification of Faddeev–Jackiw method for keeping the equivalence, *Annals of Physics*, Enero 2007.
- [10] E. Witten, *Nuclear Physics B*, 311 (1988) 46.
- [11] D. Jimenez Rezendé and A. Perez. 4d Lorentzian Holst action with topological terms. *arXiv:0902.3416v1 [gr-qc]*, 2009.
- [12] A. Escalante and O. Rodríguez-Tzompantzi, On the Faddeev–Jackiw symplectic framework for topologically massive gravity, *The European Physical Journal C*, 2016.
- [13] R. Cartas Fuentesvilla and A. Escalante and A. Herrera Aguilar, Simplectic analysis of three-dimensional Abelian topological gravity, *The European Physical Journal plus*, 2017.
- [14] V. Husain, 2+1 gravity without dynamics, *arXiv:hep-th/9204029*, 1, April 1992.
- [15] P. Peldán, Actions for Gravity, with Generalizations: A Review, *arXiv:gr-qc/9305011 v1*, May 1993.

- [16] A. Escalante and O. Ochoa, Canonical and symplectic analysis for three dimensional gravity without dynamics, *Annals of Physics*, 2017.
- [17] Goldstein and Poole and Safko, *Classical Mechanics*, Addison Wesley, third edition, 2000.
- [18] G. F. Torres del Castillo, Estructuras hamiltonianas para campos clásicos, *Revista Mexicana de Física*, (1):165-185, 1991.
- [19] G. Reinhardt and J. Reinhardt, *Field Quantization*, Springer, 1993.
- [20] D. M. Gitman and I. V. Tyutin, *Quantization of fields with constraints*, Springer-Verlag, 1990.
- [21] J. Baez and J. Muniain, Gauge Fields, Knots and Gravity, volume 4. World Scientific, 1994.
- [22] F. J. de Urries, Ostrogradski formalism for higher-derivative scalar field theories. *arXiv:hep-th/9802115v2*, Marzo 1998.
- [23] E. Witten. 2 + 1 dimensional gravity as an exactly soluble system. *Nuclear Physics*, 1988.
- [24] R. Barbosa and C. Constantinidis and Z. Oporto and O. Piguet, Quantization of Lorentzian 3D gravity by partial gauge fixing, *Classical and quantum gravity*, 2012.
- [25] A. Escalante and J. Manuel-Cabrera, Hamiltonian dynamics and Faddeev–Jackiw formulation of 3D gravity with a Barbero–Immirzi like parameter, *The European Physical Journal C*, 2017.
- [26] Juan Antonio Pérez, La distribución Delta, Centro Regional de Estudios Nucleares. Universidad Autónoma de Zacatecas, 2003.
- [27] Kees Dullemond and Kasper Peeters, Introduction to Tensor Calculus, original version 1991, translation 2010.
- [28] L. Esgoltz, *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional.*, MIR, 1969.
- [29] J.D. Logan, *Invariant Variational Principles*, volume 138. Academic Press, 1977.
- [30] J. H. Heinbockel. Introduction to tensor calculus and continuum mechanics. Department of mathematics and statistics. Old dominion university.
- [31] J. Oprea, *Differential Geometry and its Applications*, The Mathematical Association of America, second edition, 2007.
- [32] R. M. Wald, *General relativity*. The University of Chicago Press, 1984.
- [33] D. F. Rengifo. Teoría de Chern-Simons $D=3$ y su relación con Teoría de Campos Conformes. Master's thesis, Universidad del Valle, Febrero 2014