



# BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

INSTITUTO DE FÍSICA "LUIS RIVERA  
TERRAZAS"

**"Estudio del crecimiento de la sección eficaz diferencial total  
como función del parámetro de escala, en el límite de low  $x$   
para un modelo de escalamiento geométrico dependiente de la  
energía"**

**TESIS**

**MAESTRÍA EN CIENCIAS  
FÍSICA**

PRESENTA

**LFA Alejandro Contreras Munive**

DIRECTOR (ES) DE TESIS

**Dra. Irais Bautista Guzmán  
Dr. Alfonso Rosado Sánchez**

No. de CVU: 893846

25/10/2023

**Título: Estudio Del Crecimiento de la Sección Eficaz Diferencial Total como función del parámetro de escala, en el límite de  $lowx$  para un modelo de escalamiento geométrico dependiente de la energía.**

**Autor: Alejandro Contreras Munive**

### COMITÉ

#### PRESIDENTE

Dr. Alberto Escalante Hernández \_\_\_\_\_.

Dr. Héctor Novales Sánchez \_\_\_\_\_.

Dr. Julio Villanueva Cab \_\_\_\_\_.

#### ASESORES

Dra. Irais Bautista Guzmán \_\_\_\_\_.

Dr. Alfonso Rosado Sánchez \_\_\_\_\_.

## **Agradecimientos**

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo para poder enfocarme a tiempo completo en el estudio de la maestría.

A mis asesores, la doctora Irais Bautista Guzmán y el doctor Alfonso Rosado por su guía para culminar este trabajo.

A mi madre en donde quiera que esté, que desafortunadamente no pudo llegar a ver este trabajo culminado. A mi papá por su apoyo moral, a mi abuela, a don Pedro.

A mis mejores amigos de toda la vida: Uriel, Julián y Ana.  
A Melissa, Antonia, Alberto, Nadia, Aldair. Y al resto de amigos y colegas que me han acompañado en el camino.





# Índice general

<b>Resumen</b> . . . . .	1
<b>1. Marco Teórico</b>	<b>5</b>
<b>1.1. Colisiones Relativistas de Iones Pesados</b> . . . . .	5
<b>1.1.1. Variables de Mandelstam</b> . . . . .	7
<b>1.2. Modelo Estándar</b> . . . . .	8
<b>1.3. QCD</b> . . . . .	9
<b>1.3.1. Lagrangiano de QCD</b> . . . . .	11
<b>1.3.2. Constante de Acoplamiento de QCD</b> . . . . .	12
<b>2. Amplitud de Dispersión y Sección eficaz</b>	<b>15</b>
<b>2.1. Amplitud de Dispersión</b> . . . . .	15
<b>2.2. Teorema Óptico y Sección Eficaz Total.</b> . . . . .	16
<b>2.2.1. Unitaridad</b> . . . . .	18
<b>3. Modelos de Escalamiento Geométrico</b>	<b>21</b>
<b>3.1. Límite de Froissart-Martin</b> . . . . .	21
<b>3.2. Modelo del Disco Gris</b> . . . . .	23
<b>3.2.1. Límite del disco negro</b> . . . . .	24
<b>3.3. Otros Modelos de Escalamiento geométrico</b> . . . . .	25
<b>3.3.1. Modelo de Chou y Yang</b> . . . . .	25
<b>3.3.2. Modelo de Durand y Lipen</b> . . . . .	27
<b>3.4. <math>t_{dip}</math></b> . . . . .	27
<b>4. Cálculos</b>	<b>33</b>
<b>4.1. Simulaciones CORSIKA</b> . . . . .	33

# Resumen

La composición de masa de los rayos cósmicos primarios es deducida de la sensibilidad de las observables que pueden ser obtenidas cuando la distribución de las cantidades medidas es comparada con los modelos hadrónicos para diferentes tipos de partículas primarias, estos modelos usualmente hacen una extrapolación de los parámetros a ultra-altas energías (en el orden de las decenas de TeV donde se reportan las mediciones de los experimentos de Rayos cósmicos ultra-energéticos), los cuales representan un escenario ideal para probar los límites de saturación gluónica y de Froissart (el cual, nos dice que en el límite de alta energía la sección eficaz está acotada por  $\ln^2 s$ ), y cuya confirmación experimental continúa siendo un problema abierto [1].





# Introducción

Una de las pruebas mas relevantes de la Cromodinámica Cuántica (QCD) en la región infraroja está dada por los estudios de la sección eficaz diferencial de la dispersión hadrón hadrón a varias energías y momento transferido, que contienen información relevante sobre la estructura interna del protón, así como las propiedades de la función de perfil del protón y las interacciones de los partones en la región de bajo momento transferido.

Estos estudios están enmarcados desde la región de low  $x$  de Bjorken, donde se tiene una escala equivalente de alta energía para una escala fija donde las densidades partónicas son altas. Es en esta región donde surge la idea de la saturación de las densidades partónicas, donde cobra especial relevancia, ya que, la fusión partónica que balancea la división de partones si  $A_{\mu\nu} \sim 1/g$ . Esta escala constituye un régimen de QCD donde las ideas de interacciones con pomerones, y dispersión multiple cobran relevancia, en este nuevo lenguaje de QCD, que también tiene su relación con las colisiones de iones pesados, donde también se toman densidades partónicas altas por la alta energía y el ensanchamiento del perfil que viene del tamaño o nuclear.

Dentro de los problemas abiertos en esta escala de saturación está el conocer si ocurre o no el límite de saturación a muy alta energía denominado *disco negro*, el cual, es un límite teórico asintótico que se espera que ocurra para muy altas escalas de energías en las colisiones protón protón. En este contexto, para tratar de estudiar la formación de este límite asintótico y conjuntar las recientes mediciones de los datos experimentales de las colaboraciones TOTEM[2], Auger[3] se propone realizar un estudio fenomenológico de la sección eficaz diferencial de las colisiones de protón-protón en el límite de altas energías, en el contexto de la formación de un escalamiento geométrico y saturación.

Se emplearán cálculos numéricos y analíticos para hacer una descripción fenomenológica del crecimiento de la sección eficaz diferencial consistente con los

resultados recientes de la colaboración TOTEM y se realizará la implementación en una simulación de CORSIKA, para comparar con las predicciones de los modelos hadrónicos actuales incluidos en SIBYLL, QGSJET, QGSJETII, y EPOS.

# Capítulo 1

## Marco Teórico

En el universo existen cuatro fuerzas que rigen todos los fenómenos que en él ocurren, estas fuerzas son: gravedad, electromagnética, nuclear débil y nuclear fuerte. La teoría que unifica a tres de ellas ( electromagnética, nuclear débil y nuclear fuerte) es conocida como *Modelo Estándar* y es, hasta la fecha, la teoría científica más probada y completa creada por los humanos. Pero no está exenta de cosas por explicar: energía y materia oscura, cuál es el origen de la masa, la aparente exclusión de la gravedad, entre otras.

La gran mayoría de las predicciones hechas por el Modelo Estándar, han sido verificadas experimentalmente gracias a los resultados obtenidos en los experimentos que involucran colisiones de iones a energías relativistas.

### 1.1. Colisiones Relativistas de Iones Pesados

En las colisiones ultra energéticas de iones pesados, necesitamos utilizar la cinemática de la relatividad especial, en esta teoría el vector de posición será el cuadrivector formado por:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

donde para  $\mu = 1, 2, 3$  tendremos las variables espaciales y para  $\mu = 0$  tenemos la variable temporal.

Para el vector cuadrimomento:

$$p^\mu = (E/c, p_T, p_z)$$

con  $E$  la energía de la partícula,  $p_T$  es el momento transverso dado por:

$$p_T = \sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2}$$

y  $p_z$  es el momento longitudinal.

Se usa la convención usual para las unidades naturales:

$$c = \hbar = 1$$

La métrica del espacio de Minkowsky para este caso es:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

El sistema de referencia usual es el del centro de masa, ya que la mayoría de los experimentos se realizan en colisionadores en los cuales se hacen chocar haces de partículas, entonces en este marco de referencia ocurre que:

$$\begin{pmatrix} E^* \\ p_T^* \\ p_z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_T \\ p_z \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Con  $\gamma$  el factor de Lorentz:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1.3)$$

y  $\beta$  la velocidad longitudinal de la partícula dada como:

$$\beta = \frac{p_z}{E}$$

En ese marco de referencia  $p_T = 0$  entonces con todo esto llegamos a:

$$E^* = \gamma(E - \beta p_z) \quad (1.4)$$

$$p_z^* = \gamma(p_z - \beta E) \quad (1.5)$$

Por otro lado, definimos dos cantidades de suma importancia para la cinemática de las partículas en las colisiones relativistas: la masa transversa

$m_T$  que se relaciona con la resta de los cuadrados de la energía y el correspondiente momento longitudinal  $p_z$  y la rapidez  $y$ :

$$m_T^2 = E^2 - p_z^2 = p_T^2 + m^2 \quad (1.6)$$

$$y = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{E + p_z}{E - p_z} \right) \quad (1.7)$$

Se hace un cambio de variable para la energía  $E$  y el momento  $p_z$  en términos de la rapidez y  $m_T$  como:

$$E = m_T \cosh y \quad (1.8)$$

$$p_z = m_T \sinh y \quad (1.9)$$

Por otro lado, al aplicar un boost de Lorentz a  $y$  tenemos:

$$\begin{aligned} y^* &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{E^* + p_z^*}{E^* p_z^*} \right) \\ &= y - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando  $p$  para  $y$  llegamos a lo que se conoce como *pseudorapidez*  $\eta$  la cual describe el ángulo que forma una partícula relativo al eje del haz:

$$\eta = - \ln \left[ \tan \left( \frac{\theta}{2} \right) \right] \quad (1.10)$$

Con  $\theta$  el ángulo formado por el momento de la partícula y la dirección positiva del haz.

### 1.1.1. Variables de Mandelstam

Como se busca tener que la energía y la posición sean cantidades invariantes, entonces se definen lo que se conoce como *variables de Mandelstam*, que nos garantizan que la energía del centro de masa será una invariante. Dichas variables se definen a partir de un proceso dispersivo, como puede observarse en la Figura [1.1](#). A partir de la figura definimos las variables  $s, t, u$  que serán dependientes de los momentos  $\mathbf{p}_i$ :

$$s = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 = (\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4)^2 \quad (1.11)$$

$$t = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3)^2 = (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_4)^2 \quad (1.12)$$

$$u = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_4)^2 = (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3)^2 \quad (1.13)$$

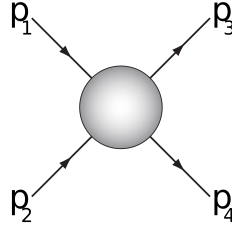


Figura 1.1: Proceso dispersivo para definir las variables de Mandelstam.

A partir de la primera invariante definimos *energía del centro de masa* como:

$$\begin{aligned}\sqrt{s} &= \sqrt{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2} \\ &= \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2} \\ &= \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 - 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}\end{aligned}$$

Como estamos trabajando en el marco de referencia del centro de masa, esto se reduce a:

$$\sqrt{s} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1m_2}$$

Que para el caso de las colisiones  $pp$  se reduce a:

$$\begin{aligned}\sqrt{s} &= \sqrt{2m_p^2 + 2p_{lab}m_p} \\ &\simeq \sqrt{2p_{lab}m_p}\end{aligned}$$

## 1.2. Modelo Estándar

El Modelo Estándar (M.E.) es una teoría cuántica de campo, que mezcla conceptos de la teoría cuántica con los de la relatividad de Einstein. El M.E. se construye a partir de tres subgrupos[4] que tienen simetrías de gauge:

- El primero está compuesto por ocho gluones que son los bosones gauge de  $SU_c(e)$  y que contribuyen con la parte de la interacción de la fuerza fuerte.
- Luego tenemos el grupo de la interacción de la fuerza débil  $SU(2)_L$  con sus tres bosones:  $W^\pm, Z$ .

- El grupo de las interacciones electromagnéticas  $U(1)_Y$ .

Los gluones serán partículas sin masa, eléctricamente neutros y con carga de color (rojo, azul, verde), además de mediar las interacciones entre los quarks podrán interactuar entre sí mismos como consecuencia de tener una carga de color.

A diferencia de los gluones, los bosones de la fuerza débil  $W^\pm, Z$  sí poseerán masa pero de igual forma que en el caso de los mediadores de la fuerza fuerte, podrán interactuar entre sí, además no poseen carga de color y para el caso del bosón  $Z$  este será eléctricamente neutro y los bosones  $W^\pm$  tendrán una carga  $Q = \pm 1$ .

Finalmente, los fotones no poseen masa, no tienen carga de color y no interactúan entre sí.

Los  $Z, W^\pm$  así como los gluones y los fotones son bosones vectoriales cuyo espín es 1, pero además existe un bosón escalar: el llamado *bosón de Higgs* con espín 0, carga eléctrica y de color neutras.

Todas estas partículas excepto el Higgs, serán las encargadas de mediar las interacciones de tres de las cuatro fuerzas fundamentales: los gluones de la fuerza fuerte, los fotones de la fuerza electromagnética y los bosones  $Z, W^\pm$  de la fuerza débil, por otro lado, el Higgs junto con el campo de Higgs se encargarán de darle masa a todas las demás partículas. En todos los casos, todos los bosones serán los encargados de cuantizar sus respectivos campos. En la figura [1.2](#) se muestra el compendio de todas las partículas elementales en el SM.

Existe otro grupo de partículas conocido como *fermiones*, ellas se caracterizan por tener un spin fraccionario, cumplen con la estadística de Fermi-Dirac. A esta familia pertenecen los quarks, los leptones y los bariones. Los Bosones son partículas cuyo spin tiene un valor entero.

### 1.3. QCD

*QCD* es la teoría de campo que se ocupa de analizar las interacciones entre los quarks, o sea las mediadas por la fuerza nuclear fuerte, aquí los quarks interactúan entre sí y con los mediadores que son los gluones para formar estados confinados llamados *hadrones*: mesones (formados por 2 quarks) y bariones (por 3 quarks).

Esta interacción entre los quarks y los gluones [Figura 1.3](#) se da gracias a su carga de color *rojo R, azul B, verde G* La carga de color fue introducida como

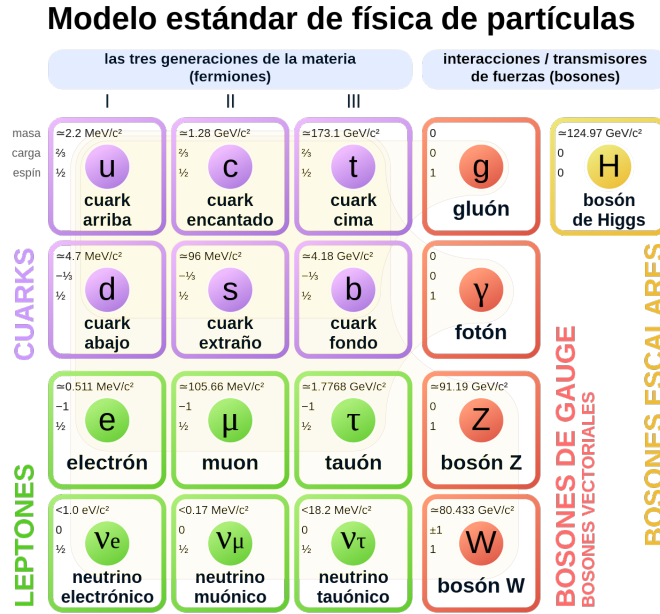


Figura 1.2: Partículas elementales del SM [5].

una forma en la que el principio de exclusión Pauli no fuera aparentemente violado por la existencia de los bariones ( $\Delta^{++}, \Delta^{--}, \Omega^{--}$ ) los cuales están compuestos por tres quarks  $uuu, ddd$  y  $sss$  respectivamente, su existencia se justificó introduciendo el número cuántico llamado color *rojo*  $R$ , *azul*  $B$ , *verde*  $G$  y sus respectivas anticargas  $\bar{R}, \bar{B}, \bar{G}$ . Entonces la formación de un barión o un mesón, será el resultado de la interacción entre las cargas de color de sus quarks, por ejemplo, para una interacción  $q\bar{q}$  habrá tres posibilidades:

$$\begin{aligned} R\bar{R} \\ B\bar{B} \\ G\bar{G} \end{aligned}$$

decimos que estos estados son de color neutro o *sin color* pero por si solos no pueden representar un estado hadronizado, por ejemplo, para formar un mesón necesitamos un estado de la forma:

$$R\bar{R} + B\bar{B} + G\bar{G}$$



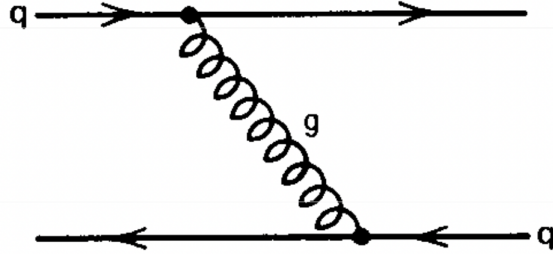


Figura 1.3: Interacción entre dos quarks mediante el intercambio de un gluón[6].

que es un estado sin color, entonces todas las partículas que conocemos serán estados sin color.

Existen los siguientes tipos de quarks: (*up, down, bottom, top, charm y strange*) y cada uno de ellos puede tener cualquiera de las seis cargas de color: (roja, verde y azul y sus anticargas), esto nos lleva a tener una teoría de Gauge del grupo  $SU(3)$ .

### 1.3.1. Lagrangiano de QCD

El Lagrangiano correspondiente para QCD no perturbativa, tiene la forma:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\psi}^\alpha [i(\gamma^\mu D_\mu)_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}] \psi^\beta - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \quad (1.1)$$

Donde  $\mu, \nu$  son las coordenadas espacio-temporales y los índices corren de 0 a 3, en la convención usual, el cero es ocupado por la coordenada temporal, y el resto para las componentes espaciales. Definimos la derivada covariante aplicada a los tripletes de color como:

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ig\lambda^a A_\mu^a \quad (1.2)$$

En la que  $g$  es la constante de acoplamiento fuerte y las representaciones del grupo  $SU(3)$  son las matrices  $\lambda^a$ .

Además, tenemos que la derivada covariante asociada a los octetes se define como:

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ig\Lambda^a A_\mu^a \quad (1.3)$$

Donde  $\Lambda^a$  son matrices elementos de  $SU(3)$  adjuntas, hermíticas, de dimensión  $8 \times 8$  y traza nula. Los campos para los quarks y gluones serán  $\psi^\alpha(A_\mu^a)$ , los cuales son elementos de los tripletes del grupo  $SU(3)$ .

Usando todo esto, podemos reescribir al segundo término en [1.1](#) de la siguiente forma:

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}, F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf_{abc}A_\mu^b A_\nu^c \quad (1.4)$$

El último término en el miembro derecho en [1.4](#) nos asegura la invarianza del Lagrangiano, y en conjunto con los otros dos términos, son los que tratan las interacciones del campo gluónico, los subíndices  $a, b, c$  van de 1 a 8, y  $f_{abc}$  serán las constantes de estructura correspondientes al Álgebra de Lie para el grupo  $SU(3)$ .

Sabemos que en  $QED$  los mediadores (los fotones) no interactúan entre ellos, pero en  $QCD$  ocurre que los mediadores (gluones) sí pueden tener interacciones entre ellos, esto como consecuencia a que tienen carga de color, como resultado de esta interacción se emiten de gluones por ellos mismos, esto se debe a la simetría del grupo no abeliano de  $SU(3)$ .

### 1.3.2. Constante de Acoplamiento de QCD

Uno de los resultados importantes dentro de  $QCD$  es que contrario a lo que ocurre con algunas de las otras fuerzas fundamentales, el rango de alcance es muy pequeño, además que no sigue una ley del inverso del cuadrado de la distancia, lo que significa que la fuerza disminuye su magnitud a medida que decrece la distancia entre las partículas que están interactuando.

A medida que disminuye la distancia, los quarks y los gluones dejan de sentir la influencia entre ellos, lo que provoca un comportamiento en el cual aparentemente se encuentran como estados libres, a esto se le conoce como *libertad asintótica*.

Esto se debe al cambio en la constante de acoplamiento  $\alpha_s$ , el cual se da como resultado de la interacción entre los gluones:

$$\alpha_s(r) = \frac{\alpha_s(r_0)}{1 - \frac{\alpha_s(r_0)}{12\pi}(11N_c - 2n_f \ln(r^2/r_0^2))} \quad (1.5)$$

Cuando tomamos el límite  $r \rightarrow 0$ ,  $\alpha_s(r) \rightarrow 0$ , nos lleva al aparente desconfiamiento.

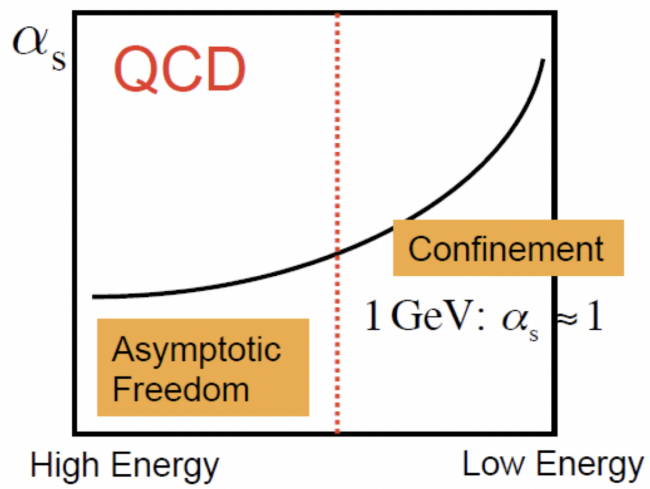


Figura 1.4: Comportamiento de la Constante de acoplamiento de QCD[7]



# Capítulo 2

## Amplitud de Dispersión y Sección eficaz

### 2.1. Amplitud de Dispersión

En teoría de la dispersión, la forma más simple de describir un experimento en el que haya dispersión, es si lanzamos un haz de partículas hacia un potencial fijo  $V(r)$  y calcular cuántas de ellas son desviadas de su trayectoria. Se debe resolver la ecuación de Schrödinger planteando una solución en forma de una onda plana. Podemos asumir el conjunto de las soluciones de las ecuaciones de todas las partículas forman un paquete de ondas, así todas ellas viajarán con la misma energía. De esta forma, la solución de la ecuación será:

$$\psi(r) = e^{ikr} + f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (2.1)$$

Con  $f(\theta, \varphi)$  la amplitud de dispersión y los ángulos  $\theta, \varphi$  medidos respecto al eje paralelo a la dirección del haz.

Después del proceso de dispersión, la corriente resultante será igual a la corriente inicial fluyendo a través de un área perpendicular  $d\sigma$  :

$$d\sigma(\theta, \varphi) = |f(\theta, \varphi)|^2 d\Omega \quad (2.2)$$

Con  $d\Omega$  el diferencial de ángulo sólido.

De la ecuación (2.2) podemos definir a la sección eficaz diferencial para la dispersión en las direcciones  $\theta, \varphi$  como:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \varphi)|^2 \quad (2.3)$$

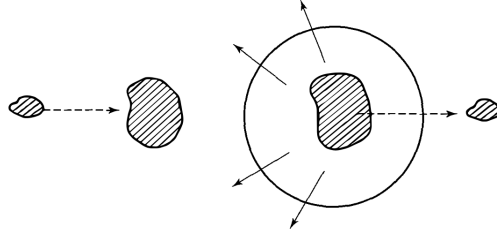


Figura 2.1: (a) Onda plana incidente. (b) Solución  $\psi(r)$  con la contribución de la onda plana mas la contribución de un onda esférica[8].

## 2.2. Teorema Óptico y Sección Eficaz Total.

Para conocer la sección eficaz total, basta con integrar respecto al ángulo sólido la sección diferencial dada por la ecuación (2.3) :

$$\sigma_{tot} = \int d\Omega \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \int d\Omega |f(\theta, \varphi)|^2 \quad (2.4)$$

Como ya expresamos a  $\sigma_{tot}$  en términos de  $f$ , trabajaremos con (2.1) expresada como:

$$\psi(r) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l j_l(kr) + B_l \eta_l(kr)] P_l(\cos \theta) \quad (2.5)$$

Con  $j_l$  las funciones esféricas de Bessel,  $\eta_l$  las funciones de Neumann y  $P_l(\theta)$  los polinomios de Legendre.

Ahora, aplicando el límite asintótico  $r \rightarrow \infty$  a las funciones de Neumann y Bessel, absorbiendo a los coeficientes  $A_l$  y  $B_l$  en la nueva constante  $C_l$  (2.5) queda como:

$$\psi(r) \simeq \sum_l C_l \frac{\exp [i (kr - l\pi/2 + \delta_l)] - \exp [-i (kr - l\pi/2 + \delta_l)]}{2ikr} P_l(\cos \theta) \quad (2.6)$$

Donde  $\delta_l$  es un desplazamiento de fase.

El siguiente paso es aprovechar el hecho de que definimos a  $\psi(r)$  como la contribución de ondas incidentes y salientes, entonces la parte de incidente será:

$$\psi_{in} = e^{ikr}$$

y si seguimos el mismo razonamiento utilizado para deducir (2.6) obtendremos:

$$\psi_{in}(r) \simeq \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \frac{\exp[i(kr - l\pi/2)] - \exp[-i(kr - l\pi/2)]}{2ikr} P_l(\cos \theta) \quad (2.7)$$

Notemos que para conocer  $\psi(r)$  bastaría con saber cuánto valen los  $C_l$ , y una vez hecho podríamos obtener fácilmente el valor de  $f$  y finalmente sustituir en (2.4) para tener  $\sigma_{tot}$ .

Entonces para encontrar  $C_l$  lo primero por hacer es restarle  $\psi_{in}$  a (2.1):

$$\psi(r) - \psi_{in}(r) = \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta)$$

Si nos fijamos en el miembro derecho de esta última expresión podemos decir que tenemos solamente la contribución de la onda incidente. Por otro lado  $f$  ya sólo es función de  $\theta$ , debido a que por tener ondas esféricas, las variaciones que nos interesan ocurrirán en ese ángulo.

Esto último implica que en el límite asintótico los coeficientes de  $\psi$  y  $\psi_{in}$  deben ser iguales, o sea:

$$C_l = (2l+1) \exp[i(\delta_l + l\pi/2)] \quad (2.8)$$

Si sustituimos este resultado en la ecuación para  $\psi$  dada por (2.6), posteriormente colocando lo obtenido y además la ecuación (2.8) en la ecuación para la resta de soluciones llegamos a:

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{\exp(i\delta_l)}{k} \sin \delta_l P_l(\cos \theta) \quad (2.9)$$

Finalmente, sustituyendo (2.9) en la ecuación (2.4) e integrando:

$$\sigma_{total} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l \quad (2.10)$$

Ahora, si nos fijamos en (2.9) veremos que su parte imaginaria es:

$$\text{Im } f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{\sin^2 \delta_l}{k} P_l(\cos \theta) \quad (2.11)$$

Comparando con (2.10), vemos que tenemos cantidades casi idénticas, es evidente que para tener la igualdad debemos evaluar los  $P_l$  en  $\theta = 0$ . Con esto último podemos concluir que:

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{k} \text{Im}[f(0)] \quad (2.12)$$

Que es el Teorema Óptico.

### 2.2.1. Unitaridad

Como ya vimos, es claro que la principal cantidad a estudiar es la probabilidad de que un conjunto de partículas en el estado inicial  $|i\rangle$  interaccione y de esta forma se dé un proceso dispersivo, de tal forma que este conjunto finalice en un estado  $\langle f|$ . Usando notación matricial este proceso se puede ver de la siguiente forma:

$$S_{fi} = \langle f| S |i\rangle \quad (2.13)$$

Donde  $S$  es la matriz de dispersión, y cuyos  $S_{fi}$  son los elementos de dicha matriz.

Sabemos que el proceso dispersivo puede no llegar a presentarse, para ese caso los elementos de la matriz  $S$  deberán ser escritos como:

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) T_{fi} \quad (2.14)$$

donde  $\delta^4$  nos da la condición de la conservación de momento para todas las partículas con momento  $p_j$ . Los elementos principales de  $S$  definen la dispersión, y estos a su vez, son funciones del momento de las partículas dispersadas.

Para medir la sección eficaz se usan dos caminos: contando el número de colisiones que se dan en las interacciones y el otro es medir la probabilidad de dispersión. La segunda forma usa la conservación de la probabilidad que está íntimamente relacionada con la propiedad de unitaridad de la matriz  $S$ , que puede verse como:

$$SS^\dagger \quad (2.15)$$

que puesto en términos de los elementos  $s_{fi}$  esta condición se ve de la siguiente manera:

$$(SS^\dagger)_{fi} = \sum_n S_{fn} S_{ni}^* = \delta_{fi} \quad (2.16)$$



La  $n$  de la sumatoria correrá sobre todos los estados intermedios, esta última condición nos garantiza la existencia una normalización y la ortogonalidad de los estados en la interacción. Para el caso en el que el estado final es igual al inicial la ecuación (2.16) nos asegura que la suma de todas las transiciones de un estado  $|i\rangle$  a un estado final cualquiera, será:

$$\sum_n S_{in} S_{ni}^* = \sum_n |S_{ni}|^2 = \delta_{ii} = 1 \quad (2.17)$$



# Capítulo 3

## Modelos de Escalamiento Geométrico

La idea de escalamiento geométrico fue descrita por Dias de Deus [9], en ella se describe el punto en el que hay un mínimo difractivo en la sección eficaz Figura 3.1. Se sabe por datos experimentales, que el límite del disco negro se alcanza a una energía más allá de  $\sqrt{s} = 57T eV$  [10] y la estructura de dip de escala geométrica, al estar anclada a ella, es por tanto violada.

### 3.1. Límite de Froissart-Martin

Marcel Froissart probó [12] que la sección eficaz debía tener un límite que no sobrepase el cuadrado del logaritmo de  $s$ . Esto puede deducirse de una forma simple: para un par de partículas interactuando mediante un potencial de Yukawa,  $V_{Yuk}(r)$ :

$$V_{Yuk}(r) = \frac{ge^{-\kappa r}}{r} \quad (3.1)$$

Para el límite en que  $b \rightarrow \infty$  ocurre:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-\kappa b} = 0$$

por lo que la interacción será débil o nula cuando  $b$  es muy grande. Para el caso en que  $b \rightarrow 0$  tenemos que al dominar el factor exponencial:

$$e^{-\kappa b} \rightarrow 1$$

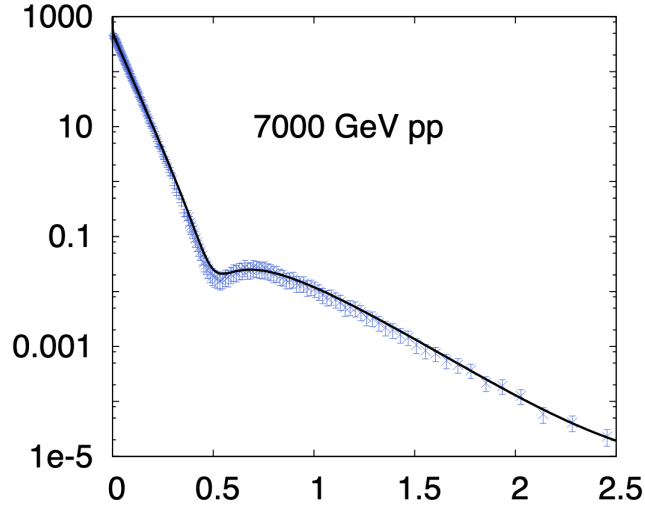


Figura 3.1: Posición del dip[11] ajustado a datos experimentales  $pp$  dispersión elástica:  $d\sigma/dt$  en  $\text{mbGeV}^{-2}$  contra  $t$  en  $\text{GeV}^2$ .

Entonces la interacción tenderá a un valor máximo. Tomando la cota mínima para  $b$  :

$$\begin{aligned} ge^{-\kappa b} &= 1 \\ b\kappa &= \ln g \end{aligned} \quad (3.2)$$

Que al sustituir en la expresión para  $\sigma_{tot}$  del teorema óptico:

$$\sigma_{tot} \simeq (\pi/\kappa^2) \ln^2 |g|$$

Hablando en términos más formales, usando la validez del Teorema Óptico y la representación de Maldelstam para la amplitud de dispersión, Froissart probó que al hacer la expansión de ondas parciales el valor de la amplitud de dispersión converge, lo que nos lleva a ver que existe un límite superior para el valor de la sección eficaz para cada onda, y dicha cota dependería del valor total del momento angular.

A este valor máximo le llamaremos  $a_l$ , y a partir de él, el resto de las amplitudes de las ondas parciales se desprecian, este será  $a_l = 1$ , entonces ocurre que:

$$\sum_0^{\infty} (2l+1)a_l = L^2 + \text{términos mas allá del valor máximo} \leq L^2 \quad (3.3)$$

entonces ocurre que para un valor de  $l < L$ :

$$|a_l| \leq \frac{q_s B(s)}{\sqrt{s}(L-N)} \left[ \frac{1}{x_0 + \sqrt{x_0 - 1}} \right]^{L-N} \quad (3.4)$$

Pero como dijimos que el valor máximo de  $a_l = 1$  entonces esta última expresión debe de estar acotada:

$$|a_l| \leq \frac{q_s B(s)}{\sqrt{s}(L-N)} \left[ \frac{1}{x_0 + \sqrt{x_0 - 1}} \right]^{L-N} = 1 \quad (3.5)$$

Modificando esta expresión llegamos a:

$$L \simeq \left( \frac{q_s}{\kappa} \right) \ln(B(s)) \quad (3.6)$$

Que al aplicar el teorema óptico nos lleva a:

$$\sigma_{total} \leq \ln^2 s \quad (3.7)$$

## 3.2. Modelo del Disco Gris

A diferencia del límite del disco negro, en este límite lo que se hace es describir el comportamiento de las secciones eficaces en el intervalo que va de bajas energías hasta el punto de saturación en que se alcanza el disco negro. Esto se hace mediante una parametrización de las secciones eficaces [13]:

$$\begin{aligned} \sigma_{total} &= 2\pi R^2(s) f(s) \\ \sigma_{elastic} &= \pi R^2(s) f^2(s) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Donde  $R(s)$  es el radio aparente del protón y  $f(s)$  la densidad de materia gluónica, ambas funciones dependientes de la energía  $s$ .

Tomaremos a  $R(s)$  como una función de dependencia logarítmica [14]:

$$R(s) = R_0 + \beta \ln \left( \frac{s}{s_0} \right) \quad (3.9)$$

Con  $\sqrt{s_0} = 2.216 \times 10^{-9} GeV$  un parámetro mínimo dependiente de la energía,  $R_0 = 9.36 \times 10^{-2} mb^{1/2}$  una constante relacionada a los quarks de valencia del proyectil y de la distribución inicial del objetivo. Para la función  $f(s)$  se

espera que al acercarse al límite de altas energías su valor sea 1, se propone una ley de potencias en  $\ln s$  de la forma[14]:

$$f(s) = \bar{\Omega}(s) \quad (3.10)$$

Donde  $\bar{\Omega}(s)$  se conoce como la opacidad y cuya forma es:

$$\bar{\Omega}(s) = 2(\gamma_1 + \gamma_2 \ln(s) + \gamma_3 \ln^2(s)) \quad (3.11)$$

Con  $\gamma_1 = 0.2563$ ,  $\gamma_2 = -0.0218$ ,  $\gamma_3 = 0.00264$ .

Reescribiendo  $f(s)$  llegamos a:

$$f(s) = 2(\gamma_1 + \gamma_2 \ln s + \gamma_3 \ln^2 s) \quad (3.12)$$

Por lo que para el límite del disco negro, la sección eficaz será:

$$\frac{\sigma_{\text{tot}}^2}{2\sigma_{\text{el}}} = 2\pi R^2(s) \equiv \sigma_{BD} \quad (3.13)$$

### 3.2.1. Límite del disco negro

Primero, de acuerdo al límite de Froissart-Martin (LFM) para la sección eficaz total debe ocurrir que [13]:

$$\sigma_{\text{tot}}(s) \leq B_{\text{FLM}} \ln^2(s/s_0) \quad (3.14)$$

Donde  $s_0$  es una escala de energía, y el coeficiente  $B_{\text{FLM}}$  también está acotado por [15] :

$$B_{\text{FLM}} \leq \frac{\pi}{m_\pi^2} \approx 60\text{mb} \quad (3.15)$$

Para el caso de la sección inelástica al aplicar el LFM tenemos [16]:

$$\sigma_{\text{inel}}(s) \leq \frac{1}{4} \frac{\pi}{m_\pi^2} \ln^2(s/s_0), \quad (s \rightarrow \infty) \quad (3.16)$$

el cociente entre ellas también deberá estar acotado por el LFM mediante [17] :

$$\sigma_{\text{elastic}} / \sigma_{\text{total}} \leq 1/2 \quad (3.17)$$

sustituyendo lo expresado en la ecuaciones (3.1) y (3.3):

$$\sigma_{\text{elastic}} / \sigma_{\text{total}} \leq 3/4 \quad (3.18)$$

### 3.3. Otros Modelos de Escalamiento geométrico

Como ya vimos, en nuestro modelo del disco gris podemos expresar a  $\sigma_{tot}$  en términos del parámetro de impacto  $b$ , pero este no es el único modelo en el cual esto puede hacerse, a continuación enlistaremos un par de ellos:

- El modelo de Chou y Yang
- Modelo difractivo de Durand y Lipes.

#### 3.3.1. Modelo de Chou y Yang

Chou y Yang postularon[18] un modelo con las siguientes consideraciones:

- Las interacciones se darán en pares de partículas con una extensión finita en el espacio, que se mueven una hacia la otra y a medida que se acercan el movimiento se verá atenuado.
- La función de onda será compuesta por una parte que cargue con la atenuación y en consecuencia, la amplitud de dispersión elástica se relacionará con ella.

Se define la sección de dispersión diferencial:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \pi|a|^2 \quad (3.19)$$

La amplitud de dispersión  $a$  para el caso límite de altas energías:

$$a(t) = \frac{1}{2\pi} \int (1 - S) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} d^2\mathbf{b} \quad (3.20)$$

donde  $q = \sqrt{-t}$  y  $\mathbf{b}$  el plano transversal donde yace el parámetro de impacto y  $S$  es el coeficiente de transmisión.

$d\sigma/dt$  debe tender a un valor constante [19]:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} a(t) = c[F_1(t)]^4 \quad (3.21)$$

$a$  está relacionada con  $S$  y esta a su vez con la atenuación, se define la *opacidad*  $\langle s \rangle$  como:

$$\langle s \rangle = -\ln S(\mathbf{b}) \quad (3.22)$$

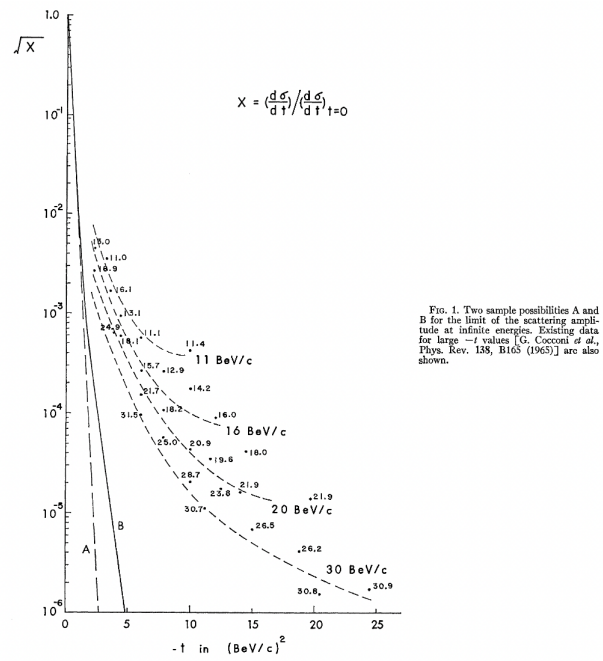


Figura 3.2: Ajustes del modelo de Chang y Young[118].



### 3.3.2. Modelo de Durand y Lipes

Este modelo considera lo siguiente[20]:

- La amplitud elástica será principalmente difractiva, esto debido a la absorción de la onda incidente por los diversos canales inelásticos.
- En el límite de altas energías, esta absorción será proporcional a cualquiera de los parámetros de impacto

Así se define la amplitud de dispersión como:

$$f(s, t) = i \int b db J_0(b\sqrt{-t}) [1 - S(b)] \quad (3.23)$$

La cual, al igual que en el modelo de Chang y Yung, cumple que:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \pi |f(s, t)|^2 \quad (3.24)$$

$b$  es el parámetro de impacto,  $J_0$  la primera de las funciones de Bessel de primera clase y  $S$  los elementos de la matriz de dispersión:

$$S(b) = e^{-\kappa\rho(b)} \quad (3.25)$$

$\kappa$  es el coeficiente de absorción cuya dependencia será en la energía inicial;  $\rho$  la densidad de materia en la región en que se tiene la dispersión, también es la función de peso en la representación de Fourier-Bessel del producto de los factores de forma de la materia hadrónica:

$$G_A(t)G_B(t) = \int_0^\infty b db \rho(b) J_0(b\sqrt{-t}) \quad (3.26)$$

## 3.4. $t_{dip}$

Podemos relacionar  $\sigma_{total}$  con la función  $f(s)$  de la siguiente manera: Primero, la  $\sigma_{total}$  se calcula como:

$$\sigma_{total}(s) = 2\pi \int db^2 \text{Im } G(s, b) \quad (3.27)$$

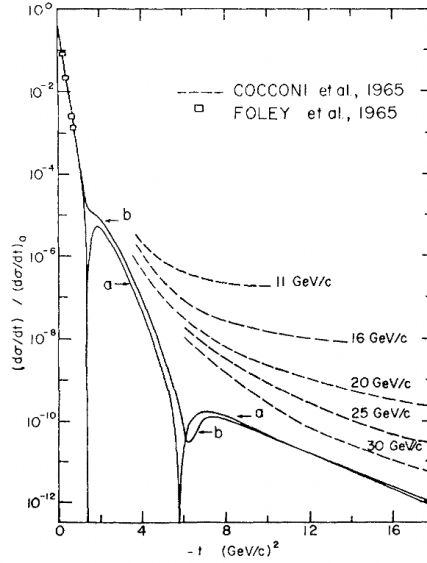


Figura 3.3: Ajustes del modelo de Durand y Lipen[20].

Donde  $G(s, b)$  es la amplitud elástica, y en el escalamiento geométrico esta última expresión se aproxima a:

$$\longrightarrow 2\pi R^2(s) \int^1 d\beta^2 \text{Im } G(\beta) \quad (3.28)$$

Con

$$\beta^2 = \frac{b^2}{\sigma_{total}} \quad (3.29)$$

Donde  $b$  es el parámetro de impacto.

Definimos la variable de escalamiento  $\tau$ [6]:

$$\tau \equiv -t\sigma_{total} \quad (3.30)$$

$t$  es el momento y será variable conjugada del parámetro de impacto. Combinando las ecuaciones (3.1) y (3.28), haciendo el cambio de variable relacionando (3.29) y (3.30) llegamos a:

$$- \int \frac{b^2}{\tau} dt \text{Im } G(t) = f(s) \quad (3.31)$$

$R_0$	$\beta$	$s_0$
$4.1226 \pm 3.32 \times 10^{-2}$	$-2.83434 \times 10^{-2} \pm 1.71319 \times 10^{-4}$	$1.20731 \times 10^{-3} \pm 9.86 \times 10^{-4}$

Cuadro 3.1: Valores de los parámetros

Para la función  $f(s)$  se espera que al acercarse al límite de altas energías su valor sea 1.

Entonces, lo que nos ocupará en adelante, es tratar de hallar el punto en el que se localice el dip, a partir de la ecuación (3.30):

$$\tau = -t\sigma_{total} \quad (3.32)$$

En el escalamiento geométrico tendremos la posición del dip:

$$\tau_{BD} = -t_{dip}\sigma_{total} \quad (3.33)$$

Con  $\tau_{BD} = 35.92 GeV^2 mb$ , despejamos  $-t_{dip}$  y sustituimos  $\sigma_{total}$  de la ecuación (3.8) para tener:

$$-t_{dip} = \frac{1}{2\pi R^2(s)} \frac{1}{f(s)} \tau_{BD} \quad (3.34)$$

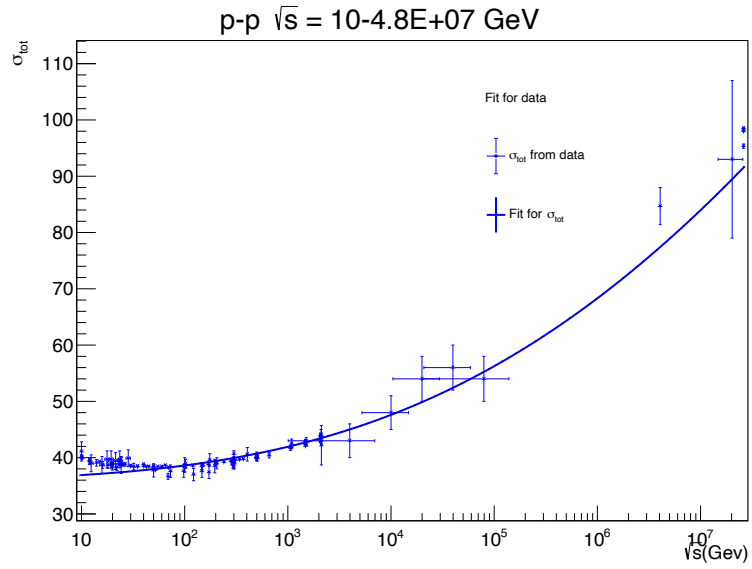
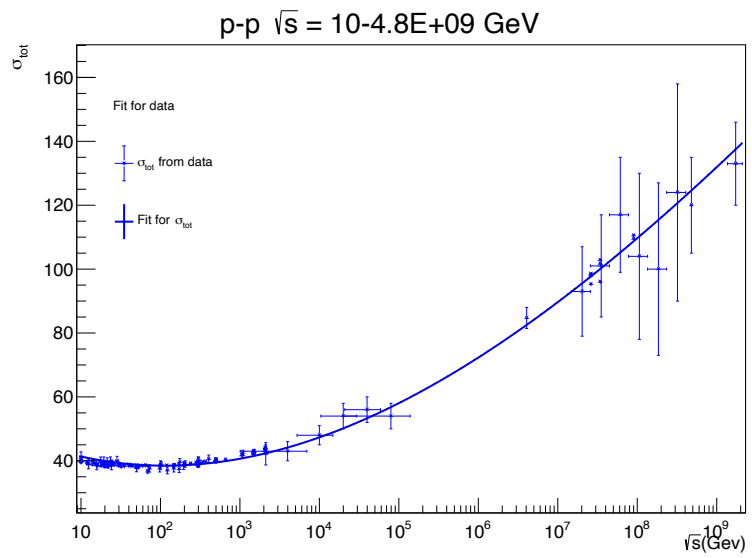
Sustituyendo  $R(s)$ ,  $f(s)$ :

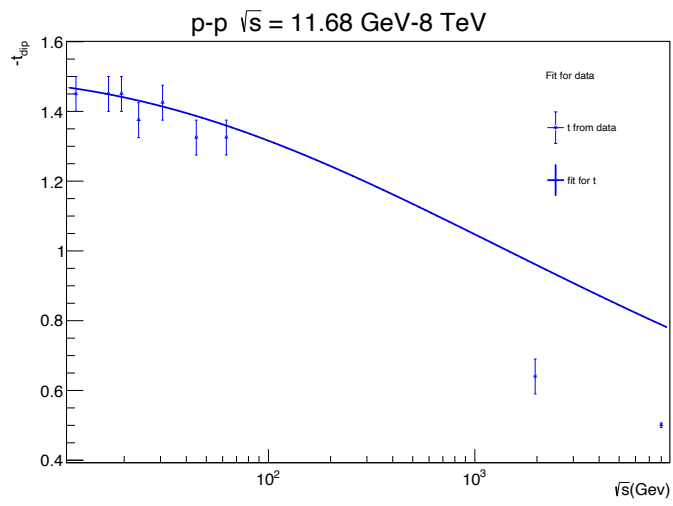
$$-t_{dip} = \frac{\tau_{BD}}{2\pi} \frac{1}{\left[ R_0 + \beta \ln \left( \frac{s}{s_0} \right) \right]^2} \frac{1}{2 (\gamma_1 + \gamma_2 \ln s + \gamma_3 \ln^2 s)} \quad (3.35)$$

Que es la que ajustaremos con datos de sección eficaz diferencial  $d\sigma_{tot}/dt$ .

Primero se hicieron ajustes para la  $\sigma_{tot}$  usando datos del Particle Data Group [22] en un rango de  $\sqrt{s} = 10 - 4.8 \times 10^7 GeV$  en  $p\bar{p}$  y para  $pp$  [23] en un rango de  $\sqrt{s} = 10 - 10 \times 10^{10} GeV$  los cuales se muestran en las figuras [3.4](#) y [3.5](#). Al hacer el ajuste, se obtuvieron los valores de  $R_0, \beta, s_0$ , los cuales se muestran en el cuadro 1:

Posteriormente realizamos el ajuste para  $-t_{dip}$  usando datos de  $d\sigma_{tot}/dt$  extraídos de [24,25,26,27,28,29], el cual se muestra en la figura [3.6](#)

Figura 3.4: Fit for  $\sigma_{tot}$ .Figura 3.5: Fit for  $\sigma_{tot}$ .

Figura 3.6: Fit for  $-t_{dip}$ .



# Capítulo 4

## Cálculos

### 4.1. Simulaciones CORSIKA

CORSIKA (COsmic Ray Simulations for KAscade)[21] es un software desarrollado por Dieter Heck and Tanguy Pierog adscritos al Institute for Astroparticle Physics. CORSIKA es utilizado para hacer simulaciones con gran detalle de las interacciones entre los rayos cósmicos y las partículas de la atmósfera. Las interacciones hadrónicas a estas altas energías son descritas por varios modelos de reacción basados en la teoría de Gribov-Regge como lo son: The VENUS, QGSJET y DPMJET. También son usados modelos de minijet como SIBYL; otros modelos utilizados son neXus y EPOS.

Las primeras simulaciones hechas fueron con la paquetería CONEX en su versión `conex2r5.64`, para comparar las distribuciones  $x_{\text{máx}}$  dadas por el modelo del disco gris y EPOS. La simulación híbrida de cascada CONEX ha sido implementada como nua opción en las simulaciones de cascada de Monte-Carlo dentro de CORSIKA. En CONEX, las simulaciones MC de alta energía se combinan con soluciones numéricas de las ecuaciones de cascada. Las partículas secundarias de baja energía se rastrean para obtener la extensión lateral de la cascada. Esto permite simulaciones rápidas y realistas de cascadas a altas energías. Hemos hecho algunas simulaciones usando la paquetería CONEX en su versión `conex2r5.64` para comparar las distribuciones  $x_{\text{max}}$  dadas por el modelo del disco gris y EPOS. Para introducir la modificación a la sección eficaz con la nueva parametrización del disco gris se modifica el archivo de QGSJET donde se cambia las tablas numéricas por los valores obtenidos con el modelo de disco gris. La figura [4.2](#) presenta la

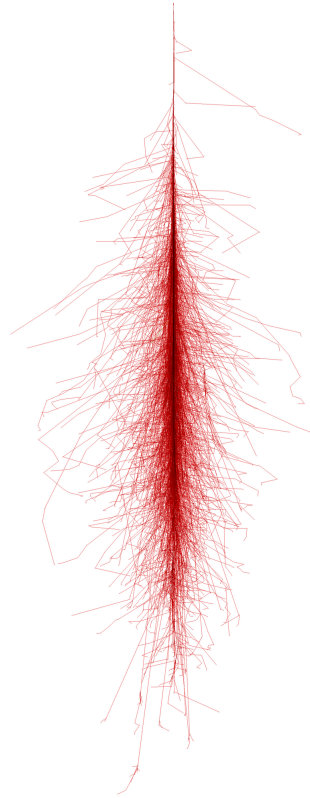


Figura 4.1: Simulación de una cascada en el plano  $x-z$  con partícula primaria un fotón a  $50\text{GeV}$  y un ángulo zenital de cero. Compiled by Fabian Schmidt, University of Leeds, UK.

producción de gammas en EPOS, la figura [4.3](#) presenta la distribución (gamma)  $dE/dx$  vs la profundidad de la cascada para el disco gris (rojo) y para EPOS (azul); la figura [4.4](#) presenta la distribución (positrones)  $dE/dx$  vs la profundidad de la cascada para el disco gris (rojo) y para EPOS (azul), desde  $10^4$  a  $10^6$  y de  $10^4$  a  $10^8$  respectivamente, se tomó como primario al protón.



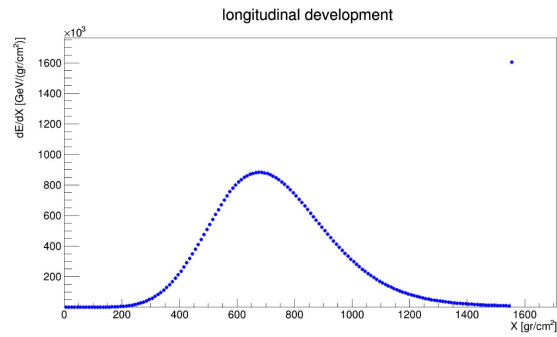


Figura 4.2: En azul la distribución  $dE/dx$  para EPOS.

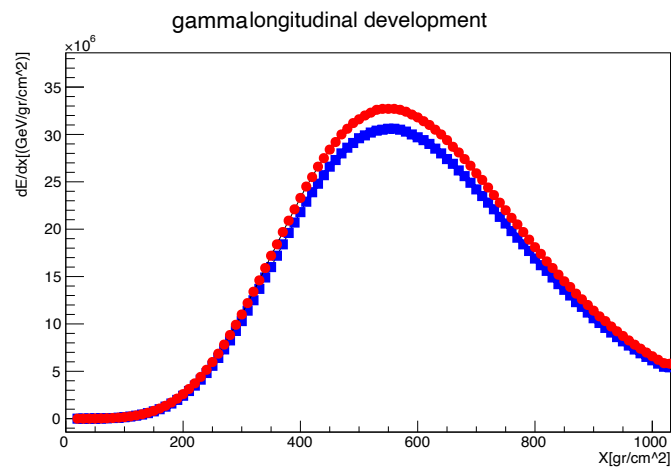


Figura 4.3: En azul la distribución  $dE/dx$  para EPOS y en rojo la distribución obtenida de  $dE/dx$  vs la profundidad de la cascada en el modelo de disco gris

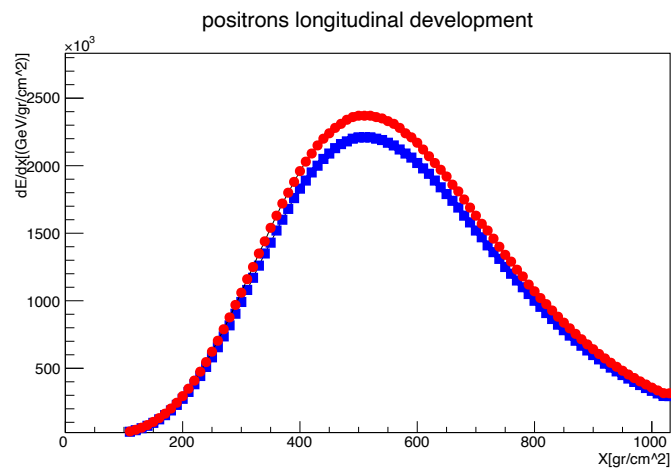


Figura 4.4: En azul la distribución  $dE/dx$  para EPOS y en rojo la distribución obtenida de  $dE/dx$  vs la profundidad de la cascada en el modelo de disco gris

# Conclusiones

Para el caso de los ajustes de  $\sigma_{tot}$  podemos ver que nuestro modelo se ajusta de buena forma, tanto para el rango de energías entre  $10^2 - 10^7$  cubriendo parte de los datos de experimentos en aceleradores así como para altas energías (el caso de datos de rayos cósmicos), aunque para energías mas allá de  $10^6 GeV$  no tenemos muchos datos, el ajuste se acerca bastante. Para el ajuste del  $-t_{dip}$  a diferencia del ajuste anterior, no contamos con un número grande de datos, pero en el rango entre  $11.68 - 62.5 GeV$  el modelo se ajusta bien, con los dos puntos a altas energías (1.9 y 8 TeV), es necesario contar con un número mayor de datos, especialmente en el rango que va de los 100 a los 1000 GeV, para poder decir que en efecto el ajuste es bueno. En las simulaciones de CORSIKA, cuando comparamos lo hecho en EPOS con el modelo del disco gris, en las figuras [4.3](#) y [4.4](#), podemos notar que para gamma  $0 < X < 300$  y  $X > 800$  el modelo reproduce de buena forma lo hecho en EPOS; en el caso de positrones, para el rango  $50 < X < 300$  y  $X > 750$  ocurre lo mismo que para gamma. En ambos casos e la región intermedia, no se reproduce de buena forma.



# Bibliografía

- [1] M. M. Block and F. Halzen, Commentary on 'Total Hadronic Cross Section Data and the Froissart-Martin Bound', by Fagundes, Menon and Silva, Braz. J. Phys. 42 (2012) 465, [arXiv:1210.3008].
  
- [2] TOTEM Collaboration, G. Latino, Summary of Physics Results from the TOTEM Experiment, EPJ Web Conf. 49 (2013) 02005, [arXiv:1302.2098].
  
- [3] Pierre Auger Collaboration, P. Abreu et al., The Pierre Auger Observatory II: Studies of Cosmic Ray Composition and Hadronic Interaction models, in 32nd International Cosmic Ray Conference, vol. 3, p. 208, 7, 2011. arXiv:1107.4804.
  
- [4] M. Herrero; NATO Sci. Ser. C 534 (1999) 1, doi:10.1007/978-94-011-4689-0 1 arXiv:hep-ph/9812242
  
- [5] MissMJ, Cush - Own work by uploader, PBS NOVA [1], Fermilab, Office of Science, United States Department of Energy, Particle Data
  
- [6] F. Halzen and A.D. Martin, Quarks and Leptons: An introductory Course in Modern Particle Physics, John Wiley & Sons, Canada, 1st Edition.
  
- [7] <https://indico.physics.lbl.gov/event/1123/contributions/4825/attachments/2261/2924/Physics2901.pdf>
  
- [8] J. J. Sakurai, Jim J. Napolitano, Modern Quantum Mechanics, 2nd Edition.
  
- [9] Buras, A J, and Dias de Deus, J. Scaling law for the elastic differential cross section in pp scattering from geometric scaling. Country unknown/Code not available: N. p., 1974. Web. doi:10.1016/0550-3213(74)90197-7.

- 
- [10] A. Grau, S. Pacetti, G. Pancheri, Y.N. Srivastava, Phys. Lett. B 714, 70 (2012). arXiv:hep-ph/1206.1076
- [11]  $pp$  and  $p\bar{p}$  total cross sections and elastic scattering. A. Donnachie, P. V. Landshoff. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1309.1292>
- [12] M. Froissart, Phys. Rev. 123, 1053 (1961)
- [13] A. J. Buras and J. Dias de Deus, Nucl. Phys. B 71 (1974) 481. doi:10.1016/0550-3213(74)90197-7
- [14] I. Bautista and J. Dias de Deus, Phys. Lett. B 718 (2013) 1571 doi:10.1016/j.physletb.2012.12.024 [arXiv:1212.1764 [nucl-th]].
- [15] R. Conceicao, J. D. de Deus and M. Pimenta, Nucl. Phys. A 888 (2012) 58 doi:10.1016/j.nuclphysa.2012.02.019 [arXiv:1107.0912 [hep-ph]].
- [16] A. Martin, Phys. Rev. D 80 (2009) 065013 doi:10.1103/PhysRevD.80.065013 [arXiv:0904.3724 [hep-ph]].
- [17] A. Martin, Nuovo Cim. A 42 (1965) 930. doi:10.1007/BF02720568
- [18] T. Chou, C.N. Yang, Phys. Rev. 170, 1591 (1968)
- [19] T. T. Wu and C. N. Yang, Phys. Rev. 137, B708 (1965).
- [20] L. Durand, R. Lipes, Phys. Rev. Lett. 20, 637 (1968).
- [21] CORSIKA: a Monte Carlo code to simulate extensive air showers., by Heck, D.; Knapp, J.; Capdevielle, J. N.; Schatz, G.; Thouw, T.. Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe (Germany)., Feb 1998, V + 90 p., TIB Hannover, D-30167 Hannover (Germany).
- [22] M. Tanabashi et al. [Particle Data Group], Phys. Rev. D 98 (2018) no.3, 030001. doi:10.1103/PhysRevD.98.030001
- [23] R.L. Workman et al. (Particle Data Group), Prog. Theor. Exp. Phys. 2022, 083C01 (2022)
- [24] Characterisation of the *dip – bump* structure observed in proton-proton elastic scattering at  $\sqrt{s} = 8$  TeV. TOTEM Collaboration. G. Antchev (Pilsen U.) et al. DOI: 10.1140/epjc/s10052-022-10065-x

- [25] Impact Parameter Interpretation of Proton Proton Scattering from a Critical Review of All ISR Data. Amaldi, U., Schubert, Klaus R. Nucl.Phys.B 166 (1980) 301-320, 1980. <https://doi.org/10.17182/hepdata.7940>
- [26] Measurements of Elastic Proton Proton Scattering at Large Momentum Transfer at the CERN Intersecting Storage Rings. Nagy, E. , Orr, R.S., Schmidt-Parzefall, W., Winter, K., Brandt, A., Busser, F.W., Flugge, G., Niebergall, F., Schumacher, P.E., Eichinger, H. Nucl.Phys.B 150 (1979) 221-267, 1979. <https://doi.org/10.17182/hepdata.34800>
- [27] Measurement of the Differential Cross-section and of the Polarization Parameter in Elastic Scattering at 200-GeV/c. Fidecaro, G., Fidecaro, M., Lanzeri, L., Nurushev, S., Piemontese, L., Solovyanov, V., Vascotto, A., Gasparini, F., Meneguzzo, A., Posocco, M. Phys.Lett.B 105 (1981) 309-314, 1981. <https://doi.org/10.17182/hepdata.31055>
- [28] Evidence for Spin Effects in Elastic Scattering at 150-GeVc. Fidecaro, G., Fidecaro, M., Nurushev, S., Poyer, C., Solovyanov, V., Steuer, M., Vascotto, A., Gasparini, F., Posocco, M., Voci, C. Phys.Lett.B 76 (1978) 369-373, 1978. <https://doi.org/10.17182/hepdata.27444>
- [29] Measurement of the differential cross section in elastic scattering at  $\sqrt{s}=1.96$  TeV. The D0 collaboration Abazov, Victor Mukhamedovich, Abbott, Braden Keim, Acharya, Bannanje Sripath, Adams, Mark Raymond, Adams, Todd, Alexeev, Guennadi D, Alkhazov, Georgiy D, Alton, Andrew K, Alverson, George O, Alves, Gilvan Augusto Phys.Rev.D 86 (2012) 012009, 2012. <https://doi.org/10.17182/hepdata.66559>