



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

POSTGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

MODELACIÓN MATEMÁTICA DE UN ROBOT MÓVIL Y
LA SÍNTESIS DE CONTROL ÓPTIMO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

GREGORIA CORONA MORALES

DIRECTORES DE TESIS:

DR. VLADIMIR V. ALEXANDROV

DR. JOSÉ ELIGIO MOISÉS GUTIÉRREZ ARIAS

PUEBLA, PUEBLA FEBRERO DEL 2016

A mi familia, maestros y amigos

Agradecimientos

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca recibida de agosto de 2010 a agosto de 2014.

Índice general

Introducción	1
0.1. Justificación	1
0.2. Estado del arte y objetivos	1
0.3. Presentación del trabajo	4
1. Definiciones y Principios Básicos	6
1.1. Ecuaciones de Lagrange Partiendo del Principio de D'Alembert	6
1.1.1. Ligaduras y grados de libertad	6
1.1.2. Principio de D'Alembert	8
1.1.3. Ecuaciones de Lagrange	11
1.2. Ecuaciones en Desviaciones y el Problema de Síntesis Lineal	13
1.3. Controlabilidad, Observabilidad y Estabilizabilidad	17
1.3.1. Controlabilidad	17
1.3.2. Estabilizabilidad	20
1.3.3. Observabilidad	20
1.4. Principio del Máximo	22
1.5. Programación Dinámica de Bellman	28
1.5.1. Procedimiento de Síntesis	29
1.5.2. Problema de Control Lineal Cuadrático	31
1.6. Teorema de Tikhonov	33
1.7. Lema de Lyapunov	38

1.8.	Descripción del Tent Method de Boltyanski	39
1.8.1.	El problema clásico de Lagrange y su generalización	39
1.8.2.	Problemas de intersección y de extremal abstracto	41
1.8.3.	Interpretación del problema de Mayer	42
1.8.4.	Ideas básicas del Tent Method	43
2.	Modelo Dinámico de un Robot Controlable	47
2.1.	Planteamiento del Problema	47
2.2.	Ecuaciones Dinámicas del Movimiento Controlable de un Robot Móvil Cuando el Centro de Masas no es Igual al Centro Geométrico.	48
2.2.1.	Restricciones no Holónomas	50
2.2.2.	Cambio de Coordenadas y el Modelo Matemático sin Multipli- cadores de Lagrange	57
2.3.	Modelo Matemático del Motor y sus Simplificaciones	60
2.4.	Reducción del Modelo	61
2.4.1.	Modelo matemático del sistema controlable no lineal	61
3.	Trayectorias Cinemáticas Extremales y el Algoritmo Óptimo de Es- tabilización de Éstas	64
3.1.	Planteamiento Cinemático y Síntesis de las Trayectorias Extremales Res- pecto al Tiempo	64
3.2.	Modelo Lineal con Información Completa y Exacta. (Controlabilidad, Observabilidad y Estabilizabilidad).	72
3.2.1.	Controlabilidad	74
3.2.2.	Estabilizabilidad	77
3.3.	Planteamiento Matemático de Estabilización Óptima del Movimiento Respecto a la Trayectoria Deseada	84
3.4.	Estabilización Óptima	85
4.	Estabilización Min Max del Movimiento por la Línea Recta	92

4.1. Ecuaciones en Desviaciones y Planteamiento de Estabilización de Min-Max	92
4.2. Reducción del Problema Extremal a un Problema de Programación no Lineal	93
4.3. Aplicación del Tent Method de Boltyanski	96
4.4. Solución del problema de programación no lineal para $n = 3$ y $m = 1$ y reducción del problema de programación no lineal a un problema de intersección de conjuntos	99
4.5. Aplicación del Tent Method para $1 < m \leq n$ y Solución para $m = n = 2$	104
4.5.1. Planteamiento del problema	104
4.5.2. Reducción del problema extremal a un problema de programación no lineal	105
4.5.3. Aplicación del Tent Method de Boltyanski	107
4.6. Cambio del criterio de desempeño	111
4.7. Reducción del problema a uno de programación no lineal	112
4.8. Aplicación del Tent Method de Boltyanski	113
5. Conclusiones	118
Referencias	119

Introducción

0.1. Justificación

Actualmente los robots móviles se usan para tener acceso a zonas inhóspitas, peligrosas o inaccesibles para el ser humano. La propuesta de producción de robots móviles automáticos no holonómicos reveló una tarea difícil. Por ello el problema se ha descompuesto en dos partes. El primero consiste en calcular un movimiento libre de colisiones utilizando un mapa del medio ambiente, el segundo consiste en ejecutar el movimiento. Como consecuencia la investigación sobre sistemas no holonómicos se ha centrado en dos aspectos: la planificación de ruta [21] y el control de movimiento [23]. No muchos estudios se han ocupado de los dos aspectos en conjunto. En esta tesis tratamos sobre la planificación y control de movimiento de un robot móvil.

0.2. Estado del arte y objetivos

El Control Óptimo es un campo en rápida expansión, que analiza el comportamiento óptimo de un proceso que evoluciona en el tiempo, de acuerdo a leyes establecidas. Sus aplicaciones abarcan una variedad de nuevas disciplinas como la biología, la economía, etc. La característica principal de la Teoría de Control Óptimo Clásica (TCO) es que la técnica matemática, especialmente diseñada para el análisis y síntesis de un control óptimo de modelos dinámicos, se basa en la suposición de que un diseñador (o un analista) posee información completa sobre un modelo considerado, así como de un entorno donde este modelo controlado tiene que evolucionar. Existen dos

enfoques principales para la solución de problemas de control óptimo en presencia de una información completa de los modelos dinámicos considerados:

- El primero, es el Principio del Máximo (PM) de L. Pontryagin. El PM es un instrumento básico para obtener un conjunto de condiciones necesarias que deben ser satisfechas por cualquier solución óptima. El Principio del Máximo es realmente un hito de la teoría moderna de control óptimo.
- Y el segundo, es el Método de Programación Dinámica (MPD) de R. Bellman (Bellman 1957). Proporciona condiciones suficientes para probar cuando un control es óptimo o no.

Con el descubrimiento del Principio del Máximo y el Método de la Programación Dinámica, actualmente, la Teoría de Control Óptimo se considera como uno de los elementos de los métodos de optimización. La cantidad enorme de resultados que se han obtenido a partir de entonces y el desarrollo incesante de esta teoría, han permitido que se convierta en una de las ramas de mayor importancia dentro de las matemáticas aplicadas.

Agrachev A. y Yu. L. Sachkov estudiaron el problema llamado *el carro de Dubins* como un ejemplo concreto de Control Óptimo aplicando el PM. En tal problema, se considera un carro que se puede mover hacia adelante con velocidad lineal fija y simultáneamente rotar con una velocidad angular acotada. Se considera que la posición inicial y final son fijas así como también la orientación inicial y final. El problema es llevar el carro de la configuración inicial a la final en un tiempo mínimo. Los resultados que obtuvieron son:

1. Las trayectorias óptimas son de dos tipos:
 - a) Concatenación de un arco de circunferencia con una línea recta y otro arco de circunferencia (CRC), donde los arcos de circunferencia pueden no existir.
 - b) Concatenación de tres arcos de circunferencia (CCC).

2. Si la posición final del carro está lo suficientemente lejos de la posición inicial, entonces sólo se puede llegar por trayectorias que son la concatenación de una línea recta y un arco de circunferencia (RC o CR).

Héctor J. Sussmann y Guoqing estudiaron el mismo problema y lo resolvieron haciendo una combinación de las técnicas clásicas de Teoría de Control y, métodos geométricos basados en el álgebra de Lie. Ellos obtuvieron que la estructura de las trayectorias es la concatenación de un arco de circunferencia una línea recta y otro arco de circunferencia, o bien, la concatenación de tres arcos de circunferencia. No obtienen nada cuando los puntos inicial y final están lejos, pero demuestran que, cuando la trayectoria es la concatenación de tres arcos de circunferencia, el tiempo t para recorrer cada arco de circunferencia es el mismo y $t \in [\pi, 2\pi)$.

En este trabajo de tesis, se considera un robot móvil que consta de tres ruedas, dos activas y una pasiva. El robot puede moverse hacia adelante y simultáneamente rotar con una velocidad angular acotada. El objetivo es resolver los siguientes problemas:

1. Determinar la trayectoria óptima, respecto al tiempo, que debe seguir el robot, suponiendo que parte de una posición y orientación fija y se desea que llegue a una posición final fija con cualquier orientación.
2. Estabilizar el robot para que siga la trayectoria obtenida en el primer punto.
3. Obtener un control de tipo Min-Max que garantice la calidad de la estabilización del robot móvil.

Nótese que en este trabajo la orientación final no es fija a diferencia del problema de Dubins.

Los problemas planteados anteriormente se resolverán usando la teoría de control óptimo. El Principio del Máximo se utilizará para determinar la trayectoria que seguirá el robot móvil y la Programación Dinámica de R. Bellman se usará para la estabilización del robot. Para resolver el tercer problema; el problema de maximización se reduce a un problema de programación no lineal y el problema de minimización se resuelve

usando el Tent Method de Boltyanski . En lo que sigue se describe el contenido de cada capítulo.

0.3. Presentación del trabajo

En el Capítulo 1 se muestran los resultados conocidos, que se aplican en el desarrollo de este trabajo, destacando el método de la programación dinámica de Bellman, el Principio del Máximo de Pontryagin y el método geométrico de Boltyanski.

En el Capítulo 2 se construyen 4 diferentes modelos matemáticos que describen el movimiento del robot móvil con dos ruedas activas. El primer modelo que se construye es el más simple, en el cual no se consideran las fuerzas reactivas que actúan sobre el robot móvil. A tal modelo se le llama cinemático. Para la construcción del segundo modelo ya se consideran las fuerzas reactivas que intervienen en el robot y se usa el método de Lagrange, considerando la condición de rodadura pura como restricción no holónoma. A este modelo se le llama dinámico. Para la construcción del tercer modelo se anexa al modelo dinámico el modelo de los motores de corriente directa, obteniendo un sistema de 7 ecuaciones diferenciales no lineales de orden uno. Por último se hace una aproximación del tercer modelo usando el teorema de Tikhonov. Este último modelo se usa en el capítulo tres para hacer el análisis de estabilización.

En el Capítulo 3 se construyen las trayectorias que se desea que el robot siga, que llamaremos trayectorias extremales. Para tal fin en el modelo cinemático se aplican el PM y el teorema de Kelly. El PM da las condiciones necesarias de optimalidad y el teorema de Kelly determina la concatenación de las trayectorias regulares y singulares (especiales).

También en este capítulo, considerando la línea recta como trayectoria deseada, se determinan las ecuaciones lineales en desviaciones. Se analiza la controlabilidad, la observabilidad y la estabilizabilidad. Se determina el control óptimo para la estabilización del movimiento por la línea recta, usando la programación dinámica de Bellman como herramienta de síntesis.

En el Capítulo 4 se da el resultado principal la tesis. Este resultado es el teorema que da las condiciones necesarias del algoritmo de estabilización de Min-Max. Para obtener las condiciones necesarias del algoritmo de estabilización de Min-Max se aplica el Tent- Method de Boltyanski. Finalmente en el capítulo 5 se dan las conclusiones de este trabajo.

Capítulo 1

Definiciones y Principios Básicos

En este capítulo se dan los principales conceptos, definiciones y principios que se usan en este trabajo de tesis.

1.1. Ecuaciones de Lagrange Partiendo del Principio de D'Alembert

Un método muy elegante y sofisticado para encontrar las ecuaciones de movimiento para todos los sistemas dinámicos fue desarrollado por el matemático francés Joseph Louis Lagrange. En esta sección se presentan las ecuaciones de Lagrange partiendo del Principio de D'Alembert. Antes de ello, se dan algunas definiciones y principios fundamentales de Mecánica teórica .

Definición 1.1. Se llama **configuración de un sistema de N partículas** a la posición de cada una de las partículas en un instante dado.

1.1.1. Ligaduras y grados de libertad

Existe un tipo de interacciones entre cuerpos, las interacciones de contacto, cuyo efecto es imponer restricciones en el movimiento. Por ejemplo, las cuentas de un collar están obligadas a moverse a lo largo del hilo, un tren a lo largo de las vías y un buque

debe permanecer en la superficie del mar. Tales restricciones se llaman condiciones de vínculo (ligaduras) y el movimiento bajo las mismas, movimiento vinculado.

Definición 1.2. Se denominan **ligaduras** a las restricciones sobre las coordenadas de un sistema siendo independientes de las fuerzas actuantes, es decir, son condiciones que restringen el movimiento de una partícula o sistemas de partículas.

Definición 1.3. Se denominan **coordenadas generalizadas** a un conjunto cualesquiera de magnitudes $\{q_i, i = 1, \dots, n\}$ que definen la configuración de un sistema de partículas dado. Sus derivadas respecto del tiempo se llaman **velocidades generalizadas**.

El estado de un sistema viene determinado por el conocimiento de las coordenadas generalizadas y de sus velocidades generalizadas. Conociendo éstas y mediante las ecuaciones de movimiento, junto con las ligaduras, se describe la evolución temporal del sistema.

Las **fuerzas reactivas (o fuerzas de ligadura)** son aquellas que actúan como respuesta a un movimiento determinado que intentan impedir y sólo se dan cuando existe la tendencia a este movimiento. Actúan tanto si el sistema está en reposo o si está en movimiento. En general, las fuerzas de ligadura son desconocidas a priori a diferencia de las llamadas **fuerzas aplicadas** que son aquellas que actúan sobre el sistema que provienen de agentes externos, es decir, son fuerzas impuestas (o fuerzas externas).

Definición 1.4. **Las grados de libertad** es el número de coordenadas independientes (sin incluir el tiempo) que se requieren para describir completamente la posición de todas y cada una de las partículas o partes componentes del sistema. El término “parte componente” se refiere a cualquier parte del sistema, tal como una palanca, un disco, una plataforma, etc., que deben ser tratados como un cuerpo rígido y no como una partícula.

Definición 1.5. Las **ligaduras holónomas** no dependen de las velocidades y se

pueden escribir como una relación funcional entre las coordenadas,

$$g_l(\mathbf{r}_i, t) = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad l = 1, \dots, \mathcal{K}. \quad (1.1)$$

Es posible emplear este tipo de ligaduras para eliminar coordenadas dependientes y así reducir el número de grados de libertad del sistema.

Definición 1.6. Las ligaduras no holónomas so aquellas que dependen de las velocidades. Para que una restricción sea no holónoma se exige además que no sea integrable, es decir, que no se deduzca por derivación total respecto al tiempo de una holónoma.

$$g_l(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i, t) = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad l = 1, \dots, \mathcal{K}. \quad (1.2)$$

Es imposible emplear este tipo de ligaduras para eliminar las coordenadas dependientes, ya que dichas ecuaciones no son relaciones algebraicas entre las coordenadas.

1.1.2. Principio de D'Alembert

Definición 1.7. Se da el nombre de **desplazamiento real** a todo aquel que puede realizar una partícula (o un conjunto de ellas) en un determinado tiempo t y, por ende, realizado a una velocidad finita \mathbf{v}_i .

Definición 1.8. Se da el nombre de **desplazamiento virtual** a un desplazamiento infinitesimal de la posición de una partícula realizado instantáneamente, es decir, que es realizado a velocidad infinita, sin que transcurra el tiempo durante el desplazamiento (de aquí la condición de virtual ya que no es posible realizarlo efectivamente).

Un desplazamiento virtual además de ser instantáneo, es arbitrario no está relacionado con el movimiento real de la partícula en el instante considerado. Un desplazamiento virtual infinitesimal se representará por la diferencial $\delta \mathbf{r}$ en coordenadas cartesianas o por $\delta \mathbf{q}$ en coordenadas generalizadas.

Los desplazamientos virtuales más útiles son los denominados *compatibles con las ligaduras* (no sacan la partícula del riel que la guía, no deforman los cuerpos rígidos,

no estiran los hilos, etc.); es decir, que después de realizado un desplazamiento virtual, se preservan las relaciones de ligadura del sistema, es decir,

$$g_l(q_i, t) = 0 \text{ y } g_l(q_i + \delta q_i, t) = 0.$$

Es posible formular la mecánica de manera que desaparezcan las fuerzas de ligadura y de esa manera evitar muchas de las complicaciones que traen aparejadas. Se dice que un sistema está en equilibrio (estático), si las fuerzas sobre cada una de las partículas que lo componen se anulan $\mathbf{F}_i = 0$. Si cada partícula sufre un desplazamiento infinitesimal $\delta \mathbf{r}_i$ compatible con las ligaduras, entonces el trabajo realizado por éste es nulo, $\mathbf{F}_i \bullet \delta \mathbf{r}_i = 0$, este trabajo se llama *trabajo virtual*.

Definición 1.9. A la ligadura cuya fuerza de ligadura correspondiente no realiza trabajo en los desplazamientos virtuales se le da el nombre de **ligadura ideal**.

Luego,

$$\delta W := \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \bullet \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i^a + \mathbf{F}_i^{lig}) \bullet \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad (1.3)$$

donde \mathbf{F}_i^a es la fuerza aplicada y \mathbf{F}_i^{lig} es la fuerza de ligadura.

En un gran número de sistemas las fuerzas de ligadura son normales a los desplazamientos virtuales y no realizan trabajo. Por ejemplo, si una partícula está forzada a moverse sobre una curva, la fuerza centrífuga es normal a la curva y, por lo tanto, normal al desplazamiento virtual. Los sistemas con fuerzas de deslizamiento son ejemplos donde lo anterior no se cumple: las fuerzas de contacto tienen una componente paralela al desplazamiento virtual y producirán trabajo virtual. Si nos restringimos a sistemas libres de deslizamiento, las fuerzas de ligadura desaparecen de la ecuación (1.3), y éstas pueden escribirse como:

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \bullet \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^a \bullet \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (1.4)$$

La ecuación (1.4) resume en una forma elegante los principios de la estática de

partículas vinculadas. Su importancia es tan grande que se conoce como el siguiente principio:

Principio de los trabajos virtuales. *Un sistema mecánico sometido a ligaduras ideales permanece en equilibrio, si y sólo si, se anula el trabajo del conjunto de fuerzas aplicadas sobre dicho sistema, para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales compatibles con las ligaduras.*

El principio de D'Alembert es la extensión del principio de los trabajos virtuales (que se refiere a sistemas estáticos) a sistemas dinámicos.

La segunda ley de Newton establece que

$$\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}}_i \quad (1.5)$$

de donde se tiene que

$$\phi_i = \mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{0}. \quad (1.6)$$

Si cada i -ésima partícula estuviera sometida a una fuerza neta dada por ϕ_i el sistema estaría en equilibrio estático instantáneamente. Desde este punto de vista, la dinámica se reduce a la estática. La fuerza ϕ_i debe satisfacer el principio de los trabajos virtuales.

$$\sum_{i=1}^N \phi_i \bullet \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \bullet \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (1.7)$$

De (1.3) se tiene $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^a + \mathbf{F}_i^{lig}$, entonces

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \bullet \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i^a - \dot{\mathbf{p}}_i) \bullet \delta \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{lig} \bullet \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Si se consideran sistemas en los que el trabajo virtual de las fuerzas de ligadura es nulo se obtiene

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i^a - \dot{\mathbf{p}}_i) \bullet \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^a \bullet \delta \mathbf{r}_i - \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{p}}_i \bullet \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (1.8)$$

que suele llamarse el **Principio de D'Alembert**, donde $\dot{\mathbf{p}}_i = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$ son las fuerzas inerciales y las masas m_i no varían.

1.1.3. Ecuaciones de Lagrange

Escribiendo los desplazamientos virtuales $\delta \mathbf{r}$ en términos de las coordenadas generalizadas

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{\eta} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

y sustituyendo en (1.7) se tiene

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \left(\mathbf{F}_i \cdot \sum_{j=1}^{\eta} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) - \sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \sum_{j=1}^{\eta} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) = 0. \quad (1.9)$$

Desarrollando los términos de la ecuación (1.9)

$$\sum_{j=1}^{\eta} \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{i=1}^N T_i \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{i=1}^N T_i \right) \right\} \delta q_j = \sum_{j=1}^{\eta} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j,$$

donde T_i es la energía cinética de cada una de las partículas del sistema y $T = \sum_{i=1}^N T_i$ es la energía cinética total del sistema.

Sustituyendo el primer y el segundo término de (1.9) obtenidos anteriormente en el **Principio de D'Alembert** (1.8)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i^a - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i &= \sum_{j=1}^{\eta} Q_j \delta q_j - \sum_{j=1}^{\eta} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0 \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j &= 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Las fuerzas generalizadas Q_j se pueden descomponer como la suma de las fuerzas generalizadas provenientes de de una función de energía potencial

$$Q_j^U(q_i, \dot{q}_i, t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_j}$$

y las no provenientes de una función de energía potencial

$$Q_j^{NU} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{NU} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$$

Sustituyendo en (1.10)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\eta} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j^U - Q_j^{NU} \right] \delta q_j &= 0 \\ \sum_{i=1}^{\eta} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial U}{\partial q_j} - Q_j^{NU} \right] \delta q_j &= 0 \\ \sum_{i=1}^{\eta} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T - U) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} (T - U) - Q_j^{NU} \right] \delta q_j &= 0 \\ \sum_{i=1}^{\eta} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - Q_j^{NU} \right] \delta q_j &= 0, \end{aligned} \quad (1.11)$$

donde, $L = T - U$ es el Lagrangiano o función Lagrangiana.

Si se considera que todas las coordenadas generalizadas q_j son linealmente independientes, entonces todos los desplazamientos virtuales δq_j también lo son. Para que esto se cumpla se requiere que cada coeficiente de los δq_j sea cero por separado, resultando las ecuaciones de movimiento de Lagrange sin ligaduras

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{NU}, \quad j = 1, 2, \dots, \eta. \quad (1.12)$$

Para sistemas que tengan ligaduras no holónomas, las fuerzas reactivas correspondientes a estas ligaduras Q_j^{lig} se suman al lado derecho de las ecuaciones (1.12). Por lo que, las ecuaciones de Lagrange quedan como sigue

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{lig} + Q_j^{NU}, \quad j = 1, 2, \dots, \eta \quad (1.13)$$

donde,

$$Q_j^{lig} = \sum_{l=1}^k \lambda_l A_{lj}$$

y los términos A_{lj} están relacionados con las l ligaduras no holónomas

$$\sum_{j=1}^n A_{lj} \dot{q}_j + B_l = 0, \quad l = 1, 2, \dots, k.$$

1.2. Ecuaciones en Desviaciones y el Problema de Síntesis Lineal

Suponiendo que están prescritos algún movimiento deseado $\mathbf{y}^d(t)$, $t \in [t_0, t_1)$, $t_0 < t_1 \leq \infty$, y algún control deseado de salida $\mathbf{u}^d(t)$ que satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}^d &= f(\mathbf{y}^d(t), \mathbf{u}^d(t)), \quad t \in [t_0, t_1), \\ \mathbf{u}^d(\cdot) &\in W, \end{aligned} \tag{1.14}$$

aquí W es un conjunto funcional que abarca las restricciones del control (es común considerar a W como el conjunto de funciones continuas a trozos). A la triada $\mathbf{y}^d(\cdot)$, $\mathbf{u}^d(\cdot)$, $[t_0, t_1)$ se le llama *proceso (programa) deseado de control*. El proceso de control deseado se puede plantear como un problema de control de retroalimentación. La retroalimentación requiere de información sobre las desviaciones del estado actual $\mathbf{y}(t)$ con respecto al deseado $\mathbf{y}^d(t)$. Suponiendo que se tienen m sensores que entregan datos sobre el movimiento actual. Después de procesar dichos datos se pueden estimar las desviaciones actuales $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}^d(t)$ y se puede formar el control *actuador*. Las ecuaciones diferenciales que gobiernan las desviaciones actuales $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}^d(t)$ para $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^d(t)$, $t \in [t_0, t_1)$ pueden escribirse como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{y}}^d = f(\mathbf{y}, \mathbf{u}^d) - f(\mathbf{y}^d, \mathbf{u}^d) = f(\mathbf{y} - \mathbf{y}^d + \mathbf{y}^d, \mathbf{u}^d) - f(\mathbf{y}^d, \mathbf{u}^d) = \tilde{f}(\mathbf{x}, t), \tag{1.15}$$

donde $\tilde{f}(0, t) \equiv 0$ para $t \in [t_0, t_1)$ y $\mathbf{x}(t_0) \neq 0$. Las ecuaciones (1.15) admiten una solución trivial, correspondiente al movimiento deseado \mathbf{y}^d del sistema. Una fundamentación teórica para el análisis del comportamiento de las desviaciones la proporciona

la teoría de estabilidad, desarrollada por A. M. Lyapunov en el siglo XIX.

Restringiéndose al importante caso especial de *movimientos estacionarios deseados* $\mathbf{y}^d(t) = \mathbf{y}^e$ y $t_1 = \infty$. Se define primeramente una *coordenada cíclica* $y_i, i = 1, \dots, k; 0 \leq k < n$, de tal forma que

$$\frac{\partial f(\mathbf{y}, \mathbf{u})}{\partial y_i} = 0, \quad \frac{\partial f_i(\mathbf{y}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = 0. \quad (1.16)$$

Un movimiento $\mathbf{y}(t)$ se denomina estacionario y se denota por $y^e(t)$, si $\dot{y}_i^e \equiv$ constante, $i = 1, 2, \dots, k$, $\dot{y}_j^e \equiv 0$, $j = k + 1, \dots, n$, donde y_1, \dots, y_k son las coordenadas cíclicas. Para $k = 0$ el sistema no tiene coordenadas cíclicas. De acuerdo con (1.14), el movimiento deseado es factible si se cumplen las siguientes k ecuaciones diferenciales y las $n - k$ identidades:

$$\dot{y}_i^e = f_i(y_{k+1}^e, \dots, y_n^e), \quad i = 1, \dots, k, \quad (1.17)$$

$$f_j(y_{k+1}^e, \dots, y_n^e, u_1, \dots, u_s) = 0, \quad j = k + 1, \dots, n. \quad (1.18)$$

Suponiendo que las $n - k$ ecuaciones (1.18) con s incógnitas u_1, \dots, u_s admiten al menos una solución u_1^e, \dots, u_s^e . Entonces el *proceso estacionario deseado de control* $\{\mathbf{y}^e(t), \mathbf{u}^e, [t_0, \infty)\}$ está definido por la triada $\{\mathbf{y}^d(t), \mathbf{u}^d, [t_0, t_1)\}$, donde $\mathbf{y}^d(t) = \mathbf{y}^e(t)$, $\mathbf{u}^d(t) = \mathbf{u}^e$ es una solución de (1.18) y $t_1 = \infty$.

Observación 1.1. Para un proceso de control estacionario el miembro derecho de (1.15) no depende explícitamente de t y las ecuaciones en desviaciones toman la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \tilde{f}(\mathbf{x}), \quad (1.19)$$

donde $\tilde{f}(0) \equiv \mathbf{0}$ y $\mathbf{x}(t_0) \neq 0$.

De manera que el análisis de las desviaciones de la solución estacionaria conduce al análisis de la estabilidad de la solución trivial del sistema no lineal (1.19) .

Definición 1.10. La solución trivial $\mathbf{x} \equiv 0$ de (1.19) se denomina estable en el sentido

de Lyapunov, si para cualquier ϵ positivo existe un $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, tal que la desigualdad $|\mathbf{x}(t_0)| \leq \delta$ da lugar a $|\mathbf{x}(t)| < \epsilon$ para cualquier $t > t_0$.

Definición 1.11. La solución trivial se denomina asintóticamente estable si es estable en el sentido de Lyapunov (definición 1) y, además, existe una vecindad abierta de cero $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0, \quad \text{para todo } \mathbf{x}(t_0) \in X_0.$$

En el análisis de estabilidad son de importancia fundamental las ecuaciones lineales de desviaciones

$$\dot{x} = Ax, \quad \text{donde} \quad A_{n \times n} = \frac{\partial \tilde{f}(0)}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{f}(\mathbf{y}^e, \mathbf{u}^e)}{\partial y} \quad (1.20)$$

es una matriz constante. Denotemos con λ_i las raíces del polinomio característico $\det(\lambda E_n - A) = 0$ de la matriz A . Los siguientes resultados se pueden encontrar en [5].

Teorema 1.1. *(Sobre la estabilidad a primera aproximación.)*

Si todos los eigenvalores λ_i de la matriz A están en el semiplano izquierdo del plano complejo, es decir, $\text{Re}\lambda_i < 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, entonces la solución trivial de (1.19) es asintóticamente estable.

Teorema 1.2. *(Sobre la inestabilidad a primera aproximación.) Si existe por lo menos un eigenvalor de A con parte real positiva, entonces la solución trivial es inestable.*

Definición 1.12. La solución trivial se denomina exponencialmente estable, si existen α y β positivas, tales que para cualquier $\mathbf{x}(t_0) \in X_0$, $t \in [t_0, t_1)$ se cumple la desigualdad

$$|\mathbf{x}(t)| \leq \beta |\mathbf{x}(t_0)| e^{-\alpha(t-t_0)}. \quad (1.21)$$

Si la vecindad X_0 es igual a \mathbb{R}^n se dice que la estabilidad es global y exponencialmente estable.

Ahora se dará la formulación formal del problema de la síntesis con retroalimentación lineal, para el caso cuando el conjunto funcional W es el conjunto de funciones

continuas por tramos, cuyos valores están en un conjunto cerrado Ω en el espacio de control \mathbb{R}^s :

$$W = \{\mathbf{u}(\cdot) \in KC \mid \mathbf{u}(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^s, \quad t \in [t_0, t_1]\}.$$

Suponiendo que $\mathbf{u}^d(t) \in \text{int}\Omega$ para $t \in [t_0, t_1]$. El significado físico de esto último es que los actuadores tienen algunos recursos adicionales que les permiten reducir las desviaciones presentes. Considerando que se da la estrategia de control

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^d(t) + \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{z}, t), \quad (1.22)$$

donde $\tilde{\mathbf{u}}$ es algún control adicional. Se introducen las *ecuaciones lineales de desviaciones*

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + B(t)\tilde{\mathbf{u}}, \quad (1.23)$$

donde

$$A(t) = \frac{\partial f(\mathbf{y}^d(t), \mathbf{u}^d(t))}{\partial \mathbf{y}}, \quad B(t) = \frac{\partial f(\mathbf{y}^d(t), \mathbf{u}^d(t))}{\partial \mathbf{u}}$$

y, *el modelo lineal de medición*

$$\tilde{\mathbf{z}} = H(t)\mathbf{x} + \gamma(t), \quad (1.24)$$

donde

$$H(t) = \frac{\partial \varphi(\mathbf{y}^d(t))}{\partial \mathbf{y}}, \quad \tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{z} - \varphi(\mathbf{y}^d(t)),$$

y \mathbf{z} es el vector que contiene los datos de medición. Lo que se requiere es hallar un operador homogéneo $\tilde{\mathbf{u}} = \mathcal{P}[\mathbf{z}(t)]$, tal que las desviaciones actuales satisfagan (1.21) mientras que $\gamma \equiv 0$. El problema que se plantea en (1.21) tal que las perturbaciones actuales cumplen con (1.21), (1.23), (1.24) se denomina *problema de estabilización del movimiento deseado*. Este es uno de los problemas básicos de la síntesis lineal con retroalimentación.

En el caso de movimientos estacionarios \mathbf{y}^e , $t \in [t_0, \infty)$, y funciones $\varphi(\mathbf{y})$ lineales

en coordenadas cíclicas, las matrices A , B y H son invariantes en el tiempo, y la complejidad del problema se reduce significativamente.

El problema de síntesis lineal (1.22), (1.23) y (1.24) se conoce como *problema de seguimiento*. El planteamiento anterior de síntesis, al ser los más simples posibles, permiten una comprensión rápida de los problemas dinámicos de control típicos. Esto se justifica por el hecho de que la estrategia de control lineal (1.22) es semejante a la representación de un movimiento como una suma de movimiento transitorio y relativo, que se usa con frecuencia en mecánica teórica.

1.3. Controlabilidad, Observabilidad y Estabilizabilidad

Considerando las ecuaciones en desviaciones para procesos estacionarios (1.23), bajo un control adicional de entrada $\tilde{\mathbf{u}}$. Por brevedad, cuando no haya lugar a confusión, se usarán las designaciones previas ($\tilde{\mathbf{u}} \rightarrow \mathbf{u}$) de un control \mathbf{u} perteneciente a un conjunto funcional W

$$\mathbf{u}(\cdot) \in W = \{\mathbf{u}(\cdot) \in KC \mid \mathbf{u}(t) \in \tilde{\Omega} \subset \tilde{\mathbb{R}}^s\},$$

donde KC es el conjunto de funciones vectoriales continuas a trozos, $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^s$ es un conjunto convexo cerrado de valores posibles de control de retroalimentación, \mathbb{R}^s es el espacio euclidiano s -dimensional de control.

1.3.1. Controlabilidad

Se considera un sistema invariante en el tiempo con inclusiones funcionales

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \tag{1.25}$$

$$\mathbf{u}(\cdot) \in W. \tag{1.26}$$

Es evidente que si $B = 0$, el sistema (1.25) no puede controlarse. Cuando $B \neq 0$ el sistema se denomina *controlable*. Suponiendo que al momento inicial $t_0 = 0$, $\mathbf{x}(0) = 0$, y denotando por \mathcal{D} al *conjunto de accesibilidad* en el espacio de estados, que es el conjunto de todas las $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a las que se puede acceder con un control $\mathbf{u}(\cdot) \in W$ en un tiempo dado t_1 , $0 < t_1 < \infty$. Introduciendo la matriz de bloques U denominada *matriz de controlabilidad*

$$U = (B, AB, \dots, A^{n-1}B),$$

se tiene el siguiente lema.

Lema 1.1. *Si el rango de U es igual a n , el conjunto \mathcal{D} es una región convexa en \mathbb{R}^n de dimensión n .*

Definición 1.13. El sistema (1.25) es completamente controlable si le puede llevar de cualquier estado inicial a uno final cualquiera por medio de un control $\mathbf{u}(\cdot) \in W$ en un tiempo finito.

Podemos dar otra definición equivalente de controlabilidad total para el sistema (1.25). En virtud de la linealidad de (1.25) el origen puede tomarse como punto inicial. Entonces la noción de controlabilidad completa corresponde al caso en que la región accesible \mathcal{D} coincide con el espacio de perturbaciones \mathbb{R}^n .

Definición 1.14. El sistema (1.25) es completamente controlable si la región accesible \mathcal{D} coincide con el espacio \mathbb{R}^n .

El cálculo del rango de la matriz U proporciona un criterio constructivo de la controlabilidad total.

Teorema 1.3. *El sistema (1.25) es completamente controlable, si y sólo si, el rango de $(B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ es n .*

Corolario 1.1. *Para $s = 1$ el criterio de controlabilidad total puede escribirse como*

$$\det(\mathbf{b}, A\mathbf{b}, \dots, A^{n-1}\mathbf{b}) \neq 0. \quad (1.27)$$

En el caso anterior se dice que el sistema (1.25) es de entrada única y puede escribirse como

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u_1 \quad (1.28)$$

Teorema 1.4. *El sistema multidimensional de entrada única (1.28) puede presentarse en la forma de una sola ecuación unidimensional, si y sólo si, $\text{rang}U = n$ o, bien si $\det U \neq 0$.*

Ahora si se considera las ecuaciones en desviaciones (1.25) dependientes del tiempo, esto significa que al menos una de las matrices A o B no es constante. Entonces el concepto de controlabilidad está dado como sigue:

Definición 1.15. Al sistema (1.25) se le denomina completamente controlable al momento t_0 si existe un momento t y un control finito $\mathbf{u}(\tau)$, $t_0 \leq \tau \leq t$ que transforma el sistema desde cualquier estado de partida $\mathbf{x}(t_0) = \xi$ a cualquier estado finito $\mathbf{x}(t) = \eta$.

Un criterio de controlabilidad completa se establece como sigue: Sea $W(t, t_0)$ una matriz simétrica denominada *grammiano de controlabilidad*

$$W(t, t_0) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t, \tau)d\tau. \quad (1.29)$$

Aquí $\Phi(t, t_0)$ es la matriz de transferencia de (1.25) que obedece la ecuación diferencial matricial

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = E.$$

Nótese que con la matriz de transferencia la solución de (1.25) se puede escribir como

$$\mathbf{x} = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau,$$

con $W(t, t_0) \geq 0$.

Teorema 1.5. *El sistema dependiente del tiempo (1.25) es completamente controlable en t_0 si y sólo si $\det W(t, t_0) \neq 0$, o, equivalentemente, $W(t, t_0) > 0$ para algún $t > t_0$.*

El teorema anterior es fuerte en la teoría, en la práctica está limitado ya que el cálculo de la matriz gramiana de controlabilidad requiere el conocimiento explícito de la matriz de transferencia, pero la matriz de transferencia para sistemas variantes en el tiempo es generalmente desconocida y puede ser difícil de aproximar en algunos casos.

1.3.2. Estabilizabilidad

Considerando un sistema mecánico gobernado por las ecuaciones (1.25), provisto con sensores que proporcionan información sobre las desviaciones actuales de \mathbf{x} . Entonces es posible describir el control como $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$ y buscar los elementos de la matriz K que aseguren la estabilidad.

Definición 1.16. El sistema (1.25) se denomina *estabilizable* si existe una matriz K tal que para $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$ la solución trivial de (1.25) es asintóticamente estable

La noción de estabilizabilidad está directamente relacionada con la de controlabilidad.

Teorema 1.6. *Un sistema totalmente controlable (1.25) es estabilizable.*

1.3.3. Observabilidad

Si el control \mathbf{u} es una función conocida, la posibilidad de conocer $\mathbf{x}(t)$ a partir de los datos de medición $\mathbf{z}(t)$ es la misma que para el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{z} = H\mathbf{x}. \quad (1.30)$$

Definición 1.17. El sistema (1.30) se denomina *completamente observable* al momento t si existe un momento finito t_0 , tal que el estado $\mathbf{x}(t)$ puede calcularse a partir de los datos de la medición $\mathbf{z}(t)$ en el intervalo de tiempo $[t_0, t]$.

En la mayoría de las aplicaciones $m < n$, de modo que el sistema

$$H(t)\mathbf{x}(t) = \mathbf{z}(t) \quad (1.31)$$

de m ecuaciones con n incógnitas es indeterminado. La medición de \mathbf{z} en un instante fijo t no es suficiente para construir el estado \mathbf{x} . Por lo que la solución del problema anterior requiere de la información disponible sobre $\mathbf{z}(\tau)$ en el intervalo de tiempo $[t_0, t]$. Al momento $\tau \in [t_0, t]$ el vector \mathbf{z} puede escribirse como

$$\mathbf{z}(\tau) = H(\tau)\Phi(\tau, t)\mathbf{x}(t), \quad (1.32)$$

donde $\Phi(t, t_0)$ es la matriz de transferencia del sistema. Introduciendo la matriz gramiana de observabilidad

$$N(t, t_0) = \int_{t_0}^t \Phi^T(\tau, t)H^T(\tau)H(\tau)\Phi(\tau, t)d\tau, \quad N = N^T \geq 0,$$

se tiene el siguiente

Teorema 1.7. *El sistema (1.30) es completamente observable, si y sólo si, existe un $t_0 < t$, tal que la matriz $N(t, t_0)$ es definida positiva, es decir, $\det N \neq 0$.*

Considerando el caso especial $A = cte.$ $H = cte.$ para un sistema invariante en el tiempo. De manera semejante al criterio de controlabilidad, puede darse el criterio de observabilidad.

Teorema 1.8. *La pareja invariante en el tiempo (A, H) es observable, si y solamente si, el rango de la matriz de observabilidad*

$$N = \begin{pmatrix} H \\ HA \\ \vdots \\ HA^{n-1} \end{pmatrix}, \quad (1.33)$$

es igual a la dimensión de \mathbf{x} : $\text{rango}N = \text{dim}\mathbf{x} = n$.

1.4. Principio del Máximo

Considerando que la ley de movimiento de un objeto puede escribirse en la forma de un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy}{dx} = f(y_1, y_2, \dots, y_n, u) = f(y, u), \quad \text{para } f(y, u) \text{ de clase } \mathcal{C}^1; \quad (1.34)$$

donde $f(y, u)$ es el vector con coordenadas $f_1(y, u), f_2(y, u), \dots, f_n(y, u)$, y están definidas para $y \in Y, u \in U$. Ahora, suponiendo que es dada una función adicional $f_0(y_1, y_2, \dots, y_n, u) = f_0(y, u)$, la cual es definida y continua junto con sus derivadas parciales $\frac{\partial f_0}{\partial y^i}, i = 1, 2, \dots, n$ en $Y \times U$. Entonces se formula el siguiente problema óptimo:

En el espacio de fase Y , dos puntos y^0 e y^1 son dados. De entre todos los controles admisibles $u = u(t)$ que transfieren el punto de fase de la posición y^0 a la posición y^1 (si existen), hallar uno, tal que la funcional

$$\varphi = \int_{t_0}^{t_1} f_0(y(t), u(t)) dt \quad (1.35)$$

toma el mínimo valor posible.

Observación 1.2. Un caso de especial importancia del anterior problema, es cuando $f_0(y, u) \equiv 1$. En este caso, la funcional (1.35) toma la forma $\varphi = t_1 - t_0$, y la optimalidad del control $u(t)$ significa **minimalidad del tiempo de transición de y^0 a y^1** . El problema de hallar los controles óptimos (y las trayectorias), en este caso se llamará **problema de tiempo óptimo**.

Agregando una nueva coordenada y_0 a las coordenadas de fase y_1, y_2, \dots, y_n , que varía de acuerdo a la ley

$$\frac{dy_0}{dt} = f_0(y_1, y_2, \dots, y_n, u), \quad (1.36)$$

donde f_0 es la función que aparece en la definición de φ , (ver (1.35)).

Considerando el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(y_1, y_2, \dots, y_n, u_1, u_2, \dots, u_r) = f^i(y, u), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (1.37)$$

cuyas partes derechas no dependen de y_0 .

Introduciendo el vector $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_n) = (y_0, \mathbf{y})$ en el espacio vectorial \mathbf{Y} de dimensión $n + 1$, de manera que (1.37) se pueda reescribir en forma vectorial

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(y, u), \quad (1.38)$$

se puede observar que, $\mathbf{f}(y, u)$ no depende de la coordenada y_0 del vector \mathbf{y} .

Ahora, sea $u(t)$ un control admisible que lleva el punto de fase de y^0 a y^1 y sea $y(t)$ la correspondiente solución de la ecuación (1.34) con condición inicial $y(t_0) = y^0$. Denotando el punto $(0, y^0)$ por \mathbf{y}^0 ; *i.e.*, \mathbf{y}^0 es el punto de \mathbf{Y} cuyas coordenadas son $(0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$, donde $(y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ son las coordenadas de y^0 en Y . Entonces, claramente, la solución de la ecuación (1.38) con condición inicial $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^0$, correspondiente al control $u(t)$, está definida sobre el intervalo $t_0 \leq t \leq t_1$, y tiene la forma:

$$y_0 = \int_{t_0}^t f_0(y(t'), u(t')) dt', \quad (1.39)$$

$$y = y(t).$$

En particular, cuando $t = t_1$

$$y_0 = \int_{t_0}^{t_1} f_0(y(t), u(t)) dt, \quad (1.40)$$

$$y = y^1,$$

i.e., la solución $\mathbf{y}(t)$ de la ecuación (1.38) con condición inicial $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^0$ pasa por el punto $\mathbf{y} = (\varphi, y^1)$. En otras palabras, si ℓ es la línea en \mathbf{Y} que pasa por el punto $\mathbf{y} = (0, y^1)$ y es paralela al eje y_0 (esta línea está formada por todos los puntos (ξ, y^1)

donde ξ es arbitrario), podemos decir que $\mathbf{y}(t)$ pasa por un punto de ℓ , con coordenada $y_0 = \varphi$, en el tiempo $t = t_1$. Recíprocamente, suponga que $u(t)$ es un control admisible tal que la correspondiente solución $\mathbf{y}(t)$ de la ecuación (1.38) con condición inicial $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^0 = (0, y^0)$, en algún tiempo t_1 pasa por el punto $\mathbf{y}^1 \in \ell$, con coordenada $y_0 = \varphi$. Entonces, el control $u(t)$ transfiere (en Y) el punto de fase de y^0 a y^1 , y la funcional (1.35) toma el valor φ .

Así, se puede formular el problema óptimo anterior, en la forma equivalente siguiente:

En el espacio fase \mathbf{Y} de dimensión $(n + 1)$, el punto $\mathbf{y}^0 = (0, y^0)$ y la línea ℓ son dados. Se asume que la línea ℓ pasa por el punto $(0, y^1)$ y es paralela al eje y_0 . De entre todos los controles admisibles $u = u(t)$, con la propiedad de que la correspondiente solución $\mathbf{y}(t)$ de (1.38), con condición inicial $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^0$ intersecta a ℓ , hallar uno, tal que el punto de intersección con ℓ tenga la coordenada y_0 más pequeña.

Para formular las condiciones necesarias que solucionen el problema anterior, se debe considerar, además del sistema fundamental de ecuaciones

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(y, u), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (1.41)$$

otro sistema de ecuaciones en las variables auxiliares $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$:

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \sum_{\alpha=0}^n \frac{\partial f_\alpha(y, u)}{\partial y_i} \psi_\alpha, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (1.42)$$

el cual se llama **sistema conjugado**.

Ahora, si se elige un control admisible $u(t)$, sobre el intervalo $t_0 \leq t \leq t_1$, y se tiene la correspondiente trayectoria de fase $\mathbf{y}(t)$ del sistema (1.41) con condición inicial $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^0$, el sistema (1.42) toma la forma

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \sum_{\alpha=0}^n \frac{\partial f_\alpha(y(t), u(t))}{\partial y_i} \psi_\alpha, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (1.43)$$

Este sistema es lineal y homogéneo. Por lo tanto, para cualquier condición inicial, admite una única solución $\psi = (\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n)$ para las ψ_i (estas funciones están definidas sobre el intervalo $t_0 \leq t \leq t_1$, en tal intervalo, $u(t)$ y $\mathbf{y}(t)$ también están definidas). Así como la solución $\mathbf{y}(t)$ del sistema (1.41), la solución del sistema (1.43) consiste de funciones continuas $\psi_i(t)$ que tienen, excepto en un número finito de puntos (en las discontinuidades de $u(t)$), derivadas continuas respecto a t . Cada solución del sistema (1.43) (para cualquier condición inicial) será llamada la solución del sistema (1.42) correspondiente al control elegido $u(t)$ y la trayectoria de fase $\mathbf{y}(t)$.

Ahora consideremos la siguiente función \mathcal{H} de las variables $y_1, y_2, \dots, y_n, \psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, u_1, u_2, \dots, u_r$:

$$\mathcal{H}(\psi, y, u) = \langle \psi, \mathbf{f}(y, u) \rangle = \sum_{\alpha=0}^n \psi_{\alpha} f_{\alpha}(y, u). \quad (1.44)$$

Se puede verificar inmediatamente que los sistemas anteriores (1.41) y (1.42) pueden ser reescritos con ayuda de la función \mathcal{H} en la forma del siguiente sistema Hamiltoniano:

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_i}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (1.45)$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_i}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (1.46)$$

Para valores fijos (constantes) de ψ e y , la función \mathcal{H} se hace una función del parámetro $u \in U$. Denotando a la mínima cota superior de los valores de esta función por

$$\mathcal{M}(\psi, y) = \sup_{u \in U} \mathcal{H}(\psi, y, u). \quad (1.47)$$

Si la función continua \mathcal{H} alcanza su mínima cota superior sobre U , entonces $\mathcal{M}(\psi, y)$ es el mínimo de los valores de \mathcal{H} , para ψ e y fijos.

El siguiente teorema (una condición necesaria para la optimalidad) cuyo principal contenido está en la ecuación (1.48) será llamado *el Principio del Máximo* [30]:

Teorema 1.9. *Sea $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, un control admisible tal que la trayectoria correspondiente $\mathbf{y}(t)$ empieza en el punto \mathbf{y}^0 , en el tiempo t_0 , y pasa por un punto de*

la línea ℓ en el tiempo t_1 . Para que $u(t)$ e $\mathbf{y}(t)$ sean óptimas es necesario que exista una función vectorial continua no idénticamente cero $\psi(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \dots, \psi_n(t))$ correspondiendo a $u(t)$ e $\mathbf{y}(t)$, tal que:

1. Para todo $t \in [t_0, t_1]$, la función $\mathcal{H}(\psi(t), y(t), u)$ de la variable $u \in U$ alcanza su máximo en el punto $u = u^0(t)$

$$\mathcal{H}(\psi(t), y(t), u^0(t)) = \mathcal{M}(\psi(t), y(t)). \quad (1.48)$$

2. En el tiempo t_1 , las relaciones

$$\psi_0(t_1) \leq 0, \quad \mathcal{M}(\psi(t_1), y(t_1)) = 0, \quad (1.49)$$

se satisfacen.

Además, resulta que si $\psi(t)$, $\mathbf{y}(t)$ y $u(t)$ satisfacen los sistemas (1.41), (1.42), y la condición 1, las funciones del tiempo $\psi_0(t)$ y $\mathcal{M}(\psi(t), y(t))$ son constantes. Así, (1.49) se cumple en cualquier tiempo $t \in [t_0, t_1]$, y no sólo en t_1 .

Ahora, se formula el problema óptimo para el caso de puntos extremos variables. Sean S_0 y S_1 variedades suaves en Y de dimensión arbitraria $r_0 < n$, $r_1 < n$, respectivamente. Hallar un control admisible $u(t)$, el cual transfiere el punto de fase de alguna (no dada previamente) posición $y^0 \in S_0$ a alguna posición $y^1 \in S_1$, y que imparte un mínimo valor a la funcional (1.35).

Es claro que, si los puntos y^0 y y^1 se conocieran, se tendría un problema con extremos fijos. Por lo tanto, el control $u(t)$, óptimo en el sentido del problema con puntos extremos variables, es también óptimo; *i.e.*, el Principio del Máximo (Teorema 1.5.1) permanece válido para el problema con puntos extremos variables.

Sin embargo, en este caso, es necesario tener relaciones adicionales de tal forma que se pueda determinar las posiciones de $y^0 \in S_0$ y $y^1 \in S_1$. Dichas relaciones, que se formularán mas adelante, se conocen como *las condiciones de transversalidad*. Estas

condiciones permiten escribir $r_0 + r_1$ relaciones involucrando las coordenadas de los puntos extremos y^0 y y^1 . Por otra parte, dado el número de parámetros desconocidos (en comparación con el problema con puntos extremos fijos) es incrementado por $r_0 + r_1$ (la posición de $y^0 \in S_0$ está caracterizada por r_0 parámetros y la posición de $y^1 \in S_1$ por r_1 parámetros), el Principio del Máximo junto con las condiciones de transversalidad, forman un sistema “suficiente” de relaciones para resolver el problema óptimo con puntos extremos variables.

Formulación de las condiciones de transversalidad. sean $y^0 \in S_0$, $y^1 \in S_1$ ciertos puntos, y sean T_0 , T_1 los planos tangentes de S_0 y S_1 , respectivamente, que pasan por esos puntos. Los planos T_0 y T_1 están en Y , tienen dimensión r_0 y r_1 , respectivamente. Además, sean $u(t)$, $\mathbf{y}(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, la solución del problema óptimo con puntos extremos fijos y^0 y y^1 . Finalmente, sea $\psi(t)$ el vector cuya existencia esta garantizada por el Teorema 1.5.1. Se dice que el vector $\psi(t)$ satisface las condiciones de transversalidad en el punto extremo derecho de la trayectoria $\mathbf{y}(t)$ (i.e., en el punto $\mathbf{y}(t_1)$), si el vector $\psi(t_1) = (\psi_1(t_1), \psi_2(t_1), \dots, \psi_n(t_1))$ es ortogonal a T_1 . En otras palabras, la condición de transversalidad significa que $\langle \psi(t_1), \theta \rangle = 0$, para todo vector $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ perteneciendo (o paralelo) a T_1 . La condición de transversalidad tiene un sentido similar en el punto extremo izquierdo de la trayectoria $\mathbf{y}(t)$ (reemplazar t_1 y T_1 por t_0 y T_0 respectivamente).

Es claro que la condición de transversalidad en el punto extremo derecho de la trayectoria $\mathbf{y}(t)$ tiene r_1 relaciones independientes, ya que es suficiente sustituir r_1 vectores $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^{r_1}$ linealmente independientes (localizados en T_1) en la relación $\langle \psi(t_1), \theta \rangle = 0$. La condición de transversalidad en el punto extremo izquierdo tiene r_0 relaciones independientes.

Una forma equivalente de la condición de transversalidad, que hace evidente la presencia de la funcional que se desea minimizar es como sigue: El vector $\psi(t)$ satisface las condiciones de transversalidad en el punto extremo derecho de la trayectoria $\mathbf{y}(t)$ i.e.,

en el punto $\mathbf{y}(t_1)$ si existe un escalar $\lambda_0 \geq 0$ tal que el vector

$$\left(\psi(t_1) + \lambda_0 \frac{\partial \varphi(\mathbf{y}(t_1))}{\partial \mathbf{y}} \right) \perp S_1 \text{ en } \mathbf{y}(t_1),$$

para $y_0 = \varphi(\mathbf{y}(t_1))$.

La solución del problema óptimo con puntos extremos variables se enuncia en el siguiente

Teorema 1.10. *Sea $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, un control admisible que transfiere al punto de fase de alguna posición $y^0 \in S_0$ a la posición $y^1 \in S_1$, y sea $\mathbf{y}(t)$ la trayectoria correspondiente (que inicia en el punto $\mathbf{y}^0 = (0, y^0)$). Para que $u(t)$ e $\mathbf{y}(t)$, den la solución del problema óptimo con puntos extremos variables es necesario que exista un escalar $\lambda_0 \geq 0$ y una función vectorial continua no idénticamente cero $\psi(t)$, que satisfaga las condiciones del Teorema 1.5.1 junto con las condiciones de transversalidad en ambos puntos extremos de la trayectoria $\mathbf{y}(t)$.*

Para el caso de tiempo óptimo, se reemplaza $\mathbf{y}(t)$, por $y(t)$ en el Teorema 1.5.2.

1.5. Programación Dinámica de Bellman

Uno de los principales métodos de síntesis óptima es la programación dinámica, que fue introducida por primera vez por R. Bellman. El término síntesis óptima significará: determinar el control como una función de las variables de fase, tal que minimice algún funcional especificado.

El enfoque de la programación dinámica está destinado para sistemas dinámicos de tipo Markov, el futuro es determinado completamente por el presente y no por el pasado. Un caso especial de sistemas de Markov son los sistemas dinámicos controlables, cuyo movimiento está determinado por algunas ecuaciones diferenciales o en diferencias sin demora en el tiempo (sin retraso).

La programación dinámica está basada en el siguiente principio de optimalidad: *Independientemente del estado y el control inicial, el control posterior tiene que ser*

óptimo en relación con el estado alcanzado por el control anterior. En otras palabras, el control óptimo no depende de la historia, además está totalmente determinado por el estado del sistema en el momento actual y el costo de control, especificado por algún funcional adicional.

A diferencia del Principio del Máximo, la programación dinámica fue desarrollada primero para sistemas discretos. Este método permite determinar el mínimo global para un conjunto de control dado.

Para problemas de control óptimo, de sistemas dinámicos controlables, el principio de optimalidad afirma que: para cualquier instante de tiempo $\tilde{t} \in [t_0, t_1)$, dividiendo la trayectoria óptima en dos partes, la segunda parte determina una trayectoria óptima.

1.5.1. Procedimiento de Síntesis

Dada la dinámica de un proceso controlable, descrita por la ecuación de estado no lineal

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t). \quad (1.50)$$

Hallar una ley de control de retroalimentación de estado $u(x(t), t)$, tal que el criterio de desempeño del comportamiento general del sistema (1.50)

$$J = h(x(t_1), t_1) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau, \quad (1.51)$$

sea mínimo. Usando el principio de encajamiento para incluir este problema en una clase más grande de problemas, pero considerando el criterio de desempeño

$$J(x(t), u(t), t) = h(x(t_1), t_1) + \int_t^{t_1} f_0(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau, \quad t \leq t_1, \quad (1.52)$$

donde $x(t)$, es cualquier estado admisible. Ahora, el problema es determinar todos los controles que minimicen (1.52), para todas las $x(t)$ admisibles y para todo $t \leq t_1$.

Asumiendo que existe una función de costo mínimo $w(x(t), t)$, llamada función

de Bellman, donde

$$w(x(t), t) = \min_{u(\cdot)} \left\{ \int_t^{t_1} f_0(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + h(x(t_1), t_1) \right\}, \quad t \leq t_1. \quad (1.53)$$

Partiendo en dos el intervalo de tiempo se tiene

$$w(x(t), t) = \min_{u(\cdot)} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} f_0 d\tau + \int_{t+\Delta t}^{t_1} f_0 d\tau + h(x(t_1), t_1) \right\}, \quad t \leq t_1.$$

Usando el principio de optimalidad se tiene

$$w(x(t), t) = \min_{u(\cdot)} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} f_0 d\tau + w(x(t + \Delta t), t + \Delta t) \right\}, \quad t \leq t + \Delta t,$$

donde $w(x(t + \Delta t), t + \Delta t)$ es el costo mínimo del proceso para el intervalo de tiempo $t + \Delta t \leq \tau \leq t_1$ con estado inicial $x(t + \Delta t)$.

Asumiendo que las derivadas parciales de w existen y son acotadas, Bellman demostró que $w(x, t)$ debe satisfacer la ecuación en derivadas parciales (llamada ecuación de Bellman en derivadas parciales)

$$-\frac{\partial w(x(t), t)}{\partial t} = \min_{u(\cdot)} \left\{ f_0(x, u, t) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^T f(x, u, t) \right\}, \quad (1.54)$$

para hallar las condiciones de frontera de esta ecuación diferencial en derivadas parciales, se toma $t = t_1$ en la ecuación (1.53), obteniendo

$$w(t_1, x(t_1)) = h(x(t_1), t_1).$$

El procedimiento de síntesis óptima se resume como sigue:

1. Formular la ecuación de Bellman (1.54) para el problema dado.
2. Determinar un control u^0 , que minimice la parte derecha de la ecuación de Bell-

man (1.54), y escribirlo en la forma

$$u^0 = u^0 \left(x, \frac{\partial w}{\partial x} \right).$$

3. Sustituir u^0 en la ecuación de Bellman (1.54) para obtener, la ecuación diferencial no lineal de primer orden, en derivadas parciales en términos de $w(t, x)$, de la forma

$$-w_t(x(t), t) = f_0(x, u^0(x, w_x)) + (w_x)^T f(x, u^0(x, w_x)) \quad (1.55)$$

con las condiciones de frontera $w(t_1, x(t_1)) = h(x(t_1), t_1)$.

4. Determinar la solución $w(t, x)$ de (1.55).
5. Terminar el procedimiento de síntesis óptima sustituyendo la solución $w(t, x)$ en la expresión del control óptimo u^0 .

La mayor dificultad en la aplicación del procedimiento anterior surge al resolver problema con valor en la frontera (1.55).

1.5.2. Problema de Control Lineal Cuadrático

En el caso especial del problema lineal cuadrático el control óptimo puede ser sintetizado. Sea el sistema dinámico controlable invariante en el tiempo, gobernado por la ecuación

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (1.56)$$

donde A es una matriz cuadrada, b es un vector columna, u es un control escalar de entrada. El estado inicial $x(0) = x_0$ y el intervalo de tiempo $[0, t_1]$ son fijos, el estado terminal $x(t_1)$ es sin restricciones. La funcional de costo es especificada como

$$J = \frac{1}{2} (x(t_1))^T Q x(t_1) + \frac{1}{2} \int_0^{t_1} [x^T N x + r^2 u^2] dt, \quad (1.57)$$

donde Q , N son matrices constantes simétricas no negativas, r es un escalar. El problema es sintetizar una ley de control óptima. La ecuación de Bellman puede ser escrita como

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \min_u \left\{ \frac{1}{2} x^T N x + \frac{1}{2} r^2 u^2 + (Ax)^T \frac{\partial w}{\partial x} + (bu)^T \frac{\partial w}{\partial x} \right\}, \quad (1.58)$$

$$w(t_1) = \frac{1}{2} (x(t_1))^T Q x(t_1).$$

De acuerdo al procedimiento anterior, primero se encuentra un control u^0 que minimice el lado derecho de la ecuación (1.58). Esta ecuación puede ser transformada a la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + \min_u \left\{ \frac{1}{2} x^T N x + \frac{1}{2} r^2 \left[u^2 + \frac{2}{r^2} b^T \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{1}{r^4} \left(b^T \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right. \\ \left. - \frac{1}{2r^2} \left(b^T \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + (Ax)^T \frac{\partial w}{\partial x} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (1.59)$$

El término entre corchetes es minimizado por

$$u^0 = -\frac{1}{r^2} b^T \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Sustituyendo u^0 , se puede reescribir la ecuación de Bellman como

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2} x^T N x + (Ax)^T \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{2r^2} \left(b^T \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = 0, \quad (1.60)$$

$$w(t_1) = \frac{1}{2} (x(t_1))^T Q x(t_1). \quad (1.61)$$

Buscando una solución de (1.60) como una forma cuadrática

$$w(t, x) = \frac{1}{2} x^T \mathcal{L}(t) x,$$

donde $\mathcal{L}(t)$ es alguna matriz simétrica aún desconocida. Se puede escribir

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{2}x^T \dot{\mathcal{L}}(t)x, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \mathcal{L}(t)x, \quad u^0 = -\frac{1}{r^2}b^T \mathcal{L}(t)x. \quad (1.62)$$

Sustituyendo(1.61) y (1.62) en(1.60) se obtiene el siguiente problema con valor inicial en $\mathcal{L}(t)$

$$\frac{1}{2}x^T \dot{\mathcal{L}}(t)x + \frac{1}{2}x^T N x + (Ax)^T \mathcal{L}(t)x - \frac{1}{2r^2} (b^T \mathcal{L}(t)x)^2 = 0,$$

o, equivalentemente,

$$\frac{1}{2}x^T \left(\dot{\mathcal{L}} + N + \mathcal{L}A + A^T \mathcal{L} - \frac{1}{2} \mathcal{L}bb^T \mathcal{L} \right) x = 0.$$

Lo anterior es verdadero, si la matriz $\mathcal{L}(t)$ satisface la ecuación

$$\dot{\mathcal{L}} + N + \mathcal{L}A + A^T \mathcal{L} - \frac{1}{r^2} \mathcal{L}bb^T \mathcal{L} = 0, \quad (1.63)$$

$$\mathcal{L}(t_1) = Q.$$

La ecuación (1.63) se conoce como la ecuación matricial de Riccati. En dimensiones mayores usualmente esta ecuación se resuelve numéricamente.

1.6. Teorema de Tikhonov

La modelación matemática de los sistemas mecánicos consta de dos etapas principalmente: la primera es la construcción de un modelo matemático representado con ecuaciones apropiadas, la segunda etapa es examinar estas ecuaciones analítica o numéricamente. Por lo general, se consideran modelos más sencillos y se simplifican (o aproximan) las ecuaciones para su análisis.

Hay varios métodos de análisis aproximado para las ecuaciones diferenciales. Uno de ellos es la teoría de perturbaciones, que es una colección de métodos para obtener *soluciones analíticas aproximadas* de ecuaciones diferenciales en las que se involucra

un parámetro pequeño. Otro método más amplio es el *análisis fraccional* [24] ya que introduce el parámetro pequeño y aplica herramientas matemáticas. Este método hace posible la obtención de ecuaciones aproximadas que describen los componentes rápido y lento del movimiento por separado. En un mismo problema existen dos tipos de tiempo: el tiempo adimensional lento y el tiempo adimensional rápido que son denotados por $t = \frac{T}{T_2}$ y $\tau = \frac{T}{T_1}$, respectivamente. Con $\tau = \frac{t}{\mu}$, $\mu = \frac{T_1}{T_2} \ll 1$, donde μ es un parámetro pequeño.

Los siguientes sistemas dependen del parámetro pequeño ϵ

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1 \\ \dot{x}_2 &= \epsilon f_2, \quad \epsilon \ll 1 \end{aligned} \tag{1.64}$$

$$\begin{aligned} \epsilon \dot{x}_1 &= f_1, \quad \epsilon \ll 1 \\ \dot{x}_2 &= f_2. \end{aligned} \tag{1.65}$$

En ambos sistemas x_1 es la variable rápida y x_2 es la variable lenta.

La normalización (procedimiento para transformar ecuaciones con variables dimensionales a ecuaciones con variables adimensionales) de las ecuaciones y la introducción de los parámetros pequeños forman parte de la primera etapa de análisis fraccional. En la segunda etapa, la pequeñez de los parámetros se usa para construir una solución aproximada.

Considerando los parámetros pequeños iguales a cero. Las ecuaciones iniciales que tienen los parámetros pequeños se llaman *ecuaciones perturbadas respecto a los parámetros pequeños* relativas a las no perturbadas que se obtienen cuando los parámetros pequeños son iguales a cero ($\epsilon = 0$). Para las ecuaciones (1.64) y (1.65) sus correspondientes sistemas no perturbados son

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, t) \\ \dot{x}_2 &= 0\end{aligned}\tag{1.66}$$

$$\begin{aligned}0 &= f_1 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, t).\end{aligned}\tag{1.67}$$

Es natural esperar que las ecuaciones no perturbadas son, en primer lugar, mas simples que las perturbadas, y en segundo lugar, que determinan una solución que está cerca de la solución de las ecuaciones iniciales. La diferencia entre las soluciones del sistema perturbado y el no perturbado se estima por la norma Euclidiana:

$$\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^n [x_i(t, \epsilon) - x_i(t, 0)]^2},\tag{1.68}$$

Donde n es el orden del sistema, $x_i(t, \epsilon)$ y $x_i(t, 0)$ son las componentes de la solución del sistema perturbado y no perturbado, respectivamente.

Para esta estimación es necesario establecer explícitamente el tamaño del intervalo de tiempo $t \in I$ en el cual es válida. Se consideran 3 casos:

1. Intervalo de tiempo finito $0 \leq t \leq t' < \infty$
2. Intervalo de tiempo asintóticamente grande $0 \leq t \leq t'/\epsilon, \quad \epsilon \rightarrow 0$
3. Intervalo de tiempo infinito $0 \leq t < \infty$

Para la estimación existen dos casos.

1. Cuando $\epsilon \rightarrow 0$ la aproximación de las soluciones se da en todo el intervalo $t \in I$:

$$\sup_I \Delta \rightarrow 0 \text{ cuando } \epsilon \rightarrow 0.\tag{1.69}$$

Entonces el sistema con un parámetro pequeño se llama *regularmente perturbado*. El problema de este tipo está determinado por las ecuaciones (1.64) y (1.66) si la estimación se cumple en el intervalo de tiempo finito.

2. Si la condición (1.69) no se satisface, entonces el sistema con un parámetro pequeño se llama *singularmente perturbado*

Ahora considere un sistema singularmente perturbado de forma general

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= Y(y, z, t, \epsilon); & y(0) &= y_0 \\ \epsilon \frac{dz}{dt} &= Z(y, z, t, \epsilon); & z(0) &= z_0, \quad \epsilon \ll 1,\end{aligned}\tag{1.70}$$

donde y y z son vectores n, m -dimensional, respectivamente.

De las ecuaciones (1.70) se obtiene un sistema degenerado haciendo $\epsilon = 0$ y excluyendo z_0 :

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{y}}{dt} &= Y(\bar{y}, \bar{z}, t, 0); & \bar{y}(0) &= y_0 \\ 0 &= Z(\bar{y}, \bar{z}, t, 0).\end{aligned}\tag{1.71}$$

A continuación se formulan las siguientes definiciones para posteriormente enunciar el teorema de Tikhonov.

Definición 1.18. La raíz $z = \varphi(y, t)$ de un sistema de ecuaciones

$$Z(y, z, t, 0) = 0\tag{1.72}$$

se llama **aislada** en algún rango restringido de las variables y, t , si las otras raíces del sistema (1.72) no existen para cada valor fijo y, t en ninguna vecindad pequeña de la raíz.

Se introduce un sistema de ecuaciones con aproximación de orden cero para movimientos rápidos. Este sistema es conocido como “adjunto”, o sistema de capa límite. Para obtenerlo, (se hace la transición al tiempo rápido) en las ecuaciones (1.70) se hace $\tau = t/\epsilon$ y la condición $\epsilon = 0$:

$$\frac{dz}{d\tau} = Z(y, z, t, 0).\tag{1.73}$$

Aquí, y y t (lentos) son considerados como parámetros. La transición a τ en el lado derecho no es implementada porque para cualquier t finito cuando $\epsilon \rightarrow 0$ se tiene que $\tau \rightarrow \infty$, y $\epsilon\tau = t$.

La raíz $z = \varphi(y, t)$ de la ecuación (1.72) define el punto estacionario, esto es, la posición de equilibrio del sistema (1.73).

Definición 1.19. El dominio de influencia del punto estacionario $z = \varphi(y, t)$ es conocido como el conjunto de puntos z^+ tal que las soluciones del sistema adjunto, con puntos iniciales z^+ , tiende a $\varphi(y, t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Teorema 1.11. (*Tikhonov*). *Considere las siguientes condiciones:*

1. Las funciones $Y(y, z, t, \epsilon)$ y $Z(y, z, t, \epsilon)$ son analíticas respecto a: y, z, t, ϵ en algún dominio del espacio de variables.
2. La ecuación (1.72) tiene una raíz $z = \varphi(y, t)$ en algún dominio limitado D de las variables y, t , además esta raíz es aislada.
3. La función $Y(y, \varphi(y, t), t, 0)$ es analítica respecto a y, t .
4. Los puntos estacionarios $z = \varphi(y, t)$ del sistema (1.73) son asintóticamente estables de acuerdo a Lyapunov para todo y, t , tales que la raíz de la ecuación (1.72) está definida.
5. Las condiciones iniciales z_0 están en el dominio de influencia de la raíz $z = \varphi(y, t)$ del sistema (1.73).

Entonces existe $\epsilon_0 > 0$ tal que la única solución del sistema (1.70) existe para $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$, y se satisfacen los siguientes límites:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} y(t, \epsilon) &= \bar{y}(t) \quad \text{para } 0 \leq t \leq t', \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} z(t, \epsilon) &= \bar{z}(t) \quad \text{para } 0 < t \leq t'. \end{aligned} \tag{1.74}$$

Aquí $0 \leq t \leq t'$ es un intervalo de tiempo finito que se encuentra dentro del dominio D , donde la única solución del sistema (1.70) existe.

1.7. Lema de Lyapunov

Lema 1.2. [13]

1. *La ecuación matricial de Lyapunov*

$$AP + PA^T = -Q, \quad A, P, Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (1.75)$$

tiene una única solución simétrica $P = P^T$, si y sólo si,

$$\bar{\lambda}_i + \lambda_i = 2\operatorname{Re}\lambda_i < 0 \quad (1.76)$$

para todos los eigenvalores λ_i de la matriz A , lo cual implica que A no tiene eigenvalores nulos ($\operatorname{Re}\lambda_i \neq 0$).

2. *Si 1.75 es válida para alguna matriz definida positiva*

$$Q = Q^T \quad \text{y} \quad P = P^T > 0,$$

entonces A es estable.

3. *La ecuación 1.75 tiene una solución definida positiva*

$$P = P^T = \int_{t=0}^{\infty} e^{At} Q e^{A^T t} dt > 0, \quad (1.77)$$

si y sólo si, la matriz A es estable (Hurwitziana) y

(a) o bien

$$Q = Q^T > 0 \quad (\text{si } Q = Q^T \geq 0, \text{ entonces } P = P^T \geq 0)$$

(b) o bien Q tiene la estructura

$$Q = BB^T$$

tal que el par (A, B) es controlable, es decir,

$$\text{Rango de } [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] = n.$$

1.8. Descripción del Tent Method de Boltyanski

El Tent Method es una herramienta matemática general para resolver problemas extremales, justificada por el Principio de Separación. En primer lugar, se desarrolló en los espacios de dimensión finita y posteriormente en espacios de Banach. La versión del Tent Method en espacios de dimensión finita permite establecer el Principio del Máximo y una generalización del teorema de Kuhn-Tucker en espacios Euclidianos [13].

La primera versión del Tent Method fue hecha por Boltyanski en 1975, esta versión aborda problemas de optimización de dimensión finita. Más tarde trabajó con la versión en espacios de Banach. En 1999 Boltyanski publicó una monografía donde el Tent Method fue la principal herramienta geométrica para dar la teoría de optimización para plantas controladas linealmente, bajo la suposición de que todas esas plantas son dadas por Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en un espacio de dimensión finita. También en esta monografía hizo varias generalizaciones del teorema de Kuhn-Tucker y consideró algunos problemas extremales de tipo Min-Max en espacios Euclidianos (que corresponden a problemas de Programación no Lineal).

1.8.1. El problema clásico de Lagrange y su generalización

Considere el problema de Lagrange con extremos condicionados

Problema 1. *Encontrar el mínimo (o el máximo) de una función real dada en un espacio de dimensión finita con restricciones de tipo igualdad, esto es,*

$$f(x) \longrightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad (1.78)$$

bajo las restricciones

$$g_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, s, \quad (1.79)$$

donde $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en

$$\Omega_i := \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) = 0\}.$$

Este problema se puede reformular en la forma siguiente: encontrar el mínimo (o el máximo) de la función $f(x)$ sobre el conjunto

$$\Omega_1 \cap \dots \cap \Omega_s. \quad (1.80)$$

Si las funciones $g_1(x), \dots, g_s(x)$ son independientes (es decir, la correspondiente funcional matricial

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_j(x) \right)_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, s}$$

tiene rango máximo s sobre $\Omega_1 \cap \dots \cap \Omega_s$), entonces la intersección

$$\Omega_1 \cap \dots \cap \Omega_s$$

es una variedad $(n - s)$ -dimensional en \mathbb{R}^n . En este caso el problema se reduce a la minimización de una función dada en esta variedad.

Además si suponemos que algunos de estos conjuntos $\Omega_1, \dots, \Omega_s$ están definidos por las igualdades

$$g_i(x) = 0 \quad (i = 1, \dots, s_1)$$

y otros están definidos por las desigualdades

$$g_i(x) \leq 0 \quad (i = s_1 + 1, \dots, s) \quad (1.81)$$

(se asume que cada $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en \mathbb{R}^n), entonces se obtiene el problema de *programación matemática* que se reduce geoméricamente a la minimización de una

función definida sobre un politopo “curvilíneo” en \mathbb{R}^n de dimensión $(n - s)$. El teorema clásico de Lagrange se ocupa para resolver problemas con restricciones de tipo igualdad, mientras que el teorema de Kuhn-Tucker para resolver problemas de tipo desigualdad. Si se considera la optimización en un espacio de Banach, un problema de optimización con restricciones corresponde a un problema de control óptimo.

1.8.2. Problemas de intersección y de extremal abstracto

La generalización del problema de Lagrange es:

Problema 2. (*Problema de extremal abstracto*). Hay conjuntos $\Omega_1, \dots, \Omega_s$ en \mathbb{R}^n y una función real f cuyo dominio contiene el conjunto

$$\Sigma = \Omega_1 \cap \dots \cap \Omega_s.$$

Encontrar el mínimo (y el minimizador) de la función f sobre Σ .

Teorema 1.12. (*Criterio de optimalidad*) Sea $\Omega_0 = \{x : f(x) < f(x_1)\} \cup \{x_1\}$. El punto $x_1 \in \Sigma$ es un minimizador de la función f sobre Σ si y sólo si la intersección $\Omega_0 \cap \Sigma$ tiene sólo el punto x_1 :

$$\Omega_0 \cap \Sigma = \Omega_0 \cap \Omega_1 \cap \dots \cap \Omega_s = \{x_1\}.$$

El teorema anterior reduce el problema extremal abstracto al siguiente problema abstracto de intersección.

Problema 3. Sean los conjuntos $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_s$ en \mathbb{R}^n con un punto común x_1 . Encontrar una condición bajo la cual la intersección

$$\Omega_0 \cap \Omega_1 \cap \dots \cap \Omega_s$$

consiste sólo del punto x_1 .

Este problema es más conveniente en el sentido de que se extiende a una amplia gama de problemas extremales.

1.8.3. Interpretación del problema de Mayer

Considere una planta controlada

$$\dot{x} = g(x, u)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in U$, donde $U \subset \mathbb{R}^r$ es un conjunto de recursos compacto.

Cada función continua a trozos $u(t)$, $0 \leq t \leq t_1$, con valores en U , es un control admisible. Sean $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto inicial, Ω_1 una variedad terminal suave, y sea $f(x)$ una función de penalización dada. El problema de optimización de Mayer es el siguiente.

Problema 4. (El problema de optimización de Mayer). Encontrar un control admisible que transfiera x_0 a un punto $x_1 \in \Omega_1$ (ver Figura 1.1) tal que proporcione el valor mínimo $f(x_1)$ de la función de penalización en el punto terminal x_1 , no se dan de antemano condiciones en el tiempo t_1 .

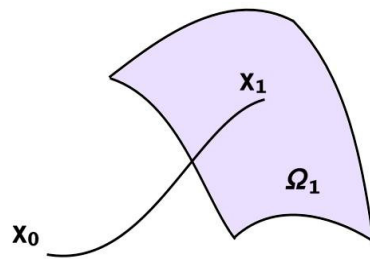


Figura 1.1: Problema de optimización de Mayer.

Denote por Ω_2 la región de controlabilidad, es decir, el conjunto de todos los puntos que se pueden obtener, iniciando de x_0 por medio de un adecuado control admisible. Entonces el problema consiste en encontrar el mínimo de la función $f(x)$ sobre el conjunto $\Omega_1 \cap \Omega_2$, y de nuevo se llega al problema de intersección abstracto

(con $s = 2$, en este caso):

$$\Omega_0 \cap \Omega_1 \cap \Omega_2 = \{x_1\}.$$

1.8.4. Ideas básicas del Tent Method

El Tent Method es una herramienta para resolver el problema de intersección abstracto (**Problema 3**). La idea es reemplazar cada uno de los conjuntos $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_s$ por su “Aproximación lineal” para pasar de la igualdad

$$\Omega_0 \cap \Omega_1 \cap \dots \cap \Omega_s = \{x_1\}$$

a una condición más simple en términos de la aproximación lineal.

Cono tent y cono de soporte

Definición 1.20. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con x_1 en Ω y sea K un cono convexo cerrado con vértice en x_1 . El cono K es un **tent** de Ω en el punto x_1 (ver Figura 1.2) si existe una función continua $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ donde V es una vecindad del punto x_1 tal que

(i) $\varphi(x) = x + o(x - x_1)$, donde $o(x)$ cumple con:

$$o(0) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|o(x)\|}{\|x\|} = 0$$

(ii) $\varphi(K \cap V) \subset \Omega$.

Por ejemplo, si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es una variedad suave y $x_1 \in \Omega$, entonces el plano tangente a Ω en x_1 es un tent de Ω .

Definición 1.21. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $x_0 \in \Omega$. El **cono de soporte** de Ω en x_0 es la cerradura de la unión de todos los rayos que nacen de x_0 y cada uno de ellos tiene al menos un punto de Ω distintos de x_0 . Es decir,

$$K = \text{Cl} \left[\bigcup_{\lambda > 0} (x_0 + \lambda(\Omega - x_0)) \right]$$

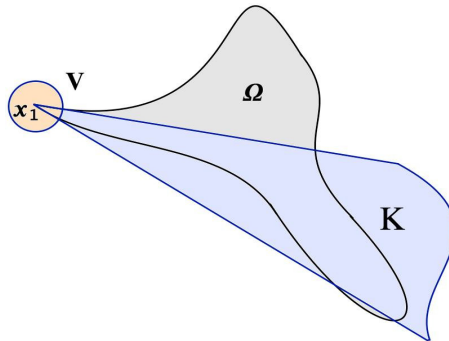


Figura 1.2: El cono convexo K es un tent de Ω .

es el cono de soporte de Ω en x_0 .

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo con un punto frontera x_1 , entonces el cono de soporte de Ω en el punto x_1 (Figura 1.3) es el tent de Ω en x_1 .

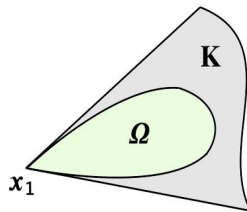


Figura 1.3: El cono de soporte K es tent del conjunto convexo Ω en x_1 .

Conos convexos separables

Definición 1.22. Un sistema de conos convexos cerrados K_0, K_1, \dots, K_s con vértice común $x_1 \in \mathbb{R}^n$ es **separable**, si existe un hiperplano Γ con $x_1 \in \Gamma$, que separa uno de los conos de la intersección de los otros (Figura 1.4).

Definición 1.23. Sea K un cono convexo tent de un conjunto Ω en el punto $0 \in \mathbb{R}^n$. Al cono convexo cerrado K^* con vértice en el punto $0 \in \mathbb{R}^n$ descrito por

$$K^* = \{b \in \mathbb{R}^n : b^T x \leq 0, \forall x \in K\}$$

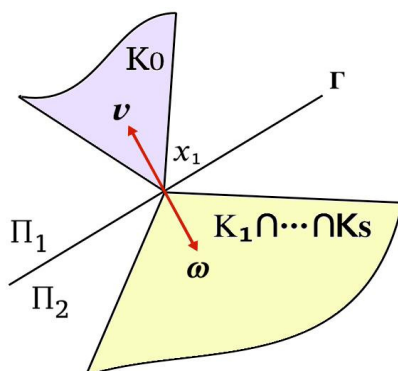


Figura 1.4: Separabilidad de los conos.

se le llamará **cono dual** de K y a los vectores $b \in K^*$ **vectores duales**.

Teorema 1.13. *(El criterio de separabilidad).*

El sistema de conos convexos K_0, K_1, \dots, K_s con vértice común $x_1 \in \mathbb{R}^n$ es separable, si y sólo si existen vectores duales $b_i \in K_i^*$ (K_i^* es el cono dual de K_i), $i = 0, 1, \dots, s$ que cumplan

$$b^T(x - x_1) \leq 0$$

para todo $x \in K_i$, que al menos uno de ellos sea distinto de cero y tales que

$$b_0 + b_1 + \dots + b_s = 0.$$

Definición 1.24. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo. El plano de dimensión mínima que contiene a K se llama **affine hull** de K y se denota por $\text{aff}K$.

Teorema 1.14. *(Una condición necesaria de separabilidad).* Sean $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_s$ conjuntos en \mathbb{R}^n con punto común x_0 , y sean K_0, K_1, \dots, K_s sus respectivos conos tents en el punto x_0 . Asuma que al menos uno de los tents es distinto de su affine hull. Si los conos K_0, K_1, \dots, K_s no son separables, entonces existe un punto

$$x' \in \Omega_0 \cap \Omega_1 \cap \dots \cap \Omega_s$$

distinto de x_0 . En otras palabras, la separabilidad es una condición necesaria para

$$\Omega_0 \cap \Omega_1 \cap \cdots \cap \Omega_s = \{x_1\}.$$

El Tent Method es muy parecido al método de Dubovitski-Milyutin, que, sin embargo, requiere que todos los conos, excepto tal vez uno, tengan interior no vacío. El Tent Method, debido al uso de la teoría de separación de los conos, es libre de esa restricción.

Capítulo 2

Modelo Dinámico de un Robot Controlable

2.1. Planteamiento del Problema

En este capítulo se dan las ecuaciones dinámicas del movimiento controlable de un robot móvil.

1. Dadas la posición inicial y final del robot; de entre todas las curvas en el plano, que pasen por la posición inicial y final, encontrar aquella que lleve al robot en el menor tiempo.
2. Hallar un control óptimo para la estabilización de trayectorias del robot móvil, usando
 - a) la programación dinámica como herramienta de síntesis.
 - b) el método de min-max.

2.2. Ecuaciones Dinámicas del Movimiento Controlable de un Robot Móvil Cuando el Centro de Masas no es Igual al Centro Geométrico.

En esta sección se establecen las ecuaciones Dinámicas que describen el movimiento de un robot móvil.

Para iniciar el análisis se considera un robot como el que se muestra en la Figura 2.1, el cual consta de un eje con dos ruedas activas, cada una con un motor de corriente directa y con giro independiente. Además tiene una tercera rueda omnidireccional que asegura que la plataforma del robot se encuentre paralela al plano XY . En dicha figura se definen:

c – punto medio del eje que une las dos ruedas traseras del robot.

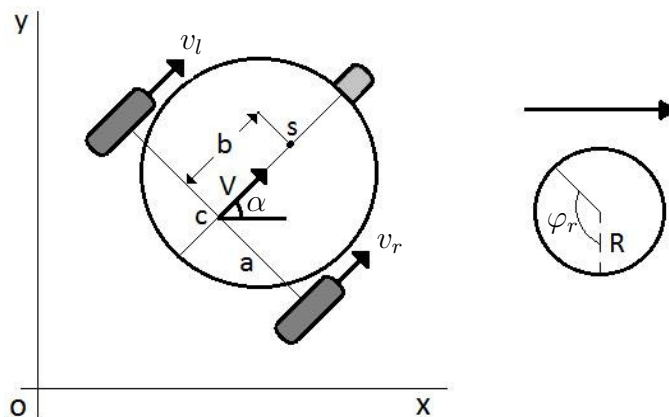


Figura 2.1: Robot moviéndose en el plano XY .

s – centro de masa de la plataforma del robot.

a – longitud de c al centro de cualquiera de las dos ruedas activas; izquierda y derecha.

b – longitud de c al centro de masa de la plataforma del robot.

V – magnitud del vector velocidad del punto c , respecto al sistema fijo.

α – orientación del robot (ángulo formado por el eje X y el vector velocidad del punto c).

v_l y v_r – velocidades del centro de masa de las ruedas izquierda y derecha respectivamente.

R – radio de las ruedas activas.

φ_r, φ_l – parámetros que miden la rotación de las rueda derecha e izquierda respectivamente.

Los supuestos fundamentales del modelo son:

1. El robot se compone de partes rígidas (cada punto del robot tiene una posición y orientación fija con respecto al sistema relativo al robot).
2. No hay deslizamiento en la dirección perpendicular a la rodadura.
3. No hay deslizamiento traslacional entre la rueda y el suelo.
4. El centro de masas del robot no coincide con el centro geométrico de éste.
5. El espacio donde se mueve el robot es perfectamente plano y sin inclinaciones.

Se considera que el movimiento se lleva a cabo en el plano **XY**, que se considera como un sistema fijo, y al sistema formado por el eje de las ruedas activas y el eje principal del robot es considerado como el sistema en movimiento.

La posición del robot es la posición de la proyección del centro de masas s y, su velocidad es

$$(\dot{x}_s, \dot{y}_s) = \frac{d\vec{s}}{dt} = V + \vec{\Omega} \times \vec{b},$$

donde Ω es la velocidad angular. Así se tiene un primer modelo, el modelo cinemático (2.1)

$$\begin{aligned}\dot{x}_s &= V \cos \alpha - b\Omega \sin \alpha \\ \dot{y}_s &= V \sin \alpha + b\Omega \cos \alpha \\ \dot{\alpha} &= \Omega.\end{aligned}\tag{2.1}$$

2.2.1. Restricciones no Holónomas

Para obtener el modelo matemático con restricciones no holónomas, primeramente se determinan éstas para el sistema en movimiento. Las cuales son las condiciones de rodadura de las ruedas activas del robot.

Como no hay deslizamiento traslacional ni perpendicular, existen condiciones que relacionan la velocidad con la que se traslada el centro de masas cm de cada una de las ruedas y, la velocidad angular de rotación de cada rueda

$$v_{cm} = R\dot{\phi}.$$

Por lo que las velocidades v_r y v_l del cm de la rueda derecha e izquierda respectivamente están conectadas con la razón angular

$$v_r = R\dot{\phi}_r$$

$$v_l = R\dot{\phi}_l,$$

donde $\dot{\phi}_r$ y $\dot{\phi}_l$ son las velocidades de rotación de la rueda derecha e izquierda respectivamente. Las componentes de las velocidades v_r y v_l con respecto al sistema fijo se escriben como

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= R\dot{\phi}_r \cos \alpha \\ \dot{y}_r &= R\dot{\phi}_r \sin \alpha \\ \dot{x}_l &= R\dot{\phi}_l \cos \alpha \\ \dot{y}_l &= R\dot{\phi}_l \sin \alpha, \end{aligned} \tag{2.2}$$

donde α es el ángulo formado entre el eje X y el vector velocidad del cm de cada rueda activa (ver Figura 2.2).

Por otro lado, las coordenadas en el plano fijo XY de la proyección del cm de las ruedas derecha e izquierda (x_r, y_r) y (x_l, y_l) respectivamente (ver Figura 2.2) están

dadas por

$$\begin{aligned}
 x_r &= x_c + a \sin \alpha \\
 y_r &= y_c - a \cos \alpha \\
 x_l &= x_c - a \sin \alpha \\
 y_l &= y_c + a \cos \alpha.
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

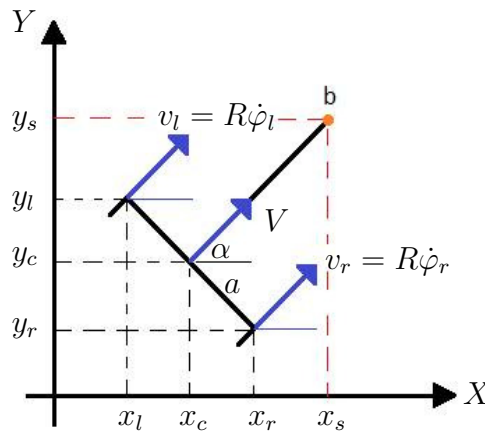


Figura 2.2: Proyección en el plano XY.

Derivando con respecto al tiempo se tiene

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_r &= \dot{x}_c + a\dot{\alpha} \cos \alpha \\
 \dot{y}_r &= \dot{y}_c + a\dot{\alpha} \sin \alpha \\
 \dot{x}_l &= \dot{x}_c - a\dot{\alpha} \cos \alpha \\
 \dot{y}_l &= \dot{y}_c - a\dot{\alpha} \sin \alpha.
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

Se puede observar en la Figura 2.2 que las coordenadas del centro de masas del robot, con respecto al sistema fijo, están dadas por

$$\begin{aligned}
 x_s &= x_c + b \cos \alpha \\
 y_s &= y_c + b \sin \alpha.
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

Derivando estas expresiones se tiene

$$\begin{aligned}\dot{x}_c &= \dot{x}_s + b\dot{\alpha} \sin \alpha \\ \dot{y}_c &= \dot{y}_s - b\dot{\alpha} \cos \alpha.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Sustituyendo (2.6) en (2.4) se tiene

$$\begin{aligned}\dot{x}_r &= \dot{x}_s + b\dot{\alpha} \sin \alpha + a\dot{\alpha} \cos \alpha \\ \dot{y}_r &= \dot{y}_s - b\dot{\alpha} \cos \alpha + a\dot{\alpha} \sin \alpha \\ \dot{x}_l &= \dot{x}_s + b\dot{\alpha} \sin \alpha - a\dot{\alpha} \cos \alpha \\ \dot{y}_l &= \dot{y}_s - b\dot{\alpha} \cos \alpha - a\dot{\alpha} \sin \alpha.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Comparando (2.7) con (2.2) se obtienen las siguientes 4 restricciones bilaterales (te tipo igualdad)

$$\begin{aligned}\dot{x}_s + (b \sin \alpha + a \cos \alpha)\dot{\alpha} - R \cos \alpha \dot{\varphi}_r &= 0 \\ \dot{y}_s - (b \cos \alpha - a \sin \alpha)\dot{\alpha} - R \sin \alpha \dot{\varphi}_r &= 0 \\ \dot{x}_s + (b \sin \alpha - a \cos \alpha)\dot{\alpha} - R \cos \alpha \dot{\varphi}_l &= 0 \\ \dot{y}_s - (b \cos \alpha + a \sin \alpha)\dot{\alpha} - R \sin \alpha \dot{\varphi}_l &= 0.\end{aligned}\tag{2.8}$$

La matriz de coeficientes de éstas restricciones está dada por

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \sin \alpha + a \cos \alpha & -R \cos \alpha & 0 \\ 0 & 1 & -b \cos \alpha + a \sin \alpha & -R \sin \alpha & 0 \\ 1 & 0 & b \sin \alpha - a \cos \alpha & 0 & -R \cos \alpha \\ 0 & 1 & -b \cos \alpha - a \sin \alpha & 0 & -R \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

Se puede verificar que el determinante de cada submatriz de M de tamaño 4×4 es nulo, luego el rango de ésta matriz no es 4, por lo tanto las cuatro restricciones son linealmente dependientes. El determinante de la submatriz N de M de tamaño 3×3

es $R^2b \cos \alpha$, donde $R^2b \neq 0$ y $\cos \alpha \neq 0$ para $\alpha \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$N = \begin{pmatrix} b \sin \alpha + a \cos \alpha & -R \cos \alpha & 0 \\ -b \cos \alpha + a \sin \alpha & -R \sin \alpha & 0 \\ b \sin \alpha - a \cos \alpha & 0 & -R \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Por lo que para $\alpha \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ el rango de M es 3. Para determinar las 3 restricciones independientes se lleva a M a la forma diagonal quedando el último renglon nulo y los 3 renglones restantes vienen siendo los coeficientes de las tres restricciones independientes. Así las tres restricciones linealmente independientes son:

$$\begin{aligned} \dot{x}_s + (b \sin \alpha + a \cos \alpha)\dot{\alpha} - R \cos \alpha \dot{\varphi}_r &= 0 \\ \dot{y}_s - (b \cos \alpha - a \sin \alpha)\dot{\alpha} - R \sin \alpha \dot{\varphi}_r &= 0 \\ 2a \cos \alpha \dot{\alpha} - R \cos \alpha \dot{\varphi}_r + R \cos \alpha \dot{\varphi}_l &= 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Para obtener las ecuaciones dinámicas que describen el movimiento del robot se usa el método de Lagrange. Las fuerzas externas que actúan sobre el robot son conservativas, entonces existe una función energía potencial tal que las fuerzas generalizadas M_j derivan de la función energía potencial $M_j = \frac{\partial V}{\partial q_j}$. Luego la función Lagrangiana es $L = T - V$ (energía cinética menos energía potencial). Así las ecuaciones de Lagrange están dadas por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0. \tag{2.10}$$

Para sistemas no conservativos las ecuaciones de Lagrange tienen sólo la presencia de la energía cinética T , por lo que éstas quedan de la siguiente manera

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = M_j, \quad j = 1, \dots, n. \tag{2.11}$$

Para sistemas con restricciones, se suma en el lado derecho de las ecuaciones de Lagrange, las fuerzas generalizadas de ligadura (fuerzas de reacción) $\sum_{l=1}^k \lambda_l A_{lj}$,

$j = 1, \dots, n.$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = M_j + \sum_{l=1}^k \lambda_l A_{lj}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.12)$$

donde los términos A_{lj} están relacionados con las restricciones no holónomas de la siguiente manera

$$\sum_{l=1}^k A_{lj} \dot{q}_l + B_l = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.13)$$

El robot móvil se considera un sistema no conservativo, por lo que las ecuaciones de Lagrange a considerar son de la forma (2.12).

Así, las ecuaciones de Lagrange que describen el movimiento del robot móvil son

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = M_j + \sum_{l=1}^3 \lambda_l A_{lj}, \quad j = 1, \dots, 5, \quad (2.14)$$

donde:

$$q_1 = x_c, \quad q_2 = y_c, \quad q_3 = \alpha, \quad q_4 = \varphi_r, \quad q_5 = \varphi_l,$$

$$\dot{q}_1 = \dot{x}_c, \quad \dot{q}_2 = \dot{y}_c, \quad \dot{q}_3 = \dot{\alpha}, \quad \dot{q}_4 = \dot{\varphi}_r, \quad \dot{q}_5 = \dot{\varphi}_l$$

son las coordenadas y velocidades generalizadas respectivamente, las fuerzas generalizadas M_j son los torques de los motores de las ruedas activas. Como el torque del motor de cada rueda activa sólo tiene influencia directa con la velocidad de giro de cada una de estas ruedas, se tiene

$$M_j = 0, \quad j = 1, 2, 3 \quad M_4 = M_r \quad y \quad M_5 = M_l.$$

siendo M_r y M_l los torques del motor de la rueda derecha e izquierda respectivamente.

T es la energía cinética dada por

$$T = \frac{1}{2} [m_s (\dot{x}_s^2 + \dot{y}_s^2) + J_s \dot{\alpha}^2 + J \dot{\varphi}_r^2 + J \dot{\varphi}_l^2], \quad (2.15)$$

donde m_s es la masa de la plataforma del robot, J_s es el tensor de inercia del centro

de masa de la plataforma; J es el tensor de inercia de las ruedas activas. El segundo término del lado derecho de (2.14) son las fuerzas reactivas del sistema, donde λ_1 , λ_2 y λ_3 son los multiplicadores de Lagrange. De (2.14) y (2.15) se tiene el sistema siguiente de segundo orden

$$\begin{aligned}
 m_s \ddot{x}_s &= \lambda_1 A_{11} + \lambda_2 A_{21} + \lambda_3 A_{31} \\
 m_s \ddot{y}_s &= \lambda_1 A_{12} + \lambda_2 A_{22} + \lambda_3 A_{32} \\
 J_s \ddot{\alpha} &= \lambda_1 A_{13} + \lambda_2 A_{23} + \lambda_3 A_{33} \\
 J \ddot{\varphi}_r &= \lambda_1 A_{14} + \lambda_2 A_{24} + \lambda_3 A_{34} + M_r \\
 J \ddot{\varphi}_l &= \lambda_1 A_{15} + \lambda_2 A_{25} + \lambda_3 A_{35} + M_l.
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Se puede observar que las restricciones (2.9) están en la forma

$$g_l(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^5 A_{li} \dot{q}_i + B_l = 0, \quad l = 1, 2, 3 \quad (B_l = 0, l = 1, 2, 3);$$

esto es:

$$\begin{aligned}
 A_{11} \dot{x}_s + A_{12} \dot{y}_s + A_{13} \dot{\alpha} + A_{14} \dot{\varphi}_r + A_{15} \dot{\varphi}_l &= 0 \\
 A_{21} \dot{x}_s + A_{22} \dot{y}_s + A_{23} \dot{\alpha} + A_{24} \dot{\varphi}_r + A_{25} \dot{\varphi}_l &= 0 \\
 A_{31} \dot{x}_s + A_{32} \dot{y}_s + A_{33} \dot{\alpha} + A_{34} \dot{\varphi}_r + A_{35} \dot{\varphi}_l &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Comparando las restricciones (2.9) y (2.17) se tiene

$$\begin{aligned}
 A_{11} = 1 \quad A_{12} = 0 \quad A_{13} = b \sin \alpha + a \cos \alpha \quad A_{14} = -R \cos \alpha \quad A_{15} = 0 \\
 A_{21} = 0 \quad A_{22} = 1 \quad A_{23} = -b \cos \alpha + a \sin \alpha \quad A_{24} = -R \sin \alpha \quad A_{25} = 0 \\
 A_{31} = 0 \quad A_{32} = 0 \quad A_{33} = 2a \cos \alpha \quad A_{34} = -R \cos \alpha \quad A_{35} = R \cos \alpha.
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Sustituyendo (2.18) en (2.16) se obtiene el siguiente modelo matemático

$$\begin{aligned}
 m_s \ddot{x}_s &= \lambda_1 \\
 m_s \ddot{y}_s &= \lambda_2 \\
 J_s \ddot{\alpha} &= \lambda_1 (b \sin \alpha + a \cos \alpha) + \lambda_2 (-b \cos \alpha + a \sin \alpha) + \lambda_3 2a \cos \alpha \\
 J \ddot{\varphi}_r &= -\lambda_1 R \cos \alpha - \lambda_2 R \sin \alpha - \lambda_3 R \cos \alpha + M_r \\
 J \ddot{\varphi}_l &= \lambda_3 R \cos \alpha + M_l.
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_s + (b \sin \alpha + a \cos \alpha) \dot{\alpha} - R \cos \alpha \dot{\varphi}_r &= 0 \\
 \dot{y}_s - (b \cos \alpha - a \sin \alpha) \dot{\alpha} - R \sin \alpha \dot{\varphi}_r &= 0 \\
 2a \cos \alpha \dot{\alpha} - R \cos \alpha \dot{\varphi}_r + R \cos \alpha \dot{\varphi}_l &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

donde (2.20) son las restricciones no-holónomas del sistema. Este modelo matemático es un sistema de cinco ecuaciones de segundo orden con tres restricciones bilaterales. Como es sabido, el sistema de segundo orden (2.19) se puede llevar a un sistema de primer orden con 10 ecuaciones en la forma

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_s &= v_1 \\
 \dot{v}_1 &= \frac{\lambda_1}{m_s} \\
 \dot{y}_s &= v_2 \\
 \dot{v}_2 &= \frac{\lambda_2}{m_s} \\
 \dot{\alpha} &= v_3 \\
 \dot{v}_3 &= \frac{\lambda_1}{J_s} (b \sin \alpha + a \cos \alpha) + \frac{\lambda_2}{J_s} (-b \cos \alpha + a \sin \alpha) + \frac{\lambda_3}{J_s} 2a \cos \alpha \\
 \dot{\varphi}_r &= v_4 \\
 \dot{v}_4 &= -\frac{\lambda_1}{J} R \cos \alpha - \frac{\lambda_2}{J} R \sin \alpha - \frac{\lambda_3}{J} R \cos \alpha + \frac{M_r}{J} \\
 \dot{\varphi}_l &= v_5 \\
 \dot{v}_5 &= \frac{\lambda_3}{J} R \cos \alpha + \frac{M_l}{J}.
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Se puede observar en el sistema (2.21) que las coordenadas v_1 , v_2 , v_3 , v_4 y v_5 tienen dependencia con las coordenadas x_s , y_s , α , φ_r y φ_l respectivamente. Por lo que el modelo (2.19) sujeto a las restricciones (2.20) tiene 5 coordenadas generalizadas, por ende 5 grados de libertad y 3 multiplicadores de Lagrange.

El modelo matemático (2.19), (2.20) es un sistema de $5 + 3$ ecuaciones con $5 + 3$ incógnitas $\{x_s, y_s, \alpha, \varphi_r, \varphi_l\}$, $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$.

Para obtener un sistema de 5 ecuaciones con 5 incógnitas en la siguiente sección se eliminarán los 3 multiplicadores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Con ello, las coordenadas φ_r, φ_l cambian por las coordenadas V y Ω .

2.2.2. Cambio de Coordenadas y el Modelo Matemático sin Multiplicadores de Lagrange

Si la velocidad del origen del sistema en movimiento no es constante, esto es, si la velocidad V del punto c varía con el tiempo, se puede derivar (2.1) respecto al tiempo para obtener el sistema siguiente de segundo orden

$$\begin{aligned}\ddot{x}_s &= (\dot{V} - b\Omega^2) \cos \alpha - (V\Omega + b\dot{\Omega}) \sin \alpha \\ \ddot{y}_s &= (V\Omega + b\dot{\Omega}) \cos \alpha + (\dot{V} - b\Omega^2) \sin \alpha \\ \ddot{\alpha} &= \dot{\Omega}.\end{aligned}\tag{2.22}$$

Por otra parte, sustituyendo las coordenadas de la velocidad del punto c , $\dot{x}_c = V \cos \alpha$, $\dot{y}_c = V \sin \alpha$ y $\dot{\alpha} = \Omega$ en (2.4) se tiene

$$\begin{aligned}\dot{x}_r &= (V + a\Omega) \cos \alpha \\ \dot{y}_r &= (V + a\Omega) \sin \alpha \\ \dot{x}_l &= (V - a\Omega) \cos \alpha \\ \dot{y}_l &= (V - a\Omega) \sin \alpha,\end{aligned}\tag{2.23}$$

comparando estas ecuaciones con (2.2) se obtiene

$$\dot{\varphi}_r = \frac{V}{R} + \frac{a}{R}\Omega\tag{2.24}$$

$$\dot{\varphi}_l = \frac{V}{R} - \frac{a}{R}\Omega.$$

Así,

$$\ddot{\varphi}_r = \frac{\dot{V}}{R} + \frac{a}{R}\dot{\Omega}\tag{2.25}$$

$$\ddot{\varphi}_l = \frac{\dot{V}}{R} - \frac{a}{R}\dot{\Omega}.$$

Sustituyendo (2.22) y (2.25) en (2.19) se tiene

$$\begin{aligned}
 m_s[(\dot{V} - b\Omega^2) \cos \alpha - (V\Omega + b\dot{\Omega}) \sin \alpha] &= \lambda_1 \\
 m_s[(V\Omega + b\dot{\Omega}) \cos \alpha + (\dot{V} - b\Omega^2) \sin \alpha] &= \lambda_2 \\
 J_s\dot{\Omega} &= a(\lambda_1 \cos \alpha + \lambda_2 \sin \alpha) + b(\lambda_1 \sin \alpha - \lambda_2 \cos \alpha) + \lambda_3 2a \cos \alpha \quad (2.26) \\
 \frac{J}{R}(\dot{V} + a\dot{\Omega}) &= -R(\lambda_1 \cos \alpha + \lambda_2 \sin \alpha) - \lambda_3 R \cos \alpha + M_r \\
 \frac{J}{R}(\dot{V} - a\dot{\Omega}) &= \lambda_3 R \cos \alpha + M_l.
 \end{aligned}$$

Multiplicando por $\cos \alpha$ en la primera ecuación, por $\sin \alpha$ en la segunda ecuación de (2.26) y sumando se tiene la primera expresión de (2.27). Luego, multiplicando por $\sin \alpha$ en la primera ecuación, por $\cos \alpha$ en la segunda ecuación de (2.26) y restando se tiene la segunda expresión de (2.27)

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 \cos \alpha + \lambda_2 \sin \alpha &= m_s(\dot{V} - b\Omega^2) \\
 \lambda_1 \sin \alpha - \lambda_2 \cos \alpha &= -m_s(V\Omega + b\dot{\Omega}). \quad (2.27)
 \end{aligned}$$

Sustituyendo (2.27) en la tercera y cuarta ecuación de (2.26) se tiene

$$\lambda_3 = \frac{J_s\dot{\Omega} - am_s(\dot{V} - b\Omega^2) + bm_s(V\Omega + b\dot{\Omega})}{2a \cos \alpha}. \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{J}{R}(\dot{V} + a\dot{\Omega}) &= -Rm_s(\dot{V} - b\Omega^2) - \lambda_3 R \cos \alpha + M_r \\
 \frac{J}{R}(\dot{V} - a\dot{\Omega}) &= \lambda_3 R \cos \alpha + M_l. \quad (2.29)
 \end{aligned}$$

De (2.27) y (2.28) se tiene que los tres multiplicadores de Lagrange están dados por:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= m_s[(\dot{V} - b\Omega^2) \cos \alpha - (V\Omega + b\dot{\Omega}) \sin \alpha] \\
 \lambda_2 &= m_s[(V\Omega + b\dot{\Omega}) \cos \alpha + (\dot{V} - b\Omega^2) \sin \alpha] \\
 \lambda_3 &= \frac{J_s\dot{\Omega} - am_s(\dot{V} - b\Omega^2) + bm_s(V\Omega + b\dot{\Omega})}{2a \cos \alpha}. \quad (2.30)
 \end{aligned}$$

Sumando y restando (2.29) se tiene

$$\frac{2J}{R}\dot{V} = -Rm_s(\dot{V} - b\Omega^2) + (M_r + M_l) \quad (2.31)$$

$$\frac{2Ja}{R}\dot{\Omega} = -Rm_s(\dot{V} - b\Omega^2) - 2\lambda_3 R \cos \alpha + (M_r - M_l).$$

Sustituyendo λ_3 en (2.31) se tiene

$$\left(\frac{2}{R}J + Rm_s\right)\dot{V} = Rm_sb\Omega^2 + (M_r + M_l) \quad (2.32)$$

$$\left(\frac{2a}{R}J + \frac{R}{a}J_s + \frac{R}{a}b^2m_s\right)\dot{\Omega} = \frac{-R}{a}m_sbV\Omega + (M_r - M_l).$$

Multiplicando por $1/R$ a la primera ecuación de (2.32) y por a/R a la segunda se tiene finalmente el siguiente modelo matemático sin multiplicadores de Lagrange

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= V \cos \alpha - b\Omega \sin \alpha \\ \dot{y}_s &= V \sin \alpha + b\Omega \cos \alpha \\ \dot{\alpha} &= \Omega \\ M_0\dot{V} &= m_sb\Omega^2 + \frac{1}{R}(M_r + M_l) \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\tilde{J}\dot{\Omega} = -m_sbV\Omega + \frac{a}{R}(M_r - M_l),$$

con

$$M_0 = \left(\frac{2}{R^2}J + m_s\right)$$

$$\tilde{J} = \left(\frac{2a^2}{R^2}J + J_s + b^2m_s\right).$$

Se puede observar que este modelo es un sistema de cinco ecuaciones de primer orden.

2.3. Modelo Matemático del Motor y sus Simplificaciones

Por la ley de Kirchhoff la corriente I satisface la ecuación

$$L\dot{I} = U - E_B - ZI, \quad (2.34)$$

(ver Figura 2.3), donde Z es la resistencia, L la inductancia, U el voltaje aplicado al motor y E_B la fuerza contraelectromotriz que es proporcional a la velocidad de rotación, $E_B = K_m\dot{\varphi}$. Así, se tienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} L\dot{I}_r &= U_r - K_m\dot{\varphi}_r - ZI_r \\ L\dot{I}_l &= U_l - K_m\dot{\varphi}_l - ZI_l, \end{aligned} \quad (2.35)$$

donde I_r , I_l son la corriente del motor de la rueda derecha e izquierda respectivamente; U_r , U_l son el voltaje del motor de la rueda derecha e izquierda respectivamente y $\dot{\varphi}_r$, $\dot{\varphi}_l$ son la velocidad de rotación del rotor del motor de la rueda derecha e izquierda respectivamente, las cuales coinciden con la velocidad e giro de las ruedas derecha e izquierda.

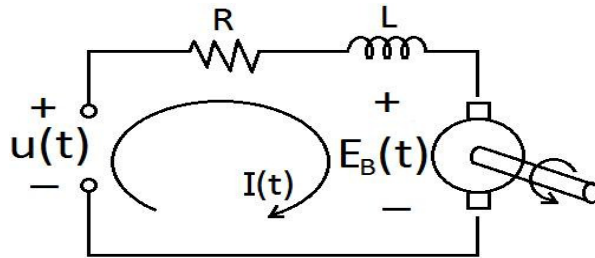


Figura 2.3: Modelo electromecánico de los motores.

Los torques de los motores de CD son proporcionales a la corriente

$$\begin{aligned} M_r &= K_0 I_r \\ M_l &= K_0 I_l. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Luego,

$$\begin{aligned} M_r + M_l &= K_0(I_r + I_l) \\ M_r - M_l &= K_0(I_r - I_l) \end{aligned} \quad (2.37)$$

De (2.35) y sustituyendo (2.37) en el sistema (2.33) se obtiene el siguiente sistema de 7 ecuaciones de primer orden

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= V \cos \alpha - b\Omega \sin \alpha \\ \dot{y}_s &= V \sin \alpha + b\Omega \cos \alpha \\ \dot{\alpha} &= \Omega \\ M_0 \dot{V} &= m_s b \Omega^2 + \frac{K_0}{R}(I_r + I_l) \\ \tilde{J} \dot{\Omega} &= -m_s b V \Omega + \frac{aK_0}{R}(I_r - I_l) \\ L \dot{I}_r &= U_r - \frac{K_m}{R}(V + a\Omega) - Z I_r \\ L \dot{I}_l &= U_l - \frac{K_m}{R}(V - a\Omega) - Z I_l \end{aligned} \quad (2.38)$$

2.4. Reducción del Modelo

Con ayuda del teorema de Tikhonov se reduce el modelo (2.38) de orden siete a uno de orden cinco.

2.4.1. Modelo matemático del sistema controlable no lineal

Aplicando a (2.38) las transformaciones

$$\begin{aligned} T &= T_* t; \quad \Omega = \Omega_* \omega; \quad V = V_* v; \\ U_r &= U_* u_r; \quad U_l = U_* u_l; \quad I_r = I_* i_r; \quad I_l = I_* i_l. \end{aligned}$$

Se tiene el sistema singularmente perturbado

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= T_* V_* v \cos \alpha - T_* \Omega_* b \omega \sin \alpha \\
\dot{y} &= T_* V_* v \sin \alpha + T_* \Omega_* b \omega \cos \alpha \\
\dot{\alpha} &= T_* \Omega_* \omega \\
\dot{v} &= \frac{T_* \Omega_*^2 m_s b}{V_* M_0} \omega^2 + \frac{T_* I_* K_0}{V_* R M_0} (i_r + i_l) \\
\dot{\omega} &= -\frac{m_s b T_* V_*}{\tilde{J}} v \omega + \frac{T_* I_* a K_0}{\Omega_* R \tilde{J}} (i_r - i_l) \\
\frac{L I_*}{T_* U_*} \dot{i}_r &= u_r - \frac{K_m}{U_* R} (V_* v + a \Omega_* \omega) - \frac{Z I_*}{U_*} i_r \\
\frac{L I_*}{T_* U_*} \dot{i}_l &= u_l - \frac{K_m}{U_* R} (V_* v - a \Omega_* \omega) - \frac{Z I_*}{U_*} i_l,
\end{aligned} \tag{2.39}$$

donde $\epsilon = \frac{L I_*}{T_* U_*}$ es el parámetro pequeño.

Haciendo $\epsilon = 0$, el sistema degenerado asociado a (2.39) es

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{x}} &= \delta_1 \bar{v} \cos \alpha - \delta_2 b \bar{\omega} \sin \alpha \\
\dot{\bar{y}} &= \delta_1 \bar{v} \sin \alpha + \delta_2 b \bar{\omega} \cos \alpha \\
\dot{\bar{\alpha}} &= \delta_2 \bar{\omega} \\
\dot{\bar{v}} &= \delta_3 b \bar{\omega}^2 + \delta_4 (\bar{i}_r + \bar{i}_l) \\
\dot{\bar{\omega}} &= -\delta_5 b \bar{v} \bar{\omega} + \delta_6 (\bar{i}_r - \bar{i}_l)
\end{aligned} \tag{2.40}$$

y su sistema adjunto es

$$\begin{aligned}
0 &= \bar{u}_r - \delta_7 \bar{v} - \delta_8 \bar{\omega} - \delta_9 \bar{i}_r \\
0 &= \bar{u}_l - \delta_7 \bar{v} + \delta_8 \bar{\omega} - \delta_9 \bar{i}_l
\end{aligned} \tag{2.41}$$

donde

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= T_* V_*, \quad \delta_2 = T_* \Omega_*, \quad \delta_3 = \frac{T_* \Omega_*^2 m_s}{M_0 V_*}, \quad \delta_4 = \frac{T_* I_* K_0}{V_* M_0 R}, \quad \delta_5 = \frac{T_* V_* m_s}{\tilde{J}}, \quad \delta_6 = \frac{T_* I_* a K_0}{\tilde{J} R \Omega_*}, \\
\delta_7 &= \frac{K_m V_*}{R U_*}, \quad \delta_8 = \frac{K_m a \Omega_*}{U_* R}, \quad \delta_9 = \frac{Z I_*}{U_*}, \quad \tilde{J} = \frac{2 a^2 J}{R^2} + J_s + m_s b^2, \quad M_0 = \frac{2 J}{R^2} + m_s.
\end{aligned}$$

Se puede verificar que el sistema degenerado y el sistema adjunto satisfacen el teorema de Tikhonov. Luego, despejando \bar{i}_r y \bar{i}_l de (2.41) y sustituyendo en (2.40) se obtiene finalmente el siguiente modelo matemático no lineal de cinco ecuaciones con dos controles; $\bar{u}_1 = (\bar{u}_r + \bar{u}_l)/2$ y $\bar{u}_2 = (\bar{u}_r - \bar{u}_l)/2$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \delta_1 \bar{v} \cos \alpha - \delta_2 b \bar{\Omega} \sin \alpha \\ \dot{y} &= \delta_1 \bar{v} \sin \alpha + \delta_2 b \bar{\Omega} \cos \alpha \\ \dot{\alpha} &= \delta_2 \bar{\Omega} \\ \dot{v} &= \delta_3 b \bar{\Omega}^2 - 2 \frac{\delta_4 \delta_7}{\delta_9} \bar{v} + 2 \frac{\delta_4}{\delta_9} \bar{u}_1 \\ \dot{\Omega} &= -b \delta_5 \bar{v} \bar{\Omega} - 2 \frac{\delta_6 \delta_8}{\delta_9} \bar{\Omega} + 2 \frac{\delta_6}{\delta_9} \bar{u}_2.\end{aligned}\tag{2.42}$$

Capítulo 3

Trayectorias Cinemáticas Extremales y el Algoritmo Óptimo de Estabilización de Éstas

En este capítulo se presentan las trayectorias extremales respecto al tiempo que se pretende que el robot siga. Se analiza la controlabilidad, la estabilizabilidad y la observabilidad considerando dichas trayectorias extremales como proceso deseado. Considerando una trayectoria deseada se obtienen las ecuaciones lineales en desviaciones y se determina el control óptimo para la estabilización de la trayectoria usando la programación dinámica como herramienta de síntesis. Por último se presentan los resultados de una simulación hecha en MATLAB de la estabilización.

3.1. Planteamiento Cinemático y Síntesis de las Trayectorias Extremales Respecto al Tiempo

En esta sección se considera el caso cuando la proyección del centro de masas de la plataforma del robot coincide con la proyección del centro geométrico de la vara que une a las dos reudas activas. En este caso, $(x_s, y_s) = (x_c, y_c)$ y $b = 0$. También se considera que la velocidad lineal del robot es constante, $V = V_0$, $V_0 \neq 0$ y su velocidad angular es acotada $|\Omega| \leq \nu$.

Bajo los supuestos anteriores el problema a resolver es el siguiente. Dadas la posición inicial y final del robot; de entre todas las curvas en el plano, que pasen por

la posición inicial y final, encontrar aquella que lleve al robot en el menor tiempo.

Sin pérdida de generalidad, supóngase que el robot parte del origen del sistema fijo XY con orientación cero y se desea que llegue al punto final $p = (a_0, b_0)$ con orientación no fija α_0 . Bajo estas consideraciones, las ecuaciones cinemáticas (2.1) que describen el movimiento del robot quedan de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= V_0 \cos \alpha & x(0) &= 0 & x(t_1) &= a_0 \\ \dot{y}_c &= V_0 \sin \alpha & y(0) &= 0 & y(t_1) &= b_0 \\ \dot{\alpha} &= \Omega & \alpha(0) &= 0 & \alpha(t_1) &= \alpha_0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde el tiempo inicial es $t_0 = 0$, el tiempo final es t_1 , α cambia en el tiempo, a_0 y b_0 son fijas, pero α_0 no lo es.

Recordemos de (2.24) que la velocidad angular de cada una de las ruedas activas está relacionada con la velocidad lineal del robot V y la velocidad angular Ω de la siguiente manera

$$\frac{V}{R} + \frac{a}{R}\Omega = \dot{\varphi}_r \leq \mu \quad (3.2)$$

$$\frac{V}{R} - \frac{a}{R}\Omega = \dot{\varphi}_l \leq \mu.$$

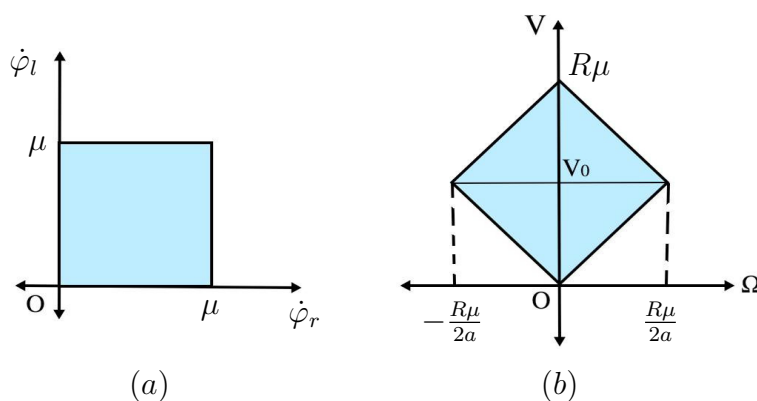


Figura 3.1: Regiones de Control

Por tal razón se pueden considerar como controles a $\dot{\varphi}_r$ y $\dot{\varphi}_l$ o bien, a V y Ω . La velocidad angular de las ruedas es finita, ya que está relacionada con el voltaje aplicado a cada uno de los motores. Sea μ la velocidad angular máxima de cada rueda, entonces

de la transformación (3.2) se tiene

$$0 \leq V \leq R\mu \quad \text{y} \quad -\frac{R\mu}{2a} \leq \Omega \leq \frac{R\mu}{2a}.$$

La Figura 3.1 muestra en (a) la región de control considerando a $\dot{\varphi}_r$ y $\dot{\varphi}_l$ como controles y en (b) muestra la región de control transformada, es decir, considerando a V y Ω como controles. Note que cuando el robot se mueve a una velocidad angular máxima, entonces su velocidad lineal V es constante; $V = V_0 = \frac{R\mu}{2}$ (ver Figura 3.1 (b)) y $|\Omega(t)| \leq \frac{R\mu}{2a}$. Entonces se puede considerar solamente un control, la velocidad angular Ω . Bajo estas suposiciones el planteamiento matemático cinemático del problema es

$$\varphi = \int_0^{t_1} dt = t_1 \longrightarrow \min_{|\Omega(t)| < \frac{R\mu}{2a}} \quad (3.3)$$

sujeta a las restricciones (3.1). Para resolver este problema se aplica el Principio del Máximo.

Sea Ω un control admisible para el siguiente problema

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= 1 & \varphi(0) &= 0 & \varphi(t_1) &= t_1 \\ \dot{x}_c &= V_0 \cos \alpha & x(0) &= 0 & x(t_1) &= a_0 \\ \dot{y}_c &= V_0 \sin \alpha & y(0) &= 0 & y(t_1) &= b_0 \\ \dot{\alpha} &= \Omega & \alpha(0) &= 0 & \alpha(t_1) &= \alpha_0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

La función de Pontryagin H y el sistema conjugado están dados por

$$H = \psi_0 + \psi_{x_c} V_0 \cos \alpha + \psi_{y_c} V_0 \sin \alpha + \psi_\alpha \Omega$$

y

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_0 &= 0 \\ \dot{\psi}_{x_c} &= 0 \\ \dot{\psi}_{y_c} &= 0 \\ \dot{\psi}_\alpha &= \psi_{x_c} V_0 \sin \alpha - \psi_{y_c} V_0 \cos \alpha \end{aligned}$$

respectivamente.

Considerando

$$\begin{aligned}\psi_{x_c} &= \cos \alpha^* \\ \psi_{y_c} &= \sin \alpha^*, \quad \text{donde } \alpha^* \text{ es fija.}\end{aligned}$$

Luego,

$$\dot{\psi}_\alpha = V_0 \sin(\alpha(t) - \alpha^*)$$

$$H = \psi_0 + V_0 \cos(\alpha - \alpha^*) + \psi_\alpha \Omega.$$

La condición de transversalidad establece que

$$\left(\Psi(t_1) + \lambda_0(1, 0, 0, 0)^T \right) \perp S_1 = (\gamma_1, 0, 0, \gamma_4).$$

Es decir,

$$\left(\psi_0(t_1) + \lambda_0 \right) \gamma_1 + \psi_\alpha(t_1) \gamma_4 = 0$$

como γ_1 y γ_4 no son nulas, entonces

$$\psi_0(t_1) = -\lambda_0 \leq 0 \quad \text{y} \quad \psi_\alpha(t_1) = 0.$$

Sea

$$\tilde{H}(\Psi(t), y(t), \Omega^0) = \sup_{|\Omega| \leq \frac{R\mu}{2a}} H = \max_{|\Omega| \leq \frac{R\mu}{2a}} H. \quad (3.5)$$

De la condición de estacionalidad del Principio del Máximo se tiene

$$\mathcal{H} = \psi_0 + \psi_{x_c} V_0 \cos \alpha + \psi_{y_c} V_0 \sin \alpha + \psi_\alpha \Omega^0 \equiv 0, \quad \forall t \in [0, t_1].$$

Supongamos que $\psi_{x_c}^2 + \psi_{y_c}^2 = 0$. Así,

$$\mathcal{H} = \psi_0(t_1) + \psi_\alpha(t_1) \Omega^0(t_1) = -\lambda_0.$$

Lo cual implica que λ_0 es cero contradiciendo al Principio del Máximo. Por lo tanto

$\psi_{x_c}^2 + \psi_{y_c}^2 = cte$ diferente de cero.

Definamos $H_0 = \psi_0 + V_0 \cos(\alpha - \alpha^*)$ y $H_1 = \psi_\alpha$. Así la función de Pontryagin es

$$H = H_0 + H_1 \Omega.$$

La condición de maximalidad (3.5) implica que

$$\Omega^0 = [\text{sgn}H_1] \frac{R\mu}{2a}.$$

Luego los controles regulares son

$$\Omega^0 = \begin{cases} \frac{R\mu}{2a}, & \text{si } H_1(t) > 0 \\ -\frac{R\mu}{2a}, & \text{si } H_1(t) < 0. \end{cases}$$

Si $H_1 \equiv 0$, la condición de maximalidad (3.5) no determina el control extremal de manera única, pues el máximo de H se alcanza para más de un valor del control Ω . En tal caso, más adelante, se analiza la existencia de trayectorias singulares (especiales) usando del Teorema de Kelly.

Ahora si $H_1(t) > 0$, entonces $\Omega^0 = \frac{R\mu}{2a}$ y $\alpha = \frac{R\mu}{2a}t$. Así se tiene

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= V_0 \cos\left(\frac{R\mu}{2a}t\right) \\ \dot{y}_c &= V_0 \sin\left(\frac{R\mu}{2a}t\right) \end{aligned}$$

con solución

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{2aV_0}{R\mu} \sin\left(\frac{R\mu}{2a}t\right) \\ y_c &= -\frac{2aV_0}{R\mu} \cos\left(\frac{R\mu}{2a}t\right) + \frac{2aV_0}{R\mu}. \end{aligned}$$

De aquí se obtiene la ecuación de la circunferencia con centro en $\left(0, \frac{2aV_0}{R\mu}\right)$ y radio $r = \frac{2aV_0}{R\mu}$.

$$(x_c)^2 + \left(y_c - \frac{2aV_0}{R\mu}\right)^2 = \left(\frac{2aV_0}{R\mu}\right)^2. \quad (3.6)$$

Esto significa que el robot se mueve sobre dicha circunferencia en sentido positivo (en sentido contrario de las manecillas del reloj).

Si $H_1(t) < 0$, entonces $\Omega^0 = -\frac{R\mu}{2a}$, $\alpha = -\frac{R\mu}{2a}t$ y

$$\begin{aligned}x_c &= -\frac{2aV_0}{R\mu} \sin\left(-\frac{R\mu}{2a}t\right) \\y_c &= \frac{2aV_0}{R\mu} \cos\left(-\frac{R\mu}{2a}t\right) - \frac{2aV_0}{R\mu}.\end{aligned}$$

De aquí se obtiene la ecuación de la circunferencia con centro en $\left(0, -\frac{2aV_0}{R\mu}\right)$ y radio $r = \frac{2aV_0}{R\mu}$.

$$(x_c)^2 + \left(y_c + \frac{2aV_0}{R\mu}\right)^2 = \left(\frac{2aV_0}{R\mu}\right)^2. \quad (3.7)$$

Esto significa que el robot se mueve sobre dicha circunferencia en sentido negativo (a favor del reloj).

Para determinar la existencia de trayectorias especiales se usan las condiciones necesarias del Teorema de Kelly.

Supóngase que existe un intervalo de tiempo $(\tilde{t}, \tilde{\tilde{t}})$, $t_0 < \tilde{t} < \tilde{\tilde{t}} < t_1^0$ tal que $H_1(t) \equiv 0$ en $(\tilde{t}, \tilde{\tilde{t}})$.

Sea $\Omega^0(t)$, tal que $|\Omega^0(t)| \leq \frac{R\mu}{2a}$, $\forall t \in (\tilde{t}, \tilde{\tilde{t}})$ un control extremal especial. Se demostrará que existe $q \in \mathbb{N}$ tal que

$$(-1)^q \frac{\partial}{\partial \Omega} \frac{d^{2q}}{dt^{2q}} H_1 \leq 0.$$

Por hipótesis se tiene

$$H_1 = \psi_\alpha \equiv 0, \quad \forall t \in (\tilde{t}, \tilde{\tilde{t}}).$$

Lo cual implica que

$$\frac{d}{dt} H_1 = \dot{\psi}_\alpha = V_0 \sin(\alpha(t) - \alpha^*) = 0, \quad \forall t \in (\tilde{t}, \tilde{\tilde{t}}).$$

Dado que $V_0 > 0$, entonces $\alpha(t) = n\pi + \alpha^*$, $n \in \mathbb{Z}$. Así

$$\dot{\alpha}(t) = \Omega^0 = 0, \quad \forall t \in (\tilde{t}, \tilde{\tilde{t}}). \quad (3.8)$$

Luego,

$$\frac{d^2}{dt^2} H_1 = V_0 \Omega \cos(\alpha(t) - \alpha^*) = 0$$

y

$$\frac{\partial}{\partial \Omega} \frac{d^2}{dt^2} H_1 = V_0 \cos(\alpha(t) - \alpha^*)$$

como $\alpha(t) - \alpha^* = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, entonces $\cos(n\pi) \neq 0$. Para $\alpha(t) - \alpha^* = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ se tiene $\cos(\alpha(t) - \alpha^*) > 0$, $\forall t \in (\tilde{t}, \tilde{\tilde{t}})$. Así para $q = 1$ se tiene

$$(-1)^q \frac{\partial}{\partial \Omega} \frac{d^{2q}}{dt^{2q}} H_1 < 0.$$

Por lo tanto en el intervalo $(\tilde{t}, \tilde{\tilde{t}})$ existe una trayectoria especial. De (3.8) en este intervalo la velocidad angular es nula, entonces la orientación es constante por lo que el robot presenta un movimiento rectilíneo uniforme y la trayectoria correspondiente en este intervalo es una línea recta. El orden de la trayectoria extremal especial no es un número par, es ($q = 1$). Entonces en virtud del teorema de Kelly- Koop-Moyer la parte de la trayectoria extremal especial se puede unir con la parte de la trayectoria extremal regular en \tilde{t} y $\tilde{\tilde{t}}$. Por lo tanto el control extremal es

$$\Omega^0 = \begin{cases} \frac{R\mu}{2a}, & \text{si } H_1(t) > 0 \\ -\frac{R\mu}{2a}, & \text{si } H_1(t) < 0 \\ 0, & \text{si } H_1(t) \equiv 0. \end{cases}$$

Los resultados de síntesis que se obtuvieron son los siguientes:

1. Para todo punto de llegada $p = (a_0, b_0)$ sobre el eje positivo de las abscisas, la orientación del robot no cambia, $\alpha = 0$ para todo $t \in [0, t_1]$ y el control óptimo (la velocidad angular) es $\Omega^0(t) = 0$ para todo $t \in [0, t_1]$. En este caso la correspondiente trayectoria extremal es el segmento de recta que une el origen con p (ver Figura 3.2).
2. Si el punto de llegada $p = (a_0, b_0)$ está por arriba del eje de las abscisas, entonces la trayectoria extremal para llegar a p tiene tres variantes:

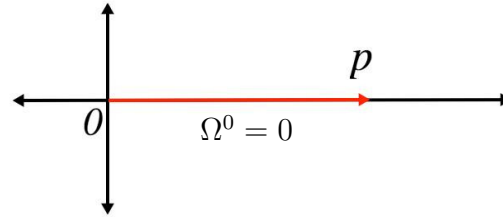


Figura 3.2: Trayectoria extremal con orientación constante cero.

i) Si p está fuera del círculo

$$x_c^2 + \left(y_c - \frac{2aV_0}{R\mu} \right)^2 \leq \left(\frac{2aV_0}{R\mu} \right)^2, \quad (3.9)$$

entonces la trayectoria extremal es la concatenación de un arco de circunferencia con centro $\left(0, \frac{2aV_0}{R\mu} \right)$ y radio $\frac{2aV_0}{R\mu}$ y una línea recta (Fig. 3.3 (a)). Es decir, existe un tiempo $\tilde{t} \in (0, t_1)$ en el que se une el arco de circunferencia con la línea recta. En el intervalo de tiempo $[0, \tilde{t})$ el control optimo es $\Omega^0 = \frac{R\mu}{2a}$ (velocidad angular máxima) y en el intervalo de tiempo $[\tilde{t}, t_1]$ el control optimo es $\Omega^0 = 0$ y por ende la orientación α en este mismo intervalo es constante $\alpha = \alpha^*$.

ii) Si p está dentro del círculo (3.9), la trayectoria extremal es la concatenación de un arco de circunferencia con centro $\left(0, -\frac{2aV_0}{R\mu} \right)$ y radio $\frac{2aV_0}{R\mu}$ con control $\Omega^0 = -\frac{R\mu}{2a}$ y una línea recta con control $\Omega^0 = 0$ (Fig. 3.3 (b)).

iii) Si p está en la frontera del círculo (3.9), la trayectoria extremal es un arco de la circunferencia (3.9) con control $\Omega^0 = \frac{R\mu}{2a}$ ver Fig 3.3 (c).

3. Si el punto de llegada $p = (a_0, b_0)$ está por abajo del eje de las abscisas, entonces la estructura de la trayectoria extremal para llegar a p es la reflexión, respecto al eje de las abscisas, de las trayectorias del caso anterior.
4. Si el punto de llegada está sobre el eje negativo de las abscisas, entonces hay dos trayectorias extremales, que son la concatenación de un arco de circunferencia y

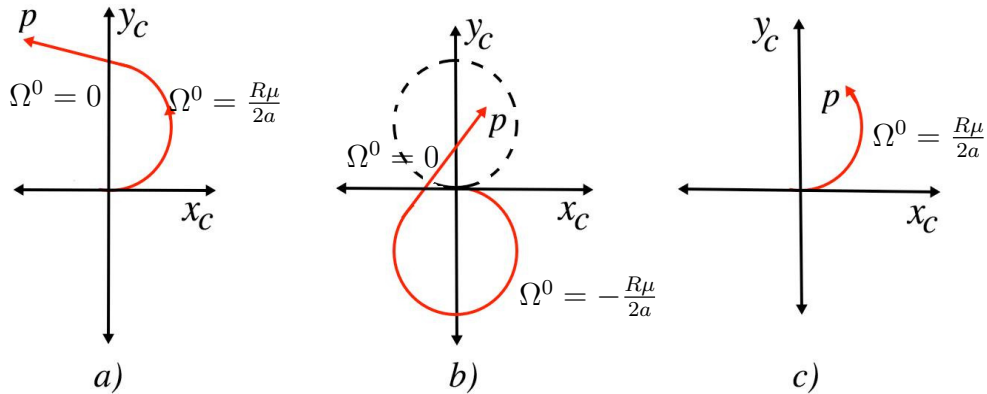


Figura 3.3: Estructura de las trayectorias extremales.

una línea recta (ver Figura 3.4).

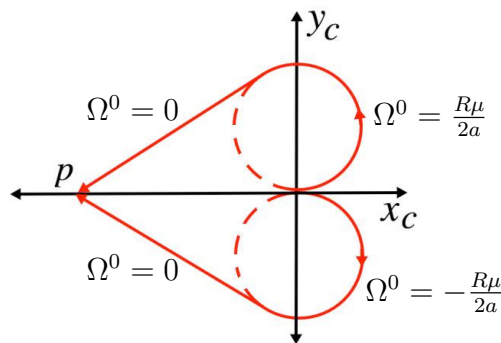


Figura 3.4: Dos trayectorias extremales.

3.2. Modelo Lineal con Información Completa y Exacta. (Controlabilidad, Observabilidad y Estabilizabilidad).

Se desea que el robot móvil siga las trayectorias extremales presentadas en la sección anterior. En la práctica es muy complejo que el robot siga tales trayectorias pues siempre habrá desviaciones. Suponiendo que los sensores (los encoder) proporcionan

información completa y exacta sobre el movimiento actual del robot móvil. Entonces mediante el uso de los datos proporcionados por los sensores, en esta sección, se pretende construir un control u que garantice la disminución de las desviaciones.

Considerando el modelo matemático (2.42) que se obtuvo al final del Capítulo 2

$$\begin{aligned}
 \dot{\bar{x}} &= \delta_1 \bar{v} \cos \alpha - \delta_2 b \bar{\Omega} \sin \alpha \\
 \dot{\bar{y}} &= \delta_1 \bar{v} \sin \alpha + \delta_2 b \bar{\Omega} \cos \alpha \\
 \dot{\bar{\alpha}} &= \delta_2 \bar{\Omega} \\
 \dot{\bar{v}} &= \delta_3 b \bar{\Omega}^2 - 2 \frac{\delta_4 \delta_7}{\delta_9} \bar{v} + 2 \frac{\delta_4}{\delta_9} \bar{u}_1 \\
 \dot{\bar{\Omega}} &= -b \delta_5 \bar{v} \bar{\Omega} - 2 \frac{\delta_6 \delta_8}{\delta_9} \bar{\Omega} + 2 \frac{\delta_6}{\delta_9} \bar{u}_2
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

y haciendo

$$y = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{\alpha} \\ \bar{v} \\ \bar{\Omega} \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{pmatrix}, \quad f(y, u) = \begin{pmatrix} \delta_1 \bar{v} \cos \alpha - \delta_2 b \bar{\Omega} \sin \alpha \\ \delta_1 \bar{v} \sin \alpha + \delta_2 b \bar{\Omega} \cos \alpha \\ \delta_2 \bar{\Omega} \\ \delta_3 b \bar{\Omega}^2 - 2 \frac{\delta_4 \delta_7}{\delta_9} \bar{v} + 2 \frac{\delta_4}{\delta_9} \bar{u}_1 \\ -b \delta_5 \bar{v} \bar{\Omega} - 2 \frac{\delta_6 \delta_8}{\delta_9} \bar{\Omega} + 2 \frac{\delta_6}{\delta_9} \bar{u}_2 \end{pmatrix},$$

el sistema (3.10) queda como

$$y = f(y, u).$$

El proceso deseado de control es $\{y^d, u^d, [0, t_1]\}$, donde el estado deseado y^d es alguna de la trayectorias descritas en la sección anterior, el control deseado u^d es Ω^0 y el estado actual es y .

Asumiendo que los actuadores tienen algunos recursos adicionales. Supóngase que se da la estrategia de control lineal

$$u = u^d + \Delta u,$$

donde Δu es un control adicional que puede emplearse para la disminución de las desviaciones con ayuda de la retroalimentación. Suponiendo que las perturbaciones

son pequeñas, entonces las ecuaciones en desviaciones $x(t)$ pueden escribirse como

$$\dot{x} = \frac{\partial f(y^d, u^d)}{\partial y} x + \frac{\partial f(y^d, u^d)}{\partial u} \Delta u \quad (3.11)$$

con condiciones iniciales

$$x(t_0) = x_0. \quad (3.12)$$

3.2.1. Controlabilidad

Considerando como trayectoria deseada la línea recta, entonces la orientación α es constante ($\alpha = \alpha^*$) en el intervalo de tiempo $[\tilde{t}, t_1]$, $0 < \tilde{t} < t_1$ el control deseado (la velocidad angular $\Omega^0 = 0$) es $u_{lr}^d = 0$ y del sistema (3.1) se obtiene

$$y^d = y_{lr}^d = \begin{pmatrix} a_0 + (t - t_1)V_0 \cos \alpha^* \\ b_0 + (t - t_1)V_0 \sin \alpha^* \\ \alpha^* \\ V_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, las ecuaciones en desviaciones para la línea recta toman la forma

$$\dot{x}(t) = A_{lr}x(t) + B_{lr}\Delta u(t), \quad (3.13)$$

donde $x(t) = y(t) - y_{lr}^d(t)$, $\Delta u(t) = u(t) - u_{lr}^d(t) = u(t)$,

$$A_{lr} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta_1 V_0 \operatorname{sen} \alpha^* & \delta_1 \operatorname{cos} \alpha^* & -\delta_2 b \operatorname{sen} \alpha^* \\ 0 & 0 & \delta_1 V_0 \operatorname{cos} \alpha^* & \delta_1 \operatorname{sen} \alpha^* & \delta_2 b \operatorname{cos} \alpha^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2\delta_4 \delta_7}{\delta_9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\left(\delta_5 b V_0 + 2\frac{\delta_6 \delta_8}{\delta_9}\right) \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

$$B_{lr} = \frac{\partial f}{\partial \bar{u}} (y_{lr}^d, u_{lr}^d) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2\frac{\delta_4}{\delta_9} & 0 \\ 0 & 2\frac{\delta_6}{\delta_9} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Delta u = \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Notemos que las matrices A_{lr} , B_{lr} del sistema lineal (3.13) son constantes y la dimensión de la matriz de controlabilidad $U = (B_{lr}, A_{lr}B_{lr}, A_{lr}^2B_{lr}, A_{lr}^3B_{lr}, A_{lr}^4B_{lr})$ es 5×10 , donde

$$A_{lr}B_{lr} = \begin{pmatrix} 2\frac{\delta_1\delta_4}{\delta_9} \cos \alpha^* & -\frac{2b\delta_2\delta_6}{\delta_9} \sin \alpha^* \\ 2\frac{\delta_1\delta_4}{\delta_9} \sin \alpha^* & \frac{2b\delta_2\delta_6}{\delta_9} \cos \alpha^* \\ 0 & 2\frac{\delta_2\delta_6}{\delta_9} \\ -\frac{4\delta_4^2\delta_7}{\delta_9^2} & 0 \\ 0 & -\frac{2\delta_6}{\delta_9} (bV_0\delta_5 + 2\frac{\delta_6\delta_8}{\delta_9}) \end{pmatrix}$$

$$A_{lr}^2B_{lr} = \begin{pmatrix} -\frac{4\delta_1\delta_4^2\delta_7}{\delta_9^2} \cos \alpha^* & 2(V_0\delta_5\delta_9b^2 + 2\delta_6\delta_8b - V_0\delta_1\delta_9) \frac{\delta_2\delta_6}{\delta_9^2} \sin \alpha^* \\ -\frac{4\delta_1\delta_4^2\delta_7}{\delta_9^2} \sin \alpha^* & -2(V_0\delta_5\delta_9b^2 + 2\delta_6\delta_8b - V_0\delta_1\delta_9) \frac{\delta_2\delta_6}{\delta_9^2} \cos \alpha^* \\ 0 & -2(V_0\delta_5\delta_9b + 2\delta_6\delta_8) \frac{\delta_2\delta_6}{\delta_9^2} \\ \frac{8\delta_4^3\delta_7^2}{\delta_9^3} & 0 \\ 0 & \frac{2\delta_6}{\delta_9^3} (V_0\delta_5\delta_9b + 2\delta_6\delta_8)^2 \end{pmatrix}$$

$$A_{lr}^3B_{lr} = \begin{pmatrix} \frac{8\delta_1\delta_4^3\delta_7^2}{\delta_9^3} \cos \alpha^* & -\frac{2\delta_2\delta_6}{\delta_9^3} (2\delta_6\delta_8 + V_0\delta_5\delta_9b) (V_0\delta_5\delta_9b^2 + 2\delta_6\delta_8b - V_0\delta_1\delta_9) \sin \alpha^* \\ \frac{8\delta_1\delta_4^3\delta_7^2}{\delta_9^3} \sin \alpha^* & \frac{2\delta_2\delta_6}{\delta_9^3} (2\delta_6\delta_8 + V_0\delta_5\delta_9b) (V_0\delta_5\delta_9b^2 + 2\delta_6\delta_8b - V_0\delta_1\delta_9) \cos \alpha^* \\ 0 & \frac{2\delta_2\delta_6}{\delta_9^3} (2\delta_6\delta_8 + V_0\delta_5\delta_9b)^2 \\ -\frac{16\delta_4^4\delta_7^3}{\delta_9^4} & 0 \\ 0 & -\frac{2\delta_6}{\delta_9^4} (2\delta_6\delta_8 + V_0\delta_5\delta_9b)^3 \end{pmatrix}$$

$$A_{lr}^4 B_{lr} = \begin{pmatrix} \frac{-16\delta_1\delta_4^4\delta_7^3}{\delta_9^4} \cos \alpha^* & \frac{2\delta_2\delta_6}{\delta_9^4} (2\delta_6\delta_8 + V_0\delta_5\delta_9b)^2 (V_0\delta_5\delta_9b^2 + 2\delta_6\delta_8b - V_0\delta_1\delta_9) \sin \alpha^* \\ \frac{-16\delta_1\delta_4^4\delta_7^3}{\delta_9^4} \sin \alpha^* & \frac{-2\delta_2\delta_6}{\delta_9^4} (2\delta_6\delta_8 + V_0\delta_5\delta_9b)^2 (V_0\delta_5\delta_9b^2 + 2\delta_6\delta_8b - V_0\delta_1\delta_9) \cos \alpha^* \\ 0 & \frac{-2\delta_2\delta_6}{\delta_9^4} (2\delta_6\delta_8 + V_0\delta_5\delta_9b)^3 \\ \frac{32\delta_4^5\delta_7^4}{\delta_9^5} & 0 \\ 0 & \frac{2\delta_6}{\delta_9^5} (2\delta_6\delta_8 + V_0\delta_5\delta_9b)^4 \end{pmatrix}$$

Se verificó que el rango de la matriz de controlabilidad U es 5, en virtud de Teorema 1.4.1 el sistema lineal (3.13) es completamente controlable y por el Teorema 1.4.6 también es estabilizable.

Para el caso particular en el que la trayectoria deseada es el segmento de recta \overline{Op} , entonces la orientación deseada es cero, la velocidad angular (el control deseado) es cero y $y_c(t) = 0$, para todo $t \in [0, t_1]$. Por lo que y_{lr}^d esta dada por

$$y_{lr}^d = \begin{pmatrix} V_0 t \\ 0 \\ 0 \\ V_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, t_1].$$

Luego las ecuaciones en desviaciones (3.13) quedan como sigue

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}_s &= \delta_1 \Delta V \\ \Delta \dot{y}_s &= \delta_1 V_0 \Delta \alpha + b \delta_2 \Delta \Omega \\ \Delta \dot{\alpha} &= \delta_2 \Delta \Omega \\ \Delta \dot{V} &= -2 \frac{\delta_4 \delta_7}{\delta_9} \Delta V + 2 \frac{\delta_4}{\delta_9} \Delta u_1 \\ \Delta \dot{\Omega} &= - \left(b \delta_5 V_0 + 2 \frac{\delta_6 \delta_8}{\delta_9} \right) \Delta \Omega + 2 \frac{\delta_6}{\delta_9} \Delta u_2 \end{aligned} \tag{3.16}$$

En este caso

$$A_{lr} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1 V_0 & 0 & b\delta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2\delta_4\delta_7}{\delta_9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\left(\delta_5 bV^0 + 2\frac{\delta_6\delta_8}{\delta_9}\right) \end{pmatrix}, \quad \Delta u = \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{pmatrix}$$

B_{lr} es la misma (3.15). También se verificó que el sistema (3.16) es completamente controlable y por tanto estabilizable.

3.2.2. Estabilizabilidad

Regresando al caso donde la trayectoria deseada es el segmento recta horizontal \overline{Op} cuyas ecuaciones en desviaciones están dadas por (3.16). Para hacer el análisis de estabilización notemos que aparentemente la desviación más significativa es la relativa a la coordenada y_s . De las ecuaciones (3.16) se tiene que el cambio de las desviaciones en la coordenada y_s está relacionado con las desviaciones de la orientación α y las desviaciones de la velocidad angular Ω , por lo que podemos descomponer el sistema (3.16) en los siguientes dos subsistemas:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}_s &= \delta_1 \Delta V \\ \Delta \dot{V} &= -2\frac{\delta_4\delta_7}{\delta_9} \Delta V + 2\frac{\delta_4}{\delta_9} \Delta u_1 \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{y}_s &= \delta_1 V_0 \Delta \alpha + b\delta_2 \Delta \Omega \\ \Delta \dot{\alpha} &= \delta_2 \Delta \Omega \\ \Delta \dot{\Omega} &= -\left(b\delta_5 V_0 + 2\frac{\delta_6\delta_8}{\delta_9}\right) \Delta \Omega + 2\frac{\delta_6}{\delta_9} \Delta u_2. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Como el sistema (3.18) es estabilizable podemos considerar el control Δu_2 como $\Delta u_2 = k_1 \Delta y_s$ y buscar los valores del parámetro k_1 que asegure la disminución de las desviaciones, es decir, que garantice la estabilidad asintótica de la solución trivial del

sistema cerrado siguiente

$$\begin{aligned}\dot{\Delta y}_s &= \delta_1 V_0 \Delta \alpha + b \delta_2 \Delta \Omega \\ \dot{\Delta \alpha} &= \delta_2 \Delta \Omega \\ \dot{\Delta \Omega} &= - \left(b \delta_5 V_0 + 2 \frac{\delta_6 \delta_8}{\delta_9} \right) \Delta \Omega + 2 \frac{\delta_6}{\delta_9} k_1 \Delta y_c,\end{aligned}\tag{3.19}$$

cuyo polinomio característico está dado por

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \left(b \delta_5 V_0 + 2 \frac{\delta_6 \delta_8}{\delta_9} \right) \lambda^2 - 2 \frac{\delta_2 \delta_6 b k_1}{\delta_9} \lambda - 2 \frac{\delta_1 \delta_2 \delta_6 V_0}{\delta_9} k_1.$$

Por el criterio de Hurwitz la solución trivial del sistema (3.19) es asintóticamente estable, si y sólo si, se cumplen las siguientes 4 desigualdades:

1. $b \delta_5 V_0 + 2 \frac{\delta_6 \delta_8}{\delta_9} > 0 \iff b > \frac{-2a^2 K_0 K_m}{V_* V_0 Z R^2 m_s}$
2.
$$\begin{aligned}-2 \frac{\delta_2 \delta_6}{\delta_9} b k_1 > 0 &\iff b k_1 < 0 \\ &\iff (b > 0 \wedge k_1 < 0) \vee (b < 0 \wedge k_1 > 0).\end{aligned}$$
3. $-2 \frac{\delta_1 \delta_2 \delta_6 V_0}{\delta_9} k_1 > 0 \iff k_1 < 0$. De aquí se tiene que b debe ser positivo.
4. $-2 \frac{\delta_2 \delta_6 b}{\delta_9} \left(b \delta_5 V_0 + 2 \frac{\delta_6 \delta_8}{\delta_9} \right) k_1 > -2 \frac{\delta_1 \delta_2 \delta_6 V_0}{\delta_9} k_1 \iff b > \frac{V_* V_0 Z (2a^2 J + R^2 J_s)}{2a^2 K_0 K_m}$.

De las cuatro desigualdades se obtuvo que el sistema (3.19) es asintóticamente estable, si y sólo si,

$$k_1 < 0 \quad \text{y} \quad b > \frac{V_* V_0 Z}{2a^2 K_0 K_m} (2a^2 J + R^2 J_s).$$

Ahora supongamos que los sensores del robot móvil proporcionan información completa y exacta sobre las desviaciones de y_c , es decir $z_1 = \Delta y_c$, y se determina la observabilidad para el sistema (3.18) cuya matriz de estado asociada es

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_1 V_0 & b \delta_2 \\ 0 & 0 & \delta_2 \\ 0 & 0 & -b V_0 \delta_5 - 2 \frac{\delta_6 \delta_8}{\delta_9} \end{pmatrix}.\tag{3.20}$$

Cuando $z_1 = \Delta y_c$, entonces $H = [1 \ 0 \ 0]$ y la matriz de observabilidad está dada como

$$N = \begin{pmatrix} H \\ H\tilde{A} \\ H\tilde{A}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 V_0 & \delta_2 b \\ 0 & 0 & \delta_2(\delta_1 V_0 - b\delta_{10}) \end{pmatrix},$$

donde $\delta_{10} = b\delta_5 V_0 + 2\frac{\delta_6 \delta_8}{\delta_9}$ cuyo determinante es $Det(N) = \delta_1 \delta_2 V_0 (\delta_1 V_0 - b\delta_{10})$. Luego

$$\begin{aligned} Det(N) \neq 0 &\iff \delta_1 \delta_2 V_0 (\delta_1 V_0 - b\delta_{10}) \neq 0 \\ &\iff (\delta_1 \delta_2 V_0 \neq 0) \wedge ((\delta_1 V_0 - b\delta_{10}) \neq 0) \\ &\iff (\delta_1 V_0 - b\delta_{10}) \neq 0, \text{ pues } \delta_1 \delta_2 V_0 \neq 0 \\ &\iff \delta_1 V_0 \neq (b^2 \delta_5 V_0 + 2\frac{\delta_6 \delta_8}{\delta_9} b), \text{ sustituyendo } \delta_{10} \\ &\iff b \neq \frac{V_* V_0 Z}{2a^2 K_0 K_m} (2a^2 J + R^2 J_s), \text{ sustituyendo } \delta_1, \delta_5, \\ &\quad \delta_6, \delta_8 \text{ y } \delta_9. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el sistema (3.18) es observable, si y sólo si,

$$b \neq \frac{V_* V_0 Z}{2a^2 K_0 K_m} (2a^2 J + R^2 J_s).$$

Ahora si el control Δu_2 es $\Delta u_2 = k_1 \Delta y_s + k_2 \Delta \alpha$, entonces el sistema cerrado correspondiente a (3.18) es

$$\begin{aligned} \Delta \dot{y}_s &= \delta_1 V_0 \Delta \alpha + b \delta_2 \Delta \Omega \\ \Delta \dot{\alpha} &= \delta_2 \Delta \Omega \\ \Delta \dot{\Omega} &= - \left(b \delta_5 V_0 + 2\frac{\delta_6 \delta_8}{\delta_9} \right) \Delta \Omega + 2\frac{\delta_6}{\delta_9} (k_1 \Delta y_c + k_2 \Delta \alpha), \end{aligned} \tag{3.21}$$

cuyo polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \left(2\frac{\delta_6 \delta_8}{\delta_9} + V_0 b \delta_5 \right) \lambda^2 - 2\frac{\delta_2 \delta_6}{\delta_9} (k_2 + b k_1) \lambda - 2V_0 \frac{\delta_1 \delta_2 \delta_6}{\delta_9} k_1.$$

Por el criterio de Hurwitz la solución trivial del sistema (3.21) es asintóticamente estable, si y sólo si, se cumplen las siguientes 4 desigualdades:

1. $2\frac{\delta_6 \delta_8}{\delta_9} + V_0 b \delta_5 > 0 \iff b > \frac{-2a^2 K_0 K_m}{V_* V_0 Z R^2 m_s}$

2. $-2\frac{\delta_2\delta_6}{\delta_9}(k_2 + bk_1) > 0 \iff k_2 < -bk_1.$

3. $-2V_0\frac{\delta_1\delta_2\delta_6}{\delta_9}k_1 > 0 \iff k_1 < 0.$

4. $- \left(2\frac{\delta_6\delta_8}{\delta_9} + V_0b\delta_5\right) 2\frac{\delta_2\delta_6}{\delta_9}(k_2 + bk_1) > -2V_0\frac{\delta_1\delta_2\delta_6}{\delta_9}k_1$
 $\iff - \left(2\frac{\delta_6\delta_8}{\delta_9} + V_0b\delta_5\right) (k_2 + bk_1) > -V_0\delta_1k_1.$ De la condición tres $k_1 < 0$, luego $-V_0\delta_1k_1 > 0$, así $- \left(2\frac{\delta_6\delta_8}{\delta_9} + V_0b\delta_5\right) (k_2 + bk_1) > 0$. De la condición uno la expresión que está en los primeros paréntesis de la desigualdad anterior es positiva, lo cual implica que $-(k_2 + bk_1) > 0$, es decir, $k_2 < -bk_1$ y resulta ser la misma condición dos.

Si $b = 0$, de la condición cuatro se tiene que $k_2 < \frac{V_0\delta_1\delta_9}{2\delta_6\delta_8}k_1$. Donde el coeficiente de k_1 es positivo.

Por lo tanto, existen dos posibles regiones de estabilización correspondientes a los 3 posibles valores de b . Tales regiones se muestran en la Figura 3.5.

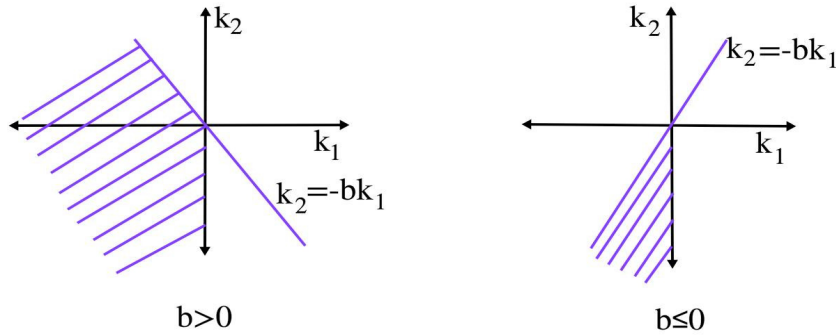


Figura 3.5: Regiones de estabilización.

Si los sensores del robot móvil proporcionan información completa y exacta sobre las desviaciones de y_c y de α , es decir

$$z = \begin{pmatrix} \Delta y_s \\ \Delta \alpha \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces la matriz de observabilidad correspondiente al el sistema (3.18) está dada por

$$N = \begin{pmatrix} H \\ H\tilde{A} \\ H\tilde{A}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \delta_1 V_0 & \delta_2 b \\ 0 & 0 & \delta_2 \\ 0 & 0 & \delta_1 \delta_2 V_0 - b \delta_2 \left(V_0 b \delta_5 + 2 \frac{\delta_6 \delta_8}{\delta_9} \right) \\ 0 & 0 & -\delta_2 \left(V_0 b \delta_5 + 2 \frac{\delta_6 \delta_8}{\delta_9} \right) \end{pmatrix}.$$

Se puede verificar que el rango de esta matriz es 3, por lo que para este caso el sistema (3.18) es observable.

Ahora si $\Delta u_2 = k_1 \Delta y_s + k_3 \Delta \Omega$, entonces el sistema cerrado correspondiente a (3.18) es

$$\begin{aligned} \Delta \dot{y}_c &= \delta_1 V_0 \Delta \alpha + b \delta_2 \Delta \Omega \\ \Delta \dot{\alpha} &= \delta_2 \Delta \Omega \\ \Delta \dot{\Omega} &= - \left(b \delta_5 V_0 + 2 \frac{\delta_6 \delta_8}{\delta_9} \right) \Delta \Omega + 2 \frac{\delta_6}{\delta_9} (k_1 \Delta y_c + k_3 \Delta \Omega), \end{aligned} \tag{3.22}$$

cuyo polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \left(2 \frac{\delta_6}{\delta_9} (\delta_8 - k_3) + V_0 \delta_5 b \right) \lambda^2 - 2 \frac{\delta_2 \delta_6}{\delta_9} b k_1 \lambda - 2 V_0 \frac{\delta_1 \delta_2 \delta_6}{\delta_9} k_1.$$

Por el criterio de Hurwitz la solución trivial del sistema (3.22) es asintóticamente estable, si y sólo si, se cumplen las siguientes 4 condiciones:

1. $2 \frac{\delta_6}{\delta_9} (\delta_8 - k_3) + V_0 \delta_5 b > 0 \iff k_3 < \frac{V_0 \delta_5 \delta_9}{2 \delta_6} b + \delta_8$
2. $-2 \frac{\delta_2 \delta_6}{\delta_9} b k_1 > 0 \iff b k_1 < 0$
 $\iff (b > 0 \wedge k_1 < 0) \vee (b < 0 \wedge k_1 > 0).$
3. $-2 V_0 \frac{\delta_1 \delta_2 \delta_6}{\delta_9} k_1 > 0 \iff k_1 < 0$. Así que b tiene que ser positiva.
4. $-\left(2 \frac{\delta_6}{\delta_9} (\delta_8 - k_3) + V_0 \delta_5 b \right) 2 \frac{\delta_2 \delta_6}{\delta_9} b k_1 > -2 V_0 \frac{\delta_1 \delta_2 \delta_6}{\delta_9} k_1$
 $\iff -\left(2 \frac{\delta_6}{\delta_9} (\delta_8 - k_3) + V_0 \delta_5 b \right) b k_1 > -V_0 \delta_1 k_1$. De la condición tres

$k_1 < 0$, luego $-V_0\delta_1k_1 > 0$, así $-\left(2\frac{\delta_6}{\delta_9}(\delta_8 - k_3) + V_0\delta_5b\right)bk_1 > 0$. De la condición dos y tres $bk_1 < 0$ lo cual implica que la expresión que está en los primeros paréntesis de la desigualdad anterior es positiva. Resulta ser la misma condición uno. Haciendo $M = \frac{V_0\delta_5\delta_9}{2\delta_6}b + \delta_8 > 0$, la región de estabilización se muestra en la Figura 3.6.

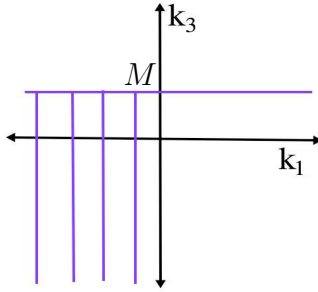


Figura 3.6: Region de estabilización.

Si los sensores del robot móvil proporcionan información completa y exacta sobre las desviaciones de y_c y de Ω , es decir

$$z = \begin{pmatrix} \Delta y_s \\ \Delta \Omega \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matriz de observabilidad está dada por

$$N = \begin{pmatrix} H \\ H\tilde{A} \\ H\tilde{A}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \delta_1V_0 & \delta_2b \\ 0 & 0 & -\delta_{10} \\ 0 & 0 & \delta_2(V_0\delta_1 - b\delta_{10}) \\ 0 & 0 & \delta_{10}^2 \end{pmatrix}.$$

Nuevamente el rango de la matriz de observabilidad es 3, por lo que también para este caso el sistema (3.18) es observable.

Ahora considerando el sistema

$$\begin{aligned}\dot{\Delta\alpha} &= \delta_2 \Delta\Omega \\ \dot{\Delta\Omega} &= - \left(b\delta_5 V_0 + 2\frac{\delta_6 \delta_8}{\delta_9} \right) \Delta\Omega + 2\frac{\delta_6}{\delta_9} \Delta u_2.\end{aligned}\tag{3.23}$$

Si $\Delta u_2 = k_2 \Delta\alpha$, el sistema cerrado correspondiente a (3.23) es

$$\begin{aligned}\dot{\Delta\alpha} &= \delta_2 \Delta\Omega \\ \dot{\Delta\Omega} &= - \left(b\delta_5 V_0 + 2\frac{\delta_6 \delta_8}{\delta_9} \right) \Delta\Omega + 2\frac{\delta_6}{\delta_9} k_2 \Delta\alpha,\end{aligned}\tag{3.24}$$

cuyo polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \left(2\frac{\delta_6 \delta_8}{\delta_9} + \delta_5 V_0 b \right) \lambda - 2\frac{\delta_2 \delta_6}{\delta_9} k_2.$$

Por el criterio de Hurwitz la solución trivial del sistema (3.24) es asintóticamente estable, si y sólo si, se cumplen las siguientes 2 condiciones:

1. $2\frac{\delta_6 \delta_8}{\delta_9} + \delta_5 V_0 b > 0 \iff b > \frac{-2a^2 K_0 K_m}{V_* V_0 Z R^2 m_s}$
2. $-\left(2\frac{\delta_6 \delta_8}{\delta_9} + \delta_5 V_0 b \right) 2\frac{\delta_2 \delta_6}{\delta_9} k_2 > 0 \iff k_2 < 0.$

Ahora haciendo $M = \frac{-2a^2 K_0 K_m}{V_* V_0 Z R^2 m_s}$, la región de estabilización se muestra en la figura 3.7.

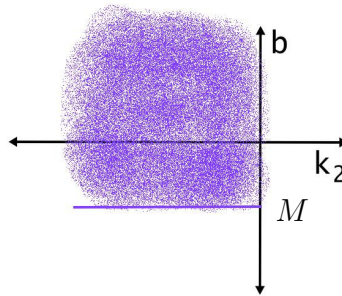


Figura 3.7: Region de estabilización.

Lo que se ha hecho hasta el momento es determinar conjuntos donde viven los parámetros k_1 , k_2 y k_3 para el subsistema (3.18) en diferentes variantes, pero es más interesante por un lado, conocer de manera concreta estos parámetros y por otro hacer

el análisis de estabilización para todo el sistema (3.16). En la siguiente sección se hace este análisis, en el cual no solo se considera como trayectoria deseada la recta horizontal sino cualquier línea recta de las presentadas en la sección anterior. Y en el Capítulo 4 se hace la estabilización de tipo minimax y de esa manera se determinan los valores de los parámetros k_i del control, considerando las peores desviaciones iniciales dentro de una bola de radio 1.

3.3. Planteamiento Matemático de Estabilización Óptima del Movimiento Respecto a la Trayectoria Deseada

Considerando las ecuaciones en desviaciones relativas a la línea recta

$$\begin{aligned}
 \dot{\Delta x}_s &= -\delta_1 V_0 \sin \alpha^* \Delta \alpha + \delta_1 \cos \alpha^* \Delta V - \delta_2 b \sin \alpha^* \Delta \Omega \\
 \dot{\Delta y}_s &= \delta_1 V_0 \cos \alpha^* \Delta \alpha + \delta_1 \sin \alpha^* \Delta V + \delta_2 b \cos \alpha^* \Delta \Omega \\
 \dot{\Delta \alpha} &= \delta_2 \Delta \Omega \\
 \dot{\Delta V} &= -2 \frac{\delta_4 \delta_7}{\delta_9} \Delta V + 2 \frac{\delta_4}{\delta_9} \Delta u_1 \\
 \dot{\Delta \Omega} &= - \left(b \delta_5 V_0 + 2 \frac{\delta_6 \delta_8}{\delta_9} \right) \Delta \Omega + 2 \frac{\delta_6}{\delta_9} \Delta u_2
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

con condiciones iniciales $x(0) = x_0$. Un criterio que expresa qué tan rápido el estado inicial $x(0) = x_0$ es llevado al estado deseado $x(t_1) = 0$ es el criterio de la integral cuadrática:

$$\varphi = \int_{t_0}^{t_1} [x^T(t) M x(t) + \Delta u^T(t) N \Delta u(t)] dt, \tag{3.26}$$

donde M es una matriz simétrica definida no negativa y N es una matriz simétrica definida positiva. Matemáticamente éste problema es el siguiente

$$\min_{\Delta u(\cdot) \in W} \varphi; \quad W = \{\Delta u(\cdot) \in PC | \Delta u(t) \in U \subset \mathbb{R}^2\}, \tag{3.27}$$

donde PC es el conjunto de funciones vectoriales continuas a trozos, U es un conjunto convexo cerrado de posibles valores del control de retroalimentación y \mathbb{R}^2 es el espacio de control de dimension 2.

Un método que permite la minimización del criterio de desempeño φ es la programación dinámica desarrollada por R. F. Bellman, la cual se usará en la siguiente sección.

3.4. Estabilización Óptima

Para resolver el problema de estabilización óptimo (3.25), (3.26) se usan las condiciones suficientes de optimalidad en la forma de las ecuaciones de Bellman, que de acuerdo a la sección 1.6, se pueden escribir como

$$\frac{\partial S(x(t), t)}{\partial t} + \min_{\Delta u(\cdot)} \left\{ x^T M x + \Delta u^T N \Delta u + \frac{\partial S}{\partial x} (A_{lr} x + B \Delta u) \right\} = 0 \quad (3.28)$$

$$S(t_1) = 0, \quad (3.29)$$

donde A_{lr} , B , y Δu están dadas en (3.14) y (3.15). La condición de frontera (3.29) es de ésa forma porque se requiere que el sistema en lazo cerrado sea asintóticamente estable. El control óptimo se encuentra minimizando (3.28) en Δu y está dado como (ver sección 1.6.2)

$$\Delta u^0 = -N^{-1} B^T \frac{\partial S}{\partial x}. \quad (3.30)$$

Sustituyendo Δu^0 en (3.28) y buscando una solución en la forma

$$S = \frac{1}{2} x^T \mathcal{L}(t) x, \quad (3.31)$$

donde $\mathcal{L}(t)$ es una matriz simétrica definida positiva, se obtiene la ecuación diferencial matricial de Riccati

$$\dot{\mathcal{L}}(t) = -\mathcal{L}(t) A_{lr} - A_{lr}^T \mathcal{L}(t) + \mathcal{L}(t) B N^{-1} B^T \mathcal{L}(t) - M \quad (3.32)$$

con condiciones finales

$$\mathcal{L}(t_1) = 0. \quad (3.33)$$

De (3.30) y (3.31) se obtiene el control óptimo en términos de x , como

$$\Delta u^0 = -N^{-1} B^T \mathcal{L}(t) x. \quad (3.34)$$

Considerando el sistema lineal (3.25) y la entrada de control óptimo (3.34), se puede verificar el comportamiento de éste último analizando la ecuación en lazo cerrado

$$\dot{x} = [A_{lr} - BN^{-1}B^T\mathcal{L}(t)]x(t). \quad (3.35)$$

Para encontrar la solución de estabilización, primero es necesario transformar la ecuación diferencial matricial de tipo Riccati de condiciones finales a una ecuación de condiciones iniciales, esto con la finalidad de poder resolverla con métodos convencionales. Para ello, se realiza un cambio de variable en el tiempo;

$$\tau = t_1 - t, \quad d\tau = -dt.$$

Haciendo la sustitución en (3.32) se tiene la ecuación diferencial con condiciones iniciales

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{L}}(\tau) &= -\mathcal{L}(\tau)A_{lr} - A_{lr}^T\mathcal{L}(\tau) + \mathcal{L}(\tau)BN^{-1}B^T\mathcal{L}(\tau) - M \\ \mathcal{L}(t_0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

La solución de la ecuación diferencial de Riccati es un sistema de 25 elementos, por la simetría de $\mathcal{L}(t)$, entonces sólo es necesario resolver un sistema de 15 ecuaciones diferenciales. Este sistema de 15 ecuaciones se puede resolver con ayuda de MATLAB (ode45), obteniendo como resultado 15 conjuntos de puntos en el plano por donde pasan las curvas integrales. Uniendo los puntos se tiene una aproximación de las gráficas de las soluciones. Una vez que se obtiene el conjunto de gráficas éstas se pueden aproximar, por ejemplo, mediante polinomios de grado 8. Como dichas soluciones están en tiempo inverso se invierte el tiempo para buscar la solución a condiciones finales. La Figura 3 ilustra la idea de la solución de este problema.

Figura 3.8: Proceso para obtener la solución de Riccati a condiciones finales.

Con la aproximación de la solución $\mathcal{L}(t)$ de (3.32) es posible encontrar el control

óptimo (3.34). Finalmente aplicando este control a (3.25) se obtiene la ecuación el lazo cerrado (3.35) con la cual se puede verificar el comportamiento del sistema bajo la señal de control, mediante la solución de este sistema empleando también la herramienta de MATLAB (ode45), se obtienen gráficas que muestran el comportamiento de cada variable del sistema (3.25).

Un buen desempeño del control óptimo diseñado depende significativamente de la elección de las matrices de peso M y N . Por cuestiones de complejidad es común elegir estas matrices como las matrices identidad.

Considerando los parámetros físicos del robot que se muestran en la tabla siguiente se hizo una simulación numérica para observar el comportamiento de las variables de estado del sistema lineal en lazo cerrado (3.35).

Parámetro	Valor	Descripción
V_0	1.57	m/s. (velocidad lineal constante)
Ω	0	rad/s. (velocidad angular)
a	24.24	cm.
b	20.52	cm.
m_s	7	kg. masa de la plataforma
R	10.16	cm. radio de cada rueda
α^*	$\frac{\pi}{4}$	radianes
K_m	0.0654	constante de proporcionalidad de la FEM
K_0	0.053	constante de proporcionalidad del torque de los motores
J	0.0018	tensor de inercia del cm de las ruedas
J_s	0.02	tensor de inercia del cm de la plataforma
U_*	24	voltaje máximo aplicable
V_*	1.57	m/s (velocidad máxima lineal)
Ω_*	15.51	velocidad máxima angular
T_*	3600	segundos
I_*	0.430	Amperes
Z_*	1.89	Ohms

Como se puede observar en las figuras 3.9, 3.10, 3.11, 3.12 y 3.13. se logra una estabilización en cero en menos de 4 centésimas de segundo.

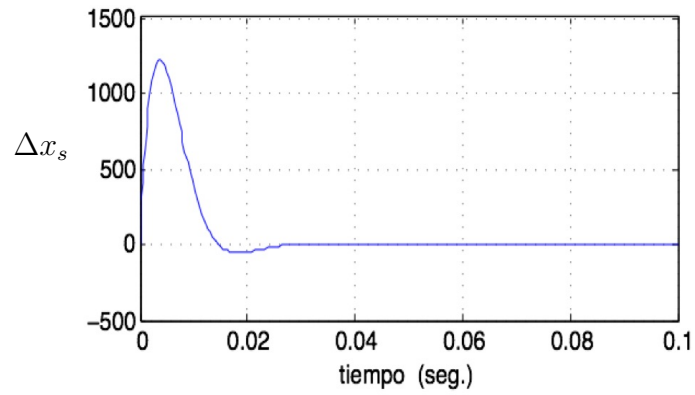


Figura 3.9: Comportamiento de la variable de estado Δx_s del sistema lineal en lazo cerrado.

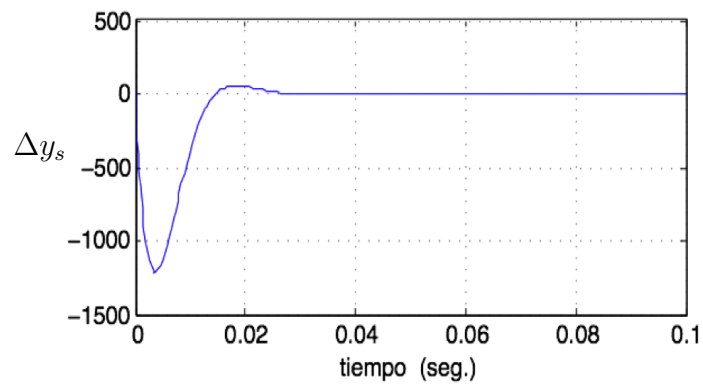


Figura 3.10: Comportamiento de la variable de estado Δy_s del sistema lineal en lazo cerrado.

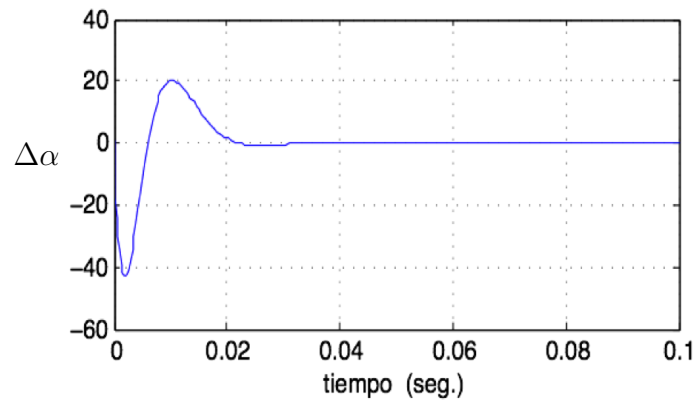


Figura 3.11: Comportamiento de la variable de estado $\Delta\alpha$ del sistema lineal en lazo cerrado.

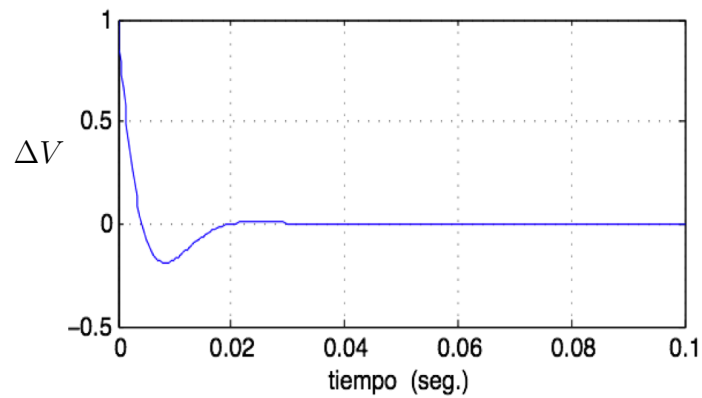


Figura 3.12: Comportamiento de la variable de estado ΔV del sistema lineal en lazo cerrado.

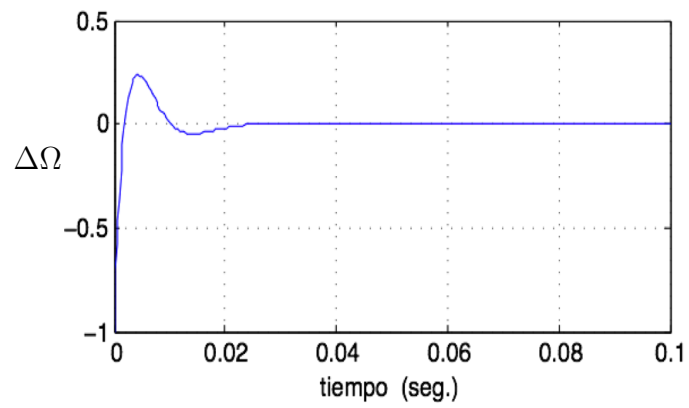


Figura 3.13: Comportamiento de la variable de estado $\Delta\Omega$ del sistema lineal en lazo cerrado.

Capítulo 4

Estabilización Min Max del Movimiento por la Línea Recta

En este capítulo se determina un control de tipo Min-Max. Para ello el problema de maximización se reduce a un problema de programación no lineal y el problema de minimización se resuelve usando el Tent Method. De esta manera se obtienen los valores de los parámetros del control k_i y las peores desviaciones iniciales.

4.1. Ecuaciones en Desviaciones y Planteamiento de Estabilización de Min-Max

Considere el sistema dinámico controlable

$$\dot{x} = Ax + e_n u_1, \quad (4.1)$$

donde A es una matriz real invariante en el tiempo de tamaño $n \times n$, $u_1 = K^T x$, $e_n^T = (0, 0, \dots, 0, 1)$ y el criterio para la calidad de la estabilización tiene la forma

$$\varphi_0(k) = \max_{|x(0)| \leq 1} \left(\int_0^\infty \sum_{i=1}^m x_i^2(t) dt \right) \rightarrow \min_{k \in Q_0}, \quad (4.2)$$

para las peores perturbaciones iniciales. Considerando que las peores perturbaciones iniciales están en la bola de radio uno, $1 \leq m \leq n$.

Asuma que: $K^T = (k_1, \dots, k_m, 0, \dots, 0)$, $1 \leq m \leq n$; el conjunto Q_0 es un subconjunto cerrado acotado y convexo de Q , donde

$$Q = \{k \in \mathbb{R}^m | \operatorname{Re} \lambda_j(k) \leq -\alpha_0, \alpha_0 > 0, \det(\lambda I_n - A_c(k)) = 0, j = 1, 2, \dots, n\}, \quad (4.3)$$

\mathbb{R}^m es un espacio Euclidiano, α_0 es el factor de estabilidad, I_n es la matriz identidad de tamaño $n \times n$ y A_c es la matriz del sistema de lazo cerrado

$$\dot{x} = (A + e_n K^T) x, \quad A_c = A + e_n K^T. \quad (4.4)$$

La existencia de parámetros nulos $k_i = 0$, ($i = m + 1, \dots, n$) es posible, una razón es porque se puede dar el caso en el cual es suficiente conocer la información de las primeras “ m ” coordenadas del sistema (4.1) para que la matriz A_c sea una matriz de tipo Hurwitz.

El objetivo es encontrar las condiciones necesarias para el mínimo de la función φ_0 .

4.2. Reducción del Problema Extremal a un Problema de Programación no Lineal

En este apartado se reduce el problema extremal 4.2 a un problema de programación no lineal. Para esto considere la siguiente ecuación diferencial matricial:

$$\dot{Z} = A_c^T(k)Z + ZA_c(k), \quad Z(0) = G_m, \quad (4.5)$$

$$G_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

donde m es el número de unos que aparecen en la diagonal principal de la matriz $G_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

La solución de la ecuación 4.5 es

$$Z(t) = e^{A_c^T(k)t} G_m e^{A_c(k)t}. \quad (4.6)$$

Para cada $k \in Q_0 \subset Q \subset \mathbb{R}^m$ la matriz $A_c(k)$ es una matriz de tipo Hurwitz, por lo que la siguiente integral existe:

$$H = \int_0^\infty Z(t) dt. \quad (4.7)$$

Integrando la ecuación diferencial matricial (4.5) se obtiene la siguiente ecuación algebraica lineal de Lyapunov

$$-G_m = A_c^T(k)H + HA_c(k). \quad (4.8)$$

En virtud del lema de Lyapunov (sección 1.8), para cada $k \in Q_0$ la ecuación (4.8) tiene la única solución $H = H^T > 0$ cuando $m = n$ y, $H \geq 0$ cuando $1 \leq m < n$. Si A es una matriz de Frobenius, entonces para toda $m < n$, $H = H^T > 0$.

Es sabido que

$$\max_{|x(0)| \leq 1} x^T(0)Hx(0) = \max_{|x(0)|=1} x^T(0)Hx(0),$$

lo cual implica que se tiene un problema de extremos condicionados:

$$\max_{x \in M} \varphi_1(x), \quad (4.9)$$

donde $\varphi_1(x) = x^T H x$ y $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T x = f_1(x) = 1\}$. Para este problema, la función de Lagrange tiene la forma

$$L(x) = \varphi_1(x) - \mu f_1(x), \quad (4.10)$$

donde μ es el multiplicador de Lagrange. Si μ es un eigenvalor de la matriz $H = H^T > 0$, entonces todos los vectores x^0 tales que $\frac{dL(x^0)}{dx} = 0$ son los correspondientes eigenvectores a los eigenvalores de la matriz H . Denotemos los eigenvalores de H por $\mu_j, j = 1, \dots, n$. Entonces,

$$\mu_j > 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Sea

$$\mu_{max} = \max_{1 \leq j \leq n} \mu_j.$$

Con ayuda del operador ortogonal I tenemos la forma canónica de H . Si $x = I\xi$, entonces

$$x^T H x = \xi^T I^T H I \xi = \sum_{j=1}^n \mu_j \xi_j^2 \leq \mu_{max} |\xi|^2 = \mu_{max}. \quad (4.11)$$

Luego como la solución del sistema cerrado (4.4) es $x(t) = e^{A_c(k)t} x(0)$, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \varphi_0(k) &= \max_{|x(0)| \leq 1} \int_0^\infty \sum_{i=1}^m x_i^2(t) dt = \max_{|x(0)| \leq 1} \int_0^\infty x^T(t) G_m x(t) dt \\ &= \max_{|x(0)|=1} x^T(0) H x(0) = \max_{1 \leq j \leq n} \mu_j(k) = \mu_{max}(k). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Si el siguiente problema de programación no lineal se puede resolver

$$\varphi_0(k) = \max_{1 \leq j \leq n} \mu_j(k) \longrightarrow \min_{k \in Q_0}, \quad (4.13)$$

entonces las peores perturbaciones $x(0)$, que corresponden a $\varphi_0(k^0)$, se pueden calcular.

4.3. Aplicación del Tent Method de Boltyanski

En esta sección se aplica el Tent Method de Boltyanski para obtener las condiciones necesarias para un mínimo de la función $\varphi_0(k)$.

La función $\varphi_0(k)$ es continua sobre el conjunto Q_0 , entonces por el teorema de Weierstrass existe $k^0 \in Q_0$ tal que

$$\varphi_0(k^0) \leq \varphi_0(k), \forall k \in Q_0. \quad (4.14)$$

Definamos el concepto de conjunto de índices activos $J(k^0)$.

$$J(k^0) := \{j \in \{1, \dots, n\} : \mu_j(k^0) = \mu_{\max}(k^0)\}.$$

Ahora definamos los conjuntos $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ de los parámetros k_1, \dots, k_m en el espacio \mathbb{R}^m como:

$$\Omega_i := \{k \in \mathbb{R}^m \mid \mu_i(k) < \varphi_0(k^0), k \in Q_0\} \cup \{k^0\}.$$

Si $i \notin J(k^0)$, entonces el punto k^0 es un punto interior del conjunto Ω_i .

En virtud del Teorema 1.9.1 el punto $k^0 \in Q_0$ es un minimizador de la función $\varphi_0(k)$ sobre Q_0 , si y sólo si,

$$Q_0 \cap \Omega_1 \cap \dots \cap \Omega_n = \{k^0\}. \quad (4.15)$$

Para formular las condiciones necesarias para que se cumpla la igualdad (4.15), de acuerdo con el criterio y la condición necesaria de separabilidad (ver los teoremas

1.9.2 y 1.9.3), se requiere construir los conos convexos K_0, K_1, \dots, K_n con vértice en el punto k^0 que sean tents a los conjuntos $Q_0, \Omega_1, \dots, \Omega_n$ respectivamente, además construir conos duales $K_0^*, K_1^*, \dots, K_n^*$ a los conos tents K_0, K_1, \dots, K_n respectivamente. Como Q_0 es convexo, entonces su respectivo cono tent K_0 es el cono de soporte en el punto k^0 [13]. Si k^0 es un punto interno de Q_0 , entonces el cono convexo tent K_0 coincide con todo el espacio \mathbb{R}^n . Si k^0 es un punto frontera del conjunto Q_0 y cumple la condición de suavidad (que $\varphi_0(k)$ tenga derivada continua en k^0), entonces el cono tent K_0 es un semiespacio de \mathbb{R}^n . Si el punto k^0 está en la frontera de Q_0 y es una esquina (ver Figura 4.1), entonces se debe construir el cono K_0 usando la definición de cono de soporte (Definición 22).

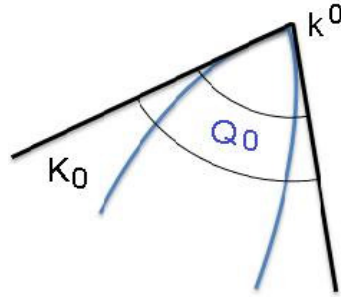


Figura 4.1: El cono de soporte K_0 para un conjunto convexo Q_0 en k^0 .

Para el conjunto Ω_i , cuando $i \notin J(k^0)$ todo el espacio \mathbb{R}^n es su tent. Si $j \in J(k^0)$ y asumiendo que $\frac{\partial \mu_j(k^0)}{\partial k} \neq 0$, entonces el tent es un semiespacio:

$$K_j(k^0) := \left\{ k \in \Omega_j \subset \mathbb{R}^m \mid \frac{\partial \mu_j(k^0)}{\partial k} (k - k^0) \leq 0 \right\}.$$

(El caso cuando $\frac{\partial \mu_j(k^0)}{\partial k} = 0$ será discutido más adelante). El conjunto de índices activos $J(k^0)$ es no vacío (la existencia de al menos un índice j se debe a que $\mu_{max} = \max\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$).

El cono dual K_0^* está dado por

$$K_0^* := \{ b \in \mathbb{R}^m \mid b^T (k - k^0) \leq 0, k \in K_0(k^0) \}$$

y es un cono convexo cerrado. Si $k^0 = 0$, entonces la relación entre K_0 y K_0^* se puede ver en la Figura 4.2.

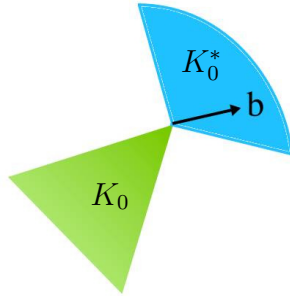


Figura 4.2: K_0^* es el cono dual de K_0 .

El cono dual K_j^* , $j \in J(k^0)$ es un rayo $\lambda_j \frac{\partial \mu_j(k^0)}{\partial k}$, $\lambda_j \geq 0$. Para $i \notin J(k^0)$ el cono dual se degenera a un punto “0” y éste no participa en la formulación de las condiciones necesarias (pues no satisface el criterio de separabilidad ver el Teorema 1.9.2). Así, una condición necesaria para la optimalidad de la estabilización (4.2) es como sigue

Teorema 4.1. *Si k^0 es un minimizador de la función $\varphi_0(k)$ en el conjunto Q_0 , entonces hay valores no negativos $\lambda_j \geq 0$, $j \in J(k^0)$, y vectores $b \in K_0^*$ tales que:*

i)

$$\sum_{j \in J(k^0)} \lambda_j + |b| \neq 0 \quad (4.16)$$

ii)

$$\sum_{j \in J(k^0)} \lambda_j \left(\frac{\partial \mu_j(k^0)}{\partial k} \right)^T + b = 0. \quad (4.17)$$

El vector de la peor perturbación inicial $x(0)$ es el eigenvector de la matriz $H(k^0)$.

Comentario. Si $j \in J(k^0)$ y el vector $\frac{\partial \mu_j(k^0)}{\partial k} = 0$ entonces ponga $\lambda_j = 1$, $\lambda_i = 0$, $i \in J(k^0)$, $i \neq j$, $b = 0$ y se cumplen las condiciones (4.16) y (4.17), que corresponden al teorema de Fermat para el caso cuando k^0 es un punto interior de Q_0 .

4.4. Solución del problema de programación no lineal para $n = 3$ y $m = 1$ y reducción del problema de programación no lineal a un problema de intersección de conjuntos

En la sección 3.2.2 del Capítulo 3 separamos las ecuaciones en desviaciones (3.16), cuando el proceso deseado es la línea recta horizontal, en dos subsistemas y se analizó la estabilizabilidad y la observabilidad para el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\Delta \dot{y}_s &= \delta_1 V_0 \Delta \alpha + b \delta_2 \Delta \Omega \\ \Delta \dot{\alpha} &= \delta_2 \Delta \Omega \\ \Delta \dot{\Omega} &= - \left(b \delta_5 V_0 + 2 \frac{\delta_6 \delta_8}{\delta_9} \right) \Delta \Omega + 2 \frac{\delta_6}{\delta_9} \Delta u_2.\end{aligned}\tag{4.18}$$

Pasando la primera ecuación del sistema anterior al final, entonces el sistema (4.18) queda como

$$\begin{aligned}\Delta \dot{\alpha} &= \delta_2 \Delta \Omega \\ \Delta \dot{\Omega} &= - \left(b \delta_5 V_0 + 2 \frac{\delta_6 \delta_8}{\delta_9} \right) \Delta \Omega + 2 \frac{\delta_6}{\delta_9} \Delta u_2 \\ \Delta \dot{y}_s &= \delta_1 V_0 \Delta \alpha + b \delta_2 \Delta \Omega.\end{aligned}\tag{4.19}$$

En 3.2.2 se demostró que si $\Delta u_2 = k_1 \Delta y_s$ el sistema (4.19) es observable, luego el funcional (4.2) se reduce al siguiente

$$\varphi_0(\tilde{x}(0), k_1) = \max_{|\tilde{x}(0)| \leq 1} \left(\int_0^\infty \Delta y_s^2(t) dt \right) \longrightarrow \min_{k_1 \in Q_0},\tag{4.20}$$

donde $\tilde{x} = (\Delta \alpha, \Delta \Omega, \Delta y_s)^T$ y $m = 1$ (pues los sensores sólo proporcionan información de las desviaciones de la coordenada y_s). Para determinar el conjunto cerrado, acotado y convexo Q_0 se procede de la siguiente manera:

Sustituyendo $\Delta u_2 = k_1 \Delta y_s$ en (4.19), se tiene el sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{\Delta \alpha} &= \delta_2 \Delta \Omega \\ \dot{\Delta \Omega} &= - \left(b \delta_5 V_0 + 2 \frac{\delta_6 \delta_8}{\delta_9} \right) \Delta \Omega + 2 \frac{\delta_6}{\delta_9} k_1 \Delta y_s \\ \dot{\Delta y_s} &= \delta_1 V_0 \Delta \alpha + b \delta_2 \Delta \Omega. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Cuya matriz asociada es

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & - \left(b \delta_5 V_0 + 2 \frac{\delta_6 \delta_8}{\delta_9} \right) & 2 \frac{\delta_6}{\delta_9} k_1 \\ \delta_1 V_0 & b \delta_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

y el polinomio característico asociado a la matriz A_c es

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \left(b \delta_5 V_0 + 2 \frac{\delta_6 \delta_8}{\delta_9} \right) \lambda^2 - 2 \frac{\delta_2 \delta_6 b k_1}{\delta_9} \lambda - 2 \frac{\delta_1 \delta_2 \delta_6 V_0}{\delta_9} k_1. \quad (4.23)$$

En la sección 3.2.2 se demostró con ayuda del criterio de Hurwitz, que el sistema (4.19) es estable asintóticamente si $k_1 < 0$ y $b > \frac{V_* V_0 Z}{2a^2 K_0 K_m} (2a^2 J + R^2 J_s)$. Por lo tanto el conjunto de parámetros $Q(k_1)$ para el control Δu_2 está dado por el intervalo abierto $(-\infty, 0)$ y para cada $k_1 < 0$ la ecuación algebraica de Lyapunov

$$A_c^T(k_1) H(k_1) + H(k_1) A_c(k_1) = -G_1, \quad (4.24)$$

tiene una única solución simétrica definida positiva $H(k_1)$, donde (de acuerdo al criterio de desempeño (4.20))

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo la ecuación algebraica de Lyapunov se obtiene la matriz

$$H(k_1) = \begin{pmatrix} \frac{\beta_4}{2\delta_2\beta_1} - \frac{\beta_2^2}{2\beta_3\beta k_1} & -\frac{\delta_2\beta_2}{2\beta_3\beta k_1} & -\frac{1}{2\beta_1} \\ -\frac{\delta_2\beta_2}{2\beta_3\beta k_1} & \frac{-\delta_2^2}{\beta_3\beta k_1} & 0 \\ -\frac{1}{2\beta_1} & 0 & \frac{\delta_2\beta_2}{2\beta_1\beta} \end{pmatrix},$$

con $\beta_1 = \delta_1 V_0$, $\beta_2 = b\delta_5 V_0 + 2\frac{\delta_6\delta_8}{\delta_9}$, $\beta_3 = 2\frac{\delta_6}{\delta_9}$, $\beta_4 = b\delta_2$ y $\beta = \beta_2\beta_4 - \beta_1\delta_2$.

La ecuación característica $\det(\mu I_3 - H(k_1)) = 0$ correspondiente a la matriz H es

$$a_1(k_1)\mu^3 + b_1(k_1)\mu^2 + c_1(k_1)\mu + d_1(k_1) = 0, \quad (4.25)$$

donde

$$\begin{aligned} a_1(k_1) &= 1, \\ b_1(k_1) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_2 - \delta_2^2}{\beta_3\beta k_1} - \frac{\beta_4}{\delta_2\beta_1} - \frac{\delta_2\beta_2}{\beta_1\beta} \right), \\ c_1(k_1) &= \frac{1}{4} \left[\frac{\delta_2^3\beta_2}{\beta_1\beta_3\beta^2 k_1} - \frac{\delta_2^2\beta_2^2}{\beta_3^2\beta^2 k_1^2} - \frac{1}{\beta_1^2} - \left(\frac{\delta_2\beta_2}{\beta_1\beta} + \frac{\delta_2^2}{\beta_3\beta k_1} \right) \left(\frac{\beta_2}{\beta_3\beta k_1} - \frac{\beta_4}{\delta_2\beta_1} \right) \right] \text{ y} \\ d_1(k_1) &= \frac{\delta_2^2}{4\beta_1\beta_3\beta k_1} \left(\frac{\delta_2\beta_2^3}{\beta_3\beta^2 k_1} + \frac{1}{2} - \frac{\beta_4\beta_2}{2\beta_1\beta} \right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Por ser la matriz $H(k_1)$ simétrica, entonces los 3 valores propios $\mu_1(k_1)$, $\mu_2(k_1)$ y $\mu_3(k_1)$ son reales y por ser $H(k_1)$ definida positiva éstos son positivos. Entonces se deben cumplir las condiciones siguientes:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \mu_j(k_1) &= -b_1(k_1) > 0 \Rightarrow b_1(k_1) < 0 \\ \mu_1(k_1)\mu_2(k_1)\mu_3(k_1) &= -d_1(k_1) > 0 \Rightarrow d_1(k_1) < 0 \\ \sum_{j=1}^3 \frac{1}{\mu_j(k_1)} &= -\frac{c_1(k_1)}{d_1(k_1)} > 0 \Rightarrow c_1(k_1) > 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

En virtud de las fórmulas de Cardano las 3 raíces de la ecuación característi-

4.4 Solución del problema de programación no lineal para $n = 3$ y $m = 1$ y reducción del problema de programación no lineal a un problema de intersección de conjuntos 102

ca (4.25) son reales si el discriminante $D(k_1) = q^2 + p^3$ es negativo, donde

$$q(k_1) = \frac{b_1^3}{27} - \frac{b_1 c_1}{6} + \frac{d_1}{2} \quad \text{y} \quad p(k_1) = \frac{c_1}{3} - \frac{b_1^2}{9}.$$

Nótese que $p(k_1)$ tiene que ser negativa para que $D(k_1)$ sea negativa. Sea $r = (\text{sign } q(k_1)) \sqrt{-p(k_1)}$, entonces

$$\begin{aligned} \mu_1(k_1) &= -2r \cos\left(\frac{\phi}{3}\right) - \frac{b_1}{3}, \\ \mu_2(k_1) &= 2r \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\phi}{3}\right) - \frac{b_1}{3}, \\ \mu_3(k_1) &= 2r \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\phi}{3}\right) - \frac{b_1}{3}, \end{aligned} \tag{4.28}$$

donde $\cos(\phi(k_1)) = q(k_1)/r^3(k_1)$. Dependiendo de los recursos del control $u_2(k_1)$, el conjunto Q_0 se puede elegir como un conjunto cerrado, acotado y convexo de números reales negativos k_1 tales que cumplan con las condiciones (4.27), además que el discriminante $D(k_1)$ sea negativo y que $-1 \leq q(k_1)/r^3(k_1) \leq 1$.

Considerando los valores de los parámetros físicos dados en la tabla de la sección 3.4. se determinó con ayuda de MATLAB el conjunto $Q_0 = [-150000, -68593.1426]$. Para toda $k_1 \in [-150000, -68953.1426]$, $q(k_1) < 0$, por lo tanto r es negativo, luego los valores propios (4.28) quedan como

$$\begin{aligned} \mu_1(k_1) &= 2r \cos\left(\frac{\phi}{3}\right) - \frac{b_1}{3}, \\ \mu_2(k_1) &= -2r \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\phi}{3}\right) - \frac{b_1}{3}, \\ \mu_3(k_1) &= -2r \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\phi}{3}\right) - \frac{b_1}{3}. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Se puede verificar que para toda $k_1 \in [-150000, -68593.1426]$ se tiene:

$$\begin{aligned} \text{si } (-6n + 5)\pi < \phi(k_1) < (-6n + 7)\pi, n \in \mathbb{Z} &\Rightarrow \mu_{\text{máx}}(k_1) = \mu_1, \\ \text{si } (6n - 3)\pi < \phi(k_1) < (6n - 1)\pi, n \in \mathbb{Z} &\Rightarrow \mu_{\text{máx}}(k_1) = \mu_2, \\ \text{si } (6n - 5)\pi < \phi(k_1) < (6n - 3)\pi, n \in \mathbb{Z} &\Rightarrow \mu_{\text{máx}}(k_1) = \mu_3(k_1). \end{aligned} \tag{4.30}$$

Para toda $k_1 \in [-150000, -68953.1426]$ se tiene $0.9975 \leq \cos \phi(k_1) \leq 1$, lo cual

4.4 Solución del problema de programación no lineal para $n = 3$ y $m = 1$ y reducción del problema de programación no lineal a un problema de intersección de conjuntos 103

implica que $\phi(k_1) \in [-\pi/48, -0.01] \cup [0.01, \pi/48]$. Como este conjunto está contenido en el intervalo $(-\pi, \pi)$ entonces el máximo de los valores propios es $\mu_1(k_1)$. Así

$$\mu_{\max}(k_1) = 2\sqrt{-p(k_1)} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{q(k_1)}{(-p(k_1))^{3/2}}\right)\right) - \frac{1}{3}b_1(k_1).$$

Graficando μ_{\max} en Q_0 se puede apreciar que es estrictamente creciente por lo que el mínimo lo alcanza en $k_1^0 = -150000$.

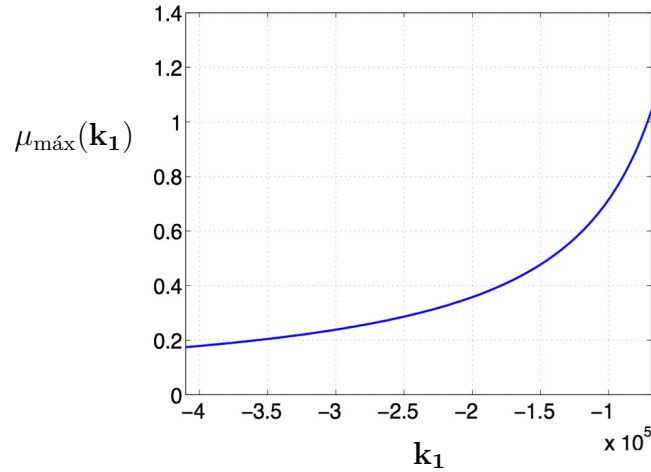


Figura 4.3: Gráfica del valor propio μ_{\max} .

Para toda $k_1 \in Q_0$ se tiene que $\mu_1(k_1) > \mu_2(k_1)$ y $\mu_1(k_1) > \mu_3(k_1)$, entonces el conjunto de índices activos consta de un sólo elemento $J(k_1^0) = \{1\}$ y los conjuntos Ω_i , $i = 1, 2, 3$ son

$$\Omega_1 = \left\{k_1 \in [-150000, -68953] : \mu_1(k_1) < \mu_1(k_1)\right\} \cup \left\{k_1^0\right\} = \left\{k_1^0\right\}$$

$$\Omega_2 = \left\{k_1 \in [-150000, -68953] : \mu_2(k_1) < \mu_1(k_1)\right\} \cup \left\{k_1^0\right\} = Q_0$$

$$\Omega_3 = \left\{k_1 \in [-150000, -68953] : \mu_3(k_1) < \mu_1(k_1)\right\} \cup \left\{k_1^0\right\} = Q_0.$$

Por lo tanto, la función $\mu_{\max}(k_1)$ alcanza su mínimo en el punto k_1^0 sobre

4.5 Aplicación del Tent Method para $1 < m \leq n$ y Solución para $m = n = 2$

$Q_0 = [-150000, -68593]$, si y sólo si, se cumple la siguiente intersección

$$Q_0 \cap \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3 = \{k_1^0\}.$$

4.5. Aplicación del Tent Method para $1 < m \leq n$ y Solución para $m = n = 2$

En esta sección se establece un problema de optimización minimax de estabilización robusta, cuando las perturbaciones iniciales están en una bola. Para resolver este problema se aplica el Tent Method de Boltyanski.

4.5.1. Planteamiento del problema

Considere el sistema dinámico controlable

$$\dot{x} = Ax + e_2 u_1; \tag{4.31}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y el control es

$$u_1 = k_1 x_1 + k_2 x_2.$$

El sistema en lazo cerrado es

$$\dot{x} = A_C(k_1, k_2)x, \tag{4.32}$$

Donde

$$A_C(k_1, k_2) = (A + e_2 k^T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}, \quad k^T = (k_1, k_2).$$

4.5 Aplicación del Tent Method para $1 < m \leq n$ y Solución para $m = n$ 105

El criterio para la calidad de la estabilización está dado por

$$\varphi_0(k_1, k_2) = \max_{|x(0)| \leq 1} \left(\int_0^\infty x_1^2(t) dt \right) \longrightarrow \min_{(k_1, k_2) \in Q_0}. \quad (4.33)$$

para las peores perturbaciones iniciales.

4.5.2. Reducción del problema extremal a un problema de programación no lineal

En esta sección se reduce el problema extremal (4.33) a un problema de programación no lineal.

La matriz A_C tiene la ecuación característica

$$p(\lambda) = \lambda^2 - k_2\lambda - k_1 = 0,$$

lo cual implica que

$$\lambda_{1,2} = \frac{k_2}{2} \pm \sqrt{\frac{k_2^2}{4} + k_1}.$$

Por el criterio de Hurwitz el sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable si $k_1 < 0$ y $k_2 < 0$. Ahora si se considera el factor de estabilidad como -0.1 , entonces $Re\lambda_{1,2} \leq -0.1$.

Si el discriminante $D = \frac{k_2^2}{4} + k_1$ es negativo, entonces $Re\lambda_{1,2} < -0.1 \Leftrightarrow \left(k_1 < -\frac{k_2^2}{4} \wedge k_2 \leq -\frac{2}{10} \right)$.

Si el discriminante $D = \frac{k_2^2}{4} + k_1$ no es negativo, entonces $Re\lambda_{1,2} < -0.1 \Leftrightarrow \left[k_1 \geq -\frac{k_2^2}{4} \wedge k_2 \geq \left(10k_1 - \frac{1}{10} \right) \right]$.

Por lo tanto, el conjunto de los parámetros del control u_1 están dados por:

$$Q = \left\{ (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(10k_1 - \frac{1}{10} \right) \leq k_2 \leq -\frac{2}{10}, k_1 < -\frac{1}{100} \right\}.$$

Para cada $k_1 < -\frac{1}{100}$ fijo se tiene un conjunto de los parámetros cerrado, acotado y convexo $Q_0 \subset Q$. (La elección de k_1 depende de los recursos disponibles del control).

4.5 Aplicación del Tent Method para $1 < m \leq n$ y Solución para $m = n$ 106

Considerando $k_1 = -2$ se obtiene el conjunto

$$Q_0 = \left\{ (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq k_1 \leq -\frac{1}{100}, \left(10k_1 - \frac{1}{10} \right) \leq k_2 \leq -\frac{2}{10} \right\}. \quad (4.34)$$

Tal conjunto es acotado, convexo y cerrado. Geométricamente el conjunto Q_0 es un triángulo con vértices en los puntos $(-0.01, -0.2)$, $(-2, -0.2)$, $(-2, -20.1)$ (ver la Figura 4.4).

Resolviendo la ecuación lineal algebraica de Lyapunov

$$A_C^T(k_1, k_2)H + HA_C(k_1, k_2) = -G_s, \quad (4.35)$$

donde

$$-G_s = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

se obtiene

$$H(k_1, k_2) = \frac{1}{2k_1k_2} \begin{pmatrix} k_2^2 - k_1 & -k_2 \\ -k_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

La ecuación característica correspondiente a H es

$$\mu^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{k_2^2 - k_1 + 1}{k_1k_2} \right) \mu - \frac{1}{4k_1k_2} = 0,$$

cuyos eigenvalores son

$$\mu_{1,2}(k) = \frac{1}{4k_1k_2} \left(k_2^2 - k_1 + 1 \pm \sqrt{(k_2^2 - k_1 + 1)^2 + 4k_1} \right).$$

Para todo punto $(k_1, k_2) \in Q_0$ $\mu_1 > \mu_2$, Por lo tanto $\mu_{max} = \mu_1$.

$$\mu_1(k_1, k_2) = \frac{1}{4k_1k_2} \left(k_2^2 - k_1 + 1 + \sqrt{(k_2^2 - k_1 + 1)^2 + 4k_1} \right).$$

Ahora se tiene el siguiente problema de programación no lineal

$$\mu_1(k_1, k_2) \longrightarrow \min_{(k_1, k_2) \in Q_0}$$

4.5 Aplicación del Tent Method para $1 < m \leq n$ y Solución para $m = n$ 107

Para resolverlo se aplicó el Teorema (4.1).

4.5.3. Aplicación del Tent Method de Boltyanski

Si $k^0 \in Q_0$ es tal que $\mu_1(k^0) \leq \mu_1(k)$ para cada $k \in Q_0$ y como $\mu_1 > \mu_2$ para cada $(k_1, k_2) \in Q_0$, entonces el conjunto de índices activos es

$$J(k^0) = \{j \in \{1, 2\} \mid \mu_j(k^0) = \mu_{max}(k^0)\} = \{1\}.$$

Así,

$$\Omega_1 = \{k \in Q_0 \mid \mu_1(k) < \mu_1(k^0)\} \cup \{k^0\} = \{k^0\}$$

$$\Omega_2 = \{k \in Q_0 \mid \mu_2(k) < \mu_1(k^0)\} = Q_0$$

El punto k^0 es un punto en el cual la función $\mu_1(k)$ alcanza su mínimo sobre Q_0 , si y sólo si,

$$Q_0 \cap \Omega_1 \cap \Omega_2 = \{k^0\}. \quad (4.36)$$

El teorema(4.1) se reduce en el siguiente teorema

Teorema 4.2. *Si k^0 es un punto donde de la función $\mu_1(k_1, k_2)$ alcanza su mínimo sobre el conjunto Q_0 , entonces existen un número no negativo $\lambda_1 \geq 0$ y un vector $b \in K_0^*$, tales que:*

i)

$$\lambda_1 + |b| \neq 0 \quad (4.37)$$

ii)

$$\lambda_1 \left(\frac{\partial \mu_1(k^0)}{\partial k_1}, \frac{\partial \mu_1(k^0)}{\partial k_2} \right)^T + b = 0. \quad (4.38)$$

Ahora se aplicará el teorema anterior para encontrar los puntos estacionarios sobre el conjunto Q_0 . Para ello dividimos el conjunto Q_0 en 7 partes como se muestra en la Figura 4.4 .

4.5 Aplicación del Tent Method para $1 < m \leq n$ y Solución para $m = n = 108$

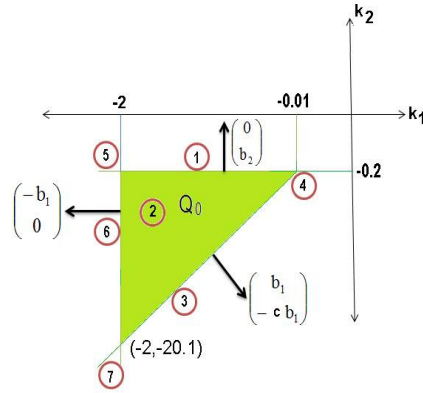


Figura 4.4: Conjunto de los parámetros de control Q_0 y 7 posiciones para la construcción del cono dual.

- Supóngase que el punto minimizador k^0 se encuentra en el segmento horizontal definido por $k_2 = -0.2$ y $-2 < k_1 < -0.01$. Para todo punto k^0 en este segmento un cono tent a Q_0 en el punto k^0 es el semi espacio $K^0 = \{(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 : k_2 \leq -0.2\}$ y, el cono dual a K^0 en k^0 es un rayo $K^* = \{(0, b_2) : b_2 > 0\}$. Así, la primer condición necesaria del Teorema (4.2) se cumple y la segunda condición necesaria (4.38) se cumple si $\frac{\partial \mu_1}{\partial k_1}(k^0) = 0$, donde

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial k_1} = \frac{-1}{k_1^2 k_2} \left(k_2^2 + 1 + \frac{(k_2^2 + 1)^2 - k_1(k_2^2 - 1)}{\sqrt{(k_2^2 - k_1 + 1)^2 + 4k_1}} \right).$$

Haciendo operaciones algebraicas se tiene que $\frac{\partial \mu_1}{\partial k_1}(k) = 0$, si y sólo si, $k_2 = 0$. Lo anterior no se cumple para algún punto del segmento, por lo tanto no hay puntos estacionarios en dicho segmento.

- Para cualquier punto k en el interior del conjunto Q_0 la condición necesaria

$$\frac{\partial \mu_1(k)}{\partial k_2} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mu_1(k)}{\partial k_1} = 0$$

tampoco se cumple. Por lo que en el interior de Q_0 no hay puntos estacionarios.

- Para ver si hay puntos estacionarios sobre la línea inclinada

4.5 Aplicación del Tent Method para $1 < m \leq n$ y Solución para $m = n$ 109

$k_2 = 10k_1 - 0.1$, $-2 < k_1 < -0.01$, se tiene que para todo punto k^0 en esta línea el cono tent a Q_0 en el punto k^0 es el semi espacio $K^0 = \{(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 : k_2 \geq 10k_1 - 0.1\}$ y, el cono dual a K^0 en k^0 es un rayo con pendiente $-1/10$, esto es, $K^* = \{(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 : b_1 > 0 \wedge b_2 = -\frac{1}{10}b_1\}$. Claramente la primer condición necesaria del teorema se cumple. La segunda condición del teorema se cumple, si y sólo si,

$$\frac{\partial \mu_1(k^0)}{\partial k_2} = -\frac{b_1}{\lambda_1} < 0, \quad \lambda_1 > 0.$$

Haciendo operaciones se tiene que $\frac{\partial \mu_1(k^0)}{\partial k_1} < 0$ si y sólo si $(k_2^0)^2 = -(k_1^0)^2$, $k_2 \neq 0$, por tricotomía esto es imposible. Por lo tanto no hay puntos estacionarios sobre la línea recta inclinada.

4. Para probar si el punto $(-0.01, -0.2)$ es estacionario se tiene que el cono tent a Q_0 en este punto es el conjunto $K^0 = \{(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 : 10k_1 - 0.1 \leq k_2 \leq -0.2\}$ y, el cono dual a K^0 en el punto $(-0.01, -0.2)$ es $K^* = \{(b_1, cb_1) \in \mathbb{R}^2 : b_1 \geq 0 \wedge -0.1 \leq c < \infty\}$. Así, si la condición (4.37) es verdadera, la condición necesaria (4.38) tiene la forma

$$-\frac{\lambda_1}{4k_1^2 k_2} \left(k_2^2 + 1 + \frac{(k_2^2 + 1)^2 - k_1(k_2^2 - 1)}{\sqrt{(k_2^2 - k_1 + 1)^2 + 4k_1}} \right) + b_1 = 0$$

$$\frac{\lambda_1}{4k_1 k_2^2} \left(k_2^2 + k_1 - 1 + \frac{k_2^4 - (k_1 + 1)^2}{\sqrt{(k_2^2 - k_1 + 1)^2 + 4k_1}} \right) + cb_1 = 0.$$

Suponiendo que $\lambda_1 > 0$ y sustituyendo $k_1 = -0.01$, $k_2 = -0.2$ en la primera igualdad nos lleva a que $b_1 = -0.0000104\lambda_1 < 0$. Si $\lambda_1 = 0$ entonces ambas condiciones del teorema 4.5.1 no se cumplen. Por lo tanto las condiciones necesarias del teorema no se cumplen en este punto. Luego el punto $(-0.01, -0.2)$ no es estacionario.

5. El cono tent a Q_0 en el punto $(-2, -0.2)$ es el conjunto $K^0 = \{(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 : k_1 \geq -2 \wedge k_2 \leq -0.2\}$ y, el cono dual a K^0 es el conjunto de vectores $K^* = \{(-b_1, cb_1) \in \mathbb{R}^2 : b_1 > 0 \wedge c > 0\}$. De la condición necesaria (4.38)

4.5 Aplicación del Tent Method para $1 < m \leq n$ y Solución para $m = n$ 110

se tiene que

$$c = -\frac{\frac{\partial \mu_1}{\partial k_2}(k^0)}{\frac{\partial \mu_1}{\partial k_1}(k^0)},$$

sustituyendo $k^0 = (-2, -0,2)$ se obtiene $c = -134,0849$. Esto significa que la condición (4.38) no se satisface. Por lo que el punto $(-2, -0,2)$ no es estacionario.

6. El cono tent a Q_0 en cualquier punto k^0 de la línea vertical $k_1 = -2$ para $-20,1 \leq k_2 \leq -0,2$ es el conjunto $K^0 = \{(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 : k_1 \geq -2 \wedge k_2 \leq -0,2\}$ y, el cono dual a K^0 es $K^* = \{(b_1, 0) \in \mathbb{R}^2 : b_1 < 0\}$. La condición necesaria (4.38) es verdadera en $k_2 = -\sqrt{1 + 2/\sqrt{3}}$. Por lo que el punto $\left(-2, -\sqrt{1 + 2/\sqrt{3}}\right)$ es estacionario.

7. El cono tent a Q_0 en el punto $(-2,-20,1)$ es el conjunto $K^0 = \{(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 : k_1 \geq -2 \wedge k_2 \geq 10k_1 - 0,1\}$ y, el cono dual a K^0 es el conjunto de vectores

$K^* = \left\{ (b_1, cb_1) : \left(b_1 > 0 \wedge c \in (-\infty, -0,1] \right) \vee \left(b_1 \leq 0 \wedge c \in (-\infty, 0] \right) \right\}$. De la condición necesaria (4.38) se tiene que

$$c = \frac{\frac{\partial \mu_1}{\partial k_2}(k^0)}{\frac{\partial \mu_1}{\partial k_1}(k^0)},$$

sustituyendo $k^0 = (-2, -20,1)$ se obtiene $c = -0,0985$. Esto significa que la condición (4.38) se satisface. Por lo que el punto $(-2, -20,1)$ es estacionario.

Por lo tanto los únicos puntos estacionarios son

$$k^0 = \left(-2, -\sqrt{1 + 2/\sqrt{3}} \right) \approx (-2, -1,47),$$

$$k^0 = (-2, -20,1)$$

los cuales se muestran en la Figura 4.5. Los valores de μ_1 en los puntos estacionarios son

$$\mu_1 \left(-2, -\sqrt{1 + 2/\sqrt{3}} \right) = 0,8059 \quad \text{y} \quad \mu_1(-2, -20,1) = 5,062.$$

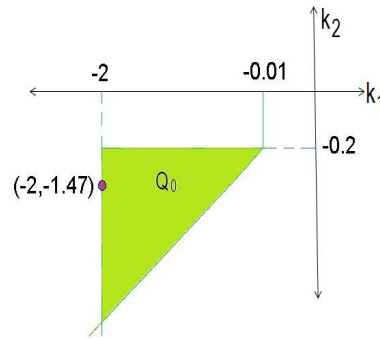


Figura 4.5: Punto estacionarios

Luego,

$$k^0 = \begin{pmatrix} -2 \\ -\sqrt{1 + 2/\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

es el vector de parámetros para el control u_1 . Los eigenvectores de la matriz

$$H(k^0) = \begin{pmatrix} 0,7076 & 0,25 \\ 0,25 & 0,1703 \end{pmatrix}$$

asociados al valor propio $\mu_1(k^0)$ son

$$x_1^0 = \begin{pmatrix} 0,366 \\ -0,9306 \end{pmatrix} \text{ y } x_2^0 = \begin{pmatrix} -0,9306 \\ -0,366 \end{pmatrix}$$

los cuales determinan las peores perturbaciones iniciales.

4.6. Cambio del criterio de desempeño

Veamos otro ejemplo donde se aplica el Tent Method. Consideremos el mismo sistema dinámico (4.31) y el mismo control $u_1 = k_1x_1 + k_2x_2$, pero ahora consideramos

el criterio para la calidad de la estabilización como

$$\varphi_0(k_1, k_2) = \max_{|x(0)| \leq 1} \left(\int_0^\infty x^T G_s(k_1, k_2) x dt \right) \longrightarrow \min_{(k_1, k_2) \in Q_0}. \quad (4.39)$$

para las peores perturbaciones iniciales, donde

$$G_s(k_1, k_2) = \begin{pmatrix} 1 + k_1^2 & k_1 k_2 \\ k_1 k_2 & 1 + k_2^2 \end{pmatrix}, \quad G = G^T, \quad G > 0.$$

4.7. Reducción del problema a uno de programación no lineal

El conjunto Q_0 es el mismo y la ecuación algebraica lineal de Lyapunov es

$$A_C^T(k_1, k_2)H + HA_C(k_1, k_2) = -G_s. \quad (4.40)$$

Resolviendo esta ecuación se tiene

$$H(k_1, k_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{k_2}{k_1} - \frac{k_1^2 - k_1 + 1}{k_2} & -\left(k_1 + \frac{1}{k_1}\right) \\ -\left(k_1 + \frac{1}{k_1}\right) & -\left(k_2 + \frac{1}{k_2}\right) + \frac{1}{k_2} \left(k_1 + \frac{1}{k_1}\right) \end{pmatrix}.$$

La ecuación característica correspondiente a H es

$$\mu^2 - (h_{11} + h_{22})\mu + h_{11}h_{22} - h_{12}^2 = 0.$$

Los valores propios correspondientes a H son

$$\mu(k_1, k_2) = \frac{h_{11} + h_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(h_{11} - h_{22})^2}{4} + h_{12}^2}.$$

Claramente $\mu_1 > \mu_2$, para toda $k \in Q_0$, entonces $\mu_{\text{máx}} = \mu_1$.

$$\mu_1(k_1, k_2) = \frac{(1 - k_1)(k_2^2 + k_1^2 - k_1 + 1)}{4k_1k_2} + q \quad (4.41)$$

donde

$$q = \sqrt{\frac{(1 + k_1)^2(k_2^2 - k_1^2 + k_1 - 1)^2}{16k_1^2k_2^2} + \frac{(k_1 + \frac{1}{k_1})^2}{4}}.$$

Ahora se tiene el siguiente problema de programación no lineal

$$\mu_1(k_1, k_2) \longrightarrow \min_{(k_1, k_2) \in Q_0}$$

Para resolver este problema se aplica el teorema (4.2).

4.8. Aplicación del Tent Method de Boltyanski

Igual que antes analicemos los 7 posibles casos donde se puede encontrar el punto k^0 donde μ_1 alcanza el mínimo.

1. En este ejemplo iniciamos suponiendo que el punto k^0 se encuentra en el interior del conjunto Q_0 , luego un cono tent a Q_0 en cualquier punto interior de Q_0 es todo \mathbb{R}^2 y, el cono dual a \mathbb{R}^2 consta solamente del vector $b = (0, 0)$. Luego, de la primera condición del teorema (4.2) $\lambda_1 > 0$. Como estamos suponiendo que k^0 está en el interior de Q_0 , entonces

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial k_1}(k^0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mu_1}{\partial k_2}(k^0) = 0.$$

Calculando primero la derivada parcial de μ_1 respecto a k_2 se tiene

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial k_2}(k_1, k_2) = \frac{k_2^2 - k_1^2 + k_1 - 1}{4k_1k_2^2} \nu(k_1, k_2), \quad (4.42)$$

donde

$$\nu(k_1, k_2) = \left(1 - k_1 + \frac{(1 + k_1)^2(k_2^2 + k_1^2 - k_1 + 1)}{\sqrt{(1 + k_1)^2(k_2^2 - k_1^2 + k_1 - 1)^2 + 4k_2^2(k_1^2 + 1)^2}} \right).$$

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial k_2}(k_1, k_2) = 0 \iff \left(\frac{k_2^2 - k_1^2 + k_1 - 1}{4k_1 k_2^2} = 0 \right) \vee (\nu = 0).$$

Como el sistema en lazo cerrado (4.32) es estable asintóticamente entonces, por Hurwitz $k_1 < 0$ y $k_2 < 0$. Se puede ver fácilmente que para todo punto k en el tercer cuadrante $\nu(k)$ es positiva. Así

$$\frac{k_2^2 - k_1^2 + k_1 - 1}{4k_1 k_2^2} = 0,$$

lo cual implica que

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial k_2}(k_1, k_2) = 0 \text{ sobre la hipérbola } k_2^2 - k_1^2 + k_1 - 1 = 0. \quad (4.43)$$

Note que la rama inferior izquierda de esta hipérbola corta en dos partes al tercer cuadrante. Para cualquier punto k por abajo de esta rama se tiene que $\frac{\partial \mu_1}{\partial k_2}(k_1, k_2) < 0$ y para cualquier punto por arriba $\frac{\partial \mu_1}{\partial k_2}(k_1, k_2) > 0$. Esto es, la curva $k_2 = -\sqrt{k_1^2 - k_1 + 1}$ es la curva de los valores mínimos de $\mu_1(k_1, k_2)$ en Q_0 para cualquier k_1 fijo.

Ahora calculando la derivada parcial de $\mu_1(k_1, k_1)$ respecto a k_1 asumiendo que $k_2 = -\sqrt{k_1^2 - k_1 + 1}$ el resultado es

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial k_1} \left(k_1, -\sqrt{k_1^2 - k_1 + 1} \right) = \frac{k_1 + 1}{2k_1^2} \left[\frac{2k_1^2 - 3k_1 + 2}{2\sqrt{k_1^2 - k_1 + 1}} - k_1 + 1 \right].$$

La expresión entre corchetes es siempre positiva en la región $k_1 < 0$, por lo que $\frac{\partial \mu_1}{\partial k_1} \left(k_1, -\sqrt{k_1^2 - k_1 + 1} \right) = 0$ en esta región en el único punto $k_1 = -1$. Como en la región $k_1 > -1$ la derivada es positiva y en $k_1 < -1$ la derivada es negativa, entonces $k_1 = -1$ es el punto mínimo en el subconjunto de puntos interiores del

conjunto Q_0 . Así que se tiene como resultado que el único punto interior extremo para $\mu_1(k_1, k_2)$ es

$$k_1 = -1 \quad \text{y} \quad k_2 = -\sqrt{k_1^2 - k_1 + 1} = -\sqrt{3}.$$

2. Ahora supóngase que el punto minimizador k^0 se encuentra en el segmento horizontal definido por $k_2 = -0.2$ y $-2 < k_1 < -0.01$. Para todo punto k^0 en este segmento un cono tent a Q_0 en el punto k^0 es el semiespacio $K^0 = \{(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 : k_2 \leq -0.2\}$ y, el cono dual a K^0 en k^0 es un rayo $K^* = \{(0, b_2) : b_2 > 0\}$. Así, la primer condición necesaria del Teorema (4.2) se cumple y la segunda condición necesaria (4.38) se cumple si $\frac{\partial \mu_1}{\partial k_2}(k^0) = \frac{-b_2}{\lambda_1} < 0$, $b_2 > 0$. Pero $\frac{\partial \mu_1}{\partial k_2}(k^0) < 0$, sólo si, k^0 está por abajo de la rama inferior izquierda de la hipérbola (4.43). Como todos puntos de la recta horizontal están por arriba de esta rama, entonces no hay puntos estacionarios sobre la recta considerada.
3. El cono tent a Q_0 en cualquier punto k^0 de la línea vertical $k_1 = -2$ para $-20.1 \leq k_2 \leq -0.2$ es el conjunto $K^0 = \{(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 : k_1 \geq -2 \wedge k_2 \leq -0.2\}$ y, el cono dual a K^0 es $K^* = \{(b_1, 0) \in \mathbb{R}^2 : b_1 < 0\}$. Así la condición necesaria (4.38) es verdadera si $\frac{\partial \mu_1}{\partial k_1}(k^0) > 0$ y $\frac{\partial \mu_1}{\partial k_2}(k^0) = 0$. Del punto 1 se tiene que $\frac{\partial \mu_1}{\partial k_2}(k^0) = 0$ si $k_2 = -\sqrt{k_1^2 - k_1 + 1}$ y $\frac{\partial \mu_1}{\partial k_2}(k_1, -\sqrt{k_1^2 - k_1 + 1}) > 0$ si $k_1 > -1$. En esta recta $k_1 = -2$, entonces no hay puntos estacionarios sobre tal recta.
4. Para ver si hay puntos estacionarios sobre la línea recta $k_2 = 10k_1 - 0.1$, $-2 < k_1 < -0.01$, se tiene que el vector dual para cualquier k^0 en esta línea recta es un rayo con pendiente $-1/10$, esto es, $K^* = \{(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 : b_1 > 0 \wedge b_2 = -\frac{1}{10}b_1\}$. Claramente la primer condición necesaria del teorema se cumple. La segunda condición del teorema se cumple, si y sólo si,

$$\frac{\partial \mu_1(k^0)}{\partial k_1} = -\frac{b_1}{\lambda_1} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mu_1(k^0)}{\partial k_2} = \frac{b_1}{10\lambda_1}, \quad \lambda_1 > 0.$$

Así

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial k_1}(k^0) = -10 \frac{\partial \mu_1}{\partial k_2}(k^0).$$

Si $\frac{\partial \mu_1}{\partial k_2}(k^0) > 0$, entonces $\frac{\partial \mu_1}{\partial k_1}(k^0)$ debe ser negativa. La derivada parcial de μ_1 respecto a k_2 es positiva cuando k^0 está por arriba de la rama inferior izquierda de la hipérbola y $k_2^0 = 10k_1^0 - 0.1$. El punto de intersección de la recta inclinada y la rama inferior izquierda de la hipérbola es $(-0.095, -1.0508)$, entonces $-0.095 < k_1^0 < -0.01$. Pero resulta que cuando se sustituye $k_2^0 = 10k_1^0 - 0.1$ en $\frac{\partial \mu_1}{\partial k_1}(k^0)$, ésta es negativa para $k_1^0 < -1.78$. Por lo tanto no hay puntos estacionarios sobre la recta inclinada.

5. Para probar si el punto $(-0,01, -0,2)$ es estacionario se tiene que el cono tent a Q_0 en este punto es el conjunto $K^0 = \{(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 : 10k_1 - 0,1 \leq k_2 \leq -0,2\}$ y, el cono dual a K^0 en el punto $(-0,01, -0,2)$ es $K^* = \{(b_1, cb_1) \in \mathbb{R}^2 : b_1 \geq 0 \wedge -0,1 \leq c < \infty\}$. Así, si la condición (4.37) es verdadera, de la condición necesaria (4.38) se tiene que

$$c = -\frac{\frac{\partial \mu_1}{\partial k_2}(k^0)}{\frac{\partial \mu_1}{\partial k_1}(k^0)}$$

Suponiendo que $\lambda_1 > 0$ y sustituyendo $k_1 = -0,01$, $k_2 = -0,2$ en el cociente de las parciales, con ayuda de MaTlab, se llega a que $c = -0.0466$. Luego el punto $(-0.01, -0.2)$ es estacionario.

6. El cono tent a Q_0 en el punto $(-2, -0.2)$ es el conjunto $K^0 = \{(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 : k_1 \geq -2 \wedge k_2 \leq -0,2\}$ y, el cono dual a K^0 es el conjunto de vectores $K^* = \{(-b_1, cb_1) \in \mathbb{R}^2 : b_1 > 0 \wedge c > 0\}$. De la condición necesaria (4.38) se tiene que

$$c = -\frac{\frac{\partial \mu_1}{\partial k_2}(k^0)}{\frac{\partial \mu_1}{\partial k_1}(k^0)},$$

sustituyendo $k^0 = (-2, -0,2)$ se obtiene $c = -8.2691$. Esto significa que la condición (4.38) no se satisface. Por lo que el punto $(-2, -0,2)$ no es estacionario.

7. El cono tent a Q_0 en el punto $(-2,-20.1)$ es el conjunto $K^0 = \{(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 : k_1 \geq -2 \wedge k_2 \geq 10k_1 - 0,1\}$ y, el cono dual a K^0 es el conjunto de vectores

$K^* = \left\{ (b_1, cb_1) : \left(b_1 > 0 \wedge c \in (-\infty, -0,1] \right) \vee \left(b_1 \leq 0 \wedge c \in (-\infty, 0] \right) \right\}$. De la condición necesaria (4.38) se tiene que

$$c = \frac{\frac{\partial \mu_1}{\partial k_2}(k^0)}{\frac{\partial \mu_1}{\partial k_1}(k^0)},$$

sustituyendo $k^0 = (-2, -20,1)$ se obtiene $c = 8,2691$. Esto significa que la condición (4.38) no se satisface. Por lo que el punto $(-2, -20,1)$ no es estacionario.

Por lo tanto los únicos puntos estacionarios son

$$k^0 = (-0,01, -0,2) \quad \text{y} \quad k^0 = (-1, -\sqrt{3}).$$

Los valores de μ_1 en los puntos estacionarios son

$$\mu_1(-0,01 - 0,2) = 262,6231 \quad \text{y} \quad \mu_1(-1, -\sqrt{3}) = \sqrt{3} + 1 \approx 2,7321.$$

Luego $k^0 = (-1, -\sqrt{3})$ es el vector de parámetros para el control u_1 . Los eigenvectores de la matriz

$$H(k^0) = \begin{pmatrix} 1,7321 & 1 \\ & 1 & 1,7321 \end{pmatrix}$$

asociados al valor propio $\mu_1(k^0)$ son

$$x_1^0 = \begin{pmatrix} -0,7071 \\ 0,7071 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad x_2^0 = \begin{pmatrix} 0,7071 \\ 0,7071 \end{pmatrix}$$

los cuales determinan las peores perturbaciones iniciales.

Capítulo 5

Conclusiones

Se presentan los resultados más importantes de esta tesis, en el orden según los capítulos.

1. Se construyeron los modelos matemáticos de un robot móvil con dos ruedas activas, considerando a dicho robot como un sistema controlable no holónimo. Los modelos construidos son:
 - i) Modelo cinemático (2.1). Para la construcción de este modelo no se consideraron las fuerzas reactivas que intervienen en el robot móvil.
 - ii) Modelo dinámico (2.33) que es un sistema de 5 ecuaciones no lineales de primer orden. Para la construcción de este modelo se usó el método de Lagrange considerando la condición de rodadura como restricción no holónoma.
 - iii) Modelo no lineal (2.38) que es un sistema de 7 ecuaciones no lineales de primer orden. Para la construcción de este modelo se le anexó al modelo dinámico el modelo electromecánico de los motores de corriente directa. Cabe mencionar que la inclusión del modelo electromecánico no se encuentra en la bibliografía; es uno de los aportes de esta tesis ya que es muy importante para la práctica.
 - iv) Modelo dinámico simplificado (2.42) es un sistema de 5 ecuaciones de primer orden con dos controles \bar{u}_1 y \bar{u}_2 . Este modelo es una aproximación del modelo

anterior, para la aproximación se usó el teorema de Tikhonov relativo a los sistemas que tienen un parámetro pequeño en la parte izquierda.

2. Se resolvió el problema de la construcción de las trayectorias extremales usando el Principio del Máximo y de las condiciones necesarias del Kelly para el modelo cinemático (2.1).
3. Se consideró a la línea recta como la trayectoria deseada, con esta consideración:
 - i) Se determinaron las ecuaciones lineales en desviaciones.
 - ii) Se analizó la controlabilidad, la observabilidad y la estabilizabilidad.
 - iii) Se determinó el control óptimo para la estabilización del movimiento por la línea recta, usando la programación dinámica de Bellman como herramienta de síntesis. Se uso a

$$\varphi = \int_{t_0}^{t_1} [x^T(t)Mx(t) + \Delta u^T(t)N\Delta u(t)] dt \quad (5.1)$$

como la calidad de la estabilización, donde M es una matriz simétrica definida no negartiva y N es una matriz simétrica definida positiva

- iv) Se hizo una simulación en Matlab del proceso de la estabilización
4. Se aplicó el Tent-Method geométrico de Boltianski para obtener las condiciones necesarias del algoritmo de estabilización de minimax, cuando las matrices M y N en la calidad de la estabilización (5.1) no son definidas positivas.

Se pueden usar estas condiciones necesarias cuando hay diferentes restricciones, por lo que se puede afirmar que tales condiciones necesarias es una ampliación del teorema de Fermat del año 1543 sobre las condiciones necesarias para buscar el punto mínimo en un problema extremal sin restricciones.

Lo anterior es el principal aporte de esta tesis.

Referencias

- [1] Agrachev A., Yu. L. Sachkov. (2002). *Control Theory from the Geometric Viewpoint*. SISSA.
- [2] Alexandrov V., Bugrov D., Corona G. and Tikhonova K. (2015). *Tent-method application for minmax stabilization and maxmin testing*. IMA Journal of Mathematical Control and Information, doi: 10.1093/imamci/dnv028. First published online: June 24, 2015.
- [3] Alexandrov V., Corona G. and Gutiérrez J. E. M., (2012). *Dynamic Model a Mobile Robot with Two Active Wheels and the Design an Optimal Control for Stabilization*. Electronics, Robotics and Automotive Mechanics Conference(CERMA), IEEE Ninth, doi: 10.1109/CERMA.2012.42.
- [4] Alexandrov V., Corona G. and Gutiérrez J. E. M., (2014). *Application of Boltyanski's geometric method for the robust stabilization of controllable systems*. APPOT. (Artículo aceptado).
- [5] Alexandrov V., Yu. V. Bolotin, S.S. Lemak, N.A. Parusnikov, S.I. Zlochevsky, W.F. Guerrero S. (2009). *Introduction to Control of Dynamic Systems*. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Dirección de Fomento Editorial, México-Moscú.
- [6] Alexandrov V., S. I. Zlochevskii, S. S. Lemak, N. A. Parushnikov, R. Reyes Sánchez, H. Salazar Ibarguen, I. Romero Medina (2000). *Introducción a la Modelación Matemática de Sistemas Controlables*. Teoría de Sistemas Dinámicos Controlables. Universidad Autónoma de Puebla.
- [7] Athans M. (1971). *Special Issue on Linear-Quadratic-Gaussian Control*. IEEE Trans. Automat. Contr., 16(6).

-
- [8] Boltyanski, V. G.(1975), *The tent method in the theory of extremal problems*, Usp. Mat. Nauk 30, 3-65 (in Russian).
- [9] Boltyanski, V. G. (1985), *Separation of a system of convex cones in a topological vector space*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 283(5), 1044-1047 (in Russian).
- [10] Boltyanski, V. G.(1986), *The method of tents in topological vector spaces*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 289(5), 1036-1039 (in Russian).
- [11] Boltyanski, V.G., and Poznyak, A.G. (1999a), *Robust maximum principle for minimax Bolza problem with terminal set*, in Proceedings of IFAC-99, Vol. F (2d-06), Beijing, China, pp. 263-268.
- [12] Boltyanski, V., and Poznyak, A. (1999b), *Robust maximum principle in minimax control*, Int. J. Control 72(4), 305-314.
- [13] Boltyanski V.G., Poznyak A.S. *The Robust Maximum Principle. Theory and Applications*. Birkhauser. (2012). Cap. 6, págs. 131-137.
- [14] Boltyanski V. G, Martini H., Soltan V. *Geometric Methods and Optimization Problems*. Springer-Science+Business Media, B.V. Volumen 4. 1999, págs. 15-17.
- [15] Cruz J. B. (1971). *Feedback Systems*. McGraw Hill, New York, NY.
- [16] Cortés Monforte Jorge. *Geometric, Control and Numerical Aspects of Nonholonomic Systems*. Lecture Notes in Mathematics. Springer. 2002. Cap. 3, págs. 43-45.
- [17] Cushman Richard H., Jdrzej S & Hans Duistermaat *Geométrie of Nonholonomically Constrained Systems*. Advanced Deries in Nonlinear Dynamics. Vol 26. World Scientific. 2010.
- [18] Dorato P. and Drenick R. F. (1966). *Optimality, insensitivity, and game theory*. In L. Radanovie. *Sensitivity Method in Control Theory*. Pergamon Press, New York, NY.
- [19] Dorato P. (1987). *Robust Control*. IEEE Pres, New York, NY.

-
- [20] Dubovitski, A., and Milyutin, A., *Extremum problems with constraints*, Dokl. Akad. (1963) Nauk SSSR 149(4), 759-762 (in Russian).
- [21] Francis C. Moon (1998). *Applied Dynamics With Applications to Multibody and Mechatronic Systems*
- [22] Frank P.M. (1978). *Introduction to System Sensitivity Theory*. Academic Press, New York.
- [23] Hemami A. and Mehrabi M. G. and Cheng R. M. H. (1992). Synthesis of an Optimal Control Law for Path Tracking in Mobile Robots. *Automatica*, **Vol. 28**, No. 2, págs. 383-387.
- [24] Igor V. Novozhilov (1997) *Fractional Analysis Methods of Motion Decomposition*. Birkhäuser, Cap. 4, págs. 89-92.
- [25] J. Sussmann Héctor and Guoqing Tang. *Shortest Paths for the Reeds-Shepp Car: A Worked Out Example of the Use of Geometric Techniques in Nonlinear Optimal Control*. Report SYCON 91-10, Rutgers University, 1991.
- [26] Landau L. D. & Lifshitz. *Mecánica*. 2^a ed, Vol. 1. Ed Reverté, S. A., 1994.
- [27] M. Davis John, A. Gravagne Ian, J. Jackson Billy, J. Marks II Robert. *Controllability, Observeability, Realizability, and Stability of Dynamic Linear Systems*. Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2009 (2009), No. 37, pp. 1-32. ISSN: 1072-6691.
- [28] Milliken Paul, Marsh Clive and Van Brunt Bruce . (April 1999). *Minimax controller desing for a class of uncertain linear system*. Institute of Fundamental Sciences College of Science, Massey University, Palmerston North, New Zealand.
- [29] Pontryagin L. S. *Ordinary differential equations*. Moscow: Science Publishing, 1968.
- [30] Pontryagin L. S., V.G. Boltyanski, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenk, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. (Recipients of the 1962 Lenin Prize for Science and Tecnology). Intersciencie, USA 1962.

-
- [31] Salmon D.M. (1968). *Minimax controller design*. IEEE Trans. Automat. Contr., 13(4):369-376.
- [32] Witsenhausen H.S. February (1968). *A minimax control problem for sampled linear systems*. IEEE Trans. Automat Contr., AC-13:5-21.