BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ENTRENAMIENTO METACOGNITIVO PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y LA ADQUISICIÓN DE CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS, CENTRADO EN LA COORDINACIÓN DE VALORES

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MAESTRA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA
ING. DIANA ALEJANDRA LÓPEZ RUIZ

DIRECTOR DE TESIS
DR. ALFONSO DÍAZ FURLONG

CODIRECTORA DE TESIS
MTRA. IRMA ELIBETH RUGERIO LÓPEZ

PUEBLA, PUE. FEBRERO, 2025

Dr. Severino Muñoz Aguirre
Secretario de Investigación y Estudios de Posgrado
P R E S E N T E

Por este medio le informo que la C:

ING. DIANA ALEJANDRA LÓPEZ RUIZ

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 04 de noviembre de 2024, con la tesis titulada:

"ENTRENAMIENTO METACOGNITIVO PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y LA ADQUISICIÓN DE CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS, CENTRADO EN LA COORDINACIÓN DE VALORES"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A t e n t a m e n t e
H. Puebla de Z., 06 de febrero de 2025

Dra. Estela de Lourdes Juárez Ruiz
Coordinadora de la Maestría en Educación Matemática.

EDLJR / agm

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 Sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Agradecimiento al CONAHCyT

Con profunda gratitud y genuina felicidad, agradezco al CONAHCyT por el apoyo brindado, que me permitió cursar mis estudios de maestría de manera plena. A lo largo de mi trayectoria en el posgrado, descubrí que la investigación es un proceso continuo que se perfecciona con el tiempo, construido sobre los obstáculos superados, los errores cometidos al inicio, y, sobre todo, el aprendizaje que surge de ellos. Comprendí que la investigación no siempre da frutos en el primer intento, pero hoy me siento agradecida por haber aprendido esto, y nada de ello habría sido posible sin el respaldo de esta valiosa institución.

Gracias al CONAHCyT, pude cursar una maestría en educación matemática, lo que me ha dejado aprendizajes invaluables que difícilmente se adquieren fuera del posgrado. Hoy cuento con herramientas para aplicar en el aula, un entusiasmo renovado por la investigación, y el deseo constante de mejorar para contribuir a mejores resultados educativos en México. Además, me llevo amigos entrañables y profesores que admiro profundamente. A través de esta experiencia, descubrí la noble y hermosa labor que es la investigación.

Agradecimientos

Esta sección tan especial se la dedico efusivamente a mi eterno acompañante, Julián, quien se puso el traje de Spiderman e innumerables veces dijo: "hagamos esto una vez más...". Me emociona tanto poder dedicar un trabajo del que me siento orgullosa a la persona que me reconstruyó con tanto cuidado y dedicación. Gracias, Julián, por tu alegría, tu energía inagotable, tu ejemplo, tu entrega y tu compañía. Por todas las veces que estuve abajo y moviste la rueda para elevarme; por todas las veces que perdí el rumbo y creaste la brújula para guiarme; y por cada vez que valoraste mi esfuerzo con el tuyo propio. Desde mi paz, que es lo más valioso para mí, te agradezco con una sonrisa.

Te agradezco, mi Susanita hermosa, por ser una hija tan comprensiva y siempre alentadora. ¡Qué cartas tan hermosas me has escrito para darme ánimos! Me encanta el rol de mamá trabajadora que me asignas, y te doy las gracias por respetarlo. Mi objetivo es ser amorosa conmigo misma para poder ser amor contigo. Lo que más deseo es que tu camino esté lleno de sabiduría y amor.

Agradezco también a mi asesor, Alfonso Díaz Furlong, por su paciencia y cautela. Siempre fiel a sus estudiantes, nunca deja que te vayas sin una sonrisa o un aprendizaje. Mi admiración total hacia su inagotable sed de conocimiento.

Agradezco a todos aquellos que compartieron un pedacito de esta maestría conmigo: mi hermana Itzel, mi mamá Taimi, mi abuelita Jose, mi compadre Uli, mi amigo Diego, y el inigualable Paquito.

Me llevo en el corazón a mis compañeros de generación, enviándoles un alegre "¡Pura Vida!" a Uli, Ivonne, Eli, Ángel y Vale. Disfruté enormemente las risas y las prisas con mucho cariño.

Y, por último, pero sin duda no menos importante, dedico un aplauso y un reconocimiento a todos los docentes investigadores del Posgrado en Educación Matemática de la BUAP, quienes hacen posible que la investigación en este campo sea tan enriquecedora. ¡Muchas gracias!

Índice

Agradecimiento al CONAHCyT II

Agradecimientos III

Resumen de la tesis VIII

Abstract IX

Introducción 1

Capítulo 1. Aspectos generales 3

- Antecedentes del problema 3
- Planteamiento del problema 4
- Pregunta general de investigación 5
- Objetivo general de investigación 5
- Hipótesis 5
- Justificación 5

Capítulo 2. Marco conceptual 7

- Metacognición y sus componentes 7
- Metacognición en la adquisición de conocimientos y la resolución de problemas 13
  - Adquisición de conocimientos 14
  - Resolución de problemas 15
- Indicaciones metacognitivas 16
- Coordinación de valores 17

Capítulo 3. Método 20

- Diseño de la investigación 20
- Participantes 20
- Instrumentos de recolección de datos 21
  - Inventario de conciencia metacognitiva 21
  - Prueba de coordinación de valores 22
  - Guías metacognitivas para la adquisición de conocimientos y la resolución de problemas 26
- Procedimiento 26
  - Fase 1: Resolución de problemas matemáticos 27
  - Fase 2: Adquisición de conocimientos 31
- Análisis de datos 36

Consideraciones éticas....37
Capítulo 4. Resultados....38
Descripción de la muestra....38
Pruebas paramétricas y no paramétricas....39
Inventario de Conciencia Metacognitiva (MAI)....39
Prueba de coordinación de valores....40
Resultados adicionales....42
Capítulo 5. Discusión y conclusiones....45
Discusión....45
Conclusiones....48
Referencias....49
ANEXOS....57
ANEXO 1. Inventario de Conciencia Metacognitiva (Schraw y Dennison, 1994b)....57
ANEXO 2. Prueba de coordinación de valores....59
ANEXO 3. Guías metacognitivas....64
Guía para la resolución de problemas matemáticos....64
Guía para la adquisición de conocimientos matemáticos....66

Índice de tablas

Tabla 1. Componentes de la metacognición....8
Tabla 2. Niveles de Razonamiento Covariacional....17
Tabla 3. Características generales del grupo experimental y de control....20
Tabla 4. Análisis sobre los problemas del área cambio y relaciones de PISA....22
Tabla 5. Nivel de razonamiento covariacional de las preguntas de la prueba....25
Tabla 6. Diapositivas e indicaciones metacognitivas durante la primera clase....31
Tabla 7. Datos estadísticos iniciales....38
Tabla 8. Pruebas para determinar normalidad en el MAI....39
Tabla 9. Comparativa del pretest y postest del MAI....40
Tabla 10. Pruebas para determinar normalidad en la prueba de coordinación de valores....41
Tabla 11. Comparativa del pretest y postest de la prueba de coordinación de valores....41

Índice de figuras

Figura 1. Primer bloque de la guía de resolución de problemas 27
Figura 2. Estrategias metacognitivas propuestas para el primer bloque 28
Figura 3. Segundo bloque de la guía de resolución de problemas 28
Figura 4. Estrategias metacognitivas propuestas para el segundo bloque 29
Figura 5. Tercer bloque de la guía de resolución de problemas 30
Figura 6. Problema 7 de la fase 1 30
Figura 7. Primer bloque de la guía de adquisición de conocimientos 35
Figura 8. Estrategias metacognitivas propuestas para el primer bloque 35
Figura 9. Segundo bloque de la guía de adquisición de conocimientos 36
Figura 10. Resolución del estudiante E1 del problema 3 42
Figura 11. Resolución del estudiante E2 del problema 9 43
Figura 12. Estrategias utilizadas en las pausas del estudiante E3 44

Resumen de la tesis

Esta investigación tuvo como objetivo analizar el impacto de las estrategias metacognitivas en la adquisición de conocimientos y la resolución de problemas matemáticos en estudiantes de nivel medio superior, con un enfoque específico en la coordinación de valores, parte del razonamiento covariacional. Se empleó una metodología cuasiexperimental de enfoque cuantitativo, con un grupo experimental y un grupo de control, seleccionados de un bachillerato en Coronango, Puebla. El grupo experimental utilizó guías metacognitivas diseñadas para fomentar la reflexión, el monitoreo y la aplicación de estrategias en el aprendizaje y la resolución de problemas, mientras que el grupo de control trabajó sin estas guías.

Las guías, diseñadas a partir de los componentes de la metacognición de Schraw y Dennison (1994a), fueron elaboradas para fomentar la reflexión continua, el monitoreo del proceso de aprendizaje y la aplicación de estrategias adecuadas en cada etapa. La intervención se desarrolló en tres fases: pretest, intervención y postest. Durante la evaluación inicial y final, se aplicó una prueba de 11 ítems adaptada de problemas de PISA para medir el nivel de coordinación de valores, y se utilizó el Inventario de Conciencia Metacognitiva (MAI) para evaluar el nivel de metacognición del estudiantado. Posteriormente, se llevó a cabo la intervención con el grupo experimental, donde las y los estudiantes trabajaron con dos guías: una enfocada en la resolución de problemas matemáticos y otra en la adquisición de conocimientos. El grupo de control no tuvo acceso a las guías, pero resolvió los mismos problemas y recibió las mismas clases.

El análisis estadístico, mediante la prueba U de Mann-Whitney, arrojó una significancia de 0.036, lo que permitió rechazar la hipótesis nula y confirmar un impacto positivo de las estrategias metacognitivas tanto en la adquisición de conocimientos como en la resolución de problemas. Los resultados del MAI también mostraron una mejora significativa en la metacognición del grupo experimental, evidenciando que las guías facilitaron la automatización de estrategias y la capacidad del estudiantado para reflexionar sobre su propio aprendizaje.

Abstract

This research aimed to analyze the impact of metacognitive strategies on knowledge acquisition and mathematical problem-solving in high school students, with a specific focus on value coordination, a key aspect of covariational reasoning. A quasi-experimental quantitative approach was used, involving an experimental group and a control group from a high school in Coronango, Puebla. The experimental group used metacognitive guides designed to encourage reflection, monitoring, and strategy application during learning and problem-solving, while the control group worked without these guides.

The guides, based on the components of metacognition proposed by Schraw and Dennison (1994a), were developed to promote continuous reflection, learning process monitoring, and the use of appropriate strategies at each stage. The intervention was divided into three phases: pretest, intervention, and postest. During both the initial and final evaluations, an 11-item test adapted from PISA problems was applied to measure value coordination, and the Metacognitive Awareness Inventory (MAI) was used to assess students' metacognitive levels. The experimental group worked with two guides: one focused on problem-solving and the other on knowledge acquisition, while the control group solved the same problems and attended the same classes without using the guides.

Statistical analysis using the Mann-Whitney U test revealed a significance level of 0.036, allowing for the rejection of the null hypothesis and confirming a positive impact of metacognitive strategies on both knowledge acquisition and problem-solving. The MAI results also showed a significant improvement in metacognition within the experimental group, indicating that the guides helped students automate strategies and enhance their ability to reflect on their learning process.

Introducción

La competencia matemática se define como la capacidad de los individuos para formular, aplicar e interpretar conceptos matemáticos en diversos contextos, lo que implica un razonamiento matemático eficaz y la habilidad para resolver problemas en una variedad de situaciones del siglo XXI (Organisation for Economic Cooperation and Development [OECD], 2023a). Aprender matemáticas es esencial para cultivar un pensamiento sistemático que permita abordar y resolver problemas de manera efectiva (Phonapichat et al., 2014).

A pesar de su importancia, el aprendizaje de las matemáticas sigue siendo deficiente, como lo demuestran los resultados de México en las recientes pruebas del Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes (PISA) (OECD, 2023b). Esto subraya la necesidad de transformar los métodos de enseñanza actuales, creando entornos de aprendizaje que permitan a las y los estudiantes tomar control de su propio proceso, al tiempo que se sumergen en ciclos iterativos de análisis, prueba y revisión para desarrollar una forma flexible de resolver distintos tipos de problemas (English y Sriraman, 2010; Jacobse y Harskamp, 2009). En este contexto, la incorporación de estrategias metacognitivas durante el proceso de aprendizaje adquiere una relevancia crucial.

Es fundamental que las y los estudiantes aprendan y desarrollen estrategias metacognitivas, ya que estas son esenciales para mejorar su aprendizaje (López-Vargas et al., 2017; Mevarech y Kramarski, 2003; Shin et al., 2023) y para abordar de manera eficaz la resolución de problemas matemáticos (Bayat y Tarmizi, 2010; Jacobse y Harskamp, 2009; Lestari y Jailani, 2018; Lucangeli y Cornoldi, 1997; Özsoy y Ataman, 2009; Shin et al., 2023). Además, numerosos estudios han analizado los resultados de investigaciones previas, confirmando el impacto significativo de la metacognición en el desempeño en matemáticas (Lee et al., 2018; Muncer et al., 2022). En este sentido, se ha evidenciado que, a mayor nivel de metacognición, mejor será la capacidad de las y los estudiantes para resolver estos problemas (Abdullah et al., 2017; Izzati y Mahmudi, 2018).

No obstante, mientras algunos estudiantes crecen en entornos que les brindan numerosas oportunidades para desarrollar habilidades metacognitivas, otros logran aprovechar solo las escasas oportunidades disponibles. Sin embargo, un grupo significativo no adquiere estas habilidades debido a la falta de oportunidades o al desconocimiento de su importancia (Veenman et al., 2006). Por esta razón, es fundamental continuar investigando cómo fomentar el desarrollo de la metacognición en las y los estudiantes, ya que esto puede ser clave para su éxito académico y personal.

Nos centramos en el razonamiento covariacional, particularmente en la coordinación de valores. Este tipo de razonamiento ocurre cuando una persona es capaz de visualizar cómo dos variables cambian de manera simultánea, lo que implica que puede seguir y rastrear las cantidades que asume cada una de las variables a lo largo del tiempo (Carlson et al., 2002; Thompson y Carlson, 2017).

El objetivo de este trabajo es investigar el impacto de las estrategias metacognitivas en la resolución de problemas matemáticos y la adquisición de conocimientos en estudiantes de nivel medio superior, centrándose en el desarrollo de los niveles 3 y 4 de razonamiento covariacional.

La estructura de la investigación se articula en cinco capítulos. El Capítulo 1 aborda los antecedentes del problema, incluyendo el contexto y la relevancia de la investigación, así como el objetivo, la pregunta y la hipótesis que guían el estudio. En el Capítulo 2, se presenta el marco conceptual relacionado con la metacognición, detallando sus componentes fundamentales que sirvieron como base para la construcción de las guías metacognitivas. El Capítulo 3 se enfoca en la metodología empleada, basada en un enfoque cuantitativo. En este capítulo, se detalla la intervención, en la cual las estrategias metacognitivas actúan como variable independiente, mientras que la prueba de coordinación de valores evalúa la adquisición de conocimientos y la resolución de problemas como variables dependientes. El Capítulo 4 presenta los resultados estadísticos derivados de la intervención, y en el Capítulo 5 se discuten dichos resultados, destacando el impacto positivo del uso de las guías metacognitivas. Finalmente, se exponen las conclusiones y recomendaciones basadas en los hallazgos del estudio.

Capítulo 1. Aspectos generales

Antecedentes del problema

Existe una preocupación generalizada sobre la dificultad que enfrenta la población para comprender y aplicar conocimientos matemáticos en distintos contextos (Núñez et al., 2005). El aprendizaje de las matemáticas es fundamental, ya que estas se aplican diariamente en diversos ámbitos y áreas de estudio que exigen razonamiento y cálculos (Baki et al., 2009; Ben et al., 2020). Cada vez que se toma una decisión sobre una compra, se elige un seguro de vida o se utiliza una hoja de cálculo, el razonamiento matemático está involucrado (Vinner, 2007).

¿Por qué no se logra un razonamiento adecuado? Una de las razones radica en la enseñanza tradicional, que se enfoca en la memorización de conceptos y procedimientos básicos, para luego aplicarlos a problemas descontextualizados (English y Sriraman, 2010). Este enfoque favorece la automatización, en lugar de incentivar la reflexión y el pensamiento crítico. Justamente lo que se necesita es que las y los estudiantes desarrollen la capacidad de reflexionar sobre todo aquello que puede ser objeto de análisis y cuestionamiento (Vinner, 2007).

Cuando el estudiantado se enfrenta a problemas no rutinarios, a menudo no logran aplicar sus conocimientos de manera adecuada (Abdullah et al., 2017), o simplemente se rinden ante la dificultad (Shin et al., 2023). A este grupo se les considera novatos, ya que suelen comenzar a operar sin un plan bien estructurado. En contraste, los expertos se caracterizan por tomarse más tiempo para analizar el problema antes de actuar y, además, revisan constantemente si están siguiendo el plan trazado (Jacobse y Harskamp, 2009).

Esto resalta la necesidad de un desarrollo gradual de habilidades metacognitivas, especialmente en estudiantes novatos, para que puedan analizar problemas y aplicar sus conocimientos de manera más flexible (Shin et al., 2023). Un entrenamiento metacognitivo adecuado también podría compensar las limitaciones en sus habilidades iniciales (Sandi-Urena et al., 2011). Además, dado que existe poca investigación sobre el impacto de la metacognición en la resolución de problemas no rutinarios, es crucial profundizar en este aspecto (Abdullah et al., 2017).

Sin embargo, todo problema requiere de un conocimiento previo específico, sin el cual no sería posible llegar a una solución. Por ello, este trabajo también se enfoca en la adquisición de conocimientos. La metacognición desempeña un papel crucial como herramienta para el aprendizaje (Garrison y Akyol, 2015), ya que mediante estrategias metacognitivas podemos evaluar si estamos aprendiendo de manera efectiva y determinar qué acciones tomar para mejorar nuestra comprensión de un tema.

El contenido principal donde se aplicará la metacognición es la coordinación de valores, un componente clave de los niveles de razonamiento covariacional. Este enfoque es especialmente relevante porque este tipo de razonamiento aparece en situaciones que involucran cambios simultáneos y dinámicos en las cantidades (Kertil et al., 2019), algo común en la vida diaria. Además, juega un papel crucial en la elaboración de gráficos y lectura de funciones dentro de un sistema de coordenadas (Moore et al., 2013; Sokolowski, 2021), un área que suele representar una dificultad significativa para la población estudiantil al interpretar y construir estos gráficos.

En resumen, el problema central radica en la falta de estrategias metacognitivas tanto en la adquisición de conocimientos como en la resolución de problemas. Esta ausencia limita la capacidad del estudiantado para reflexionar sobre su aprendizaje y aplicar lo que saben de manera efectiva. Sin dichas estrategias, las y los estudiantes tienden a enfrentar problemas de forma desorganizada, lo que dificulta su adaptación a nuevos desafíos. Por ello, es crucial que se promueva el desarrollo de habilidades metacognitivas que les permitan monitorear, regular y mejorar su proceso de aprendizaje.

Planteamiento del problema

El propósito de este trabajo es investigar el impacto de las estrategias metacognitivas en la adquisición de conocimientos y la resolución de problemas matemáticos en estudiantes de nivel medio superior, centrándonos específicamente en el contenido de coordinación de valores, como parte del razonamiento covariacional.

Pregunta general de investigación

¿Cuál es el impacto de las estrategias metacognitivas en la adquisición de conocimientos y la resolución de problemas matemáticos en estudiantes de nivel medio superior, centrándose específicamente en el contenido de coordinación de valores como parte del razonamiento covariacional?

Objetivo general de investigación

Analizar el impacto de las estrategias metacognitivas en la adquisición de conocimientos y la resolución de problemas matemáticos en estudiantes de nivel medio superior, centrándonos específicamente en el contenido de coordinación de valores, como parte del razonamiento covariacional.

Hipótesis

Las estrategias metacognitivas tienen un impacto positivo en la adquisición de conocimientos y en la resolución de problemas matemáticos en estudiantes de nivel medio superior, centrándonos específicamente en el contenido de coordinación de valores, como parte del razonamiento covariacional.

Justificación

Dada la efectividad demostrada de la metacognición en la resolución de problemas matemáticos (Bayat y Tarmizi, 2010; Jacobse y Harskamp, 2009; Lestari y Jailani, 2018; Lucangeli y Cornoldi, 1997; Özsoy y Ataman, 2009; Shin et al., 2023), y considerando que existen menos investigaciones sobre su impacto en el aprendizaje (López-Vargas et al., 2017;

Mevarech y Kramarski, 2003; Shin et al., 2023), es fundamental seguir explorando su aplicabilidad en diversos contextos educativos.

La singularidad de esta intervención radica en su enfoque dual, que no solo aborda la resolución de problemas matemáticos, sino también la adquisición de conocimientos en estudiantes de nivel medio superior, un área con investigación insuficiente (Shin et al., 2023). Esto es especialmente relevante en el contexto de la coordinación de valores, que forma parte del proceso de razonamiento covariacional (Carlson et al., 2002; Thompson y Carlson, 2017).

Capítulo 2. Marco conceptual

Los subapartados de esta sección son los siguientes: 1) Metacognición y sus componentes, donde se define este constructo y se analizan sus principales componentes, que constituyen la base fundamental de la investigación; 2) Metacognición en la adquisición de conocimientos y resolución de problemas, que revisa los estudios realizados por investigadores en relación con estos dos aspectos y su conexión con la metacognición; 3) Indicaciones metacognitivas, que aborda el funcionamiento de estas instrucciones con el grupo estudiantil; y 4) Coordinación de valores, que se centra en el tema de adquisición de conocimientos y en el contenido evaluado por la prueba que se utilizará.

Metacognición y sus componentes

La metacognición ha sido ampliamente investigada en las últimas décadas debido a su importancia en el procesamiento del pensamiento. Este concepto ha sido objeto de estudio en el ámbito educativo, ya que es una habilidad cognitiva fundamental para alcanzar un aprendizaje profundo y significativo (Garrison y Akyol, 2015), y juega un papel crucial no solo en el rendimiento académico, sino también en el crecimiento personal y el progreso profesional (Terlecki y McMahon, 2018).

Actualmente la metacognición se define como “any knowledge or cognitive activity that takes as its object, or monitors, or regulates any aspect of cognitive activity; that is, knowledge about, and thinking about, one’s own thinking” (Stillman, 2020, p. 609). Flavell (1979) fue el primero en acuñar este término, al que hacen referencia numerosos autores (Bayat y Tarmizi, 2010; Desoete y De Craene, 2019; Imaya et al., 2020; Livingston, 2003; Mokos y Kafoussi, 2013; Özsoy y Ataman, 2009; Sandi-Urena et al., 2011; Siagian et al., 2019; Terlecki y McMahon, 2018), y sobre el cual se basa la definición actual. Sin embargo, algunos han adaptado la definición, como la conciencia y el control sobre el propio pensamiento (Kuhn y Dean, 2004), o el monitoreo activo y la regulación de los procesos cognitivos para alcanzar una meta (Izzati y

Mahmudi, 2018), o uso estratégico de nuestros propios procesos cognitivos para construir conocimiento de una manera significativa (Al-Hilawani, 2016).

En esta investigación nos basamos en la definición actual de metacognición, centrada en el aprendizaje y la resolución de problemas como actividades cognitivas, y seguimos los componentes propuestos por Schraw y Dennison (1994a). La metacognición se divide en dos componentes principales: el conocimiento de la cognición, que a su vez incluye tres subcomponentes —conocimiento declarativo, conocimiento procedimental y conocimiento condicional—; y la regulación de la cognición, que abarca cinco subdominios: planificación, manejo de la información, estrategias de depuración, monitoreo y evaluación.

A continuación, la Tabla 1 presenta los componentes de la metacognición según Schraw y Dennison (1994a), junto con las aportaciones de otros autores que muestran similitudes con dichos componentes.

Tabla 1

Componentes de la metacognición

Componente	**Descripción**	**Autores**
Conocimiento metacognitivo	El conocimiento metacognitivo consiste principalmente en conocimientos o creencias sobre qué factores o variables actúan e interactúan de qué maneras para afectar el curso y resultado de los procesos cognitivos.	Flavell, 1979
	El conocimiento metacognitivo, en un caso, se refiere al conocimiento y las creencias de una persona sobre sus recursos mentales y su conciencia sobre qué hacer. También se refiere matemáticamente a los procesos y técnicas matemáticas que tienen las y los estudiantes y sus ideas sobre la naturaleza de las matemáticas.	Özsoy y Ataman, 2009

	El conocimiento sobre la cognición implica que una persona está informada acerca de las variables que afectarán el rendimiento instructivo en una situación de aprendizaje o durante un proceso educativo.	Wong, 1992
Conocimiento declarativo	La categoría de persona abarca todo lo que podrías llegar a creer sobre la naturaleza de ti mismo y de otras personas como procesadores cognitivos. La categoría de tarea abarca el conocimiento sobre las demandas de diferentes tareas.	Flavell, 1979
	Conocer las propias habilidades, estrategias, destrezas y recursos de aprendizaje necesarios para alcanzar metas.	Izzati y Mahmudi, 2018
	El conocimiento sobre las variables personales se refiere al conocimiento individual de los propios procesos de aprendizaje. El conocimiento sobre las variables de la tarea incluye el conocimiento acerca de la naturaleza de la tarea, así como el tipo de demandas de procesamiento que impondrá sobre el individuo.	Livingston, 2003
	Conocimiento sobre las propias habilidades, recursos intelectuales y habilidades como aprendiz.	Schraw y Dennison, 1994a
Conocimiento procedimental	Las acciones (o estrategias) se refieren a las cogniciones u otros comportamientos empleados para alcanzar los objetivos.	Flavell, 1979
	Saber cómo usar el conocimiento declarativo.	Izzati y Mahmudi, 2018
	Conocimiento sobre cómo implementar procedimientos de aprendizaje (por ejemplo, estrategias).	Schraw y Dennison, 1994a

Conocimiento condicional	Entender dónde se usa un procedimiento, habilidad o estrategia y dónde no se usan, por qué un procedimiento procede y en qué condiciones se lleva a cabo, y por qué un procedimiento es mejor que cualquier otro procedimiento.	Izzati y Mahmudi, 2018
	El conocimiento sobre las variables de estrategia incluye tanto el conocimiento de estrategias cognitivas y metacognitivas, como el conocimiento condicional sobre cuándo y dónde es apropiado utilizar dichas estrategias.	Livingston, 2003
	Conocimiento sobre cuándo y por qué utilizar procedimientos de aprendizaje.	Schraw y Dennison, 1994a
Regulación metacognitiva	Las estrategias metacognitivas son procesos secuenciales que se utilizan para controlar las actividades cognitivas y asegurar que se ha alcanzado un objetivo cognitivo. Estos procesos ayudan a regular y supervisar el aprendizaje, e incluyen la planificación y el monitoreo de las actividades cognitivas, así como la verificación de los resultados de dichas actividades.	Livingston, 2003
	Habilidad de usar el conocimiento metacognitivo estratégicamente para alcanzar objetivos cognitivos.	Özsoy y Ataman, 2009
	El control metacognitivo está relacionado con actividades metacognitivas que ayudan a controlar el propio pensamiento o aprendizaje.	
	La regulación de la cognición implica el tipo de comportamientos decisionales exhibidos para planificar, monitorear y evaluar las propias acciones.	Wong, 1992
Planificación	La planificación ayuda al estudiante a analizar el	Bayat y Tarmizi,

	problema, recuperar habilidades específicas del dominio relevantes y secuenciar adecuadamente las estrategias de resolución de problemas. Las estrategias de planificación permiten a los solucionadores de problemas determinar qué subobjetivos deben lograrse y en qué orden.	2010
	La capacidad de planificar actividades de aprendizaje.	Izzati y Mahmudi, 2018
	La planificación es una actividad deliberada que establece submetas.	Özsoy y Ataman, 2009
	Planificación, establecimiento de objetivos y asignación de recursos antes del aprendizaje.	Schraw y Dennison, 1994a
Manejo de la información	La organización se refiere a seleccionar ideas principales, esquematizar, hacer redes, elaborar tablas o gráficos y diagramas. Estas actividades ayudan a analizar nueva información en términos de la relación entre ideas y a transferir esta información a diferentes modos de representación.	Bayat y Tarmizi, 2010
	La capacidad de organizar información relacionada con el proceso de aprendizaje emprendido.	Izzati y Mahmudi, 2018
	Tomar notas sistemáticamente. Selección de la información (¿Qué números?). Dibujar el problema.	Jacobse y Harskamp, 2009
	Habilidades y secuencias estratégicas utilizadas en línea para procesar la información de manera más eficiente (por ejemplo, organizar, elaborar, resumir, enfoque selectivo).	Schraw y Dennison, 1994a
Monitoreo	El monitoreo asegura que las y los estudiantes sigan de cerca su plan y verifiquen si el plan está ayudando	Bayat y Tarmizi, 2010

	a resolver el problema con éxito.	
	Las experiencias metacognitivas son cualquier experiencia cognitiva o afectiva consciente que acompañe y se refiera a cualquier actividad intelectual.	Flavell, 1979
	La capacidad de monitorear el proceso de aprendizaje y los asuntos relacionados con el proceso.	Izzati y Mahmudi, 2018
	El monitoreo se refiere a la conciencia en línea de la comprensión y el rendimiento en una tarea. La capacidad de realizar autoevaluaciones periódicas durante el aprendizaje es un buen ejemplo.	Özsoy y Ataman, 2009
	Evaluación del propio aprendizaje o uso de la estrategia.	Schraw y Dennison, 1994a
Estrategias de depuración	La capacidad de depurar es una estrategia utilizada para corregir acciones incorrectas en el aprendizaje.	Izzati y Mahmudi, 2018
	Leer cuidadosamente.	Jacobse y Harskamp, 2009
	Estrategias utilizadas para corregir errores de comprensión y ejecución.	Schraw y Dennison, 1994a
Evaluación	La evaluación del problema se coloca al final del proceso, en el cual el estudiante juzga la respuesta y el proceso seguido para obtener la respuesta.	Bayat y Tarmizi, 2010
	La capacidad de evaluar la efectividad de su estrategia de aprendizaje, si cambiará su estrategia, sucumbirá a la situación o finalizará la actividad.	Izzati y Mahmudi, 2018
	Obtener conclusiones, reflexionar sobre la respuesta, reflexionar sobre lo que se aprendió (¿Qué aprendí?).	Jacobse y Harskamp, 2009
	Pueden reevaluar sus metas y conclusiones. La evaluación permite al estudiantado valorar su	Özsoy y Ataman, 2009

	desempeño en la tarea, comparar sus resultados con otros y utilizar los resultados de la comparación para identificar errores en el proceso de solución.	
	Análisis del desempeño y efectividad de la estrategia después de un episodio de aprendizaje.	Schraw y Dennison, 1994a

Por otro lado, en otros estudios se utilizan indicadores para diferenciar el nivel de metacognición en la resolución de problemas por parte del estudiantado. Estos indicadores se dividen en cuatro niveles: 1) uso tácito, que se refiere al uso del pensamiento sin conciencia, representando el nivel más bajo de metacognición; 2) uso consciente, donde las y los estudiantes presentan dificultades o se muestran confusos respecto al proceso y el resultado; 3) uso estratégico, que se refiere al pensamiento estratégico en el cual pueden justificar su estrategia elegida, pero aún se muestran indecisos sobre sus resultados; y 4) uso reflexivo, que es cuando desarrollan el pensamiento reflexivo, el nivel más alto que pueden alcanzar, ya que pueden identificar la información relevante, reconocer sus errores y corregirlos (Imaya et al., 2020).

Metacognición en la adquisición de conocimientos y la resolución de problemas

Un porcentaje considerable de investigaciones ha correlacionado la metacognición con variables como la resolución de problemas (Bayat y Tarmizi, 2010; Lucangeli y Cornoldi, 1997) o las habilidades de estudio (Al-Hilawani, 2016) o han analizado cuáles estrategias metacognitivas utilizan las y los estudiantes (Imaya et al., 2020; Mokos y Kafoussi, 2013; Siagian et al., 2019). Algunos estudios han experimentado con estrategias metacognitivas para mejorar la resolución de problemas (Jacobse y Harskamp, 2009; Lestari y Jailani, 2018; Özsoy y Ataman, 2009; Sandi-Urena et al., 2011; Shin et al., 2023), pero son pocos los que han explorado su uso para potenciar el aprendizaje (López-Vargas et al., 2017; Mevarech y Kramarski, 2003; Shin et al., 2023). Los resultados indican que la metacognición influye positivamente en la

resolución de problemas matemáticos y que un mayor nivel de metacognición se traduce en un mejor desempeño (Abdullah et al., 2017; Izzati y Mahmudi, 2018).

La investigación sobre la metacognición en la adquisición de conocimientos es limitada. Sin embargo, se cree que centrar un estudio en matemáticas exclusivamente en la adquisición de conocimientos, sin evaluar la capacidad del grupo estudiantil para resolver problemas aplicados con ese conocimiento, no generará resultados apropiados.

La comprensión del contenido matemático y la capacidad para aplicar ese conocimiento en la resolución de problemas significativos y contextualizados son habilidades cruciales para la ciudadanía del mundo moderno (OECD, 2023a). Este enunciado es el punto de partido del enfoque de este trabajo "la comprensión del contenido matemático", es decir, la adquisición de conocimientos y "la capacidad para aplicar este conocimiento", es decir, la resolución de problemas.

Adquisición de conocimientos

La adquisición de conocimientos es el proceso de aprendizaje. El aprendizaje de matemáticas es un proceso dinámico y completo que involucra la interacción entre los conocimientos previos y la incorporación del nuevo material (Idris, 2005). El objetivo de la instrucción es aumentar el acervo de conocimientos en la memoria a largo plazo. Si nada ha cambiado en la memoria a largo plazo, no se ha aprendido nada (Sweller et al., 2011). El proceso de aprender, en suma, está supeditado a las conexiones sinápticas entre las células cerebrales, esto es, mientras más conexiones hay entre las neuronas, se Idris_2005incrementa el aprendizaje (Bannert y Mengelkamp, 2013; Velásquez et al., 2009).

Se sugiere que resultaría más provechoso dirigir la atención hacia los métodos de codificación, resaltando que una codificación más profunda y detallada conlleva a una memoria más duradera, constituyendo, en última instancia, el fundamento del aprendizaje a largo plazo (Craik y Lockhart, 1972). En este sentido, los actuales enfoques educativos enfatizan la

generación de nuevas estrategias de apropiación y aplicación del conocimiento (Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación [INEE], 2008).

Se requiere que las y los estudiantes sean aprendientes proficientes, conscientes de su propia cognición y saber qué y cuándo seleccionar y usar la información (Idris, 2005). Hoy en día, la metacognición se reconoce como una variable mediadora importante para el aprendizaje (Desoete, 2007). En la revisión de varias investigaciones, se ha observado de manera consistente que el alumnado aprende más cuando tiene habilidades metacognitivas bien desarrolladas (Schwartz et al., 2013).

Resolución de problemas

Uno de los objetivos de la extensa etapa educativa es preparar al alumnado para que sean capaces de resolver problemas cotidianos, así como retos laborales de manera eficaz. La resolución de problemas es un ejercicio continuo que puede ser definido como la búsqueda de una meta cuando el camino a la meta es desconocido (Izzati y Mahmudi, 2018), lo cual conlleva un proceso de pensamiento inicial, pero lo más importante en la resolución de problemas es la habilidad de detenerse a evaluar constantemente y cuestionarse si el camino electo es el más prometedor, si está funcionando, o si se requiere replantear una nueva estrategia (Martínez, 2006). Poseer el conocimiento sobre cualquier actividad cognitiva y no utilizarlo para mejorar esta actividad no es metacognitivo (Livingston, 2003).

Se identifican dos características relevantes de un buen agente resolutor de problemas: flexibilidad y precisión (Lucangeli y Cornoldi, 1997). Ambas necesarias para alcanzar buenos resultados en diferentes tareas. Se requiere que el sujeto haga buen uso de los recursos cognitivos que posee al controlar qué y cómo realizarlo, es decir, implementar procesos metacognitivos (Kramarski y Mevarech, 2003; Lucangeli y Cornoldi, 1997)

Para que exista una resolución de problemas exitosa es necesario una interacción apropiada entre los procesos cognitivos y metacognitivos (Artzt y Armour-Thomas, 1992, Imaya

et al., 2020). Estos últimos normalmente preceden a una actividad cognitiva, ya que los procesos cognitivos son utilizados para alcanzar un objetivo (redactar un correo) mientras que los procesos metacognitivos son utilizados para asegurar que el objetivo está siendo alcanzado (regresar inmediatamente a corregir una palabra), una falla detectada de la actividad cognitiva puede activar procesos metacognitivos con el fin de corregir la situación (Livingston, 2003).

Por el contrario, un desempeño negativo en la resolución de problemas puede ser a causa de una falta de habilidades metacognitivas, y no precisamente de habilidades cognitivas, es decir, un estudiante puede ser capaz de realizar una operación matemática de manera correcta (habilidades cognitivas) pero, a su vez no utilizar dicha operación en el contexto apropiado (habilidades metacognitivas) (Abdullah et al., 2017), es bastante diferente saber operar que saber qué operar (Lucangeli y Cornoldi, 1997).

Indicaciones metacognitivas

Para fomentar las habilidades que se han mencionado con anterioridad, se han empleado lo que se denomina indicaciones metacognitivas. Estas instrucciones deben dirigir la atención de los aprendices hacia sus propios pensamientos, y fomentar la comprensión de las actividades en las que participan durante el proceso de aprendizaje (Bannert, 2009; Lin y Lehman, 1999).

Las indicaciones metacognitivas se diseñan para ayudar al alumnado a supervisar y controlar cómo procesan la información. Esto implica actividades metacognitivas como orientación, establecimiento de metas, planificación, supervisión, control y estrategias de evaluación (Bannert y Mengelkamp, 2013).

Además, otros autores utilizan el método IMPROVE, que promueve el uso de preguntas metacognitivas clasificadas en cuatro tipos. Las preguntas de comprensión permiten reflexionar sobre el enunciado o el contexto antes de comenzar a resolver el problema. Las preguntas de conexión se utilizan para identificar similitudes o diferencias entre distintos problemas. Las preguntas estratégicas están diseñadas para que las y los estudiantes evalúen las estrategias

disponibles y elijan la más adecuada. Por último, las preguntas de reflexión permiten analizar los aprendizajes obtenidos durante el proceso de resolución (Lestari y Jailani, 2018; Mevarech y Kramarski, 2003).

Coordinación de valores

El conocimiento que se abordará en esta investigación es la coordinación de valores, un aspecto clave dentro de los niveles de razonamiento covariacional (Carlson et al., 2002; Thompson y Carlson, 2017). Se han seleccionado específicamente los niveles 3 y 4 como objetivo (ver Tabla 2), ya que es esencial fomentar primero esta coordinación antes de avanzar hacia la covariación, que es la meta final. Dado el tiempo limitado de la investigación, nos enfocamos en estos niveles intermedios para asegurar una base sólida antes de tratar conceptos más complejos.

Tabla 2

Niveles de Razonamiento Covariacional

Nivel	Descripción
Covariación continua suave (N5)	La persona imagina aumentos o disminuciones (en adelante, cambios) en el valor de una cantidad o variable (en adelante, variable) que ocurren simultáneamente con cambios en el valor de otra variable, y visualiza ambas variables variando de manera suave y continua.
Covariación continua gruesa (N4)	La persona imagina cambios en el valor de una variable que ocurren simultáneamente con cambios en el valor de otra variable, y visualiza ambas variables variando con una variación continua y fragmentada.
Coordinación de valores (N3)	La persona coordina los valores de una variable (x) con los valores de otra variable (y) con la intención de crear una colección discreta de pares (x, y).
Coordinación gruesa de valores	La persona forma una imagen general de los valores de las cantidades variando juntas, como "esta cantidad aumenta mientras esa cantidad

(N2)	disminuye." No imagina que los valores individuales de las cantidades vayan juntos, sino que visualiza un vínculo suelto y no multiplicativo entre los cambios generales en los valores de dos cantidades.
Precoordinación de valores (N1)	La persona imagina los valores de dos variables variando, pero de manera asincrónica: una variable cambia, luego la segunda variable cambia, luego la primera, y así sucesivamente. No anticipa crear pares de valores como objetos multiplicativos.
Sin coordinación (N0)	La persona no tiene ninguna imagen de las variables variando juntas. Se enfoca en la variación de una u otra variable sin coordinación de valores.

Nota. Datos tomados de Thompson y Carlson (2017).

Yu (2024) introduce una ligera modificación a las acciones mentales de estos niveles, dividiendo el nivel 3 de coordinación de valores en dos acciones mentales. Esto es relevante para esta investigación, ya que el salto del nivel 2 al nivel 3 es demasiado grande. Se necesita un nivel intermedio en el que el estudiante sea capaz de coordinar simplemente los valores de x y f(x) en un solo momento.

En esta investigación, el razonamiento covariacional es particularmente relevante por su gran utilidad en la vida cotidiana. Identificar relaciones funcionales entre variables en contextos diarios facilita el razonamiento, ya que permite al estudiantado enfocarse en cómo la interdependencia y la interacción entre las variables afectan la situación (OECD, 2023a).

El razonamiento covariacional puede ser entrenado mediante la observación del comportamiento de parámetros seleccionados y considerando funciones algebraicas o fórmulas como representaciones de dicho comportamiento (Johnson et al., 2017; Sokolowski, 2021). A diferencia de los conceptos matemáticos, el razonamiento matemático no se enseña de manera explícita; se desarrolla a medida que las y los estudiantes interactúan con números, cantidades, variables y las relaciones entre estas (Sokolowski, 2021).

Las y los estudiantes desarrollan su comprensión de una función a partir de la coordinación de dos columnas de datos. Esto implica que no solo son capaces de describir un

patrón en una columna, sino que también pueden relacionar los valores de ambas columnas. En algunos casos, al participar en actividades de interpolación, logran insertar valores entre los datos proporcionados (Confrey y Smith, 1995). En el contexto de las tablas, este razonamiento implica coordinar la variación de dos o más columnas al avanzar hacia abajo o hacia arriba en la tabla (Confrey y Smith, 1994).

Las y los estudiantes desarrollan su comprensión de una función a partir de la coordinación de dos columnas de datos. Esto significa que no solo son capaces de describir un patrón en una columna, sino que también pueden relacionar los valores de ambas columnas para responder preguntas sobre la situación planteada. En algunos casos, al participar en actividades de interpolación, logran insertar valores entre los datos proporcionados (Confrey y Smith, 1995).

Los estudios sobre el razonamiento covariacional durante el proceso de resolución de problemas han mostrado que las y los estudiantes con altos niveles de metacognición tienen una experiencia más completa, lo que se traduce en un mejor rendimiento (Abernethy et al., 1993 citado en Hong et al., 2020).

Capítulo 3. Método

Este capítulo aborda la metodología de la investigación, comenzando con el enfoque y el diseño experimental. Se explica la composición del grupo de estudiantes, se describen detalladamente los instrumentos utilizados y se ofrece una explicación exhaustiva del procedimiento seguido. Finalmente, se presentan las técnicas de análisis de datos empleadas.

Diseño de la investigación

La investigación sigue una metodología cuasiexperimental con enfoque cuantitativo, en la que se trabajan dos grupos: el grupo experimental y el grupo de control. De esta forma, se podrá comparar el desempeño y la evolución (comparación del pretest y el postest) de la población estudiantil que recibe la intervención metacognitiva, con aquella población que no recibe esta intervención.

Participantes

Los participantes de este estudio fueron estudiantes del Bachillerato General Oficial Benito Juárez, ubicado en el municipio de Coronango, Puebla. Este bachillerato es una escuela pública con turno matutino. Se seleccionaron dos grupos de segundo año para la aplicación de esta investigación. Las características generales de estos grupos se detallan en la Tabla 3.

Tabla 3

Características generales del grupo experimental y de control

Características	Grupo experimental	Grupo de control
N. de estudiantes	31	27
N. de mujeres	20	18
N. de hombres	11	9
Rango de edad	15-17 años	15-17 años

Instrumentos de recolección de datos

A continuación, se describen los instrumentos utilizados en esta investigación, especificando su composición, número de ítems y estructura. Cada uno de estos instrumentos se presenta en los anexos correspondientes para facilitar su consulta.

Adicionalmente, cuando corresponde, se incluyen los resultados del análisis de confiabilidad, destacando la consistencia interna de los instrumentos. El proceso de análisis de datos para evaluar la fiabilidad de los instrumentos se realizó mediante la técnica del Alfa de Cronbach, una medida estadística que permite determinar la consistencia interna de las escalas. Un valor de alfa cercano o superior a 0.70 se considera aceptable, lo que indica una alta fiabilidad en los datos obtenidos. Para realizar este análisis, se utilizó el software IBM SPSS Statistics, versión 26.

Inventario de conciencia metacognitiva

Se empleó el Inventario de Conciencia Metacognitiva (MAI, por sus siglas en inglés) de Schraw y Dennison (1994b), compuesto por 52 ítems clasificados en ocho subdominios: conocimiento declarativo, procedimental y condicional, planificación, manejo de la información, monitoreo, estrategias de depuración y evaluación. La escala de medición será tipo Likert, con 5 niveles de frecuencia: nunca, raramente, ocasionalmente, frecuentemente y muy frecuentemente.

Este inventario ha sido ampliamente utilizado en investigaciones previas (Bayat y Tarmizi, 2010; Mokos y Kafoussi, 2013; Terlecki y McMahon, 2018). Fue traducido al español para Latinoamérica y adaptado específicamente para estudiantes de bachillerato. La escala utilizada se detalla en el Anexo 1.

Para asegurar la fiabilidad del instrumento de medición utilizado en esta investigación, se llevó a cabo un análisis de consistencia interna empleando el coeficiente alfa de Cronbach. Se evaluaron los resultados de ambos grupos, tanto el grupo de control como el grupo experimental, en las fases de pretest y postest. Este análisis general de la consistencia del instrumento arrojó un

coeficiente alfa de Cronbach de 0.976, lo que indica un alto grado de fiabilidad. Este resultado demuestra que los ítems de la escala son altamente consistentes entre sí, validando la precisión y coherencia del instrumento utilizado en esta investigación.

Prueba de coordinación de valores

Dado que el enfoque de esta investigación es la coordinación de valores, que corresponde a los niveles 3 y 4 del razonamiento covariacional, se seleccionaron problemas que trabajaran este contenido. Se decidió utilizar los ejercicios de matemáticas liberados de PISA (OECD, 2013), ya que son no rutinarios y requieren de habilidades de pensamiento de orden superior (Abdullah et al., 2017). PISA clasifica su contenido matemático en cuatro áreas: cambio y relaciones, espacio y forma, cantidad, e incertidumbre de datos. Para este estudio, se eligieron únicamente problemas del área de cambio y relaciones. Posteriormente, se realizó un análisis para determinar el nivel de razonamiento covariacional necesario para resolverlos (ver Tabla 4).

Tabla 4

Análisis sobre los problemas del área cambio y relaciones de PISA

Nombre del problema	Pregunta	Nivel de razonamiento covariacional necesario	Observaciones
Chatear	1	N3. Coordinación de valores	
	2	N4. Covariación continua gruesa	
Zapatos para niños	1	N3. Coordinación de valores	Solo un par ordenado
Caminar	1	No requiere coordinación	Algebraico
	2	No requiere coordinación	Algebraico
Los líquenes	1	No requiere coordinación	Algebraico
	2	No requiere coordinación	Algebraico
Concentración de un	1	N3. Coordinación de valores	Requiere usar

fármaco			porcentajes
	2	N3. Coordinación de valores	
	3	N4. Covariación continua gruesa	Requiere usar porcentajes
Las monedas	1	No requiere coordinación	
Pago por superficie	1	No requiere coordinación	Requiere comprensión
Manzanos	1	N3. Coordinación de valores	
	2	N3. Coordinación de valores	
	3	N4. Covariación continua gruesa	
Frecuencia de goteo	1	No requiere coordinación	Algebraico
	2	No requiere coordinación	Algebraico
Reproductores de MP3	3	No requiere coordinación	Algebraico
El poder del viento	1	No requiere coordinación	Aritmético
	2	No requiere coordinación	Algebraico
Pingüinos	3	No requiere coordinación	Algebraico
Elena, la ciclista	1	No requiere coordinación	Aritmético
	2	No requiere coordinación	Aritmético
	3	No requiere coordinación	Aritmético
Vender periódicos	1	No requiere coordinación	Puede modificarse
	2	No requiere coordinación	Puede modificarse
	3	N5. Covariación continua suave	
Subida al monte Fuji	2	N3. Coordinación de valores	Requiere usar velocidad
Pizzas	1	No requiere coordinación	Aritmético
Barcos de vela	3	No requiere coordinación	Aritmético
Crecer	1	No requiere coordinación	Aritmético
	2	N5. Covariación continua suave	
	3	N4. Covariación continua gruesa	

El columpio	1	N5. Covariación continua suave	Puede modificarse
El depósito de agua	1	N5. Covariación continua suave	Puede modificarse
El faro	1	No requiere coordinación	
	2	No requiere coordinación	Aritmético
	3	N4. Covariación continua gruesa	
El mejor coche	1	No requiere coordinación	Aritmético
	2	No requiere coordinación	Aritmético
El sueño de las focas	1	N4. Covariación continua gruesa	
Frenado	1	N3. Coordinación de valores	Gráfico complejo
	2	N3. Coordinación de valores	Gráfico complejo
	3	N3. Coordinación de valores	Gráfico complejo
	4	N3. Coordinación de valores	Gráfico complejo
	5	N3. Coordinación de valores	Gráfico complejo
Latidos del corazón	1	No requiere coordinación	Algebraico
	2	No requiere coordinación	Algebraico
Pasillos móviles	1	No requiere coordinación	
Velocidad de un coche de carreras	1	N3. Coordinación de valores	
	2	N3. Coordinación de valores	
	3	N3. Coordinación de valores	
	4	N5. Covariación continua suave	
Paseo en coche	1	N3. Coordinación de valores	
	2	N4. Covariación continua gruesa	
	3	N5. Covariación continua suave	

Se seleccionaron problemas específicos, algunos de los cuales fueron adaptados para ajustarse al nivel que se deseaba medir, asegurando que requirieran la coordinación de valores. Los ejercicios fueron adaptados para estudiantes mexicanos de nivel medio superior y la prueba consta de 11 preguntas, que se enumeran a continuación en la Tabla 5.

En resumen, la prueba consta de 11 ítems, de los cuales 4 están destinados a evaluar el nivel 3 de coordinación de valores y 7 se enfocan en medir el nivel 4 de covariación continua gruesa. Cada pregunta tiene 4 opciones de respuesta, además de una quinta opción con la leyenda "no contestaría o lo haría al azar", para que las y los estudiantes puedan seleccionarla si no conocen la respuesta, evitando así que acierten por casualidad. La prueba incluye una hoja de respuestas adicional, donde el grupo estudiantil escribe su nombre y marca la opción correspondiente para cada pregunta. La prueba completa se encuentra en el Anexo 2.

Tabla 5

Nivel de razonamiento covariacional de las preguntas de la prueba

Pregunta	**Nivel de Razonamiento Covariacional**
El sueño de las focas – 1	Nivel 4. Covariación continua gruesa
Manzanos – 2	Nivel 3. Coordinación de valores
Manzanos – 3	Nivel 4. Covariación continua gruesa
Chatear – 1	Nivel 3. Coordinación de valores
Chatear – 2	Nivel 4. Covariación continua gruesa
El depósito de agua – 1	Nivel 4. Covariación continua gruesa (adaptado)
Vender periódicos – 1	Nivel 4. Covariación continua gruesa (adaptado)
Vender periódicos – 2	Nivel 4. Covariación continua gruesa (adaptado)
Velocidad de un coche – 2	Nivel 3. Coordinación de valores
Velocidad de un coche – 3	Nivel 3. Coordinación de valores
El columpio – 1	Nivel 4. Covariación continua gruesa (adaptado)

Tras el análisis de fiabilidad, se obtuvo un coeficiente de alfa de Cronbach de 0.757. Es fundamental recordar que este coeficiente oscila entre 0 y 1, donde los valores más cercanos a 1 indican una mayor consistencia interna entre los ítems del instrumento. En este caso, el valor de 0.757 sugiere una consistencia interna moderada en las respuestas del cuestionario. Además, el análisis fue replicado para los cuatro grupos: control y experimental, tanto en el pretest como en el postest, lo que permitió evaluar la fiabilidad del instrumento en distintos momentos y contextos de la investigación, proporcionando una visión más completa de su consistencia.

Guías metacognitivas para la adquisición de conocimientos y la resolución de problemas

Estas guías se desarrollaron utilizando los ocho componentes de la metacognición propuestos por Schraw y Dennison (1994a), así como el Inventario de Conciencia Metacognitiva (MAI) (Schraw y Dennison, 1994b), complementados con ideas propias sobre la metacognición y su activación durante la resolución de problemas. Están organizadas en bloques que se centran en la comprensión y el conocimiento que se posee, el desarrollo, y una autoevaluación y reflexión. Además, ofrecen una serie de estrategias metacognitivas que se aplicarán en los primeros bloques. Se detallan en profundidad en la siguiente sección y se encuentran en el Anexo 3.

Procedimiento

Es esencial proporcionar detalles abundantes sobre la intervención, ya que muchas investigaciones carecen de profundidad en este aspecto, lo que genera incertidumbre sobre los procedimientos. De esta manera, el estudio no solo es evaluativo, sino que también ofrece una guía instructiva para profesores y lectores interesados.

El proceso completo se divide en tres etapas: pretest, intervención y postest. Durante la evaluación (pretest y postest), se utiliza una prueba de coordinación de valores para medir el impacto de las estrategias metacognitivas en la comprensión de este concepto y en el desempeño del estudiantado en la resolución de problemas. Asimismo, se aplica el Inventario de Conciencia Metacognitiva (MAI) para evaluar el nivel de metacognición en ambos momentos.

En la fase de intervención, el grupo experimental trabajará con dos guías diseñadas para fomentar la metacognición. La primera guía se centrará en la resolución de problemas matemáticos, mientras que la segunda se enfocará en la adquisición de conocimientos. El grupo de control realizará las mismas actividades que el grupo experimental, pero sin utilizar estas guías. La intervención, por tanto, se estructura en dos fases:

Fase 1: Resolución de problemas matemáticos

El grupo experimental trabajará con la primera guía, que se organiza en tres bloques: comprensión y conocimiento, monitoreo, y evaluación y reflexión. Las y los estudiantes resolverán un total de 10 problemas utilizando las estrategias metacognitivas recomendadas. Posteriormente, evaluarán si las estrategias seleccionadas fueron útiles para resolver los problemas. El grupo de control resuelve y discute sin ayuda de las guías estos mismos problemas.

El primer bloque (ver Figura 1) se centra en la comprensión del texto del problema y en el conocimiento necesario para su resolución. Las y los estudiantes deberán responder cuatro preguntas tras la primera lectura. Si la comprensión es insuficiente, se les invita a elegir una estrategia metacognitiva del primer bloque (ver Figura 2), enfocada en mejorar la comprensión.

Figura 1

Primer bloque de la guía de resolución de problemas

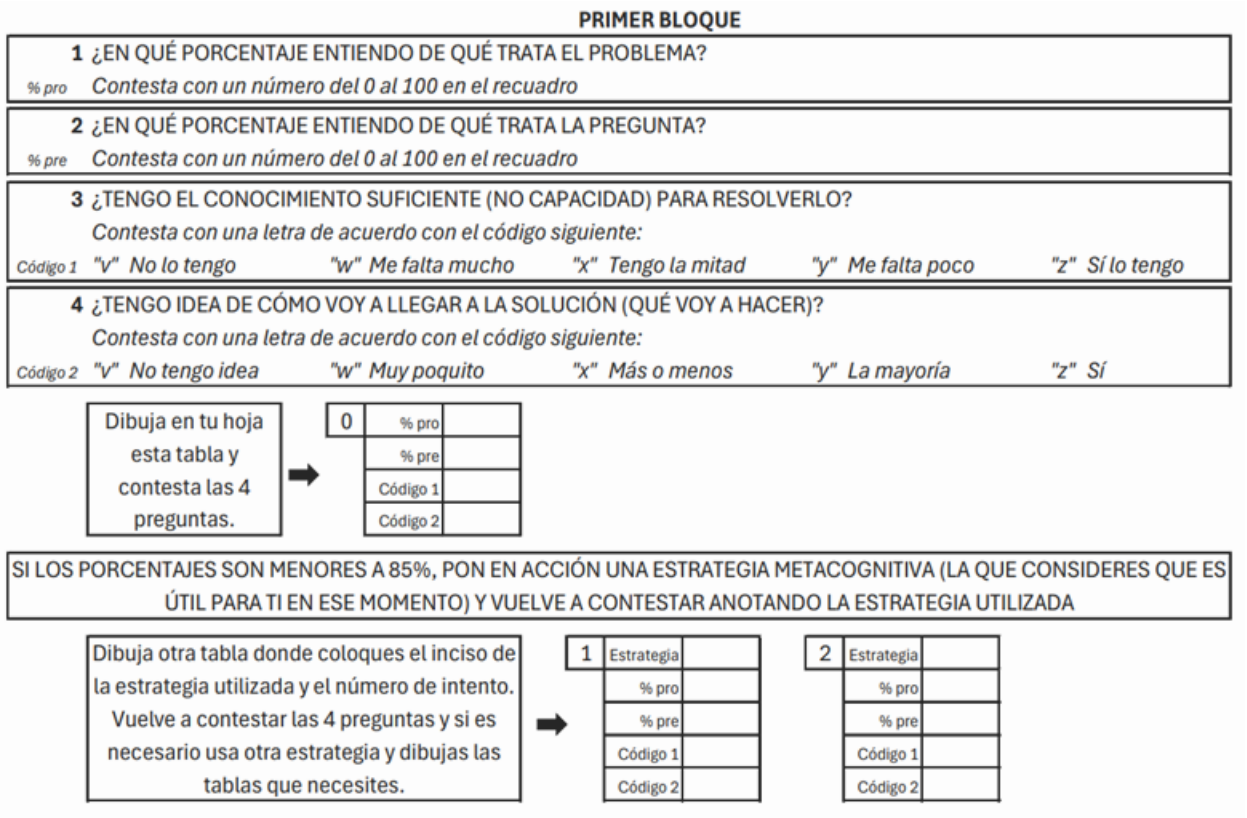


Figura 2

Estrategias metacognitivas propuestas para el primer bloque

ESTRATEGIAS PARA EL PRIMER BLOQUE: COMPRENSIÓN Y CONOCIMIENTO

a) Elijo enfocar conscientemente mi atención
b) Entender palabra por palabra hasta comprender el todo
c) Entender el contexto del problema (de qué trata)
d) Detenerme y revisar información importante
e) Buscar relaciones, ¿cómo se conecta la pregunta con el texto?
f) Hacer dibujos o diagramas para ayudarme a comprender
g) Tomar notas o hacer anotaciones

Una vez que las y los estudiantes han incrementado su nivel de comprensión al punto de tener una idea clara de cómo proceder, avanzan al bloque 2: monitoreo (ver Figura 3). El procedimiento es similar al bloque anterior: proponen un plan de acción y lo ejecutan. Si se encuentran atascados o tienen un bajo nivel de confianza en que la respuesta es correcta, aplican una estrategia metacognitiva del segundo bloque (ver Figura 4). Estas estrategias se centran en la resolución de problemas, con un enfoque en el monitoreo constante del proceso.

Figura 3

Segundo bloque de la guía de resolución de problemas

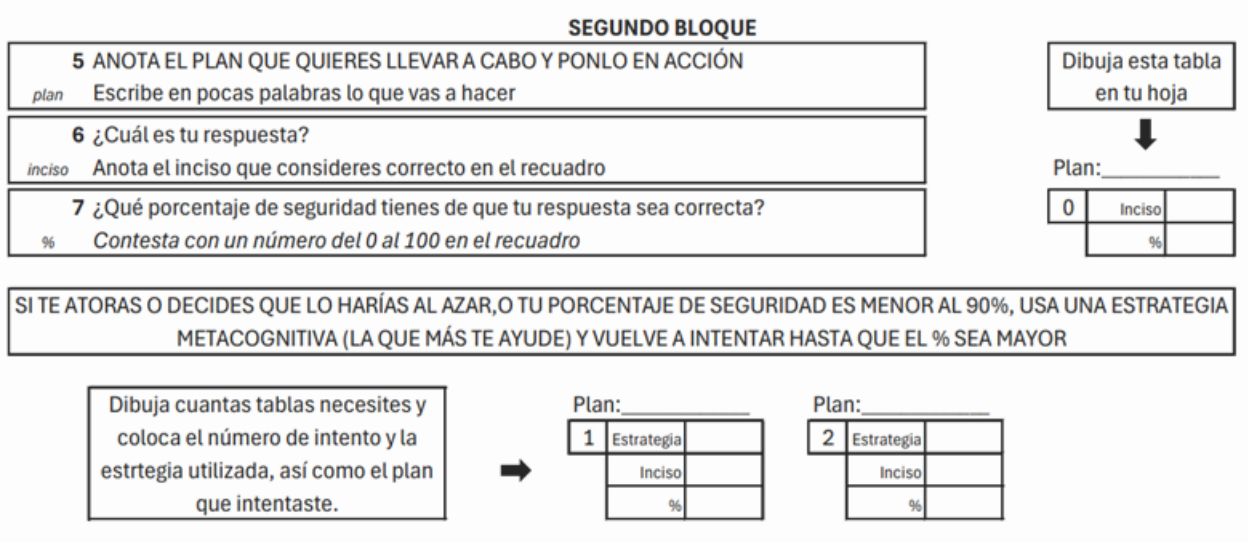
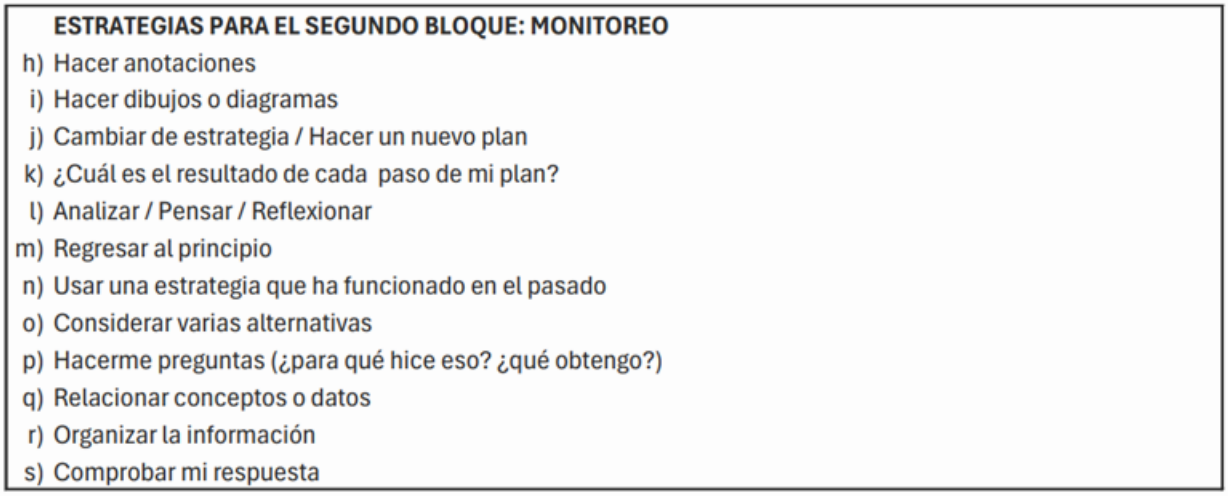


Figura 4

Estrategias metacognitivas propuestas para el segundo bloque



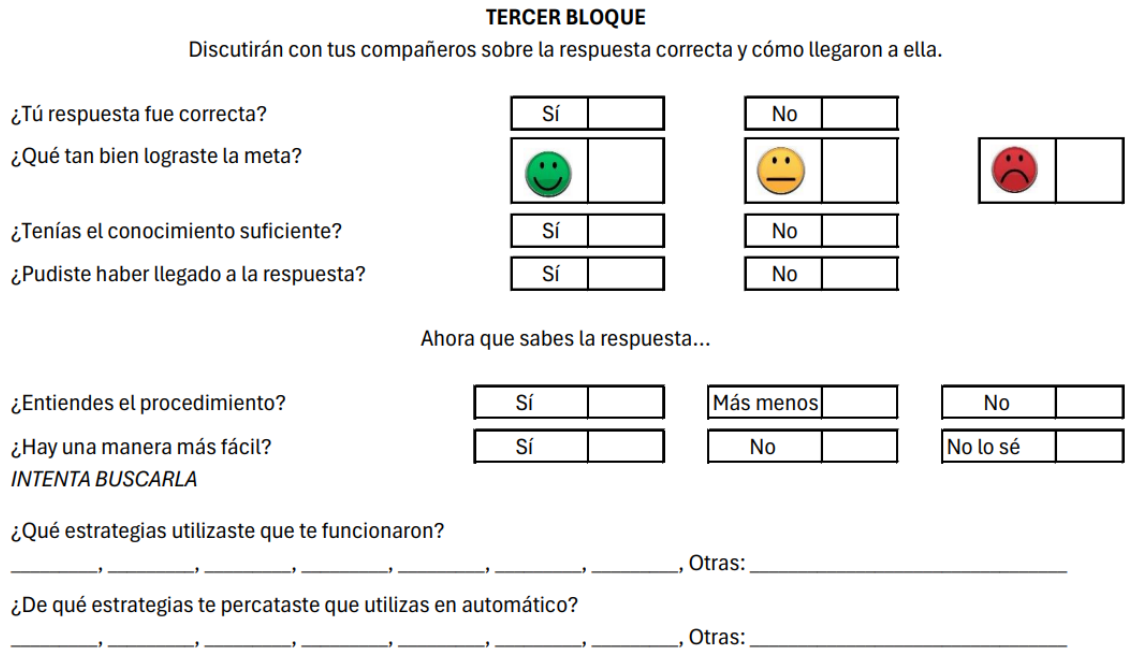
Finalmente, cuando las y los estudiantes tienen un alto nivel de confianza en que su respuesta es correcta, avanzan al tercer bloque: evaluación y reflexión (ver Figura 5). El primer paso es discutir en grupo la respuesta que consideran correcta y el procedimiento que los llevó a esa conclusión. Una vez que llegan a un consenso, pueden responder las preguntas incluidas en la guía. Si es necesario, el profesor muestra la respuesta correcta y explica cómo llegar a ella.

En este bloque, se espera que las y los estudiantes reflexionen sobre su desempeño, evaluando si confiaron en exceso, si se frustraron y dieron una respuesta al azar, o si su dificultad fue por falta de conocimiento o por no haber podido llegar a la solución. Además, se fomenta que anoten las estrategias metacognitivas que les resultaron útiles y aquellas que utilizan de forma automática.

Los 10 problemas utilizados en esta primera etapa se seleccionaron de un repertorio para la preparación de la 36ª y 37ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas (García et al., 2022, 2023). Estos problemas, diseñados para estudiantes de primaria y secundaria, son apropiados para este nivel porque se presentan como acertijos que fomentan el interés de los alumnos. Un ejemplo de ellos se muestra en la Figura 6.

Figura 5

Tercer bloque de la guía de resolución de problemas



TERCER BLOQUE

Discutirán con tus compañeros sobre la respuesta correcta y cómo llegaron a ella.

¿Tú respuesta fue correcta?	Sí		No			
¿Qué tan bien lograste la meta?						
¿Tenías el conocimiento suficiente?	Sí		No			
¿Pudiste haber llegado a la respuesta?	Sí		No			

Ahora que sabes la respuesta...

¿Entiendes el procedimiento?	Sí		Más menos		No	
¿Hay una manera más fácil? *INTENTA BUSCARLA*	Sí		No		No lo sé	

¿Qué estrategias utilizaste que te funcionaron?

_____, _____, _____, _____, _____, _____, _____, Otras: _____

¿De qué estrategias te percataste que utilizas en automático?

_____, _____, _____, _____, _____, _____, _____, Otras: _____

Figura 6

Problema 7 de la fase 1

Problema 7. En un torneo de fútbol participaron 6 equipos: A, B, C, D, E y F. Cada equipo se enfrentó una vez a cada uno de los otros. El torneo se organizó en 5 rondas de manera que en cada ronda hubo tres partidos sucediendo simultáneamente. En cada una de las rondas se transmitió uno de los tres partidos de acuerdo con la tabla que se muestra (por ejemplo, en la ronda 1 el partido que se transmitió fue en el que se enfrentaron A contra B). ¿En qué ronda se enfrentaron D y F?

1	2	3	4	5
E - F	C - D	A - E	A - B	A - C

a) Ronda 1
b) Ronda 2
c) Ronda 3
d) Ronda 4
e) Ronda 5
f) Contestaría al azar entre todas o algunas opciones
g) No contestaría aún

Fase 2: Adquisición de conocimientos

Posteriormente, el estudiantado participará en tres clases con una duración de 50 minutos cada una enfocadas en la coordinación de valores. Durante estas sesiones, el grupo experimental empleará la segunda guía, diseñada específicamente para apoyar la adquisición de conocimientos. En esta etapa, las estrategias metacognitivas y los objetivos se centran en la comprensión profunda y la reflexión sobre el conocimiento adquirido.

A continuación, se presentan las diapositivas utilizadas en la primera clase para ambos grupos. La principal diferencia radica en que el grupo experimental hacía pausas para responder la guía. Además, se añadieron indicaciones metacognitivas basadas en la propuesta de Mevarech y Kramarski (2003), quienes dividen las preguntas en cuatro tipos: comprensión (M), conexión (C), estratégicas (E) y de reflexión (R). Estas preguntas se muestran al margen de cada diapositiva con el objetivo de estimular el pensamiento metacognitivo (ver Tabla 6).

Tabla 6

Diapositivas e indicaciones metacognitivas durante la primera clase

Diapositiva	Indicaciones Metacognitivas
	¿Es lo único que varía? R ¿Cómo es esta variación? M ¿Siempre es así? R ¿Qué significa que haya 5 imágenes de la planta? M

¿Hay un cambio en la cantidad de tierra? M

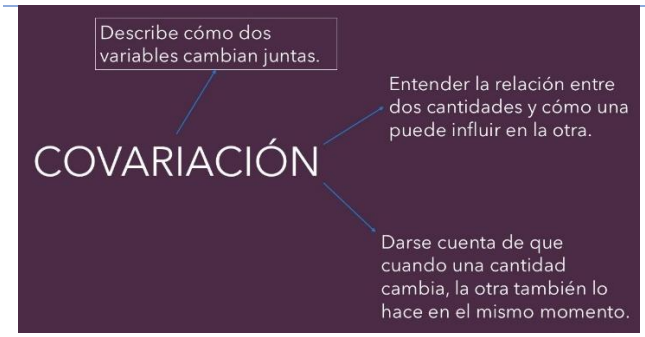
Aunque no se mencionan, ¿las otras características también cambian? R

¿Cuál es el foco de atención? M

¿Qué características encuentro en estas oraciones? M

¿Si son más de dos variables también es covariación? R

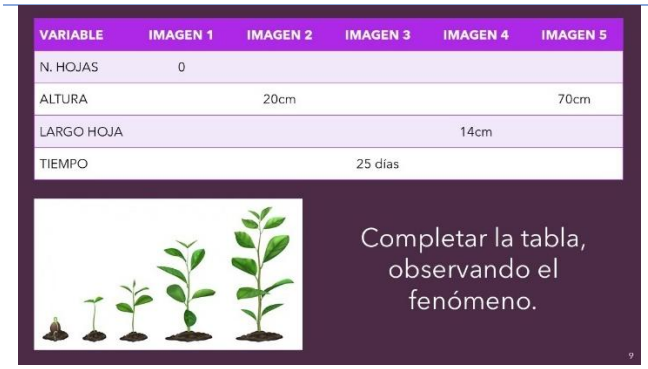
¿Qué puedo concluir? R



Di lo que es la covariación en tus propias palabras. M

PAUSA 1

Menciona un ejemplo que entiendas. M



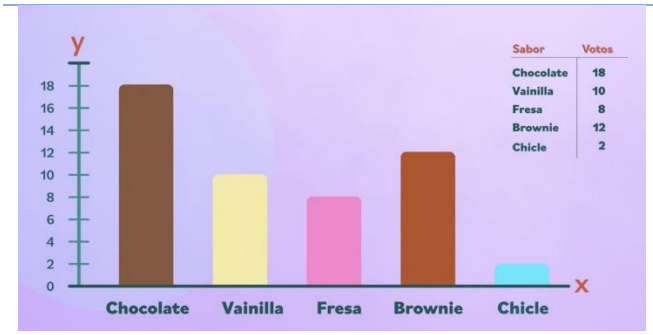
¿Crece toda la altura y después crecen las hojas? M

¿Hay más datos o estos son los únicos? R

¿Se puede analizar cada día? R

¿Se puede analizar cada hora? R

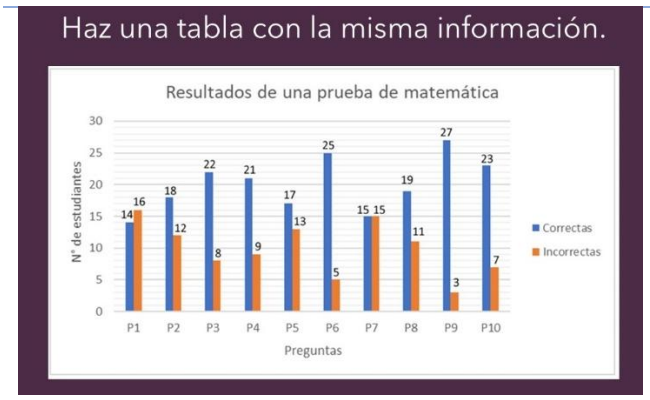
Crea otro grupo de datos. M



¿Entiendes como se formó la tabla? M

¿Qué fue primero, la tabla o el gráfico? R

¿Estaría bien si en chocolate estuviera "12" en vez de "18"? R



¿Cómo se formó la tabla del gráfico anterior? C

¿Cuántos renglones voy a utilizar? E

¿Cuántas columnas voy a utilizar? E

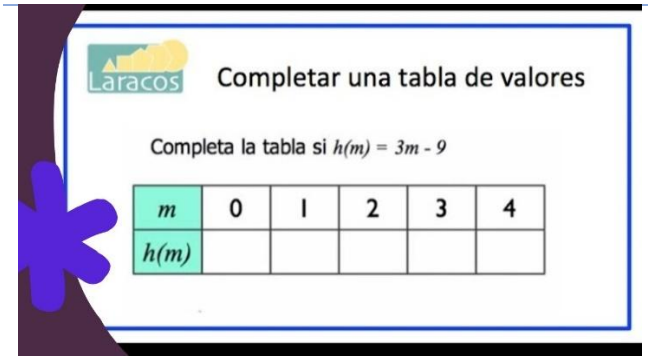
¿Qué diferencia hay entre el gráfico anterior y este? C

PAUSA 2

¿Cómo son los datos? M

¿Puedo agregar una tercera columna? M

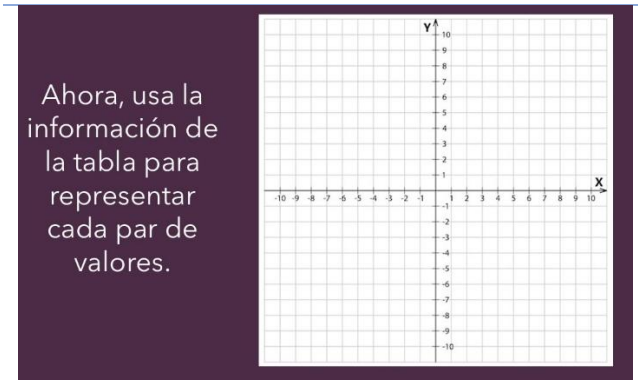
¿Qué variable puedo colocar? M



¿Se pueden elegir los valores de m? M

Di con tus propias palabras que está sucediendo con el segundo renglón. M

En el lenguaje del cálculo, ¿qué significa h(m)? M



¿Para qué sirven las líneas horizontales y verticales que punteamos? M

¿Un punto en el plano, qué representa? R

¿Cómo se relaciona la información de la tabla con la del plano? C

PAUSA 3

A continuación, se describe en detalle la guía utilizada durante la segunda fase de la intervención, la cual está dividida en dos bloques principales para guiar el proceso de adquisición de conocimientos de manera metacognitiva.

El primer bloque (ver Figura 7) está diseñado para que las y los estudiantes apliquen estrategias metacognitivas en momentos clave de su aprendizaje. Si no logran una comprensión adecuada del contenido o concepto estudiado, se les anima a utilizar estas estrategias, que están especialmente diseñadas para mejorar la asimilación de la información, aclarar posibles

confusiones y facilitar la reflexión sobre los conceptos. Este primer bloque se aplica durante las pausas 1 y 2, donde las y los estudiantes tienen la oportunidad de detenerse y revisar lo que han aprendido hasta ese punto, ajustando su enfoque mediante el uso de herramientas metacognitivas específicas (ver Figura 8).

Figura 7

Primer bloque de la guía de adquisición de conocimientos

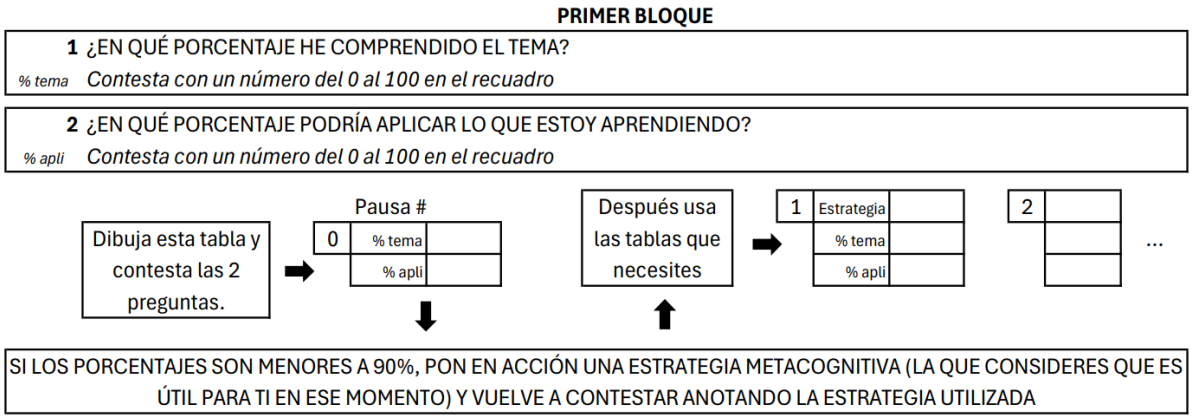


Figura 8

Estrategias metacognitivas propuestas para el primer bloque

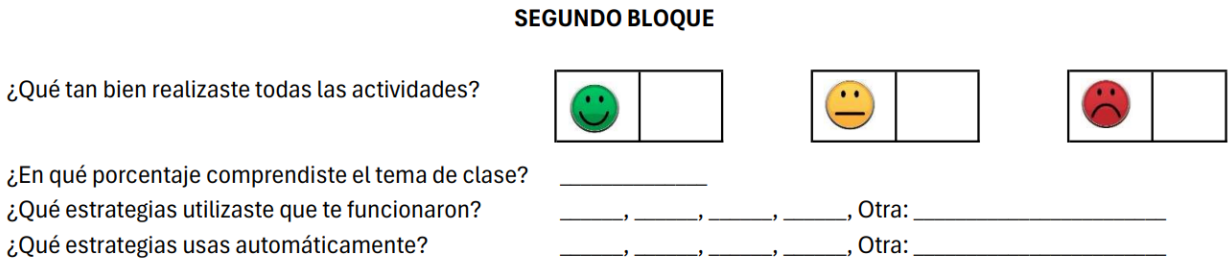
ESTRATEGIAS PARA EL PRIMER BLOQUE: COMPRENSIÓN Y CONOCIMIENTO

a) Hacer preguntas sobre el material
b) Repasar información importante
c) Relacionar el contenido con lo que ya sé
d) Revisar información que no comprendí
e) Hacer anotaciones en mi libreta para recordar qué está pasando
f) Hacer un resumen de lo que he aprendido
g) Motivarme a aprender
h) Crear mis propios ejemplos
i) Hacer dibujos o diagramas para ayudarme
j) Traduzco definiciones a mis propias palabras
k) Cambiar de estrategia de comprensión
l) Pedir ayuda
m) Dividir el estudio en pasos pequeños
n) Organizar la información

El segundo bloque de la guía se utiliza durante la pausa 3 y se centra en una breve autoevaluación (ver Figura 9). En este momento, el estudiantado es guiado a reflexionar sobre su proceso de aprendizaje, evaluando no solo si ha comprendido correctamente el material, sino también cómo ha utilizado las estrategias metacognitivas para facilitar esa comprensión.

Figura 9

Segundo bloque de la guía de adquisición de conocimientos



Análisis de datos

Para comparar los dos grupos y determinar si las estrategias metacognitivas tienen un impacto significativo en la adquisición de conocimientos y en la resolución de problemas, fue necesario realizar pruebas no paramétricas, como la U de Mann-Whitney.

Asimismo, para evaluar si los grupos presentan un comportamiento diferente a la normalidad, se llevaron a cabo pruebas como Shapiro-Wilk, junto con gráficos Q-Q y gráficos de tallo y hojas. De estos, la prueba de Shapiro-Wilk fue la más determinante para tomar decisiones, ya que se recomienda su uso en grupos con menos de 50 participantes.

Todos estos análisis se realizaron utilizando el software IBM SPSS Statistics, versión 26.

Consideraciones éticas

En esta investigación, se tomaron diversas consideraciones éticas para garantizar el bienestar de los participantes. Se aseguró la confidencialidad de la información recabada, protegiendo los datos personales y resultados del grupo estudiantil. Todos los participantes fueron informados sobre el propósito del estudio y se les garantizó el anonimato en la presentación de los resultados, de manera que su identidad no fuera revelada. Además, la participación fue completamente voluntaria, lo que permitió a las y los estudiantes decidir libremente si deseaban formar parte del estudio, sin ningún tipo de presión. Se proporcionó la opción de retirarse en cualquier momento sin repercusiones. Estas medidas son fundamentales para respetar los derechos de los participantes y asegurar la integridad del proceso de investigación.

Capítulo 4. Resultados

En este capítulo se presentan los resultados de la investigación en su totalidad. Se inicia con una descripción de los participantes, proporcionando información sobre su estado inicial. A continuación, se detallan los resultados de las pruebas no paramétricas realizadas para evaluar la hipótesis nula, que establece que las medias son iguales. Finalmente, se presentan los resultados obtenidos a partir de la implementación de las guías metacognitivas.

Descripción de la muestra

La población del estudio consiste en estudiantes de un bachillerato general en Coronango, Puebla, cursando el tercer semestre. Se eligieron dos grupos para la investigación, cuyos datos más relevantes se muestran en la Tabla 7.

Tabla 7

Datos estadísticos iniciales

Características	Grupo experimental	Grupo de control
N. de estudiantes	31	27
N. de mujeres	20	18
N. de hombres	11	9
Rango de edad	15-17 años	15-17 años
	PRETEST PRUEBA	
Media	3.97	3.63
Varianza	2.099	2.165
Desviación estándar	1.449	1.471
	PRETEST MAI	
Media	121.61	171.52
Varianza	1294.645	796.413
Desviación estándar	35.981	28.221

La media en la prueba de coordinación de valores se calculó sobre un total de 11 puntos, mientras que, en el caso del MAI, se determinó con base en un total de 260 puntos.

Pruebas paramétricas y no paramétricas

Primero, se evaluó si los grupos experimental y de control presentaban un comportamiento normal para poder aplicar pruebas paramétricas o no paramétricas. Para esto, se utilizaron diversas pruebas en el software IBM SPSS Statistics, versión 26. Dado que el tamaño de la muestra de cada grupo es inferior a 50 estudiantes, se decidió llevar a cabo la prueba de Shapiro-Wilk como punto de partida.

Inventario de Conciencia Metacognitiva (MAI)

En relación con el MAI, los resultados del comportamiento normal se presentan en la Tabla 8. A pesar de que los gráficos Q-Q y de tallo y hojas muestran ligeras desviaciones, las diferencias en los puntajes siguen un patrón similar al de una distribución normal. La prueba de Shapiro-Wilk arrojó una significancia inferior a 0.05 para ambos grupos, lo que indica que los datos pueden considerarse dentro de una distribución normal.

Tabla 8

Pruebas para determinar normalidad en el MAI

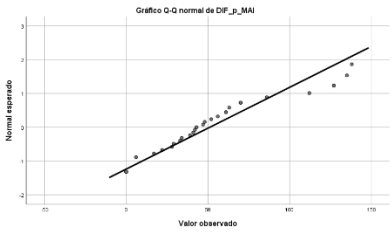
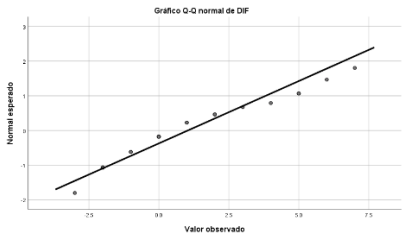
Prueba	Grupo experimental	Grupo de control
Shapiro-Wilk (significancia)	0.010	0.042
Gráfico Q-Q normal		

Gráfico de tallo y hojas

Frecuencia	Stem &	Hoja
7.00	0 .	0000001
6.00	0 .	222333
7.00	0 .	4444455
5.00	0 .	66677
1.00	0 .	8
1.00	1 .	1
2.00	1 .	22
2.00	Extremos	(>=135)

Frecuencia	Stem &	Hoja
6.00	-0 .	222223
2.00	-0 .	11
9.00	0 .	000000011
4.00	0 .	2223
4.00	0 .	4555
2.00	0 .	67

Se realizó una comparación de grupos utilizando la prueba T de Student, cuyos resultados arrojaron una significancia de 0.000. Dado que este valor es menor a 0.05, se rechaza la hipótesis nula, lo que indica que las medias de ambos grupos no son iguales. Esto sugiere una diferencia significativa entre los grupos, reflejando un cambio en las estrategias metacognitivas del grupo experimental. Esta diferencia también se observa en los puntajes medios del MAI, presentados en la Tabla 9, donde el grupo de control mantiene un puntaje similar, mientras que el grupo experimental muestra un avance.

Tabla 9

Comparativa del pretest y postest del MAI

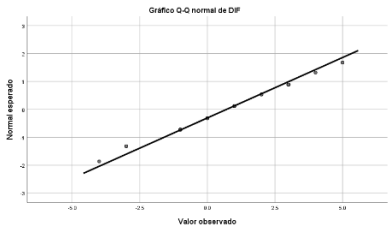
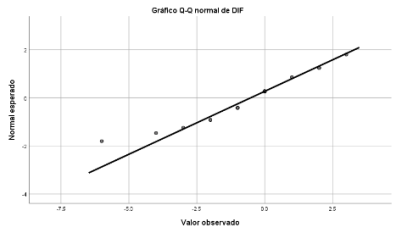
$\bar{x}$	**Pretest**	**Postest**
Control	171.52	172.56
Experimental	121.61	172.81

Prueba de coordinación de valores

En la prueba de coordinación de valores, los resultados arrojaron valores de significancia de 0.316 para el grupo experimental y 0.070 para el grupo de control (ver Tabla 10), ambos superiores a 0.05, lo que indica que no cumplen con los criterios de normalidad. Sin embargo, las pruebas Q-Q sugirieron un comportamiento más cercano a la normalidad. A pesar de estas indicaciones visuales, debido a que los resultados de Shapiro-Wilk mostraron diferencias significativas mayores a 0.05, se decidió realizar la prueba no paramétrica U de Mann-Whitney.

Tabla 10

Pruebas para determinar normalidad en la prueba de coordinación de valores

Prueba	Grupo experimental	Grupo de control
Shapiro-Wilk (significancia)	0.316	0.070
Gráfico Q-Q normal		
Gráfico de tallo y hojas	Frecuencia Stem & Hoja 1.00 -4 . 0 3.00 -3 . 000 .00 -2 . 6.00 -1 . 000000 .00 -0 . 3.00 0 . 000 8.00 1 . 00000000 2.00 2 . 00 5.00 3 . 00000 1.00 4 . 0 2.00 5 . 00	Frecuencia Stem & Hoja 3.00 Extremes (=<-3.0) 3.00 -2 . 000 .00 -1 . 6.00 -1 . 000000 .00 -0 . .00 -0 . 9.00 0 . 000000000 .00 0 . 2.00 1 . 00 4.00 Extremos (>=2.0)

El análisis U de Mann-Whitney arrojó una significancia de 0.036. Al igual que en el caso del MAI, este valor es menor a 0.05, lo que permite rechazar la hipótesis nula de igualdad de medias entre los grupos. Por lo tanto, existe evidencia suficiente para afirmar que las estrategias metacognitivas tuvieron un impacto significativo en la adquisición de conocimientos y en la resolución de problemas, especialmente en el contenido de coordinación de valores. Los resultados de las medias de ambos grupos en el pretest y postest se muestran en la Tabla 11, donde se observa que el grupo de control disminuyó su rendimiento, mientras que el grupo experimental mostró una mejora significativa.

Tabla 11

Comparativa del pretest y postest de la prueba de coordinación de valores

$\bar{x}$	Pretest	Postest
Control	3.63	3.11
Experimental	3.97	4.68

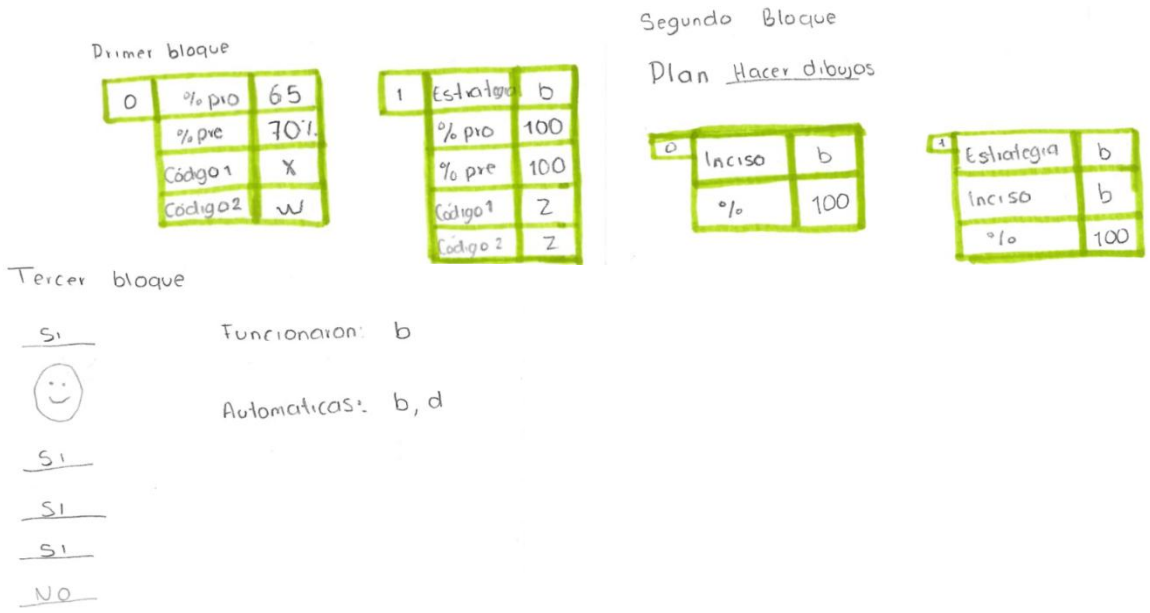
En conclusión, los resultados de esta investigación corroboran nuestra hipótesis, al demostrar que las estrategias metacognitivas tienen un impacto significativo en la adquisición de conocimientos y en la resolución de problemas, específicamente en el ámbito de la coordinación de valores. Los hallazgos indican que las y los estudiantes del grupo experimental experimentaron mejoras notables en su desempeño, lo que sugiere que la implementación de estas estrategias puede ser una herramienta eficaz para potenciar el aprendizaje en matemáticas. Estos resultados no solo respaldan la validez de nuestra hipótesis, sino que también subrayan la importancia de integrar prácticas metacognitivas en el proceso educativo.

Resultados adicionales

En este apartado se presentan los resultados relacionados con las guías metacognitivas, específicamente el progreso logrado en su implementación. Comenzamos mostrando el proceso de llenado de las tablas, tal como se ilustra en la figura 10.

Figura 10

Resolución del estudiante E1 del problema 3

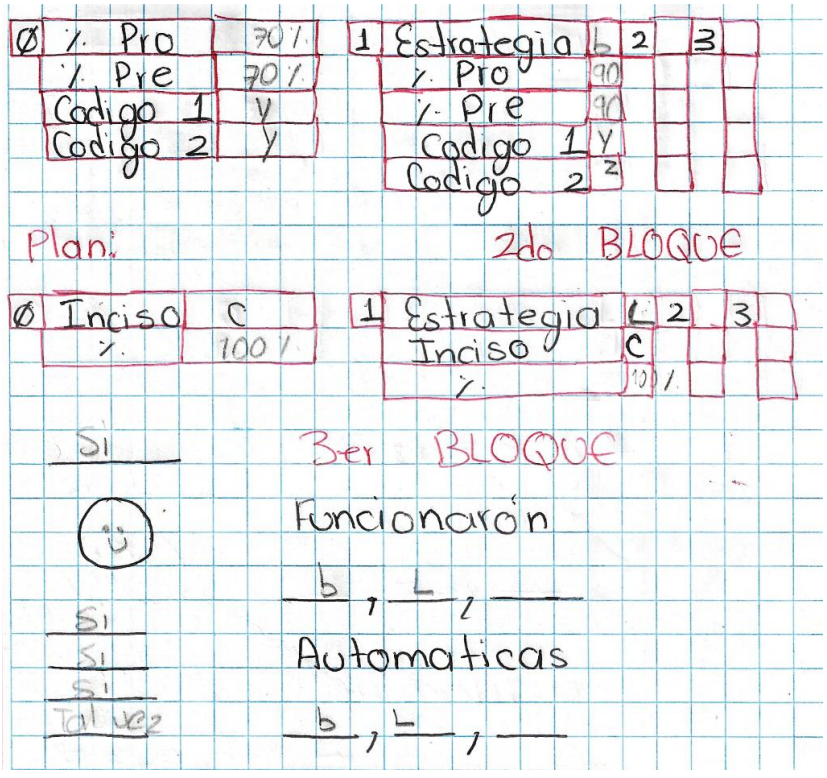


Es importante destacar en la figura anterior que el estudiante E1, durante la resolución del problema 1, utilizó la estrategia d) "detenerme y revisar información importante" como parte de su proceso. En el problema 3, menciona esta misma estrategia como automática y, aunque no la aplicó de manera consciente, la utilizó de forma natural. Este es precisamente uno de los objetivos de la guía: que, gradualmente, las y los estudiantes logren automatizar las estrategias metacognitivas en su proceso de resolución.

Un problema identificado en este y en los ejemplos posteriores (ver Figura 11) es que las y los estudiantes mencionan las estrategias que utilizaron como automáticas, como es el caso de la estrategia b) "entender palabra por palabra hasta comprender el todo". Sin embargo, si realmente hubieran aplicado esta estrategia de manera automática, su porcentaje inicial debería haber sido más alto. Esto indica que no logran distinguir entre las estrategias que efectivamente funcionaron y aquellas que utilizan de forma automática.

Figura 11

Resolución del estudiante E2 del problema 9



Por otro lado, en cuanto a la guía de adquisición de conocimientos, algo que notamos que se puede ver en la figura 12, es que inicialmente pusieron un porcentaje y después de aplicar la estrategia al parecer su comprensión en el tema disminuyó lo que no puede ser posible a menos que hayan sido conscientes de su falta de comprensión, pero no recurrieron a utilizar otras estrategias para mejorar este porcentaje. Algo que se observa en todos los ejemplos dados es que no generan más de 2 tablas, es decir quieren terminar el trabajo rápidamente.

Figura 12

Estrategias utilizadas en las pausas del estudiante E3

Capítulo 5. Discusión y conclusiones

En este capítulo se presentan las discusiones y conclusiones sobre los resultados obtenidos en la investigación. Se analizan tanto los aspectos que funcionaron de manera efectiva como aquellos que presentaron dificultades durante el proceso, evaluando su impacto en el aprendizaje y la resolución de problemas matemáticos. Además, se ofrecen reflexiones sobre cómo optimizar las estrategias utilizadas, con propuestas de mejoras para futuras investigaciones y aplicaciones en el ámbito educativo. Por último, se resumen los principales hallazgos y se formulan recomendaciones que podrían guiar investigaciones futuras.

Discusión

Desde que Flavell introdujo el término "metacognición", ha surgido un debate sobre cómo puede ser comprendida, evaluada y entrenada (Desoete y De Crane, 2019). Esta falta de consenso ha dado lugar a una amplia variedad de investigaciones que emplean diferentes instrumentos y metodologías. Aún no existe un acuerdo claro sobre la forma adecuada de medir la metacognición, y el conocimiento sobre cómo enseñarla es aún más limitado. Además, muchas investigaciones actuales carecen de detalles sobre la aplicación y enseñanza de la metacognición, lo que genera la necesidad de ser más exhaustivos en la presentación de esta información.

El entrenamiento metacognitivo es fundamental en el proceso educativo. Algunos expertos subrayan que no basta con conocer el concepto de metacognición; es esencial integrarlo en la práctica educativa (Terlecki y McMahon, 2018). Sin embargo, hay publicaciones que sugieren que los docentes deben fomentar preguntas metacognitivas cuando sea pertinente (Özsoy y Ataman, 2009). Esta estrategia, no obstante, puede no ser efectiva, ya que su éxito depende del nivel de metacognición inicial del estudiantado. En esta investigación, se llevaron a cabo pruebas previas que se consideran piloto, en las cuales la implementación de estas estrategias metacognitivas no funcionó como se esperaba. Esto coincide con la afirmación de otros autores de que la metacognición debe enseñarse de manera explícita (Desoete y De Craene, 2019) y no de forma implícita, como se hizo en esas pruebas piloto.

Los resultados de la investigación indican que las guías implementadas tuvieron un impacto positivo en las estrategias metacognitivas, tanto en el ámbito del aprendizaje como en la resolución de problemas. Esta evidencia respalda hallazgos de investigaciones previas con objetivos similares, que también destacan la efectividad de las estrategias metacognitivas en el proceso educativo (Jacobse y Harskamp, 2009; Lestari y Jailani, 2018; López-Vargas et al., 2017; Mevarech y Kramarski, 2003; Özsoy y Ataman, 2009; Sandi-Urena et al., 2011; Shin et al., 2023).

Los docentes están dispuestos a esforzarse en la implementación de nuevas metodologías, pero a menudo surge la incertidumbre sobre cómo llevar a cabo actividades metacognitivas de manera efectiva. Para ello, se requieren herramientas prácticas que les resulten útiles (Veenman et al., 2006). Desde esta perspectiva, la presente investigación desarrolló dos guías que pueden aplicarse en diversos tipos de clases, con un enfoque especial en las matemáticas. Sin embargo, es necesario mejorar y adaptar estas guías; una propuesta sería convertirlas en una aplicación, lo que facilitaría al grupo estudiantil responder a las preguntas sin tener que lidiar con el engorroso método de dibujar las tablas y responder sobre ellas, haciendo así el proceso más dinámico. Además, ya existen estudios que han utilizado la tecnología como herramienta en este contexto (Jacobse y Harskamp, 2009; López-Vargas et al., 2017).

Sin embargo, si el objetivo es recopilar datos para un estudio de enfoque cualitativo, es fundamental que la aplicación registre la secuencia de clics que cada estudiante realiza durante la resolución de problemas. Esto permitiría obtener una cantidad significativa de información, como las estrategias más utilizadas y las más efectivas. Se podría analizar, por ejemplo, cuáles estrategias se automatizan rápidamente, cuántas iteraciones son necesarias para lograr una mejor comprensión del problema y cuántas son requeridas para su resolución. Además, estos datos pueden servir como métodos de evaluación, dependiendo de cómo se programe la herramienta.

Respecto a las observaciones y resultados obtenidos de la utilización de las guías, se evidenció que cuando las y los estudiantes alcanzaban un porcentaje alto en el primer bloque de resolución de problemas, utilizaban menos recuadros en el siguiente bloque, que se centraba en el procedimiento. Esto sugiere que una comprensión adecuada del problema es fundamental para

poder realizar operaciones efectivas. En otras palabras, intentar que las y los estudiantes resuelvan problemas sin que comprendan su contexto sería prácticamente ineficaz.

Como se mencionó anteriormente, la mayoría del grupo estudiantil evitó utilizar varios recuadros, limitándose a 1 o 2 para aplicar estrategias. Esto sugiere dos posibles situaciones: primero, que el método puede resultarles demasiado lento, lo que indica la necesidad de mejorarlo; y segundo, que, al haber utilizado pocas estrategias, sería interesante evaluar cómo funcionaría en una población más dispuesta a trabajar con las guías. En tal caso, podríamos obtener una mejora considerable, en comparación con la mejora significativa pero modesta que se observó en este estudio.

Se observó que las estrategias más utilizadas durante la primera fase, correspondiente a la resolución de problemas, fueron: b) "entender palabra por palabra hasta comprender el todo", c) "entender el contexto del problema", h) “hacer anotaciones” y l) "analizar/pensar/reflexionar". Por otro lado, las estrategias menos empleadas fueron: f) "hacer dibujos o diagramas para ayudarme a comprender", n) "usar una estrategia que ha funcionado en el pasado", r) “organizar la información” y s) "comprobar mi respuesta". Por lo tanto, sería relevante evaluar la eficiencia de estas últimas estrategias.

En la segunda fase, las estrategias más utilizadas fueron: e) "hacer anotaciones en mi libreta para recordar qué está pasando", j) "traducir definiciones a mis propias palabras" y d) "revisar información que no comprendí". Por otro lado, las menos empleadas fueron: i) "hacer dibujos o diagramas para ayudarme", k) "cambiar de estrategia de comprensión" y l) "pedir ayuda". Se observó que una estrategia muy útil, como el uso de diagramas o dibujos, fue de las menos empleadas en ambas fases. Una desventaja de permitir que la elección de estrategias sea completamente libre es que las y los estudiantes pueden pasar por alto herramientas que les serían funcionales, pero no lo descubrirán hasta probarlas. Sería valioso implementar una fase previa a la resolución en la que se sugieran estrategias, para luego evaluar si, al conocerlas, el estudiantado las aplican con mayor frecuencia.

Conclusiones

El objetivo de esta investigación era analizar el impacto de las estrategias metacognitivas en la adquisición de conocimientos y la resolución de problemas en estudiantes de nivel medio superior, con un enfoque específico en la coordinación de valores. Este objetivo se cumplió mediante la implementación de guías metacognitivas al grupo experimental durante la fase de intervención, las cuales ayudaron al estudiantado a reflexionar sobre su proceso de aprendizaje y a mejorar su desempeño en problemas matemáticos. Se llevaron a cabo pruebas pretest y postest, así como un análisis estadístico para evaluar la efectividad de dichas estrategias, confirmando que su aplicación tuvo un impacto significativo en el desarrollo de las habilidades cognitivas y en la comprensión de los problemas planteados.

Sería valioso explorar la utilidad de estas guías en el contexto de entornos computacionales o aplicaciones digitales. Los entornos computacionales son de gran relevancia, ya que se emplean ampliamente en contextos educativos y no educativos, brindando oportunidades que los docentes pueden aprovechar con un esfuerzo relativamente bajo (Jacobse y Harskamp, 2009). La implementación de andamiaje metacognitivo en entornos computacionales se convierte en un recurso valioso para las y los estudiantes, ya que les facilita la gestión y regulación de sus procesos cognitivos a lo largo del aprendizaje (López-Vargas et al., 2017).

Asimismo, se sugiere replicar estas guías en otros entornos, con un alumnado más participativo y dispuesto a seguir el ciclo iterativo de monitoreo y control de sus acciones durante la resolución de problemas y la adquisición de conocimientos. Aunque se observó poco interés en desarrollar estas habilidades por completo, se logró una mejora significativa, lo que motiva a seguir explorando el potencial de esta herramienta.

Referencias

Abdullah, A., Rahman, S., y Hamzah, M. (2017). Metacognitive skills of Malaysian students in non-routine mathematical problem solving. *Bolema: Boletim De Educação Matemática, 31*(57), 310–322. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a15

Al-Hilawani, Y. (2016). Metacognition in real life situations and study skills and habits: Two types of processes. *International Journal of Progressive Education, 12*(1), 73-89. https://www.researchgate.net/publication/299423399_Metacognition_in_Real_Life_Situations_and_Study_Skills_and_Habits_Two_Types_of_Processes

Artz, A., y Armour-Thomas, E. (1992). Development of a cognitive-metacognitive framework for protocol analysis of mathematical problem solving in small groups. *Cognition and Instruction, 9*(2), 137-175. http://dx.doi.org/10.1207/s1532690xci0902_3

Baki, A., Çatlıoğlu, H., Coştu, S., y Birgin, O. (2009). Conceptions of high school students about mathematical connections to the real-life. *Procedia Social and Behavioral Sciences, 1*(1), 1402-1407. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2009.01.247

Bannert, M. (2009). Promoting self-regulated learning through prompts. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 23*(2), 139–145. https://doi.org/10.1024/1010-0652.23.2.139

Bannert, M., y Mengelkamp, C. (2013). Scaffolding hypermedia learning through metacognitive prompts. En R. Azevedo y V. Aleven (Eds.), *International handbook of metacognition and learning technologies* (pp. 171-186). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-5546-3_12

Bayat, S., Tarmizi, R. A. (2010). Assessing cognitive and metacognitive strategies during algebra problem solving among university students. *Procedia Social and Behavioral Sciences, 8*, 403–410. https://doi.org/doi:10.1016/j.sbspro.2010.12.056

Ben, F., Sinaga, B., y Rajagukguk, W. (2020). Analysis of students' metacognition-based mathematical reasoning abilities in guided discovery learning [conferencia]. *Proceedings of the 5th Annual International Seminar on Transformative Education and Educational Leadership (AISTEEL)*, Medan, Indonesia. https://doi.org/10.2991/assehr.k.201124.097

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., y Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 352-378. https://doi.org/10.2307/4149958

Chi, M. T. H., y Bassok, M. (1989). Learning from examples via self-explanations. En L. B. Resnick (Ed.), *Knowing, learning, and instruction: Essays in honor of Robert Glaser* (pp. 251-282). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Confrey, J., y Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 135–164. https://doi.org/10.1007/BF01273661

Confrey, J., y Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(1), 66–86. https://doi.org/10.2307/749228

Craik, F. I. M., y Lockhart, R. S. (1972). Levels of processing: A framework for memory research. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior, 11*(6), 671-684. https://doi.org/10.1016/S0022-5371(72)80001-X

Desoete, A. (2007). Evaluating and improving the mathematics teaching-learning process through metacognition. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 5*(3), 705-730. https://www.researchgate.net/publication/323839922_Evaluating_and_improving_the_mathematics_teaching-learning_process_through_metacognition

Desoete, A., y De Craene, B. (2019). Metacognition and mathematics education: An overview. *ZDM Mathematics Education, 51*, 565–575. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01060-w

English, L., y Sriraman, B. (2010). Problem solving for the 21st century. En B. Sriraman y L. English (Eds.), *Theories of mathematics education. Advances in mathematics education* (pp. 263-290). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-00742-2_27

Flavell, J. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive-developmental inquiry. *American Psychologist, 34*(10), 906-911. https://doi.org/10.1037/0003-066X.34.10.906

Gao, M. (2012). Classroom assessments in mathematics: High school students' perceptions. *International Journal of Business and Social Science, 3*(2), 63-68. https://ijbssnet.com/journals/Vol_3_No_2_Special_Issue_January_2012/7.pdf

García, L. M., Gómez, J. A., y Pérez, M. L. (2022). *Problemas introductorios para la 36ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas*. Sociedad Matemática Mexicana.

García, L. M., Gómez, J. A., y Pérez, M. L. (2023). *Problemas introductorios para la 37ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas*. Sociedad Matemática Mexicana.

Garrison, D. R., y Akyol, Z. (2015). Toward the development of a metacognition construct for communities of inquiry. *Internet and Higher Education, 24*, 66–71. http://dx.doi.org/10.1016/j.iheduc.2014.10.001

Hong, J. C., Hwang, M. Y., Liu, M. C., Tsai, C. R., y Tai, K. H. (2020). Metacognition in covariation reasoning relevant to performance achievement mediated by experiential values in a simulation game. *Educational Technology Research and Development, 68,* 929–948. https://doi.org/10.1007/s11423-019-09711-1

Idris, N. (2005). *Teaching and learning of mathematics*. Utusan Publications.

Imaya, I. A., Budiyono, y Nurhasanah, F. (2020). Analysis of students' metacognition in solving mathematics problemas. *Journal of Physics: Conference Series, 1613*. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1613/1/012040

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación [INEE]. (2008). *PISA en el aula. Matemáticas*. Fondo Editorial INEE.

Izzati, L., y Mahmudi, A. (2018). The influence of metacognition in mathematical problem solving. *5th International Conference on Research, Implementation, and Education of*

Mathematics and Sciences, Yogyakarta, Indonesia. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1097/1/012107

Jacobse, A. E., y Harskamp, E. G. (2009). Student-controlled metacognitive training for solving word problems in primary school mathematics. *Educational Research and Evaluation, 15*(5), 447–463. https://doi.org/10.1080/13803610903444519

Johnson, H. L., McClictock, E., y Horbein, P. (2017). Ferris wheels and filling bottles: a case of a student's transfer of covariational reasoning across tasks with different backgrounds and features. *ZDM Mathematics Education, 49*, 851-864. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0866-4

Kertil, M., Erbas, A. K., y Cetinkaya, B. (2019). Developing prospective teachers' covariational reasoning through a model development sequence. *Mathematical Thinking and Learning, 21*(3), 207–233. https://doi.org/10.1080/10986065.2019.1576001

Kuhn, D., y Dean, D. (2004). Metacognition: A bridge between cognitive psychology and educational practice. *Theory into Practice, 43*(4), 268-273. https://doi.org/10.1207/s15430421tip4304_4

Kramarski, B., y Mevarech, Z. R. (2003). Enhancing mathematical reasoning in the classroom: The effects of cooperative learning and metacognitive training. *American Educational Research Journal, 40*(1), 281-310. https://doi.org/10.3102/00028312040001281

Lee, Y., Capraro, M. M., Capraro, R. M., y Bicer, A. (2018). A meta-analysis: Improvement of students' algebraic reasoning through metacognitive training. *International Education Studies, 11*(10), 42-49. https://doi.org/10.5539/ies.v11n10p42

Lestari, W., y Jailani. (2018). Enhancing an ability mathematical reasoning through metacognitive strategies. *Journal of Physics: Conference Series, 1097*. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1097/1/012117

Lin, X., y Lehman, J. D. (1999). Supporting learning of variable control in a computer-based biology environment: Effects of prompting college students to reflect on their own

thinking. *Journal of Research in Science Teaching, 36*(7), 837–858. https://doi.org/10.1002/(SICI)1098-2736(199909)36:7<837::AID-TEA6>3.0.CO;2-U

Livingston, J. A. (2003). Metacognition: An overview. *Psychology, 13*, 259-266. https://eric.ed.gov/?id=ED474273

López-Vargas, O., Ibáñez-Ibáñez, J., y Racines-Prada, O. (2017). Students' metacognition and cognitive style and their effect on cognitive load and learning achievement. *Educational Technology & Society, 20*(3), 145–157. https://www.jstor.org/stable/26196126

Lucangeli, D., y Cornoldi, C. (1997). Mathematics and metacognition: What is the nature of the relationship. *Mathematical Cognition, 3*(2), 121–139. https://doi.org/10.1080/135467997387443

Martínez, M. (2006). What is metacognition. *Phi Delta Kappan, 87*(9), 696-699. https://doi.org/10.1177/003172170608700916

Mevarech, Z. R., y Kramarski, B. (2003). The effects of metacognitive training versus worked-out examples on students' mathematical reasoning. *British Journal of Educational Psychology, 73*(4), 449-471. https://doi.org/10.1348/000709903322591181

Mokos, E., y Kafoussi, S. (2013). Elementary students' spontaneous metacognitive functions in different types of mathematical problems. *Journal of Research in Mathematics Education, 2*(2), 242-267. http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2013.29

Moore, K. C., Paoletti, T., y Musgrave, S. (2013). Covariational reasoning and invariance among coordinate systems. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(3), 461-473. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.05.002

Muncer, G., Higham, P. A., Gosling, C. J., Cortese, S., Wood-Downie, H., y Hadwin, J. A. (2022). A meta-analysis investigating the association between metacognition and math performance in adolescence. *Educational Psychology Review, 34*, 301–334. https://doi.org/10.1007/s10648-021-09620-x

Núñez, J., González-Pienda, J., Alvarez, L., González, P., González-Pumariega, S., Roces, C., Castejón, L., Solano, P., Bernardo, A., García, D., Silva, E., Rosário, P., y Rodrigues, L. (2005, septiembre). Las actitudes hacia las matemáticas: Perspectiva evolutiva [conferencia]. *VIII Congresso Galaico-Português de Psicopedagogia*, Parada de Tibães, Braga, Portugal. https://www.educacion.udc.es/grupos/gipdae/documentos/congreso/viiicongreso/pdfs/291.pdf

Ojose, B. (2011). Mathematics literacy: Are we able to put the mathematics we learn into everyday use. *Journal of Mathematics Education, 4*(1), 89-100. https://educationforatoz.com/images/8.Bobby_Ojose_--_Mathematics_Literacy_Are_We_Able_To_Put_The_Mathematics_We_Learn_Into_Everyday_Use.pdf

Organisation for Economic Cooperation and Development [OECD]. (2013). *Estímulos PISA de matemáticas liberados: Aplicación como recurso didáctico en la ESO*. PISA, OECD Publishing.

Organisation for Economic Cooperation and Development [OECD]. (2023a). *PISA 2022 Assessment and analytical framework*. PISA, OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/dfe0bf9c-en

Organisation for Economic Cooperation and Development [OECD]. (2023b). *PISA 2022 results (volume I): The state of learning and equity in education*. OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/53f23881-en

Özsoy, G., y Ataman, A. (2009). The effect of metacognitive strategy training on mathematical problem-solving achievement. *International Electronic Journal of Elementary Education, 1*(2), 68-83. https://www.iejee.com/index.php/IEJEE/article/view/278

Phonapichat, P., Wongwanich, S., y Sujiva, S. (2014). An analysis of elementary school students' difficulties in mathematical problem solving. *Procedia Social and Behavioral Sciences, 116*, 3169-3174. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2014.01.728

Sandi-Urena, S., Cooper, M. M., y Stevens, R. H. (2011). Enhancement of metacognition use and awareness by means of a collaborative intervention. *International Journal of Science Education, 33*(3), 323-340. https://doi.org/10.1080/09500690903452922

Schoenfeld, A. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint). *Journal of Education, 196*(2), 1-38. https://doi.org/10.1177/002205741619600202

Schraw, G., y Dennison, R. (1994a). Assessing metacognitive awareness. *Contemporary Eucational Psychology, 19*(4), 460-475. https://doi.org/10.1006/ceps.1994.1033

Schraw, G., y Dennison, R. (1994b). Metacognitive awareness inventory [Database record]. *PsycTESTS*. https://dx.doi.org/10.1037/t21885-000

Schwartz, N. H., Scott, B. M., y Holzberger, D. (2013). Metacognition: A closed-loop model of biased competition–evidence from neuroscience, cognition, and instructional research. En R. Azevedo y V. Aleven (Eds.), *International handbook of metacognition and learning technologies* (pp. 79-94). Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-5546-3_6

Shin, Y., Jung, J., Zumbach, J., y Yi, E. (2023). The Effects of Worked-Out Example and Metacognitive Scaffolding on Problem-Solving Programming. *Journal of Educational Computing Research, 61*(6), 1–20. https://doi.org/10.1177/07356331231174454

Siagian, M. V., Saragih, S., y Sinaga, B. (2019). Development of learning materials oriented on problem-based learning model to improve students' mathematical problem solving ability and metacognition ability. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 14*(2), 331-340. https://doi.org/10.29333/iejme/5717

Sokolowski, A. (2021). Covariational reasoning - Theorical background. En *Understanging Physics using mathematical reasoning* (pp. 41-64). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-80205-9_5

Stillman, G. (2020). Metacognition. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 608-610). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_166

Sweller, J., Ayres, P., Kalyuga, S. (2011). Cognitive load theory. *Explorations in the Learning Sciences, Instructional Systems and Performance Technologies*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-8126-4

Terlecki, M. S., y McMahon, A. (2018). A call for metacognitive intervention: Improvements due to curricular programming in leadership. *Journal of Leadership Education, 17*(4), 130-145. https://doi.org/10.12806/V17/I4/R8

Thompson, P. W., y Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). National Council of Teachers of Mathematics.

Veenman, M. V. J., van Hout-Wolters, B. H. A. M., y Afflerbach, P. (2006). Metacognition and learning: conceptual and methodological considerations. *Metacognition Learning, 1*, 3–14. https://doi.org/10.1007/s11409-006-6893-0

Velásquez, B. M. B., Remolina, N. de C., y Calle, M. G. M. (2009). El cerebro que aprende. *Tabula Rasa, 11*, 329-347. https://doi.org/10.25058/20112742.380

Vinner, S. (2007). Mathematics education: Procedures, rituals and man's search for meaning. *Journal of Mathematical Behavior*, *26*(1), 1-10. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.03.004

Wong, P. (1992). Metacognition in mathematical problem solving. *Singapore Journal of Education, 12*(2), 48-58. https://doi.org/10.1080/02188799208547691

Yu, F. (2024). Extending the covariation framework: Connecting covariational reasoning to students' interpretation of rate of change. *Journal of Mathematical Behavior, 73*, 101122. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2023.101122

ANEXOS

ANEXO 1. Inventario de Conciencia Metacognitiva (Schraw y Dennison, 1994b)

TEST DE METACOGNICIÓN

INSTRUCCIONES: Para todas las oraciones marca con una X el recuadro con el cuál te identificas más.

ORACIONES	NUNCA	RARAMENTE	OCASIONALMENTE	FRECUENTEMENTE	MUY FRECUENTEMENTE
Me pregunto periódicamente si estoy cumpliendo mis objetivos.					
Considero varias alternativas a un problema antes de responder.					
Trato de usar estrategias que han funcionado en el pasado.					
Me organizo mientras aprendo para tener suficiente tiempo.					
Entiendo mis fortalezas y debilidades intelectuales.					
Pienso en lo que realmente necesito aprender antes de comenzar una actividad.					
Sé qué tan bien lo hice una vez que terminé un examen.					
Me fijo metas específicas antes de comenzar una actividad.					
Disminuyo la velocidad cuando encuentro información importante.					
Sé qué tipo de información es más importante aprender.					
Me pregunto si he considerado todas las opciones al resolver un problema.					
Organizo bien la información.					
Enfoco conscientemente mi atención en información importante.					
Tengo un propósito específico para cada estrategia que uso.					
Aprendo mejor cuando sé algo sobre el tema.					
Sé lo que el profesor espera que aprenda.					
Considero que soy bueno/a recordando información.					
Utilizo diferentes estrategias de aprendizaje según la situación.					
Me pregunto si hay una forma más fácil de hacer las cosas después de terminar una actividad.					
Sé exactamente qué tan bien aprendo.					
Repaso constantemente para ayudarme a comprender información importante.					
Me hago preguntas sobre el material antes de comenzar una actividad.					
Pienso en varias formas de resolver un problema y elijo la mejor.					
Hago un resumen de lo que he aprendido después de terminar.					
Pido ayuda a los demás cuando no entiendo algo.					

	NUNCA	RARA MENTE	OCASIONAL	FRECUENTE	MUY FRECU
Cuando lo necesito, puedo motivarme para aprender.					
Soy consciente de las estrategias que utilizo cuando estudio.					
Me encuentro a mí mismo(a) analizando la utilidad de las estrategias mientras estudio.					
Uso mis fortalezas intelectuales para compensar mis debilidades.					
Me concentro en el significado y la importancia de la nueva información.					
Creo mis propios ejemplos para que la información sea más significativa.					
Tengo buen juicio sobre qué tan bien comprendo algo.					
Me encuentro a mí mismo(a) usando estrategias de aprendizaje útiles de forma automática.					
Me encuentro haciendo pausas regularmente para comprobar mi comprensión.					
Sé cuándo será más efectiva cada estrategia que utilizo.					
Me pregunto qué tan bien logré mis metas después de que las terminé.					
Hago dibujos o diagramas para ayudarme a entender mientras aprendo.					
Después de resolver un problema, me pregunto si he considerado todas las opciones.					
Trato de traducir la nueva información a mis propias palabras.					
Cambio de estrategia cuando no logro comprender.					
Uso la estructura organizativa del texto (títulos, subtítulos, viñetas, etc.) para ayudarme a aprender.					
Antes de comenzar una tarea, leo las instrucciones cuidadosamente.					
Me pregunto si lo que estoy leyendo tiene relación con lo que ya sé.					
Cuando me confundo reevalúo mis suposiciones.					
Organizo mi tiempo para lograr mejor mis metas.					
Aprendo más cuando me interesa el tema.					
Trato de dividir el estudio en pasos más pequeños.					
Me concentro en el significado general más que en los detalles.					
Me hago preguntas sobre qué tan bien lo estoy haciendo mientras aprendo algo nuevo.					
Me pregunto si aprendí tanto como pude después de terminar una actividad.					
Me detengo y reviso información nueva que no está clara.					
Me detengo y vuelvo a leer cuando me confundo.					

ANEXO 2. Prueba de coordinación de valores

Prueba del área "Coordinación de valores"

Instrucciones: En la hoja de respuestas, encierra el círculo del inciso de la respuesta correcta o utiliza el último inciso cuando no sepas la respuesta. No escribas sobre las hojas.

EL SUEÑO DE LAS FOCAS

Una foca tiene que respirar incluso si está durmiendo dentro del agua. Martín observó una foca durante una hora. Cuando empezó a observarla, la foca estaba en la superficie tomando aire. Entonces se sumergió hasta el fondo del mar y comenzó a dormir. Desde el fondo invirtió 8 minutos en subir lentamente a la superficie, donde tomó aire otra vez. Tres minutos después estaba de nuevo en el fondo del mar. Martín se percató de que este proceso era muy regular.

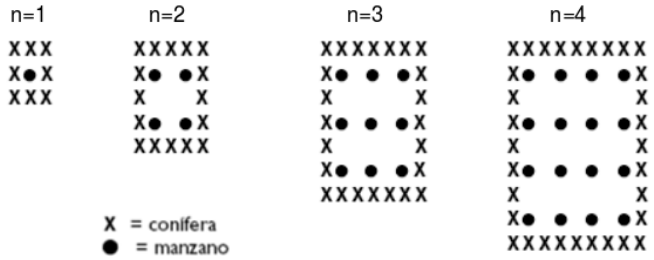
Pregunta 1. Al cabo de una hora la foca estaba

a) tomando aire
b) bajando
c) subiendo
d) en el fondo
e) no contestaría o lo haría al azar

MANZANOS

Un agricultor planta manzanos en un terreno cuadrado. Con objeto de proteger los manzanos del viento planta coníferas (un tipo de pino) alrededor de la totalidad del huerto.

Aquí ves un esquema de esta situación donde se puede apreciar la colocación de los manzanos y de las coníferas para cualquier número (n) de filas de manzanos:



Se pueden utilizar dos fórmulas para calcular el número de manzanos y el de coníferas:

Número de manzanos = n^2
Número de coníferas = $8n$
donde *n* es el número de filas de manzanos.

Pregunta 2. Existe un valor de *n* para el cual el número de manzanos coincide con el de coníferas. Halla este valor de *n*.

a) 9
b) 8
c) 6
d) en ningún momento son iguales
e) no contestaría o lo haría al azar

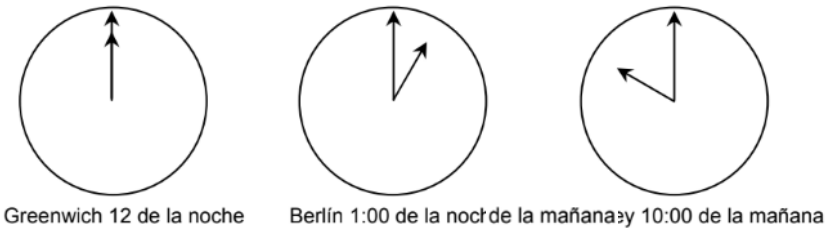
Pregunta 3. Supongamos que el agricultor quiere plantar un huerto mucho mayor, con muchas filas de árboles. A medida que el agricultor vaya aumentando el tamaño del huerto, ¿cuál de los siguientes planteamientos es correcto?

a) se incrementará más rápido el número de manzanos que el de coníferas
b) se incrementará más rápido el número de coníferas que el de manzanos
c) se incrementarán al mismo ritmo
d) se incrementará ocho veces más rápido el número de coníferas que el de manzanos
e) no contestaría o lo haría al azar

CHATEAR

Mark (de Sydney, Australia) y Hans (de Berlín, Alemania) se comunican a menudo utilizando una red social para chatear. Ambos tienen que conectarse a Internet simultáneamente para poder chatear.

Para encontrar una hora apropiada para platicar, Mark buscó un mapa horario mundial y halló lo siguiente:



Pregunta 4. ¿Qué hora es en Berlín, cuando son las 7:00 de la tarde en Sydney?

a) 12:00 de la tarde
b) 10:00 de la mañana
c) 3:00 de la mañana
d) 4:00 de la mañana
e) no contestaría o lo haría al azar

Pregunta 5. Mark y Hans no pueden chatear entre las 9:00 de la mañana y las 4:30 de la tarde, de sus respectivas horas locales, porque tienen que ir al colegio. Tampoco pueden desde las 11:00 de la noche hasta las 7:00 de la mañana, de sus respectivas horas locales, porque estarán durmiendo.

¿A qué horas podrían chatear Mark y Hans?

a) Sydney 8:00 de la mañana; Berlín 10:00 de la noche

b) Sydney 7:00 de la tarde; Berlín 10:00 de la mañana
c) Sydney 5:00 de la tarde; Berlín 8:00 de la mañana
d) Sydney 7:00 de la mañana; Berlín 9:00 de la noche
e) No contestaría o lo haría al azar

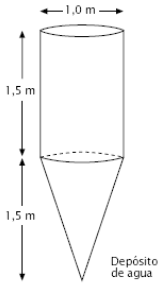
EL DEPÓSITO DE AGUA

Un depósito de agua tiene la forma y dimensiones que se muestran en el dibujo.

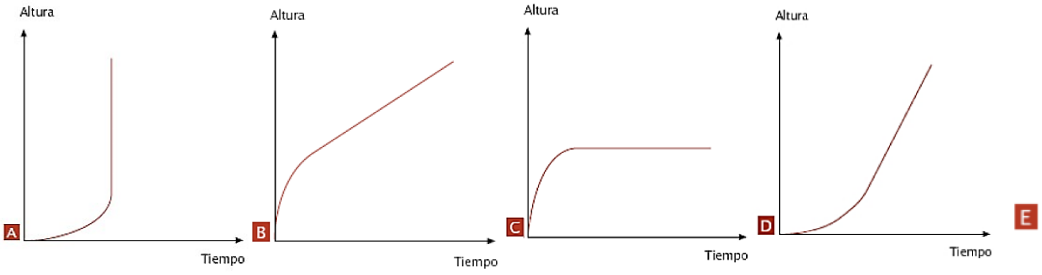
Inicialmente el depósito está vacío. Después se llena con agua de manera constantemente.

Julián midió el tiempo que se tardaba en llenar cada medio metro y obtuvo la siguiente tabla.

Altura (m)	Tiempo (min)
0.5	0.25
1	1.9
1.5	6.5
2	13
2.5	19.5
3	26



Pregunta 6. ¿Cuál de los gráficos siguientes muestra el comportamiento descrito en la tabla?



E No contestaría o lo haría

VENDER PERIÓDICOS

Dos periódicos de Tabasco están contratando. Los siguientes anuncios muestran cómo paga cada uno.

LA VOZ DE TABASCO
¿NECESITAS DINERO EXTRA?

$2.00 pesos por periódico para los primeros 240 ejemplares que vendas en una semana, más $4.00 pesos por cada periódico adicional vendido.

EL CRIOLLO

¡TRABAJO BIEN PAGADO QUE REQUIERE POCO TIEMPO!

Vende el periódico *El Criollo* y gana $600 a la semana más $0.50 adicionales por periódico vendido.

Pregunta 7. Elige el inciso que completa adecuadamente la tabla de acuerdo con la información dada.

No. de periódicos	20	160	(III)	500
La voz de Tabasco	(I)	320	720	(IV)
El Criollo	(II)	680	750	850

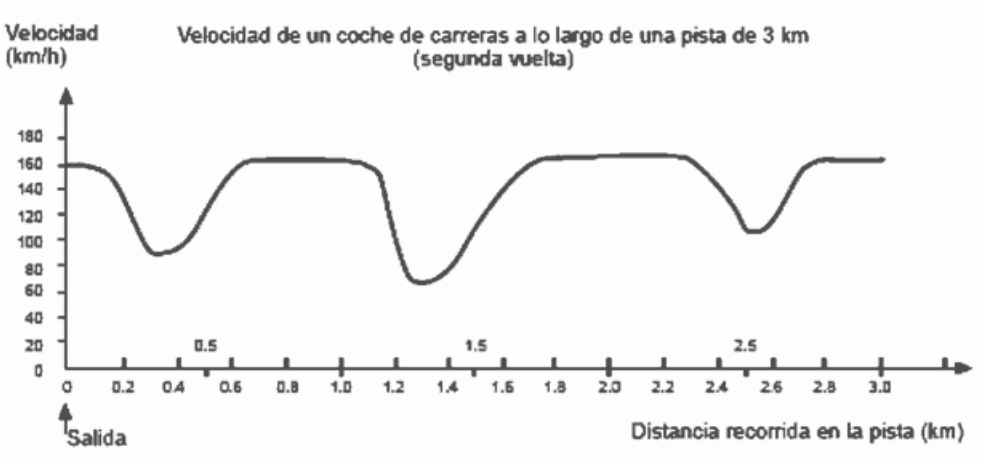
a) I – 40, II – 610, III – 360, IV - 1000
b) I – 40, II – 600, III – 300, IV - 840
c) I – 40, II – 550, III – 360, IV - 840
d) I – 40, II – 610, III – 300, IV - 1520
e) No contestaría o lo haría al azar

Pregunta 8. ¿Qué afirmación es correcta de acuerdo con esta información?

a) Se ganará más en La voz de Tabasco con cualquier cantidad de periódicos
b) Se ganará más en El Criollo con cualquier cantidad de periódicos
c) Si se venden pocos ganará más en La voz de Tabasco y si se venden muchos, en El Criollo
d) Si se venden pocos ganará más en El Criollo y si se venden muchos, en La voz de Tabasco
e) No contestaría o lo haría al azar

VELOCIDAD DE UN COCHE DE CARRERAS

Este gráfico muestra cómo varía la velocidad de un coche de carreras a lo largo de una pista llana de 3 km durante su segunda vuelta.



Pregunta 9. ¿Dónde alcanzó el coche la velocidad más baja en la segunda vuelta?

a) En la línea de salida (km 0)
b) Aproximadamente en el km 0.8
c) Aproximadamente en el km 1.3
d) Al finalizar la vuelta (km 3)
e) No contestaría o lo haría al azar

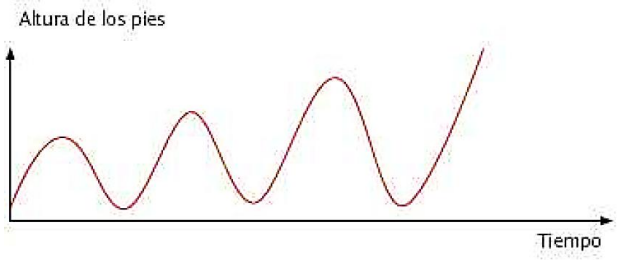
Pregunta 10. ¿Qué se puede afirmar sobre la velocidad del coche entre el km 2,6 y el 2,8?

a) La velocidad del coche permanece constante
b) La velocidad del coche aumenta
c) La velocidad del coche disminuye
d) La velocidad del coche no se puede hallar basándose en este gráfico
e) No contestaría o lo haría al azar

EL COLUMPIO

Manuel está sentado en un columpio. Empieza a columpiarse. Está intentando llegar tan alto como le sea posible.

El siguiente gráfico muestra su comportamiento.



Pregunta 11. ¿Qué enunciado es correcto?

a) La altura y el tiempo aumentan y disminuyen
b) La altura solo aumenta mientras el tiempo aumenta y disminuye
c) La altura aumenta y disminuye mientras el tiempo solo aumenta
d) La altura solo aumenta mientras el tiempo solo aumenta
e) No contestaría o lo haría al azar

ANEXO 3. Guías metacognitivas

Guía para la resolución de problemas matemáticos

Instrucciones: Resuelve cada bloque en orden, debes anotar tus respuestas en una hoja aparte.

PRIMER BLOQUE

	1 ¿EN QUÉ PORCENTAJE ENTIENDO DE QUÉ TRATA EL PROBLEMA?
% pro	*Contesta con un número del 0 al 100 en el recuadro*
	2 ¿EN QUÉ PORCENTAJE ENTIENDO DE QUÉ TRATA LA PREGUNTA?
% pre	*Contesta con un número del 0 al 100 en el recuadro*
	3 ¿TENGO EL CONOCIMIENTO SUFICIENTE (NO CAPACIDAD) PARA RESOLVERLO?
	Contesta con una letra de acuerdo con el código siguiente:
Código 1	*"v" No lo tengo* *"w" Me falta mucho* *"x" Tengo la mitad* *"y" Me falta poco* *"z" Sí lo tengo*
	4 ¿TENGO IDEA DE CÓMO VOY A LLEGAR A LA SOLUCIÓN (QUÉ VOY A HACER)?
	Contesta con una letra de acuerdo con el código siguiente:
Código 2	*"v" No tengo idea* *"w" Muy poquito* *"x" Más o menos* *"y" La mayoría* *"z" Sí*

Dibuja en tu hoja esta tabla y contesta las 4 preguntas. ➡

0	
% pro	
% pre	
Código 1	
Código 2	

SI LOS PORCENTAJES SON MENORES A 85%, PON EN ACCIÓN UNA ESTRATEGIA METACOGNITIVA (LA QUE CONSIDERES QUE ES ÚTIL PARA TI EN ESE MOMENTO) Y VUELVE A CONTESTAR ANOTANDO LA ESTRATEGIA UTILIZADA

Dibuja otra tabla donde coloques el inciso de la estrategia utilizada y el número de intento. Vuelve a contestar las 4 preguntas y si es necesario usa otra estrategia y dibujas las tablas que necesites. ➡

1	
Estrategia	
% pro	
% pre	
Código 1	
Código 2	

2	
Estrategia	
% pro	
% pre	
Código 1	
Código 2	

SEGUNDO BLOQUE

	5 ANOTA EL PLAN QUE QUIERES LLEVAR A CABO Y PONLO EN ACCIÓN
plan	Escribe en pocas palabras lo que vas a hacer
	6 ¿Cuál es tu respuesta?
inciso	Anota el inciso que consideres correcto en el recuadro
	7 ¿Qué porcentaje de seguridad tienes de que tu respuesta sea correcta?
%	*Contesta con un número del 0 al 100 en el recuadro*

Dibuja esta tabla en tu hoja ⬇

Plan:_____

0	
Inciso	
%	

SI TE ATORAS O DECIDES QUE LO HARÍAS AL AZAR,O TU PORCENTAJE DE SEGURIDAD ES MENOR AL 90%, USA UNA ESTRATEGIA METACOGNITIVA (LA QUE MÁS TE AYUDE) Y VUELVE A INTENTAR HASTA QUE EL % SEA MAYOR

Dibuja cuantas tablas necesites y coloca el número de intento y la estrtegia utilizada, así como el plan que intentaste. ➡

Plan:_____

1	
Estrategia	
Inciso	
%	

Plan:_____

2	
Estrategia	
Inciso	
%	

TERCER BLOQUE

Discutirán con tus compañeros sobre la respuesta correcta y cómo llegaron a ella.

¿Tú respuesta fue correcta?	Sí		No			
¿Qué tan bien lograste la meta?						
¿Tenías el conocimiento suficiente?	Sí		No			
¿Pudiste haber llegado a la respuesta?	Sí		No			

Ahora que sabes la respuesta...

¿Entiendes el procedimiento?	Sí		Más menos		No	
¿Hay una manera más fácil?	Sí		No		No lo sé	

INTENTA BUSCARLA

¿Qué estrategias utilizaste que te funcionaron?

_____, _____, _____, _____, _____, _____, _____, Otras: _____

¿De qué estrategias te percataste que utilizas en automático?

_____, _____, _____, _____, _____, _____, _____, Otras: _____

ESTRATEGIAS PARA EL PRIMER BLOQUE: COMPRENSIÓN Y CONOCIMIENTO

a) Elijo enfocar conscientemente mi atención
b) Entender palabra por palabra hasta comprender el todo
c) Entender el contexto del problema (de qué trata)
d) Detenerme y revisar información importante
e) Buscar relaciones, ¿cómo se conecta la pregunta con el texto?
f) Hacer dibujos o diagramas para ayudarme a comprender
g) Tomar notas o hacer anotaciones

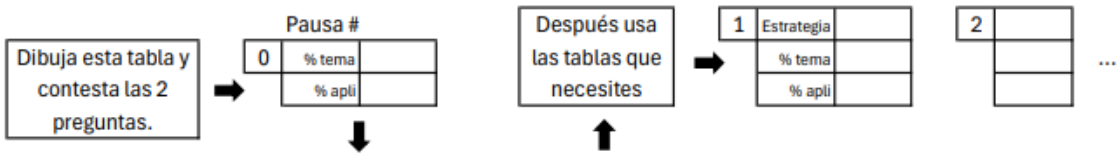
ESTRATEGIAS PARA EL SEGUNDO BLOQUE: MONITOREO

h) Hacer anotaciones
i) Hacer dibujos o diagramas
j) Cambiar de estrategia / Hacer un nuevo plan
k) ¿Cuál es el resultado de cada paso de mi plan?
l) Analizar / Pensar / Reflexionar
m) Regresar al principio
n) Usar una estrategia que ha funcionado en el pasado
o) Considerar varias alternativas
p) Hacerme preguntas (¿para qué hice eso? ¿qué obtengo?)
q) Relacionar conceptos o datos
r) Organizar la información
s) Comprobar mi respuesta

PRIMER BLOQUE

1 ¿EN QUÉ PORCENTAJE HE COMPRENDIDO EL TEMA?
% tema *Contesta con un número del 0 al 100 en el recuadro*

2 ¿EN QUÉ PORCENTAJE PODRÍA APLICAR LO QUE ESTOY APRENDIENDO?
% apli *Contesta con un número del 0 al 100 en el recuadro*



SI LOS PORCENTAJES SON MENORES A 90%, PON EN ACCIÓN UNA ESTRATEGIA METACOGNITIVA (LA QUE CONSIDERES QUE ES ÚTIL PARA TI EN ESE MOMENTO) Y VUELVE A CONTESTAR ANOTANDO LA ESTRATEGIA UTILIZADA

SEGUNDO BLOQUE

¿Qué tan bien realizaste todas las actividades?

¿En qué porcentaje comprendiste el tema de clase? _____
¿Qué estrategias utilizaste que te funcionaron? _____, _____, _____, _____, Otra: _____
¿Qué estrategias usas automáticamente? _____, _____, _____, _____, Otra: _____

ESTRATEGIAS PARA EL PRIMER BLOQUE: COMPRENSIÓN Y CONOCIMIENTO

a) Hacer preguntas sobre el material
b) Repasar información importante
c) Relacionar el contenido con lo que ya sé
d) Revisar información que no comprendí
e) Hacer anotaciones en mi libreta para recordar qué está pasando
f) Hacer un resumen de lo que he aprendido
g) Motivarme a aprender
h) Crear mis propios ejemplos
i) Hacer dibujos o diagramas para ayudarme
j) Traduzco definiciones a mis propias palabras
k) Cambiar de estrategia de comprensión
l) Pedir ayuda
m) Dividir el estudio en pasos pequeños
n) Organizar la información