
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Postgrado en Ciencias Matemáticas

Existencia de soluciones periódicas en un
modelo de actividad eléctrica de tipo
monodominio para un ventrículo

TESIS

Que para obtener el grado de
DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

Presenta

OZKAR HERNÁNDEZ MONTERO

Asesor

DR. ANDRÉS FRAGUELA COLLAR

Puebla, Puebla. Junio 2018

A mis padres.

Agradezco a mi asesor el Dr. Andrés Fragueta Collar.

Agradezco al Dr. Manlio F. Marquez Murillo por su valiosa ayuda para contextualizar este trabajo.

I thank Dr. Jacques Henry and the entire CARMEN INRIA-Bordeaux team for their great hospitality.

Agradezco al Dr. Raul Felipe-Sosa por su importante aportación a este trabajo.

Agradezco a mis sinodales por el tiempo que dedicaron a revisar y complementar este trabajo.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONACyT por la beca otorgada.

Introducción

Durante las últimas décadas, fenómenos observados en materia viva, en todas las escalas, han atraído la atención de físicos y matemáticos; desde moléculas a células, organismos y poblaciones. Esta tendencia se debe, en parte, a que las investigaciones recientes en biología han revelado cada vez más detalles a escala microscópica sobre los procesos biológicos, los cuales obedecen en última instancia las leyes de la física (aún cuando no resulta evidente en la escala macroscópica), siendo natural aplicar los conceptos y herramientas de la física y de las matemáticas para lograr un mejor entendimiento de estos procesos.

El objetivo principal de esta Tesis es demostrar la existencia de soluciones periódicas de las ecuaciones correspondientes a un modelo de tipo monodominio para la actividad eléctrica de un ventrículo aislado del torso. El modelo y sus especificaciones se presentan en la sección 1.4.

Las fallas cardíacas son una de las principales causas de muerte en la actualidad. Es muy importante entender los mecanismos por los cuales la actividad eléctrica rítmica del corazón se desestabiliza, con el objetivo de revertir este proceso [Bittihn 2015]. En este contexto, es importante estudiar las condiciones en las cuales el corazón funciona de rítmicamente.

De manera intuitiva, es evidente que el corazón funciona con cierta periodicidad, sin embargo, el corazón de una persona no funciona de forma periódica en el estricto sentido matemático. Existen diversos factores que afectan la frecuencia del ritmo sinusal, como por ejemplo, el nivel de esfuerzo físico. No obstante, es natural esperar que en un entorno controlado, como lo es un modelo matemático para el miocardio, la respuesta a un estímulo periódico adecuado sea también periódica.

El estudio de la propagación eléctrica sobre el músculo cardíaco está relacionado con un concepto más general denominado medio excitable, del cual se hablará en detalle en la sección 1.2.1. Desde el punto de vista matemático, los procesos en medios excitables pueden ser descritos por un tipo particular de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas no lineales, conocidas en la literatura como ecuaciones de reacción difusión.

El modelo de bidominio representa al músculo cardíaco activo a escala

microscópica relacionando corrientes iónicas a través de la membrana celular, potencial de membrana y potencial extracelular [Henriquez 1993]. Fue creado en 1969, [Schmidt 1969] y [Clerc 1976], y desarrollado formalmente por primera vez en [Tung 1978] y [Miller 1978]. Otras deducciones matemáticas obtenidas directamente de las propiedades microscópicas del tejido usando métodos asintóticos y principios físicos básicos son presentados en [Neu 1993], [Ambrosio 200], [Pennacchio 2005] y [Sundnes 2006]. Inicialmente fue usado para desarrollar simulaciones para calcular potenciales extracelulares y potenciales en la superficie del cuerpo a partir de potenciales de membrana [Tung 1978],[Gulrajani 1983], [Miller 1978,1] y [Gulrajani 1998].

Los modelos de reacción difusión de tipo monodominio fueron concebidos como una simplificación de los de tipo bidominio, con ventajas tanto para su análisis matemático como para su implementación numérica. Pocos artículos han comparado los resultados obtenidos con estos dos tipos de modelos, aquellos que lo hicieron mostraron diferencias pequeñas [Vigmond 2002]. Simulaciones usando monodominio han producido resultados cercanos a datos reales [Leon 1991], [Hren 1997], [Huiskamp 1998], [Bernus 2002] y [Berenfeld 1996]. En [Potse 2006] se investiga el impacto de la suposición de monodominio en la simulación de la propagación de actividad eléctrica en un corazón humano aislado, comparando los resultados con los de bidominio; se concluye que la diferencia entre ambos no es significativa, todas las propiedades de los potenciales extracelulares y de membrana simulados usando bidominio fueron reproducidas con precisión por el modelo de monodominio, con una pequeña diferencia en la velocidad de propagación. La diferencia entre los resultados obtenidos con uno u otro es despreciable para la mayoría de aplicaciones, con la excepción de simulaciones que involucren corrientes externas aplicadas.

En esta tesis se utiliza un modelo de reacción difusión de tipo monodominio, con el objetivo de mostrar que su solución representa la periodicidad de la actividad eléctrica del corazón en ritmo sinusal.

Hay pocas referencias en la literatura que aborden el problema del buen planteamiento del modelo de bidominio. Las más relevantes parecen ser el artículo de Colli-Franzone y Savaré [Colli 2002], el reporte técnico de Veneroni [Veneroni 2009] y el artículo de Y. Bourgault, Y. Coudière y C. Pierre [Bourgault 2009]. En [Colli 2002] se demuestra la existencia global en el tiempo y la unicidad de la solución de las ecuaciones de bidominio, sin embargo su metodología se aplica sólo a modelos particulares para la corriente iónica de la forma $f(u, w) = k(u) + \alpha w$ y $g(u, w) = \beta u + \gamma w$, donde $k \in C^1(\mathbb{R})$ satisface $\inf_{\mathbb{R}} k' > -\infty$. En la práctica, un modelo que tiene esta forma es el de FitzHugh-Nagumo [Fitzhugh 1961], no obstante, a pesar de su importancia para el entendimiento cualitativo de la propagación del potencial de acción, su aplica-

bilidad a las células excitables del miocardio es limitada [Keener 1998] y [Panfilov 1997, Capítulo 1]. Sin embargo, de los resultados en [Colli 2002] no es posible obtener la existencia de solución para otros modelos iónicos de dos variables comúnmente usados en la literatura para representar células del miocardio, tales como el de Aliev-Panfilov [Aliev 1996] y el de Rogers-MacCulloch [Rogers 1994]. En [Veneroni 2009] el resultado anterior es extendido al modelo de Luo y Rudy I [Luo 1991]. En la referencia [Bourgault 2009], se obtienen soluciones débiles globales en el tiempo para modelos iónicos formados por dos ecuaciones diferenciales ordinarias; una de ellas con no linealidad polinomial. Estos incluyen los de FitzHugh-Nagumo, Aliev-Panfilov y Rogers-MacCulloch.

Este texto se organiza de la manera siguiente. El capítulo 1 comienza con una breve descripción de la anatomía y fisiología del corazón, haciendo énfasis en las características que permiten caracterizarlo como un medio excitable. En la sección 1.3 se presenta una deducción matemática de las ecuaciones de reacción-difusión de bidominio y se introduce la hipótesis de monodominio. En la sección 1.3.3 se describe el modelo de Rogers-McCulloch para las corrientes iónicas a través de la membrana celular. Finalmente, en el apartado 1.4 se especifica el modelo para un ventrículo aislado del torso que se estudia en esta tesis.

En el capítulo 2 se aborda el problema del buen planteamiento de las ecuaciones del modelo para un ventrículo: en la sección 2.3 se da una definición de solución débil, se considera la formulación variacional en el tiempo y en el espacio; se demuestra que existe una solución débil definida para todo $t > 0$ mediante la metodología de Faedo-galerkin; construcción de soluciones aproximadas, estimados *a priori* y convergencia a una solución.

El capítulo 3 contiene el resultado principal de esta tesis: existencia de soluciones periódicas cuando el modelo propuesto para un ventrículo es activado adecuadamente con una frecuencia constante. La demostración consiste en reducir el problema de existencia de solución periódica al de la existencia de un punto fijo para una aplicación apropiada.

Índice general

Introducción	7
1. Fisiología y modelación matemática	13
1.1. Función y estructura del corazón	13
1.2. Actividad eléctrica en el corazón	14
1.2.1. Medio excitable	14
1.2.2. Potencial de acción	14
1.3. Modelos matemáticos	17
1.3.1. Modelo de bidominio	17
1.3.2. Modelo de monodominio	19
1.3.3. Modelo de Rogers-McCulloch	19
1.4. Modelo para un ventrículo	21
2. Problema de Cauchy	25
2.1. Notación	25
2.2. Preliminares	26
2.2.1. Propiedades del modelo de Rogers-McCulloch	28
2.3. Existencia de solución global	31
2.3.1. Construcción de soluciones aproximadas	33
2.3.2. Estimados <i>a priori</i>	34
2.3.3. Convergencia	38
3. Existencia de solución Periódica	45
3.1. Notación	45
3.2. Reducción a un problema de punto fijo	46
3.3. Existencia de un punto fijo	48
Conclusión	55
A. Resultados clásicos	57
A.1. Resultados de análisis funcional	57
A.2. Los espacios $L^p(0, T; X)$	58

Capítulo 1

Fisiología y modelación matemática

1.1. Función y estructura del corazón

El corazón es una bomba muscular rítmica y ajustable de cuatro cámaras, provisto de válvulas para controlar la dirección del flujo de sangre, cuya función es mantener un aprovisionamiento de sangre apropiado a una presión adecuada para cubrir los requerimientos de nutrientes del tejido, además de remover desechos de todos los órganos del cuerpo. Está situado ligeramente a la izquierda de la mitad del tórax, debajo del esternón, en medio de los pulmones. Está dividido en dos estructuras anatómicamente y funcionalmente similares, las cuales representan la división del sistema circulatorio: la mitad derecha recolecta la sangre desoxigenada proveniente del cuerpo y la bombea a los pulmones, la mitad izquierda recibe la sangre oxigenada proveniente de los pulmones para enviarla al cuerpo. La parte izquierda necesita generar mayor potencia por lo que es la más grande. Cada mitad se subdivide en una parte superior y otra inferior, llamadas aurículas y ventrículos, respectivamente.

Las aurículas y ventrículos están compuestos por paredes rodeando una cavidad. Las paredes están formadas principalmente por una estructura muscular llamada miocardio, el cual está recubierto por dentro y por fuera por capas, el endocardio y el epicardio, respectivamente. El miocardio de las aurículas es considerablemente más delgado que el de los ventrículos, siendo el del ventrículo izquierdo el de mayor tamaño.

1.2. Actividad eléctrica en el corazón

1.2.1. Medio excitable

Un medio excitable se define como un sistema dinámico no lineal compuesto por unidades o células distribuidas espacialmente, las cuales interactúan de acuerdo a las leyes de la difusión. Cada célula del sistema es en si misma un sistema dinámico no lineal, con su propia fuente de energía. Después de la aplicación de un estímulo externo suficientemente fuerte, cada unidad puede generar un único pulso de excitación o una secuencia de pulsos, dependiendo de sus propiedades no lineales. Una de las propiedades de los medios excitables es la de propagar señales sin amortiguarlas.

En el caso del miocardio, la señal que se propaga es una corriente eléctrica. Cada célula de un medio excitable posee las siguientes propiedades:

1. **Un estado de reposo bien definido.**
2. **Un umbral de excitación.** Cualquier estímulo externo aplicado a la célula que la mantenga por debajo de este umbral es amortiguado y no provoca cambios persistentes en el sistema, que simplemente regresa al reposo. Sin embargo, un estímulo por encima del umbral induce a la célula a cambiar su estado de reposo por uno excitado. Este cambio produce un pulso en el tiempo cuya forma y naturaleza son determinadas por las propiedades del medio y no dependen de la forma del estímulo exterior.
3. **Un periodo refractario** Cuando una célula es excitada, sobreviene un periodo en el que no puede ser excitada nuevamente.
4. **Un acoplamiento con sus vecinos que permite la difusión de la señal.** Cuando un elemento es sometido al cambio de estado, de reposo a excitado, provoca que sus vecinos alcancen el umbral de excitación y disparen su respuesta activa.

Las células que forman el miocardio poseen todas las propiedades antes mencionadas.

1.2.2. Potencial de acción

En esta sección se describe como es el estímulo y la respuesta a este en el caso concreto de un miocito, es decir, una célula del músculo cardíaco.

Cada miocito está limitado por una delgada membrana fosfolípica¹,

¹Los fosfolípidos son el componente principal de todas las membranas celulares debido a que pueden formar capas dobles. Generalmente la estructura de estas moléculas consiste de una cola hidrofóbica y una cabeza hidrofílica.

1.2. ACTIVIDAD ELÉCTRICA EN EL CORAZÓN

la cual encapsula un pequeño volumen conocido como medio o dominio intracelular, mientras que el dominio extracelular se define como el espacio que queda fuera. Cada célula está conectada con sus vecinas por largas proteínas que forman canales entre ellas, de tal forma que los medios intracelulares quedan comunicados. Estas estructuras proveen el acoplamiento difusivo necesario en un medio excitable.

La manera en la que se propaga una señal eléctrica en el tejido se explica mediante las concentraciones e intercambios de ciertos iones² entre ambos dominios gracias a la presencia de poros en la membrana celular.

La presencia de iones genera un campo eléctrico, el cual permite definir un potencial. Debido a que la membrana actúa como aislante entre los dos dominios, en cada punto del tejido se definen dos potenciales: uno extracelular u_e y otro intracelular u_i .

Una propiedad fundamental de la membrana de los miocitos es la de ser sensible a la diferencia entre las magnitudes de estos dos potenciales, por lo cual necesario definir el potencial de membrana,

$$u = u_i - u_e. \quad (1.1)$$

Existen numerosas proteínas integradas en la membrana celular que forman pequeños poros o canales en ella, los cuales son selectivamente permeables, es decir, se abren o cierran en función de la magnitud del potencial de membrana en sus alrededores. Cuando están abiertos, estos canales permiten el paso únicamente a iones específicos. Por esta razón estos poros son comúnmente llamados canales iónicos. Los iones de mayor relevancia en la electrofisiología del corazón son sodio Na^+ , potasio K^+ y calcio Ca^{2+} .

Cuando una célula se encuentra en estado de reposo, es decir, cuando no hay un estímulo eléctrico actuando sobre ella, las concentraciones intracelulares y extracelulares de cada ion son significativamente diferentes. Como consecuencia, en estado de reposo la membrana celular mantiene un potencial de membrana constante, que en general se encuentra entre -80mV y -90mV , en este caso se dice que la membrana celular está en estado polarizado. Cualquier incremento positivo del potencial de membrana es llamado despolarización, mientras que el término repolarización se refiere al regreso del potencial de membrana a su estado de reposo negativo.

Pequeñas perturbaciones del potencial de membrana producen una respuesta lineal y pasiva de la célula; cuando el estímulo se retira el potencial de membrana regresa a su valor de reposo. Por el contrario, si el estímulo es suficiente para elevar el potencial de membrana sobre su valor umbral, entonces, se produce una respuesta no lineal y activa,

²Los iones son partículas o moléculas con carga eléctrica

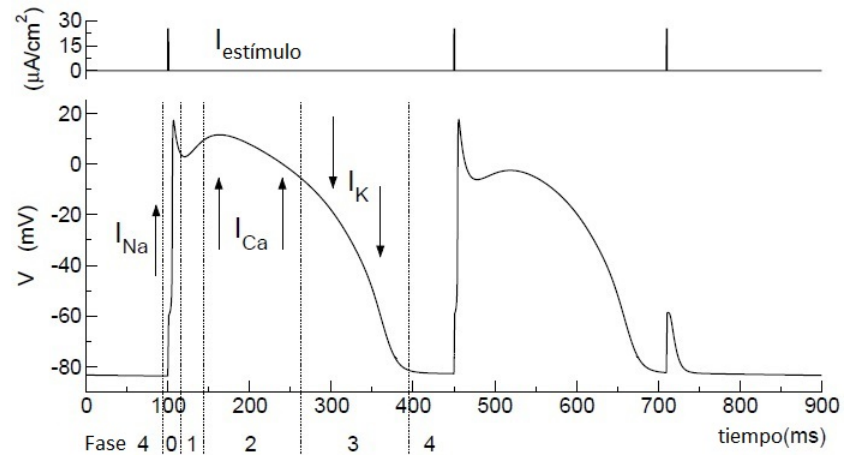


Figura 1.1: Fases de un potencial de acción de una célula cardíaca. En la fase 0 se observa un rápido incremento debido a un flujo rápido de iones de sodio hacia el interior de la célula. A lo largo de todo el potencial de acción hay corrientes a base de potasio que tienden a regresar el potencial de membrana al potencial de reposo. Sin embargo, en la fase 2, la corriente hacia el interior de calcio permite compensar las corrientes de potasio, creando en el potencial de acción una meseta relativamente plana. En la fase 3 las corrientes de calcio dejan de mantener el potencial de membrana en su estado de depolarización y las corrientes de potasio lo llevan de regreso a su estado de reposo.

conocida como potencial de acción. En la figura 1.1 se muestran las fases de un potencial de acción típico de una célula cardíaca.

La existencia de un periodo refractario eficaz es de vital importancia en la propagación de la actividad eléctrica cardíaca. Si un potencial de acción es provocado, le sobreviene un periodo durante el cual la membrana no puede ser excitada nuevamente, a este periodo se le llama estado refractario absoluto. Después de un tiempo es posible provocar otro potencial de acción, pero se requiere un estímulo anormalmente alto para lograrlo, esta situación se conoce como condición refractaria relativa. Este comportamiento se observa en la figura 1.1, donde el tercer estímulo falla en provocar un potencial de acción a pesar de ser igual en amplitud y duración a los dos estímulos anteriores.

Los canales que comunican el interior de células adyacentes permiten el flujo de corriente eléctrica en forma de iones y así proporcionan una conexión directa entre los interiores de células contiguas. Cuando una célula se despolariza este acoplamiento permite que los potenciales de

sus células vecinas aumenten hasta superar el valor umbral provocando que éstas también disparen su potencial de acción.

1.3. Modelos matemáticos

1.3.1. Modelo de bidominio

En esta tesis usaremos el modelo de bidominio para representar el músculo cardíaco de un ventrículo, el cual denotaremos como Ω . Para deducir este modelo es necesario suponer que las siguientes hipótesis se satisfacen.

B1 Con el propósito de incluir los efectos de la diferencia de potencial a través de la membrana celular, el tejido se divide en dos medios o dominios: el intracelular y el extracelular. Ambos dominios están eléctricamente aislados por la membrana celular. Usaremos los subíndices i y e para referirnos a los términos correspondientes a los dominios intracelular y extracelular, respectivamente. Cada punto en Ω pertenece a los dos dominios y consecuentemente se le asignan dos potenciales, un potencial intracelular u_i y otro extracelular u_e .

B2 La presencia de iones, cargados eléctricamente, genera un campo electromagnético en cada dominio. Suponemos que las variaciones temporales de los campos eléctrico E y magnético B pueden ser despreciadas. Para cualquier instante del tiempo los campos se consideran estáticos.

B3 La variación temporal de la carga total en cada punto es nula,

$$\frac{\partial}{\partial t}(q_i + q_e) = 0. \quad (1.2)$$

B4 En cada dominio, el flujo total de corriente en un punto debe ser igual a la suma de la variación temporal de la carga más la corriente iónica.

$$-\nabla \cdot J_i = \frac{\partial}{\partial t}(q_i) + \chi I_{ion}, \quad (1.3)$$

$$-\nabla \cdot J_e = \frac{\partial}{\partial t}(q_e) - \chi I_{ion}, \quad (1.4)$$

donde I_{ion} es la corriente iónica a través de la membrana. Es conveniente medir la corriente iónica por unidad de área de la membrana celular, mientras que las densidades de carga y corriente son medidas por unidad de volumen. La constante χ representa el área de

membrana celular por unidad de volumen. De esta manera, I_{ion} es corriente iónica por unidad de área de membrana celular y χI_{ion} es corriente iónica por unidad de volumen de tejido. La diferencia en el signo se debe a que la corriente que sale del medio extracelular es la misma que entra al medio intracelular.

Por la hipótesis $B2$ y la Ley de Faraday³ obtenemos

$$\begin{aligned}\nabla \times E_i &= 0, \\ \nabla \times E_e &= 0,\end{aligned}$$

de cálculo vectorial sabemos que esto implica que E_i y E_e se pueden caracterizar mediante potenciales escalares u_i y u_e ,

$$\begin{aligned}E_i &= -\nabla u_i, \\ E_e &= -\nabla u_e,\end{aligned}$$

luego, la ley de Ohm para la corriente J en un medio conductor nos dice que en cada dominio la corriente se expresa como sigue,

$$J_i = -M_i \nabla u_i, \quad (1.5)$$

$$J_e = -M_e \nabla u_e, \quad (1.6)$$

donde M_i y M_e son un tensores debido a que en el tejido ventricular la conductividad no es igual en todas las direcciones.

La cantidad de carga que la membrana celular puede separar depende del potencial de membrana y de las propiedades capacitivas de la membrana. El potencial de membrana $u = u_i - u_e$ se relaciona con la cantidad de carga separada mediante la relación

$$\chi C_m u = \frac{q_i - q_e}{2}. \quad (1.7)$$

Derivando respecto del tiempo (1.7) y usando (1.2) se obtiene

$$\chi C_m \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{q_i - q_e}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{q_i + q_e}{2} \right) = \frac{\partial q_i}{\partial t},$$

y

$$\chi C_m \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{q_i - q_e}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{q_i + q_e}{2} \right) = -\frac{\partial q_e}{\partial t},$$

es decir,

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = -\frac{\partial q_e}{\partial t} = \chi C_m \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (1.8)$$

³nombre con que se designa a una de las cuatro ecuaciones de Maxwell, $\nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0$.

Sustituyendo (1.5), (1.6) y (1.8) en (1.3) y (1.4) se obtiene

$$\chi C_m \frac{\partial u}{\partial t} + \chi I_{ion} - \nabla \cdot (M_i \nabla u_i) = 0, \quad (1.9)$$

$$\chi C_m \frac{\partial u}{\partial t} + \chi I_{ion} + \nabla \cdot (M_e \nabla u_e) = 0. \quad (1.10)$$

El sistema formado por las ecuaciones (1.9) y (1.10) es el *modelo de bidominio*. Podemos escribirlo de una manera más conveniente si sustituimos $u_i = u + u_e$ en (1.9) y luego restamos (1.10) a (1.9), lo que se obtiene es

$$\chi C_m \frac{\partial u}{\partial t} + \chi I_{ion} - \nabla \cdot (M_i \nabla u) - \nabla \cdot (M_i \nabla u_e) = 0, \quad (1.11)$$

$$\nabla \cdot (M_i \nabla u) + \nabla \cdot ((M_i + M_e) \nabla u_e) = 0. \quad (1.12)$$

El modelo de bidominio se puede complementar acoplándolo con un modelo para el torso, donde se considera el torso como un conductor pasivo. Si se considera al corazón aislado del torso se deben imponer condiciones de frontera que reflejen este aislamiento. Esta condición es que el flujo de corriente hacia el exterior sea nulo en la frontera en contacto con el medio aislante.

1.3.2. Modelo de monodominio

Es posible reducir (1.11) y (1.12) a una sola ecuación si suponemos que las conductividades en los medios interior y exterior son proporcionales, es decir,

$$\rho M_i = M_e. \quad (1.13)$$

donde ρ es una constante positiva. Haciendo esta sustitución en (1.12) obtenemos

$$\nabla \cdot (M_i \nabla u_e) = -\frac{1}{1+\rho} \nabla \cdot (M_i \nabla u). \quad (1.14)$$

Luego, sustituyendo (1.14) en (1.11) obtenemos el *modelo de monodominio*

$$\chi C \frac{\partial}{\partial t}(u) + \chi I_{ion} - \frac{\rho}{1+\rho} \nabla \cdot (M_i \nabla u) = 0 \quad (1.15)$$

1.3.3. Modelo de Rogers-McCulloch

Esta sección está dedicada a presentar el modelo que usaremos para representar el efecto de las corrientes iónicas a través de la membrana celular en el potencial de membrana u . Dicho modelo fue propuesto por Rogers y McCulloch [Rogers 1994] como una variación del modelo clásico de FitzHugh-Nagumo [Fitzhugh 1961].

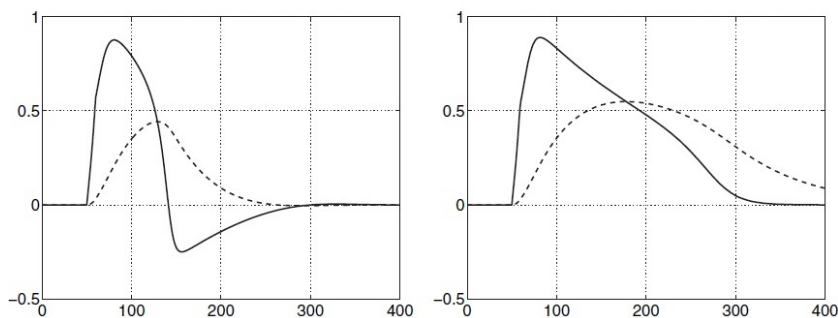


Figura 1.2: Gráficas de \hat{u} (línea continua) y \hat{w} (línea punteada) para el modelo de FitzHugh-Nagumo original (izquierda) y modificado (derecha).

El modelo de FitzHugh-Nagumo tiene dos variables y una no linealidad cúbica, cuya formulación original es la siguiente,

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{u}}{dt} + [c_1\hat{u}(\hat{u} - a)(\hat{u} - 1) + c_2\hat{w}] &= i_{app}, \\ \frac{d\hat{w}}{dt} + [b(-\hat{u} + c_3\hat{w})] &= 0, \end{aligned}$$

donde a, b, c_1, c_2 y c_3 son parámetros dados, que pueden ajustarse para simular distintos tipos de células, supondremos que son todos positivos. El término i_{app} es la corriente aplicada, de cuya magnitud depende el inicio del potencial de acción. Una característica de la formulación original que no representa bien los datos fisiológicos es que existe una hiperpolarización durante la fase de repolarización, es decir, el potencial de membrana desciende por debajo de su valor de reposo antes de regresar a él, ver el cuadro izquierdo de la figura 1.2. Para corregir esta situación Rogers y McCulloch propusieron una ligera modificación, el modelo resultante es

$$\frac{d\hat{u}}{dt} + [c_1\hat{u}(\hat{u} - a)(\hat{u} - 1) + c_2\hat{u}\hat{w}] = i_{app}, \quad (1.16)$$

$$\frac{d\hat{w}}{dt} + [b(-\hat{u} + c_3\hat{w})] = 0. \quad (1.17)$$

En el lado derecho de la figura 1.2 se muestra el potencial de acción calculado con el modelo modificado. Se observa que la hiperpolarización es eliminada, obteniéndose así una solución fisiológicamente más realista. Obsérvese que los valores de \hat{u} no son reales. Para obtener valores reales es necesario cambiar los parámetros del modelo. Se introducen u_{rest} y u_{peak} como los valores de reposo y máximo del potencial de membrana,

1.4. MODELO PARA UN VENTRÍCULO

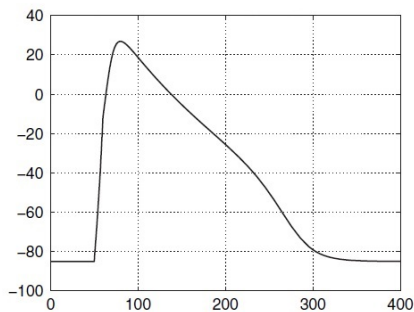


Figura 1.3: Gráfica de u para el modelo de Rogers-McCulloch reparametrizado

respectivamente. Entonces, la amplitud total del potencial de acción es $u_{amp} = u_{peak} - u_{rest}$. Se definen nuevas variables u y w , dadas por

$$\begin{aligned} u &= u_{amp}\hat{u} + u_{rest}, \\ w &= u_{amp}\hat{w}. \end{aligned}$$

Como la variable original \hat{u} tiene valor de reposo cero y valor máximo aproximadamente 1, el nuevo potencial escalado tendrá su valor de reposo en u_{rest} y su valor máximo cercano a u_{peak} , ver figura 1.3. Con este cambio de variables de (1.16)-(1.17) se obtiene

$$\frac{du}{dt} + [a_1(u - u_{rest})(u - u_{th})(u - u_{peak}) + a_2(u - u_{rest})w] = i_{app}, \quad (1.18)$$

$$\frac{dw}{dt} + [b(-u + u_{rest} + c_3w)] = 0, \quad (1.19)$$

donde

$$u_{th} = u_{rest} + au_{amp}, \quad a_1 = \frac{c_1}{u_{amp}^2}, \quad a_2 = \frac{c_2}{u_{amp}}.$$

1.4. Modelo para un ventrículo

El propósito de esta sección es presentar el modelo particular que estudiaremos en los próximos capítulos.

Consideramos una región acotada $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ que representa un ventrículo rodeado por un medio aislante. Su frontera está formada por dos componentes disjuntas, $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. Γ_0 representa el epicardio, en contacto

directo con el medio aislante, y Γ_1 representa al endocardio, donde la activación eléctrica ocurre. La forma en que Ω es estimulado eléctricamente es mediante las fibras de Purkinje, estas actúan directamente sólo sobre la pared interior Γ_1 , luego la naturaleza excitable del tejido permite que el estímulo se propague por Ω . Suponemos que tenemos el ventrículo aislado del corazón y del torso, es decir, Γ_0 está en contacto con un medio eléctricamente aislante. Usando la ecuación de monodominio (1.15) y el modelo de Rogers-McCulloch (1.18)-(1.18) obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f(u, w) - \nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0, \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega, \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + g(u, w) = 0, \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega, \quad (1.21)$$

$$(\sigma \nabla u) \cdot \eta = 0, \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \Gamma_0, \quad (1.22)$$

$$(\sigma \nabla u) \cdot \eta = s(t)\varphi(x), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \Gamma_1, \quad (1.23)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad w(0, x) = w_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (1.24)$$

Las incógnitas son el potencial de membrana $u(t, x)$ y una variable auxiliar sin interpretación fisiológica llamada variable de recuperación $w(t, x)$. Denotamos η a la normal unitaria a la frontera $\partial\Omega$ hacia afuera de Ω . Las propiedades anisotrópicas del tejido se incluyen en el modelo mediante el tensor de conductividades $\sigma(x)$. Las funciones $f(u, w)$ y $g(u, w)$ corresponden al flujo de iones a través de la membrana celular. La función $s : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ representa la activación eléctrica del endocardio por medio de las fibras de Purkinje. En condiciones normales $s(t)$ corresponde a una función periódica con el mismo periodo que el ritmo sinusal. La función $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ representa la densidad espacial de activación, de forma tal que $s(t)\varphi(x)$ es la fuente de corriente externa aplicada, como lo expresan las condiciones de frontera (1.23). Debido a que consideramos que Ω esta rodeado por un medio aislante, no hay corriente fluyendo hacia afuera de Ω , esto se expresa en la condición de frontera (1.22).

Las suposiciones específicas que haremos sobre (1.20)-(1.24) son las siguientes

(h1) Ω tiene frontera $\partial\Omega$ Lipschitz continua.

(h2) $\sigma(x)$ es una matriz simétrica, función de la variable espacial $x \in \Omega$, con coeficientes en $L^\infty(\Omega)$ y tal que existen constantes positivas m y M tales que

$$0 < m |\xi|^2 \leq \xi^t \sigma(x) \xi \leq M |\xi|^2 < \infty, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3 \quad (1.25)$$

se cumple para $x \in \Omega$ casi dondequiera.

1.4. MODELO PARA UN VENTRÍCULO

(h3) $s : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es periódica con periodo \mathcal{T} , es continuamente diferenciable y $s(0) = 0$.

(h4) $\varphi \in L^2(\Gamma_1)$.

(h5) $f(u, w)$ y $g(u, w)$ corresponden al modelo de Rogers-McCullock,

$$f(u, w) = a_1(u - u_{rest})(u - u_{th})(u - u_{peak}) + a_2(u - u_{rest})w, \quad (1.26)$$

$$g(u, w) = b(-u + u_{rest} + c_3w). \quad (1.27)$$

(h6) $u_0, w_0 \in L^2(\Omega)$.

Capítulo 2

Problema de Cauchy para el modelo de monodominio

Este capítulo está dedicado al problema de la existencia de solución del problema (1.20)-(1.23) con condiciones iniciales (1.24). En la sección 2.3 se presenta la definición de solución débil para dicho problema y se enuncia el teorema 1 sobre su existencia. También se introduce una definición de solución fuerte. La demostración del teorema 1 se desarrolla en las subsecciones 2.3.1-2.3.3.

2.1. Notación

Como es usual, si X es un espacio de Banach, X' denota su espacio dual. Si además, X es un espacio de funciones integrables sobre Ω , definimos el subespacio

$$X/\mathbb{R} = \left\{ u \in X \mid \int_{\Omega} u = 0 \right\} \subset X,$$

el cual es un espacio de Banach con la norma inducida por X . Para cualquier $u \in X$ denotamos

$$[u] = u - (1/|\Omega|) \int_{\Omega} u,$$

así $[u] \in X/\mathbb{R}$.

Definición 1. Para todo $u, v \in V \times V$ definimos

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma \nabla[u] \cdot \nabla[v]. \quad (2.1)$$

Se denota $V = H^1(\Omega)$ y $H = L^2(\Omega)$. Es importante remarcar que las inclusiones siguientes se cumplen para $2 \leq p \leq 6$,

$$V \subset L^p(\Omega) \subset H \equiv H' \subset L^{p'}(\Omega) \subset V', \quad (2.2)$$

obsérvese que solamente H se identifica con su dual. En particular, consideraremos $p = 4$ de aquí en adelante. Como de costumbre, p' denota un número positivo tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. El producto interior en H se denota como $(\cdot, \cdot)_H$ y

$$\langle \cdot, \cdot \rangle := \langle \cdot, \cdot \rangle_{V' \times V}.$$

Escribiremos *c.d.* para indicar que una propiedad se cumple *casi dondequiera*, es decir, excepto en un conjunto de medida nula.

2.2. Preliminares

Proposición 1. La forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es simétrica, continua y coercitiva en V ,

$$|a(u, v)| \leq \mathcal{M} \|u\|_V \|v\|_V, \quad \forall u, v \in V, \quad (2.3)$$

$$\alpha \|u\|_V^2 \leq a(u, u) + \alpha \|u\|_H^2, \quad \forall u \in V, \quad (2.4)$$

con $\alpha, \mathcal{M} > 0$. Existe una sucesión creciente

$$0 = \lambda_0 < \dots < \lambda_i < \dots,$$

en \mathbb{R} y existe una base ortonormal de H formada por vectores propios $\{\psi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que, $\psi_i \in V$ y

$$\forall v \in V, \quad a(\psi_i, v) = \lambda_i(\psi_i, v). \quad (2.5)$$

Demostración. La simetría de $a(\cdot, \cdot)$ es consecuencia inmediata de la simetría de σ .

Por (1.25) (página 22), se deduce que $a(\cdot, \cdot)$ define un producto escalar en V/\mathbb{R} , denotamos la norma correspondiente como $\|\cdot\|_a$.

Por la desigualdad de Poincaré¹, se tiene que $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_V$ son normas equivalentes en V/\mathbb{R} . Entonces, existe una constante positiva \mathcal{M} , tal que

$$|a(u, v)| \leq \|u\|_a \|v\|_a \leq \mathcal{M} \|u\|_V \|v\|_V, \quad \forall u, v \in V/\mathbb{R}.$$

¹ $\exists C > 0, \forall u \in V/\mathbb{R}, \int_{\Omega} |u|^2 \leq C \int_{\Omega} |\nabla u|^2$

Como (2.3) se cumple trivialmente para constantes, hemos demostrado que $a(\cdot, \cdot)$ es continua.

Sea $v \in V$, por (1.25) se tiene

$$0 < m |\nabla u|^2 \leq \sigma \nabla u \cdot \nabla u, \quad (2.6)$$

luego, integrando sobre Ω y sumando $m \|u\|_H^2$ en ambos lados de (2.6) obtenemos

$$m \left(\int_{\Omega} |u|_H^2 + |\nabla u|^2 \right) \leq a(u, u) + m \|u\|_H^2,$$

es decir, se ha demostrado que $a(\cdot, \cdot)$ satisface (2.4).

La existencia de valores y vectores propios se obtiene por el teorema 7 en la sección A.1, tomando en cuenta que $\lambda_0 = 0$ porque la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ se anula solo para funciones constantes. \square

Es importante notar que las propiedades de la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ permiten introducir un operador de manera natural.

Definición 2 (Operador A). *Por la proposición anterior se cumplen las hipótesis del teorema de Lax–Milgram para la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ y por lo tanto existe un operador $A : V \rightarrow V'$ inyectivo y continuo con inverso continuo tal que*

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle. \quad (2.7)$$

Si $v \in V$ nos referiremos a su traza sobre la frontera $\partial\Omega$ también como v , su significado siempre será claro por el contexto.

Proposición 2. *La función $\hat{\varphi} : V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$v \in V \mapsto \hat{\varphi}(v) = \int_{\Gamma_1} \varphi v,$$

define un funcional lineal y continuo, es decir, se tiene $\hat{\varphi} \in V'$.

Demostración. Sea $v \in V$. Entonces, la traza de v sobre $\partial\Omega$ pertenece a $H^{1/2}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$ y $\|v\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}$. Luego, se cumple la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_1} \varphi v \right| &\leq \|\varphi\|_{L^2(\Gamma_1)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\leq \|\varphi\|_{L^2(\Gamma_1)} \|v\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \\ &\leq \|\varphi\|_{L^2(\Gamma_1)} C \|v\|_V, \end{aligned}$$

con $C > 0$. \square

2.2.1. Propiedades del modelo de Rogers-McCullock

Denotamos:

$$f(u, w) = f_1(u) + f_2(u)w, \quad g(u, w) = g_1(u) + g_2w, \quad (2.8)$$

donde,

$$\begin{aligned} f_1(u) &= a_1u^3 - \alpha_2u^2 + \alpha_1u - \alpha_0, \\ f_2(u) &= a_2(u - u_{rest}), \\ g_1(u) &= -bu + bu_{rest}, \\ g_2 &= bc_3, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= a_1u_{rest}u_{th}u_{peak}, \\ \alpha_1 &= a_1(u_{rest}u_{peak} + u_{th}u_{peak} + u_{rest}u_{th}), \\ \alpha_2 &= a_1(u_{peak} + u_{rest} + u_{th}). \end{aligned}$$

Proposición 3. Para $p = 4$, existen constantes $c_i \geq 0$, $i = 1 \dots 6$, tales que para todo $u \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |f_1(u)| &\leq c_1 + c_2 |u|^{p-1}, \\ |f_2(u)| &\leq c_3 + c_4 |u|^{p/2-1}, \\ |g_1(u)| &\leq c_5 + c_6 |u|^{p/2}. \end{aligned}$$

Demostración. Por la desigualdad de Young se tiene:

$$|u|^2 \leq \frac{2|u|^3}{3} + \frac{1}{3}, \quad |u| \leq \frac{|u|^3}{3} + \frac{2}{3}, \quad |u| \leq \frac{|u|^2}{2} + \frac{1}{2}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |f_1(u)| &\leq a_1 |u|^3 + \alpha_2 \left(\frac{2|u|^3}{3} + \frac{1}{3} \right) + \alpha_1 \left(\frac{|u|^3}{3} + \frac{2}{3} \right) + \alpha_0 \\ &= \frac{\alpha_2}{3} + \frac{2\alpha_1}{3} + \alpha_0 + \left(a_1 + \frac{2\alpha_2}{3} + \frac{\alpha_1}{3} \right) |u|^3, \\ |f_2(u)| &= |a_2(u - u_{rest})| \leq a_2u_{rest} + a_2 |u|, \\ |g_1(u)| &= |-bu + bu_{rest}| \leq bu_{rest} + b |u| \\ &\leq bu_{rest} + b \left(\frac{|u|^2}{2} + \frac{1}{2} \right) = bu_{rest} + \frac{b}{2} + \frac{b}{2} |u|^2. \end{aligned}$$

□

Proposición 4. Para $p = 4$, existen constantes $a, \lambda > 0, \mu, c \geq 0$ tales que para todo $(u, w) \in \mathbb{R}^2$,

$$\lambda u f(u, w) + w g(u, w) \geq a |u|^p - \mu \left(\lambda |u|^2 + |w|^2 \right) - c. \quad (2.9)$$

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ una constante positiva. Por cálculo directo a partir de (2.8) tenemos

$$\begin{aligned} \lambda u f(u, w) + w g(u, w) &= \lambda a_1 u^4 - \lambda \alpha_2 u^3 + \lambda \alpha_1 u^2 - \lambda \alpha_0 u + \lambda a_2 u^2 w \\ &\quad + \lambda a_2 u_{rest} u w - b u w + b u_{rest} w + b c_3 w^2. \end{aligned}$$

Por otro lado, por la desigualdad de Young obtenemos:

$$\begin{aligned} |\alpha_2 u^3| &\leq \frac{3}{4} (\theta |u|^3)^{4/3} + \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha_2}{\theta} \right)^4, \\ |u^2 w| &\leq \frac{1}{2} (\beta |u|^2)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{|w|}{\beta} \right)^2, \\ |\alpha_0 u| &\leq \frac{|u|^2}{2} + \frac{\alpha_0^2}{2}, \\ |u w| &\leq \frac{|u|^2}{2} + \frac{|w|^2}{2}, \\ |u_{rest} w| &\leq \frac{|w|^2}{2} + \frac{u_{rest}^2}{2}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \lambda u f(u, w) + w g(u, w) &\geq \\ &\left(\lambda a_1 - \lambda \frac{3}{4} \theta^{4/3} - \lambda a_2 \frac{\beta^2}{2} \right) |u|^4 - \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda a_2 u_{rest}}{2} + \frac{b}{2} \right) |u|^2 \\ &- \left(\frac{\lambda a_2}{2\beta^2} + \frac{\lambda a_2 u_{rest}}{2} + \frac{b}{2} + \frac{b}{2} \right) |w|^2 - \left(\frac{\lambda}{4} \left(\frac{\alpha_2}{\theta} \right)^4 + \lambda \frac{\alpha_0^2}{2} + b \frac{u_{rest}^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Luego, escribimos $1/2 = \rho\mu$, con $\rho, \mu > 0$, así obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda u f(u, w) + w g(u, w) &\geq \\ &\lambda \left(a_1 - \frac{3}{4} \theta^{4/3} - a_2 \frac{\beta^2}{2} \right) |u|^4 - \lambda \mu \left(\rho + \rho a_2 u_{rest} + \rho \frac{b}{\lambda} \right) |u|^2 \\ &- \mu \left(\rho \frac{\lambda a_2}{\beta^2} + \rho \lambda a_2 u_{rest} + 2\rho b \right) |w|^2 - \left(\frac{\lambda}{4} \left(\frac{\alpha_2}{\theta} \right)^4 + \lambda \frac{\alpha_0^2}{2} + b \frac{u_{rest}^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Para concluir se eligen θ , β y ρ de forma que

$$\begin{aligned} a_1 - \frac{3}{4}\theta^{4/3} - a_2\frac{\beta^2}{2} &> 0, \\ \rho + \rho a_2 u_{rest} + \rho\frac{b}{\lambda} &\leq 1, \\ \rho\frac{\lambda a_2}{\beta^2} + \rho\lambda a_2 u_{rest} + 2\rho b &\leq 1, \end{aligned}$$

□

Proposición 5. Sean $u \in L^p(\Omega)$ y $w \in H$. Entonces $f(u, w) \in L^{p'}(\Omega)$, $g(u, w) \in H$ y

$$\begin{aligned} \|f(u, w)\|_{L^{p'}(\Omega)} &\leq A_1 |\Omega|^{1/p'} + A_2 \|u\|_{L^p(\Omega)}^{p/p'} + A_3 \|u\|_H^{2/p'}, \\ \|g(u, w)\|_H &\leq B_1 |\Omega|^{1/2} + B_2 \|u\|_{L^p(\Omega)}^{p/2} + B_3 \|u\|_H, \end{aligned}$$

donde $A_i \geq 0$, $i = 0, \dots, 3$, y $B_i \geq 0$, $i = 0, \dots, 3$, son constantes que dependen sólo de c_i , $i = 1, \dots, 6$ y p .

Demostración. Sea $(u, w) \in \mathbb{R}^2$, por la proposición 3 tenemos

$$\begin{aligned} |f(u, w)| &\leq c_1 + c_2|u|^{p-1} + c_3|w| + c_4|w||u|^{p/2-1}, \quad (2.10) \\ |g(u, w)| &\leq B_1 + B_2|u|^{p/2} + B_3|w|, \end{aligned}$$

con $B_1 = c_5$, $B_2 = c_6$ y $B_3 = |g_2|$.

Por otro lado, por la desigualdad de Young, con $\beta = 2/p' > 1$, tenemos

$$|w||u|^{p/2-1} \leq \frac{|w|^\beta}{\beta} + \frac{|u|^{(p/2-1)\beta'}}{\beta'},$$

donde $1/\beta + 1/\beta' = 1$. Como $(\frac{p}{2} - 1)\beta' = (\frac{p}{2} - 1)2\frac{p-1}{p-2} = p - 1$, de (2.10) obtenemos

$$|f(u, w)| \leq c_1 + \left(c_2 + \frac{c_4}{\beta'}\right) |u|^{p-1} + c_3|w| + \frac{c_4}{\beta}|w|^\beta,$$

luego, una vez más por la desigualdad de Young se tiene $|w| \leq \frac{|w|^\beta}{\beta} + \frac{1}{\beta'}$, por lo tanto podemos encontrar constantes A_1 , A_2 , y A_3 tales que

$$|f(u, w)| \leq A_1 + A_2|u|^{p-1} + A_3|w|^\beta.$$

Si $(u, w) \in L^p(\Omega) \times H$, por cálculo directo y tomando en cuenta que $(p-1)p' = p$, $\beta p' = 2$ (porque $p=4$) se tiene

$$\begin{aligned} \|f(u, w)\|_{L^{p'}(\Omega)} &\leq \|A_1 + A_2|u|^{p-1} + A_3|w|^\beta\|_{L^{p'}(\Omega)} \\ &\leq A_1|\Omega|^{1/p'} + A_2 \|u\|_{L^p(\Omega)}^{p/p'} + A_3 \|w\|_H^{2/p'}. \end{aligned}$$

De manera similar

$$\begin{aligned} \|g(u, w)\|_H &\leq \left\| B_1 + B_2|u|^{p/2} + B_3|w| \right\|_H \\ &\leq B_1|\Omega|^{1/2} + B_2 \|u\|_{L^p(\Omega)}^{p/2} + B_3 \|w\|_H. \end{aligned}$$

□

2.3. Existencia de solución global

Definición 3 (Solución débil). Sea $\tau > 0$ y las funciones

$$u : t \in [0, \tau) \rightarrow u(t) \in H, \quad w : t \in [0, \tau) \rightarrow w(t) \in H.$$

Decimos que (u, w) es solución débil de la formulación variacional del problema (1.20)-(1.23) si para cualquier $T \in (0, \tau)$,

(1) $u : [0, T] \rightarrow H$ y $w : [0, T] \rightarrow H$ son continuas.

(2) Para $t \in (0, \tau)$ c.d se tiene $u(t) \in V$. Además,

$$u \in L^p(Q_T) \cap L^2(0, T; V) \quad y \quad w \in L^2(Q_T),$$

con $Q_T = (0, T) \times \Omega$.

(3) Las funciones u y w satisfacen

$$\frac{d}{dt}(u(t), v) + a(u(t), v) + \int_{\Omega} f(u(t), w(t))v = s(t) \langle \widehat{\varphi}, v \rangle, \quad \forall v \in V, \quad (2.11)$$

$$\frac{d}{dt}(w(t), z) + \int_{\Omega} g(u(t), w(t))z = 0, \quad \forall z \in H \quad (2.12)$$

donde la igualdad se considera en $\mathcal{D}'(0, T)$.

Si además, dados u_0 y w_0 en H , (u, w) es una solución débil que satisface

$$u(0) = u_0, \quad w(0) = w_0, \quad \text{en } H,$$

entonces decimos que (u, w) es una solución débil de la formulación variacional del problema (1.20)-(1.24).

Observación 1. Las derivadas que parecen en los primeros términos de las ecuaciones (2.11) y (2.12) se refieren a derivadas en sentido de distribuciones, es decir, para $\phi \in \mathcal{D}(0, T)$ se tiene

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u(t), v)\phi = - \int_0^T (u(t), v)\phi'.$$

Observación 2. *Supongamos que (u, w) es una solución débil tal que además $u \in W^{1,2,p'}(0, T; V, V')$ y $u \in W^{1,2,2}(0, T; H, H)$. Entonces, por la proposición 7, de (2.11) se obtiene*

$$\int_0^T \left\langle \frac{du}{dt} + Au + f(u, w) - s(\tau)\widehat{\varphi}, v \right\rangle \phi d\tau = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(0, T), \forall v \in V.$$

De lo anterior se sigue que

$$\frac{du}{dt} + Au + f(u, w) = s(\tau)\widehat{\varphi}, \quad t \in [0, T] \text{ c.d.}, \quad (2.13)$$

donde la igualdad se considera en V' . De manera similar de (2.12) se obtiene

$$\frac{dw}{dt} = g(u, w), \quad t \in [0, T] \text{ c.d.}, \quad (2.14)$$

donde la igualdad se considera en H .

Definición 4 (Solución fuerte). *Sea $u \in W^{1,2,p'}(0, T; V, V')$ y $u \in W^{1,2,2}(0, T; H, H)$, decimos que (u, w) es solución fuerte de la formulación variacional del problema (1.20)-(1.23) si satisface las ecuaciones (2.13)-(2.14) en V' y H , respectivamente.*

Si además,

$$u(0) = u_0, \quad w(0) = w_0, \quad \text{en } H$$

para u_0, w_0 dados, decimos que (u, w) es solución de la formulación variacional del problema de Cauchy (1.20)-(1.24).

Teorema 1 (Existencia de solución débil). *Supongamos que se cumplen las hipótesis (h1)-(h6). Entonces, el sistema (1.20)-(1.24) tiene una solución débil en el sentido de la definición 3 con $\tau = +\infty$.*

Demostración. Se desarrolla en las subsecciones siguientes, en tres partes:

- construcción de soluciones aproximadas usando la metodología de Faedo-Galerkin,
- estimados *a priori* para las soluciones aproximadas,
- resultados de compacidad y convergencia de las soluciones aproximadas a una solución débil.

□

2.3.1. Construcción de soluciones aproximadas

Usamos la base ortonormal $\{\psi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de H formada por vectores propios de la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ (ver el teorema (1), página 26). Para $m \geq 1$ denotamos como V_m el espacio lineal generado por $\{\psi_0, \dots, \psi_m\}$, evidentemente $V_m \subset V$. Definimos la m -ésima solución aproximada como el par de funciones $t \mapsto (u_m(t), w_m(t))$ con

$$u_m(t) = \sum_{i=0}^m u_{im}(t)\psi_i \in V_m, \quad w_m(t) = \sum_{i=0}^m w_{im}(t)\psi_i \in V_m, \quad (2.15)$$

donde $\{u_{im}(t), w_{im}(t)\}_{i=0, \dots, m}$ son funciones de valores reales solución de

$$\frac{d}{dt}u_{im}(t) + \int_{\Omega} f(u_m(t), w_m(t))\psi_i + \lambda_i u_{im}(t) = s(t) \int_{\Gamma_1} \varphi \psi_i, \quad (2.16)$$

$$\frac{d}{dt}w_{im}(t) + \int_{\Omega} g(u_m(t), w_m(t))\psi_i = 0, \quad (2.17)$$

para $i = 0, \dots, m$, con condiciones iniciales

$$u_m(0) = u_{m0}, \quad w_m(0) = w_{m0}. \quad (2.18)$$

Como supusimos que u_0 y w_0 están en H , podemos tomar u_{m0} y w_{m0} como las proyecciones ortogonales de u_0 y w_0 sobre V_m , de esta manera se tiene

$$\|u_{m0} - u_0\|_H \rightarrow 0, \quad \|w_{m0} - w_0\|_H \rightarrow 0 \quad \text{cuando } m \rightarrow +\infty. \quad (2.19)$$

Observación 3. *El teorema 1 permanece válido cuando se considera el problema (1.20)-(1.23) sin imponer condiciones iniciales si se sustituye la hipótesis (h6) por*

(h6') *Existen constantes $\mathcal{U} > 0$ y $\mathcal{W} > 0$ que no dependen de m , tales que*

$$\|u_{m0}\|_H \leq \mathcal{U}, \quad \|w_{m0}\|_H \leq \mathcal{W}.$$

Cuando se consideran u_{m0} y w_{m0} como las proyecciones ortogonales de u_0 y w_0 sobre V_m , (h6') se cumple con $\mathcal{U} = \|u_0\|_H$ y $\mathcal{W} = \|w_0\|_H$.

Las integrales en (2.16) y (2.17) están bien definidas; como $u_m(t) \in V \subset L^p(\Omega)$ y $w_m(t) \in H$ sabemos que $f(u_m(t), w_m(t)) \in L^{p'}(\Omega) \subset V'$ y $g(u_m, w_m) \in H$ (por la proposición 5, página 30), luego, como $\psi_i \in V \subset L^p(\Omega)$ y $\psi_i \in H$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(u_m(t), w_m(t))\psi_i &= \langle f(u_m(t), w_m(t)), \psi_i \rangle, \\ \int_{\Omega} g(u_m(t), w_m(t))\psi_i &= (g(u_m(t), w_m(t)), \psi_i)_H. \end{aligned}$$

Además, los términos en (2.16) y (2.17), excepto las derivadas, son continuos como funciones de u_{im} y w_{im} .

El problema de valor inicial formado por (2.16)-(2.17) con condiciones iniciales (2.18) tiene una solución maximal definida para $t \in [0, t_m)$ con u_{im} y w_{im} en C^1 (teorema de Cauchy-Peano). Si (u_m, w_m) no es una solución global, es decir $t_m < +\infty$, entonces es no acotada en $[0, t_m)$.

En la sección siguiente se demostrará, usando estimados *a priori*, que las funciones u_m y w_m permanecen acotadas para todo $t \geq 0$, luego $t_m = +\infty$.

2.3.2. Estimados *a priori*

En el siguiente lema se usan las normas siguientes:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{L^p(Q_T) \cap L^2(0,T;V)} &= \text{máx} \left(\|\cdot\|_{L^p(Q_T)}, \|\cdot\|_{L^2(0,T;V)} \right), \\ \|\cdot\|_{L^{p'}(Q_T) + L^2(0,T;V')} &= \text{ínf}_{u=u_1+u_2} \left(\|u_1\|_{L^{p'}(Q_T)} + \|u_2\|_{L^2(0,T;V')} \right). \end{aligned}$$

Lema 1. *Supongamos que existen constantes $\mathcal{U} > 0$ y $\mathcal{W} > 0$ que no dependen de m , tales que*

$$\|u_{m0}\|_H \leq \mathcal{U}, \quad \|w_{m0}\|_H \leq \mathcal{W}.$$

Entonces, la solución del problema de Cauchy (2.16)-(2.18) esta definida para todo $t > 0$. También, para cualquier $T > 0$ existen constantes $\mathcal{C}_i > 0$, $i = 1, \dots, 5$, tales que

$$\lambda \|u_m(t)\|_H^2 + \|w_m(t)\|_H^2 \leq \mathcal{C}_1, \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.20)$$

$$\|u_m\|_{L^p(Q_T) \cap L^2(0,T;V)} \leq \mathcal{C}_2, \quad (2.21)$$

$$\|u'_m\|_{L^{p'}(Q_T) + L^2(0,T;V')} \leq \mathcal{C}_3, \quad (2.22)$$

$$\|w_m\|_{L^2(Q_T)} \leq \mathcal{C}_4, \quad (2.23)$$

$$\|w'_m\|_{L^2(Q_T)} \leq \mathcal{C}_5, \quad (2.24)$$

donde

$$u'_m = \sum_{i=0}^m u'_{im} \psi_i, \quad w'_m = \sum_{i=0}^m w'_{im} \psi_i,$$

son las derivadas de las funciones $u_m : [0, +\infty) \rightarrow V$ y $w_m : [0, +\infty) \rightarrow H$.

Demostración. Multiplicando (2.16) por λu_{im} ($\lambda > 0$ se define en la proposición 4, página 29), (2.17) por w_{im} y sumando sobre $i = 0, \dots, m$,

2.3. EXISTENCIA DE SOLUCIÓN GLOBAL

se obtiene para todo $t \in [0, t_m)$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\lambda \|u_m(t)\|_H^2 + \|w_m(t)\|_H^2 \right) + \lambda a(u_m(t), u_m(t)) \\ & + \int_{\Omega} [\lambda f(u_m(t), w_m(t))u_m + g(u_m(t), w_m(t))w_m] \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$= \lambda s(t) \langle \widehat{\varphi}, u_m(t) \rangle. \quad (2.26)$$

Usando el hecho de que la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es coercitiva (proposición 1, página 26), la proposición 4 (página 29) y la desigualdad de Young obtenemos que para todo $t \in [0, t_m)$ y para cualquier $\theta > 0$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\lambda \|u_m(t)\|_H^2 + \|w_m(t)\|_H^2 \right) + \lambda \alpha \|u_m(t)\|_V^2 + a \int_{\Omega} |u_m(t)|^p \\ & \leq c |\Omega| + (\alpha + \mu) \left(\lambda \|u_m(t)\|_H^2 + \|w_m(t)\|_H^2 \right) + \lambda |s(t)| \|\widehat{\varphi}\|_{V'} \|u_m(t)\|_V \\ & \leq c |\Omega| + (\alpha + \mu) \left(\lambda \|u_m(t)\|_H^2 + \|w_m(t)\|_H^2 \right) + \frac{1}{2\theta} \lambda^2 s(t)^2 \|\widehat{\varphi}\|_{V'}^2 + \frac{\theta}{2} \|u_m(t)\|_V^2. \end{aligned}$$

Luego, si tomamos $\theta = \lambda \alpha$ tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\lambda \|u_m(t)\|_H^2 + \|w_m(t)\|_H^2 \right) + \frac{\lambda \alpha}{2} \|u_m(t)\|_V^2 + a \int_{\Omega} |u_m(t)|^p \\ & \leq c |\Omega| + (\alpha + \mu) \left(\lambda \|u_m(t)\|_H^2 + \|w_m(t)\|_H^2 \right) + \frac{\lambda}{2\alpha} s(t)^2 \|\widehat{\varphi}\|_{V'}^2. \end{aligned} \quad (2.27)$$

De (2.27) se sigue

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\lambda \|u_m(t)\|_H^2 + \|w_m(t)\|_H^2 \right) \\ & \leq c |\Omega| + (\alpha + \mu) \left(\lambda \|u_m(t)\|_H^2 + \|w_m(t)\|_H^2 \right) + \frac{\lambda}{2\alpha} s(t)^2 \|\widehat{\varphi}\|_{V'}^2. \end{aligned}$$

Integrando respecto al tiempo sobre el intervalo $[0, t_m)$ ambos lados de la desigualdad anterior se obtiene

$$\begin{aligned} & \lambda \|u_m(t)\|_H^2 + \|w_m(t)\|_H^2 \\ & \leq 2c |\Omega| t_m + \frac{\lambda}{\alpha} \|s\|_{\infty}^2 \|\widehat{\varphi}\|_{V'}^2 t_m + \lambda \|u_m(0)\|_H^2 + \|w_m(0)\|_H^2 \\ & \quad + 2(\alpha + \mu) \int_0^{t_m} \left(\lambda \|u_m(\tau)\|_H^2 + \|w_m(\tau)\|_H^2 \right) d\tau. \end{aligned}$$

Entonces, por la desigualdad de Gronwall se sigue que existe una constante \mathcal{C}_1 que depende sólo de σ , f , g , \mathcal{U} , \mathcal{W} , Ω , s , φ y t_m , tal que

$$\lambda \|u_m(t)\|_H^2 + \|w_m(t)\|_H^2 \leq \mathcal{C}_1, \quad \forall t \in [0, t_m).$$

CAPÍTULO 2. PROBLEMA DE CAUCHY

Como consecuencia tenemos que las funciones u_m y w_m están acotadas en $L^\infty(0, t_m; H)$ para cualquier $t_m > 0$, es decir $t_m = +\infty$. De (2.20) se sigue de inmediato (2.23).

Usando (2.20) en (2.27) obtenemos el estimado (2.21) con

$$\mathcal{C}_2 = \text{máx} \left\{ \left(\frac{2}{\lambda\alpha} k_2 \right)^{1/2}, \left(\frac{1}{a} k_2 \right)^{1/p} \right\}$$

donde

$$k_2 = c|\Omega|T + \frac{\lambda}{2\alpha} \|s\|_\infty^2 \|\varphi\|_{V'}^2 + \frac{1}{2}\mathcal{C}_1 + (\alpha + \mu)\mathcal{C}_1T.$$

Ahora obtendremos los estimados para u'_m y w'_m . Considérese el operador proyección $P_m : V' \rightarrow V'$ definido por

$$u \in V' \mapsto P_m u = \sum_{i=0}^m \langle u, \psi_i \rangle \psi_i.$$

Equivalentemente, $P_m u$ se define como el único elemento de V_m tal que $\langle u, v \rangle = \langle P_m u, v \rangle$ para toda $v \in V_m$. Por otro lado, obsérvese que para toda $v \in V$ y para todo $t > 0$ se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u_m(t), v) &= (u'_m(t), v)_H = \langle u'_m(t), v \rangle, \\ \int_{\Omega} f(u_m(t), w_m(t))v &= \langle f(u_m(t), w_m(t)), v \rangle, \end{aligned}$$

porque $u'_m(t) \in V_m \subset V'$, $f(u_m(t), w_m(t)) \in L^{p'}(\Omega)$ y $v \in V \subset L^p(\Omega)$. Por lo tanto, de (2.16) (página 33) se obtiene,

$$\forall v \in V_m, \forall t > 0, \langle u'_m(t), v \rangle = \langle -[Au_m(t) + f(u_m(t), w_m(t))] + s(t)\widehat{\varphi}, v \rangle,$$

entonces,

$$\forall t > 0, \quad u'_m(t) = P_m (-[Au_m(t) + f(u_m(t), w_m(t))] + s(t)\widehat{\varphi}), \quad (2.28)$$

donde A es el operador débil asociado con la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ (definición 2, página 27). Por la continuidad de A y la estimación (2.21) se tiene para $T > 0$ fijo

$$\|Au_m\|_{L^2(0,T;V')} \leq \mathcal{M} \|u_m\|_{L^2(0,T;V)} \leq \mathcal{M}\mathcal{C}_2.$$

Por otro lado, por los estimados (2.20), (2.21) y por la proposición 5

(página 30)

$$\begin{aligned}
 & \|f(u_m, w_m)\|_{L^{p'}(Q_T)} \\
 & \leq \left\| A_1 |\Omega|^{1/p'} + A_2 \|u_m(t)\|_{L^p(\Omega)}^{p/p'} + A_3 \|w_m(t)\|_H^{2/p'} \right\|_{L^{p'}(0,T)} \\
 & \leq A_1 (|\Omega| T)^{1/p'} + A_2 \|u_m\|_{L^p(Q_T)}^{p/p'} + A_3 \|w_m\|_{L^2(Q_T)}^{2/p'} \\
 & \leq A_1 (|\Omega| T)^{1/p'} + A_2 C_2^{p/p'} + A_3 C_4^{2/p'}.
 \end{aligned}$$

Lo siguiente será obtener una cota para el operador proyección P_m . Comenzamos por resaltar que, como $P_m(V') \subset V_m \subset V$, la restricción de P_m a V puede considerarse como un operador de V en V definido por

$$u \in V \mapsto P_m u = \sum_{i=0}^m (u, \psi_i)_H \psi_i.$$

Si $u \in H$, $P_m u$ es la proyección ortogonal de u en V_m , entonces $\|P_m u\|_H \leq \|u\|_H$. El operador transpuesto P_m^T de $P_m|_V$ se identifica con $P_m : V' \rightarrow V'$, y por lo tanto se tiene $\|P_m\|_{\mathcal{L}(V',V')} = \|P_m\|_{\mathcal{L}(V,V)}$. Si $u \in V$ podemos calcular

$$\begin{aligned}
 a(P_m u, P_m u) &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m a((u, \psi_i) \psi_i, (u, \psi_j) \psi_j) \\
 &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m (u, \psi_i)(u, \psi_j) a(\psi_i, \psi_j) \\
 &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m (u, \psi_i)(u, \psi_j) \lambda_i(\psi_i, \psi_j) = \sum_{i=0}^m \lambda_i(u, \psi_i)(u, \psi_i) \\
 &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i |(u, \psi_i)|^2 = a(u, u).
 \end{aligned}$$

Luego, usando que $a(\cdot, \cdot)$ es coercitiva, para toda $u \in V$ se tiene

$$\begin{aligned}
 \alpha \|P_m u\|_V^2 &\leq a(P_m u, P_m u) + \alpha \|P_m u\|_H^2 \\
 &\leq \mathcal{M} \|u\|_V^2 + \alpha \|u\|_H^2 \leq (\mathcal{M} + \alpha) \|u\|_V^2.
 \end{aligned}$$

La desigualdad anterior demuestra que la familia de operadores P_m está uniformemente acotada en V' ,

$$\|P_m\|_{\mathcal{L}(V',V')} \leq \frac{\mathcal{M}}{\alpha} + 1,$$

entonces,

$$\begin{aligned} \|P_m(Au_m)\|_{L^2(0,T;V')} &\leq \left(\frac{\mathcal{M}}{\alpha} + 1\right) \mathcal{M}\mathcal{C}_2, \\ \|P_m(f(u_m, w_m))\|_{L^{p'}(Q_T)} \\ &\leq \left(\frac{\mathcal{M}}{\alpha} + 1\right) \left(A_1(|\Omega|T)^{1/p'} + A_2\mathcal{C}_2^{p/p'} + A_3(\mathcal{C}_1T)^{1/p'}\right) \end{aligned}$$

y

$$\|P_m(s\widehat{\varphi})\|_{L^2(0,T;V')} \leq \left(\frac{\mathcal{M}}{\alpha} + 1\right) \|s\|_\infty \|\widehat{\varphi}\|_{V'} T^{1/2}.$$

El estimado (2.22) se obtiene de las desigualdades anteriores y (2.28).

Se procede de maneaa similar para obtener (2.24). De (2.17) (página 33) se sigue que

$$\forall v \in V_m \subset H, \quad \forall t > 0, \quad \langle w'_m(t), v \rangle = -\langle g(u_m(t), w_m(t)), v \rangle,$$

y por lo tanto

$$\forall t > 0, \quad w'_m(t) = -P_m(g(u_m(t), w_m(t))),$$

donde tomamos el operador P_m restringido a la proyección ortogonal $P_m|_H$, de forma que $\|P_m\|_{\mathcal{L}(H,H)} \leq 1$.

Para $T > 0$ fijo, por (2.20), (2.21) y por la proposición 5 (página 30), se tiene

$$\begin{aligned} \|w'_m\|_{L^2(Q_T)} &\leq \|g(u_m, w_m)\|_{L^2(Q_T)} \\ &\leq \left\| B_1 |\Omega|^{1/2} + B_2 \|u_m(t)\|_{L^p(\Omega)}^{p/2} + B_3 \|w_m(t)\|_H \right\|_{L^2(0,T)} \\ &\leq B_1(|\Omega|T)^{1/2} + B_2 \|u_m\|_{L^p(Q_T)}^{p/2} + B_3 \|w_m\|_{L^2(Q_T)} \\ &\leq B_1(|\Omega|T)^{1/2} + B_2(\mathcal{C}_2)^{p/2} + B_3\mathcal{C}_4 := \mathcal{C}_5 \end{aligned}$$

□

2.3.3. Convergencia

Lema 2. *Existen subsucesiones de u_m y w_m , que por comodidad también se denotan como u_m , u'_m , w_m y w'_m tales que*

$$u_m \rightarrow u \text{ fuertemente en } L^2(Q_T), \quad (2.29)$$

$$w_m \rightarrow w \text{ fuertemente en } L^2(Q_T), \quad (2.30)$$

2.3. EXISTENCIA DE SOLUCIÓN GLOBAL

y

$$u_m \rightarrow u, \text{ débilmente en } L^p(Q_T) \cap L^2(0, T; V), \quad (2.31)$$

$$u'_m \rightarrow \tilde{u}, \text{ débilmente en } L^{p'}(Q_T) + L^2(0, T; V'), \quad (2.32)$$

$$w_m \rightarrow w, \text{ débilmente en } L^2(Q_T), \quad (2.33)$$

$$w'_m \rightarrow \tilde{w}, \text{ débilmente en } L^2(Q_T), \quad (2.34)$$

donde $u \in L^p(Q_T) \cap L^2(0, T; V)$, $\tilde{u} \in L^{p'}(Q_T) + L^2(0, T; V')$, $w \in L^2(Q_T)$ y $\tilde{w} \in L^2(Q_T)$.

Demostración. Se tiene $L^{p'}(Q_T) + L^2(0, T; V') \subset L^{p'}(0, T; V')$; en efecto, $L^{p'}(\Omega) \subset V'$, entonces $L^{p'}(Q_T) \subset L^{p'}(0, T; V')$; como $2 \geq p'$, tenemos $L^2(0, T; V') \subset L^{p'}(0, T; V')$.

Por los estimados en el lema 1 obtenemos que la sucesión u'_m está acotada en $L^{p'}(0, T; V')$, mientras que u_m está acotada en $L^2(0, T; V)$, entonces u_m tiene una subsucesión que converge en $L^2(Q_T)$ (ver el teorema 10, página 59). Como las sucesiones w'_m y w_m están acotadas en $L^2(Q_T)$, por un argumento análogo se demuestra (2.30).

El espacio $L^p(Q_T) \cap L^2(0, T; V)$ es reflexivo (ver el teorema 6, página 57). Luego, por la estimación (2.21), u_m tiene una subsucesión que converge débilmente en $L^p(Q_T) \cap L^2(0, T; V)$ (ver teorema 5, página 57). Queda demostrado (2.31). Por un argumento análogo obtenemos (2.32)-(2.34). □

Corolario 1. Para ψ_i , $i \geq 0$, y para todo $\phi \in \mathcal{D}(0, T)$ se cumple

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} u'_m \psi_i \phi &\rightarrow - \int_0^T \int_{\Omega} u \psi_i \phi' \\ \int_0^T \int_{\Omega} w'_m \psi_i \phi &\rightarrow - \int_0^T \int_{\Omega} w \psi_i \phi' \end{aligned}$$

Demostración. Como $\psi_i \phi' \in L^2(Q_T) \cap L^p(Q_T) \cap L^2(0, T; V)$, por (2.31) y (2.33) se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} u'_m \psi_i \phi &= - \int_0^T \int_{\Omega} u_m \psi_i \phi' \rightarrow - \int_0^T \int_{\Omega} u \psi_i \phi' \\ \int_0^T \int_{\Omega} w'_m \psi_i \phi &= - \int_0^T \int_{\Omega} w_m \psi_i \phi' \rightarrow - \int_0^T \int_{\Omega} w \psi_i \phi' \end{aligned}$$

□

Observación 4. Como consecuencia del corolario anterior tenemos:

$$\frac{d}{dt}(u(t), \psi_i) = \langle \tilde{u}, \psi_i \rangle, \quad \frac{d}{dt}(w(t), \psi_i) = \langle \tilde{w}, \psi_i \rangle, \quad (2.35)$$

donde la igualdad se considera en $\mathcal{D}(0, T)$. De (2.35), se deduce que las derivadas en sentido de distribuciones de $u \in L^p(Q_T) \cap L^2(0, T; V)$ y $w \in L^2(Q_T)$ se identifican con $\tilde{u} \in L^{p'}(Q_T) + L^2(0, T; V') \subset L^{p'}(0, T; V')$ y $\tilde{w} \in L^2(Q_T)$, respectivamente (ver la sección A.2, página 58).

Corolario 2. Para $\psi_i, i \geq 0$ se cumple

$$\int_0^T a(u_m(t), \psi_i \phi(t)) dt \rightarrow \int_0^T a(u(t), \psi_i \phi(t)) dt \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(0, T).$$

Demostración. Como $a(\cdot, \cdot)$ es una forma bilineal y continua definida sobre $V \times V$ y $\psi_i \phi \in L^p(Q_T) \cap L^2(0, T; V)$ para cualquier $\phi \in \mathcal{D}(0, T)$, entonces, la aplicación

$$v \in L^p(Q_T) \cap L^2(0, T; V) \mapsto \int_0^T a(v(t), \psi_i \phi(t)) dt,$$

define un funcional lineal y continuo. Luego, el resultado se sigue inmediatamente de (2.31). \square

Corolario 3. Para $\psi_i, i \geq 0$, se cumple

$$\int_0^T \int_{\Omega} f(u_m(t), w_m(t)) \psi_i \phi(t) dt \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} f(u(t), w(t)) \psi_i \phi(t) dt,$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}(0, T)$.

Demostración. Retomamos la notación siguiente,

$$f(u_m, w_m) = f_1(u_m) + f_2(u_m)w_m.$$

Por (2.29) y la continuidad de f_1 , se tiene que $f_1(u_m)$ converge a $f_1(u)$ c.d. en Q_T .

Por la proposición 3 (página 28), la sucesión $f_1(u_m)$ está uniformemente acotada en $L^{p'}(Q_T)$, en efecto:

$$\begin{aligned} \|f_1(u_m)\|_{L^{p'}(Q_T)} &\leq \|c_1 + c_2 |u_m|^{p-1}\|_{L^{p'}(Q_T)} \\ &\leq c_1(|\Omega|T)^{p/p'} + c_2 \|u_m\|_{L^p(Q_T)}^{p/p'} \\ &\leq c_1(|\Omega|T)^{p/p'} + c_2 C_2^{p/p'}. \end{aligned}$$

Entonces

$$f_1(u_m) \rightarrow f_1(u) \text{ débilmente en } L^{p'}(Q_T),$$

(ver el teorema 9, página 59), Por lo tanto

$$\int_0^T \int_{\Omega} f_1(u_m(t)) \psi_i \phi(t) dt \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} f_1(u(t)) \psi_i \phi(t) dt.$$

2.3. EXISTENCIA DE SOLUCIÓN GLOBAL

El termino restante se puede escribir como

$$f_2(u_m)w_m = (f_2(u_m) - f_2(u))w_m + f_2(u)w_m.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_{\Omega} (f_2(u_m(t)) - f_2(u(t)))w_m(t)\psi_i\phi(t)dt \right| \\ & \leq \|(f_2(u_m) - f_2(u))\psi_i\phi\|_{L^2(Q_T)} \|w_m\|_{L^2(Q_T)}. \end{aligned}$$

Verificaremos que el lado derecho de la desigualdad anterior converge a cero. Obsérvese que

$$\|(f_2(u_m) - f_2(u))\psi_i\phi\|_{L^2(Q_T)}^2 = \langle (f_2(u_m) - f_2(u))^2, (\psi_i\phi)^2 \rangle.$$

El producto de dualidad en la igualdad anterior tiene sentido (recuérdese que $p=4$): como $\psi_i \in L^p(\Omega)$, tenemos que $(\psi_i\phi)^2 \in L^2(Q_T)$; por la proposición 3, $f(u_m)^2$ y $f(u)^2$ están acotados en $L^2(Q_T)$, en efecto

$$\begin{aligned} & \|f_2(u_m)^2\|_{L^2(Q_T)} \\ & \leq \|c_3 + c_4|u|\|_{L^p(Q_T)}^{p/2} \\ & \leq \left(c_3(|\Omega|T)^{1/p} + c_4 \|u_m\|_{L^p(Q_T)} \right)^{p/2} \\ & \leq \left(c_3(|\Omega|T)^{1/p} + c_4C_2 \right)^{p/2}. \end{aligned}$$

Por la continuidad de f_2 tenemos que $(f_2(u_m) - f_2(u))^2$ converge a cero c.d en Q_T , entonces, otra vez por el teorema 9, $(f_2(u_m) - f_2(u))^2$ converge a cero débilmente en $L^2(Q_T)$, entonces

$$\|(f_2(u_m) - f_2(u))\psi_i\phi\|_{L^2(Q_T)} \rightarrow 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(0, T).$$

Como $\|w_m\|_{L^2(Q_T)}$ está uniformemente acotado, tenemos

$$\int_0^T \int_{\Omega} (f_2(u_m(t)) - f_2(u(t)))w_m(t)\psi_i\phi(t)dt \rightarrow 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(0, T).$$

Para concluir la demostración, como $f_2(u)\phi\psi_i \in L^2(Q_T)$, se tiene por (2.33)

$$\int_0^T \int_{\Omega} f_2(u(t))w_m\psi_i\phi(t)dt \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} f_2(u)w\psi_i\phi(t)dt.$$

□

Corolario 4. Para ψ_i , $i \geq 0$, se cumple

$$\int_0^T \int_{\Omega} g(u_m(t), w_m(t)) \psi_i \phi(t) dt \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} g(u(t), w(t)) \psi_i \phi(t) dt,$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}(0, T)$.

Demostración. Escribimos $g(u_m, w_m) = g_1(u_m) + g_2 w_m$. Por la continuidad de g_1 , $g_1(u_m)$ converge a $g_1(u)$ c.d. en Q_T . La sucesión $g_1(u_m)$ está acotada en $L^2 Q_T$:

$$\|g_1(u_m)\|_{L^2 Q_T} \leq \left\| c_5 + c_6 |u_m|^{p/2} \right\|_{L^2 Q_T} \leq c_5 (|\Omega| T)^{1/2} + c_6 \|u_m\|_{L^p Q_T}^{p/2}.$$

Entonces,

$$g_1(u_m) \rightarrow g_1(u) \text{ débilmente en } L^2(Q_T),$$

(por el teorema 9, página 59). Por lo tanto

$$\int_0^T \int_{\Omega} g_1(u_m(t)) \psi_i \phi(t) dt \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} g_1(u(t)) \psi_i \phi(t) dt \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(0, T)$$

Finalmente, como w_m converge débilmente en $L^2(Q_T)$, se tiene

$$\int_0^T \int_{\Omega} g_2 w_m(t) \psi_i \phi(t) dt \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} g_2 w(t) \psi_i \phi(t) dt \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(0, T)$$

□

Lema 3. Las funciones u y w definidas en el lema 2 satisfacen (2.11)-(2.12).

Demostración. Por los cuatro corolarios anteriores se concluye que, para ψ_i , $i \geq 1$, las funciones u y w satisfacen

$$\frac{d}{dt}(u(t), \psi_i) + a(u(t), \psi_i) + \int_{\Omega} f(u(t), w(t)), \psi_i = \langle s(t) \widehat{\varphi}, \psi_i \rangle \quad (2.36)$$

$$\frac{d}{dt}(w(t), \psi_i) + \int_{\Omega} g(u(t), w(t)), \psi_i = 0 \quad (2.37)$$

donde la igualdad se considera en $\mathcal{D}'(0, T)$. Luego, como las funciones ψ_i , $i \geq 0$, son densas en V se deduce que u y w satisfacen las ecuaciones (2.11) y (2.12) en la definición de solución débil 3.

□

Observación 5. Por la observación 4 se tiene que (u, w) es una solución fuerte en el sentido de la definición 4.

Continuidad

Por el lema 2 (página 38) y la cadena de inclusiones (2.2) (página 26) tenemos que $u \in L^p(Q_T) \cap L^2(0, T; V) \subset L^p(0, T; V')$ y $w \in L^2(Q_T)$. Por la observación 4 (página 39), u y w tienen sus derivadas en el sentido de distribuciones, $\partial_t u$ y $\partial_t w$, respectivamente en $L^{p'}(Q_T) + L^2(0, T; V') \subset L^{p'}((0, T), V')$ y $L^2(Q_T)$.

Por el teorema (11) (página 59), se deduce que las funciones $u : t \in [0, T] \rightarrow u(t) \in V'$ y $w : t \in [0, T] \rightarrow w(t) \in H$ son continuas. Con respecto a u , solo se demuestra que es débilmente continua en V .

Por la observación 4, también se tiene

$$\langle \partial_t u(t), u(t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_H^2,$$

donde la igualdad se considera en $\mathcal{D}'(0, T)$. Entonces, por (2.36), tenemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_H^2 = -a(u(t), u(t)) - \langle f(u(t), w(t)), u(t) \rangle + \langle s(t)\widehat{\varphi}, u(t) \rangle, \quad (2.38)$$

entonces la función $t \mapsto \|u(t)\|_H^2$ pertenece a $H^1(0, T)$, y por lo tanto es continua de $[0, T]$ en \mathbb{R} . Se tiene como consecuencia que la función $u : t \in [0, T] \mapsto u(t) \in H$ es continua.

Como $u_m(0) \rightarrow u_0$ y $w_m(0) \rightarrow w_0$ en H (ver (2.19), página 33), obtenemos que $u(0) = u_0$ y $w(0) = w_0$.

Capítulo 3

Existencia de solución Periódica

El resultado principal de este capítulo, y también el más importante de la tesis, es el teorema 4 (página 54) sobre la existencia de una solución \mathcal{T} -periódica del problema (1.20)-(1.23). La demostración consta de tres partes: en la sección 3.2 se construye una aplicación de manera que el problema de existencia de soluciones aproximadas \mathcal{T} -periódicas es equivalente al de la existencia de un punto fijo para tal aplicación; en la sección 3.3 se demuestra, usando el teorema de punto fijo de Schauder, que tal punto fijo existe; finalmente, por los resultados obtenidos en el capítulo 2 se obtiene que existe una subsucesión de soluciones aproximadas que converge en $L^2(Q_{\mathcal{T}})$ a una solución \mathcal{T} -periódica débil de (1.20)-(1.23).

3.1. Notación

Usaremos el modelo de Rogers-McCulloch centrado en el punto $(u_{res}, 0)$, es decir, hacemos el cambio de variable $\hat{u} = u - u_{res}$ y $\hat{w} = w$. Adoptaremos la siguiente notación:

$$\begin{aligned} f(u, w) &= c_4 u + f^N(u, w), \\ g(u, w) &= b(u - c_3 w), \end{aligned}$$

donde

$$f^N(u, w) = a_1 u^3 + a_2 u w - a_1 (u_{amp} + u_{tr}) u^2,$$

con

$$c_4 = a_1 u_{tr} u_{amp}, \quad u_{tr} = u_{th} - u_{res}, \quad u_{amp} = u_{peak} - u_{res}.$$

De esta manera, el sistema de Faedo-Galerkin (2.16)-(2.18) se reescribe como

$$u'_{im}(t) = -(\lambda_i + c_4) u_{im}(t) - \int_{\Omega} f_{ion}^N(u_m(t), w_m(t)) \psi_i + s(t) \widehat{\varphi}_i \quad (3.1)$$

$$w'_{im}(t) = b(u_{im}(t) - c_3 w_{im}(t)), \quad (3.2)$$

$$i = 0, \dots, m.$$

donde $\widehat{\varphi}_i := \int_{\Gamma_1} \varphi \psi_i ds$.

Definimos

$$U(t) = (u_{0m}(t), u_{1m}(t), \dots, u_{mm}(t))^T,$$

$$W(t) = (w_{0m}(t), w_{1m}(t), \dots, w_{mm}(t))^T.$$

Definición 5. Denotamos

$$\mathcal{L}_{\mathcal{T}}^m = \{(U, W) \in L^2([0, \mathcal{T}], \mathbb{R}^{2m+2}) : \\ U(t + \mathcal{T}) = U(t), \quad W(t + \mathcal{T}) = W(t)\},$$

dotado de la norma

$$\|(U, W)\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{T}}^m} = \left(\int_0^{\mathcal{T}} \|(U, W)\|_{\mathbb{R}^{2m+2}}^2 \right)^{1/2}.$$

Observación 6. De manera natural, cada $(U, W) \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}^m$ se identifica con una solución aproximada (u_m, w_m) ,

$$u_m(t) = \sum_{i=0}^m u_{im}(t) \psi_i, \quad w_m(t) = \sum_{i=0}^m w_{im}(t) \psi_i.$$

3.2. Reducción a un problema de punto fijo

Considérese, por el momento, el sistema siguiente:

$$u'_{im}(t) = -(\lambda_i + c_4) u_{im}(t) + h_i(t) \quad (3.3)$$

$$w'_{im}(t) = b(u_{im}(t) - c_3 w_{im}(t)), \quad (3.4)$$

$$i = 0, \dots, m.$$

Respecto a las funciones $h_i(t)$, sólo supondremos que son \mathcal{T} -periódicas y continuas.

La ecuación lineal asociada a (3.3) no tiene soluciones periódicas diferentes de la trivial. Bajo estas condiciones, se demuestra en [Farkas 1994,

3.2. REDUCCIÓN A UN PROBLEMA DE PUNTO FIJO

págs. 157-158] que (3.3) tiene una única solución \mathcal{T} -periódica dada por la siguiente expresión:

$$u_{im}(t) = \int_0^{\mathcal{T}} K_i(t, \tau) h_i(\tau) d\tau. \quad (3.5)$$

con

$$K_i(t, \tau) = \frac{1}{1 - e^{-(\lambda_i + c_4)\mathcal{T}}} \begin{cases} e^{-(\lambda_i + c_4)(t-\tau)} & \text{if } 0 \leq \tau \leq t \leq \mathcal{T}. \\ e^{-(\lambda_i + c_4)(t+\mathcal{T}-\tau)} & \text{if } 0 \leq t \leq \tau \leq \mathcal{T}. \end{cases}$$

Si sustituimos la solución de (3.3) en (3.4) obtenemos, por el mismo argumento, que (3.4) tiene una única solución \mathcal{T} -periódica dada por

$$w_{im}(t) = b \int_0^{\mathcal{T}} K_b(t, \tau) u_{im}(\tau) d\tau. \quad (3.6)$$

con

$$K_b(t, \tau) = \frac{1}{1 - e^{-bc_3\mathcal{T}}} \begin{cases} e^{-bc_3(t-\tau)} & \text{if } 0 \leq \tau \leq t \leq \mathcal{T}, \\ e^{-bc_3(t+\mathcal{T}-\tau)} & \text{if } 0 \leq t \leq \tau \leq \mathcal{T}. \end{cases}$$

Usando (3.5) y (3.6), definimos una aplicación $\mathcal{K}^{(m)}$ cuyas componentes son

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{K}^{(m)}(h) \right)_i(t) \\ &= \begin{cases} \int_0^{\mathcal{T}} K_i(t, \tau) h_i(\tau) d\tau & \text{para } i = 0, \dots, m, \\ b \int_0^{\mathcal{T}} K_b(t, \tau) u_{i-m-1, m}(\tau) d\tau & \text{para } i = m+1, \dots, 2m+1, \end{cases} \end{aligned}$$

que envía a cada vector $h(t) = (h_0(t), h_1(t), \dots, h_m(t))$ de funciones \mathcal{T} -periódicas y continuas en la única solución \mathcal{T} -periódica de (3.3)-(3.4).

Definimos la aplicación $\mathcal{G}^{(m)}$ componente a componente por

$$(U, W) \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}^m \mapsto \mathcal{G}_i(U, W)(t) = - \int_{\Omega} f^N(u_m, w_m) \psi_i + s(t) \widehat{\varphi}_i$$

para $i = 0, \dots, m$.

Observación 7. Como $(U, W) \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}^m$, las funciones u_m y w_m son \mathcal{T} -periódicas. Entonces, $\mathcal{G}_i(U, W)$ es \mathcal{T} -periódica. También se tiene que $\mathcal{G}_i(U, W)$ es continua.

Finalmente, considérese la composición

$$\mathcal{K}^{(m)} \circ \mathcal{G}^{(m)} : \mathcal{L}_{\mathcal{T}}^m \rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{T}}^m,$$

cuyas componentes son

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{K}^{(m)} \circ \mathcal{G}^{(m)}(U, W) \right)_i(t) \\ &= \begin{cases} \int_0^{\mathcal{T}} K_i(t, \tau) \mathcal{G}_i(U, W)(\tau) & \text{para } i = 0, \dots, m, \\ b \int_0^{\mathcal{T}} K_b(t, \tau) u_{i-m-1, m}(\tau) d\tau & \text{para } i = m+1, \dots, 2m+1. \end{cases} \end{aligned}$$

Hemos obtenido el siguiente resultado.

Teorema 2. *El sistema (3.1)-(3.2) tiene una solución \mathcal{T} -periódica si y sólo si la aplicación*

$$\mathcal{K}^{(m)} \circ \mathcal{G}^{(m)} : \mathcal{L}_{\mathcal{T}}^m \rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{T}}^m$$

tiene un punto fijo.

3.3. Existencia de un punto fijo

Lema 4. *El conjunto*

$$E_m = \left\{ (U, W) \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}^m : \sup_{t \in [0, \mathcal{T}]} |u_{im}(t)| \leq \frac{1}{\lambda_i}, \quad \sup_{t \in [0, \mathcal{T}]} |w_{im}(t)| \leq \frac{1}{\lambda_i}, \quad i = 0, \dots, m \right\},$$

es un subconjunto acotado convexo y cerrado de $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}^m$.

Demostración. Sea $(U, W) \in E_m$, entonces

$$\|U(t)\|_{\mathbb{R}^{m+1}}^2 = \sum_{i=0}^m |u_{im}(t)|^2 \leq \sum_{i=0}^m \frac{1}{\lambda_i^2} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2} := m_1.$$

De manera análoga obtenemos que

$$\|W(t)\|_{\mathbb{R}^{m+1}}^2 \leq m_1.$$

Por lo tanto, el conjunto E_m es acotado en $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}^m$.

Sean $(U^{(1)}, W^{(1)}), (U^{(2)}, W^{(2)}) \in E_m$, por cálculo directo se verifica que

$$\alpha(U^{(1)}, W^{(1)}) + (1 - \alpha)(U^{(2)}, W^{(2)}) \in E_m,$$

donde $\alpha \in [0, 1]$. En efecto, para $i = 0, \dots, m$, se tiene:

$$\begin{aligned} |\alpha u_{im}^{(1)} + (1 - \alpha) u_{im}^{(2)}| &\leq \alpha \frac{1}{\lambda_i} + (1 - \alpha) \frac{1}{\lambda_i} \leq \frac{1}{\lambda_i}, \\ |\alpha w_{im}^{(1)} + (1 - \alpha) w_{im}^{(2)}| &\leq \alpha \frac{1}{\lambda_i} + (1 - \alpha) \frac{1}{\lambda_i} \leq \frac{1}{\lambda_i}. \end{aligned}$$

3.3. EXISTENCIA DE UN PUNTO FIJO

Tenemos que E_m es un conjunto convexo.
Sea $(U^{(n)}, W^{(n)})$ una sucesión en \mathcal{L}_T^m tal que

$$(U^{(n)}, W^{(n)}) \rightarrow (U, W), \text{ en } \mathcal{L}_T^m,$$

Se tiene, para $i = 0, \dots, m$ y para $t \in [0, T]$, excepto un subconjunto de medida nula, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{im}^{(n)}(t) = u_{im}(t)$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_{im}^{(n)}(t) = w_{im}(t),$$

de donde se deduce que

$$|u_{im}(t)| \leq 1/\lambda_i$$

y

$$|w_{im}(t)| \leq 1/\lambda_i.$$

Por lo tanto tenemos que E_m es un subconjunto cerrado de \mathcal{L}_T^m . \square

Proposición 6. Si $(U, W) \in E_m$ entonces, para todo $t \in [0, T]$ se cumple

$$\|f^N(u_m(t), w_m(t))\|_H \leq [a_1(u_{tr} + u_{amp} + 1) + a_2] \tilde{m}.$$

con

$$\tilde{m} = \max \left\{ \tilde{M}_1^2 3m_2, \tilde{M}_2^3 3^{3/2} m_2^{3/2} \right\}, \quad m_2 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i},$$

donde \tilde{M}_1 y \tilde{M}_2 son constantes tales que si $v \in V$,

$$\|v\|_{L^4(\Omega)} \leq \tilde{M}_1 \|v\|_V$$

y

$$\|v\|_{L^6(\Omega)} \leq \tilde{M}_2 \|v\|_V$$

Demostración. Sea $(U, W) \in E_m$. Iniciamos la demostración estableciendo para todo $t \in [0, T]$ los resultados siguientes,

$$\|u_m(t)\|_V^2 \leq 3m_2, \quad \|w_m(t)\|_V^2 \leq 3m_2. \quad (3.7)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \|u_m(t)\|_V &= \left\| \sum_{i=0}^m u_{im}(t) \psi_i \right\|_V \leq \sum_{i=0}^m |u_{im}(t)| \|\psi_i\|_V \leq \sum_{i=0}^m \frac{1}{\lambda_i} \sqrt{\lambda_i} \\ &\leq \sum_{i=0}^m \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}, \end{aligned}$$

entonces,

$$\|u_m(t)\|_V^2 \leq \left(\sum_{i=0}^m \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \right)^2.$$

Obsérvese que

$$\left(\sum_{i=0}^m \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \right)^2 = \sum_{i=0}^m \frac{1}{\lambda_i} + \sum_{i \neq j} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}},$$

luego, como

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} \leq \frac{1}{\min(\sqrt{\lambda_i}, \sqrt{\lambda_j})^2}$$

tenemos

$$\left(\sum_{i=0}^m \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \right)^2 \leq \sum_{i=0}^m \frac{1}{\lambda_i} + 2 \sum_{i=0}^m \frac{1}{\lambda_i} \leq 3 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i}.$$

El resultado para $w_m(t)$ se obtiene de forma análoga. Usando (3.7) obtenemos los estimados para las normas en H de $u_m^2(t)$, $u_m^3(t)$ y $u_m(t)w_m(t)$.

$$\|u_m^2(t)\|_H^2 = \int_{\Omega} |u_m(t)|^4 = \|u_m(t)\|_{L^4(\Omega)}^4 \leq \widetilde{M}_1^4 \|u_m\|_V^4 \leq \widetilde{M}_1^4 9m^2,$$

entonces

$$\|u_m^2(t)\|_H \leq \widetilde{M}_1^2 3m_2.$$

De manera similar obtenemos la estimación para $\|u_m^3(t)\|_H$; por la inmersión continua de V en $L^6(\Omega)$ tenemos

$$\|u_m^3(t)\|_H^2 = \int_{\Omega} |u_m(t)|^6 = \|u_m(t)\|_{L^6(\Omega)}^6 \leq \widetilde{M}_2^6 \|u_m(t)\|_V^6 \leq \widetilde{M}_2^6 3^3 m_2^3,$$

entonces

$$\|u_m^3(t)\|_H \leq \widetilde{M}_2^3 3^{3/2} m_2^{3/2}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \|u_m(t)w_m(t)\|_H^2 &= \int_{\Omega} |u_m(t)|^2 |w_m(t)|^2 \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|u_m(t)|^4 + |w_m(t)|^4) \\ &= \frac{1}{2} \left(\|u_m(t)\|_{L^p(\Omega)}^4 + \|w_m(t)\|_{L^p(\Omega)}^4 \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\widetilde{M}_1^4 \|u_m(t)\|_V^4 + \widetilde{M}_1^4 \|w_m(t)\|_V^4 \right) \\ &\leq \widetilde{M}_1^4 9m^2. \end{aligned}$$

3.3. EXISTENCIA DE UN PUNTO FIJO

Por las consideraciones anteriores podemos concluir como sigue

$$\begin{aligned}
& \|f^N(u_m(t), w_m(t))\|_H \\
& \leq a_1(u_{tr} + u_{amp}) \|u_m^2(t)\|_H + a_1 \|u_m^3(t)\|_H + a_2 \|u_m(t)w_m(t)\|_H \\
& \leq [a_1(u_{tr} + u_{amp}) + a_2] \widetilde{M}_1^2 3m_2 + a_1 \widetilde{M}_2^3 3^{3/2} m_2^{3/2} \\
& \leq [a_1(u_{tr} + u_{amp} + 1) + a_2] \widetilde{m}.
\end{aligned}$$

□

Lema 5. $\mathcal{K}^{(m)} \circ \mathcal{G}^{(m)}(E_m) \subset E_m$.

Demostración. Sea $(U, W) \in E_m$. Para $i = 0, \dots, m$, se tiene

$$\begin{aligned}
& \left| (\mathcal{K}^{(m)} \circ \mathcal{G}^{(m)})_i(U, W)(t) \right| \leq \\
& \int_0^{\mathcal{T}} |K_i(t, \tau)| \int_{\Omega} |f^N(u_m(\tau), w_m(\tau))| |\psi_i| d\tau + |\widehat{\varphi}_i| \left| \int_0^{\mathcal{T}} K_i(t, \tau) s(\tau) d\tau \right|,
\end{aligned}$$

Primero, acotamos el segundo sumando en la desigualdad anterior. Como $s(0) = s(\mathcal{T}) = 0$, integrando por partes obtenemos

$$\int_0^{\mathcal{T}} K_i(t, \tau) s(\tau) d\tau = -\frac{1}{\lambda_i + c_4} \int_0^{\mathcal{T}} K_i(t, \tau) s'(\tau) d\tau \leq \frac{\widehat{s}}{\lambda_i} \int_0^{\mathcal{T}} K_i(t, \tau) d\tau.$$

donde $\widehat{s} = \sup_{t \in [0, \mathcal{T}]} |s'(t)|$. Por otro lado

$$\int_0^{\mathcal{T}} K_i(t, \tau) d\tau \leq \frac{1}{\lambda_i},$$

entonces,

$$\left| \int_0^{\mathcal{T}} K_i(t, \tau) s(\tau) d\tau \right| \leq \frac{\widehat{s}}{\lambda_i^2}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
& |\widehat{\varphi}_i| \left| \int_0^{\mathcal{T}} K_i(t, \tau) s(\tau) d\tau \right| \\
& \leq \|\varphi\|_{L^2(\Gamma_1)} \|\psi_i\|_{L^2(\Gamma_1)} \frac{\widehat{s}}{\lambda_i^2} \leq \|\varphi\|_{L^2(\Gamma_1)} \widetilde{M} \|\psi_i\|_{L^2(\Omega)} \frac{\widehat{s}}{\lambda_i^2} \\
& = \frac{\|\varphi\|_{L^2(\Gamma_1)} \widetilde{M} \widehat{s}}{\lambda_i^2} \leq \frac{\|\varphi\|_{L^2(\Gamma_1)} \widetilde{M} \widehat{s}}{\lambda_i}, \tag{3.8}
\end{aligned}$$

donde \widetilde{M} es la norma del operador traza.

CAPÍTULO 3. EXISTENCIA DE SOLUCIÓN PERIÓDICA

Ahora, acotaremos el término restante. Por la proposición 6 (página 49),

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |f^N(u_m(\tau), w_m(\tau))| |\psi_i| \\ & \leq \|f^N(u_m(\tau), w_m(\tau))\|_H \leq [a_1(u_{tr} + u_{amp} + 1) + a_2] \tilde{m}, \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} & \int_0^{\mathcal{T}} |K_i(t, \tau)| \int_{\Omega} |f^N(u_m(\tau), w_m(\tau))| |\psi_i| d\tau \\ & \leq \frac{[a_1(u_{tr} + u_{amp} + 1) + a_2] \tilde{m}}{\lambda_i}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Por (3.8) y (3.9) tenemos

$$\left| (\mathcal{K}^{(m)} \circ \mathcal{G}^{(m)})_i(U, W)(t) \right| \leq \frac{[a_1(u_{tr} + u_{amp} + 1) + a_2] \tilde{m} + \widetilde{M\hat{s}} \|\varphi\|_{L_2(\Gamma_1)}}{\lambda_i}.$$

Si imponemos la condición

$$[a_1(u_{tr} + u_{amp} + 1) + a_2] \tilde{m} + \widetilde{M\hat{s}} \|\varphi\|_{L_2(\Gamma_1)} \leq 1, \quad (3.10)$$

podemos concluir que

$$\left| (\mathcal{K}^{(m)} \circ \mathcal{G}^{(m)})_i(U, W)(t) \right| \leq \frac{1}{\lambda_i}, \quad \text{para } i = 0, \dots, m.$$

Ahora, para $i = m + 1, \dots, 2m + 1$,

$$\begin{aligned} & \left| (\mathcal{K}^{(m)} \circ \mathcal{G}^{(m)})_i(U, W)(t) \right| \\ & \leq b \int_0^{\mathcal{T}} |K_b(t, \tau)| |u_{i-m-1}^{(m)}(\tau)| d\tau \leq b \frac{1}{\lambda_{i-m-1}} \int_0^{\mathcal{T}} |K_b(t, \tau)| d\tau \\ & = b \frac{1}{\lambda_{i-m-1}} \frac{1}{bc_3} = \frac{1}{\lambda_{i-m-1}} \frac{1}{c_3} \end{aligned}$$

si imponemos la condición

$$c_3 \geq 1, \quad (3.11)$$

tenemos

$$\left| (\mathcal{K}^{(m)} \circ \mathcal{G}^{(m)})_i(U, W)(t) \right| \leq \frac{1}{\lambda_{i-m-1}}, \quad \text{for } i = m + 1, \dots, 2m + 1.$$

Hemos demostrado que $\mathcal{K}^{(m)} \circ \mathcal{G}^{(m)}(E_m) \subseteq E_m$. \square

Lema 6. *La aplicación $\mathcal{K}^{(m)} \circ \mathcal{G}^{(m)}$ es compacta.*

3.3. EXISTENCIA DE UN PUNTO FIJO

Demostración. Por cálculo directo,

$$\int_0^{\mathcal{T}} \int_0^{\mathcal{T}} |K_i(t, \tau)|^2 d\tau dt \leq \infty, \quad \int_0^{\mathcal{T}} \int_0^{\mathcal{T}} |K_b(t, \tau)|^2 d\tau dt \leq \infty.$$

Entonces, por un resultado clásico [Porter 1990, pag.72], sabemos que los operadores siguientes son compactos:

$$\phi \in L^2([0, \mathcal{T}], \mathbb{R}) \mapsto \int_0^{\mathcal{T}} K_i(t, \tau) \phi(\tau) d\tau \in L^2([0, \mathcal{T}], \mathbb{R}), \quad i = 0, \dots, m.$$

$$\phi \in L^2([0, \mathcal{T}], \mathbb{R}) \mapsto \int_0^{\mathcal{T}} K_b(t, \tau) \phi(\tau) d\tau \in L^2([0, \mathcal{T}], \mathbb{R}).$$

Verificaremos que $\mathcal{G}_i^{(m)}(E_m)$, $i = 0, \dots, m$, es acotado en $L_2([0, \mathcal{T}], \mathbb{R})$. En efecto, sea $(U, W) \in E_m$, entonces

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{G}_i^{(m)}(U, W)(t) \right| \\ & \leq \int_{\Omega} |f^N(u_m, w_m)| |\psi_i| + |s(t)| \int_{\Gamma_1} |\varphi| |\psi_i| \\ & \leq \|f^N(u_m, w_m)\|_H + \left(\sup_{t \in [0, \mathcal{T}]} s(t) \right) \|\varphi\|_{L^2(\Gamma_1)} \widetilde{M} \|\psi\|_H \\ & \leq [a_1(u_{tr} + u_{amp} + 1) + a_2] \widetilde{m} + \left(\sup_{t \in [0, \mathcal{T}]} s(t) \right) \|\varphi\|_{L^2(\Gamma_1)} \widetilde{M}, \end{aligned}$$

donde \widetilde{M} es la norma del operador traza. Por lo tanto

$$\begin{aligned} & \left\| \mathcal{G}_i^{(m)}(U, W) \right\|_{L_2([0, \mathcal{T}], \mathbb{R})} \\ & \leq \left([a_1(u_{tr} + u_{amp} + 1) + a_2] \widetilde{m} + \sup_{t \in [0, \mathcal{T}]} s(t) \|\varphi\|_{L^2(\Gamma_1)} \widetilde{M}, \right) \sqrt{\mathcal{T}}, \end{aligned}$$

donde el lado derecho de la desigualdad anterior es constante.

Por las consideraciones anteriores podemos concluir que las aplicaciones

$$(\mathcal{K}^{(m)} \circ \mathcal{G}^{(m)})_i(U, W)(t) = \int_0^{\mathcal{T}} K_i(t, \tau) \mathcal{G}_i(U, W)(\tau) d\tau, \quad i = 0, \dots, m$$

envían conjuntos acotados de E_m en conjuntos precompactos. La demostración correspondiente para

$$(\mathcal{K}^{(m)} \circ \mathcal{G}^m)_i, \quad i = m + 1, \dots, 2m + 1$$

es inmediata. Por lo tanto, la aplicación $\mathcal{K}^{(m)} \circ \mathcal{G}^{(m)}$ es compacta. \square

Por los lemas 4, 5, 6 y el teorema de Schauder de punto fijo (página 57), hemos demostrado el resultado siguiente.

Teorema 3. *La aplicación $\mathcal{K}^{(m)} \circ \mathcal{G}^{(m)}$ tiene un punto fijo en E_m .*

Teorema 4 (Existencia de solución \mathcal{T} -periódica). *Supongamos que se cumplen las condiciones (3.10) y (3.11). Entonces, existe una solución débil del problema (1.20)-(1.23), en el sentido de la definición (3), que es \mathcal{T} -periódica.*

Demostración. Por los teoremas 2 (página 48) y 3, sabemos que para toda $m \geq 0$, el problema de Faedo-Galerkin (3.1)-(3.2) (página 46) tiene una solución \mathcal{T} -periódica $(U_m^{(p)}, W_m^{(p)})$. De manera natural, esta solución se identifica con $(u_m^{(p)}, w_m^{(p)})$ (ver la observación 6, página 46). Como $(U_m^{(p)}, W_m^{(p)}) \in E_m$, se tiene

$$\begin{aligned} \left\| u_m^{(p)}(0) \right\|_H &\leq \sum_{i=0}^m \frac{1}{\lambda_i} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = m_2, \\ \left\| w_m^{(p)}(0) \right\|_H &\leq m_2. \end{aligned}$$

Entonces, por la observación 3 (página 33) y el lema 2 (página 38), se tiene que existen subsucesiones, que también denotamos $u_m^{(p)}$ y $w_m^{(p)}$, tales que

$$u_m^{(p)} \rightarrow u^{(p)}, \text{ en } L^2(Q_{\mathcal{T}}), \quad (3.12)$$

$$w_m^{(p)} \rightarrow w^{(p)}, \text{ en } L^2(Q_{\mathcal{T}}), \quad (3.13)$$

donde $(u^{(p)}, w^{(p)})$ es una solución débil del problema (1.20)-(1.23) en el sentido de la definición (3). Como para toda $m \geq 0$ $(u_m^{(p)}, w_m^{(p)})$ es \mathcal{T} -periódica, de (3.12) y (3.13) se deduce que $(u^{(p)}, w^{(p)})$ es \mathcal{T} -periódica. \square

Observación 8. *Hemos encontrado que es necesario imponer restricciones para los parámetros del modelo:*

$$[a_1(u_{tr} + u_{amp} + 1) + a_2] \leq \frac{1 - \widetilde{M}\widehat{s}\|\varphi\|_{L_2(\Gamma_1)}}{\widetilde{m}}, \quad (3.14)$$

y

$$c_3 \geq 1.$$

Estas condiciones sugieren información sobre el fenómeno que se modela. Tenemos en el lado izquierdo de (3.14) parámetros relacionados únicamente con las corrientes iónicas a través de la membrana celular, mientras que en el lado derecho aparecen parámetros correspondientes a la activación, la propagación y la geometría de la región Ω . Por lo tanto, podemos considerar esta desigualdad como una condición de balance.

Conclusión

Se ha propuesto un modelo matemático que representa la actividad eléctrica en un ventrículo aislado del torso y que es estimulado periódicamente. La forma en la que el estímulo eléctrico es aplicado se corresponde con el mecanismo por el cual las fibras de Purkinje estimulan la pared interior del ventrículo. Para representar el flujo de iones a través de la membrana celular se ha considerado un modelo simple de dos variables pero que reproduce de manera cualitativa las principales características del potencial de acción de una célula del corazón.

Para este modelo se obtuvieron dos resultados:

1. Se ha demostrado que tiene solución débil en el sentido de la definición 3, para lo cual ha sido necesario recurrir a la formulación variacional tanto en la variable espacial como en la temporal. Además, esta solución débil es también una solución fuerte en el sentido de la definición 4.
2. Se ha demostrado la existencia de una solución periódica cuando se le aplica un estímulo periódico adecuado. El periodo de la solución coincide con el del estímulo. En este caso, ha sido necesario hacer suposiciones adicionales sobre los parámetros del modelo. Queda pendiente como trabajo futuro las cuestiones de unicidad y estabilidad de la solución periódica.

Apéndice A

Resultados clásicos

A.1. Resultados de análisis funcional

Teorema 5. *Sea X es un espacio de Banach reflexivo y sea x_m una sucesión acotada en X . Entonces existe una subsucesión x_{n_k} que converge débilmente en X*

Demostración. [Brezis 2011, teorema 3.18, p. 69] □

Teorema 6. *Sea X un espacio de Banach reflexivo y sea $M \subset X$ un subespacio lineal cerrado de X . Entonces M es reflexivo*

Demostración. [Brezis 2011, prop. 3.20, p. 60] □

Teorema 7. *Sea $a(\cdot, \cdot)$ una forma bilineal definida en $V \times V$ simétrica y coercitiva, entonces, existe una base ortonormal de H formada por vectores propios $\psi_i \in V$ tal que*

$$\forall v \in V, \quad a(\psi_i, v) = \lambda_i(\psi_i, v),$$

donde los valores propios λ_i forman una sucesión creciente

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m \leq \dots,$$

además, la sucesión $\{\lambda_i^{-1/2}\psi_i\}$ forma una base ortonormal de V para el producto escalar $a(\cdot, \cdot)$

Demostración. [Raviart 1992, teo. 6.2-1 y rem. 6.2-2, p. 137-138] □

Teorema 8 (Teorema de punto fijo de Schauder). *Una aplicación continua y compacta en un conjunto cerrado, acotado y convexo de un espacio de Banach tiene un punto fijo.*

A.2. Los espacios $L^p(0, T; X)$

Sea X un espacio de Banach, denotamos por $L^p(0, T; X)$ el espacio de las funciones $t \rightarrow f(t)$ de $[0, T] \rightarrow X$ que son medibles con valores en X tales que

$$\|f\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} < \infty, \quad (\text{A.1})$$

con esta norma $L^p(0, T; X)$ es completo. Observar que

$$L^p(0, T; L^p(\Omega)) = L^p(Q_T), \quad (\text{A.2})$$

donde $Q_T = [0, T] \times \Omega$.

Es necesario dar una definición de la derivada de un elemento de $L^p(0, T; X)$, para ello consideraremos el espacio de las distribuciones sobre $[0, T]$ con valores en X , ver [Lions 1069, p.7].

Definición 6. Definimos $\mathcal{D}'(0, T; X)$, el espacio de las distribuciones sobre $[0, T]$ con valores en X , como

$$\mathcal{D}'(0, T; X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(0, T); X), \quad (\text{A.3})$$

donde $\mathcal{D}(0, T)$ es el conjunto de las funciones infinitamente diferenciables de soporte compacto en $(0, T)$

Si $f \in \mathcal{D}'(0, T; X)$ podemos definir su derivada en sentido de distribuciones como $\partial f / \partial t \in \mathcal{D}'(0, T; X)$ dado por

$$\frac{\partial f}{\partial t}(\phi) = -f\left(\frac{d\phi}{dt}\right), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(0, T). \quad (\text{A.4})$$

Si $f \in L^p(0, T; X)$ le corresponde una distribución \hat{f} en $\mathcal{D}'(0, T; X)$ definida de la siguiente manera

$$\hat{f}(\phi) = \int_0^T f(t)\phi(t)dt \in X, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(0, T). \quad (\text{A.5})$$

De esta manera, podemos definir la derivada en sentido de distribuciones de una función $f \in L^p(0, T; X)$ como

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(\phi) = - \int_0^T f(t)\phi'(t)dt, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(0, T).$$

Teorema 9. Sean Q_T un abierto acotado de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, f_n y f funciones de $L^p(Q_T)$, $1 < p < \infty$, tales que

$$\|f_n\|_{L^p(Q_T)} \leq C, \quad f_n \rightarrow f \text{ c.p. en } Q_T,$$

para una cierta constante $C > 0$, entonces,

$$f_n \rightarrow f \text{ débilmente en } L^p(Q_T),$$

Demostración. [Lions 1069, lema 1.3, p. 12] □

Teorema 10. Sean B_0 , B y B_1 tres espacios de Banach tales que

1. $B_0 \subset B \subset B_1$, con B_i reflexivo, $i = 1, 2$,

2. la inmersión $B_0 \rightarrow B$ es compacta.

Definimos para T finito y $0 < p_i < \infty$, $i = 0, 1$,

$$W^{1,p_0,p_1}(0, T; B_0, B_1) = \left\{ v \mid v \in L^{p_0}(0, T; B_0), \quad v' = \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0, T; B_1) \right\},$$

dotado de la norma $\|v\|_{L^{p_0}(0, T; B_0)} + \|v'\|_{L^{p_1}(0, T; B_1)}$. Se tiene que $W^{1,p_0,p_1}(0, T; B_0, B_1)$ es un espacio de Banach y

$$W^{1,p_0,p_1}(0, T; B_0, B_1) \subset L^{p_0}(0, T; B).$$

Además, la inmersión de $W^{1,p_0,p_1}(0, T; B_0, B_1)$ en $L^{p_0}(0, T; B)$ es compacta.

Demostración. [Lions 1069, th. 5.1, p.58] □

En la siguiente proposición denotamos por E cualquiera de los dos espacios V o H .

Proposición 7. Sea $u \in L^{p_0}(0, T; E)$ con $p_0 \geq 2$, entonces, $u \in W^{1,p_0,p_1}(0, T; E, E')$ si y sólo si existe una función $\tilde{u} \in L^{p_1}(0, T; E')$ tal que

$$-\int_0^T (u, v)\phi' = \int_0^T \langle \tilde{u}, v \rangle_{E' \times E} \phi, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(0, T), \forall v \in E.$$

Es decir, \tilde{u} es la derivada de u en sentido de distribuciones y es la única función en $L^{p_1}(0, T; E')$ que satisface

$$\frac{d}{dt}(u, v) = \langle \tilde{u}, v \rangle_{E' \times E}, \quad \forall v \in E.$$

Teorema 11. Si $f \in L^p(0, T; X)$ y $\partial_t f \in L^p(0, T; X)$ ($1 \leq p \leq \infty$), entonces, f es continua c.d. de $(0, T)$ en X .

Demostración. [Lions 1069, lema 1.2, p.7] □

Bibliografía

- [Aliev 1996] Aliev, R.R., and Panfilov, A.V. (1996). A simple two-variable model of cardiac excitation. *Chaos Solitons Fractals* 7 (3), pp. 293-301.
- [Ambrosio 200] Ambrosio, L., Colli-Franzone, P. and Savaré, G. (2000). On the asymptotic behaviour of anisotropic energies arising in the cardiac bidomain model. *Interface Free Bound.* 2 (3), 231-266.
- [Berenfeld 1996] Berenfeld, O. and Abboud, S. (1996). Simulation of cardiac activity and the ECG using a heart model with a reaction-diffusion action potential. *Med. Eng. Phys.*, vol. 18, no. 8, pp. 615-625.
- [Bernus 2002] Bernus, O., van Eyck, B., Verschelde, H., Panfilov, A.V. (2002). Transition from ventricular fibrillation to ventricular tachycardia: A simulation study on the role of $Ca^{(2+)}$ -channel blockers in human ventricular tissue. *Phys. Med. Biol.*, vol. 47, pp. 4167-4179.
- [Bittihn 2015] Bittihn, Philip. (2015). *Complex Structure and Dynamics of the Heart*. Springer Theses, ISBN 978-3-319-12231-1.
- [Bourgault 2009] Bourgault, Y., Coudière, Y. and Pierre, Ch. (2009). Existence and uniqueness of the solution for the bidomain model used in cardiac electrophysiology. *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 10, pp. 458-482.
- [Brezis 2011] Brezis, Haim. (2011). *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer-Verlag New York.

BIBLIOGRAFÍA

- [Clerc 1976] Clerc, L. (1976). Directional differences of impulse spread in trabecular muscle from mammalian heart. *J. Physiol.* 255 (2), 335-346.
- [Colli 2002] Colli Franzone, P. and Savaré, G. (2002). Degenerate evolution systems modeling the cardiac electric field at micro and macroscopic level. In: A. Lorenzi, B. Ruf (Eds.), *Evolution Equations, Semigroups and Functional Analysis: In memory of Brunello Terreni*, vol. 50, Birkhauser, pp. 49–78.
- [Farkas 1994] Farkas, M. (1994). *Periodic Motions*. Springer.
- [Fitzhugh 1961] Fitzhugh, R. (1961). Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophys. J.* 1, pp. 445-465.
- [Gulrajani 1983] Gulrajani, R.M. and Mailloux G.E. (1983). A simulation study of the effects of torso inhomogeneities on electrocardiographic potentials, using realistic heart and torso models. *Circ. Res.*, vol. 52, pp. 45-56.
- [Gulrajani 1998] Gulrajani, R.M. (1998). *Bioelectricity and Biomagnetism*. New York: Wiley.
- [Henriquez 1993] Henriquez, C.S. (1993). Simulating the electrical behavior of cardiac tissue using the bidomain model. *CRC Crit. Rev. Biomed. Eng.*, vol. 21, pp. 1-77.
- [Hren 1997] Hren, R. and Horáček, B.M. (1997). Value of simulated body surface potential maps as templates in localizing sites of ectopic activation for radiofrequency ablation. *Physiol. Meas.*, vol. 18, pp. 373-400.
- [Huiskamp 1998] Huiskamp, G. (1998). Simulation of depolarization in a membrane-equations based model of the anisotropic ventricle. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. 45, no. 7, pp. 847-855, Jul.
- [Keener 1998] Keener, J. and Sneyd, J. (1998). *Mathematical Physiology*, Springer-Verlag.
- [Leon 1991] Leon, L.J. and Horáček, B.M. (1991). Computer model of excitation and recovery in the anisotropic myocardium. I. Rectangular and cubic arrays of excitable elements. *J. Electrocardiol.*, vol. 24, no. 1, pp. 1-15.

BIBLIOGRAFÍA

- [Lions 1069] Lions, J. (1969). Résolution de quelques problèmes aux limites non-linéaires. Dunod.
- [Luo 1991] Luo, C. and Rudy, Y. (1991). A model of the ventricular cardiac action potential. *Circ. Res.* 68, pp. 1501-1526
- [Miller 1978] Miller, W.T. and Geselowitz, D.B. (1978). Simulation studies of the electrocardiogram; I. The normal heart. *Circ. Res.*, vol. 43, no. 2, pp. 301-315.
- [Miller 1978,1] Miller, W.T. and Geselowitz, D.B. (1978). Simulation studies of the electrocardiogram; II. Ischemia and infarction. *Circ. Res.*, vol. 43, no. 2, pp. 315-323, 1978.
- [Neu 1993] Neu, J. and Krassowska, W. (1993). Homogenization of syncytial tissues. *Crit. Rev. Biomed. Eng.* 21, 137-199.
- [Panfilov 1997] Panfilov, A. and Holden, A. (Eds.). (1997). *Computational Biology of the Heart*. John Wiley & Sons.
- [Pennacchio 2005] Pennacchio, M., Savare G., Colli-Franzone, P. (2005). Multiscale modelling for the bioelectric activity of the heart. *SIAM J. Math. Anal.* 37, 1333-1370.
- [Porter 1990] Porter, D., Stirling, S.G.D. (1990). *Integral equations: A practical treatment, from spectral theory to applications*. Cambridge University Press.
- [Potse 2006] Potse, M., Dubé B., Richer, J., Vinet, A., Gulrajani, R.M. (2006). A Comparison of Monodomain and Bidomain Reaction-Diffusion Models for Action Potential Propagation in the Human Heart. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 53, no. 12, pp. 2425-2435, december.
- [Raviart 1992] Raviart, P. and Thomas, J. (1992). *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson.
- [Rogers 1994] Rogers, J.M. and McCulloch, A.D. (1994). A collocation-Galerkin finite element model of cardiac action potential propagation. *IEEE Trans. Biomed. Engr.* 41, pp. 743-757.

BIBLIOGRAFÍA

- [Schmidt 1969] Schmidt, O. (1969). Biological information processing using the concept of interpenetrating domains. In: Information Processing in the Nervous System, pp. 325-331 (Chapter 18).
- [Sundnes 2006] Sundnes, J., Lines, G.T., Cai, X., Nielsen, B.F., Mardal, K.-A., Tveito, A. (2006). Computing the Electrical Activity in the Heart. Monographs in Computational Science and Engineering. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [Trudel 2004] Trudel, M.C., Dubé, B., Potse, M., Gulrajani, R.M., Leon, L.J. (2004). Simulation of QRST integral maps with a membrane-based computer heart model employing parallel processing. IEEE Trans. Biomed. Eng., vol. 51, no. 8, pp. 1319-1329, Aug.
- [Tung 1978] Tung, L. (1978). A bi-domain model for describing ischemic myocardial D-C potentials. Ph.D. dissertation, Massachusetts Inst. Technol., Cambridge, MA.
- [Veneroni 2009] Veneroni, M. (2009). Reaction-diffusion systems for the macroscopic bidomain model of the cardiac electric field. Nonlinear Analysis: Real World Applications, Volume 10, Issue 2, April 2009, Pages 849–868.
- [Vigmond 2002] Vigmond, E.J., Aguel, F., Trayanova, N.A. (2002). Computational techniques for solving the bidomain equations in three dimensions. IEEE Trans. Biomed. Eng., vol. 49, no. 11, pp. 1260-1269, Nov.