



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Estudio del Problema de Yamabe en el Espacio-tiempo de
Schwarzschild

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Pablo Antonio Tejero Vidal

Asesorado por

Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada

Puebla Pue.
29 de junio de 2022

Agradecimientos

A mis padres por todo el apoyo y la paciencia que me tuvieron en este proceso y durante toda mi educación, por continuamente encaminarme a ser una mejor versión de mi. A mi hermano por su apoyo moral, siempre con sus comentarios pequeños pero bastante significativos.

A mi asesora la Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada por su infinita paciencia y su guía en este trabajo de estudio.

A todos mis buenos amigos que presenciaron todo este proceso y se quedaron hasta el final, siempre dándome ánimos, muchas gracias a todos por formar parte de esta experiencia, saben que soy de pocas palabras pero que los aprecio montones, los jamón <3.

A todas las personas que cruzaron mi camino y dejaron su granito de arena en mi proceso de crecimiento como persona y que, aunque quizá no estén para leer estas líneas, los recuerdo y les agradezco el tiempo que compartieron conmigo y las experiencias que me brindaron.

Índice general

Agradecimientos	III
Introducción	VII
1. Teoría de la Relatividad	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Relatividad Especial	1
1.3. Relatividad General	3
2. Geometría Diferencial	5
2.1. Preliminares	5
2.2. Variedades Diferenciales	5
2.2.1. Mapeos diferenciables	7
2.2.2. Haz Tangente	9
2.2.3. Campos Vectoriales	10
2.2.4. 1-Formas y Campos Tensoriales	11
2.2.5. Conexión	13
2.3. Geometría Riemanniana	14
2.3.1. Subir y bajar índices	15
2.3.2. Conexión Riemanniana	16
2.3.3. Curvatura	16
2.4. Geometría Semi-Riemanniana	17
2.4.1. Espacio-tiempo de Minkowski	17
3. El Problema de Yamabe	19
3.1. Geometría Conforme	19
3.2. Antecedentes	21
4. Problema Lorentziano de Yamabe	25
4.1. El espacio-tiempo de Schwarzschild	25
4.2. Problema Lorentziano de Yamabe	30
4.3. Estudio del Problema de Yamabe en el espacio-tiempo de Schwarzschild	33
4.4. Análisis de resultados	37
5. Conclusiones	39
A.	41
A.1. Comprobación 3.5 a 3.7	41
Bibliografía	44

Introducción

El objetivo de esta tesis es presentar de manera formal el estudio de un problema tipo Yamabe aplicado a una de las formulaciones con más antigüedad en el campo de la Relatividad General: el espacio tiempo de Schwarzschild. El trabajo original de Yamabe estudia una variedad Riemanniana compacta (M, g) , y describe que sobre ésta siempre será posible encontrar una métrica \bar{g} , tal que \bar{g} sea conforme a g , es decir $\bar{g} = hg$, donde $h = e^{2f}$, $f \in C^\infty(M)$ y tal que su curvatura escalar es constante. En pocas palabras, el desarrollo consiste en aplicar una transformación conforme a la métrica original; es importante recordar que una transformación conforme es aquella que preserva ángulos.

El trabajo de Yamabe tiene un origen geométrico, sin embargo al final se reduce a resolver una ecuación diferencial parcial donde la curvatura escalar de la variedad se ve involucrada. El planteamiento se refiere a una conjetura en el campo de la geometría diferencial, el teorema originalmente propuesto por Hidehiko Yamabe [Yam60] en 1960 hace las siguientes declaraciones:

Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Entonces existe una función positiva y suave φ en M , y un número c , tales que:

$$\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta_g \varphi + R_g \varphi + c \varphi^{\frac{n+2}{n-2}} = 0$$

Aquí n denota la dimensión de M , R_g denota la curvatura escalar de g , y Δ_g denota el operador de Laplace-Beltrami respecto a g .

Sin embargo en 1968 Niel Trudinger mostró que la demostración original de Yamabe era incorrecta, dando origen al Problema de Yamabe. Además, Trudinger logró rescatar buena parte del trabajo de Yamabe. Posteriormente en 1976 Thierry Aubin aportó avances en la resolución del problema y, hasta 1984 Richard Schoen finalmente le dió una demostración adecuada a la afirmación de Yamabe. La ecuación diferencial resultante difiere de la original debido a que las condiciones del planteamiento son distintas a las originales, esto llevó al surgimiento de problemas de "tipo Yamabe".

Para el caso de esta tesis, haremos uso del problema de Yamabe Lorentziano planteado por Nicolas Ginoux [Gin15], el cambio de nombre se refiere al tipo de métricas sobre las que se trabaja: métricas Lorentzianas, un tipo de métricas semi-Riemannianas.

En el presente trabajo, motivados por el estudio de las transformaciones conformes y su relación con la estructura causal del espacio-tiempo, revisaremos cómo se traslada el caso Lorentziano del Problema de Yamabe, específicamente aplicado al espacio-tiempo de Schwarzschild.

A lo largo de este trabajo se hará una revisión breve pero consistente del material necesario para comprender el planteamiento del Problema de Yamabe Lorentziano en el espacio-tiempo

de Schwarzschild, se abordará desde la Teoría de la Relatividad en el Capítulo 1, pasando por Geometría Diferencial en el Capítulo 2, para finalmente abordar el Problema de Yamabe clásico y su variante Lorentziana en los últimos dos capítulos respectivamente.

Aunque la intención original de este trabajo era encontrar la solución correspondiente al problema, en el transcurso del caso de estudio se encontraron algunas limitantes, por lo que el producto final contiene únicamente un estudio del comportamiento de la solución a la ecuación diferencial asociada al problema mas no la forma explícita de la misma. Como se expone al final de este trabajo el problema de Yamabe en el escenario semi-Riemanniano permanece abierto y no se tiene un método concreto que lleve a una solución inmediata.

La búsqueda de la solución explícita al problema de Yamabe en el espacio-tiempo de Schwarzschild deja abierta la ventana a trabajos futuros en el campo de geometría conforme y el estudio de las EDPs que derivan del mismo.

Capítulo 1

Teoría de la Relatividad

1.1. Antecedentes

A lo largo de la historia de la física el ser humano ha logrado superar varios obstáculos en el proceso de su entendimiento, sin embargo para alrededor de 1700 existía aún un fenómeno que no lograban descifrar y por ende describir de forma satisfactoria, la luz. Newton uno de los mayores exponentes de la física de la época, sostenía que la luz estaba formada por numerosas partículas pequeñas, de este modo era capaz de explicar su capacidad para viajar en línea recta y reflejar en las superficies. Newton imaginó las partículas de luz como *corpúsculos* no esféricos, sin embargo no era capaz aún de explicar satisfactoriamente los fenómenos de refracción y difracción. En su trabajo titulado *Opticks* de 1704 Newton postuló la existencia de un *medio etéreo* como una forma de explicar la refracción.

Conforme los años avanzaron se adoptó la idea del éter como un medio que se extendía infinitamente llenando el *vacío espacial*. La hipótesis del éter fue siempre tema de debate a lo largo de su historia en la física, llegó un punto en el que las cualidades del éter se volvían cada vez menos realistas, se requería de un fluido que llenase todo el espacio y que fuese millones de veces mas rígido que el acero, además debía carecer de masa y viscosidad, por si fuera poco también se pedía que fuese transparente, no dispersivo, incompresible y continuo a una escala muy pequeña.

No es hasta 1887, con el experimento dirigido por Albert Abraham Michelson y Edward Morley, que comienzan a presentarse pruebas importantes contra la existencia del éter. Los resultados del experimento servirían posteriormente como base experimental de la teoría de la relatividad especial de Einstein.

1.2. Relatividad Especial

La Teoría de la Relatividad sitúa sus orígenes en 1905 con el trabajo de Albert Einstein [Ein05], nace de la necesidad de resolver la incompatibilidad que existía entre el electromagnetismo y la mecánica de Newton, ésta con una antigüedad en ese momento de poco mas de 200 años.

La *Relatividad Especial* (RE), describe el movimiento de los cuerpos a grandes velocidades y sus interacciones electromagnéticas. Se fundamenta en el estudio de sistemas de referencia inerciales, es decir, aquellos en los que se cumplen las Leyes de Newton usando únicamente fuerzas reales. La forma usual de comprender la naturaleza de la RE es mediante un tratamiento algebraico de la física, basándonos en las transformaciones de Lorentz:

CAPÍTULO 1. TEORÍA DE LA RELATIVIDAD
1.2. RELATIVIDAD ESPECIAL

$$\bar{x} = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad \bar{t} = \frac{tc^2 - Vx}{c^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad \bar{y} = y \quad \bar{z} = z$$

Al factor $\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$ se le conoce como *Factor de Lorentz* y se denota por γ .

Estas transformaciones dicen que, considerando dos sistemas (observadores) \bar{O} y O cada uno con su conjunto de coordenadas (t, x, y, z) y $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ respectivamente, si el sistema \bar{O} está en movimiento a una velocidad uniforme V a lo largo del eje X respecto al sistema O y en el instante de tiempo inicial ($t = \bar{t} = 0$), el origen de ambos sistemas coordenados coincide, entonces la relación entre las coordenadas de ambos sistemas es la presentada en las expresiones anteriores. El gráfico siguiente ilustra este fenómeno.

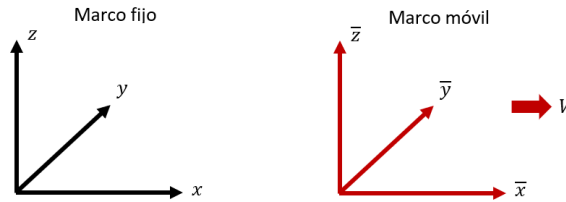


Figura 1.1: Movimiento relativo entre \bar{O} y O

Por supuesto las meras expresiones matemáticas no son suficientes para comprender el fenómeno que les precede, a continuación daremos explicación, de forma breve, a la teoría detrás de éstas expresiones.

De acuerdo con [Sch09] la teoría se puede deducir de dos postulados fundamentales:

- (1) *Principio de relatividad* (Galileo): Ningún experimento puede medir la velocidad absoluta de un observador; el resultado de cualquier experimento realizado por un observador no depende de su velocidad relativa a otros observadores que no están involucrados en el experimento.

- (2) *Universalidad de la velocidad de la luz* (Einstein): La velocidad de la luz relativa a un observador no acelerado es $c = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$, sin importar el movimiento de la fuente de luz respecto al observador. Seamos claros respecto al significado de este postulado: dos observadores diferentes no acelerados que se encuentren midiendo la velocidad del *mismo fotón* notarán que éste se mueve a $3 \times 10^8 \frac{m}{s}$ relativo a ellos, sin importar el estado de movimiento relativo entre los observadores.

Otro concepto bastante importante que surge de esta teoría es la estructura del *espacio-tiempo*, en este punto es importante deconstruir la noción de un tiempo absoluto proveniente de la teoría Newtoniana (el cuál es incorrecto) pues es necesario para comprender el espacio-tiempo; como el nombre lo indica ahora las coordenadas espaciales y el tiempo se encuentran mezcladas, de modo que ahora la percepción del tiempo para el observador puede variar dependiendo de su configuración espacial y viceversa. Esto se ve reflejado en los fenómenos que conocemos como

dilatación temporal y contracción de longitud.

La consolidación de esta nueva estructura se le atribuye al matemático alemán y antiguo profesor de Einstein, Hermann Minkowski quien le dio el carácter geométrico y el rigor matemático adecuado. Con la aparición de este nuevo concepto se generó la necesidad de reformular y adaptar varias nociones físicas pre-existentes a modo de que encajasen correctamente con la nueva teoría, por ejemplo, se modifica la noción de **punto** en un espacio tridimensional, y pasamos a denominar los puntos en el espacio-tiempo como **eventos**, la noción de **distancia** por **intervalo**, éste último es importante en el desarrollo de este trabajo pues sirve como punto de partida en la definición de otros conceptos.

Con este nuevo constructo la física se libra del concepto del éter de una vez por todas, empieza así una nueva era para la física, dando paso a una serie de descubrimientos y avances en todas sus ramas, desde el electromagnetismo, hasta la física molecular, entre otras.

1.3. Relatividad General

Para 1915, Einstein vuelve a sacudir el mundo de la física con una nueva proposición, la teoría de la *Relatividad General* (RG) o simplemente relatividad, su nombre se debe a que generaliza varias de las concepciones introducidas en la relatividad especial, a su vez introduce una serie de nuevos principios sumamente importantes, los cuales se describen de manera breve a continuación:

(1) *Principio de equivalencia*: Un sistema inmerso en un campo gravitatorio es puntualmente indistinguible de un sistema de referencia no inercial acelerado. Es decir, existe cierto observador acelerado que no tiene forma de distinguir si las partículas se mueven o no dentro de un campo gravitatorio.

(2) *Curvatura del espacio-tiempo*: Los cuerpos inmersos en un campo gravitatorio presentan una trayectoria espacial curva, aún cuando en realidad pueden estar siguiendo líneas de mundo lo más *rectas* posible a través de un espacio-tiempo curvo.

(3) *Principio de covariancia*: También conocido como principio general de la relatividad, establece que las leyes de la física deben tener la misma forma en todos los marcos de referencia. Esto es una extensión del principio de relatividad especial.

La teoría de la relatividad general propone que la geometría del espacio-tiempo se ve afectada por la presencia de materia, de hecho predice que el espacio-tiempo en presencia de materia no es plano y que la curvatura del espacio-tiempo será percibida como un campo gravitatorio. Lo que esto quiere decir es que la interacción gravitacional (fuerza de gravedad) que conocemos deja de interpretarse como el efecto de una fuerza sobre la materia, y pasa a reformularse como la percepción de la curvatura del espacio-tiempo.

En su artículo de 1916 [Ein16], Einstein presenta además lo que se conoce como las *Ecuaciones de Campo de Einstein*, son un conjunto de diez ecuaciones que describen la interacción fundamental de la gravitación como resultado de la deformación del espacio-tiempo debido a la presencia de materia y energía, como se mencionó con anterioridad. Regularmente la forma de éstas ecuaciones está dada de forma tensorial mediante la siguiente expresión:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

CAPÍTULO 1. TEORÍA DE LA RELATIVIDAD

1.3. RELATIVIDAD GENERAL

Aunque parezca una sola ecuación, el tensor $g_{\mu\nu}$ es un tensor simétrico de 4x4, así que tiene diez componentes independientes, de ahí que se genere un total de diez ecuaciones, más adelante estudiaremos brevemente sobre algebra tensorial.

Al elemento $g_{\mu\nu}$ se le conoce como *tensor métrico* o simplemente *métrica* y es de suma importancia pues nos ayudará a describir la curvatura del espacio-tiempo. Como se mencionó anteriormente, en esta nueva teoría de la relatividad se reformula la noción de la gravedad como una deformación del espacio-tiempo debido a presencia de materia; reservamos el estudio detallado de la métrica del espacio-tiempo para un capítulo posterior de este trabajo.

Poco tiempo posterior a la publicación de las ecuaciones de campo de Einstein, otros científicos de la época comenzaron a trabajar sobre la nueva teoría encontrando así una serie de soluciones para distintos casos aplicables a dichas ecuaciones. Históricamente la primera solución importante a este conjunto de ecuaciones se le atribuye a Karl Schwarzschild en 1916, el mismo año de publicación de la teoría. La *métrica de Schwarzschild*, como se le conocería después a ésta solución, representa el campo creado por un astro estático con simetría esférica. La solución se perfila como una buena aproximación al campo gravitatorio dentro de nuestro sistema solar, esto permite poner a prueba la teoría en un esquema experimental para su posterior validación. Otra característica de la métrica de Schwarzschild es que condujo al descubrimiento teórico de la posible existencia de agujeros negros, dando pie a una nueva área de la astrofísica relacionada a estos entes. El estudio del colapso gravitatorio y los agujeros negros llevó a la predicción de singularidades en el tejido del espacio-tiempo, esto indica que la teoría de la relatividad general es aún incompleta.

Otras soluciones físicamente relevantes de las ecuaciones de campo de Einstein se enlistan a continuación:

- La métrica de Kerr: Describe un campo gravitatorio generado por un astro en rotación, bajo ciertas circunstancias la solución puede presentar un *agujero negro de Kerr*.
- La métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker: Describe un universo en expansión (o contracción), homogéneo e isótropo.
- El universo de Gödel: En su forma original no parece describir un universo similar al nuestro, más bien describe un tipo de universo (espacio-tiempo) homogéneo formado por materia pulverulenta en rotación.

En el siguiente capítulo se estudia lo correspondiente a la *Geometría Diferencial*, la herramienta necesaria para entender los procesos matemáticos involucrados en éste trabajo.

Capítulo 2

Geometría Diferencial

2.1. Preliminares

Como se mencionó en el capítulo anterior, al introducir la noción de espacio-tiempo y la capacidad de éste de deformarse (curvarse) en presencia de materia, lo que resultó en un estudio geométrico bastante sofisticado del espacio-tiempo, se hace uso de una herramienta matemática (como en cualquier otra rama de la física), la *Geometría Diferencial*. Esta rama de la matemática sitúa sus orígenes a inicios del siglo XIX debido al trabajo independiente de Gauss, Lobachevsky, Bolyai y Schweickard, en un intento por negar el quinto postulado de Euclides y tratar de obtener una contradicción. El quinto postulado de Euclides dice lo siguiente:

Si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos ángulos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.

Mientras la comunidad científica buscaba demostrar que este quinto postulado era independiente de los otros cuatro encontraron que la prueba llevaba implícita la posibilidad de la existencia de geometrías donde el postulado no se satisface. A estas geometrías se les llamó *Geometrías no Euclidianas* las cuales son el objeto de estudio de este capítulo y núcleo sobre el cual se desenvuelve este trabajo.

2.2. Variedades Diferenciales

El primer objeto de estudio de la geometría diferencial son las *variedades diferenciables*, para comprender este concepto es necesario definir primeramente lo que es una *variedad*:

Una variedad diferencial es un espacio topológico que localmente posee las características de un espacio euclidiano, particularmente \mathbb{R}^n . Son el objeto geométrico estándar de la matemática, además generalizan la noción de curva y superficie a espacios de cualquier dimensión.

Ahora, es necesario definir una estructura que será útil para generar lo que conocemos como *estructura diferencial* en nuestra variedad.

CAPÍTULO 2. GEOMETRÍA DIFERENCIAL
2.2. VARIEDADES DIFERENCIALES

A lo largo de este capítulo haremos uso extensivo del material (gráficos y teoría) presente en [Cas19] para describir la estructuras necesarias en este trabajo.

Definición 2.2.1 (Carta). Sea M un conjunto, una *carta* en M es el par (U, ϕ) , tal que U es un subconjunto de M y ϕ es un mapeo *uno a uno* que toma elementos de U y los lleva a un subconjunto *abierto* de \mathbb{R}^n . Véase figura 2.1

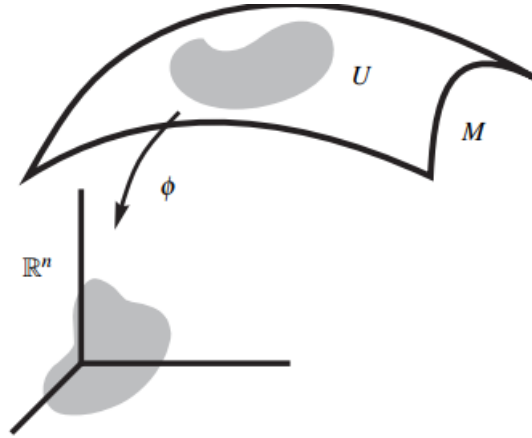


Figura 2.1: Carta (U, ϕ) , se observa como el subconjunto U de M mediante el mapeo ϕ cae en un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n .

A una carta en M también se le conoce como un *sistema coordenado* en M . Sin embargo, una sola carta puede no cubrir el conjunto completo, por lo que es necesario considerar un conjunto de cartas que sobrepuestas sean capaces de cubrir la variedad en su totalidad, no obstante estas cartas deben cumplir ciertos requisitos, exigimos que las cartas se encuentren relacionadas entre si mediante funciones diferenciables.

Dada una función $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ descrita por $F(q) = (f_1(q), f_2(q), \dots, f_m(q))$, decimos que es *diferenciable* de clase C^k si las funciones de valores reales f_1, f_2, \dots, f_m tienen derivadas parciales continuas de k -ésimo orden.

Con el concepto anterior podemos generar la relación que necesitábamos para las cartas de la siguiente manera:

Sean (U, ϕ) y (V, χ) dos cartas sobre M , si x^1, x^2, \dots, x^n y y^1, y^2, \dots, y^n son las coordenadas asociadas a (U, ϕ) y (V, χ) respectivamente, decimos que están C^k relacionadas si $U \cap V = \emptyset$ o bien si las composiciones $\phi \circ \chi^{-1}$ y $\chi \circ \phi^{-1}$, cuyos dominios son conjuntos abiertos de \mathbb{R}^n , son diferenciables de clase C^k .

Si extendemos esta relación ahora al concepto de *subatlas* (conjunto de cartas que cubren una porción de la variedad) tenemos la siguiente definición:

Definición 2.2.2 (C^k subatlas). Un C^k subatlas en M es una colección de cartas en M , $\{(U_i, \phi_i)\}$, tal que para cualquier par de índices i, j , (U_i, ϕ_i) y (U_j, ϕ_j) están C^k relacionados y $M = U_1 \cup U_2 \cup \dots$ (de modo que cada punto de M esta en el dominio de al menos una de las cartas).

En términos generales un C^k subatlas en M es el conjunto de sistemas coordenados cuyos dominios cubren todo M y están C^k relacionados por parejas. Así, la colección de todas las cartas que están C^k relacionadas, en conjunto con todos los C^k subatlas, en M , forman un C^k atlas en M .

Finalmente podemos dar la definición de una *variedad diferencial*:

Definición 2.2.3 (Variedad diferencial). Una variedad C^k de dimensión n es un conjunto M que posee un C^k atlas; si $k \geq 1$ se dice que M es una *variedad diferenciable*. Si $k = 0$, se dice que M es una *variedad topológica*.

2.2.1. Mapeos diferenciables

Para comprender algunos de los conceptos que han de aparecer más adelante es necesario introducir una serie de estructuras que irán apareciendo a lo largo de esta sección.

Empezamos definiendo una función sobre una variedad diferenciable M , $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ y una carta (U, ϕ) que pertenece al atlas de M , buscamos definir la diferenciable de f y para esto debemos observar la composición $f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, como se puede observar es una función de valores reales definida en un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n .

Dado que las cartas de M están C^k relacionadas se deduce que la diferenciable de la composición $f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ no depende de la selección de la carta, teniendo en cuentas las siguientes identidades

$$f \circ \phi^{-1} = (f \circ \chi^{-1}) \circ (\chi \circ \phi^{-1}), \quad f \circ \chi^{-1} = (f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \chi^{-1}) \quad (2.1)$$

vemos que $f \circ \phi^{-1}$ es diferenciable si y solo si $f \circ \chi^{-1}$ lo es. Así de manera natural se llega a la siguiente definición.

Definición 2.2.4. Sea M una variedad C^k diferenciable; una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable de clase C^r ($r \leq k$) si $f \circ \phi^{-1}$ es diferenciable de clase C^r para toda carta (U, ϕ) del atlas de M . Véase la figura 2.2

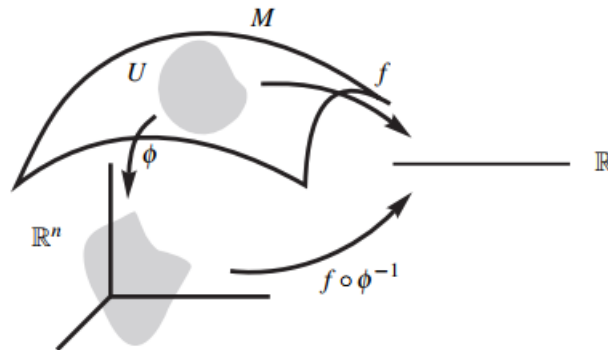


Figura 2.2: Función diferenciable sobre M , se observa como lleva elementos de M a \mathbb{R} .

Una pregunta que surge de forma bastante natural es, ¿existen los mapeos entre variedades?. La respuesta es sí, normalmente los denotamos por la letra griega Ψ y dadas dos variedades diferenciables M y N decimos que $\Psi : M \rightarrow N$, así como anteriormente extendimos la noción de *diferenciabilidad* a funciones definidas sobre la variedad, podemos ahora extenderla a estos mapeos entre variedades.

Definición 2.2.5 (Mapeo diferenciable). Sean M y N variedades diferenciables de clase C^k y C^l respectivamente, entonces el mapeo Ψ de M en N es diferenciable si el mapeo dado por $\chi \circ \Psi \circ \phi^{-1}$ es diferenciable de clase C^r donde $r \leq \min\{k, l\}$. Véase la figura 2.3

Directamente de la definición anterior podemos hablar de lo que conocemos como *difeomorfismos*.

Definición 2.2.6 (Difeomorfismo). Un difeomorfismo Ψ es un mapeo uno a uno que lleva elementos de una variedad diferenciable M a otra variedad diferenciable N tal que el mapeo y su inversa (denotada por Ψ^{-1} en este caso) son diferenciables.

Así cuando dos variedades diferenciales están relacionadas mediante un difeomorfismo decimos que las variedades son *difeomorfas*.

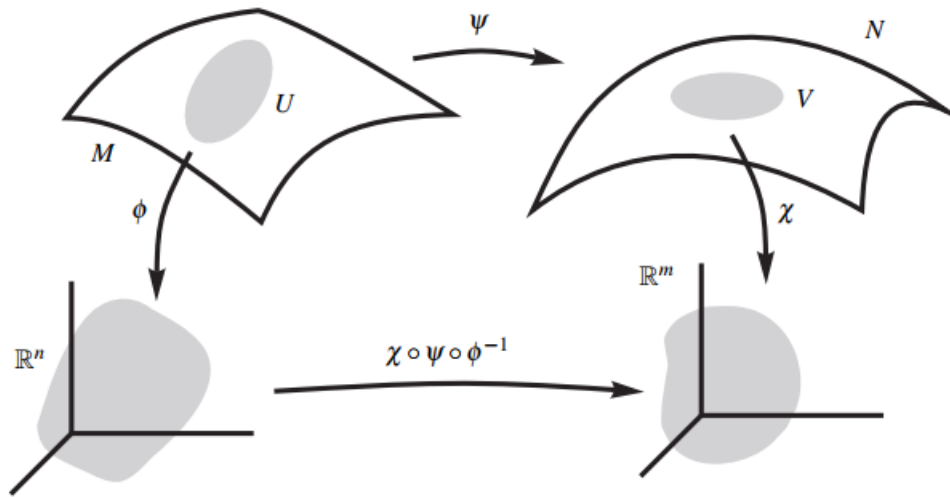


Figura 2.3: El mapeo Ψ enlaza ambas variedades, El mapeo $\chi \circ \psi \circ \phi^{-1}$ es la representación de Ψ en las coordenadas locales de \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m .

En general muchas de las propiedades del cálculo multivariable son aplicables (con ciertos ajustes) a las variedades diferenciables, las generalizaciones más notables que captan ciertas características de la derivación en espacios euclídeos son la *Derivada de Lie* y una *Conexión afín*, con ésta última entraremos a detalle más adelante. De igual forma algunas nociones del cálculo integral también se hacen presentes en variedades diferenciables de manera natural mediante el lenguaje del *cálculo exterior de formas diferenciables*.

Otro mapeo importante que aparece en la teoría de variedades son las *curvas diferenciables*.

Definición 2.2.7 (Curva diferenciable). Sea M una variedad diferenciable. Una curva diferenciable de clase C^r , en M , es un mapeo diferenciable de clase C^r que lleva elementos de un conjunto abierto de \mathbb{R} a M ; esto es, $C : I \rightarrow M$ es una curva diferenciable de clase C^r en M si I es un subconjunto abierto de \mathbb{R} y el mapeo $\phi \circ C$ es diferenciable de clase C^r para toda carta (U, ϕ) del atlas de M . Véase la figura 2.4

Como se puede apreciar existe una amplia gama de estructuras en el estudio de las variedades diferenciables, sin embargo este es solo el comienzo en la construcción de la teoría que posteriormente nos llevará a lo que conocemos como *tensores* que sirven como herramienta principal en este trabajo. Para ello nos resta estudiar lo correspondiente al *Haz Tangente* de una variedad y los *Campos vectoriales* para posteriormente hablar de las *1-formas* y *Campos Tensoriales*.

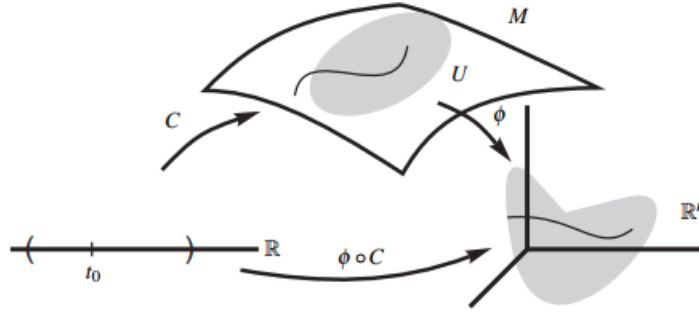


Figura 2.4: Una curva sobre M y su representación en un sistema coordenado. Vemos cómo C lleva elementos de $I \subset \mathbb{R}$ a M .

2.2.2. Haz Tangente

Como el nombre lo indica es momento de estudiar estructuras que poseen la característica de tangencia, mientras en el caso euclidiano tenemos la noción de recta tangente a una curva, en variedades diferenciales tenemos *vectores tangentes* a curvas sobre la variedad.

Definición 2.2.8 (Vector tangente a la curva). Si C es una curva diferenciable en M y $f \in C^\infty(M)$ (conjunto de funciones infinitamente diferenciables sobre M), entonces $f \circ C$ es una función diferenciable que lleva elementos de un conjunto abierto $I \subset \mathbb{R}$ a \mathbb{R} . Si $t_0 \in I$, entonces el *vector tangente* a C en $C(t_0)$, se denota por C'_{t_0} está definido por:

$$C'_{t_0}[f] \equiv \left. \frac{d}{dt}(f \circ C) \right|_{t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(C(t)) - f(C(t_0))}{t - t_0} \quad (2.2)$$

Como se puede notar, este vector tangente implica un proceso de diferenciabilidad, de manera estricta el número real $C'_{t_0}[f]$ es la tasa de cambio de f a lo largo de la curva C alrededor del punto $C(t_0)$.

A continuación vemos cómo se extiende esta definición a un punto sobre la variedad, lo cual viene a la mente como algo natural, pues en un principio la curva sobre la cual estaba definido el vector está también sobre la variedad.

Definición 2.2.9 (Vector tangente a un punto). Sea $p \in M$. Un *vector tangente* a la variedad M en el punto p , denotado por v_p , es un mapeo de $C^\infty(M)$ a \mathbb{R} que satisface lo siguiente:

$$v_p[af + bg] = av_p[f] + bv_p[g] \quad (2.3)$$

$$v_p[fg] = f(p)v_p[g] + g(p)v_p[f] \quad (2.4)$$

para $f, g \in C^\infty(M)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Para una función constante c se puede mostrar fácilmente que $v_p[c] = 0$.

Ahora bien, es imprescindible agrupar estos *vectores tangentes*, como lo haríamos normalmente con básicamente cualquier otro tipo de estructura matemática, es ahí donde entra el concepto de *Espacio tangente*.

Definición 2.2.10. El *espacio tangente* a M en un punto p , se denota por T_pM , es el conjunto de todos los vectores tangentes a M en el punto p . El conjunto además es un espacio vectorial definido sobre \mathbb{R} dotado de las siguientes operaciones:

$$(v_p + w_p)[f] = v_p[f] + w_p[f] \quad (2.5)$$

$$(av_p)[f] = a(v_p[f]) \quad (2.6)$$

para $v_p, w_p \in T_pM$, $f \in C^\infty(M)$ y $a, b \in \mathbb{R}$. Además dado 0_p , el vector nulo de T_pM , se satisface que $0_p[f] = 0$ para $f \in C^\infty(M)$.

De estas definiciones se desprende una serie de propiedades que por el momento no introduciremos a este trabajo por simplicidad, en caso de ser necesario los agregaremos como notas al margen.

El siguiente eslabón en la estructura de la variedad es lo que llamaremos el *haz tangente*, que en pocas palabras es el conjunto donde habitan todos los espacios tangentes a la variedad.

Definición 2.2.11. El *haz tangente* de una variedad diferenciable M se denota por TM , es el conjunto de todos los vectores tangentes a M en todos sus puntos; esto es, $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$.

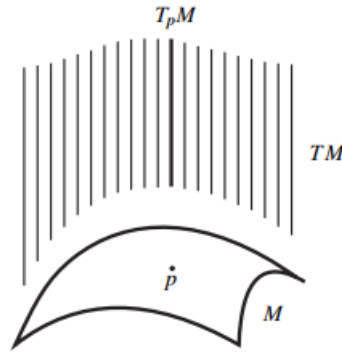


Figura 2.5: Las líneas verticales representan cada espacio tangente (T_pM) a M y el conjunto de todas éstas es el Haz tangente TM .

La idea detrás de estas estructuras es bastante intuitiva, sin embargo guardan mucho significado matemático y hasta geométrico. A continuación introducimos la estructura de *Campo Vectorial*, también de suma importancia.

2.2.3. Campos Vectoriales

Como se ha visto cada nueva estructura que introducimos esta directamente relacionada a la anterior, para el caso de los *campos vectoriales* haremos uso de la noción de vector tangente que se dio en la sección anterior.

Definición 2.2.12. Un *campo vectorial* \mathbf{X} , en M , es una función tal que a cada punto p de M asigna un vector tangente $\mathbf{X}(p) \in T_pM$. El vector tangente $\mathbf{X}(p)$ también se denota por \mathbf{X}_p . Es importante notar que un campo vectorial podría no estar definido sobre toda la variedad, en cual caso se dice que esta definido de manera local, si está definido sobre toda la variedad decimos que está definido globalmente.

Si el campo vectorial nos genera un vector tangente en cada punto de su dominio, podemos reescribir algunas de las propiedades de los vectores tangentes a partir de la noción de campo vectorial, por ejemplo, si consideramos $f \in C^\infty(M)$ podemos construir una función de valores reales $\mathbf{X}f$ definida por $(\mathbf{X}f)(p) \equiv \mathbf{X}_p[f]$.

Como \mathbf{X}_p es un vector tangente, es decir pertenece a T_pM , de las ecuaciones 2.3 y 2.4 se sigue que

$$\mathbf{X}(af + bg) = a\mathbf{X}f + b\mathbf{X}g \quad \text{y} \quad \mathbf{X}(fg) = f\mathbf{X}g + g\mathbf{X}f \quad (2.7)$$

es decir, el campo vectorial \mathbf{X} cumple la propiedad distributiva sobre una suma y producto de funciones, para $f, g \in C^\infty(M)$ y $a, b \in \mathbb{R}$.

La propiedad de diferenciabilidad también se puede trasladar a este contexto.

Definición 2.2.13. Un campo vectorial es diferenciable (de clase C^∞) si para toda $f \in C^\infty(M)$ la función $\mathbf{X}f$ también pertenece a $C^\infty(M)$

Los campos vectoriales se pueden combinar, siguiendo ciertas operaciones, para obtener que las estructuras como $a\mathbf{X} + b\mathbf{Y}$ y $f\mathbf{X}$ son también campos vectoriales, con $a, b \in \mathbb{R}$, $f \in C^\infty(M)$ y $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(M)$ donde $\mathfrak{X}(M)$ es el conjunto de todos los campos vectoriales diferenciables.

Hay aún unas cuantas propiedades más que podríamos revisar respecto a los campos vectoriales, sin embargo para fines de este trabajo no serán esenciales por lo que las dejaremos fuera de ésta sección. A continuación entramos a la parte de la formulación de variedades diferenciales que constituye el eje central de la herramienta matemática que necesitamos en el desarrollo de este trabajo.

2.2.4. 1-Formas y Campos Tensoriales

Como se ha trabajado hasta el momento, haremos uso de todo el material que tenemos para definir estas nuevas estructuras.

Comenzaremos introduciendo la noción de *diferencial* de una función en un punto.

Definición 2.2.14 (Diferencial). Sea $f \in C^\infty(M)$; la diferencial de f en el punto $p \in M$, denotada por df_p está definida por

$$df_p(v_p) \equiv v_p[f] \quad (2.8)$$

para $v_p \in T_pM$

Además el mapeo df_p cumple la siguiente propiedad:

$$\begin{aligned} df_p(av_p + bw_p) &= (av_p + bw_p)[f] \\ &= av_p[f] + bw_p[f] \\ &= a df_p(v_p) + b df_p(w_p) \end{aligned} \quad (2.9)$$

para $v_p, w_p \in T_pM$ y $a, b \in \mathbb{R}$.

Como se puede observar el mapeo df_p es lineal y lleva elementos de T_pM a \mathbb{R} , por lo tanto df_p pertenece al *espacio dual* de T_pM que se denota por T_p^*M , a sus elementos se les conoce como *covectores* o bien *vectores covariantes*. Bajo esta lógica llamamos a T_p^*M el *espacio cotangente* a M en p . Además, tiene la estructura de un espacio vectorial sobre \mathbb{R} con las operaciones

$$(\alpha_p + \beta_p)(v_p) \equiv \alpha_p(v_p) + \beta_p(v_p), \quad (a\alpha_p)(v_p) \equiv a(\alpha_p(v_p)) \quad (2.10)$$

para $\alpha_p, \beta_p \in T_p^*M$, $v_p \in T_pM$ y $a \in \mathbb{R}$.

CAPÍTULO 2. GEOMETRÍA DIFERENCIAL
2.2. VARIEDADES DIFERENCIALES

Con esta noción de covectores podemos definir un *campo covectorial* α en M como un mapeo que asigna a cada punto $p \in M$ un elemento $\alpha(p) \in T_p^*M$, también denotado por α_p . Podemos extender el concepto de diferenciabilidad a esta estructura también, decimos que un campo covectorial α es diferenciable (de clase C^∞) si para todo campo vectorial $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$ la función $\alpha(\mathbf{X})$ definida por

$$(\alpha(\mathbf{X}))(p) \equiv \alpha_p(\mathbf{X}_p) \quad (2.11)$$

es diferenciable (de clase C^∞). Al conjunto de todos los campos covectoriales diferenciables en M se les denotará por $\Lambda^1(M)$ y a sus elementos se les conoce como *formas diferenciales lineales* o simplemente *1-formas*.

Con esta información nos es posible definir la siguiente estructura que se compone de una especie de mezcla entre covectores y vectores tangentes.

Definición 2.2.15 (Tensor). En general definimos un *tensor* como un mapeo multilineal t_p del cual podemos identificar tres tipos:

- Covariante: Un tensor covariante de rango k o bien de tipo $\binom{0}{k}$ en p es un mapeo $t_p : T_p M \times \cdots \times T_p M (k - \text{veces}) \rightarrow \mathbb{R}$. Un tensor de tipo $\binom{0}{1}$ es un covector.
- Contravariante: Un tensor contravariante de rango k o bien de tipo $\binom{k}{0}$ en p es un mapeo $t_p : T_p^* M \times \cdots \times T_p^* M (k - \text{veces}) \rightarrow \mathbb{R}$.
- Mixto: Un tensor mixto de tipo $\binom{k}{l}$ en p es un mapeo multilineal que toma k copias de $T_p^* M$ y l copias de $T_p M$ y las lleva a \mathbb{R} .

Además es lógico pensar en operaciones entre tensores y lo hacemos de manera puntual, es decir, tomando el tensor en un punto determinado p sobre la variedad, definimos por ejemplo la suma tensorial para cualquier par de tensores covariantes de rango k en p , t_p y s_p :

$$(at_p + bs_p)(v_a, \dots, v_k) \equiv at_p(v_1, \dots, v_k) + bs_p(v_1, \dots, v_k) \quad (2.12)$$

para $v_1, \dots, v_k \in T_p M$ y $a, b \in \mathbb{R}$. Para el *producto tensorial* tomamos un par de tensores covariantes en p , t_p y s_p de rangos k y l respectivamente y definimos $t_p \otimes s_p$ como sigue:

$$(t_p \otimes s_p)(v_1, \dots, v_{k+l}) \equiv t_p(v_1, \dots, v_k) s_p(v_{k+1}, \dots, v_l) \quad (2.13)$$

para $v_1, \dots, v_{k+l} \in T_p M$. Entonces $t_p \otimes s_p$ es un tensor de tipo $\binom{0}{k+l}$ en p .

Esta misma noción de operaciones se extiende a tensores mixtos y contravariantes haciendo los ajustes necesarios. A continuación, tal cual como lo hicimos con los vectores tangentes y los campos vectoriales podemos construir *campos tensoriales* de los cuales como es de esperarse identificamos también tres tipos:

Definición 2.2.16 (Campo tensorial). En general definimos un *campo tensorial*, denotado por t , como un mapeo que asocia a cada punto $p \in M$ un tensor de algún tipo.

- Covariante: Un *campo tensorial covariante* de rango k en M , es un mapeo que asocia a cada punto $p \in M$ un tensor covariante de rango k .
- Contravariante: Un *campo tensorial contravariante* de rango k en M , es un mapeo que asocia a cada punto $p \in M$ un tensor contravariante de rango k .
- Mixto: Un *campo tensorial mixto* de tipo $\binom{k}{l}$ en M , es un mapeo que a cada punto $p \in M$ le asocia un tensor mixto de tipo $\binom{k}{l}$. Un campo tensorial de tipo $\binom{0}{1}$ es una función de M en \mathbb{R} .

4

Como se puede notar la generalización era bastante intuitiva. Por otro lado como es de esperarse podemos extender la noción de diferenciabilidad a campos tensoriales y depende mayormente de si la función que se genera al hacer actuar el campo tensorial sobre sus respectivos argumentos resulta ser diferenciable; por ejemplo, para un campo tensorial covariante de rango k , $t(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_k)$ es la función de valores reales dada de la forma $[t(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_k)](p) \equiv t_p(\mathbf{X}_1(p), \dots, \mathbf{X}_k(p))$, decimos que t es diferenciable si la función $t(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_k)$ es diferenciable para todo $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_k \in \mathfrak{X}(M)$. De esta misma forma se entiende para campos tensoriales contravariantes y mixtos haciendo los ajustes correspondientes.

Finalmente es importante notar que para los campos tensoriales mixtos es esencial mantener el orden de las entradas que toma el campo. Al conjunto de todos los campos tensoriales diferenciables de tipo $\binom{k}{l}$ en M , se denota por $T_l^k(M)$ y forma un módulo sobre el anillo $C^\infty(M)$.

Con esto hemos cubierto nuestro primer objetivo que es el estudio de la estructura tensorial, es sumamente importante pues es la base los temas que se estudiarán posteriormente.

2.2.5. Conexión

Ahora bien, es el turno de estudiar un elemento matemático también de suma importancia, la *conexión*. De manera general es aquel objeto matemático que permite relacionar la geometría local en torno a un punto con la geometría local en torno a otro punto de la variedad, esto a su vez da paso para la definición de la *derivada covariante*. En Relatividad General la conexión juega el papel de describir el campo gravitacional, pues la interacción gravitacional es el resultado de un cambio en la geometría del espacio-tiempo, más específicamente la curvatura de éste.

La conexión se denota por ∇ , decimos que es una regla para calcular la derivada direccional de campos vectoriales en M . Si \mathbf{X} y \mathbf{Y} son dos campos vectoriales, entonces $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$ denota el campo vectorial cuyo valor en cada punto $p \in M$ es igual a la derivada direccional de \mathbf{Y} en dirección de \mathbf{X}_p . De manera más estricta damos la siguiente definición.

Definición 2.2.17. Sea M una variedad diferenciable. Una *conexión* en M asigna a cada $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$ un operador $\nabla_{\mathbf{X}}$ que mapea elementos de $\mathfrak{X}(M)$ en sí mismo. Además para todo $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathfrak{X}(M)$, $a, b \in \mathbb{R}$ y $f \in C^\infty(M)$ se cumple:

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{X}}(a\mathbf{Y} + b\mathbf{Z}) &= a\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} + b\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} \\ \nabla_{\mathbf{X}}(f\mathbf{Y}) &= f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} + (\mathbf{X}f)\mathbf{Y} \\ \nabla_{a\mathbf{X}+b\mathbf{Y}}\mathbf{Z} &= a\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} + b\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} \\ \nabla_{f\mathbf{X}}\mathbf{Y} &= f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}\end{aligned}$$

Al campo vectorial $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$ se le conoce como *derivada covariante* de \mathbf{Y} respecto a \mathbf{X} . Veamos cómo al tomar un sistema coordenado (x^1, \dots, x^n) en U subconjunto de M podemos escribir a los campos vectoriales \mathbf{X}, \mathbf{Y} en términos de sus bases como $\mathbf{X} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ y $\mathbf{Y} = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$. Así la expresión para la derivada covariante se puede escribir como

$$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = \nabla_{X^i(\partial/\partial x^i)}\left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

y haciendo uso de las propiedades de $\nabla_{\mathbf{X}}$ llegamos a

$$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = X^i \left[\left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j \nabla_{\partial/\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \right]$$

Las derivadas covariantes $\nabla_{\partial/\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$ deben ser campos vectoriales diferenciables, esto implica la existencia de n^3 funciones diferenciables de valores reales en U que denotaremos por Γ_{ji}^k y que deben satisfacer la siguiente relación:

$$\nabla_{\partial/\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ji}^k \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (2.14)$$

Este conjunto de funciones ayuda a caracterizar a la conexión ∇ pues

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} &= X^i \left[\left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j \Gamma_{ji}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right] \\ &= X^i \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ji}^k Y^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Decimos entonces que si una variedad M puede ser cubierta por un sólo sistema coordenado (x^1, \dots, x^n) , una conexión puede definirse al escoger un conjunto de n^3 funciones diferenciables Γ_{ji}^k de forma completamente arbitraria.

2.3. Geometría Riemanniana

Una vez que hemos construido la base matemática necesaria podemos dar paso al estudio de un tipo particular de variedades diferenciables, las *variedades riemannianas*, las cuales tienen relevancia particularmente en el campo de la relatividad general (cuando hablamos de variedades de dimensión 4). Para describir este tipo de variedades es necesario definir en primer lugar un tipo particular de tensor.

Definición 2.3.1. Sea M una variedad diferenciable, g un campo tensorial simétrico de tipo $\binom{0}{2}$ en M , g satisface que $g_p(v_p, w_p) = g_p(w_p, v_p)$ para $v_p, w_p \in T_p M$. Además g es *definido positivo* si para todo $v_p \in T_p M$ se tiene $g_p(v_p, v_p) \geq 0$ y, si $g_p(v_p, v_p) = 0$ entonces $v_p = 0$. El campo tensorial g es *no degenerado* si $g_p(v_p, w_p) = 0$ para todo $w_p \in T_p M$ implica que $v_p = 0$.

Nota. Un tensor (o campo tensorial) simétrico es aquel que al intercambiar de lugar un par de índices no se altera la estructura del tensor, es decir, $T_{ij..k} = T_{ji..k}$.

Con esta información a la mano podemos dar paso a la definición formal de una *variedad riemanniana*.

Definición 2.3.2 (Variedad Riemanniana). Es una variedad diferenciable M equipada con un campo tensorial simétrico, no degenerado de tipo $\binom{0}{2}$, es decir, un *tensor métrico* o bien *métrica* de M . Si el tensor métrico es definido positivo decimos que la variedad es *Riemanniana*, en el caso contrario decimos que es *semi-Riemanniana*.

El tensor métrico será nuestra principal herramienta en el estudio de estas variedades, pues nos permite definir conceptos geométricos como distancias, ángulos, etcétera. Al escoger un sistema de coordenadas locales, digamos (x^1, \dots, x^n) , escribimos el tensor métrico en términos de estas coordenadas de la forma:

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j. \quad (2.16)$$

Es importante recordar que estamos ocupando el convenio de suma de Einstein para describir el tensor métrico, aunque también podemos representarle de manera matricial:

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}.$$

De las propiedades del tensor métrico se puede verificar que el determinante de su matriz de representación es distinto de cero, lo que implica la existencia de la matriz inversa, cuyos elementos estarán denotados por g^{ji} y se puede observar lo siguiente

$$g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k \quad (2.17)$$

Las funciones g_{ij} presentan la característica de ser diferenciables, dicha propiedad se extiende a las funciones g^{ij} . La propiedad de simetría de g_{ij} también se extiende a las funciones $g^{ij} = g^{ji}$.

Necesitamos definir ciertas propiedades que se derivan de la construcción del tensor métrico, una de ellas es la operación que conocemos como *subir y bajar* los índices de un tensor.

2.3.1. Subir y bajar índices

A este procedimiento se le conoce así por el cambio de notación que genera en el tensor, procedemos a analizar que es lo que ocurre realmente. En primer lugar es necesario hablar de la operación de *contracción*.

Definición 2.3.3 (Contracción). Si t es un campo tensorial de tipo $\binom{0}{k}$ en M y \mathbf{X} es un campo vectorial en M , la operación de *contracción* de t con el campo \mathbf{X} se denota por $\mathbf{X}\lrcorner t$, genera un campo tensorial de tipo $\binom{0}{k-1}$ en M dado por

$$(\mathbf{X}\lrcorner t)_p(v_p, \dots, w_p) \equiv kt_p(\mathbf{X}_p, v_p, \dots, w_p) \quad (2.18)$$

para $v_p, \dots, w_p \in T_pM$ (el factor constante k se introduce por conveniencia para cálculos posteriores).

Si en esta operación involucramos ahora al tensor métrico obtenemos la estructura $\mathbf{X}\lrcorner g$ para \mathbf{X} un campo vectorial en M , esta operación de contracción genera un campo tensorial de tipo $\binom{0}{1}$, es decir, un campo covectorial.

Nota. Véase que si \mathbf{X} está dado localmente por $\mathbf{X} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, tenemos

$$\mathbf{X}\lrcorner g = 2X^i g_{ij} dx^j.$$

Observemos por otro lado el siguiente caso, si α es un campo covectorial, localmente dado por $\alpha = \alpha_i dx^i$, vemos que existe un único campo vectorial \mathbf{X} tal que

$$\alpha = \frac{1}{2} \mathbf{X}\lrcorner g. \quad (2.19)$$

Se observa fácilmente que si usamos la expresión que se obtuvo para $\mathbf{X}\lrcorner g$ en conjunto con la anterior se obtiene

$$\alpha = X^i g_{ij} dx^j = \alpha_j dx^j \quad \Rightarrow \quad \alpha_j = X^i g_{ij}. \quad (2.20)$$

se deduce de lo anterior que las componentes de \mathbf{X} quedan determinadas por

$$\mathbf{X}^i = \alpha_j g^{ji}. \quad (2.21)$$

A este proceso se le conoce como *subida y bajada de índices*. Cuando se aplica en el campo de la física se expresa simplemente como $\mathbf{X}_i = \mathbf{X}^j g_{ji}$ y $\mathbf{X}^j = \mathbf{X}_i g^{ij}$, la distinción entre las componentes del campo vectorial y la 1-forma se hace a partir de la posición del índice. Además ésta operación se extiende a las componentes de tensores y otros objetos matemáticos.

La operación que acabamos de construir es de suma importancia en la manipulación de tensores. A continuación definiremos la operación de *gradiente* en variedades Riemannianas.

Definición 2.3.4 (Gradiente). Sea M una variedad Riemanniana y sea $f \in C^\infty(M)$. El *gradiente* de la función f , denotado por $\text{grad}f$, es el campo vectorial en M tal que

$$df = \frac{1}{2}(\text{grad}f)\lrcorner g \quad (2.22)$$

Luego, para cualquier campo vectorial \mathbf{X} se tiene

$$g(\text{grad}f, \mathbf{X}) = \frac{1}{2}((\text{grad}f)\lrcorner g)(\mathbf{X}) = df(\mathbf{X}) = \mathbf{X}f \quad (2.23)$$

A continuación se revisa la noción de conexión para el caso de variedades Riemannianas.

2.3.2. Conexión Riemanniana

Para el caso de la conexión Riemanniana se busca imponer la condición de que bajo transporte paralelo a lo largo de cualquier curva la norma de un vector se mantenga invariante, lo cual se traduce en pedir que la derivada covariante del tensor métrico sea cero.

A la conexión Riemanniana también se le conoce como *conexión de Levi-Civita* y viene definida por lo que conocemos como *símbolos de Christoffel*:

$$\Gamma_{ji}^k = \frac{1}{2}g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) \quad (2.24)$$

de aquí se ve que los símbolos de Christoffel tienen la propiedad de simetría $\Gamma_{ji}^k = \Gamma_{ij}^k$.

Con estas herramientas nos es posible hablar del tensor de curvatura de Riemann.

2.3.3. Curvatura

La propiedad de curvatura de una variedad es fundamental para nosotros en este trabajo, para estudiar dicha propiedad recurrimos al tensor de curvatura, también conocido como *tensor de curvatura de Riemann*, el cual se define formalmente a partir de la conexión Riemanniana ∇ de la siguiente forma:

$$R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \nabla_{\mathbf{X}}\nabla_{\mathbf{Y}} - \nabla_{\mathbf{Y}}\nabla_{\mathbf{X}} - \nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]} \quad (2.25)$$

donde el elemento $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ representa el *paréntesis de Lie*. No obstante existe una equivalencia para la ecuación anterior en términos de los símbolos de Christoffel

$$R^m{}_{kij} = \partial_i \Gamma_{kj}^m - \partial_j \Gamma_{ki}^m + \Gamma_{li}^m \Gamma_{kj}^l - \Gamma_{lj}^m \Gamma_{ki}^l \quad (2.26)$$

esta forma será la que usemos a lo largo de este trabajo. Es importante mencionar que la propiedad de curvatura para una variedad tiene relación directa con el estudio de la curvatura del espacio-tiempo en la física, este tema se discutirá con un poco más de detalle posteriormente.

Del tensor de Riemann podemos derivar dos cantidades importantes adicionales, llevan los nombres de *tensor de Ricci* y *escalar de curvatura* y, lógicamente, nos dan información de la curvatura de la variedad, el segundo es particularmente importante pues juega un papel central en el planteamiento del problema de Yamabe.

Ahora bien el *tensor de Ricci* es un campo tensorial de tipo $\binom{0}{2}$ con componentes R_{kj} definido por

$$R_{kj} \equiv R^m{}_{kmj} \quad (2.27)$$

es importante destacar que esta notación puede variar entre cada autor. El tensor de Ricci es simétrico $R_{kj} = R_{jk}$.

Ahora para la *curvatura escalar* denotada simplemente por la letra R , es la función de valores reales definida por

$$R \equiv g^{kj} R_{kj}. \quad (2.28)$$

A continuación veremos un tipo de variedad diferencial aún más general que las variedades Riemannianas.

2.4. Geometría Semi-Riemanniana

Cuando hablamos de este tipo de geometría diferencial nos referimos a variedades diferenciables equipadas con un tensor métrico similar al tensor métrico riemanniano, con la diferencia de que éste no necesariamente debe ser definido positivo. Se suele decir que las variedades semi-riemannianas son un caso más general de la geometría riemanniana, pues la métrica presenta menos restricciones.

En particular en esta categoría nos interesan las *variedades Lorentzianas*, para estudiar un poco más a detalle estas estructuras es necesario definir de manera rápida lo que es la *signatura* de la métrica.

Definición 2.4.1 (Signatura). Matemáticamente la signatura (v, p, r) es la cantidad de eigenvalores positivos, negativos y nulos (con multiplicidad) de la matriz simétrica de valores reales g_{ij} del tensor métrico. En física relativista v representa la dimensión *virtual* o tiempo y p las dimensiones físicas (espaciales).

Claramente la interpretación que nosotros en este trabajo vamos a emplear es la física, entonces, para variedades Lorentzianas decimos que su signatura es $(1, n-1)$ o bien $(n-1, 1)$ (dependiendo de la convención de signo). Note que se considera $r = 0$ pues el tensor métrico debe ser no degenerado, visto de otra forma, la matriz de representación de la métrica no tiene eigenvalores nulos. Particularmente haremos uso de la convención $(1, n-1)$ donde n es la dimensión de la variedad.

Para generar un poco de contexto respecto a estas estructuras vamos a hablar brevemente del *espacio-tiempo de Minkowski*, quizá el ejemplo más sencillo que podemos dar respecto a este tipo de estructuras.

2.4.1. Espacio-tiempo de Minkowski

Como mencionamos en el primer capítulo los postulados de la relatividad de Einstein llevaron a una reforma en el entendimiento del universo, fue necesario introducir la idea del espacio-tiempo y ampliar el lenguaje matemático que la física de ese entonces ocupaba, y es precisamente Hermann Minkowski quien desempeña dicha labor a través de la geometría no-euclidiana construyendo precisamente el *espacio de Minkowski*.

Definición 2.4.2. Definimos el espacio-tiempo de Minkowski en coordenadas cartesianas (x^1, \dots, x^n) en \mathbb{R}^n al par (M, g_{Mink}) donde g_{Mink} es la métrica, definida como

$$g_{Mink} = -(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^n)^2$$

CAPÍTULO 2. GEOMETRÍA DIFERENCIAL
2.4. GEOMETRÍA SEMI-RIEMANNIANA

Podemos observar que la métrica de Minkowski tiene signatura $(n - 1, 1)$ esto hace del espacio una variedad Lorentziana. Particularmente cuando usamos esta estructura para estudiar fenómenos bajo el marco de la relatividad especial de Einstein consideramos entonces el *espacio-tiempo de Minkowski* como el par (\mathbb{R}^4, η) donde η es la métrica y está definida como

$$\eta = -dx^0 \otimes dx^0 + dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3, \quad (2.29)$$

de donde se ve claramente que $g_{00} = -1$ y $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$, de modo que la matriz de representación para la métrica esta definida por¹

$$(\eta_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Por simplicidad hacemos uso de las coordenadas cartesianas espaciales y el tiempo, (ct, x, y, z) , para representar este elemento como

$$\eta = -c^2 dt \otimes dt + dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz \quad (2.31)$$

que es la representación usual en los textos de física.

Podemos revisar rápidamente propiedades como su curvatura, a partir del tensor de Riemann que definimos con anterioridad, sin embargo, vemos que los símbolos de Christoffel al estar definidos en términos de derivadas de las componentes de la métrica se hacen idénticamente cero pues las g_{ij} son, en este caso, números reales, por lo que las componentes del tensor de curvatura de Riemann también son idénticamente cero, por esta razón decimos que el espacio-tiempo de Minkowski es plano. Evidentemente, de lo anterior se deriva que el tensor de Ricci y el escalar de curvatura también sean cero.

Es importante mencionar que el tensor de Einstein, también es idénticamente nulo pues se compone de derivadas del tensor métrico. Este tensor describe la curvatura del espacio-tiempo en presencia de materia y energía, se puede escribir como vemos a continuación:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (2.32)$$

de modo que es clara la afirmación anterior pues el tensor de Ricci y el escalar de curvatura son en principio cero.

En el siguiente capítulo nos adentramos al núcleo sobre el cual se desenvuelve este trabajo, nos referimos al Problema de Yamabe clásico, pues como se verá en el último capítulo, nosotros trabajaremos específicamente el caso Lorentziano para el espacio-tiempo de Schwarzschild.

¹Es importante remarcar que cuando hagamos referencia a estructuras matemáticas aplicadas a la física haremos uso de la notación con índices griegos como se acostumbra en los textos de física.

Capítulo 3

El Problema de Yamabe

3.1. Geometría Conforme

Para comprender un poco más cuál es la base del problema de Yamabe vamos a estudiar brevemente lo correspondiente a geometría conforme sin adentrarnos demasiado en la materia. Principalmente nos interesa el tema de *transformaciones conformes* pues como se verá más adelante esta es la pieza central del problema.

De [Yam60] y [CÁ20] podemos hacer una síntesis de definiciones y propiedades en relación a este tipo de transformaciones. Primeramente decimos en general que una transformación conforme es toda aquella que preserva ángulos. Estas transformaciones aparecen en distintos ámbitos de la matemática, en el caso de las variedades diferenciales las transformaciones conformes se aplican a la métrica.

De la definición 2.3.1 se puede ver que a través de la métrica podemos definir un producto interno en el espacio tangente a cada punto de la variedad T_pM denotado como $g(v_p, w_p)$ con $v_p, w_p \in T_pM$ y (M, g) una variedad Riemanniana. De la noción usual de producto interno nosotros sabemos que se puede definir el ángulo que separa a los vectores v_p y w_p mediante la relación:

$$\cos \theta = \frac{g(v_p, w_p)}{\sqrt{g(v_p, v_p)}\sqrt{g(w_p, w_p)}},$$

donde $\sqrt{g(v_p, v_p)}$ y $\sqrt{g(w_p, w_p)}$ son las normas de v_p, w_p respectivamente. Ahora, consideremos otra métrica \bar{g} en M , diremos que si los ángulos que se forman entre los vectores respecto a g y \bar{g} son iguales en cada punto de la variedad, entonces g y \bar{g} están *relacionadas de manera conforme*. En general una *transformación conforme* de la métrica se genera al multiplicar ésta por una función positiva.

Definición 3.1.1. Sea (M, g) una variedad Riemanniana de dimensión n . Una métrica \bar{g} es conforme a g si existe una función suave de valores reales f tal que $\bar{g} = e^{2f}g$, a la función e^{2f} se le conoce como *factor conforme*.

Teniendo en cuenta lo anterior podemos ver qué ocurre con estructuras importantes como la curvatura de la variedad. Claramente es necesario fiarnos del lenguaje matemático para comprender más a fondo estos procesos, empezaremos por analizar cómo se transforman los símbolos de Christoffel. Directamente de la ecuación 2.24 si aplicamos la transformación conforme obtenemos:

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{ij}^k &= \frac{1}{2} \bar{g}^{kl} (\partial_i \bar{g}_{jl} + \partial_j \bar{g}_{li} - \partial_l \bar{g}_{ij}) \\
&= \frac{1}{2} e^{-2f} g^{kl} (\partial_i (e^{2f} g_{jl}) + \partial_j (e^{2f} g_{li}) - \partial_l (e^{2f} g_{ij})) \\
&= \frac{1}{2} e^{-2f} g^{kl} \left[e^{2f} \partial_i g_{jl} + (g_{jl} 2e^{2f}) \partial_i f + e^{2f} \partial_j g_{li} + (g_{li} 2e^{2f}) \partial_j f - e^{2f} \partial_l g_{ij} - (g_{ij} 2e^{2f}) \partial_l f \right] \\
&= \Gamma_{ji}^k + g^{kl} g_{jl} \partial_i f + g^{kl} g_{li} \partial_j f - g^{kl} g_{ij} \partial_l f \\
&= \Gamma_{ji}^k + \delta_j^k \partial_i f + \delta_i^k \partial_j f - g^{kl} g_{ij} \partial_l f.
\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\bar{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k + \delta_j^k \partial_i f + \delta_i^k \partial_j f - g_{ij} \partial^k f, \quad (3.1)$$

es la expresión para los símbolos de Christoffel respecto a la métrica conforme \bar{g} .

Recordando que el tensor de curvatura de Riemann está dado en términos de los símbolos de Christoffel tal como aparece en la ecuación 2.26, entonces se puede realizar un cálculo similar y obtener la expresión para dicho elemento, de acuerdo con [Yam60] se obtiene:

$$\bar{R}^m_{kij} = R^m_{kij} - f_{ki} \delta_j^m + f_{kj} \delta_i^m - g_{ki} f_j^m + g_{kj} f_i^m, \quad (3.2)$$

donde $f_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$, $f_{jk} := f_{j,k} - f_j f_k + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta g_{jk}$ y $f_j^k = g^{km} f_{mj}$.

A pesar de que ya tenemos la expresión para el tensor de curvatura nos será más útil conocer qué ocurre con el escalar de Ricci, pues como veremos este es el único involucrado explícitamente en el *problema de Yamabe*. Como sabemos de la ecuación 2.27 el tensor de Ricci se obtiene al contraer dos índices del tensor de Riemann¹, por lo cual se obtiene:

$$\bar{R}_{ki} = \bar{R}^m_{kim} = R_{ki} - (n-2) f_{ki} - g_{ki} f_\alpha^\alpha, \quad (3.3)$$

Al contraer completamente el tensor de Ricci se obtiene el escalar de curvatura:

$$\bar{g}^{ki} \bar{R}_{ki} = \bar{R} = e^{-2f} [R - 2(n-1) f_\alpha^\alpha].$$

En el desarrollo de Yamabe se introduce el *operador de Laplace-Beltrami*, Δ , de acuerdo con [YB55] (de donde Yamabe toma originalmente el resultado) para una función escalar tiene la siguiente forma:

$$\Delta f = g^{ij} f_{i,j}. \quad (3.4)$$

Con este operador en juego, la expresión para \bar{R} se transforma:

$$\bar{R} = e^{-2f} \left\{ R - 2(n-1) \left[\Delta f + \left(\frac{n}{2} - 1 \right) g^{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta \right] \right\}. \quad (3.5)$$

Desarrollando se obtiene:

$$\bar{R} = e^{-2f} [R - 2(n-1) \Delta f - (n-1)(n-2) g^{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta]. \quad (3.6)$$

¹Si somos observadores nos podemos dar cuenta que Yamabe contrae los índices 1 y 4 mientras que en la ecuación 2.27 están contraídos 1 y 3, esto es cuestión de preferencia del autor pues en general ambas son equivalentes, sin embargo hay que prestar atención a la convención que se ocupa en cada caso, pues esto puede generar una variación en el signo de la expresión. Aquí al seguir la formulación de Yamabe los resultados expuestos son congruentes entre sí.

En [Yam60] la ecuación 3.5 adquiere la siguiente forma²:

$$\bar{R} = e^{-2f} \left(R - 4 \frac{n-1}{n-2} e^{(-\frac{n}{2}+1)f} \Delta e^{(\frac{n}{2}-1)f} \right). \quad (3.7)$$

Como veremos más adelante, esta expresión (después de un par de ajustes) será la pieza central de la formulación del problema de Yamabe.

3.2. Antecedentes

Vamos a hablar primeramente de cómo surgió el problema, haremos uso de lo escrito en [Par87] para dar una síntesis de los antecedentes y la base del problema clásico.

Desde los inicios del estudio de la geometría Riemanniana ha existido la noción de *cambios conformes* de la métrica, éstos consisten en la multiplicación de la misma por una función positiva (como se explicó en la sección anterior), este procedimiento es útil y juega un rol importante en el estudio de la teoría de superficies. Existe un resultado importante en el análisis complejo conocido como *Teorema de Uniformización*, una consecuencia de dicho teorema es que cada superficie posee una métrica conforme cuya curvatura (Gaussiana) es constante.

El problema de Yamabe surge al intentar generalizar el resultado anterior para variedades de dimensiones superiores, pues entonces cada variedad n -dimensional habría de tener una métrica conforme de curvatura constante, esto facilitaría el estudio de ciertos aspectos de la topología diferencial pues se verían reducidas al estudio geométrico de los modelos de curvatura constante.

En 1960, Hidehiko Yamabe [Yam60] intenta demostrar la proposición siguiente:

El Problema de Yamabe. *Dada una variedad Riemanniana compacta (M, g) de dimensión $n \geq 3$ es posible encontrar una métrica conforme a g con curvatura escalar constante.*

En dicho artículo Yamabe ocupó técnicas de cálculo de variaciones y ecuaciones diferenciales elípticas para el desarrollo de la demostración. Sin embargo dicho desarrollo contenía errores, estos fueron descubiertos por Neil Trudinger en 1968. Aunque Trudinger fue capaz de arreglar la prueba tuvo que imponer restricciones a la variedad M .

Para comprender las modificaciones de Trudinger es necesario revisar la formulación de la solución dada por Yamabe, empezamos por suponer una variedad Riemanniana compacta (M, g) de dimensión $n \geq 3$. Cualquier métrica conforme a g se puede escribir como $\bar{g} = e^{2f} g$, donde f es una función suave de valores reales en M . Denotamos a las curvaturas escalares de g y \bar{g} por R y \bar{R} respectivamente, estas satisfacen la ley de transformación dada por la ecuación 3.6.

Posteriormente se hace la sustitución $e^{2f} = \varphi^{p-2}$, donde $p = 2n/(n-2)$, con tal de simplificar la ecuación 3.5, se obtiene:

$$\bar{R} = \varphi^{1-p} \left(-4 \frac{n-1}{n-2} \Delta \varphi + R \varphi \right). \quad (3.8)$$

Entonces la métrica conforme $\bar{g} = \varphi^{p-2} g$ tiene una curvatura escalar constante λ si y sólo si φ satisface la *ecuación de Yamabe*:

$$\square \varphi = \lambda \varphi^{p-1}, \quad (3.9)$$

donde $\square = a \Delta + R$ y $a = -4 \frac{n-1}{n-2}$.

²El desarrollo para la equivalencia entre la ecuación 3.7 y la ecuación 3.5 se puede encontrar en el Apéndice 1

CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA DE YAMABE
3.2. ANTECEDENTES

Nota. El operador \square (D'Alembertiano) no es otra cosa más que la generalización del Laplaciano para espacios con una métrica y dimensión arbitrarias, en el caso particular de una variedad semi-riemanniana, se define de la siguiente manera:

$$\square := g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu. \quad (3.10)$$

El D'Alembertiano y el operador de Laplace-Beltrami se comportan de la misma manera al actuar sobre una función escalar.

Al estudiar las propiedades analíticas de la ecuación de Yamabe se puede observar que corresponde a un problema del tipo de eigenvalores no lineal. En el valor del exponente $q = p - 1$ radica la complejidad analítica del problema de Yamabe, pues para valores pequeños ($q = 1$) el problema se reduce al caso lineal del problema de eigenvalores para \square o bien presenta comportamientos similares a éste cuando el valor de q es cercano a 1. Sin embargo para valores grandes de q los métodos disponibles para el caso lineal dejan de funcionar. Como se verá más adelante no solamente es este caso el que nos interesa estudiar sino además trabajaremos el caso Lorentziano del problema de Yamabe.

Yamabe observó que la ecuación 3.8 correspondía a la ecuación de Euler-Lagrange para el siguiente funcional

$$Q(\bar{g}) = \frac{\int_M \bar{R} dV_{\bar{g}}}{(\int_M dV_{\bar{g}})^{2/p}}. \quad (3.11)$$

De este hecho se desprende un resultado importante, al buscar los puntos críticos para la ecuación anterior se encuentra que los valores de $Q(\bar{g})$ están acotados inferiormente

$$\begin{aligned} \lambda(M) &= \inf\{Q(\bar{g}) : \bar{g} \text{ conforme a } g\} \\ &= \inf\{Q_g(\varphi) : \varphi \text{ una función suave, positiva en } M\}. \end{aligned}$$

A esta constante $\lambda(M)$ se le conoce como *invariante de Yamabe* y forma parte del núcleo de la modificación que hizo Trudinger, pues su prueba funcionaba siempre que $\lambda(M) \leq 0$. De hecho mostró también la existencia de una constante positiva, $\alpha(M)$, para la cual la prueba seguía siendo válida siempre que $\lambda(M) \leq \alpha(M)$.

El desarrollo histórico de la prueba al problema de Yamabe clásico se puede englobar en tres teoremas, el primero de ellos presenta una extensión de la prueba de Trudinger, se le atribuye a Thierry Aubin [Aub76] en 1976 y estipula lo siguiente:

Teorema 3.2.1 (Yamabe, Trudinger, Aubin). El problema de Yamabe puede ser resuelto en cualquier variedad compacta M con $\lambda(M) < \lambda(S^n)$, donde S^n es la esfera con su métrica estándar.

Este resultado le da un giro al enfoque de la prueba, pues ahora nos centramos en entender el significado geométrico del invariante $\lambda(M)$. Tras analizar detenidamente la geometría local de M cerca de un punto p en coordenadas normales, Aubin pudo demostrar para muchos otros casos el siguiente teorema.

Teorema 3.2.2 (Aubin). Si M tiene dimensión $n \geq 6$ y no es conformemente plana de manera local entonces $\lambda(M) < \lambda(S^n)$.

Para lograr este resultado Aubin utilizó varias *funciones de prueba* φ para probar que en pequeñas vecindades del punto $p \in M$ se cumplía que $Q_g(\varphi) < \lambda(S^n)$. Sin embargo había aún muchos casos restantes por estudiar que eran considerablemente más complicados pues la geometría conforme local no era capaz de proveer información suficiente para concluir que $\lambda(M) < \lambda(S^n)$.

CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA DE YAMABE

3.2. ANTECEDENTES

Es así como Richard Schoen en 1984 [Sch84] construye una función de prueba *global* buscando extender el resultado de Aubin dando origen al último teorema, pieza final del rompecabezas que dará solución al problema de Yamabe.

Teorema 3.2.3 (Schoen). Si M tiene dimensión 3, 4, ó 5, ó bien si M es conformemente plana de manera local, entonces $\lambda(M) < \lambda(S^n)$ a menos que M sea conforme a la esfera estándar.

Durante su prueba Schoen introdujo dos ideas bastante importantes. Primeramente reconoció la importancia de la función de Green para el operador \square . En segundo lugar, Schoen descubrió la inesperada relevancia del *teorema de la masa positiva*³ de la relatividad general. Este último hecho dio pie al estudio del teorema de la masa positiva como un resultado también matemático.

La solución al problema de Yamabe marcó un hito en el desarrollo de la teoría de ecuaciones diferenciales parciales no lineales.

Como se puede apreciar no hemos profundizado en la solución del problema clásico pues como ya se ha mencionado antes nos interesa estudiar el problema Lorentziano, para esto es claro que se deben de hacer ajustes a la teoría expuesta en este capítulo.

³Se refiere a una colección de resultados que tienen su fundamento en la Relatividad General y Geometría Diferencial. En su forma estándar, en general, afirma que la energía gravitacional de un sistema aislado es no-negativa, y es únicamente cero si en el sistema no hay objetos gravitando. A pesar de la naturaleza primordialmente física de estas afirmaciones posteriormente se formalizaron como teoremas matemáticos. [SY79][SY81][Wit81]

Capítulo 4

Problema Lorentziano de Yamabe

Una vez que hemos dado un vistazo a las herramientas necesarias para tratar el problema de Yamabe, así como la formulación clásica del mismo, podemos pasar al tema central de estudio de esta tesis. Ya hablamos brevemente en capítulos anteriores que nos interesa estudiar el problema Lorentziano de Yamabe, más específicamente el caso para el espacio-tiempo de Schwarzschild por lo cual es necesario revisar estos conceptos.

Empezaremos estudiando el espacio-tiempo de Schwarzschild con tal de conocer el trasfondo físico de este trabajo y así finalizar con el planteamiento Lorentziano del problema de Yamabe en el espacio-tiempo de Schwarzschild y el estudio de su posible solución.

4.1. El espacio-tiempo de Schwarzschild

Como estudiamos previamente, para describir el espacio-tiempo físico ocupamos el lenguaje matemático que proporciona la geometría diferencial a continuación vamos a dar una descripción tanto física como matemática del espacio-tiempo de Schwarzschild, así como un poco de contexto histórico.

Para comprender qué es el espacio-tiempo de Schwarzschild es necesario recordar brevemente qué son las ecuaciones de campo de Einstein. Como se describe en la sección 1.3, son el conjunto de ecuaciones 1.1 que describen el comportamiento del campo gravitacional como una deformación del espacio-tiempo en presencia de materia y energía.

Dentro de las soluciones que existen para dichas ecuaciones figura precisamente la solución exacta que Karl Schwarzschild presentó en 1916, poco tiempo después de que Einstein hiciera público su trabajo sobre Relatividad General.

La base del trabajo de Schwarzschild [Sch99] consiste en suponer una distribución de masa **estática** (un astro) con **simetría esférica**, la cual funge como única fuente de interacción gravitacional del modelo, a partir de éste busca resolver las ecuaciones de campo de Einstein. Su contribución fue de gran relevancia física pues una parte de la solución era capaz de describir de manera aproximada la interacción gravitacional de nuestro sistema solar. La otra parte de la solución abría la posibilidad a la existencia de los entes cosmológicos que hoy conocemos como *Agujeros Negros* y además provee el modelo más simple para estos entes.

Para la formulación matemática del modelo podemos seguir la idea original de Schwarzschild [Sch99] y complementar con la construcción que se hace en [ONe83], ésta última es matemáticamente

CAPÍTULO 4. PROBLEMA LORENTZIANO DE YAMABE
4.1. EL ESPACIO-TIEMPO DE SCHWARZSCHILD

te más estricta, para el propósito de este trabajo no es indispensable una formulación tan detallada.

De [Sch99] se tiene la siguiente formulación, hemos hecho ajustes a la notación para acoplarla a la de este trabajo. Consideremos un sistema coordenado (x^0, x^1, x^2, x^3) en una variedad (M, g) , con signatura $(+, -, -, -)$, de acuerdo con Einstein, un punto (sin masa) sujeto a un campo gravitacional generado por una masa puntual situada en el punto $x^1 = 0, x^2 = 0, x^3 = 0$ presenta un movimiento descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \quad \alpha = 0, 1, 2, 3 \quad (4.1)$$

normalmente se le conoce como *ecuación de la geodésica*¹. Los objetos ds y $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ corresponden al elemento de línea y los símbolos de Christoffel respectivamente.

Schwarzschild llama *ecuaciones de campo* al siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta = 0. \quad (4.2)$$

Además denota al elemento $|g_{\mu\nu}| = -1$ como *ecuación del determinante*. Luego, la masa que genera el campo gravitacional debe ser invariante en el tiempo, y en el infinito el movimiento de las partículas debe ser rectilíneo y uniforme. Entonces, de acuerdo con el trabajo de Einstein se tienen las siguientes condiciones:

1. Todas las componentes son independientes del tiempo x^0 .
2. Las ecuaciones $g_{i0} = g_{0i} = 0$ se satisfacen para $i = 1, 2, 3$.
3. La solución debe ser espacialmente simétrica respecto al origen del sistema coordenado en el sentido de que se debe encontrar la misma solución aún cuando las coordenadas x^1, x^2, x^3 han sido sujetas a una transformación ortogonal (rotación).
4. La métrica $g_{\mu\nu}$ se desvanece en el infinito, a excepción de los términos siguientes siempre distintos de cero:

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$$

Nota. Hemos ajustado también la signatura para que sea consistente con las formulaciones y desarrollos subsecuentes.

De este modo el problema que se le presenta a Schwarzschild consiste en encontrar un elemento de línea ds capaz de satisfacer el conjunto de ecuaciones 4.2, la *ecuación del determinante* y las cuatro condiciones anteriores.

La propuesta de Schwarzschild era la siguiente:

$$ds^2 = Fdt^2 - G(dx^2 + dy^2 + dz^2) - H(xdx + ydy + zdz)^2 \quad (4.3)$$

donde x, y, z son claramente las coordenadas rectangulares y t el tiempo, por otro lado F, G, H son funciones de $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

¹La geodésica es aquella línea de mínima longitud que une dos puntos de una superficie dada y además la línea esta contenida en dicha superficie. En general se puede hablar de geodésicas en espacios curvados de dimensión superior, es decir, variedades riemannianas.

CAPÍTULO 4. PROBLEMA LORENTZIANO DE YAMABE
4.1. EL ESPACIO-TIEMPO DE SCHWARZSCHILD

La condición (4) requiere que cuando $r \rightarrow \infty : F = G = 1, H = 0$. Si se hace un cambio de coordenadas a coordenadas polares dadas por las transformaciones:

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\z &= r \cos \theta,\end{aligned}$$

de modo que el elemento de línea se transforma, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}ds^2 &= Fdt^2 - G(dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) - Hr^2 dr^2 \\ &= Fdt^2 - (G + r^2H)dr^2 - Gr^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).\end{aligned}\tag{4.4}$$

De esta forma el elemento de volumen es $r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ pero el determinante de la matriz de representación de la transformación (*Jacobiano*) es distinto de 1, de modo que las ecuaciones de campo se verán alteradas si se hace la transformación de esta forma. Sin embargo, Schwarzschild hace el siguiente cambio de coordenadas:

$$x^1 = \frac{r^3}{3}, \quad x^2 = -\cos \theta, \quad x^3 = \phi,\tag{4.5}$$

de modo que:

$$dx^1 = r^2 dr, \quad dx^2 = \sin \theta d\theta, \quad dx^3 = d\phi.$$

Así la ecuación 4.4 toma la siguiente forma:

$$ds^2 = F(dx^0)^2 - \left(\frac{G}{r^4} + \frac{H}{r^3}\right)(dx^1)^2 - Gr^2 \left[\frac{(dx^2)^2}{1 - (x^2)^2} + (dx^3)^2(1 - (x^2)^2) \right],\tag{4.6}$$

y entonces:

$$ds^2 = f_4(dx^0)^2 - f_1(dx^1)^2 - f_2 \frac{(dx^2)^2}{1 - (x^2)^2} - f_3(dx^3)^2(1 - (x^2)^2).\tag{4.7}$$

Se pide que $f_1, f_2 = f_3, f_4$ sean funciones de x^1 y que satisfagan las siguientes condiciones:

1. Para $x^1 \rightarrow \infty$: $f_1 = 1/r^4 = (3x^1)^{-4/3}$, $f_2 = f_3 = r^2 = (3x^1)^{2/3}$, $f_0 = 1$.
2. La ecuación del determinante: $f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4 = 1$.
3. Las ecuaciones de campo.
4. Continuidad de f , excepto en $x^1 = 0$.

De este modo las ecuaciones diferenciales de las geodésicas para el elemento de línea de la ecuación 4.7 son:

CAPÍTULO 4. PROBLEMA LORENTZIANO DE YAMABE
4.1. EL ESPACIO-TIEMPO DE SCHWARZSCHILD

$$\begin{aligned}
0 &= f_1 \frac{d^2 x^1}{ds^2} + \frac{\partial f_4}{2\partial x^1} \left(\frac{dx^4}{ds} \right)^2 + \frac{\partial f_1}{2\partial x^1} \left(\frac{dx^1}{ds} \right)^2 - \frac{\partial f_2}{2\partial x^1} \left[\frac{1}{1-(x^2)^2} \left(\frac{dx^2}{ds} \right)^2 + (1-(x^2)^2) \left(\frac{dx^3}{ds} \right)^2 \right] \\
0 &= \frac{f_2}{1-(x^2)^2} \frac{d^2 x^2}{ds^2} + \frac{\partial f_2}{\partial x^1} \frac{1}{1-(x^2)^2} \frac{dx^1}{ds} \frac{dx^2}{ds} + \frac{f_2 x^2}{(1-(x^2)^2)^2} \left(\frac{dx^2}{ds} \right)^2 + f_2 x^2 \left(\frac{dx^3}{ds} \right)^2 \\
0 &= f_2 (1-(x^2)^2) \frac{d^2 x^3}{ds^2} + \frac{\partial f_2}{\partial x^1} (1-(x^2)^2) \frac{dx^1}{ds} \frac{dx^3}{ds} - 2f_2 x^2 \frac{dx^2}{ds} \frac{dx^3}{ds} \\
0 &= f_4 \frac{d^2 x^4}{ds^2} + \frac{\partial f_4}{\partial x^1} \frac{dx^1}{ds} \frac{dx^4}{ds}.
\end{aligned}$$

Al comparar este conjunto de ecuaciones con 4.1 se ve que las componentes del campo gravitacional son:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= -\frac{1}{2f_1} \frac{\partial f_1}{\partial x^1}, & \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2f_1} \frac{\partial f_2}{\partial x^1} \frac{1}{1-(x^2)^2}, \\
\Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2f_1} \frac{\partial f_2}{\partial x^1} (1-(x^2)^2), \\
\Gamma_{44}^1 &= -\frac{1}{2f_1} \frac{\partial f_4}{\partial x^1}, \\
\Gamma_{21}^2 &= -\frac{1}{2f_2} \frac{\partial f_2}{\partial x^1}, & \Gamma_{22}^2 &= -\frac{x^2}{1-(x^2)^2}, & \Gamma_{33}^2 &= -x^2 (1-(x^2)^2), \\
\Gamma_{31}^3 &= -\frac{1}{2f_2} \frac{\partial f_2}{\partial x^1}, & \Gamma_{32}^3 &= \frac{x^2}{1-(x^2)^2}, \\
\Gamma_{41}^4 &= -\frac{1}{2f_4} \frac{\partial f_4}{\partial x^1}
\end{aligned}$$

(Las demás son cero).

Debido a la simetría se mantiene ante rotaciones respecto al origen resulta suficiente escribir las ecuaciones de campo para el ecuador ($x^2 = 0$), de modo que los factores $(1 - (x^2)^2)$ se hacen 1, tenemos entonces:

$$\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{1}{f_1} \frac{\partial f_1}{\partial x^1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{f_1} \frac{\partial f_1}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{1}{f_2} \frac{\partial f_2}{\partial x^1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{f_4} \frac{\partial f_4}{\partial x^1} \right)^2, \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{1}{f_1} \frac{\partial f_1}{\partial x^1} \right) = 2 + \frac{1}{f_1 f_2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x^1} \right)^2, \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{1}{f_1} \frac{\partial f_1}{\partial x^1} \right) = \frac{1}{f_1 f_4} \left(\frac{\partial f_4}{\partial x^1} \right). \quad (4.10)$$

Las funciones f_1, f_2, f_3 deben cumplir además con la ecuación del determinante:

$$f_1 f_2 f_3 f_4 = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{f_1} \frac{\partial f_1}{\partial x^1} + \frac{2}{f_2} \frac{\partial f_2}{\partial x^1} + \frac{1}{f_4} \frac{\partial f_4}{\partial x^1} = 0. \quad (4.11)$$

Por el momento ignoramos la ecuación 4.9 y determinamos las funciones f_1, f_2, f_4 de 4.8, 4.10 y 4.11. Podemos reescribir 4.10 como:

CAPÍTULO 4. PROBLEMA LORENTZIANO DE YAMABE
4.1. EL ESPACIO-TIEMPO DE SCHWARZSCHILD

$$\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{1}{f_4} \frac{\partial f_4}{\partial x^1} \right) = \frac{1}{f_1 f_4} \frac{\partial f_1}{\partial x^1} \frac{\partial f_4}{\partial x^1}. \quad (4.12)$$

Al integrar directamente se obtiene:

$$\frac{1}{f_4} \frac{\partial f_4}{\partial x^1} = \alpha f_1, \quad (\alpha \text{ es una constante de integración}). \quad (4.13)$$

Por otro lado vemos que al sumar 4.8 y 4.12 obtenemos lo siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{1}{f_1} \frac{\partial f_1}{\partial x^1} + \frac{1}{f_4} \frac{\partial f_4}{\partial x^1} \right) = \left(\frac{1}{f_2} \frac{\partial f_2}{\partial x^1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{f_1} \frac{\partial f_1}{\partial x^1} + \frac{1}{f_4} \frac{\partial f_4}{\partial x^1} \right)^2$$

Si tomamos en cuenta la condición de la ecuación 4.11 vemos que:

$$-2 \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{1}{f_2} \frac{\partial f_2}{\partial x^1} \right) = 3 \left(\frac{1}{f_2} \frac{\partial f_2}{\partial x^1} \right)^2.$$

De aquí, si integramos directamente se obtiene:

$$\frac{1}{f_2} \frac{\partial f_2}{\partial x^1} = \frac{2}{3x^1 + \rho}. \quad (\rho \text{ es una constante de integración}).$$

Al integrar una vez más obtenemos la forma de f_2 :

$$f_2 = \lambda (3x^1 + \rho)^{2/3}. \quad (\lambda \text{ es una constante de integración}).$$

Debido a las restricciones en el infinito se requiere que $\lambda = 1$. Entonces:

$$f_2 = (3x^1 + \rho)^{2/3}. \quad (4.14)$$

Luego, de 4.13 y 4.11 resulta que:

$$\frac{\partial f_4}{\partial x^1} = \alpha f_1 f_4 = \frac{\alpha}{f_2 f_3} = \frac{\alpha}{f_2^2} = \frac{\alpha}{(3x^1 + \rho)^{4/3}}.$$

Considerando las restricciones en el infinito e integrando la expresión anterior llegamos a la forma para f_4 :

$$f_4 = 1 - \alpha (3x^1 + \rho)^{-1/3}. \quad (4.15)$$

Finalmente para f_1 hacemos uso de 4.11 y obtenemos:

$$f_1 = \frac{(3x^1 + \rho)^{-4/3}}{1 - \alpha (3x^1 + \rho)^{-1/3}}. \quad (4.16)$$

Se puede verificar fácilmente que la ecuación 4.9 se satisface con las expresiones encontradas para f_1 y f_2 . Vemos entonces que se satisfacen todas las condiciones a excepción de la *condición de continuidad* pues f_1 es discontinua cuando:

$$1 = \alpha (3x^1 + \rho)^{-1/3} \quad \text{o bien} \quad 3x^1 = \alpha^3 - \rho.$$

Sin embargo para que esta discontinuidad tenga sentido en el origen ($x^1 = 0$) debe ocurrir que:

$$\rho = \alpha^3. \quad (4.17)$$

De esta forma relacionamos, mediante la condición de continuidad, a las constantes de integración ρ y α . De este modo la solución completa al problema es la siguiente:

$$f_1 = \frac{1}{R^4} \frac{1}{1 - \alpha/R}, \quad f_2 = f_3 = R^2, \quad f_4 = 1 - \alpha/R,$$

donde la cantidad auxiliar R está definida como sigue:

$$R = (3x^1 + \rho)^{1/3} = (r^3 + \alpha^3)^{1/3}.$$

Una vez que hemos obtenido las soluciones para las funciones f podemos introducirlas en la ecuación del elemento de línea 4.7, regresar a las coordenadas polares usuales y escribir la solución exacta al problema:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{R}\right) dt^2 - \frac{dR^2}{1 - \alpha/R} - R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4.18)$$

Esta última expresión contiene únicamente la constante α que depende del valor de la masa en el origen.

Esta es la solución original derivada por Schwarzschild, sin embargo, posteriormente se le adjudicó otra forma considerando la información de la constante α , es decir, la masa M de la estrella que se encuentra en el origen del sistema coordenado, finalmente la solución que se utiliza comúnmente está dada por:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4.19)$$

Se le conoce como *métrica de Schwarzschild* y al elemento $2M = r_s$ como *radio de Schwarzschild*.

Nota. La signatura que estaremos trabajando es $(-, +, +, +)$, la expresión 4.19 se ha escrito teniendo en cuenta esta convención.

La imagen siguiente representa la forma que tendría del espacio-tiempo alrededor de un cuerpo esféricamente simétrico (Tomado de [Wik21]). Es una representación de la solución de Schwarzschild para $r > r_s$, con esto podemos generar una idea más concreta de la curvatura de este espacio-tiempo.

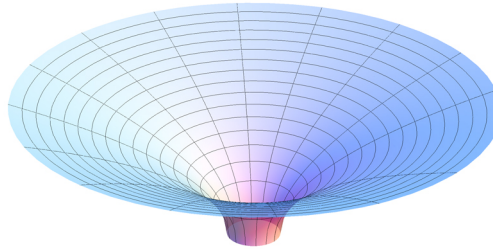


Figura 4.1: Una representación del paraboloido de Flamm, cuya curvatura geométrica coincide con la del plano ecuatorial de una estrella esféricamente simétrica.

4.2. Problema Lorentziano de Yamabe

Ahora bien, una vez que hemos descrito el espacio-tiempo de Schwarzschild retomamos el problema de Yamabe, veremos a continuación el planteamiento del problema sobre una variedad Lorentziana, pues Schwarzschild pertenece a esta categoría.

CAPÍTULO 4. PROBLEMA LORENTZIANO DE YAMABE
4.2. PROBLEMA LORENTZIANO DE YAMABE

Para esta sección haremos uso extensivo del trabajo de Nicolas Ginoux [Gin15] en busca de soluciones al problema de Yamabe en espacio-tiempos globalmente hiperbólicos, esto servirá de antesala para posteriormente plantear el problema en el espacio-tiempo de Schwarzschild.

Empezamos suponiendo una variedad Lorentziana n -dimensional (M^n, \mathbf{g}) cuya métrica, \mathbf{g} , posee una signatura $(-, +, \dots, +)$. Buscamos entonces la existencia de una métrica conforme a \mathbf{g} , digamos $\bar{\mathbf{g}}$, cuya curvatura escalar sea constante. Denotamos por R a la curvatura escalar de \mathbf{g} y \bar{R} a la de $\bar{\mathbf{g}}$ de la misma forma que en el planteamiento original; podremos notar que tras un poco de álgebra básica la siguiente ecuación es equivalente a la ecuación 3.8, es decir, la ecuación para el Problema de Yamabe Lorentziano es:

$$\frac{n-2}{4(n-1)}\bar{R}\varphi^{\frac{n+2}{n-2}} = \square\varphi + \frac{n-2}{4(n-1)}R\varphi. \quad (4.20)$$

Esta ecuación se enfoca en el caso para $n \geq 3$ y $\bar{\mathbf{g}} := \varphi^{\frac{4}{n-2}}\mathbf{g}$ con $\varphi \in C^\infty(M, \mathbb{R}^+)$. En esta ocasión no nos detenemos a revisar el caso para $n = 2$ pues Schwarzschild es de dimensión 4.

Ginoux hace énfasis en el hecho de que esta ecuación es en sí una ecuación semi lineal de onda (o bien no lineal en el caso $\bar{R} \neq 0$), ya que este tipo de ecuaciones se pueden escribir localmente como un sistema hiperbólico simétrico, y estos sistemas siempre tienen soluciones suaves de manera local, es decir, la ecuación 4.20 tiene una solución local en cualquier espacio-tiempo.

Para estudiar la existencia global de estas soluciones Ginoux restringe la geometría de estas variedades Lorentzianas, se centra en espacio-tiempos globalmente hiperbólicos, para los cuales provee la siguiente definición.

Definición 4.2.1 (Espacio-tiempo globalmente hiperbólico). Dado un espacio-tiempo (M^n, \mathbf{g}) , decimos que es *globalmente hiperbólico* si y solo si existe una *hipersuperficie de Cauchy* en M , esto es, dado un subconjunto Σ de M , este es interceptado una sola vez por cada curva temporal inextensible en M .

De esta definición se desprenden algunos resultados importantes; de A. Bernal y M. Sánchez [BS05] [BS06], tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.2.1. Sea (M^n, \mathbf{g}) un espacio-tiempo.

- i) Si (M^n, \mathbf{g}) es globalmente hiperbólico, entonces es isométrico a $(\mathbb{R} \times \Sigma, -\beta dt^2 \oplus g_t)$, donde cada $\{t\} \times \Sigma$ corresponde a una hipersuperficie de Cauchy espacial suave de M , $\beta \in C^\infty(\mathbb{R} \times \Sigma, \mathbb{R}^+)$ y g_t es una familia uniparamétrica de métricas Riemannianas en Σ .
- ii) Si $\Sigma \subset M$ es cualquier hipersuperficie de Cauchy temporal suave en el espacio-tiempo (globalmente hiperbólico) (M^n, \mathbf{g}) , entonces para $t_0 \in \mathbb{R}$ se tiene una isometría $(M^n, \mathbf{g}) \cong (\mathbb{R} \times \Sigma, -\beta dt^2 \oplus g_t)$ como en el inciso anterior y donde Σ se identifica con $\{t_0\} \times \Sigma$.

A pesar de que estos resultados no lo describen explícitamente, hay ciertas restricciones que se imponen a la variedad descrita a partir este *producto deformado* como se le denota en la literatura. Es necesario entonces revisar los siguientes conceptos antes de seguir con el planteamiento de Ginoux.

Definición 4.2.2 (Variedad Completa). Una variedad (pseudo) Riemanniana, M , es aquella para la cual, desde cualquier punto $p \in M$, podemos seguir una línea “recta” en cualquier dirección de forma indefinida.

Esta forma de describir una *Variedad Completa* nos será útil más adelante cuando veamos que ocurre con nuestro caso de estudio.

CAPÍTULO 4. PROBLEMA LORENTZIANO DE YAMABE
4.2. PROBLEMA LORENTZIANO DE YAMABE

Definición 4.2.3 (Variedad Compacta). Entendemos una variedad compacta en el sentido de un *espacio topológico compacto*, esto es, dado χ decimos que es compacto si toda cobertura abierta de χ tiene una subcobertura finita. Dicho de otra forma, si χ es compacto entonces es la unión de una familia de conjuntos abiertos, existe además una subfamilia finita de conjuntos abiertos cuya unión es χ .

Definición 4.2.4 (Cobertura Abierta). Es una colección de conjuntos abiertos, pertenecientes a un espacio topológico, cuya unión contiene a determinado subconjunto.

Definición 4.2.5 (Variedad Cerrada). Es toda aquella variedad compacta que carece de frontera.

El teorema 4.2.1 implica únicamente la existencia de una separación de la variedad de la forma $(\mathbb{R} \times \Sigma, -\beta dt^2 \oplus g_t)$, y que la métrica Riemanniana inducida g_t en Σ no necesita ser completa. Es importante mencionar también que todo producto de la forma $(I \times \Sigma, -\beta dt^2 \oplus g_t)$, donde Σ sea cerrada, es globalmente hiperbólico y que cada $\{t\} \times \Sigma$ es una hipersuperficie de Cauchy de M .

Posteriormente Ginoux habla brevemente sobre la invarianza del problema de Yamabe, denotando que (M^n, g) es globalmente hiperbólico si y solo si (M^n, \bar{g}) lo es, para toda métrica \bar{g} conforme a g . El siguiente Lema introduce algunas formulas útiles en el tratamiento del problema bajo el planteamiento de Ginoux.

Lema 4.2.1. Sea (M^n, g) un espacio-tiempo de la forma $(I \times \Sigma, -\beta dt^2 \oplus g_t)$ donde $\beta \in C^\infty(I \times \Sigma, \mathbb{R}^+)$ y g_t una familia uniparamétrica de métricas Riemannianas en Σ . Entonces las siguientes identidades se satisfacen.

1. Para cada $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \square f &= \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{1}{2\beta} \left(tr_{g_t} \left(\frac{\partial g_t}{\partial t} \right) - \frac{1}{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial t} \right) \frac{\partial f}{\partial t} \\ &\quad - \frac{1}{2\beta} g_t \left(grad_{g_t}(\beta(t, \cdot)), grad_{g_t}(f(t, \cdot)) \right) + \Delta_{g_t} f(t, \cdot), \end{aligned} \quad (4.21)$$

donde $\Delta_{g_t} = -tr_{g_t}(Hess_{g_t}^\Sigma(\cdot))$.

2. En el caso $\beta = 1$, se tiene

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{2} tr_{g_t} \left(\frac{\partial g_t}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial t} + \Delta_{g_t}. \quad (4.22)$$

3. Para $\beta = 1$ y $g_t = b(t)^2 g_\Sigma$ con $b \in C^\infty(I, \mathbb{R}^+)$ y alguna métrica Riemanniana g_Σ en Σ , tenemos

$$\begin{aligned} \square + a_n R &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (n-1) \frac{b'}{b} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{b^2} \Delta_{g_\Sigma} \\ &\quad + \frac{a_n}{b^2} \left(R_{g_\Sigma} + 2(n-1)bb' + (n-1)(n-2)(b')^2 \right) \end{aligned} \quad (4.23)$$

donde $a_n := \frac{n-2}{4(n-1)}$ y R_{g_Σ} corresponde a la curvatura escalar de (Σ, g_Σ) .

4. Para $\beta = 1$ y $g_t = g_\Sigma$ para alguna métrica Riemanniana g_Σ en Σ , se tiene

$$\square + a_n R = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + L_{g_\Sigma}, \quad (4.24)$$

donde $L_{g_\Sigma} := \Delta_{g_\Sigma} + a_n R_{g_\Sigma}$

El siguiente teorema representa uno de los resultados más importantes del planteamiento de Ginoux

CAPÍTULO 4. PROBLEMA LORENTZIANO DE YAMABE
 4.3. ESTUDIO DEL PROBLEMA DE YAMABE EN EL ESPACIO-TIEMPO DE
 SCHWARZSCHILD

Teorema 4.2.2. Sea (M^n, g) un espacio-tiempo globalmente hiperbólico de dimensión $n \geq 3$ con una hipersuperficie de Cauchy espacialoide, cerrada y suave, $\Sigma \subset M$, y $\bar{R} \in \mathbb{R}$ una constante arbitraria. Denotemos por ν a un vector normal unitario futuro-dirigido a lo largo de Σ . Entonces para cualesquiera $\varphi_0, \varphi_1 \in C^\infty(\Sigma, \mathbb{R})$ con $\varphi_0 > 0$, existe un único subconjunto maximal, globalmente hiperbólico, \hat{D}_Σ de M en el que Σ es una hipersuperficie de Cauchy y sobre la cual el problema

$$\begin{cases} \square\varphi + a_n R\varphi = a_n \bar{R}\varphi^{\frac{n+2}{n-2}} \\ \varphi|_\Sigma = \varphi_0 \\ \partial_\nu\varphi = \varphi_1 \end{cases}$$

tiene una solución positiva única.

Posteriormente Ginoux habla de algo que resulta de utilidad en nuestro caso de estudio, revisaremos lo que ocurre con los espacio-tiempos *conformemente estáticos estándar*, tenemos la siguiente definición.

Definición 4.2.6. Un espacio-tiempo (M^n, g) es

- i) estático si y sólo si admite un campo vectorial de Killing temporaloide cuya distribución ortogonal es integrable.
- ii) estático estándar si y solo si es isométrico a un producto de la forma $(I \times \Sigma, -\beta dt^2 \oplus g_\Sigma)$, para algún intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$, alguna variedad Riemanniana (Σ^{n-1}, g_Σ) y $\beta \in C^\infty(\Sigma, \mathbb{R}^+)$.

Ginoux hace además la observación de que un espacio-tiempo estático estándar $(I \times \Sigma, -\beta dt^2 \oplus g_\Sigma)$ es globalmente hiperbólico si y sólo si la métrica $\frac{1}{\beta}g_\Sigma$ es completa, en particular todo espacio-tiempo estático estándar con Σ cerrada es globalmente hiperbólico.

A continuación comenzaremos con el estudio del Problema de Yamabe en el espacio-tiempo de Schwarzschild.

4.3. Estudio del Problema de Yamabe en el espacio-tiempo de Schwarzschild

En esta sección aterrizaremos los conceptos hasta ahora aprendidos, pasaremos finalmente al estudio del problema de Yamabe para el espacio-tiempo de Schwarzschild. Iremos de la mano del desarrollo de Ginoux para el problema Lorentziano, posteriormente haremos uso de las herramientas de [FP20] para estudiar qué ocurre con la solución a la ecuación diferencial.

Recordamos que una de las características principales que debe cumplir el espacio, para aplicar el planteamiento de Ginoux, es que sea globalmente hiperbólico, o bien que sea isométrico a un producto de la forma $(I \times \Sigma, -\beta dt^2 \oplus g_t)$, en [San08] se hace la observación de que muchos espacio-tiempos con importancia en el estudio de la física poseen esta propiedad, en particular el espacio-tiempo de Schwarzschild.

Nota. En [Fra09] se menciona que una hipersuperficie de Cauchy para la región del *agujero negro de Schwarzschild*, \mathbf{B} , está dada por $\{r_0\} \times \mathbb{R} \times S^2$ con $0 < r_0 < 2M$ y para el *espacio exterior de Schwarzschild*, \mathbf{N} , tenemos $(2M, \infty) \times \{t_0\} \times S^2$ para cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$. Con esto notamos que para estructurar un producto de la forma requerida por Ginoux debemos ser cuidadosos con los detalles, sin embargo, en general se pide que el producto esté dado a partir de una función de

CAPÍTULO 4. PROBLEMA LORENTZIANO DE YAMABE
 4.3. ESTUDIO DEL PROBLEMA DE YAMABE EN EL ESPACIO-TIEMPO DE
 SCHWARZSCHILD

tiempo tal como se explica en [BS05].

Ahora bien, para trabajar sobre el problema Lorentziano de Yamabe consideramos al espacio-tiempo de Schwarzschild como una variedad de 4 dimensiones con signatura $(-, +, +, +)$, denotada por el par (M, g_s) donde g_s es la métrica de Schwarzschild descrita por la ecuación 4.19.

Utilizando los resultados de Ginoux podemos identificar que $\beta = 1 - \frac{2M}{r}$, en general el espacio-tiempo de Schwarzschild puede ser visto como un producto de la forma $\mathbb{R} \times (0, \infty) \times S^2$, donde S^2 es la 2-esfera con su métrica usual; de este modo asignamos $\Sigma = (0, \infty) \times S^2$ con la métrica Riemanniana inducida

$$g_\Sigma = \beta^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),$$

y obtenemos entonces que $(M, g_s) \cong (\mathbb{R} \times \Sigma, -\beta dt^2 \oplus g_\Sigma)$.

Por otro lado, sabemos que el escalar de curvatura para el espacio-tiempo de Schwarzschild se desvanece ([MG10] p.18), es decir $R = 0$, además de acuerdo con las condiciones del problema de Yamabe, sabemos que el escalar de curvatura relacionado a la métrica conforme debe ser constante, denotémosle por $\mu \neq 0$ a dicha cantidad, así la ecuación 4.20 para el problema Lorentziano se transforma en:

$$\square \varphi = \frac{n-2}{4(n-1)} \mu \varphi^{\frac{n+2}{n-2}}. \quad (4.25)$$

Si manipulamos la ecuación anterior tomando $n = 4$ directamente se obtiene lo siguiente:

$$\square \varphi = \frac{2}{12} \mu \varphi^3. \quad (4.26)$$

que guarda similitud con lo que presenta De la Cruz en [CÁ20], la diferencia principal se encuentra en la información que guarda el operador diferencial \square , para el caso de Minkowski el operador se desglosa de manera aparentemente sencilla. Sin embargo para Schwarzschild hay derivadas parciales mezcladas lo cual complica el problema.

Veamos ahora la forma de $\square \varphi$ para nuestro caso. Notemos que la función β es una función exclusivamente de r por lo que las derivadas parciales respecto a t de la ecuación 4.21 son cero y esto simplifica la expresión

$$\begin{aligned} \square \varphi &= \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{2\beta} \left(\text{tr}_{g_t} \left(\frac{\partial g_t}{\partial t} \right) - \frac{1}{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial t} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ &\quad - \frac{1}{2\beta} g_t \left(\text{grad}_{g_t}(\beta(t, \cdot)), \text{grad}_{g_t}(\varphi(t, \cdot)) \right) + \Delta_{g_t} \varphi(t, \cdot) \\ &= \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{2\beta} g_\Sigma \left(\text{grad}_{g_\Sigma}(\beta(t, \cdot)), \text{grad}_{g_\Sigma}(\varphi(t, \cdot)) \right) + \Delta_{g_\Sigma} \varphi(t, \cdot). \end{aligned}$$

Calculamos primeramente $\text{grad}_{g_\Sigma}(\beta(t, \cdot))$ y $\text{grad}_{g_\Sigma}(\varphi(t, \cdot))$ mediante la forma generalizada del operador diferencial ∇ para un campo escalar, es decir, para coordenadas curvilíneas el operador gradiente tiene la forma

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} g^{ij} \hat{e}_j.$$

De este modo obtenemos:

CAPÍTULO 4. PROBLEMA LORENTZIANO DE YAMABE
 4.3. ESTUDIO DEL PROBLEMA DE YAMABE EN EL ESPACIO-TIEMPO DE
 SCHWARZSCHILD

$$\begin{aligned} \text{grad}_{g_\Sigma}(\beta(t, \cdot)) &= \frac{\partial \beta}{\partial r} \beta \hat{r} \\ \text{grad}_{g_\Sigma}(\varphi(t, \cdot)) &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} \beta \hat{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{1}{r^2} \hat{\theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \hat{\phi}. \end{aligned}$$

Recordemos que el tensor métrico g_Σ trabaja de manera similar al producto interno en un espacio Euclidiano; en general para cualquier par de vectores u, v en algún punto de la variedad

$$g(u, v) = u^i v^i g_{ij},$$

así

$$g_\Sigma(\text{grad}_{g_\Sigma}(\beta(t, \cdot)), \text{grad}_{g_\Sigma}(\varphi(t, \cdot))) = \frac{\partial \beta}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \beta,$$

entonces

$$\square \varphi = \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial \beta}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \Delta_{g_\Sigma} \varphi(t, \cdot). \quad (4.27)$$

Es importante notar que para el caso de Minkowski, $\Sigma = \mathbb{R}^3$, se simplifica la expresión pues $\Delta_{g_\Sigma} = \Delta$, es decir, el Laplaciano usual en coordenadas cartesianas. Sin embargo, para nuestro caso a pesar de que Σ se trabaja en coordenadas de Schwarzschild que poseen simetría esférica, el cálculo de Δ_{g_Σ} no es precisamente el del Laplaciano en coordenadas esféricas.

La ecuación para el problema de Yamabe Lorentziano en el espacio-tiempo de Schwarzschild adopta la siguiente forma

$$\square \varphi = \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial \beta}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \Delta_{g_\Sigma} \varphi(t, \cdot) = C\mu\varphi^3. \quad (4.28)$$

Nuestro propósito para este trabajo originalmente contemplaba encontrar la solución al problema de Yamabe, es decir, una solución a la ecuación diferencial, sin embargo esto requiere técnicas un poco más avanzadas y más tiempo de estudio, por ello no profundizaremos en un método para resolver la ecuación diferencial 4.28, más bien en base a las características del problema estudiaremos la existencia de una solución, particularmente nos centraremos en soluciones positivas para acotar el caso de estudio.

En [FP20] se propone un método de reducción para el problema semi-Riemanniano de Yamabe en un espacio semi-Euclidiano, es decir, para la ecuación

$$-\square u = \mu |u|^{p-1} u, \quad u \in \mathbb{R}_s^m, \quad (4.29)$$

donde \mathbb{R}_s^m hace referencia a dicho espacio semi-Euclidiano con coordenadas $(\bar{t}, \bar{x}) = (t_1, \dots, t_s, x_1, \dots, x_{m-s})$, con $m \geq 3$, $s \geq 1$, $p > 1$, $\mu \in \mathbb{R}/\{0\}$; y donde \bar{t} serán llamadas *variables de tiempo* y \bar{x} *variables espaciales*.

Ahora bien, si observamos detenidamente la ecuación 4.29 y tomamos en cuenta el hecho de que nos enfocamos en las soluciones positivas al problema podemos remover el valor absoluto de la función u y suprimir el -1 que acompaña al exponente p de modo que la ecuación toma la siguiente forma

$$-\square u = \mu u^p,$$

CAPÍTULO 4. PROBLEMA LORENTZIANO DE YAMABE
4.3. ESTUDIO DEL PROBLEMA DE YAMABE EN EL ESPACIO-TIEMPO DE SCHWARZSCHILD

que guarda parecido con la ecuación 4.26 identificando a u con φ y $p = 3 > 1$, el signo que acompaña a \square se debe a una elección de convención y el término $2/12$ se puede absorber en μ . De este modo vemos que se regresa a la misma ecuación.

Siguiendo con el planteamiento de [FP20] nos encontramos con el siguiente teorema que enuncia algunas de las características de la solución u de acuerdo con los siguientes parámetros. Para enteros positivos fijos $m \geq 3$, $m > s \geq 1$, $0 \leq k \leq s$ y $0 \leq n \leq m - s$; además para $z = (\bar{t}, \bar{x})$ definimos $\ell_{k,n}(z) := -\sum_{i=1}^k t_i^2 + \sum_{j=1}^n x_j^2$. Notemos que $\ell_{0,k} = -|(t_1, \dots, t_k)|^2$, $\ell_{n,0} = |(x_1, \dots, x_n)|^2$ y si $k+n = m$ entonces $\ell_{k,n}(z) = \langle z, z \rangle$ donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota la métrica semi-Riemanniana g .

Teorema 4.3.1. Sea $p > 1$ y $\mu \neq 0$. Entonces la ecuación 4.29 admite las siguientes soluciones acotadas definidas globalmente en \mathbb{R}_S^m :

- (Y1) Para $k+n = 0, 1$ y cualquier $p > 1$, la solución u cambia de signo con un número infinito de dominios nodales.
- (Y2) Para $k+n \geq 2$, con $k = 0$ o $n = 0$ y $1 < p < \frac{(k+n)+2}{(k+n)-2} \leq \infty$, u cambia de signo, posee un número infinito de dominios nodales y $|u(z)| \rightarrow 0$ mientras $\ell_{0,n}(z) \rightarrow \infty$ cuando $k = 0$, o bien mientras $\ell_{k,0}(z) \rightarrow -\infty$ cuando $n = 0$.
- (Y3) Para $k+n > 2$ con $k = 0$ o $n = 0$ y $p \geq \frac{(k+n)+2}{(k+n)-2}$, u es positiva con un único punto crítico en el origen, que es además un máximo global; y $|u(z)| \rightarrow 0$ mientras $\ell_{0,n}(z) \rightarrow \infty$ cuando $k = 0$, o bien mientras $\ell_{k,0}(z) \rightarrow -\infty$ cuando $n = 0$.

Aún mas, la ecuación 4.29 admite los siguientes tipos de soluciones que estallan²:

- (Y4) Para $k+n \geq 0$, con $k = 0$ o $n = 0$ y cualquier $p > 1$, u es positiva con un único punto crítico en el origen, que representa un mínimo global, existe además $R > 0$, $a \in \mathbb{R}_S^m \setminus \{0\}$, $\epsilon_1, \dots, \epsilon_s \in \{-1, 1\}$ y $1 \leq w \leq m - 2s$ tal que $|u(z)| \rightarrow \infty$ mientras alguna de las siguientes también ocurre:
 - $\ell_{0,n}(z) \rightarrow R$ cuando $k = 0$.
 - $\ell_{k,0}(z) \rightarrow -R$ cuando $n = 0$.
 - $\langle a, z \rangle \rightarrow \pm R$ o mientras $\sum_{i=1}^s |t_i + \epsilon_i x_i|^2 + 2 \sum_{j=1}^{s+w} x_j \rightarrow \pm R$ cuando $k = n = 0$.
- (Y5) Para $k+n \geq 2$ con $k, n \neq 0$ y $1 < p < \frac{(k+n)+2}{(k+n)-2} \leq \infty$, u cambia de signo, con un número infinito de dominios nodales, $|u(z)| \rightarrow 0$ mientras $\ell_{k,n} \rightarrow \infty$ (o mientras $\ell_{k,n} \rightarrow -\infty$) y existe $R > 0$ tal que $|u(z)| \rightarrow \infty$ mientras $\ell_{k,n}(z) \rightarrow -R$ (o mientras $\ell_{k,n} \rightarrow R$).
- (Y6) Para $k+n > 2$ con $k, n \neq 0$ y $p \geq \frac{(k+n)+2}{(k+n)-2}$, u es positiva con un único punto crítico en el origen, el cual es un punto silla, $|u(z)| \rightarrow 0$ mientras $\ell_{k,n}(z) \rightarrow \infty$ (o mientras $\ell_{k,n}(z) \rightarrow -\infty$) y existe $R > 0$ tal que $|u(z)| \rightarrow \infty$ mientras $\ell_{k,n}(z) \rightarrow -R$ (o mientras $\ell_{k,n}(z) \rightarrow R$).

Para nuestro caso al enfocarnos en soluciones positivas podemos descartar (Y1), (Y2) y (Y5) en primer lugar; analicemos ahora los valores para los enteros k, n, m, s, p para así acotar más nuestras opciones. Tenemos que m representa la dimensión de la variedad, en este caso $m = 4$, s denota la cantidad de variables de tiempo, es decir, $s = 1$, por lo tanto $0 \leq k \leq 1$ y $0 \leq n \leq 3$, p como se vio

²El término hace referencia al comportamiento de la solución, el cual es incierto en los límites del conjunto donde esta se define, normalmente se refiere a que en instancias de tiempo muy grandes ($t \rightarrow \infty$) la solución bien tiende a infinito también. Matemáticamente presenta un panorama poco conflictivo, sin embargo físicamente sabemos que la noción de un tiempo infinito es algo que carece de sentido real.

anteriormente es igual a 3.

Estudiemos entonces que ocurre con las posibles soluciones restantes.

- Para $(Y3)$ tenemos la condición $k + n > 2$, y necesariamente $k = 0$ o $n = 0$, para el primer caso se tiene como consecuencia que $n = 3$ y entonces $\frac{(k+n)+2}{(k+n)-2} = 5 \leq p$ lo cual nos lleva a una contradicción pues $p = 3$. Por lo tanto tomamos el caso restante $n = 0$ pero este simplemente no procede pues sería necesario que $k = 3$ para cumplir $k + n > 2$. Por lo que concluimos que $(Y3)$ no es una opción viable.
- Tras una inspección rápida podemos ver que $(Y4)$ es completamente viable para básicamente cualquier elección de k, n , siempre que cumpla con que alguno de estos es cero.
- Analizamos ahora $(Y6)$, para que $k + n > 2$ con $k, n \neq 0$ tenemos primeramente que $k = 1$, y entonces $n = 2, 3$, pero la condición $p \geq \frac{(k+n)+2}{(k+n)-2}$ nos muestra que si $n = 2$ entonces $\frac{(k+n)+2}{(k+n)-2} = 5$ y se genera una contradicción. Por lo tanto el único caso viable es $n = 3$ para el cual $\frac{(k+n)+2}{(k+n)-2} = 3$ que es justamente el valor de p .

De esta forma hemos reducido nuestras opciones considerablemente, conseguimos dos tipos de soluciones viables para u positiva, resta analizar las condiciones que involucran a $\ell_{k,n}$ en general, pues esto nos dará información adicional sobre u . Notemos que para $(Y6)$ ocurre que $k + n = 4 = m$ por lo que adicionalmente para este caso sabemos que $\ell_{k,n}(z) = \langle z, z \rangle$ lo cual resulta útil en el análisis de las condiciones impuestas sobre u .

4.4. Análisis de resultados

Podemos analizar las “condiciones de frontera”, es decir, que ocurre con el valor de $\ell_{k,n}(z)$ cuando nos encontramos, por ejemplo, cerca de la singularidad física; denotamos principalmente tres casos, los cuales analizamos a continuación.

- **Singularidad física** (Agujero Negro): En este punto sabemos que $r \rightarrow 0$, y que la masa que se encuentra en el centro de la distribución tiene simetría esférica, es decir, los valores de θ y ϕ barren justamente toda la esfera, por lo que tenemos valores de π y 2π respectivamente; ahora bien, para los valores de t que sabemos en particular pueden tomar cualquier número real, nos interesan valores positivos.

Notemos que con estas características los valores de $\ell_{k,n}(z)$ tienden a $-\infty$ por lo que el valor absoluto de la solución tiende a cero de acuerdo con $(Y6)$.

Recordemos que la solución $u(z)$ es justamente la función que nos genera la transformación conforme, de este modo vemos que esta función tiende a cero, lo cual nos diría que la métrica conforme presenta el mismo comportamiento. Esto podemos interpretarlo como el hecho de que conforme nos acercamos al agujero negro la información de la métrica conforme se desvanece pues justamente es uno de los límites que impone la Relatividad General; dentro del agujero negro perdemos cualquier tipo de información, por lo que hace sentido que $\bar{g} \rightarrow 0$, pues recordemos que $\bar{g} = u^{\frac{4}{m-2}} g$ en la notación de [FP20].

CAPÍTULO 4. PROBLEMA LORENTZIANO DE YAMABE
4.4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

- **Singularidad matemática** (Horizonte de Eventos): Como sabemos la singularidad matemática no representa realmente un problema pues con un cambio de coordenadas podemos deshacernos de ella, justamente las coordenadas de *Kruskal-Szekeres* describen un espacio-tiempo de Schwarzschild sin singularidad matemática por lo que no profundizamos en este caso particular.

- Finalmente cuando $r \rightarrow \infty$ sabemos que el comportamiento del espacio-tiempo de Schwarzschild se asemeja al de Minkowski, por lo que podríamos pensar que el comportamiento de la solución u corresponde a lo estudiado por [CÁ20]. Sin embargo vemos que con el resultado de [FP20] la solución se desvanece ($|u(\mathbf{z})| \rightarrow 0$) pues $\ell_{k,n}(\mathbf{z})$ tiende a ∞ .

Como podemos apreciar del análisis anterior los casos extremos no regresan tanta información útil, y desafortunadamente carecemos de una forma particular para la solución, es decir, no podemos en este punto del estudio decir con exactitud que ocurre con la transformación conforme y por consiguiente con el problema de Yamabe en el espacio-tiempo de Schwarzschild. Esto deja el problema para el caso particular en el espacio-tiempo de Schwarzschild abierto a un trabajo futuro.

Capítulo 5

Conclusiones

Un trabajo a futuro podría orientarse a la búsqueda de una transformación conforme distinta que nos permita usar la *Proposición 3.3* del trabajo de Ginoux ([Gin15], p.20), pues justamente esto abre la puerta al método de solución por separación de variables para el caso de Schwarzschild.

Por el momento, a partir de los resultados de J.C Fernández y O. Palmas podemos esperar la existencia de una solución en primera instancia positiva como fue en este caso de estudio, sin embargo también se puede analizar que ocurre con los demás casos del Teorema 4.3.1.

Sin duda alguna la teoría de transformaciones conformes es de gran utilidad en el análisis matemático de la estructura del espacio-tiempo en sus distintas presentaciones en la Relatividad General, pues nos ayudan a identificar y clasificar horizontes, infinitos y singularidades. Además hacen posible el proceso denominado *compactificación conforme* el cual nos permite generar los *diagramas de Penrose*. [Fre13]

Apéndice A

A.1. Comprobación 3.5 a 3.7

En este apartado desarrollamos brevemente la ecuación 3.5 para comprobar que es equivalente a la ecuación 3.7.

A pesar de que en [Yam60] no se especifica como se obtiene la ecuación 3.7 a partir de 3.5, podemos comprobar que son equivalentes. Utilizando lo estipulado en la ecuación 3.4 para el término $\Delta e^{(\frac{n}{2}-1)f}$ obtenemos el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned}
 \Delta e^{(\frac{n}{2}-1)f} &= g^{\alpha\beta} \partial_\alpha (\partial_\beta e^{(\frac{n}{2}-1)f}) \\
 &= g^{\alpha\beta} \left[\partial_\alpha \left(e^{(\frac{n}{2}-1)f} \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \partial_\beta f \right) \right] \\
 &= g^{\alpha\beta} \left[e^{(\frac{n}{2}-1)f} \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \partial_\alpha (\partial_\beta f) + \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \partial_\beta f \partial_\alpha e^{(\frac{n}{2}-1)f} \right] \\
 &= g^{\alpha\beta} \left[e^{(\frac{n}{2}-1)f} \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \partial_\alpha (\partial_\beta f) + \left(\frac{n}{2} - 1 \right)^2 e^{(\frac{n}{2}-1)f} \partial_\beta f \partial_\alpha f \right],
 \end{aligned}$$

identificamos que el término $g^{\alpha\beta} \partial_\alpha (\partial_\beta f)$ se puede escribir como Δf por 3.4 y obtenemos

$$\Delta e^{(\frac{n}{2}-1)f} = \left(\frac{n}{2} - 1 \right) e^{(\frac{n}{2}-1)f} \Delta f + \left(\frac{n}{2} - 1 \right)^2 e^{(\frac{n}{2}-1)f} g^{\alpha\beta} \partial_\beta f \partial_\alpha f.$$

Y entonces

$$\begin{aligned}
 \frac{4(n-1)}{n-2} e^{(-\frac{n}{2}+1)f} \Delta e^{(\frac{n}{2}-1)f} &= \frac{4(n-1)}{n-2} e^{(-\frac{n}{2}+1)f} \left[\left(\frac{n}{2} - 1 \right) e^{(\frac{n}{2}-1)f} \Delta f + \left(\frac{n}{2} - 1 \right) e^{(\frac{n}{2}-1)f} g^{\alpha\beta} \partial_\beta f \partial_\alpha f \right] \\
 &= \frac{4(n-1)}{n-2} \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \left[\Delta f + \left(\frac{n}{2} - 1 \right) g^{\alpha\beta} \partial_\beta f \partial_\alpha f \right] \\
 &= 2(n-1) \left[\Delta f + \left(\frac{n}{2} - 1 \right) g^{\alpha\beta} \partial_\beta f \partial_\alpha f \right].
 \end{aligned}$$

Podemos observar entonces que

$$\bar{R} = e^{-2f} \left\{ R - 2(n-1) \left[\Delta f + \left(\frac{n}{2} - 1 \right) g^{\alpha\beta} f_{\alpha} f_{\beta} \right] \right\} = e^{-2f} \left[R - \frac{4(n-1)}{n-2} e^{(-\frac{n}{2}+1)f} \Delta e^{(\frac{n}{2}-1)f} \right], \quad (\text{A.1})$$

que es justamente la equivalencia mencionada, sin embargo desconocemos como es que Yamabe obtiene este resultado particular.

Bibliografía

- [Ein05] Albert Einstein. «Zur Elektrodynamik bewegter Körper. (German) [On the electrodynamics of moving bodies]». En: *Annalen der Physik* 322.10 (1905), págs. 891-921. DOI: <http://dx.doi.org/10.1002/andp.19053221004>.
- [Ein16] A. Einstein. «Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie». En: *Annalen der Physik* 354.7 (ene. de 1916), págs. 769-822. DOI: [10.1002/andp.19163540702](https://doi.org/10.1002/andp.19163540702).
- [YB55] K. Yano y S. Bochner. «Curvature and Betti Numbers». En: *The Mathematical Gazette* 39.327 (1955), págs. 69-69. DOI: [10.1017/S0025557200030436](https://doi.org/10.1017/S0025557200030436).
- [Yam60] Hidehiko Yamabe. «On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds». En: *Osaka Mathematical Journal* 12.1 (1960), págs. 21-37.
- [Aub76] Thierry Aubin. «Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev». En: *Journal of Differential Geometry* 11.4 (1976), págs. 573-598. DOI: [10.4310/jdg/1214433725](https://doi.org/10.4310/jdg/1214433725). URL: <https://doi.org/10.4310/jdg/1214433725>.
- [SY79] Richard M. Schoen y Shing-Tung Yau. «On the proof of the positive mass conjecture in general relativity». En: *Communications in Mathematical Physics* 65 (1979), págs. 45-76.
- [SY81] Richard M. Schoen y Shing-Tung Yau. «Proof of the positive mass theorem. II». En: *Communications in Mathematical Physics* 79 (1981), págs. 231-260.
- [Wit81] Edward Witten. «A new proof of the positive energy theorem». En: *Communications in Mathematical Physics* 80 (1981), págs. 381-402.
- [ONe83] Barrett O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*. Academic Press, 1983.
- [Sch84] Richard Schoen. «Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature». En: *Journal of Differential Geometry* 20.2 (1984), págs. 479-495. DOI: [10.4310/jdg/1214439291](https://doi.org/10.4310/jdg/1214439291). URL: <https://doi.org/10.4310/jdg/1214439291>.
- [Par87] John M. Lee Thomas P. Parker. «The Yamabe Problem». En: *Bulletin (New Series) of The American Mathematical Society* 17.1 (1987), págs. 36-91.
- [Sch99] Karl Schwarzschild. «“Golden Oldie”: On the Gravitational Field of a Mass Point According to Einstein’s Theory». En: *General Relativity and Gravitation* 35 (1999), págs. 951-959.
- [BS05] Antonio N. Bernal y Miguel Sánchez. «Smoothness of Time Functions and the Metric Splitting of Globally Hyperbolic Spacetimes». En: *Communications in Mathematical Physics* 257.1 (abr. de 2005), págs. 43-50. ISSN: 1432-0916. DOI: [10.1007/s00220-005-1346-1](http://dx.doi.org/10.1007/s00220-005-1346-1). URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s00220-005-1346-1>.
- [BS06] Antonio N. Bernal y Miguel Sánchez. «Further Results on the Smoothability of Cauchy Hypersurfaces and Cauchy Time Functions». En: *Letters in Mathematical Physics* 77.2 (jul. de 2006), págs. 183-197. ISSN: 1573-0530. DOI: [10.1007/s11005-006-0091-5](http://dx.doi.org/10.1007/s11005-006-0091-5). URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s11005-006-0091-5>.

- [San08] Miguel Sanchez. *Some remarks on Causality Theory and Variational Methods in Lorentzian manifolds*. 2008. arXiv: 0712.0600 [gr-qc].
- [Fra09] Pfäffle Frank. «Lorentzian Manifolds». En: *Quantum Field Theory on Curved Spacetimes. Concepts and Mathematical Foundations*. Ed. por Klaus Fredenhagen Christian Bär. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009. Cap. 2.
- [Sch09] Bernard Schutz. *A First Course in General Relativity*. 2.^a ed. Cambridge University Press, 2009. DOI: 10.1017/CB09780511984181.
- [MG10] Thomas Mueller y Frank Grave. *Catalogue of Spacetimes*. 2010. arXiv: 0904.4184 [gr-qc].
- [Fre13] (<https://physics.stackexchange.com/users/6178/frederic-brüner>) Frederic Brüner. *What is the importance of conformal transformations in general relativity?* Physics Stack Exchange. URL:<https://physics.stackexchange.com/q/88321> (version: 2013-11-29). 2013. eprint: <https://physics.stackexchange.com/q/88321>. URL: <https://physics.stackexchange.com/q/88321>.
- [Gin15] Nicolas Ginoux. «About the Lorentzian Yamabe problem». En: *Geometriae Dedicata* 174.1 (2015), págs. 287-309. DOI: 10.1007/s10711-014-0018-8. URL: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01265984>.
- [Cas19] Gerardo F. Torres del Castillo. *Differentiable Manifolds. A Theoretical Physics Approach*. 2.^a ed. Springer, 2019.
- [CÁ20] Giovanni de la Cruz Avila y María de los Ángeles Sandoval Romero. «Problema de Yamabe en el espacio-tiempo de Minkowski». 2020.
- [FP20] Juan Carlos Fernández y Oscar Palmas. *An ODE reduction method for the semi-Riemannian Yamabe problem on space forms*. 2020. arXiv: 2008.07041 [math.AP].
- [Wik21] Wikipedia, the free encyclopedia. *Schwarzschild metric*. [Online; accessed December 12, 2021]. 2021. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Schwarzschild_metric#/media/File:Flamm.jpg.