



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Estudio de la teoría unificada de
polarización y coherencia de la luz

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Maestro en Física Aplicada

por

Emmanuel Francisco Bautista

asesorado por

Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco

Puebla Pue.
4 de marzo del 2021



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Estudio de la teoría unificada de
polarización y coherencia de la luz

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Maestro en Física Aplicada

por

Emmanuel Francisco Bautista

asesorado por

Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco

Puebla Pue.
4 de marzo del 2021

Título: Estudio de la teoría unificada de polarización y coherencia de la luz

Estudiante: EMMANUEL FRANCISCO BAUTISTA

COMITÉ

Dra. Marcela Maribel Méndez Otero
Presidente

Dr. Miguel Ángel Olvera Santamaría
Secretario

Dr. Carlos Ignacio Robledo Sánchez
Vocal

Dr. Cruz Meneses Fabián
Suplente

Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco
Asesor

Agradecimientos

A mis padres, por su apoyo incondicional, comprensión y cariño.

A mi asesor, el Dr. M. Luis Arroyo Carrasco, por compartirme parte de su experiencia en la física y por su dirección y apoyo en el desarrollo de este proyecto de tesis.

A la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP, por aceptarme en el programa de Maestría en Física Aplicada, y a CONACYT, por el apoyo económico que me brindó.

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	VII
Introducción	IX
1. Marco teórico	1
1.1. Elementos de probabilidad y procesos estocásticos	1
1.1.1. Conceptos de probabilidad	1
1.1.2. Procesos estocásticos y funciones de correlación	5
1.2. Señales analíticas	10
1.3. Ecuaciones de difracción	12
1.3.1. Principio de Huygens-Fresnel	12
1.3.2. Difracción de Fraunhofer	13
2. Coherencia de segundo orden	15
2.1. Coherencia de segundo orden en el dominio espacio-tiempo	15
2.1.1. Función compleja de coherencia de segundo orden	15
2.1.2. El grado complejo de coherencia y la ley de interferencia	16
2.1.3. Propagación de las funciones de correlación	20
2.1.4. Teorema de Van Cittert-Zernike	23
2.2. Coherencia de segundo orden en el dominio espacio-frecuencia	25
2.2.1. Teorema de Wiener-Khintchine	25
2.2.2. Representación de modos coherentes	26
2.2.3. El grado espectral de coherencia y la ley espectral de interferencia	27
2.2.4. Propagación de la función de densidad espectral cruzada	29
2.2.5. Ventajas del dominio espacio-frecuencia	29
3. Polarización de la luz	31
3.1. Formalismos de polarización	31
3.1.1. Propiedades de una onda electromagnética plana	31
3.1.2. Polarización de una onda armónica plana	32
3.1.3. Parámetros de Stokes y la esfera de Poincaré	34
3.1.4. Vectores de Jones	35
3.1.5. Matrices de Mueller	35
3.2. Polarización de haces electromagnéticos aleatorios	36
3.2.1. Matriz de polarización y coeficiente de correlación	36
3.2.2. Grado de polarización	39
4. Teoría unificada de polarización y coherencia	41
4.1. Formulación de la teoría unificada	41
4.1.1. Formulación principal	41
4.1.2. Similitud estadística	44
4.1.3. Tensores de correlación	44

4.2. Medición de las entradas de la matriz de densidad espectral cruzada	44
4.3. Cambios inducidos por correlación	46
4.3.1. Propagación de la matriz de densidad espectral cruzada	46
4.3.2. Parámetros generalizados de Stokes	47
4.4. Expresiones alternativas para el grado espectral de coherencia	47
5. Discusión de resultados	49
6. Conclusiones	51
Bibliografía	55

Resumen

Las fuentes de luz extendidas se conforman por una gran cantidad de átomos, cada uno de los cuales puede emitir ondas de luz con diferentes fases y frecuencias dentro de cierto rango. Igualmente, la polarización puede variar y ser diferente para cada fuente puntual. Fenómenos como la emisión espontánea y la variación de temperatura ocasionan variaciones aleatorias en las características de la luz, tanto en el plano de la fuente como a cierta distancia de ella. Por lo anterior, la luz puede tratarse como una señal aleatoria y ser estudiada de forma estadística.

En este proyecto de tesis se presenta una revisión de los modelos principales de polarización y coherencia de segundo orden, así como de herramientas de la óptica estadística. Lo anterior con el fin de establecer un marco teórico para el estudio de los desarrollos que permitieron el crecimiento de la teoría de coherencia óptica y, posteriormente, condujeron a la teoría unificada.

La coherencia óptica emplea, en gran medida, funciones y matrices de correlación, las cuales permiten describir correlaciones, dependencias o relaciones estadísticas, entre componentes escalares de campo eléctrico. En este trabajo se identifican los conceptos elementales de probabilidad y procesos estocásticos necesarios para definir dichas funciones y se asocian con las características del campo eléctrico y su proceso de medición.

Por la naturaleza aleatoria de la luz, los fenómenos de polarización y coherencia pueden ser descritos como manifestaciones de las correlaciones entre fluctuaciones de los haces de luz. Ésta es la idea subyacente a la teoría unificada de polarización y coherencia, cuyo modelo principal es una matriz de correlación: la matriz de coherencia mutua, en el espacio-tiempo, o la matriz de densidad espectral cruzada, en el espacio-frecuencia.

Introducción

Dos temas de interés en óptica son la polarización y la coherencia de la luz. Desde un punto de vista elemental, la polarización describe la evolución del plano sobre el cual oscila el campo eléctrico (o magnético) de una onda de luz. Desde un enfoque más realista, se considera que un haz de luz está formado por una gran cantidad de ondas cuyos planos de polarización evolucionan de forma aleatoria, de modo que el estado de polarización en un punto del haz no puede ser descrito de forma determinista sino estadísticamente.

Por su parte, la teoría de coherencia óptica estudia, de manera estadística, las correlaciones entre n ondas de un campo de luz. Es decir, dadas n vibraciones ópticas, definidas en distintos puntos del espacio y en distintos instantes de tiempo, la teoría de coherencia busca determinar si estas vibraciones son estadísticamente similares y hasta qué grado lo son. Al considerar a las ondas electromagnéticas como señales aleatorias, la teoría de coherencia óptica y las comunicaciones comparten las mismas herramientas de la teoría de probabilidad y de procesos estocásticos ([1], [2]). Goodman, como lo menciona en [3], considera que la introducción de conceptos y herramientas del análisis de Fourier y de la teoría de comunicaciones en la óptica ha sido uno de los eventos más importantes en la historia de esta última.

La teoría de procesos estocásticos es importante en la óptica estadística porque las variables ópticas evolucionan con el tiempo de manera aleatoria. Para identificar variables físicas como procesos estocásticos es conveniente revisar las diferentes interpretaciones de éstos ([4], [5], [6], [7]).

Si bien en un principio fueron estudiadas de manera independiente, se ha mostrado que la polarización y la coherencia son manifestaciones de un mismo fenómeno físico, a saber, de las correlaciones entre fluctuaciones de los haces de luz, siendo ésta la tesis de la teoría unificada [8]. Esta última es el resultado de una larga e interesante evolución de la óptica estadística.

En [9] Wolf establece una analogía: menciona que la mecánica se desarrolló a partir de las leyes de Newton hasta llegar a la mecánica estadística y que, en una forma análoga, la óptica comenzó con las ecuaciones de Maxwell y evolucionó hacia la óptica estadística. En ambos casos, el enfoque estadístico está estrechamente relacionado con el enfoque cuántico. La coherencia óptica es la parte principal de la óptica estadística.

Si bien el desarrollo de la óptica estadística fue más lento que el de su contraparte en mecánica, la historia y cantidad de trabajos de la primera han sido tan ricas como las de la segunda. El estudio de las correlaciones de la luz ha evolucionado junto con, y en buena parte gracias a, el estudio del fenómeno de interferencia y el experimento de la doble rendija. Es bien sabido que el experimento de Young, como también se le conoce, contribuyó al establecimiento de la naturaleza ondulatoria de la luz y la teoría de interferencia. Más aún, ha estado presente en una gran cantidad de desarrollos de la óptica estadística como explica Wolf en [10].

La parte determinista de la óptica considera que la luz se compone de ondas y las considera como funciones bien conocidas en todo momento. Estas consideraciones permitieron el nacimiento y desarrollo de la etapa inicial de la óptica moderna. Una parte del estudio de la propagación de la luz fue comenzada por C. Huygens. Es bien conocido el principio de Huygens en la teoría de difracción. Por su parte, las investigaciones de Young, Fresnel y Arago sentaron las bases de la teoría de interferencia y ayudaron a entender la transversalidad de las ondas de luz. Descubrimientos de igual importancia fueron los debidos a G. G. Stokes, por ejemplo, la descripción del estado de polarización por medio de cuatro parámetros que llevan su nombre. Stokes también halló, con ayuda de sus parámetros, que un haz de luz puede representarse matemáticamente como la superposición de dos haces, uno completamente polarizado y

otro completamente no polarizado [10]. Otra contribución importante se debe a Michael Faraday, dado que él notó que la orientación del plano de vibración se modificaba con la aplicación de un campo magnético. Esto se conoce como el efecto Faraday [11].

Sin embargo, la naturaleza aleatoria de la luz fue considerada seriamente hasta que se investigaron las correlaciones en ella. El primer intento por determinar correlaciones ópticas fue realizado por E. Verdet, quien se preguntó por la mínima distancia a través de la cual dos vibraciones de luz solar *marchaban al unísono*. Actualmente se sabe que dos oscilaciones cumplen esta relación si son estadísticamente similares lo que, a su vez, es equivalente a que el coeficiente de correlación entre ambas sea unimodular ([12], [13]). De alguna manera puede decirse que Albert Michelson también contribuyó al inicio de la coherencia óptica, puesto que se dedicó a establecer métodos para hacer mediciones de cantidades estrechamente relacionadas con las correlaciones de luz. Sin embargo, como gran parte de la teoría y conceptos no se habían establecido, Michelson no se dio cuenta de que medía correlaciones ópticas. Fue necesario, además del desarrollo de la teoría de probabilidad y procesos aleatorios, que ésta se aplicara al estudio de la luz.

Fue Norbert Wiener quien introdujo las matrices de correlación en la óptica y las empleó para representar estados de polarización de la luz. Aunque Wiener las llamó *matrices de coherencia* en la actualidad son más conocidas como *matrices de polarización*. Más tarde, Frits Zernike las empleó para describir las propiedades de coherencia de la luz y, en 1938, publicó un artículo, [14], en el que introdujo muchos de los conceptos ampliamente usados en la óptica estadística de la actualidad: definió la intensidad mutua como la correlación estadística de las vibraciones del campo en dos puntos distintos del espacio. Definió también el grado de coherencia de la luz como una medida cuantitativa de dicha correlación y estableció que debía ser igual a la visibilidad observada en el patrón de franjas del experimento de Young. Generalizando este concepto, obtuvo el grado complejo de coherencia. También presentó el ahora conocido como teorema de Van Cittert-Zernike (5 años antes Van Cittert obtuvo un caso particular del teorema). Dicho teorema permite explicar, entre otras cosas, que la luz generada por una fuente incoherente, al propagarse, puede adquirir cierto grado de coherencia. En el mismo artículo Zernike dedujo una ley de propagación para la intensidad mutua.

Posteriormente, Wolf notó que el teorema de Van Cittert-Zernike tenía una estructura matemática similar a la distribución de luz de una onda esférica difractada por una rendija en una pantalla oscura. Wolf también observó similitud entre la ley de Zernike para la propagación de intensidad mutua y una fórmula basada en el principio de Huygens. Las observaciones anteriores llevaron a Wolf a generalizar la función de intensidad mutua establecida por Zernike, la cual expresa la correlación del campo en dos posiciones distintas en un mismo instante de tiempo. Wolf definió en [15] 1954 y en [16] 1955 la función de coherencia mutua como la correlación del campo en dos posiciones distintas y dos tiempos distintos. También en [16], Wolf mostró que la función de coherencia mutua satisface la ecuación de onda con respecto a ambas posiciones y a la diferencia de tiempos. Esto le permitió explicar que las similitudes entre las fórmulas de Zernike y las ecuaciones de difracción se debían a que la ley de propagación de intensidad mutua y el teorema de Van Cittert-Zernike son soluciones aproximadas de la ecuación de onda para la función de coherencia mutua, de la misma forma en que el principio de Huygens-Fresnel lo es para la ecuación de onda para campo electromagnético. En analogía con el trabajo de Zernike, Wolf definió el grado complejo de coherencia en función de la función de coherencia mutua y, en [17] 1959, definió el grado de polarización en términos de las matrices de polarización introducidas por Wiener.

La formulación iniciada por Zernike se conoce como la teoría de coherencia en el dominio espacio-tiempo. Más tarde surgió un enfoque distinto de la misma teoría que proporcionó información nueva sobre la coherencia. A este nuevo enfoque se le conoce como la teoría de coherencia en el dominio espacio-frecuencia. Para muchos conceptos del dominio espacio-tiempo fue posible definir su contraparte en el nuevo dominio, como la función de densidad espectral y el grado espectral de coherencia, por ejemplo. Un resultado interesante obtenido en el dominio espacio-frecuencia ha sido la representación de modos coherentes, según la cual es posible representar la función de densidad espectral cruzada como una sumatoria de modos completamente coherentes pero mutuamente no correlacionados ([18], [19]).

En 2003 Wolf presentó, en una serie de artículos, su propuesta para una teoría unificada de polarización y coherencia. En [20] estableció que ambos fenómenos podían derivarse de un modelo único: la matriz de densidad espectral cruzada de campo eléctrico. Así, el grado espectral de polarización, el espectro y el grado de polarización podían ser calculados en función de esta matriz. Sin embargo, como ésta varía con

la propagación del haz, entonces el grado espectral de polarización, el espectro y el grado de polarización sufren los, así llamados, cambios inducidos por correlación. Esto fue mostrado por Wolf en [21], mientras que en [22], junto con Roychowdhury, sugirió un arreglo experimental basado en el interferómetro de Young para determinar los elementos de la matriz de densidad espectral cruzada.

La teoría de coherencia y la teoría unificada han proporcionado herramientas que prometen ser muy rentables tanto en teoría como en aplicaciones. Por ejemplo, un gran beneficio para la teoría es que, al tomar en cuenta algunas características estadísticas del campo, las matrices y tensores de correlación complementan las ecuaciones de Maxwell [9]. Por otro lado, en [10] Wolf menciona algunas aplicaciones de la teoría unificada, las cuales consisten en el estudio de la propagación de haces electromagnéticos estocásticos en atmósferas turbulentas, en fibras ópticas y en tejidos humanos. Una lista más profusa de aplicaciones de la teoría de coherencia puede ser consultada en [23].

El desarrollo de este proyecto tiene como finalidad estudiar la formulación de la teoría unificada de polarización y coherencia de la luz. Con este propósito, se revisarán los modelos principales de polarización y coherencia, junto con las herramientas de la teoría de probabilidad y de señales aleatorias necesarias en la óptica estadística. Para esto será necesario revisar algunas contribuciones realizadas en el terreno de la óptica y que condujeron la evolución de la coherencia óptica. Si bien existen propuestas diferentes para definir el grado espectral de coherencia ([24], [25], [26] y [27]), una buena parte de las referencias citadas en este trabajo consiste en publicaciones de Emil Wolf y fuentes que citan resultados obtenidos por él. Estas referencias brindan un panorama amplio de las ideas principales de la teoría de coherencia.

En el capítulo 1 se ofrece un panorama de los fundamentos necesarios para abordar la teoría unificada. La sección 1.1 expone conceptos de probabilidad y de procesos estocásticos (o aleatorios) sobre los cuales se basa la teoría de coherencia. En gran parte de la teoría de este trabajo se hace uso de funciones de correlación. Es por eso que en la subsección 1.1.1 se presenta una secuencia de conceptos elementales necesarios para construir el concepto de correlación, mientras que en la subsección 1.1.2 se explican algunas interpretaciones, clases y características de procesos estocásticos que permiten definir dos tipos especiales de funciones de correlación: auto-correlación y correlación cruzada. En la sección 1.2 se define el concepto de señal analítica compleja y se explica cómo se construye a partir de su señal real asociada. La sección 1.3 comenta brevemente la formulación y el significado del principio de Huygens-Fresnel, dado que éste es mencionado en el capítulo 2 en relación al teorema de Van Cittert-Zernike. Así mismo se habla sobre la difracción de Fraunhofer.

La teoría de coherencia de segundo orden se presenta en el capítulo 2 desde dos enfoques complementarios: en el dominio espacio-tiempo y en el dominio espacio-frecuencia. En la sección 2.1 se justifica el uso de ensambles de procesos aleatorios para describir el campo eléctrico en el espacio, se introducen las funciones de correlación para describir las relaciones estadísticas entre fluctuaciones de campo y se define la más general de ellas: la función compleja de coherencia mutua de segundo orden. Se revisan también los casos especiales de ésta: intensidad mutua, función de auto-coherencia e intensidad ordinaria. En conexión con el experimento de la doble rendija se define el grado complejo de coherencia y, con ayuda de éste se escribe la forma escalar de ley de interferencia para haces estadísticamente estacionarios. También se construye el teorema de Van Cittert-Zernike y se derivan las fórmulas principales de propagación de las funciones de coherencia. En la sección 2.2 se aborda la coherencia en el dominio espacio-frecuencia. Se comienza definiendo ensambles de componentes espectrales de campo eléctrico así como las funciones de densidad espectral y de densidad espectral cruzada. También, por medio del teorema de Wiener-Khinchine, se muestran las relaciones que estas dos funciones guardan con las funciones de auto-coherencia y de coherencia mutua, respectivamente. Análogamente al primer dominio, se define el grado espectral de coherencia y con su ayuda se obtiene el caso escalar de la ley espectral de interferencia. Por último se muestra que la función de densidad espectral cruzada satisface la ecuación de Helmholtz y se listan algunas ventajas de trabajar en el dominio espacio-frecuencia.

El capítulo 3 expone los formalismos principales para describir la polarización de la luz. La sección 3.1, se ocupa de los modelos para describir la luz completamente polarizada: se muestra que la relación entre las componentes rectangulares del campo eléctrico y magnético de una onda plana es, en general, elíptica. En seguida se explica cómo, con ayuda de los parámetros de Stokes, es posible resumir las propiedades de la elipse de polarización. También se dedican algunos párrafos para explicar que a cada conjunto de valores de los parámetros de Stokes le corresponde un punto en la esfera de Poincaré y cómo se expresa

esta correspondencia. Los vectores de Jones y las matrices de Mueller se presentan al final de esta sección. Por su parte, la descripción de la luz parcialmente polarizada se trata en la sección 3.2. Aquí se explica que las correlaciones entre las componentes cartesianas del campo eléctrico en una posición del espacio determinan el estado de polarización de la luz y que éste puede ser descrito completamente por medio de la matriz de polarización (del mismo tipo que las introducidas por Wiener). Se muestra también que un haz parcialmente polarizado puede ser considerado como la combinación de dos haces con estados de polarización extremos y opuestos y, por último, se define el grado de polarización.

El capítulo 4 está dedicado a la teoría unificada de polarización y coherencia de la luz. En la sección 4.1 se presenta su formulación general: las expresiones del grado espectral de coherencia y del grado de polarización en función de la matriz de densidad espectral cruzada. También se deriva la ley espectral de interferencia para haces electromagnéticos y se menciona la relación entre el concepto de similitud estadística y la coherencia y polarización completas. En la sección 4.2 se describe el arreglo experimental propuesto por Wolf para determinar los elementos de la matriz de densidad espectral cruzada. La sección 4.3 habla de las características de un haz aleatorio que cambian como consecuencia de la propagación del mismo, mientras que la sección 4.4 presenta algunas propuestas alternativas para definir el grado espectral de coherencia tales que tomen en cuenta las entradas no diagonales de la matriz de densidad espectral cruzada.

Capítulo 1

Marco teórico

1.1. Elementos de probabilidad y procesos estocásticos

En esta sección se discuten algunos de los conceptos elementales de la probabilidad y de los procesos estocásticos que, a su vez, conforman la base del estudio de la teoría de coherencia.

1.1.1. Conceptos de probabilidad

Cuando se realiza un experimento bajo un conjunto determinado de condiciones se sabe que se obtendrá un resultado. Si el resultado se conoce a priori con toda certeza, el experimento es completamente determinista. Sin embargo, algunos experimentos pueden arrojar alguno de varios resultados bajo el mismo conjunto de condiciones. Es decir, bajo el mismo conjunto de condiciones el experimento tiene asociado un conjunto de resultados posibles. A cada uno de los resultados posibles de un experimento se le conoce como evento. Cuando no es posible saber cuál de todos sus resultados posibles arrojará un experimento se dice que éste es aleatorio.

Similarmente, un evento puede ser:

- seguro: si se sabe con certeza que siempre ocurrirá,
- imposible: si se sabe con certeza que nunca ocurrirá, o
- aleatorio: si no es posible saber si ocurrirá o no de forma anticipada a la realización del experimento.

El conjunto de todos los eventos posibles de un experimento aleatorio puede ser finito o infinito. De hecho, la teoría de probabilidad hace uso de la teoría de conjuntos para describir las relaciones entre eventos, así como sus propiedades. El primer conjunto a considerar es el de eventos elementales (espacio). De esta forma es posible definir subconjuntos del espacio, asociarlos con otros eventos y manipularlos con las mismas operaciones que se emplean para los conjuntos. Así, si Ω es un conjunto de eventos elementales y A, B son eventos en Ω , entonces:

- $A + B = A \cup B$ es el evento que se verifica cuando ocurren sólo A , sólo B o los dos simultáneamente,
- $A, B = A \cap B$ es el evento que se verifica cuando ocurren A y B de forma estrictamente simultánea,
- \bar{A} es todo el espacio Ω excepto A .
- $A - B$ es el evento que se verifica cuando ocurre A pero no B .

En este enfoque conjuntista, el conjunto Ω y el evento imposible se asocian con el universo y el vacío de la teoría de conjuntos, respectivamente. Por esta razón el evento imposible también se denota como \emptyset .

Nota: En los textos de probabilidad se emplean las notaciones $A + B$ (y no $A \cup B$) para la unión de eventos y A, B (y no $A \cap B$) para la intersección. En este trabajo se seguirá la misma convención.

Las leyes de la probabilidad pueden establecerse de forma axiomática. Sea Ω un conjunto de eventos elementales y sea \mathcal{F} un conjunto de subconjuntos de Ω de manera que \mathcal{F} cumpla con las propiedades de un campo de Borel de eventos ([5], sec. 8, p. 47).

A1 Para cada evento A que pertenece a \mathcal{F} , existe un número no negativo asociado a A , $P(A)$, llamado la probabilidad de A .

A2 $P(\Omega) = 1$.

A3 (Axioma de adición). Sean A_1, A_2, \dots, A_n eventos en \mathcal{F} mutuamente excluyentes a pares. Luego:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Existe un par de axiomas más que no es necesario exponer aquí, pero pueden ser consultados en [5]. A la terna $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ se le conoce como espacio de probabilidad.

Que dos eventos sean mutuamente excluyentes significa que su intersección es el vacío. En algunos experimentos o fenómenos los resultados o eventos son números y mutuamente excluyentes. Por ejemplo, al medir alguna variable física clásica se sabe que su valor instantáneo puede estar en cualquier punto dentro de un rango continuo, pero al efectuarse la medición se obtiene un único valor en cada instante (no es posible obtener más de un valor por medición). Puede verse fácilmente que en este caso los resultados del experimento o eventos son números y, además, mutuamente excluyentes.

A la probabilidad $P(A, B)$ se le denomina probabilidad conjunta de A y B . Es posible intersectar más de dos eventos, por lo que existe la probabilidad conjunta de n eventos: $P(A_1, A_2, \dots, A_n)$.

Usualmente es útil asociar una etiqueta a cada evento del espacio de probabilidad. Si la etiqueta es un número, entonces existe una función que mapea del espacio de probabilidad a un conjunto de números. A esta función se le conoce como variable aleatoria, la cual puede ser discreta o continua. Además, dada una variable aleatoria existe una función de densidad de probabilidad asociada a ella.

Densidad de probabilidad

Dada la variable aleatoria X , considérese la función $F_X(x) = \text{probabilidad}(X \leq x)$. Ésta es la función acumulativa de distribución de probabilidad y tiene propiedades interesantes. Por ejemplo ([2]):

- F_X es una función continua de x cuando X es una variable aleatoria continua.
- Si $x \rightarrow -\infty$, entonces ningún valor de X puede ser menor que x . Por lo tanto: $F(-\infty) = 0$.
- Si $x \rightarrow \infty$, entonces cualquier valor de X puede ser menor que x . Por lo tanto: $F(\infty) = 1$.
- Si $x_1 \leq x_2$, entonces $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$. Esto significa que $F_X(x)$ es creciente y puede demostrarse como sigue.

Dado que $x_1 \leq x_2$, si $X \leq x_2$, pueden ocurrir dos eventos mutuamente excluyentes: que $X \leq x_1$ o que $x_1 < X \leq x_2$. Luego, por el axioma A3 de adición:

$$F_X(x_2) = F_X(x_1) + \text{probabilidad}(x_1 < X \leq x_2),$$

sin embargo, como todas las probabilidades son positivas se deduce que $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$.

La función de densidad de probabilidad se define como

$$p_X(x) \equiv \frac{dF_X(x)}{dx}, \tag{1.1}$$

o de forma equivalente

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(x) dx, \tag{1.2}$$

puesto que $F_X(-\infty) = 0$. De manera similar, como $F_X(\infty) = 1$, se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)dx = 1, \quad (1.3)$$

la cual, además de ser consistente con el axioma A2, es una propiedad que debe satisfacer cada función de densidad de probabilidad. Cuando se tiene claro a cuál variable aleatoria corresponde la densidad de probabilidad, se omite el subíndice: $p_X(x) = p(x)$. Puesto que $p(x)$ se define como la derivada de una función creciente, se sigue que $p(x)$ siempre es una cantidad positiva.

Por el teorema fundamental del cálculo

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x)dx = F_X(x_2) - F_X(x_1) = \text{probabilidad}(x_1 < X \leq x_2),$$

es decir, la integral de $p_X(x)$ en un intervalo es la probabilidad de hallar a X en ese intervalo (la cantidad $p(x)dx$ es la probabilidad de obtener el valor de x en el intervalo dx).

Es posible generalizar ([1], [2]) el concepto de densidad de probabilidad para el caso de más de una variable aleatoria. Así, si x_1, x_2, \dots, x_n son variables aleatorias, $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es su función de densidad de probabilidad conjunta, la cual también cumple con la propiedad

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2, \dots, x_n)dx_1dx_2\dots dx_n = 1. \quad (1.4)$$

$p(x_1, x_2, \dots, x_n)dx_1dx_2\dots dx_n$ es la probabilidad de que se obtenga x_1 en dx_1 , x_2 en dx_2 , ..., x_n en dx_n ; ésta es una probabilidad de que ocurra una intersección de eventos, es decir, una probabilidad conjunta.

Si las variables aleatorias x_1, x_2, \dots, x_n son estadísticamente independientes, entonces

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = p(x_1)p(x_2)\dots p(x_n). \quad (1.5)$$

Valor esperado

El valor esperado o promedio $\langle y \rangle$ de una variable aleatoria discreta $y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ se define como

$$\langle y \rangle = \sum_i^n y_i P(y_i), \quad (1.6)$$

donde y_i es un valor de y y $P(y_i)$ es su probabilidad.

De forma similar es posible definir el valor esperado $\langle x \rangle$ de una variable aleatoria continua x como

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx. \quad (1.7)$$

De la misma forma en que se han introducido aquí, a lo largo de todo este trabajo, los paréntesis angulares $\langle \rangle$ indicarán la operación de valor esperado o promedio.

Momento

Sea x una variable aleatoria y $p(x)$ su densidad de probabilidad. Su momento de orden r se define como

$$\nu_r = \langle x^r \rangle = \int x^r p(x)dx. \quad (1.8)$$

El momento de primer orden ($r = 1$) es el valor esperado.

La cantidad $\Delta x = x - \langle x \rangle$ se denomina desviación. El momento de orden r de la desviación se conoce como el momento central de orden r y se expresa como

$$\mu_r = \langle (\Delta x)^r \rangle = \int (\Delta x)^r p(x)dx. \quad (1.9)$$

El primer momento central ($r = 1$) es cero por la forma en que se define según la ecuación anterior.

Varianza y covarianza

Además del valor esperado, el segundo momento central

$$\mu_2 = \langle (\Delta x)^2 \rangle = \int (\Delta x)^2 p(x) dx \quad (1.10)$$

es una de las cantidades características más importantes de una variable aleatoria y recibe el nombre de varianza. Una cantidad asociada a la varianza es la desviación estándar σ , la cual es definida como

$$\sigma^2 = \mu_2. \quad (1.11)$$

Si ahora se consideran dos variables aleatorias x_i, x_j , con la densidad de probabilidad conjunta $p(x_i, x_j)$, se define la covarianza de x_i y x_j como el valor esperado del producto de sus desviaciones, es decir,

$$\mu_{ij} = \langle (\Delta x_i)(\Delta x_j) \rangle = \int \int \Delta x_i \Delta x_j p(x_i, x_j) dx_i dx_j, \quad (1.12)$$

donde $i \neq j$. El concepto de varianza es un caso especial del concepto de covarianza. Es decir, μ_{ii} ($i = j$) es la varianza de x_i . La covarianza proporciona una medida de la correlación o dependencia entre dos variables aleatorias, como se explica en [2].

Al desarrollar la expresión de covarianza se obtiene que

$$\begin{aligned} \mu_{ij} &= \langle (x_i - \langle x_i \rangle)(x_j - \langle x_j \rangle) \rangle = \langle x_i x_j - x_i \langle x_j \rangle - x_j \langle x_i \rangle + \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle \rangle \\ &= \langle x_i x_j \rangle - \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle - \langle x_j \rangle \langle x_i \rangle + \langle \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle \rangle \end{aligned}$$

y dado que $\langle x_i \rangle$ y $\langle x_j \rangle$ son constantes, resulta:

$$\mu_{ij} = \langle x_i x_j \rangle - \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle. \quad (1.13)$$

De la ecuación anterior se concluye que no existirá correlación entre x_i y x_j ($\mu_{ij} = 0$) cuando ocurra que $\langle x_i x_j \rangle = \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle$.

La covarianza de x_i y x_j , la varianza de x_i y la varianza de x_j satisfacen la forma integral de la desigualdad de Schwarz ([1]):

$$|\mu_{ij}|^2 \leq \mu_{ii} \mu_{jj} = \sigma_i^2 \sigma_j^2. \quad (1.14)$$

Coefficiente de correlación

El coeficiente de correlación ρ_{ij} es el valor normalizado de la covarianza y se define como

$$\rho_{ij} = \frac{\mu_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}. \quad (1.15)$$

A partir de la desigualdad de Schwarz para covarianza es posible ver que se cumple $|\mu_{ij}| \leq \sigma_i \sigma_j$, lo que es equivalente a $-\sigma_i \sigma_j \leq \mu_{ij} \leq \sigma_i \sigma_j$. Como además σ_i y σ_j son mayores que cero, se concluye que

$$-1 \leq \rho_{ij} \leq 1. \quad (1.16)$$

Correlación

Sean x_i, x_j dos variables aleatorias y $p(x_i, x_j)$ su densidad de probabilidad conjunta. Luego, la correlación Γ_{ij} de ambas está dada por la expresión

$$\Gamma_{ij} = \langle x_i x_j \rangle = \int \int x_i x_j p(x_i, x_j) dx_i dx_j \quad (1.17)$$

y también es una medida de la dependencia entre ellas ([2]). De acuerdo a las ecuaciones (1.13) y (1.17), la covarianza puede expresarse en términos de la correlación, es decir

$$\mu_{ij} = \Gamma_{ij} - \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle \quad (1.18)$$

y, de acuerdo a (1.13) y (1.18), cuando x_i y x_j tengan promedios nulos, su covarianza será igual a su correlación. Además, se dice que las variables x_i y x_j son ortogonales si

$$\Gamma_{ij} = 0. \quad (1.19)$$

1.1.2. Procesos estocásticos y funciones de correlación

A continuación se presentan algunas definiciones e interpretaciones del concepto de proceso estocástico (o aleatorio) útiles para describir variables físicas que evolucionan en el tiempo de forma aleatoria.

En [4] se define un proceso estocástico como una familia de variables aleatorias $\{X(t), t \in T\}$ con espacio parametral T y espacio de estados Z , siendo éste el conjunto de valores que pueden tomar las variables aleatorias $X(t)$. De acuerdo a esta definición habrá tantas variables aleatorias como elementos del espacio parametral; si T es continuo, entonces habrá infinitas variables aleatorias. Dicho de otra forma, los elementos de T permiten etiquetar todas las variables aleatorias del proceso estocástico ([1]). En óptica estadística, como en muchas otras cuestiones de la física, se considera que el espacio parametral T es un intervalo de tiempo y, por lo tanto, un subconjunto de los reales.

Otros autores ofrecen una definición más general. En [5] y [6] se define a un proceso estocástico como una función de dos variables $X(t, \omega)$ en la que $t \in T$ y $\omega \in \Omega$ (recordar, por la subsección 1.1.1, que Ω denota el conjunto de eventos elementales de alguna variable aleatoria). Fijando cualquiera de los dos argumentos de la función se obtienen dos interpretaciones. Al fijar t se obtiene una función de ω y, por lo tanto, una variable aleatoria (esto concuerda con la definición anterior), mientras que al fijar ω se obtiene una función de t . Esta segunda interpretación permite interpretar a un proceso aleatorio como una variable aleatoria, puesto que para cada ω se tiene una función de t , por lo que Ω puede ser considerado como un subconjunto del espacio de todas las funciones de t en Z ([7]).

Por lo anterior, una función $x(t)$ puede ser descrita como un proceso aleatorio si x no depende de t en forma determinista, como se ilustra en la figura 1.1. En ella puede observarse una curva que toma, aleatoriamente, valores entre 0 y A (espacio de estados). También, a manera de ejemplo, se indican cuatro instantes de tiempo t_1, t_2, t_3 y t_4 . En cada uno de ellos, x podría tomar (de manera aleatoria) cualquier valor entre 0 y A . De esta forma, es posible interpretar a la variable x definida en algún instante de tiempo t_i como una variable aleatoria. Así, $x(t_1), x(t_2), x(t_3)$ y $x(t_4)$, en la figura, son variables aleatorias. Recordando que t es una variable definida en un intervalo continuo, entonces el proceso x puede pensarse como un conjunto infinito de variables aleatorias $x(t)$, una para cada valor de t ([1]).

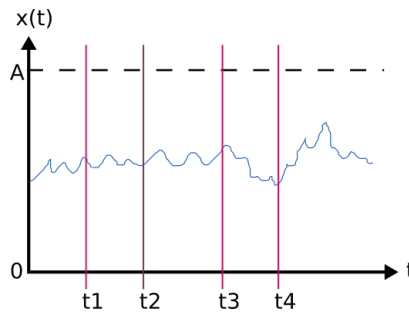


Figura 1.1: Realización de un proceso aleatorio.

Un proceso estocástico permite describir una variable física que cambia con el tiempo y que presenta un comportamiento aleatorio. Así, cada vez que se realice el proceso de medición en el intervalo de tiempo T se obtendrá una curva $x(t)$ diferente. Más aún, si fuera posible realizar n veces el proceso de medición bajo condiciones estrictamente idénticas, es muy probable que se obtendrían n curvas $x(t)$ diferentes (por la naturaleza aleatoria del proceso). A cada una de las curvas del proceso aleatorio sujeto al mismo conjunto de condiciones, se le llama realización o función muestral (o path, en inglés). El conjunto de todas las realizaciones de un proceso aleatorio se conoce como ensamble y se representa como $\{x(t)\} = \{(1)x(t), (2)x(t), \dots, (r)x(t), \dots\}$.

Para cada valor particular de t, t_i , ocurre que $x(t_i)$ es una variable aleatoria con densidad de probabilidad $p[x(t_i)] \equiv p(x, t_i)$. De esta forma, $p(x, t)$ es una familia de distribuciones de probabilidad. Sin embargo, de aquí en adelante $x(t)$ y $p(x, t)$ representarán la variable aleatoria y la densidad de probabilidad asociadas al instante particular de tiempo t , respectivamente. De acuerdo a [1], el promedio de

ensamble en el tiempo t

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N {}^{(r)}x(t) \quad (1.20)$$

es equivalente al promedio de la variable aleatoria $x(t)$, definida en el tiempo t ,

$$\langle x(t) \rangle = \int x(t)p(x, t)dx. \quad (1.21)$$

Funciones de correlación

Sea $\{x(t)\}$ el ensamble que define un proceso aleatorio real $x(t)$. Considérense las variables aleatorias $x(t_1)$ y $x(t_2)$ tales que representan al (mismo) proceso aleatorio x en los tiempos particulares t_1 y t_2 . Considérese también su densidad de probabilidad conjunta $p(x(t_1), x(t_2)) \equiv p(x; t_1, t_2)$ (p es densidad de probabilidad de x , mientras que t_1 y t_2 sólo son parámetros de p). La función de auto-correlación de $x(t_1) = x_1$ y $x(t_2) = x_2$ es la correlación (definida en la ecuación 1.17) entre ambas ([1], [2]):

$$\Gamma(x; t_1, t_2) \equiv \langle x(t_1)x(t_2) \rangle \equiv \int x_1x_2p(x_1, t_1; x_2, t_2)dx_1dx_2. \quad (1.22)$$

Resulta muy conveniente cambiar la representación temporal de modo que $t_1 = t$ y $t_2 = t + \tau$. De esta forma, la definición anterior se expresa como

$$\Gamma(x; t_1, t_2) \equiv \langle x(t)x(t + \tau) \rangle. \quad (1.23)$$

Es importante resaltar que después del valor esperado $\langle x \rangle$, la función de auto-correlación es la cantidad más importante de un proceso aleatorio x .

Si en lugar de $x(t)$ real se tiene un proceso aleatorio complejo $z(t)$, entonces la función de auto-correlación se define como

$$\Gamma(z; t_1, t_2) \equiv \langle z^*(t_1)z(t_2) \rangle \equiv \int z_1^*z_2p(z_1, t_1; z_2, t_2)d^2z_1d^2z_2, \quad (1.24)$$

donde z^* es el complejo conjugado de z .

De forma similar, sean $x(t_1)$, $y(t_2)$ dos variables aleatorias reales pertenecientes a los procesos aleatorios (distintos) x y y , respectivamente. Sea $p(x(t_1), y(t_2)) \equiv p(x, t_1; y, t_2) \equiv p(x, y; t_1, t_2)$ su densidad de probabilidad conjunta. Se define la función de correlación cruzada de $x(t_1)$ y $y(t_2)$ como la correlación entre ambas ([1],[2]):

$$\Gamma(x, y; t_1, t_2) \equiv \langle x(t_1)y(t_2) \rangle. \quad (1.25)$$

De nuevo, al usar la representación $t_1 = t$ y $t_2 = t + \tau$, la definición anterior se transforma en

$$\Gamma(x, y; t_1, t_2) \equiv \langle x(t)y(t + \tau) \rangle. \quad (1.26)$$

Es fácil observar que la función de autocorrelación es un caso especial de la función de correlación cruzada, aquél en el que $x = y$.

Al igual que en el caso anterior, si en lugar de los procesos reales $x(t)$ y $y(t)$ se tienen los procesos aleatorios complejos $z(t)$ y $w(t)$, entonces la función de correlación cruzada se define como

$$\Gamma(z, w; t_1, t_2) \equiv \langle z^*(t_1)w(t_2) \rangle \equiv \int z_1^*w_2p(z_1, t_1; w_2, t_2)d^2z_1d^2w_2, \quad (1.27)$$

donde z^* es el complejo conjugado de z .

Clases de procesos aleatorios

Existen diferentes clases de procesos aleatorios. En [5], por ejemplo, se describen algunas clases básicas. Sin embargo, las tres clases más importantes en el contexto de señales aleatorias y teoría de coherencia son:

- **Procesos estacionarios:** Un proceso estacionario es aquél cuyas medidas estadísticas no varían ante desplazamientos temporales.

Considérese que se tiene un número finito de intervalos de tiempo que no se sobreponen, es decir, que no tienen instantes en común. Se desea calcular la probabilidad de que un número k de eventos ocurra durante el transcurso de cada intervalo. En un proceso estacionario esta probabilidad depende solamente del número k y de la duración de los intervalos, mas no se altera si estos intervalos sufren el mismo corrimiento.

En el caso de un sólo intervalo de tiempo $[t_0, t_0 + t]$, la probabilidad de que k eventos ocurran en ese intervalo depende solamente de k y de t , sin importar en qué punto de la línea del tiempo se coloque t_0 ([5]).

En un proceso estacionario todas las densidades de probabilidad de la familia $p(x, t)$ son invariantes ante traslaciones de tiempo, es decir:

$$p(x, t_i) = p(x, t_i + T) \quad (1.28)$$

para toda T ([1]), por lo que $p(x, t) = p(x)$.

- **Procesos débilmente estacionarios (o estacionarios en sentido amplio):** Son aquéllos en los que su promedio de ensamble es constante con el tiempo y además su función de autocorrelación no depende del origen de la escala de tiempo, es decir, la función de autocorrelación depende de $t_1 = t$ y $t_2 = t + \tau$ sólo a través de su diferencia ([1]):

$$\Gamma_x(t_1, t_2) = \Gamma_x(t_2 - t_1) = \Gamma_x(\tau). \quad (1.29)$$

- **Procesos ergódicos:** En un proceso ergódico todas las medidas estadísticas pueden ser determinadas a partir de cualquier función muestral, esto es, cualquier elemento del ensamble. Esto se debe a que en un proceso ergódico todas las funciones muestrales contienen información estadística idéntica y, por lo tanto, cada función muestral describe (estadísticamente) al proceso aleatorio por completo ([1]).

En un proceso ergódico, los promedios temporales son equivalentes a los promedios de ensamble, es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt, \quad (1.30)$$

siendo ésta es la característica más importante de los procesos ergódicos.

En [2] se menciona que los procesos ergódicos son un caso especial de los procesos estacionarios y éstos, a su vez, un caso especial de los débilmente estacionarios.

Propiedades de la función de auto-correlación

Cuando está claro que se trabaja con el proceso aleatorio real x , una función de auto-correlación puede representarse como $\Gamma(t_1, t_2)$, en lugar de $\Gamma(x; t_1, t_2)$. A continuación se enuncian algunas de sus propiedades importantes.

- Si en la función de auto-correlación $\Gamma(t_1, t_2) = \langle x(t_1)x(t_2) \rangle$ se hace $t_1 = t$ y $t_2 = t + \tau$, entonces dicha expresión puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \Gamma(t_1, t_2) &= \langle x(t)x(t + \tau) \rangle \\ &= \langle x(t)x(t + t_2 - t_1) \rangle. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Sin embargo, se ha dicho que la función de auto-correlación de un proceso débilmente estacionario (estrictamente estacionario o no) no depende del origen de la escala de tiempo sino sólo de la diferencia $t_2 - t_1$. Por esta razón, en este caso es posible recorrer el tiempo t . Así, si t es reemplazado por $t - t_2 + t_1$ en la expresión anterior se obtiene

$$\Gamma(t_1, t_2) = \langle x(t - t_2 + t_1)x(t) \rangle, \quad (1.32)$$

por lo que es posible concluir que

$$\Gamma(t_1, t_2) = \Gamma(t_2 - t_1) = \Gamma(t_1 - t_2), \quad (1.33)$$

y, en consecuencia, se dice que $\Gamma(x; t_1, t_2)$ es simétrica. Esto sólo ocurre cuando x es real. Si en su lugar se trabaja con un proceso aleatorio z complejo, al hacer el mismo corrimiento temporal anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} \Gamma(t_1, t_2) &= \langle z^*(t)z(t + \tau) \rangle \\ &= \langle z^*(t)z(t + t_2 - t_1) \rangle \\ &= \langle z^*(t - t_2 + t_1)z(t) \rangle, \end{aligned} \quad (1.34)$$

y como $\Gamma^*(t_1, t_2) = \langle z(t)z^*(t + t_2 - t_1) \rangle$ se concluye que la función de auto-correlación para procesos aleatorios complejos y débilmente estacionarios cumple la condición de Hermiticidad

$$\Gamma(t_1, t_2) = \Gamma(t_2 - t_1) = \Gamma^*(t_1 - t_2), \quad (1.35)$$

en lugar de la de simetría. De aquí en adelante se asumirá que se trabaja con procesos aleatorios complejos y débilmente estacionarios. En el caso de estos últimos, es usual representar a $\Gamma(t_2 - t_1)$ como $\Gamma(\tau)$, pues $t_2 - t_1 = \tau$.

b) Puesto que $\Gamma(0) = \langle |z(t)| \rangle$ y $|z(t)| \geq 0$ se tiene

$$\Gamma(0) \geq 0. \quad (1.36)$$

c) Por la forma integral de la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\Gamma(\tau)|^2 = |\langle z^*(t_1)z(t + \tau) \rangle|^2 \leq \langle |z^*(t)|^2 \rangle \langle |z(t + \tau)|^2 \rangle \quad (1.37)$$

y dado que $|z^*(t)|^2 = z^*(t)z(t)$ la expresión anterior toma la forma

$$|\Gamma(\tau)|^2 \leq \langle z^*(t)z(t) \rangle \langle z^*(t + \tau)z(t + \tau) \rangle = \Gamma^2(0) \quad (1.38)$$

ya que, en un proceso débilmente estacionario es posible que $\langle z^*(t)z(t) \rangle = \langle z^*(t + \tau)z(t + \tau) \rangle = \Gamma(0)$. Por lo tanto

$$|\Gamma(\tau)| \leq \Gamma(0). \quad (1.39)$$

d) $\Gamma(\tau)$ es una función no negativa definida (o positiva definida). Como se sugiere en [1], para mostrar esto, se procede como sigue. Considérense: un entero positivo N , N puntos (argumentos temporales en este caso) t_1, t_2, \dots, t_N y N números (reales o complejos) a_1, a_2, \dots, a_N . Es un hecho evidente que

$$\left\langle \left| \sum_{i=1}^N a_i z(t_i) \right|^2 \right\rangle \geq 0. \quad (1.40)$$

Sin embargo,

$$\left\langle \left| \sum_{i=1}^N a_i z(t_i) \right|^2 \right\rangle = \left\langle \left(\sum_{i=1}^N a_i z(t_i) \right) \left(\sum_{i=1}^N a_i^* z^*(t_i) \right) \right\rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i^* a_j \langle z^*(t_i)z(t_j) \rangle, \quad (1.41)$$

donde $\langle z^*(t_i)z(t_j) \rangle = \Gamma(t_j - t_i)$ (asumiendo que z es débilmente estacionario), por lo que se obtiene

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i^* a_j \Gamma(t_j - t_i) \geq 0, \quad (1.42)$$

lo cual implica que $\Gamma(\tau)$ es una función no negativa definida.¹

¹De acuerdo a [28], una función positiva definida es aquella que satisface la condición de Hermiticidad y la ecuación (1.42), es continua en la región finita y está acotada en $[-\infty, \infty]$.

Propiedades de la función de correlación cruzada

Considérense dos procesos estocásticos z_1 y z_2 conjuntamente estacionarios, es decir, tales que su densidad de probabilidad conjunta satisface la condición

$$p(z_1, t_1; z_2, t_2) = p(z_1, t_1 + T; z_2, t_2 + T) \tag{1.43}$$

para toda T . En este caso, la función de correlación cruzada de ambas, $\Gamma(z_1, z_2; t_1, t_2) = \langle z_1^*(t_1)z_2(t_2) \rangle$, depende de t_1 y de t_2 sólo a través de su diferencia $\tau = t_2 - t_1$, por lo que suele ser expresada como

$$\Gamma_{12}(\tau) = \Gamma(z_1, z_2, \tau) = \langle z_1^*(t)z_2(t + \tau) \rangle. \tag{1.44}$$

De acuerdo a esto las funciones de auto-correlación de z_1 y z_2 se representan como $\Gamma_{11}(\tau)$ y $\Gamma_{22}(\tau)$, respectivamente.

En la notación empleada en [1] y [8] el orden de los subíndices en $\Gamma_{12}(\tau)$ refleja cuál variable se expresa como complejo conjugado: aquella cuyo subíndice aparece primero.

- e) De forma análoga a la propiedad c) de la función de auto-correlación, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\Gamma_{12}(\tau)|^2 = |\langle z_1^*(t)z_2(t + \tau) \rangle|^2 \leq \langle z_1^*(t)z_1(t) \rangle \langle z_2^*(t + \tau)z_2(t + \tau) \rangle, \tag{1.45}$$

y como $\Gamma_{ii}(\tau) = \langle z_i^*(t)z_i(t + \tau) \rangle$ y haciendo un desplazamiento temporal en la segunda función de correlación del lado derecho de la desigualdad se obtiene

$$|\Gamma_{12}(\tau)| \leq \sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)}. \tag{1.46}$$

- f) De acuerdo a la expresión (1.44), $\Gamma_{12}(-\tau) = \langle x^*(t)y(t - \tau) \rangle$, luego $\Gamma_{12}^*(-\tau) = \langle y^*(t - \tau)x(t) \rangle$, y al reemplazar t por $t + \tau$ resulta $\Gamma_{12}^*(-\tau) = \Gamma_{21}(\tau)$, o bien

$$\Gamma_{12}(-\tau) = \Gamma_{21}^*(\tau). \tag{1.47}$$

Coefficientes de correlación

En la subsección 1.1.1 se definieron la varianza, covarianza y el coeficiente de correlación considerando variables aleatorias reales (ecuaciones (1.10), (1.12), (1.13) y (1.15)). Ahora se definen los mismos conceptos cuando éstas son complejas y pertenecen a un proceso aleatorio.

Sean $z_i(t)$ y $z_j(t)$ dos procesos aleatorios complejos y estadísticamente estacionarios, al menos en sentido amplio. La varianza de cualquiera de sus variables aleatorias (también complejas) está dada por

$$\begin{aligned} \mu_2^l &= \langle |\Delta z_l(t)|^2 \rangle = \langle |z_l(t) - \langle z_l(t) \rangle|^2 \rangle \\ &= \langle [z_l(t) - \langle z_l(t) \rangle]^* [z_l(t) - \langle z_l(t) \rangle] \rangle \\ &= \langle |z_l(t)|^2 \rangle - |\langle z_l(t) \rangle|^2 \\ &= \Gamma_{ll}(0) - |\langle z_l(t) \rangle|^2, \end{aligned} \tag{1.48}$$

donde $l = i, j$ y se ha hecho $\tau = 0$ en la auto-correlación de la ecuación (1.34), es decir, $\Gamma_{ll}(0) = \langle z_l^*(t)z_l(t) \rangle = \langle |z_l(t)|^2 \rangle$.

Por su parte, la covarianza de cualesquiera variables aleatorias $z_i(t)$ y $z_j(t + \tau)$ se define como

$$\begin{aligned} \mu_{ij} &= \langle \Delta z_i^*(t) \Delta z_j(t + \tau) \rangle \\ &= \langle [z_i(t) - \langle z_i(t) \rangle]^* [z_j(t + \tau) - \langle z_j(t + \tau) \rangle] \rangle \\ &= \langle z_i^*(t)z_j(t + \tau) \rangle - \langle z_i^*(t) \rangle \langle z_j(t + \tau) \rangle \\ &= \Gamma_{ij}(\tau) - \langle z_i^*(t) \rangle \langle z_j(t) \rangle. \end{aligned} \tag{1.49}$$

En la última línea de la ecuación anterior se ha hecho uso de la función de correlación cruzada, ecuación (1.44), y se ha considerado que en el caso de procesos débilmente estacionarios su promedio no varía con el tiempo, por lo que $\langle z_j(t + \tau) \rangle = \langle z_j(t) \rangle$.

Considerando, de acuerdo a (1.11), que $\sigma = \sqrt{\mu_2}$, al desarrollar la expresión (1.15) del coeficiente de correlación con las expresiones complejas de varianza, (1.48), y covarianza, (1.49), se obtiene

$$\gamma_{ij}(\tau) \equiv \frac{\langle \Delta z_i^*(t) \Delta z_j(t + \tau) \rangle}{(\mu_2^i)^{1/2} (\mu_2^j)^{1/2}} = \frac{\Gamma_{ij}(\tau) - \langle z_i^*(t) \rangle \langle z_j(t) \rangle}{[\Gamma_{ii}(0) - |\langle z_i(t) \rangle|^2]^{1/2} [\Gamma_{jj}(0) - |\langle z_j(t) \rangle|^2]^{1/2}}, \quad (1.50)$$

que se ha renombrado como γ_{ij} en lugar de ρ_{ij} . La expresión anterior es la misma que se presenta en [1], sec. 2.4, ec. (2.4-46), pág. 64.

Sin embargo, en el siguiente capítulo se define el grado complejo de coherencia como un coeficiente de la forma

$$\gamma_{ij}(\tau) \equiv \frac{\Gamma_{ij}(\tau)}{[\Gamma_{ii}(0)]^{1/2} [\Gamma_{jj}(0)]^{1/2}}, \quad (1.51)$$

la cual es diferente a la forma exacta del coeficiente de correlación mostrada en (1.50). Nótese que si en la expresión (1.51) las variables aleatorias $z_i(t)$ y $z_j(t)$ se sustituyen por $\Delta z_i(t)$ y $\Delta z_j(t)$, se obtiene la expresión (1.50).

1.2. Señales analíticas

En el estudio de la teoría de coherencia de segundo orden se emplearán funciones del tiempo y su representación espectral por medio de la transformada inversa de Fourier. De manera más específica, dada una función del tiempo $f(t)$ es posible calcular su transformada de Fourier, $F(\nu)$, como

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i2\pi\nu t} dt \quad (1.52)$$

y $f(t)$ puede expresarse en términos de sus componentes espectrales por medio de la transformada inversa de Fourier

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) e^{-i2\pi\nu t} d\nu. \quad (1.53)$$

Ambas ecuaciones serán válidas si se cumplen algunas condiciones, entre ellas

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt < \infty, \quad (1.54)$$

lo cual significa que la energía de la función $f(t)$ debe ser finita. Note que en la ec. (1.53) la integral barre de $-\infty$ a ∞ . Sin embargo, como se verá más adelante, en ocasiones se expresará la transformada inversa de Fourier en (1.53) por medio de una integral definida entre 0 y ∞ (la mitad de rango). Esto es posible para ciertas funciones denominadas analíticas, las cuales se definen en esta sección.

Si en la ec. (1.52) se cambia la variable $\nu \rightarrow -\nu$, se obtiene (considerando que $f(t)$ es real) que

$$F(-\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i2\pi\nu t} dt \right]^* = F^*(\nu),$$

donde el asterisco denota el complejo conjugado, por lo tanto

$$F(-\nu) = F^*(\nu), \quad (1.55)$$

lo cual indica que la información contenida en las componentes espectrales de frecuencias negativas también está contenida en las componentes espectrales de frecuencias positivas. Esto sugiere que debe haber una forma similar a la integral en (1.53) pero evaluada en la mitad de su rango, es decir, de 0 a ∞ .

En general, la transformada de Fourier es una función compleja, por lo que puede representarse como $F(\nu) = \alpha(\nu) + i\beta(\nu)$ y, por la ec. (1.55) se tiene que

$$\alpha(-\nu) + i\beta(-\nu) = \alpha(\nu) - i\beta(\nu),$$

lo cual implica que α es una función par y β es una función impar. Esto es una consecuencia de que $F(\nu)$ sea la transformada de Fourier de una función real.

Usando la representación anterior de $F(\nu)$, al desarrollar el integrando en la ec. (1.53) resulta

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha(\nu) + i\beta(\nu)][\cos(2\pi\nu t) - i\sin(2\pi\nu t)]d\nu \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha(\nu)\cos(2\pi\nu t) + \beta(\nu)\sin(2\pi\nu t)]d\nu + i \int_{-\infty}^{\infty} [\beta(\nu)\cos(2\pi\nu t) - \alpha(\nu)\sin(2\pi\nu t)]d\nu \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha(\nu)\cos(2\pi\nu t) + \beta(\nu)\sin(2\pi\nu t)]d\nu \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}\{F(\nu)e^{-i2\pi\nu t}\}d\nu, \end{aligned}$$

donde Re denota la parte real. La parte imaginaria debe ser igual a cero puesto que $f(t)$ es real. Como el producto de dos funciones de la misma paridad es una función par y su suma también lo es, entonces $\alpha(\nu)\cos(2\pi\nu t) + \beta(\nu)\sin(2\pi\nu t)$ es una función par. Esto permite cambiar el intervalo de integración de la siguiente forma

$$f(t) = 2 \int_0^{\infty} \operatorname{Re}\{F(\nu)e^{-i2\pi\nu t}\}d\nu. \quad (1.56)$$

Una deducción diferente (aunque equivalente) de la ecuación anterior se encuentra en ([29], sec. 2.1, pág. 78).

En [1] se define la función compleja $z(t)$ tal que

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(\nu)e^{-i2\pi\nu t}d\nu = \int_0^{\infty} Z(\nu)e^{-i2\pi\nu t}d\nu \quad (1.57)$$

en la que

$$Z(\nu) = \begin{cases} F(\nu) & \text{si } \nu \geq 0 \\ 0 & \text{si } \nu < 0 \end{cases} \quad (1.58)$$

De este modo es posible sustituir a $F(\nu)$ por $Z(\nu)$ en (1.56) por lo que se obtiene que

$$f(t) = \int_0^{\infty} \operatorname{Re}\{2Z(\nu)e^{-i2\pi\nu t}\}d\nu$$

y, si ahora se define

$$2Z(\nu) = a(\nu)e^{i\phi(\nu)} \quad (1.59)$$

se llega a que

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^{\infty} \operatorname{Re}\{a(\nu)e^{i(\phi(\nu)-2\pi\nu t)}\}d\nu \\ &= \int_0^{\infty} a(\nu)\cos(\phi(\nu) - 2\pi\nu t)d\nu. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Por otro lado, de (1.57) y de (1.59) se obtiene

$$z(t) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} a(\nu)e^{i(\phi(\nu)-2\pi\nu t)}d\nu. \quad (1.61)$$

Así, de la ecuación anterior y de (1.60) se deduce que

$$f(t) = z(t) + z^*(t) = 2\operatorname{Re}\{z(t)\}. \quad (1.62)$$

También es posible definir la función

$$g(t) = \int_0^{\infty} a(\nu)\sin(\phi(\nu) - 2\pi\nu t)d\nu, \quad (1.63)$$

la cual, junto con $f(t)$, satisface la ecuación

$$f(t) + ig(t) = 2z(t). \quad (1.64)$$

Además, $f(t)$ y $g(t)$ conforman un par de transformadas de Hilbert ([1], [29]).

La función $z(t)$ definida en (1.57) es una *señal analítica compleja* (complex analytic signal) asociada a la función real $f(t)$. En [16] se le denomina función compleja a mitad de rango (half-range complex function) asociada a la función real $f(t)$. Como $Z(\nu)$ es igual a $F(\nu)$ sólo en la mitad de su dominio, y como la energía de $F(\nu)$ es finita (por (1.54) y el teorema de Plancherel), entonces la energía de $Z(\nu)$ (y la de $z(t)$) también lo es. En [1] se describen algunas propiedades de z cuando es definida como una función de variable compleja.

1.3. Ecuaciones de difracción

En esta sección se mencionan algunos modelos que describen la propagación de la luz la cual, como se sabe, es una perturbación electromagnética. La representación más simple de una perturbación que evoluciona en el espacio (en una dimensión) y en el tiempo, corresponde a una onda escalar monocromática

$$V^{(r)}(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \phi), \quad (1.65)$$

donde A es la amplitud de la onda, ω la frecuencia angular, ϕ la constante de fase inicial y $k = 2\pi/\lambda$ el número de onda, siendo λ la longitud de onda. Sin embargo, por simplicidad en una gran cantidad de cálculos, se acostumbra representar este tipo de perturbaciones en forma compleja, como sigue

$$\begin{aligned} V(x, t) &= Ae^{i(kx - \omega t + \phi)} \\ &= U(x)e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (1.66)$$

donde la exponencial se ha factorizado en una parte dependiente del espacio y otra del tiempo, y donde $U(x) = Ae^{i(kx + \phi)}$ es la amplitud compleja de la onda. Es evidente que $V^{(r)}(x, t)$ es igual a la parte real de $V(x, t)$ (de ahí el superíndice $^{(r)}$). Los modelos de propagación siguientes describen cómo cambia la amplitud compleja con la posición. En adelante, la dependencia espacial de las ondas se expresará en función de tres coordenadas (x, y, z) o un vector \mathbf{r} definido en \mathbf{R}^3 .

La difracción describe el comportamiento de la luz cuando ésta encuentra una discontinuidad en el medio de propagación. Usualmente se estudian casos donde la discontinuidad puede ser un objeto material uniforme de cierta área o un material con perforaciones. Dos modelos elementales en este tema son el principio de Huygens y la integral de difracción de Fresnel-Kirchhoff, descritos a continuación.

1.3.1. Principio de Huygens-Fresnel

En 1690 Christian Huygens propuso, en su *Traité de la Lumière*, un modelo de propagación de la luz según el cual el frente de una onda esférica puede ser considerado como un conjunto de puntos en los que se originan perturbaciones secundarias (ondoletas) también esféricas y cuya envolvente coincide con el frente de onda, propagado, de la onda inicial. Más tarde, Augustine Fresnel propuso que una onda podía calcularse como la superposición de las ondoletas del modelo de Huygens, es decir, propuso que las ondoletas interferían entre sí. Así, a la combinación del modelo de Huygens con la teoría de interferencia se le conoce como el principio de Huygens-Fresnel. Los elementos básicos de su formulación se explican en [30]. Aquí solamente se explica el significado de la integral que resume el principio de Huygens-Fresnel.

La ecuación de una onda esférica divergente es

$$\begin{aligned} V(r, t) &= \frac{A}{r} e^{i(kr - \omega t)} \\ &= U(r)e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (1.67)$$

donde la cantidad $U(r) = Ae^{ikr}/r$ es la amplitud compleja de la onda. Note que como el frente de una onda esférica es una superficie esférica, entonces cada valor de r define un frente de onda para el cual

$U(r)$ es constante. Con esto en mente considérese el frente de onda, para un radio r_0 , de una perturbación producida en el punto P_0 . La amplitud compleja en este frente de onda será igual a Ae^{ikr_0}/r_0 . Si esta superficie se divide en elementos infinitesimales se tiene, de acuerdo a Huygens, que cada uno de ellos contribuye con una pequeña perturbación secundaria. Si se desea calcular la perturbación total en un punto, P (a una distancia r_0+b de P_0), que será alcanzado por la onda en un momento dado, entonces será necesario superponer las contribuciones de aquellos elementos de superficie contenidos en cierta región efectiva del frente de onda. La contribución de un elemento infinitesimal ubicado en alguna posición Q sobre el frente de onda tiene la forma

$$dU(P) = K(\chi) \frac{Ae^{ikr_0}}{r_0} \frac{e^{iks}}{s} dS, \quad (1.68)$$

donde χ es el ángulo (de difracción) que la normal a la superficie en Q forma con el segmento \overline{QP} , cuya longitud es s , y dS es el elemento de superficie. La función

$$K(\chi) = -\frac{i}{2\lambda}(1 + \cos \chi) \quad (1.69)$$

se conoce como el factor de inclinación. La suma de todas las contribuciones de este tipo contenidas en la región efectiva se expresa en forma integral como

$$U(P) = \frac{Ae^{ikr_0}}{r_0} \iint_S \frac{e^{iks}}{s} K(\chi) dS. \quad (1.70)$$

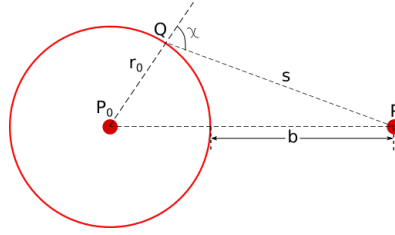


Figura 1.2: El frente de onda en Q se origina en P_0 . Se desea calcular la suma de las contribuciones secundarias en P .

Para resolver la ecuación (1.70) se emplea el método de construcción por zonas de Fresnel, el cual consiste en dividir el volumen contenido por el frente de onda esférico original (de radio r_0) en diferentes secciones (o zonas) delimitadas por superficies esféricas centradas en P y de radio $b + j\lambda/2$, donde $j = 0, 1, 2, \dots$ (ver [30], sec. 8.2). Al asumir que las distancias r_0 y b son mucho más grandes que λ , es posible considerar que $K(\chi)$ tiene un valor constante en cada zona. Como en la primera zona de Fresnel se considera que el ángulo de difracción es pequeño, $\chi \approx 0$, entonces, por (1.69), $K(0) = K_1 = -i/\lambda$. Cuando no existen obstáculos entre la fuente y el punto P , la solución de la ecuación (1.70) es $U(P) = \frac{1}{2}U_1(P)$, donde $U_1(P)$ representa la contribución de la primera zona de Fresnel.

1.3.2. Difracción de Fraunhofer

El teorema integral de Helmholtz y Kirchhoff

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{iks}}{s} \right) - \frac{e^{iks}}{s} \frac{\partial U}{\partial n} \right] dS \quad (1.71)$$

expresa la amplitud compleja de una onda monocromática en un punto espacial, $U(P)$, en términos de los valores que la amplitud compleja y sus primeras derivadas toman sobre una superficie cerrada S que encierra al punto P . La distancia entre este punto y cualquier elemento de superficie en S se simboliza como s . Además, $\partial/\partial n$ representa la derivada direccional a lo largo de la normal que entra a la superficie S . La deducción de este teorema como de las ecuaciones que se exponen a continuación se puede consultar en ([30], sec. 8.3.1, pp.418-430).

Como ya se mencionó, la difracción estudia el comportamiento de la luz cuando ésta encuentra un obstáculo en su trayectoria. En la situación que se describirá en seguida se considera que el obstáculo consiste en una pantalla opaca con una perforación (rendija) cuya área se representa como \mathcal{A} . Considérese que se elige un punto O en la rendija como el origen de este sistema, así como una posición móvil Q que barre toda el área de la rendija, puesto que representa la posición del elemento diferencial de superficie en la integral anterior. A un lado de la pantalla se encuentra la posición $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, a una distancia r de Q , de la fuente de la luz que atraviesa la rendija para llegar al punto $P = (x, y, z)$, a una distancia s de Q . Es necesario que las dimensiones lineales de la rendija sean mucho menores que r y que s . La trayectoria P_0QP no sigue, necesariamente, una línea recta. Después de cierto proceso descrito en la referencia antes citada se obtiene, usando el teorema anterior y bajo ciertas suposiciones y aproximaciones (condiciones de frontera de Kirchhoff), que la amplitud compleja en P está dada por la expresión

$$U(P) = -\frac{Ai}{2\lambda} \int \int_{\mathcal{A}} \frac{e^{ik(r+s)}}{rs} [\cos(n, r) - \cos(n, s)] dS, \quad (1.72)$$

la cual se conoce como la integral de difracción de Fresnel-Kirchhoff y en la que A es una constante (amplitud por unidad de distancia), λ es la longitud de onda y (n, r) y (n, s) son los ángulos que la normal al plano de la rendija forma con r y s , respectivamente.

Se ha supuesto que $r = \overline{P_0Q}$ y $s = \overline{QP}$ son mucho mayores que las dimensiones de la apertura y que éstas, a su vez, son más grandes que la longitud de onda de la luz. Esto implica que, al variar la posición Q , r y s varíen considerablemente con respecto a λ . Por lo tanto, $e^{ik(r+s)}$ también varía considerablemente. Por las mismas consideraciones es posible notar que el factor $[\cos(n, r) - \cos(n, s)]$ varía muy poco, por lo que se puede sustituir por el factor aproximado $2 \cos \delta$, donde δ es el ángulo entre la línea $\overline{P_0P}$ y la normal a la pantalla. Además, r y s pueden ser sustituidos por $r' = \overline{P_0O}$ y $s' = \overline{OP}$. De esta forma, la integral de difracción de Fresnel-Kirchhoff se reduce a la forma aproximada

$$U(P) \sim -\frac{Ai \cos \delta}{\lambda r' s'} \int \int_{\mathcal{A}} e^{ik(r+s)} dS. \quad (1.73)$$

Si se establece un sistema de coordenadas de modo que el plano xy coincida con el de la rendija y la dirección positiva del eje z con la dirección de propagación de la luz y además se definen ξ y η como las coordenadas x y y , respectivamente, del punto Q con respecto a O , se obtienen, de la geometría, las siguientes relaciones

$$r^2 = r'^2 - 2(x_0\xi + y_0\eta) + \xi^2 + \eta^2, \quad (1.74)$$

$$s^2 = s'^2 - 2(x\xi + y\eta) + \xi^2 + \eta^2. \quad (1.75)$$

Al expresar r y s como series de potencias en ξ/r' , η/r' , ξ/s' y η/s'

$$r \sim r' - \frac{x_0\xi + y_0\eta}{r'} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2r'} - \frac{(x_0\xi + y_0\eta)^2}{2r'^3}, \quad (1.76)$$

$$s \sim s' - \frac{x\xi + y\eta}{s'} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2s'} - \frac{(x\xi + y\eta)^2}{2s'^3}, \quad (1.77)$$

su suma se puede abreviar como

$$r + s \sim r' + s' + f(\xi, \eta), \quad (1.78)$$

donde $f(\xi, \eta)$ es la suma de todos los términos de ambas expansiones que contienen potencias mayores o iguales a 1 de ξ y η . De esta manera, la ecuación (1.73) puede reescribirse como

$$U(P) = -\frac{i \cos \delta A e^{ik(r'+s')}}{\lambda r' s'} \int \int_{\mathcal{A}} e^{ikf(\xi, \eta)} d\xi d\eta. \quad (1.79)$$

Si en $f(\xi, \eta)$ es posible desprestigiar los términos cuadráticos y de orden mayor a 2, entonces se tiene difracción de Fraunhofer. Si los términos cuadráticos no pueden ser ignorados, entonces se tiene difracción de Fresnel.

Las ecuaciones (1.70) y (1.79) son de interés en este trabajo puesto que, como más adelante se verá, Wolf halló una gran similitud entre éstas y ciertas formas del teorema de van Cittert-Zernike.

Capítulo 2

Coherencia de segundo orden

2.1. Coherencia de segundo orden en el dominio espacio-tiempo

Una fuente real de luz puede interpretarse como un conjunto de fuentes puntuales, cada una de las cuales está sujeta a condiciones físicas diferentes, por lo que las emisiones son aleatorias. Esto causa que las perturbaciones fluctúen en cada punto del espacio, es decir, sus características como amplitud y fase varían aleatoriamente en cada punto del espacio. En este capítulo se considerarán solamente ondas escalares, es decir, se asumirá que todas las ondas oscilan en el mismo plano. De esta forma no será necesario especificar la dirección del vector de campo eléctrico o magnético. Se usará $V(\mathbf{r}, t)$ para representar ondas escalares de campo eléctrico, la representación $E(\mathbf{r}, t)$ se usará en el caso vectorial, el cual se analizará en los capítulos 3 y 4.

Como las perturbaciones ópticas fluctúan de forma estocástica en cada punto del espacio, se define un ensamble $\{V(\mathbf{r}, t)\}$ en cada punto \mathbf{r} . Dicho de otra forma, en este tema se considera la evolución de la perturbación óptica en un punto particular del espacio como un proceso estocástico. En consecuencia, habrá tantos ensambles como puntos del espacio en los que existe el campo de luz.

Sean \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 dos puntos para los cuales se definen los ensambles de campo eléctrico $\{V(\mathbf{r}_1, t)\}$ y $\{V(\mathbf{r}_2, t)\}$. Ahora supóngase que se seleccionan dos valores particulares de cada proceso estocástico, a saber, $V(\mathbf{r}_1, t_1)$ y $V(\mathbf{r}_2, t_2)$. A pesar de su naturaleza aleatoria, es posible notar que existe cierta relación entre ambos valores de campo siempre que las distancias espacial ($\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$) y temporal ($\Delta t = t_2 - t_1$) se encuentren dentro de ciertos rangos. Esto significa que $V(\mathbf{r}_1, t_1)$ está relacionado de alguna manera con $V(\mathbf{r}_2, t_2)$ o, equivalentemente, que existe alguna relación estadística o correlación entre estas dos cantidades. La forma de esta correlación depende de la fuente y del medio de propagación, principalmente. En el capítulo 1 se vio que una medida del grado de correlación entre dos variables aleatorias, x_i y x_j , está dada por su covarianza, la cual, a su vez, tiene relación con la correlación $\langle x_i x_j \rangle$ (como se definió en las ecuaciones (1.13) y (1.18)). La coherencia óptica se refiere a la correlación entre variables de campo eléctrico (dada la naturaleza aleatoria de este último). Es por esta razón que las funciones de coherencia se definen en términos de funciones de correlación.

2.1.1. Función compleja de coherencia de segundo orden

La función compleja de coherencia de segundo orden se define como

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t_1, t_2) = \langle V^*(\mathbf{r}_1, t_1) V(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle, \quad (2.1)$$

es decir, la correlación de los valores de campo en los puntos (\mathbf{r}_1, t_1) y (\mathbf{r}_2, t_2) .

Es necesario subrayar que existe cierta ambigüedad en el criterio para especificar el orden de la función anterior. Algunos autores, como Sharma en [29] la denominan de primer orden, mientras que otros como Mandel & Wolf en [1] la denominan de segundo orden. Para estos últimos, el orden indica el número de puntos espacio temporales entre los que se analiza la correlación; así, la función anterior es de segundo orden porque sus argumentos son dos, a saber, (\mathbf{r}_1, t_1) y (\mathbf{r}_2, t_2) . Sharma por su parte, asocia el orden

CAPÍTULO 2. COHERENCIA DE SEGUNDO ORDEN

2.1. COHERENCIA DE SEGUNDO ORDEN EN EL DOMINIO ESPACIO-TIEMPO

con el número de parejas de puntos espacio-temporales entre los cuales se analiza la correlación. En base a este criterio la función anterior es de primer orden y una de segundo orden tendría la forma:

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_3, t_3, \mathbf{r}_4, t_4) = \langle V^*(\mathbf{r}_1, t_1)V^*(\mathbf{r}_2, t_2)V(\mathbf{r}_3, t_3)V(\mathbf{r}_4, t_4) \rangle. \quad (2.2)$$

En este trabajo se seguirá la convención adoptada por Mandel & Wolf, es decir, aquélla según la cual la ecuación (2.1) es una función de coherencia de segundo orden. Esto implica que, de acuerdo a esta convención, la teoría de coherencia comienza con la coherencia de segundo orden. A continuación se describen dos casos especiales de la función compleja de coherencia.

Si en la ecuación (2.1) los puntos \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 son distintos, entonces la función compleja de coherencia de segundo orden se denomina función compleja de coherencia mutua:

$$\Gamma_{12}(t_1, t_2) = \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t_1, t_2) = \langle V^*(\mathbf{r}_1, t_1)V(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle, \quad (2.3)$$

donde la referencia a las posiciones es expresada por medio de subíndices. La función Γ_{12} es una función de correlación cruzada (entre variables aleatorias de diferentes procesos estocásticos), definida en la ecuación (1.27). De aquí en adelante se dará por hecho que esta función es compleja y se hará referencia a ella solamente como función de coherencia mutua.

Algunos tipos de fuentes luminosas suelen alcanzar un estado estadísticamente estacionario después de algún tiempo. En consecuencia, la luz emitida también puede considerarse estacionaria. Esto significa que, como se mencionó en la sección 1.1, las funciones de correlación dependerán de los tiempos sólo a través de su diferencia, por lo que la ecuación anterior debe adaptarse a la forma de la ecuación (1.44):

$$\Gamma_{12}(\tau) = \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \langle V^*(\mathbf{r}_1, t)V(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle. \quad (2.4)$$

En este punto es necesario recordar, por el capítulo 1, que los paréntesis angulares hacen referencia al promedio de ensamble. Sin embargo, si el campo puede ser considerado ergódico, entonces el promedio de ensamble es igual al promedio temporal. La expresión anterior fue introducida por Wolf en [15] 1954 y [16] 1955.

Si en la ecuación (2.1) se satisface $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$, entonces la función compleja de coherencia de segundo orden se denomina función de auto coherencia ([29], sec. 2.3, pág. 83)

$$\Gamma_{11}(t_1, t_2) = \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1; t_1, t_2) = \langle V^*(\mathbf{r}_1, t_1)V(\mathbf{r}_1, t_2) \rangle, \quad (2.5)$$

donde el subíndice 1 aparece dos veces porque se han tomado dos variables aleatorias del mismo proceso aleatorio, $\{V(\mathbf{r}_1, t)\}$. La función Γ_{11} es una función de auto-correlación, definida en la ecuación (1.24). Como la función de auto correlación es un caso especial de la función de correlación cruzada, entonces la función de auto coherencia es un caso especial de la función de coherencia mutua. Para campos estacionarios, la expresión anterior se convierte en

$$\Gamma_{11}(\tau) = \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \tau) = \langle V^*(\mathbf{r}_1, t)V(\mathbf{r}_1, t + \tau) \rangle, \quad (2.6)$$

la cual es análoga a la ecuación (1.34).

2.1.2. El grado complejo de coherencia y la ley de interferencia

A partir de esta sección se hará referencia al arreglo del experimento de Young en diversas ocasiones. Por tal motivo vale la pena describir su configuración. Ésta consiste en la alineación de una fuente luminosa, una placa opaca \mathcal{A} con dos rendijas y, al final, una pantalla de observación \mathcal{B} . La fuente se coloca sobre la mediatriz del segmento que une ambas rendijas y a cierta distancia de la placa opaca. Ésta también se encuentra separada de la pantalla de observación en la cual se espera que, bajo ciertas condiciones, se formen franjas de interferencia. Un bosquejo general del arreglo se muestra en la figura 2.1.

En breve se ilustrará el empleo de las funciones de coherencia para describir las relaciones estadísticas, o correlaciones, entre vibraciones de luz y expresarlas en términos de cantidades observables. Más específicamente, dado un campo de luz (como un haz, por ejemplo) se considerará la correlación entre

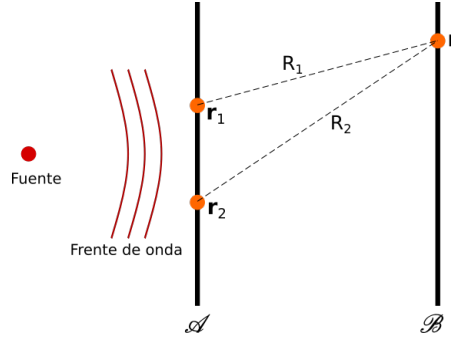


Figura 2.1: Diagrama del experimento de la doble rendija.

funciones de ensambles de campo en diferentes puntos del mismo. Supóngase que se eligen dos de dichos puntos, a saber, \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 y se investiga la intensidad promedio en cada uno de ellos. Si \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 coinciden con las posiciones de las rendijas del experimento de Young, se denominan fuentes secundarias. A cada punto del patrón de interferencia le corresponde una diferencia de camino óptico que, si es menor a la denominada longitud de coherencia, el contraste de las franjas es visible. La longitud de coherencia se define como

$$l_c = ct_c, \quad (2.7)$$

donde c es la velocidad de propagación de la luz y t_c , el tiempo de coherencia, es el ancho de banda recíproco, es decir,

$$t_c \sim \frac{2\pi}{\Delta\omega}. \quad (2.8)$$

De acuerdo a la discusión anterior resulta aceptable la idea de que el patrón de interferencia proporcione información sobre la coherencia de la luz.

El concepto de grado de coherencia es una medida normalizada de la correlación entre vibraciones de luz y fue introducido por Frits Zernike en [14], trabajo pionero en el estudio de la coherencia óptica. Algunas definiciones establecidas en esta referencia son:

- Dos vibraciones de luz son llamadas incoherentes si su superposición no produce interferencia visible.
- El grado de coherencia de dos vibraciones de luz debe ser igual a la visibilidad de las franjas de interferencia obtenidas bajo las mejores circunstancias. Esto último se refiere a que ambas intensidades sean iguales y que la diferencia de camino óptico introducida sea pequeña. El concepto de visibilidad \mathcal{V} al que se refiere es el propuesto por Michelson, es decir,

$$\mathcal{V} = \frac{\langle I \rangle_{max} - \langle I \rangle_{min}}{\langle I \rangle_{max} + \langle I \rangle_{min}}, \quad (2.9)$$

donde $\langle I \rangle_{max}$ e $\langle I \rangle_{min}$ son las intensidades máxima y mínima de dos franjas adyacentes en la región central del patrón de interferencia.

- Sean U_1 y U_2 las amplitudes complejas de dos vibraciones de luz. Se define la intensidad mutua como

$$\langle I_{12} \rangle = \langle U_1^* U_2 \rangle. \quad (2.10)$$

Con el fin de interpretar adecuadamente la expresión anterior de intensidad mutua es importante hacer la siguiente aclaración. De acuerdo a la representación escalar de una onda monocromática, $V(r, t) = Ae^{i(\phi + \omega t)}$, su amplitud compleja es $U = Ae^{i\phi}$ (se ha omitido la dependencia espacial debido a que se analiza la onda en una posición particular). En el caso monocromático, la amplitud A y la fase ϕ no cambian con el tiempo y, por lo tanto, tampoco U . Sin embargo, en el caso de ondas policromáticas (incluso si son cuasi-monocromáticas) tales cantidades si dependen del tiempo y, más aún, varían aleatoriamente. Es por esta razón que tiene sentido el promedio (temporal o de ensamble) en la ecuación (2.10).

CAPÍTULO 2. COHERENCIA DE SEGUNDO ORDEN

2.1. COHERENCIA DE SEGUNDO ORDEN EN EL DOMINIO ESPACIO-TIEMPO

Los conceptos de intensidad e intensidad mutua pueden ser expresados en términos de las funciones de coherencia. Considerando esto conviene revisar el concepto de intensidad. Usualmente, la intensidad se define como la razón de potencia óptica por unidad de área y suele ser expresada como el promedio temporal del vector de Poynting el cual, para una onda plana y linealmente polarizada, está dado por $\mathbf{S} = vws$, donde v es la velocidad de propagación, w es la densidad de energía electromagnética y \mathbf{s} es un vector unitario en la dirección de propagación (sección 3.1). Es importante notar que la magnitud del vector de Poynting tiene unidades de *energía/(tiempo · área)*. Así, el vector de Poynting describe el flujo radiante (*potencia = energía/tiempo*) por unidad de área.

Si $v = c$ (velocidad de la luz en el vacío) y además se toma $w = \epsilon_0|V(t)|^2$ (omitiendo un factor de $1/4\pi$) y se calcula el promedio temporal de la magnitud del vector de Poynting se obtiene el promedio de la irradiancia o intensidad:

$$\langle I \rangle = \langle S \rangle = \epsilon_0 c \langle V^*(t)V(t) \rangle, \quad (2.11)$$

es decir, la intensidad es directamente proporcional al cuadrado de la amplitud del campo. Con el fin de abreviar, de aquí en adelante se omitirá el factor constante $\epsilon_0 c$. Como ya se ha dicho, las expresiones de intensidad e intensidad mutua pueden derivarse de la expresión más general de coherencia mutua. Nótese que cuando $\tau = 0$ en $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \langle V^*(\mathbf{r}_1, t)V(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle$ se obtiene la expresión de intensidad mutua $J(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, es decir,

$$J(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0) = \langle V^*(\mathbf{r}_1, t)V(\mathbf{r}_2, t) \rangle. \quad (2.12)$$

Cuando además de $\tau = 0$, se cumple que $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} = \mathbf{r}_2$, se obtiene la expresión de intensidad ordinaria

$$\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}, 0) = \langle V^*(\mathbf{r}, t)V(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle I(\mathbf{r}, t) \rangle. \quad (2.13)$$

Zernike definió el grado complejo de coherencia como

$$\gamma = \frac{\langle U_1^* U_2 \rangle}{\sqrt{\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle}}, \quad (2.14)$$

donde U_i e I_i son la amplitud compleja e intensidad de la luz en la posición \mathbf{r}_i (que en el contexto del interferómetro de Young, puede corresponder a una de las rendijas). Zernike también mostró que la visibilidad debía ser igual al módulo del grado complejo de coherencia, $\mathcal{V} = |\gamma|$.

De acuerdo a la terminología empleada en este trabajo el grado complejo de coherencia se define, de manera más general, como ([1],[8])

$$\gamma_{12}(\tau) = \gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \frac{\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)}{\sqrt{\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, 0)}\sqrt{\Gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, 0)}}, \quad (2.15)$$

(definición introducida por E. Wolf en [15] y [16]) y cumple la condición

$$0 \leq |\gamma_{12}(\tau)| \leq 1. \quad (2.16)$$

La desigualdad anterior tiene sentido al observar que $\gamma_{12}(\tau)$ tiene la forma de un coeficiente de correlación, definido en (1.15) de la sección 1.1. Como ya se vio, $\Gamma_{11}(0)$ y $\Gamma_{22}(0)$ son intensidades, por lo que es posible reescribir la expresión para $\gamma_{12}(\tau)$ como

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)}{\sqrt{\langle I(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle} \sqrt{\langle I(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle}}. \quad (2.17)$$

A la definición de grado de coherencia establecida por Zernike en (2.14) se le conoce como grado complejo de coherencia para un mismo tiempo (equal-time complex degree of coherence), se representa como $j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ y, por las ecuaciones (2.12) y (2.17), se encuentra que su expresión matemática

$$j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{J(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\sqrt{\langle I(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle} \sqrt{\langle I(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle}} = \frac{\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0)}{\sqrt{\langle I(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle} \sqrt{\langle I(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle}} \quad (2.18)$$

es la misma que para $\gamma_{12}(\tau)$ pero con $\tau = 0$, de ahí su nombre.

CAPÍTULO 2. COHERENCIA DE SEGUNDO ORDEN
2.1. COHERENCIA DE SEGUNDO ORDEN EN EL DOMINIO ESPACIO-TIEMPO

Para el caso particular en que $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} = \mathbf{r}_2$, el grado complejo de coherencia se nombra como grado complejo de auto coherencia

$$\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \tau) = \frac{\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \tau)}{\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}, 0)}. \quad (2.19)$$

El módulo del grado complejo de auto coherencia, $|\gamma(\tau)|$, se denomina el grado de auto coherencia. En [29], el tiempo de coherencia, t_c , se define como el tiempo durante el cual el grado de auto coherencia disminuye a una fracción $1/e$ de su máximo valor.

Zernike estableció que el grado de coherencia debe ser igual a la visibilidad de las franjas de interferencia en un caso ideal. En la mayoría de las situaciones reales serán apenas aproximadamente iguales. En la formulación que se ofrece en [1] y [8] la visibilidad de las franjas de interferencia es igual al módulo del grado complejo de coherencia mutua, es decir, $\mathcal{V} = |\gamma_{12}|$. Este parámetro nos permite definir los tres casos más generales del estado de coherencia de la luz estocástica estadísticamente estacionaria:

- Coherencia total: $|\gamma_{12}| = 1$.
- Incoherencia total: $|\gamma_{12}| = 0$.
- Coherencia parcial: $0 < |\gamma_{12}| < 1$.

En un fenómeno de interferencia ocurre la superposición de ondas en cierta región del espacio. Si en la ecuación anterior se considera que $V(t)$ es la suma de dos componentes paralelas V_i y V_j , entonces

$$\langle V^2 \rangle = \langle (V_i + V_j)^2 \rangle = \langle V_i^2 \rangle + \langle V_j^2 \rangle + 2\langle V_i V_j \rangle, \quad (2.20)$$

desarrollando el binomio y distribuyendo el promedio ([31]). La ecuación anterior tiene la forma general de una ecuación de interferencia (ya sea que se tome un campo real o complejo) e indica que la intensidad en la región de recombinación es la suma de las intensidades individuales más un término adicional, llamado término de interferencia.

Supóngase que se elige un punto arbitrario \mathbf{r} sobre la pantalla de observación en el interferómetro de Young. Se desea analizar, en el punto \mathbf{r} y en el tiempo t , la interferencia de las ondas que atraviesan ambas rendijas (ubicadas en las posiciones \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2). Sean t_1 y t_2 los tiempos en los que la luz viaja desde las posiciones \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 , respectivamente, hasta \mathbf{r} . De forma aproximada, el campo eléctrico (usando su representación compleja) en (\mathbf{r}, t) es:

$$V(\mathbf{r}, t) = K_1 V(\mathbf{r}_1, t - t_1) + K_2 V(\mathbf{r}_2, t - t_2), \quad (2.21)$$

donde K_1 y K_2 son constantes puramente imaginarias que dependen de las características geométricas de las rendijas

$$K_1 = -\frac{iA_1}{\lambda} \quad \text{y} \quad K_2 = -\frac{iA_2}{\lambda}, \quad (2.22)$$

siendo A_1 y A_2 las áreas de las rendijas y λ la longitud de onda media de la luz (se ha asumido que ésta es cuasi-monocromática). Es necesario asumir que cada rendija tenga una área muy pequeña, de modo que la amplitud y la fase del campo sean aproximadamente constantes en cada punto de las rendijas.

Como $I(\mathbf{r}, t) = V^*(\mathbf{r}, t)V(\mathbf{r}, t)$, al desarrollar la intensidad y calcular el promedio (en procesos ergódicos el promedio de ensamble es igual al temporal) se obtiene

$$\begin{aligned} \langle I(\mathbf{r}, t) \rangle &= |K_1|^2 \langle I(\mathbf{r}_1, t - t_1) \rangle + |K_2|^2 \langle I(\mathbf{r}_2, t - t_2) \rangle + 2\text{Re}\{K_1^* K_2 \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1 - t_2)\} \\ &= |K_1|^2 \langle I(\mathbf{r}_1, t) \rangle + |K_2|^2 \langle I(\mathbf{r}_2, t) \rangle + 2\text{Re}\{K_1^* K_2 \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1 - t_2)\}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

dado que en un proceso estacionario es posible desplazar el origen temporal; entonces $\langle I(\mathbf{r}_1, t - t_1) \rangle = \langle I(\mathbf{r}_1, t) \rangle$ y $\langle I(\mathbf{r}_2, t - t_2) \rangle = \langle I(\mathbf{r}_2, t) \rangle$.

Con el fin de simplificar, sea $\langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t) \rangle = |K_1|^2 \langle I(\mathbf{r}_1, t) \rangle$ la intensidad en \mathbf{r} debida únicamente a la rendija en \mathbf{r}_1 (cerrando la rendija en \mathbf{r}_2). De forma análoga se define $\langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t) \rangle = |K_2|^2 \langle I(\mathbf{r}_2, t) \rangle$. Haciendo $\tau = t_1 - t_2$ en la expresión anterior y usando la ecuación (2.17) es posible obtener una ecuación con la misma estructura que la anterior pero involucrando el grado complejo de coherencia mutua

$$\langle I(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t) \rangle + \langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t) \rangle + 2[\langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t) \rangle]^{1/2} [\langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t) \rangle]^{1/2} \text{Re}\{\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)\}, \quad (2.24)$$

donde \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 son las posiciones de las rendijas. La ecuación anterior se conoce como la ley de interferencia y muestra que es posible expresar la parte real de $\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ en términos de las intensidades en las rendijas y en la pantalla de observación, las cuales son observables, es decir, se pueden determinar experimentalmente.

Gracias a la ley de interferencia y a la visibilidad es posible determinar la parte real y la magnitud del grado complejo de coherencia en términos de intensidades. Sin embargo, la parte real y la magnitud de una función compleja no la definen por completo. Es necesario determinar su argumento. En [30], sec. 10.4.1, se explica que la ubicación de las franjas debidas a luz quasi-monocromática se recorre una distancia de

$$x = \frac{\bar{\lambda}a}{2\pi d}\alpha_{12}(\tau) \quad (2.25)$$

con respecto a la ubicación esperada para las franjas de luz monocromática y en fase. En esta expresión, $\bar{\lambda}$ es la longitud media de la luz, a es la separación entre el plano que contiene las rendijas y el de observación, d es la distancia entre las rendijas y $\alpha_{12}(\tau)$ se define como

$$\alpha_{12}(\tau) = 2\pi\bar{\nu}\tau + \arg\gamma_{12}(\tau) \quad (2.26)$$

y $\arg\gamma_{12}(\tau)$ es el argumento de $\gamma_{12}(\tau)$. Por lo anterior, el grado complejo de coherencia puede ser determinado en función de intensidades y separaciones entre franjas del patrón de interferencia.

2.1.3. Propagación de las funciones de correlación

La función de coherencia mutua como solución de la ecuación de onda

A continuación se mostrará que la función de coherencia mutua satisface la ecuación de onda, lo cual fue probado por E. Wolf en [16]. Se ha definido a $V(\mathbf{r}, t)$ como la representación compleja del campo eléctrico de una onda de luz, entonces debe satisfacer la ecuación de onda

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} V(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2.27)$$

Si se considera que $V(\mathbf{r}, t)$ es una función analítica asociada al campo eléctrico real (half range complex analytic function, sección 1.2), entonces puede ser expresada en términos de sus componentes espectrales $v(\mathbf{r}, \nu)$ como una transformada inversa de Fourier

$$V(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty v(\mathbf{r}, \nu) e^{-i2\pi\nu t} d\nu. \quad (2.28)$$

El límite inferior de la integral es 0 y no $-\infty$ puesto que se está empleando la representación de señal analítica compleja, como ya se dijo. Introduciendo la expresión anterior en la ecuación de onda se tiene que

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left[\int_0^\infty v(\mathbf{r}, \nu) e^{-i2\pi\nu t} d\nu \right] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\int_0^\infty v(\mathbf{r}, \nu) e^{-i2\pi\nu t} d\nu \right] &= 0 \\ \int_0^\infty \nabla^2 [v(\mathbf{r}, \nu)] e^{-i2\pi\nu t} d\nu - \frac{1}{c^2} \int_0^\infty v(\mathbf{r}, \nu) \frac{\partial^2}{\partial t^2} [e^{-i2\pi\nu t}] d\nu &= 0 \\ \int_0^\infty \left[\nabla^2 v(\mathbf{r}, \nu) + \left(\frac{2\pi\nu}{c} \right)^2 v(\mathbf{r}, \nu) \right] e^{-i2\pi\nu t} d\nu &= 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

De la ecuación anterior se obtiene que

$$\nabla^2 v(\mathbf{r}, \nu) + \left(\frac{2\pi\nu}{c} \right)^2 v(\mathbf{r}, \nu) = 0. \quad (2.30)$$

Por otro lado, conviene expresar la función de coherencia mutua $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ en términos de las componentes espectrales del campo complejo en las posiciones \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 . Esto se logra como sigue. Por la definición

CAPÍTULO 2. COHERENCIA DE SEGUNDO ORDEN
2.1. COHERENCIA DE SEGUNDO ORDEN EN EL DOMINIO ESPACIO-TIEMPO

de $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ y asumiendo que el haz de luz puede ser descrito como un proceso estacionario y ergódico se tiene que

$$\begin{aligned}\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) &= \langle V^*(\mathbf{r}_1, t)V(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T V^*(\mathbf{r}_1, t)V(\mathbf{r}_2, t + \tau) dt.\end{aligned}\quad (2.31)$$

La correlación cruzada de las funciones $f(t)$ y $g(t)$ es igual a la convolución de $f^*(-t)$ y $g(t)$, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)g(t + \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(-t)g(\tau - t) dt. \quad (2.32)$$

Si, en la ecuación anterior, $V(\mathbf{r}_1, t)$ toma el lugar de $f(t)$ y $V(\mathbf{r}_2, t)$ el de $g(t)$, se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} V^*(\mathbf{r}_1, t)V(\mathbf{r}_2, t + \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} V^*(\mathbf{r}_1, -t)V(\mathbf{r}_2, \tau - t) dt = C(\tau). \quad (2.33)$$

En esta ecuación, la integral del segundo miembro define una función conocida como la convolución de $V^*(\mathbf{r}_1, -t)$ y $V(\mathbf{r}_2, t)$ y en lo sucesivo se denotará por $C(\tau)$. (Recordatorio: $C(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C_1(y)C_2(x-y)dy$).

En el análisis de Fourier se establece que

$$\mathcal{F}\{f^*(-t)\} = \mathcal{F}^*\{f(t)\}, \quad (2.34)$$

($\mathcal{F}\{ \}$) representa la transformada de Fourier por lo que

$$\mathcal{F}\{V^*(\mathbf{r}_1, -t)\} = \mathcal{F}^*\{V(\mathbf{r}_1, t)\} = v^*(\mathbf{r}_1, \nu), \quad (2.35)$$

de modo que $v(\mathbf{r}_1, \nu)$ es la transformada de Fourier de $V(\mathbf{r}_1, t)$. Si, además, $v(\mathbf{r}_2, \nu)$ es la transformada de Fourier de $V(\mathbf{r}_2, t)$, por el teorema de convolución en el tiempo se tiene que

$$\mathcal{F}\{C(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau)e^{i2\pi\nu\tau} d\tau = v^*(\mathbf{r}_1, \nu)v(\mathbf{r}_2, \nu). \quad (2.36)$$

Aplicando la transformada inversa de Fourier a la ecuación anterior se tiene

$$C(\tau) = \int_0^{\infty} v^*(\mathbf{r}_1, \nu)v(\mathbf{r}_2, \nu)e^{-i2\pi\nu\tau} d\nu. \quad (2.37)$$

De las ecuaciones (2.33) y (2.37) resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} V^*(\mathbf{r}_1, t)V(\mathbf{r}_2, t + \tau) dt = \int_0^{\infty} v^*(\mathbf{r}_1, \nu)v(\mathbf{r}_2, \nu)e^{-i2\pi\nu\tau} d\nu, \quad (2.38)$$

de donde

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T V^*(\mathbf{r}_1, t)V(\mathbf{r}_2, t + \tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^{\infty} v^*(\mathbf{r}_1, \nu)v(\mathbf{r}_2, \nu)e^{-i2\pi\nu\tau} d\nu \quad (2.39)$$

y por lo tanto

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^{\infty} v^*(\mathbf{r}_1, \nu)v(\mathbf{r}_2, \nu)e^{-i2\pi\nu\tau} d\nu. \quad (2.40)$$

Empleando la ecuación anterior y el operador

$$\nabla_1^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \quad (2.41)$$

es posible calcular el laplaciano de la función de coherencia mutua con respecto a las coordenadas del punto \mathbf{r}_1 :

$$\nabla_1^2 \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^{\infty} [\nabla_1^2 v^*(\mathbf{r}_1, \nu)]v(\mathbf{r}_2, \nu)e^{-i2\pi\nu\tau} d\nu, \quad (2.42)$$

CAPÍTULO 2. COHERENCIA DE SEGUNDO ORDEN

2.1. COHERENCIA DE SEGUNDO ORDEN EN EL DOMINIO ESPACIO-TIEMPO

pero por la ecuación (2.30): $\nabla_1^2 v^*(\mathbf{r}_1, \nu) = -\left(\frac{2\pi\nu}{c}\right)^2 v^*(\mathbf{r}_1, \nu) \implies$

$$\nabla_1^2 \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = -\frac{2\pi^2}{c^2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^\infty \nu^2 v^*(\mathbf{r}_1, \nu) v(\mathbf{r}_2, \nu) e^{-i2\pi\nu\tau} d\nu. \quad (2.43)$$

Si ahora se deriva $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ dos veces con respecto al tiempo, se obtiene

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = -2\pi^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^\infty \nu^2 v^*(\mathbf{r}_1, \nu) v(\mathbf{r}_2, \nu) e^{-i2\pi\nu\tau} d\nu. \quad (2.44)$$

Comparando las dos últimas ecuaciones es fácil notar que

$$\nabla_1^2 \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = 0, \quad (2.45)$$

es decir, en el vacío, la función de coherencia mutua satisface la ecuación de onda. Repitiendo el proceso anterior pero ahora usando el operador

$$\nabla_2^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \quad (2.46)$$

se obtiene

$$\nabla_2^2 \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = 0. \quad (2.47)$$

Las ecuaciones (2.45) y (2.47) indican que, en el vacío, la función de coherencia mutua satisface la ecuación de onda con respecto a cada uno de sus puntos y a la diferencia temporal τ . Dichas ecuaciones tienen un carácter general en el sentido de que muchos resultados establecidos por Zernike y otros (como el teorema de Van Cittert-Zernike) pueden ser derivados de ellas. [10]

La función de intensidad mutua como solución aproximada de la ecuación de Helmholtz

Sean $V(\mathbf{r}_1, t) = A_1(t)e^{i[\phi_1(t) - \bar{\omega}t]}$ y $V(\mathbf{r}_2, t) = A_2(t)e^{i[\phi_2(t) - \bar{\omega}t]}$ las representaciones complejas de campo quasi-monocromático en las posiciones \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 . Luego,

$$V^*(\mathbf{r}_1, t)V(\mathbf{r}_2, t + \tau) = A_1(t)A_2(t + \tau)e^{i[\phi_2(t + \tau) - \phi_1(t)]}e^{-i\bar{\omega}\tau}.$$

Sin embargo, si τ es menor al tiempo de coherencia, son válidas las aproximaciones $A_2(t + \tau) \approx A_2(t)$ y $\phi_2(t + \tau) \approx \phi_2(t)$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} V^*(\mathbf{r}_1, t)V(\mathbf{r}_2, t + \tau) &\approx A_1(t)A_2(t)e^{i[\phi_2(t) - \phi_1(t)]}e^{-i\bar{\omega}\tau} \\ &\approx V^*(\mathbf{r}_1, t)V(\mathbf{r}_2, t)e^{-i\bar{\omega}\tau}. \end{aligned}$$

Por lo anterior y por las definiciones (2.4) y (2.12),

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) \approx J(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)e^{-i\bar{\omega}\tau}, \quad (2.48)$$

y por la ecuación (2.18)

$$\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) \approx j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)e^{-i\bar{\omega}\tau}. \quad (2.49)$$

Si se emplea la aproximación (2.48) en las ecuaciones de onda, (2.45) y (2.47), se obtiene por desarrollo directo

$$\nabla_1^2 J(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \bar{k}^2 J(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \approx 0 \quad \text{y} \quad \nabla_2^2 J(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \bar{k}^2 J(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \approx 0, \quad (2.50)$$

esto es, cuando τ es menor que el tiempo de coherencia, la intensidad mutua satisface, de manera aproximada, la ecuación de Helmholtz con respecto a \mathbf{r}_1 y a \mathbf{r}_2 .

En [14] Zernike presentó la ley de propagación para la intensidad mutua cuya deducción también se encuentra en [3], sec. 5.4, y en [8], sec. 3.4, y aquí se resume brevemente.

CAPÍTULO 2. COHERENCIA DE SEGUNDO ORDEN
2.1. COHERENCIA DE SEGUNDO ORDEN EN EL DOMINIO ESPACIO-TIEMPO

Primero es necesario hacer un par de consideraciones acerca del principio de Huygens-Fresnel (sec. 1.3). Primero, note que el primer factor de la ecuación (1.70), Ae^{ikr_0}/r_0 , es la amplitud compleja en el frente de onda de radio r_0 , como se explica en la subsección 1.3.1. Segundo, bajo la hipótesis de que el ángulo de difracción es pequeño, se puede pensar que la luz atraviesa una región correspondiente a la primera zona de Fresnel y, por la ecuación (1.69), $K_1 = -i/\lambda$. Dado que en un haz la dirección de propagación de las ondas es paraxial, se satisface la hipótesis anterior.

Ahora considere una superficie \mathcal{A} que es atravesada por un haz de luz quasi-monocromática. Sean Q_1 un punto arbitrario sobre la superficie y $U(Q_1)$ la amplitud compleja en dicho punto. Por el principio de Huygens-Fresnel, y tomando en cuenta las consideraciones anteriores, es posible calcular la amplitud compleja en un punto P_1 en términos de la amplitud compleja a través de la superficie como

$$U(P_1) = -\frac{i}{\lambda} \iint_{\mathcal{A}} U(Q_1) \frac{e^{i\bar{k}R_1}}{R_1} dQ_1. \quad (2.51)$$

En la expresión anterior, R_1 es la distancia entre Q_1 y P_1 , \bar{k} es el número de onda asociado al valor medio de la longitud de onda, $\bar{\lambda}$, y dQ_1 es el elemento de superficie indicado por la posición Q_1 . Además, note que la superficie \mathcal{A} no es necesariamente el frente de onda esférico considerado en la formulación del principio de Huygens-Fresnel. Por esta razón la amplitud compleja sobre la superficie no es constante y, en consecuencia, en este caso no puede salir de la integral. De manera completamente análoga se repite el cálculo para un segundo punto, P_2 ,

$$U(P_2) = -\frac{i}{\lambda} \iint_{\mathcal{A}} U(Q_2) \frac{e^{i\bar{k}R_2}}{R_2} dQ_2. \quad (2.52)$$

Empleando las dos ecuaciones anteriores es posible calcular la intensidad mutua entre las posiciones P_1 y P_2 como

$$J(P_1, P_2) = \langle U^*(P_1)U(P_2) \rangle = \frac{1}{\lambda^2} \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{A}} J(Q_1, Q_2) \frac{e^{i\bar{k}(R_2-R_1)}}{R_1 R_2} dQ_1 dQ_2, \quad (2.53)$$

siendo ésta la ley de Zernike para la propagación de la intensidad mutua.

2.1.4. Teorema de Van Cittert-Zernike

Tanto la deducción matemática como el significado del teorema de Van Cittert-Zernike se discuten en diferentes referencias, por ejemplo en [8], [1], [30] y [3]. En esta última, la formulación del teorema se deduce a partir de la ley de propagación de la intensidad mutua. Por su parte, [8] presenta una construcción más intuitiva. Comienza considerando una fuente extendida plana S como un conjunto de fuentes más pequeñas S_m (de dimensiones menores a la longitud de onda promedio de la luz emitida) de modo que cada una de ellas emita ondas esféricas y que la suma de las contribuciones de todos estos elementos sea igual al campo de la fuente extendida. Dado que se desea calcular la intensidad mutua a cierta distancia de la fuente, se consideran dos puntos de observación P_1 y P_2 contenidos en un plano paralelo al plano de la fuente.

Si las distancias entre cada elemento S_m y los puntos de observación, R_{m1} y R_{m2} , son considerablemente mayores a las dimensiones de la fuente y los ángulos que forman con la normal al plano de la fuente son pequeños, entonces el campo en un punto P_i es la suma de los campos debidos a cada elemento S_m

$$V_i(t) = \sum_m V_{mi}(t) = \sum_m \frac{A_m(t - R_{mi}/c)}{R_{mi}} e^{-i\bar{\omega}(t - R_{mi}/c)}, \quad (2.54)$$

recordando que las ondas son esféricas. Por la representación anterior del campo, la intensidad mutua en P_1 y P_2 es

$$J(P_1, P_2) = \langle V_1(t)V_2(t) \rangle = \sum_m \langle V_{m1}^*(t)V_{m2}(t) \rangle + \sum_m \sum_{m \neq n} \langle V_{m1}^*(t)V_{n2}(t) \rangle. \quad (2.55)$$

CAPÍTULO 2. COHERENCIA DE SEGUNDO ORDEN

2.1. COHERENCIA DE SEGUNDO ORDEN EN EL DOMINIO ESPACIO-TIEMPO

Bajo la suposición de que los campos generados por las fuentes S_m son estadísticamente independientes y tienen promedio nulo, el segundo término del miembro derecho de la ecuación anterior también es nulo. En consecuencia,

$$\begin{aligned} J(P_1, P_2) &= \sum_m \langle A_m^*(t - R_{m1}/c) A_m(t - R_{m2}/c) \rangle \frac{\exp \left[\frac{i\bar{\omega}}{c} (R_{m2} - R_{m1}) \right]}{R_{m1} R_{m2}} \\ &= \sum_m \langle A_m^*(t) A_m[t + (R_{m1} - R_{m2})/c] \rangle \frac{\exp \left[i\bar{k} (R_{m2} - R_{m1}) \right]}{R_{m1} R_{m2}}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

En el último paso se ha reemplazado t por $t + R_{m1}/c$ aprovechando el carácter estacionario del campo. También se ha usado $k = \bar{\omega}/c$. Además, en un campo quasi-monocromático, la amplitud $a(t)$ y la fase $\phi(t)$, si bien varían con el tiempo, lo hacen muy lentamente en intervalos que son menores al tiempo de coherencia t_c . Es decir, $a(t) \approx a(t + t')$ y $\phi(t) \approx \phi(t + t')$, siempre que $t' < t_c$. Esto implica que $A_m[t + (R_{m1} - R_{m2})/c] \approx A_m(t)$, por lo que la expresión anterior se simplifica

$$J(P_1, P_2) = \sum_m \langle A_m^*(t) A_m(t) \rangle \frac{\exp \left[i\bar{k} (R_{m2} - R_{m1}) \right]}{R_{m1} R_{m2}}. \quad (2.57)$$

Vale la pena comentar que la cantidad A_m no es amplitud (recuérdese que la amplitud de una onda esférica es A_m/R), más bien tiene unidades de *amplitud* \times *distancia*. Esto significa que la cantidad $\langle A_m^*(t) A_m(t) \rangle$ tendrá unidades de *amplitud*² \times *distancia*², o bien, *intensidad* \times *area*. Por este análisis dimensional, al considerar la fuente extendida como continua (asumiendo que los elementos S_m pueden considerarse infinitesimales), la cantidad $\langle A_m^*(t) A_m(t) \rangle$ puede ser interpretada como la intensidad en la posición (x, y) del elemento diferencial por el área de éste, es decir, en el límite $\langle A_m^*(t) A_m(t) \rangle = I(x, y) dx dy$. Al reemplazar la sumatoria por integración se obtiene

$$J(P_1, P_2) = \int_S I(x, y) \frac{\exp \left[i\bar{k} (R_2(x, y) - R_1(x, y)) \right]}{R_1(x, y) R_2(x, y)} dx dy, \quad (2.58)$$

siendo x y y las coordenadas que barren la superficie de la fuente extendida S . La expresión anterior devuelve intensidad cuando $P_1 = P = P_2$,

$$I(P) = \int_S \frac{I(x, y)}{R^2(x, y)} dx dy \quad (2.59)$$

y, por la ecuación (2.18), el grado complejo de coherencia para el mismo instante de tiempo es

$$j(P_1, P_2) = \frac{1}{\sqrt{I(P_1)} \sqrt{I(P_2)}} \int_S I(x, y) \frac{\exp \left[i\bar{k} (R_2(x, y) - R_1(x, y)) \right]}{R_1(x, y) R_2(x, y)} dx dy. \quad (2.60)$$

Ésta es la formulación matemática del teorema de Van Cittert-Zernike.

Wolf notó que la estructura matemática del teorema de Van Cittert-Zernike era similar a la distribución de luz de una onda esférica difractada por una rendija en una pantalla oscura. También observó similitud entre la ley de Zernike para la propagación de intensidad mutua y una fórmula basada en el principio de Huygens. [9] Con el fin de ilustrar la primera similitud, se escribirá la integral de difracción basada en el principio de Huygens de la sección 1.3, pero en este caso para una onda convergente

$$U(P) = A \int \int_S K(\chi) \frac{e^{-ikr_0}}{r_0} \frac{e^{iks}}{s} dS. \quad (2.61)$$

Puede verse que la forma de esta expresión es muy parecida a la de la ecuación (2.60), si bien las cantidades que describen ambas ecuaciones son diferentes.

Cuando los puntos P_1 y P_2 se encuentran a distancias grandes de la fuente (far zone), entonces, al considerar a (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) y (ξ, η) como las posiciones de P_1 , P_2 y de un elemento diferencial sobre el plano de la fuente, respectivamente, y a R como la distancia entre el plano de la fuente y el

plano que contiene a P_1 y P_2 , entonces se deriva ([8], sec. 3.2, págs. 42,43) la forma del teorema de Van Cittert-Zernike para zonas distantes

$$j(P_1, P_2) = \frac{e^{-i\psi} \int \int_{\sigma} I(\xi, \eta) e^{-ik(p\xi + q\eta)} d\xi d\eta}{\int \int_{\sigma} I(\xi, \eta) d\xi d\eta}, \quad (2.62)$$

donde

$$\psi = \frac{\bar{k}[(X_2^2 + Y_2^2) - (X_1^2 + Y_1^2)]}{2R}, \quad p = \frac{X_2 - X_1}{R} \quad \text{y} \quad q = \frac{Y_2 - Y_1}{R}. \quad (2.63)$$

La ecuación (2.62) tiene una forma similar a la difracción de Fraunhofer (cuando en (1.79) $f(\xi, \eta)$ consta sólo de términos lineales). Con el tiempo, Wolf halló la causa de estas similitudes: la ley de propagación de intensidad mutua y el teorema de Van Cittert-Zernike son soluciones aproximadas de la ecuación de onda para la función de coherencia mutua, de la misma forma en que el principio de Huygens-Fresnel lo es para la ecuación de onda para campo electromagnético. [9]

2.2. Coherencia de segundo orden en el dominio espacio-frecuencia

En la sección anterior se estableció que en cada posición del espacio el campo eléctrico se representa por medio de un ensamble $\{V(\mathbf{r}, t)\}$, el cual consiste en un conjunto infinito de realizaciones. Dada una realización particular arbitraria, ${}^jV(\mathbf{r}, t)$, se asumirá que es posible calcular su transformada de Fourier

$${}^j\zeta(\mathbf{r}, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} {}^jV(\mathbf{r}, t) e^{i2\pi\nu t} dt. \quad (2.64)$$

Aquí no se hablará del proceso para justificar que una realización de un ensamble tenga transformada de Fourier puesto que es largo. Bastará con comentar que, al ser ${}^jV(\mathbf{r}, t)$ una realización de un proceso aleatorio estacionario, entonces su distribución de probabilidad no depende del tiempo, de manera que nada asegura que ${}^jV(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow -\infty$ o cuando $t \rightarrow \infty$ y, por lo tanto, no es posible asegurar que la energía de dicha función sea finita. Dicho de otra forma, no es posible asegurar que ${}^jV(\mathbf{r}, t)$ sea de cuadrado integrable, lo cual es una condición para que una función del tiempo tenga transformada de Fourier. Si fuera posible hallar la transformada de Fourier de cada realización ${}^jV(\mathbf{r}, t)$, se encontraría un nuevo ensamble $\{\zeta(\mathbf{r}, \nu)\}$ con el mismo número de elementos que el anterior.

2.2.1. Teorema de Wiener-Khintchine

Al evaluar el promedio de $\zeta^*(\mathbf{r}, \nu)\zeta(\mathbf{r}, \nu')$, es posible mostrar (como se describe en [8]) la relación

$$\langle \zeta^*(\mathbf{r}, \nu)\zeta(\mathbf{r}, \nu') \rangle = S(\mathbf{r}, \nu)\delta(\nu - \nu'), \quad (2.65)$$

en la que δ representa la función delta de Dirac y $S(\mathbf{r}, \nu)$ se define como

$$S(\mathbf{r}, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \tau) e^{i2\pi\nu\tau} d\tau \quad (2.66)$$

ecuación que, al ser invertida, da lugar a la expresión

$$\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \tau) = \int_0^{\infty} S(\mathbf{r}, \nu) e^{-i2\pi\nu\tau} d\nu, \quad (2.67)$$

en la que se ha usado la representación de señal analítica compleja. A $S(\mathbf{r}, \nu)$ se le da el nombre de función de densidad espectral. Las dos últimas ecuaciones resumen el teorema de Wiener-Khintchine según el cual, la función de auto-coherencia $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \tau)$ y la densidad espectral $S(\mathbf{r}, \nu)$ forman un par de transformadas de Fourier.

CAPÍTULO 2. COHERENCIA DE SEGUNDO ORDEN

2.2. COHERENCIA DE SEGUNDO ORDEN EN EL DOMINIO ESPACIO-FRECUENCIA

Ahora considérense dos ensambles $\{V(\mathbf{r}_1, t)\}$ y $\{V(\mathbf{r}_2, t)\}$, así como sus correspondientes en el espacio de la frecuencia, $\{\zeta(\mathbf{r}_1, \nu)\}$ y $\{\zeta(\mathbf{r}_2, \nu)\}$. De forma análoga, es posible introducir la función de densidad espectral cruzada $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$ al derivar la relación

$$\langle \zeta^*(\mathbf{r}_1, \nu) \zeta(\mathbf{r}_2, \nu') \rangle = W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) \delta(\nu - \nu'). \quad (2.68)$$

Su definición explícita

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) e^{i2\pi\nu\tau} d\tau \quad (2.69)$$

y su inversión

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \int_0^{\infty} W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) e^{-i2\pi\nu\tau} d\nu \quad (2.70)$$

conforman el teorema generalizado de Wiener-Khintchine, que establece que la función de coherencia mutua $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ y la función de densidad espectral cruzada $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$ conforman un par de transformadas de Fourier.

La función de densidad espectral es un caso especial de la función de densidad espectral cruzada. Como puede observarse en (2.65) y (2.68), cuando $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} = \mathbf{r}_2$ se tiene

$$S(\mathbf{r}, \nu) = W(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \nu). \quad (2.71)$$

Una propiedad importante de la función de densidad espectral cruzada es que satisface la condición de Hermiticidad. Empleando la ecuación (1.47) (Hermiticidad de $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$) en (2.69),

$$\begin{aligned} W^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, -\tau) e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau \\ &= W(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, \nu). \end{aligned} \quad (2.72)$$

2.2.2. Representación de modos coherentes

La función de coherencia mutua se define como una correlación entre funciones de ensambles de campo eléctrico. Sin embargo, de acuerdo a (2.68), la función de densidad espectral no se representa de la misma forma. Con el tiempo se mostró que es posible hallar ensambles de funciones tales que $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$ pueda representarse como la correlación entre dos de ellas. Wolf describe esto en [18] para el caso de ondas escalares (el caso vectorial se analiza en [19] y en [27]). En las siguientes líneas se rescatarán las ideas principales para hallar los ensambles deseados.

Dado que la función de densidad espectral cruzada satisface la condición de Hermiticidad (2.72), es de cuadrado integrable y definida no negativa (consultar la referencia antes citada), entonces

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = \sum_n \lambda_n(\nu) \phi_n^*(\mathbf{r}_1, \nu) \phi_n(\mathbf{r}_2, \nu). \quad (2.73)$$

A ésta se le conoce como la representación de modos coherentes (coherent-mode representation) de la densidad espectral cruzada. Las ϕ_n 's y las λ_n 's son eigenfunciones y eigenvalores de la integral de Fredholm

$$\int_D W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) \phi_n(\mathbf{r}_1, \nu) d^3\mathbf{r}_1 = \lambda_n(\nu) \phi_n(\mathbf{r}_2, \nu). \quad (2.74)$$

Sea $\{U(\mathbf{r}, \nu)\}$ un ensamble tal que sus funciones muestrales sean combinaciones lineales de las eigenfunciones de la integral de Fredholm, i.e.,

$$U(\mathbf{r}, \nu) = \sum_n a_n(\nu) \phi_n(\mathbf{r}, \nu), \quad (2.75)$$

donde las a_n 's son variables aleatorias. Luego

$$\langle U^*(\mathbf{r}_1, \nu) U(\mathbf{r}_2, \nu) \rangle_\nu = \sum_n \sum_m \langle a_n^*(\nu) a_m(\nu) \rangle_\nu \phi_n^*(\mathbf{r}_1, \nu) \phi_m(\mathbf{r}_2, \nu). \quad (2.76)$$

El subíndice en $\langle \ \rangle_\nu$ indica que el promedio se toma en un ensamble definido en el dominio de la frecuencia. Si ahora se asume que

$$\langle a_n^*(\nu)a_m(\nu) \rangle_\nu = \lambda_n(\nu)\delta_{nm}, \quad (2.77)$$

entonces se obtiene

$$\langle U^*(\mathbf{r}_1, \nu)U(\mathbf{r}_2, \nu) \rangle_\nu = \sum_n \lambda_n(\nu)\phi_n^*(\mathbf{r}_1, \nu)\phi_n(\mathbf{r}_2, \nu) \quad (2.78)$$

y, al comparar la ecuación anterior con (2.73), se deduce que

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = \langle U^*(\mathbf{r}_1, \nu)U(\mathbf{r}_2, \nu) \rangle_\nu, \quad (2.79)$$

i.e., es posible representar la densidad espectral cruzada como una correlación entre ensambles de funciones de onda monocromáticas $\{V(\mathbf{r}_1, t) = U(\mathbf{r}_1, \nu)e^{-i2\pi\nu t}\}$ y $\{V(\mathbf{r}_2, t) = U(\mathbf{r}_2, \nu)e^{-i2\pi\nu t}\}$. Es importante resaltar que $U(\mathbf{r}_i, \nu)$ no es una componente espectral de $V(\mathbf{r}_i, t)$ sino su amplitud compleja, i.e., $U(\mathbf{r}_i, \nu) \neq \zeta(\mathbf{r}_i, \nu)$.

2.2.3. El grado espectral de coherencia y la ley espectral de interferencia

De forma análoga al grado complejo de coherencia mutua, se define el grado espectral de coherencia (también complejo) en la frecuencia ν y en los puntos \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 como

$$\begin{aligned} \mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) &= \frac{W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)}{\sqrt{W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \nu)}\sqrt{W(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, \nu)}} \\ &= \frac{W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)}{\sqrt{S(\mathbf{r}_1, \nu)}\sqrt{S(\mathbf{r}_2, \nu)}}. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Al ser una medida normalizada, cumple la condición

$$0 \leq |\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)| \leq 1. \quad (2.81)$$

El grado complejo (temporal) de coherencia y el grado espectral de coherencia no satisfacen la tesis del teorema de Wiener-Khintchine. Esto es, las funciones $\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ y $\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$ no conforman un par de transformadas de Fourier.

La visibilidad espectral se define como

$$\mathcal{V}(\mathbf{r}, \nu) = \frac{S_{max}(\mathbf{r}, \nu) - S_{min}(\mathbf{r}, \nu)}{S_{max}(\mathbf{r}, \nu) + S_{min}(\mathbf{r}, \nu)}, \quad (2.82)$$

donde las densidades espectrales máxima y mínima se toman en una pareja de franjas adyacentes de interferencia. La visibilidad espectral también satisface

$$\mathcal{V}(\mathbf{r}, \nu) = |\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)|. \quad (2.83)$$

De forma similar al análisis realizado en el espacio-tiempo, es posible obtener la versión espectral de la ley de interferencia y expresarla en términos de densidades espectrales. [8] la deduce a partir de la representación del modo coherente del campo. El desarrollo que se resume en las siguientes líneas es el sugerido por [1]. En el mismo contexto anterior del interferómetro de Young se usa la expresión (2.21) de $V(\mathbf{r}, t)$ para calcular la función de auto-coherencia

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \tau) &= |K_1|^2\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \tau) + |K_2|^2\Gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, \tau) + K_1^*K_2\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau + t_1 - t_2) + K_1K_2^*\Gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, \tau + t_2 - t_1) \\ &= |K_1|^2\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \tau) + |K_2|^2\Gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, \tau) \\ &\quad + K_1^*K_2\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)e^{-i2\pi\nu(t_1-t_2)} + K_1K_2^*\Gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, \tau)e^{-i2\pi\nu(t_2-t_1)}, \end{aligned} \quad (2.84)$$

donde se ha empleado el hecho de que la amplitud $a(t)$ y la fase $\phi(t)$ varían muy lentamente en intervalos menores al tiempo de coherencia t_c . Como se dijo antes, $a(t) \approx a(t + t')$ y $\phi(t) \approx \phi(t + t')$, siempre que $t' < t_c$. Por lo anterior,

$$V(\mathbf{r}_2, \tau + t_1 - t_2) \approx V(\mathbf{r}_2, \tau)e^{-i2\pi\nu(t_1-t_2)} \quad (2.85)$$

CAPÍTULO 2. COHERENCIA DE SEGUNDO ORDEN

2.2. COHERENCIA DE SEGUNDO ORDEN EN EL DOMINIO ESPACIO-FRECUENCIA

lo que, a su vez, implica

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau + t_1 - t_2) \approx \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) e^{-i2\pi\nu(t_1 - t_2)}. \quad (2.86)$$

Al tomar la transformada de Fourier de la expresión (2.84), por el teorema de Wiener-Khinchine, se obtiene

$$W(\mathbf{r}, \nu) = |K_1|^2 W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \nu) + |K_2|^2 W(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, \nu) + K_1^* K_2 W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) e^{-i2\pi\nu(t_1 - t_2)} + K_1 K_2^* W(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, \nu) e^{-i2\pi\nu(t_2 - t_1)}, \quad (2.87)$$

mientras que por (2.71) y la Hermiticidad de $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$

$$S(\mathbf{r}, \nu) = |K_1|^2 S(\mathbf{r}_1, \nu) + |K_2|^2 S(\mathbf{r}_2, \nu) + 2\text{Re}\{K_1^* K_2 W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) e^{-i2\pi\nu(t_1 - t_2)}\}. \quad (2.88)$$

Sean $S^{(1)}(\mathbf{r}, \nu) = |K_1|^2 S(\mathbf{r}_1, \nu)$ la densidad espectral debida a la luz que atraviesa la rendija \mathbf{r}_1 con la otra rendija obstruida y $S^{(2)}(\mathbf{r}, \nu) = |K_2|^2 S(\mathbf{r}_2, \nu)$ la complementaria. Si además se emplea la expresión del grado espectral de coherencia (2.80) se llega, finalmente, a la expresión

$$S(\mathbf{r}, \nu) = S^{(1)}(\mathbf{r}, \nu) + S^{(2)}(\mathbf{r}, \nu) + 2[S^{(1)}(\mathbf{r}, \nu)]^{1/2}[S^{(2)}(\mathbf{r}, \nu)]^{1/2}\text{Re}\{\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) e^{-i2\pi\nu(t_1 - t_2)}\}. \quad (2.89)$$

La anterior es la versión escalar de ley espectral de interferencia y establece que la parte real del grado espectral de coherencia puede hallarse en términos de densidades espectrales. Así como las intensidades son las observables en el dominio espacio-tiempo, las densidades espectrales lo son en el dominio espacio-frecuencia.

En [32] James y Wolf proponen un método para determinar experimentalmente la magnitud $|\mu_{12}(\nu)|$ y el argumento $\beta_{12}(\nu)$ del grado espectral de coherencia para ondas escalares. Aquí se resumen las ideas importantes de este método. Primero es necesario asegurar que $S^{(1)}(\mathbf{r}, \nu) = S^{(2)}(\mathbf{r}, \nu)$ en la ley espectral de interferencia, por lo que

$$S(\mathbf{r}, \nu) = 2S^{(1)}(\mathbf{r}, \nu)\{1 + |\mu_{12}(\nu)| \cos[\beta_{12}(\nu) - 2\pi\tau]\}, \quad (2.90)$$

donde se ha hecho $\tau = t_1 - t_2$. En seguida se define la función

$$f(\tau, \nu) = \frac{S(\mathbf{r}, \nu)}{2S^{(1)}(\mathbf{r}, \nu)} - 1 = |\mu_{12}(\nu)| \cos[\beta_{12}(\nu) - 2\pi\tau]. \quad (2.91)$$

Por el primer renglón de esta ecuación puede verse que $f(\tau, \nu)$ puede ser calculada en términos de densidades espectrales y, por lo tanto, determinada a partir de mediciones. Al desarrollar $\cos[\beta_{12}(\nu) - 2\pi\tau]$ por identidad trigonométrica y renombrar las partes real e imaginaria de $\mu_{12}(\nu)$ como

$$C_{12}(\nu) = |\mu_{12}(\nu)| \cos[\beta_{12}(\nu)] \quad \text{y} \quad S_{12}(\nu) = |\mu_{12}(\nu)| \sin[\beta_{12}(\nu)], \quad (2.92)$$

respectivamente, se tiene que

$$f(\tau, \nu) = C_{12}(\nu) \cos(2\pi\nu\tau) + S_{12}(\nu) \sin(2\pi\nu\tau). \quad (2.93)$$

Sigue medir $f(\tau, \nu)$ para dos diferencias de tiempo, τ_1 y τ_2 diferentes, de manera que se obtengan dos ecuaciones

$$f(\tau_1, \nu) = C_{12}(\nu) \cos(2\pi\nu\tau_1) + S_{12}(\nu) \sin(2\pi\nu\tau_1) \quad (2.94)$$

y

$$f(\tau_2, \nu) = C_{12}(\nu) \cos(2\pi\nu\tau_2) + S_{12}(\nu) \sin(2\pi\nu\tau_2). \quad (2.95)$$

Es necesario recordar que τ_1 y τ_2 están asociadas a diferencias de camino y, por lo tanto, se pueden medir. Al resolver las dos ecuaciones anteriores para $C_{12}(\nu)$ y $S_{12}(\nu)$ se obtienen las expresiones

$$C_{12}(\nu) = \frac{\sin(2\pi\nu\tau_1)f(\tau_2, \nu) - \sin(2\pi\nu\tau_2)f(\tau_1, \nu)}{\sin[2\pi\nu(\tau_1 - \tau_2)]}, \quad (2.96)$$

$$S_{12}(\nu) = \frac{\cos(2\pi\nu\tau_1)f(\tau_2, \nu) - \cos(2\pi\nu\tau_2)f(\tau_1, \nu)}{\sin[2\pi\nu(\tau_2 - \tau_1)]}, \quad (2.97)$$

asumiendo que $\sin[2\pi\nu(\tau_1 - \tau_2)] \neq 0$. La magnitud y el argumento de $\mu_{12}(\nu)$ se calculan como

$$|\mu_{12}(\nu)| = \sqrt{[C_{12}(\nu)]^2 + [S_{12}(\nu)]^2} \quad \text{y} \quad \beta_{12}(\nu) = \tan^{-1} \left[\frac{S_{12}(\nu)}{C_{12}(\nu)} \right], \quad (2.98)$$

respectivamente.

2.2.4. Propagación de la función de densidad espectral cruzada

Por la ecuación de onda (2.45) y el teorema generalizado de Wiener-Khintchine, (2.69), (2.70), se tiene que

$$\int_0^\infty [\nabla_1^2 W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)] e^{-i2\pi\nu\tau} d\nu + \left(\frac{2\pi\nu}{c} \right)^2 \int_0^\infty W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) e^{-i2\pi\nu\tau} d\nu = 0 \quad (2.99)$$

$$\int_0^\infty [\nabla_1^2 W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) + k^2 W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)] e^{-i2\pi\nu\tau} d\nu = 0,$$

lo que implica

$$\nabla_1^2 W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) + k^2 W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = 0 \quad \text{y} \quad \nabla_2^2 W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) + k^2 W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = 0. \quad (2.100)$$

La segunda ecuación se ha obtenido repitiendo el proceso con el operador ∇_2^2 . Se ha mostrado que la función de densidad espectral cruzada satisface la ecuación de Helmholtz con respecto a \mathbf{r}_1 y a \mathbf{r}_2 .

2.2.5. Ventajas del dominio espacio-frecuencia

El estudio de la coherencia en el dominio espacio-frecuencia brindó información que no fue descubierta en el dominio espacio-tiempo. Algunas diferencias entre ambos dominios y ventajas del primero son:

- Tanto la función de coherencia mutua $\langle V^*(\mathbf{r}_1, t)V(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle$ como la de densidad espectral cruzada $\langle U^*(\mathbf{r}_1, \nu)U(\mathbf{r}_2, \nu) \rangle$ se definen, en general, en dos puntos. Sin embargo, en el primer caso se necesita introducir un desfase temporal, τ , lo que no ocurre en el caso de la frecuencia.
- En el estudio de la coherencia de la luz que se propaga en medios que presentan efectos de dispersión y absorción resulta más apropiado emplear funciones de correlación que dependan de la frecuencia y no de la diferencia temporal τ . [10]
- En [32] James y Wolf mencionan que gracias al concepto de grado espectral de coherencia fue posible descubrir que, en general, el espectro de un campo radiado por una fuente parcialmente coherente es diferente al espectro de la fuente misma. Esto dio lugar al estudio de los cambios inducidos por correlación que, a su vez, ha generado un gran número de avances en cuestiones teóricas y experimentales, siendo un ejemplo la espectroscopía de coherencia espacial. [33]

Capítulo 3

Polarización de la luz

3.1. Formalismos de polarización

En una onda electromagnética, tanto el campo eléctrico \mathbf{E} como el campo magnético \mathbf{H} oscilan en un plano cuya orientación puede permanecer invariable o cambiar conforme la onda se desplaza. La orientación de dichos planos de vibración determina la polarización de una onda.

Como es mencionado en [11], existen diferentes mecanismos para modificar la polarización de una onda electromagnética, siendo los cuatro principales: el dicroísmo (o absorción selectiva), la reflexión, el esparcimiento y la birrefringencia. En este texto se resumirán algunos formalismos para describir el estado de polarización de la luz sin tomar en cuenta los mecanismos físicos empleados para modificar dicho estado.

3.1.1. Propiedades de una onda electromagnética plana

La fase de una onda electromagnética plana (no necesariamente armónica) tiene la forma $\varphi = \mathbf{s} \cdot \mathbf{r} - vt + \phi$, donde \mathbf{s} es el vector (unitario) que indica la dirección de propagación de la onda, v es la velocidad y ϕ es una constante de fase. Por lo anterior

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{r} - vt + \phi) \quad \text{y} \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{r} - vt + \phi). \quad (3.1)$$

Además, como se explica en [30], es posible mostrar que

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{s} \times \frac{d\mathbf{E}}{d\varphi} \quad \text{y} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{s} \times \frac{d\mathbf{H}}{d\varphi}. \quad (3.2)$$

Por lo anterior, por la ley de Faraday (ecuación de Maxwell)

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{B}}{dt} = 0 \quad (3.3)$$

y bajo la consideración $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, se obtiene que

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{s} \times \frac{d\mathbf{E}}{d\varphi} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt}(\mu\mathbf{H}) = -\frac{\mu}{c} \left(-v \frac{d\mathbf{H}}{d\varphi} \right), \quad (3.4)$$

es decir,

$$\mathbf{s} \times \frac{d\mathbf{E}}{d\varphi} = \frac{v\mu}{c} \frac{d\mathbf{H}}{d\varphi}. \quad (3.5)$$

Como \mathbf{s} es un vector constante, es posible integrar con respecto a φ y, haciendo la sustitución $\frac{v}{c} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$, se obtiene finalmente

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{s} \times \mathbf{E}. \quad (3.6)$$

Mediante un procedimiento análogo, por la segunda parte de la ecuación (3.2), por la ecuación de Ampere (ecuación de Maxwell)

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \mathbf{D} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (3.7)$$

y bajo las consideraciones $\mathbf{j} = 0$ y $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, se obtiene

$$\mathbf{E} = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{s} \times \mathbf{H}. \quad (3.8)$$

La terna $\{\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{s}, \mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ conforma un sistema ortogonal sujeto a las leyes de la permutación circular. En consecuencia, de (3.6) o (3.8), se deduce que las magnitudes de \mathbf{E} y \mathbf{H} cumplen la relación

$$\sqrt{\epsilon} E = \sqrt{\mu} H. \quad (3.9)$$

De la teoría electromagnética se sabe que si \mathbf{E} y \mathbf{D} son linealmente dependientes y \mathbf{H} y \mathbf{B} son linealmente dependientes (lo cual se cumple en un medio isotrópico) entonces las densidades de energía eléctrica y magnética están dadas por

$$w_e = \frac{1}{8\pi} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \quad \text{y} \quad w_m = \frac{1}{8\pi} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}, \quad (3.10)$$

respectivamente. La densidad de energía total es $w = w_e + w_m$ y como se ha supuesto que $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ y que $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, es posible obtener, haciendo uso de (3.10), dos expresiones equivalentes para w :

$$w = \frac{\epsilon E^2}{4\pi} = \frac{\mu H^2}{4\pi}. \quad (3.11)$$

El vector de Poynting \mathbf{S} se define como

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (3.12)$$

y representa el flujo de energía por unidad de tiempo y unidad de área. Recordando que $\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{s}$, \mathbf{E} y \mathbf{H} permutan circularmente y que \mathbf{s} es unitario, se tiene que $\mathbf{E} \times \mathbf{H} = EH\mathbf{s}$. Luego, haciendo uso de (3.9) y (3.11) se concluye

$$\mathbf{S} = v w \mathbf{s}, \quad (3.13)$$

por lo que, en el caso de una onda plana, el vector de Poynting tiene la misma dirección que el vector asociado a la dirección de propagación.

3.1.2. Polarización de una onda armónica plana

En esta sección se analizará la evolución de la orientación del vector de campo eléctrico de una onda armónica plana, características por las cuales cada componente cartesiana de \mathbf{E} y \mathbf{H} puede representarse como $a_i \cos(\zeta + \phi_i)$, donde $\zeta = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$. De acuerdo a esta representación, la componente cartesiana i -ésima está especificada por dos parámetros, a saber, a_i y ϕ_i , que en este caso son constantes.

Si una onda electromagnética armónica plana se desplaza en la dirección positiva del eje z , entonces los vectores \mathbf{E} y \mathbf{H} deben ser perpendiculares al vector unitario $\hat{\mathbf{z}}$ y por lo tanto estar contenidos en el plano XY . Esto implica que \mathbf{E} puede descomponerse en dos componentes ortogonales representadas de la siguiente forma:

$$E_x = E_{0x} \cos(\zeta + \phi_x), \quad (3.14)$$

$$E_y = E_{0y} \cos(\zeta + \phi_y). \quad (3.15)$$

Polarización elíptica

Por la identidad trigonométrica $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$ es posible reescribir las dos ecuaciones anteriores como sigue:

$$\frac{E_x}{E_{0x}} = \cos \varsigma \cos \phi_x - \sin \varsigma \sin \phi_x, \quad (3.16)$$

$$\frac{E_y}{E_{0y}} = \cos \varsigma \cos \phi_y - \sin \varsigma \sin \phi_y. \quad (3.17)$$

Multiplicando la ec. (3.16) por $\sin \phi_y$, la ec. (3.17) por $\sin \phi_x$, restando las dos nuevas ecuaciones y usando la identidad $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$, se obtiene:

$$\frac{E_x}{E_{0x}} \sin \phi_y - \frac{E_y}{E_{0y}} \sin \phi_x = \cos \varsigma \sin(\phi_y - \phi_x). \quad (3.18)$$

De forma similar, pero ahora multiplicando (3.16) por $\cos \phi_y$ y (3.17) por $\cos \phi_x$, se obtiene:

$$\frac{E_x}{E_{0x}} \cos \phi_y - \frac{E_y}{E_{0y}} \cos \phi_x = \sin \varsigma \sin(\phi_y - \phi_x). \quad (3.19)$$

Elevando cada una de las dos últimas ecuaciones al cuadrado se obtienen dos nuevas ecuaciones que, al sumarlas, producen la siguiente expresión

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2\frac{E_x}{E_{0x}}\frac{E_y}{E_{0y}}\cos(\phi_y - \phi_x) = \sin^2(\phi_y - \phi_x), \quad (3.20)$$

en la que al sustituir $\delta = \phi_y - \phi_x$, se obtiene finalmente:

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2\frac{E_x}{E_{0x}}\frac{E_y}{E_{0y}}\cos \delta = \sin^2 \delta. \quad (3.21)$$

La ecuación anterior indica que las componentes E_x y E_y satisfacen la ecuación de una elipse inclinada con respecto a los ejes de referencia x y y . Si el vector de campo rota en sentido horario (viendo hacia la fuente) la polarización se denomina derecha. Si el sentido es anti-horario la polarización es izquierda.

Ahora se verá que las componentes rectangulares del campo magnético satisfacen una ecuación similar. En la subsección 3.1.1 se vio que $\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{s} \times \mathbf{E}$. Además, como \mathbf{s} está en la dirección z y es unitario, entonces $\mathbf{s} = \hat{\mathbf{z}}$. En consecuencia:

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \hat{\mathbf{z}} \times (E_x \hat{\mathbf{x}} + E_y \hat{\mathbf{y}}) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (-E_y \hat{\mathbf{x}} + E_x \hat{\mathbf{y}}), \quad (3.22)$$

lo que implica que

$$H_x = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{0y} \cos(\varsigma + \phi_y) \quad \text{y} \quad H_y = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{0x} \cos(\varsigma + \phi_x). \quad (3.23)$$

De acuerdo a esto, la ecuación análoga a (3.21) para \mathbf{H} es

$$\left(\frac{H_x}{E_{0y}}\right)^2 + \left(\frac{H_y}{E_{0x}}\right)^2 + 2\frac{H_x}{E_{0x}}\frac{H_y}{E_{0y}}\cos \delta = \frac{\epsilon}{\mu} \sin^2 \delta. \quad (3.24)$$

Polarización lineal

Un caso especial de la polarización elíptica ocurre cuando $\delta = \phi_y - \phi_x = m\pi$, con $m \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Así, es posible reescribir ϕ_y como $\phi_x + \delta$, que al sustituir en (3.15) y considerar que $\cos(m\pi) = (-1)^m$ se obtiene la expresión

$$E_y = (-1)^m E_{0y} \cos(\varsigma + \phi_x), \quad (3.25)$$

que al ser dividida por (3.14) se halla una relación lineal (por ello el nombre de este tipo de polarización) entre las componentes de \mathbf{E} :

$$\frac{E_y}{E_x} = (-1)^m \frac{E_{0y}}{E_{0x}}. \quad (3.26)$$

De forma similar, por (3.23), se obtiene

$$\frac{H_y}{H_x} = -\frac{1}{(-1)^m} \frac{E_{0x}}{E_{0y}}. \quad (3.27)$$

Polarización circular

Otro caso especial de la polarización elíptica ocurre cuando $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ y además $\delta = \phi_y - \phi_x = m\frac{\pi}{2}$, con $m \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. De esta forma la ecuación (3.21) se convierte en

$$E_x^2 + E_y^2 = E_0^2, \quad (3.28)$$

la cual es la ecuación de una circunferencia de radio E_0 . El campo magnético obedece una expresión similar.

Si la polarización circular es derecha, entonces $\delta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ por lo que en este caso

$$E_x = E_0 \cos(\zeta + \phi_x), \quad (3.29)$$

$$E_y = -E_0 \sin(\zeta + \phi_x). \quad (3.30)$$

Si la polarización circular es izquierda, entonces $\delta = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ y

$$E_x = E_0 \cos(\zeta + \phi_x), \quad (3.31)$$

$$E_y = E_0 \sin(\zeta + \phi_x). \quad (3.32)$$

3.1.3. Parámetros de Stokes y la esfera de Poincaré

G. G. Stokes introdujo cuatro parámetros para describir la polarización de un haz de luz definidos como se muestra a continuación

$$s_0 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2, \quad (3.33)$$

$$s_1 = E_{0x}^2 - E_{0y}^2, \quad (3.34)$$

$$s_2 = 2E_{0x}E_{0y} \cos \delta, \quad (3.35)$$

$$s_3 = 2E_{0x}E_{0y} \sin \delta. \quad (3.36)$$

Sin embargo, dado que es posible verificar la relación

$$s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2, \quad (3.37)$$

resulta que sólo tres de los parámetros de Stokes son independientes. Lo anterior significa que un conjunto de tres de los parámetros de Stokes basta para especificar si la polarización es lineal, circular o elíptica, así como para especificar la excentricidad de la elipse y sentido de la rotación. Esto concuerda con el número de parámetros independientes de la ecuación (3.21): $\{E_{0x}, E_{0y}, \delta\}$.

Ya se dijo que la ecuación (3.21) describe una elipse inclinada (o rotada) con respecto a los ejes x , y . Sin embargo, las longitudes de los ejes de la elipse no cambian bajo una rotación. Sea ψ el ángulo de inclinación de la elipse y a y b las longitudes de los semiejes de la elipse. Es posible deducir que:

$$a^2 + b^2 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2. \quad (3.38)$$

Es conveniente definir el ángulo $\chi \in [-\pi/4, \pi/4]$ como

$$\tan \chi = \mp \frac{b}{a}, \quad (3.39)$$

donde el signo indica el sentido en el que la elipse es barrida.

Los parámetros de Stokes están relacionados con los ángulos ψ y χ por medio de las siguientes ecuaciones:

$$s_1 = s_0 \cos(2\chi) \cos(2\psi) \quad (3.40)$$

$$s_2 = s_0 \cos(2\chi) \sin(2\psi) \quad (3.41)$$

$$s_3 = s_0 \sin(2\chi), \quad (3.42)$$

las cuales son isomorfas a las ecuaciones para transformar coordenadas esféricas en rectangulares. Es decir, s_0 , 2ψ y 2χ corresponden a un radio constante, al ángulo azimutal y al ángulo polar, respectivamente. De esta forma, se establece una correspondencia entre cada estado de polarización (para una intensidad dada) y cada punto de la superficie de una esfera de radio s_0 . Ésta es la esfera de Poincaré.

De esta manera, los estados de polarización elíptica derecha son mapeados hacia el hemisferio norte (puntos superiores al plano equatorial), mientras que los estados de polarización elíptica izquierda son mapeados hacia el hemisferio sur. Las imágenes de los estados de polarización circular derecha e izquierda son el polo norte y sur, respectivamente. Por último, a los estados de polarización lineal les corresponden puntos del ecuador.

3.1.4. Vectores de Jones

Para definir los vectores de Jones se hace uso de la representación compleja de las componentes del campo eléctrico en la forma $E_x = E_{0x}e^{i(\varsigma+\phi_x)}$ y $E_y = E_{0y}e^{i(\varsigma+\phi_y)}$, las cuales también pueden escribirse en forma matricial ([11], [29]):

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{0x}e^{i\phi_x} \\ E_{0y}e^{i\phi_y} \end{bmatrix} e^{i\varsigma}. \quad (3.43)$$

El vector columna del lado derecho de la ecuación anterior recibe el nombre de vector de Jones, el cual describe completamente la amplitud y la fase del campo eléctrico. Recordando que la ecuación general de polarización elíptica (3.21) sólo tiene como parámetros a las amplitudes E_{0x} , E_{0y} y a la diferencia de fases δ , es posible abreviar los vectores de Jones de la manera siguiente:

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y}e^{i\delta} \end{bmatrix} e^{i\phi_x} e^{i\varsigma}, \quad (3.44)$$

donde se ha hecho uso de $\delta = \phi_y - \phi_x$. La forma breve del vector de Jones

$$\begin{bmatrix} J_x \\ J_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y}e^{i\delta} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

contiene toda la información para describir el estado de polarización de la onda, aunque ya no contiene información acerca de las fases de las componentes del campo. La forma normalizada del vector de Jones se obtiene considerando la condición $J_x J_x^* + J_y J_y^* = 1$ ([29]) de modo que

$$\begin{bmatrix} J_x \\ J_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta e^{i\delta} \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

donde

$$\cos \theta = \frac{E_{0x}}{\sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}} \quad \text{y} \quad \sin \theta = \frac{E_{0y}}{\sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}}. \quad (3.47)$$

3.1.5. Matrices de Mueller

Un vector columna conformado por los cuatro parámetros de Stokes define completamente el estado de polarización de una onda. Por otro lado, existen materiales y dispositivos que modifican el estado de polarización de una onda cuando ésta pasa a través de ellos. Esto significa que se modifican los

parámetros de Stokes de la onda. Así, el efecto de dichos materiales y dispositivos es descrito por un operador matricial, es decir

$$\begin{bmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$

En la ecuación anterior el vector columna de la izquierda es el vector de Stokes final y el vector columna de la derecha es el vector de Stokes inicial, mientras que la matriz 4×4 es la matriz de Mueller ([11], [29]).

3.2. Polarización de haces electromagnéticos aleatorios

Un campo escalar cuasi-monocromático, centrado en la frecuencia $\bar{\omega}$, se representa como $E = E_0(t)e^{i[\phi(t) - \bar{\omega}t]}$, en un punto espacial fijo. Se ha dicho que, en la realidad, la luz es de naturaleza estocástica, por lo que la amplitud $E_0(t)$ y la fase $\phi(t)$ no sólo varían con el tiempo, sino que lo hacen de manera aleatoria. Sin embargo, al hablar de ondas vectoriales existe otra característica que también cambia aleatoriamente: la orientación del plano de oscilación de la onda o polarización.

Cuando las componentes rectangulares del campo, E_x y E_y , se encuentran relacionadas de alguna forma conocida es posible determinar la curva que describe la punta del vector de campo eléctrico (se esperaría que fuera algún caso particular de la elipse) y, por lo tanto, su estado de polarización. Si se conoce el estado de polarización de la luz se dice que está completamente polarizada. Por el contrario, cuando E_x y E_y varían de forma aleatoria y no guardan relación alguna entre ellas (es decir, son independientes) es imposible conocer el estado de polarización de la luz, de la que se dice que es totalmente no polarizada, también llamada luz natural, puesto que, en la naturaleza, hay muchas fuentes de luz con esta característica. Note que la esfera de Poincaré y los parámetros de Stokes no pueden describir la luz completamente no polarizada.

3.2.1. Matriz de polarización y coeficiente de correlación

Con el fin de tener un modelo que describa las correlaciones entre las componentes del campo eléctrico en un punto del espacio se define la matriz de polarización como

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \langle E_x^*(t)E_x(t) \rangle & \langle E_x^*(t)E_y(t) \rangle \\ \langle E_y^*(t)E_x(t) \rangle & \langle E_y^*(t)E_y(t) \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

la cual, en algunas referencias, también es llamada matriz de coherencia. Sin embargo, no lo es en el sentido general. Es decir, una matriz de coherencia $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ es aquella cuyos elementos tienen la forma $\langle E_i^*(\mathbf{r}_1, t)E_j(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle$, con $i, j = \{x, y\}$, como se verá en el siguiente capítulo. Más bien, \mathbf{J} es un caso especial de $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$, aquel en el que $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ y $\tau = 0$. Por esto, se dice que \mathbf{J} es una matriz de correlación para el mismo instante de tiempo (equal-time correlation matrix).

De la definición (3.49) se deriva que \mathbf{J} es una matriz hermítica

$$J_{yx} = J_{xy}^*. \quad (3.50)$$

El coeficiente de correlación j_{xy} del haz se define en función de los elementos de \mathbf{J} como

$$j_{xy} = \frac{J_{xy}}{\sqrt{J_{xx}}\sqrt{J_{yy}}} \quad (3.51)$$

y cumple la condición

$$0 \leq |j_{xy}| \leq 1. \quad (3.52)$$

En [8] se explica un método experimental para determinar los cuatro elementos de la matriz \mathbf{J} y se muestra que ésta es no negativa definida, de lo cual se deduce la desigualdad anterior.

Los elementos J_{xx} y J_{yy} son las intensidades de las componentes del campo E_x y E_y , respectivamente, mientras que J_{xy} y J_{yx} son cantidades análogas al concepto de intensidad mutua. Luego, por la definición (3.49) y las expresiones (3.33)-(3.36), es posible expresar los parámetros de Stokes en términos de los elementos de \mathbf{J}

$$\begin{aligned} S_0 &= J_{xx} + J_{yy} \\ S_1 &= J_{xx} - J_{yy} \\ S_2 &= J_{xy} + J_{yx} \\ S_3 &= i(J_{yx} - J_{xy}) \end{aligned} \quad (3.53)$$

y viceversa.

Luz completamente polarizada

Los tres casos generales de polarización son descritos por el coeficiente de correlación j_{xy} . El primer caso corresponde al extremo $|j_{xy}| = 1$ y describe la luz totalmente polarizada, lo que significa que E_x y E_y están completamente correlacionados. Por (3.50) y la definición (3.51) es posible mostrar que, en este caso, $J_{xy}J_{yx} = J_{xx}J_{yy}$ o bien, que

$$|j_{xy}| = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Det}\mathbf{J} = 0, \quad (3.54)$$

donde *Det* significa *determinante de la matriz*. Si bien el concepto es útil, la luz completamente polarizada no suele ser encontrada en la naturaleza. Note que una onda monocromática está completamente polarizada en cada punto del espacio.

Luz completamente no polarizada

El otro caso extremo, $j_{xy} = 0$, describe la luz completamente no polarizada. Por la condición de Hermiticidad (3.50) y la definición (3.51), se deduce, para el caso de la luz natural, que

$$J_{xy} = 0 = J_{yx}. \quad (3.55)$$

Además, como la matriz \mathbf{J} es invariante ante rotaciones de los ejes X y Y con respecto al eje Z , se deduce que (ver [8])

$$J_{yy} = J_{xx}. \quad (3.56)$$

Luego, por las dos últimas ecuaciones se concluye que la matriz de polarización de la luz natural tiene la forma

$$\mathbf{J} = J_{xx} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.57)$$

es decir, es un múltiplo escalar de la matriz identidad. Como \mathbf{J} es invariante ante rotaciones, entonces también lo son sus elementos, incluyendo J_{xx} . Por lo tanto la representación anterior de la luz natural no depende de la orientación de los ejes X y Y .

Luz parcialmente polarizada

El caso intermedio ocurre cuando $0 < |j_{xy}| < 1$. La luz que corresponde a esta descripción recibe el nombre de luz parcialmente polarizada.

Supóngase que es posible dividir un campo de luz en dos partes, una completamente polarizada y otra completamente no polarizada. Así, la matriz del campo total será la suma de la matriz de luz completamente polarizada $\mathbf{J}^{(p)}$ con la matriz de luz completamente no polarizada $\mathbf{J}^{(u)}$, i.e.,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{(p)} + \mathbf{J}^{(u)}. \quad (3.58)$$

Empleando la forma de la definición (3.49) es posible representar a $\mathbf{J}^{(p)}$ como

$$\mathbf{J}^{(p)} = \begin{bmatrix} B & D \\ D^* & C \end{bmatrix}, \quad (3.59)$$

CAPÍTULO 3. POLARIZACIÓN DE LA LUZ
3.2. POLARIZACIÓN DE HACES ELECTROMAGNÉTICOS ALEATORIOS

mientras que al emplear el resultado (3.57), $\mathbf{J}^{(u)}$ se representa simplemente como

$$\mathbf{J}^{(u)} = A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.60)$$

Dado que A , B y C son intensidades, deben ser mayores o iguales que cero. Además, por la ec. (3.54), la primer matriz debe satisfacer que

$$BC - DD^* = 0. \quad (3.61)$$

Por las ecuaciones (3.58), (3.59) y (3.60),

$$\begin{aligned} A + B &= J_{xx} \\ A + C &= J_{yy} \\ D &= J_{xy} \\ D^* &= J_{yx}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Las ecuaciones anteriores proporcionan expresiones para B , C y D que, al ser sustituidas en (3.61), se obtiene

$$(J_{xx} - A)(J_{yy} - A) - J_{xy}J_{yx} = 0 \quad (3.63)$$

o bien, al desarrollar,

$$A^2 - (Tr\mathbf{J})A + Det\mathbf{J} = 0, \quad (3.64)$$

en la que Tr significa *traza de la matriz*. Al resolver esta ecuación cuadrática en A se obtiene

$$A = \frac{1}{2} \left\{ Tr\mathbf{J} - \sqrt{(Tr\mathbf{J})^2 - 4Det\mathbf{J}} \right\}. \quad (3.65)$$

Desde luego, una ecuación cuadrática tiene dos soluciones. Sin embargo, la otra solución (aquella en la que el radical va precedido de un signo positivo) es inadmisibile, pues admite la posibilidad de que B y C sean negativos (ver [8]) pero, como se ha dicho, al ser intensidades esto es imposible.

Se ha mostrado, al suponer que \mathbf{J} puede descomponerse en $\mathbf{J}^{(p)}$ y $\mathbf{J}^{(u)}$, que la descomposición es única. En consecuencia es posible interpretar un campo de luz, estadísticamente estacionario, como la composición de uno completamente polarizado y otro completamente no polarizado. Esto fue demostrado por primera vez por G.G. Stokes con ayuda de los parámetros introducidos por él, como se menciona en [10]. No obstante, en esta misma referencia se comenta que la descomposición de un haz de luz en dos (uno completamente polarizado y otro completamente no polarizado) tiene un significado local, puesto que, como se verá en la sección 4.3, el grado de polarización cambia con la propagación del haz.

Usando la descomposición (3.58) de la luz parcialmente polarizada y la ecuación (3.60) es posible escribir

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{xx} & p_{xy} \\ p_{yx} & p_{yy} \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.66)$$

En el miembro del extremo derecho, la primer matriz corresponde a la componente completamente polarizada y la segunda a la componente completamente no polarizada. Los parámetros de Stokes del haz parcialmente polarizado están dados por las ecuaciones (3.53), por lo que

$$\begin{aligned} S_0 &= J_{xx} + J_{yy} = p_{xx} + p_{yy} + 2u = S_0^{(p)} + 2u, \\ S_1 &= J_{xx} - J_{yy} = p_{xx} - p_{yy} = S_1^{(p)}, \\ S_2 &= J_{xy} + J_{yx} = p_{xy} + p_{yx} = S_2^{(p)}, \\ S_3 &= i(J_{yx} - J_{xy}) = i(p_{yx} - p_{xy}) = S_3^{(p)}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

En palabras, los parámetros S_1 , S_2 y S_3 de una haz parcialmente polarizado son iguales a los parámetros $S_1^{(1)}$, $S_2^{(2)}$ y $S_3^{(3)}$, respectivamente, de la componente completamente polarizada. Esto no se cumple para el parámetro S_0 , puesto que es la suma de intensidades de ambas componentes. Sin embargo, de lo anterior puede verse que el radio de la esfera de Poincaré de un haz parcialmente polarizado será mayor que el radio de la esfera de su componente completamente polarizada por una cantidad igual a $2u$, la intensidad de la componente completamente no polarizada.

3.2.2. Grado de polarización

Por las ecuaciones (3.62) y (3.65),

$$B = \frac{1}{2}(J_{xx} - J_{yy}) + \frac{1}{2}\sqrt{(Tr\mathbf{J})^2 - 4Det\mathbf{J}} \quad (3.68)$$

y

$$C = \frac{1}{2}(J_{yy} - J_{xx}) + \frac{1}{2}\sqrt{(Tr\mathbf{J})^2 - 4Det\mathbf{J}}. \quad (3.69)$$

De la definición (3.49) puede verse que la intensidad total de la luz descrita por \mathbf{J} es $Tr\mathbf{J}$. Luego, por (3.59), (3.60), (3.65), (3.68) y (3.69), las intensidades de los haces completamente polarizado y completamente no polarizado son

$$I^{(p)} = Tr\mathbf{J}^{(p)} = \sqrt{(Tr\mathbf{J})^2 - 4Det\mathbf{J}} \quad (3.70)$$

y

$$I^{(u)} = Tr\mathbf{J}^{(u)} = Tr\mathbf{J} - \sqrt{(Tr\mathbf{J})^2 - 4Det\mathbf{J}}, \quad (3.71)$$

respectivamente. La intensidad total, por su parte, es

$$I = I^{(p)} + I^{(u)} = Tr\mathbf{J}. \quad (3.72)$$

Tomando en cuenta la descomposición antes justificada, se define el grado de polarización de un campo de luz como la razón entre la intensidad debida a la luz polarizada y la intensidad total. Empleando las expresiones de intensidades anteriores, el grado de polarización está dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \frac{\sqrt{(Tr\mathbf{J})^2 - 4Det\mathbf{J}}}{Tr\mathbf{J}} \\ &= \sqrt{1 - \frac{4Det\mathbf{J}}{(Tr\mathbf{J})^2}}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Como J_{xx} y J_{yy} son reales, luego

$$Det\mathbf{J} = J_{xx}J_{yy} - |J_{xy}|^2 \quad (3.74)$$

y

$$Tr\mathbf{J} = J_{xx} + J_{yy} \quad (3.75)$$

también lo son. Además,

$$(Tr\mathbf{J})^2 - 4Det\mathbf{J} = (J_{xx} - J_{yy})^2 + 4|J_{xy}|^2 \geq 0 \quad \implies \quad (Tr\mathbf{J})^2 \geq 4Det\mathbf{J}. \quad (3.76)$$

Por lo tanto, el grado de polarización \mathcal{P} , a diferencia de j_{xy} , es real.

Nótese que, para la luz completamente polarizada, $Det\mathbf{J} = 0$ y, por lo tanto, $\mathcal{P} = 1$. Por el contrario, al tratarse de luz completamente no polarizada, $Det\mathbf{J} = J_{xx}^2$ y $Tr\mathbf{J} = 2J_{xx}$, por lo que al evaluar (3.73) se tiene $\mathcal{P} = 0$. Como es de esperar, $0 < \mathcal{P} < 1$ cuando se trata de luz parcialmente polarizada.

En general, el estado de polarización de un haz electromagnético, aleatorio y estacionario se conforma por el grado de polarización y, además, las características de la elipse de polarización (dadas por los parámetros de Stokes en un sentido estadístico).

Capítulo 4

Teoría unificada de polarización y coherencia

4.1. Formulación de la teoría unificada

4.1.1. Formulación principal

En el estudio de la coherencia de segundo orden se asumió que las ondas eran escalares puesto que no se hizo referencia a la dirección del campo eléctrico. La función de coherencia mutua (para un campo estacionario) empleada hasta ahora, expresa la correlación cruzada entre perturbaciones. Si estas perturbaciones representan el campo eléctrico, entonces se tiene la expresión $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \langle E^*(\mathbf{r}_1, t)E(\mathbf{r}_2, t+\tau) \rangle$. Sin embargo, un tratamiento más completo debe considerar ondas vectoriales, es decir, debe considerar las componentes del campo eléctrico (y magnético en su caso). En consecuencia, es posible indagar las correlaciones que existen entre las diferentes componentes cartesianas de las perturbaciones. Así, si el campo eléctrico de un haz existe en los puntos \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 , entonces se pueden considerar cuatro funciones de coherencia mutua de la forma

$$\Gamma_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \langle E_i^*(\mathbf{r}_1, t)E_j(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle \quad (4.1)$$

donde i y j representan las coordenadas cartesianas x y y (por tratarse de un haz, el campo eléctrico no tiene componente en la dirección de propagación). Al ordenar estas cuatro cantidades en una matriz 2×2 se obtiene la matriz de coherencia mutua eléctrica

$$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = [\Gamma_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)] = \begin{bmatrix} \langle E_x^*(\mathbf{r}_1, t)E_x(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle & \langle E_x^*(\mathbf{r}_1, t)E_y(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle \\ \langle E_y^*(\mathbf{r}_1, t)E_x(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle & \langle E_y^*(\mathbf{r}_1, t)E_y(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Como se vio en la sección 2.2, la función de coherencia mutua y la función de densidad espectral cruzada forman un par de transformadas de Fourier, por lo que es posible definir la matriz de densidad espectral cruzada eléctrica como

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) e^{i\omega\tau} d\tau = [W_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)] \\ &= \begin{bmatrix} \langle E_x^*(\mathbf{r}_1, \omega)E_x(\mathbf{r}_2, \omega) \rangle & \langle E_x^*(\mathbf{r}_1, \omega)E_y(\mathbf{r}_2, \omega) \rangle \\ \langle E_y^*(\mathbf{r}_1, \omega)E_x(\mathbf{r}_2, \omega) \rangle & \langle E_y^*(\mathbf{r}_1, \omega)E_y(\mathbf{r}_2, \omega) \rangle \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

siendo ésta la cantidad más importante de la teoría unificada. De la definición anterior se deduce inmediatamente que

$$\mathbf{W}^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \mathbf{W}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, \omega). \quad (4.4)$$

Se ha dicho que la tesis de la teoría unificada establece que la polarización y la coherencia son manifestaciones de las correlaciones entre fluctuaciones de campo eléctrico. Esto sugiere que ambos fenómenos deberían poder ser descritos por medio de un modelo general. La matriz de densidad espectral cruzada

CAPÍTULO 4. TEORÍA UNIFICADA DE POLARIZACIÓN Y COHERENCIA
4.1. FORMULACIÓN DE LA TEORÍA UNIFICADA

proporciona tal modelo, es decir, $\mathbf{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$ contiene información sobre el grado de coherencia y sobre el grado de polarización del haz, de acuerdo a sus fluctuaciones en dos de sus puntos. Como se menciona en [8] y en [20] es posible expresar, en términos de la matriz de densidad espectral cruzada, el grado espectral de coherencia de campo eléctrico en los puntos \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 como

$$\eta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \frac{Tr\mathbf{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)}{\sqrt{Tr\mathbf{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \omega)}\sqrt{Tr\mathbf{W}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, \omega)}} \quad (4.5)$$

y el grado de polarización como

$$P = \sqrt{1 - \frac{4Det\mathbf{W}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega)}{[Tr\mathbf{W}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega)]^2}}, \quad (4.6)$$

donde Tr y Det indican traza y determinante de la matriz, respectivamente. La ecuación (4.5) es análoga a la ecuación (2.80) de la sección 2.2, la cual define el grado espectral de coherencia $\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$ para el caso escalar. En el caso vectorial, como se observa en la ecuación (4.5), el grado espectral de coherencia involucra las trazas, es decir, depende de los elementos diagonales de la matriz $\mathbf{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$. Esto se debe a que las componentes ortogonales del campo eléctrico no interfieren en tanto que el grado espectral de coherencia debe ser un indicador de la visibilidad que, a su vez, se obtiene de mediciones del patrón de interferencia.

Es posible generalizar la ley espectral de interferencia para haces electromagnéticos (ondas vectoriales) como se explica en [8] y en [20] y para lo cual se considera, nuevamente, el arreglo del experimento de Young cuyas rendijas se ubican en las posiciones \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 . Los haces que atraviesan dichas rendijas se recombinan en una pantalla, en la cual se espera que se formen las franjas de interferencia (ver figura 4.1). Es necesario notar que para cada posición \mathbf{r} de la pantalla de recombinación se puede hablar de un ensamble $\{\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)\}$ definido para la componente espectral de frecuencia ω del campo eléctrico en dicho punto. De esta forma, si los ángulos de incidencia y difracción son pequeños, una componente del campo (una realización de su ensamble) $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ en la pantalla de recombinación puede ser expresada en función de las componentes del campo en las rendijas. Esto se expresa como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = K_1\mathbf{E}(\mathbf{r}_1, \omega)\frac{e^{ikR_1}}{R_1} + K_2\mathbf{E}(\mathbf{r}_2, \omega)\frac{e^{ikR_2}}{R_2}, \quad (4.7)$$

donde R_1 y R_2 son las distancias desde \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 hasta \mathbf{r} (el punto en la pantalla de interferencia), respectivamente. K_1 y K_2 se definen la misma forma que en la ley de interferencia (temporal o espectral) para ondas escalares ($K_j = -iA_j/\lambda$), ver la subsección 2.1.2.

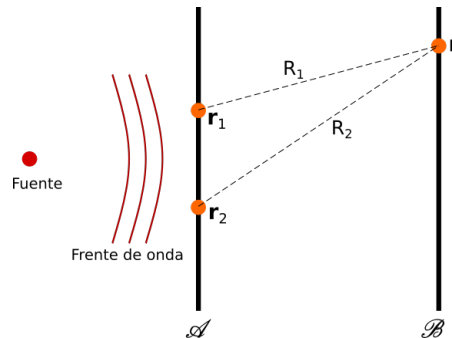


Figura 4.1: Diagrama del experimento de la doble rendija.

Definiendo la densidad espectral para haces electromagnéticos como

$$S(\mathbf{r}, \omega) = \langle \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \rangle = Tr\mathbf{W}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega) \quad (4.8)$$

CAPÍTULO 4. TEORÍA UNIFICADA DE POLARIZACIÓN Y COHERENCIA
4.1. FORMULACIÓN DE LA TEORÍA UNIFICADA

y sustituyendo $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ por la expresión (4.7) en la última ecuación se obtiene, después de desarrollar,

$$S(\mathbf{r}, \omega) = \frac{|K_1|^2}{R_1^2} S(\mathbf{r}_1, \omega) + \frac{|K_2|^2}{R_2^2} S(\mathbf{r}_2, \omega) + K_1^* K_2 \langle \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_1, \omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_2, \omega) \rangle \frac{e^{ik(R_2-R_1)}}{R_1 R_2} + \left(K_1^* K_2 \langle \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_1, \omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_2, \omega) \rangle \frac{e^{ik(R_2-R_1)}}{R_1 R_2} \right)^*, \quad (4.9)$$

donde se ha usado el hecho de que el complejo conjugado (denotado como $*$) se distribuye sobre el producto. Nótese que, en la expresión anterior, los dos últimos términos son complejos conjugados por lo que su suma debe ser el doble de su parte real. Si, además, se toma en cuenta que $\langle \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_1, \omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_2, \omega) \rangle = Tr \mathbf{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$, que $K_1^* K_2$ es una constante real y la ecuación (4.5), esta expresión puede ser reescrita como sigue (*Re* significa *parte real de*)

$$S(\mathbf{r}, \omega) = \frac{|K_1|^2}{R_1^2} S(\mathbf{r}_1, \omega) + \frac{|K_2|^2}{R_2^2} S(\mathbf{r}_2, \omega) + 2 \frac{K_1^* K_2}{R_1 R_2} \times Re \left\{ \eta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) \sqrt{Tr \mathbf{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \omega)} \sqrt{Tr \mathbf{W}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, \omega)} e^{ik(R_2-R_1)} \right\}. \quad (4.10)$$

Conviene analizar qué le ocurre a la ecuación anterior cuando se cierra una de las rendijas y sólo una permanece abierta. Por ejemplo, si se cierra la rendija en \mathbf{r}_2 , entonces $K_2 = 0$ y la densidad espectral en \mathbf{r} se reduce a

$$S(\mathbf{r}, \omega) = \frac{|K_1|^2}{R_1^2} S(\mathbf{r}_1, \omega) \equiv S^{(1)}(\mathbf{r}, \omega) \quad (4.11)$$

y de manera similar, cuando se cierra la rendija en \mathbf{r}_1 , resulta que

$$S(\mathbf{r}, \omega) = \frac{|K_2|^2}{R_2^2} S(\mathbf{r}_2, \omega) \equiv S^{(2)}(\mathbf{r}, \omega). \quad (4.12)$$

Por otro lado, por la ecuación (4.8), se tiene que $S(\mathbf{r}_j, \omega) = Tr \mathbf{W}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_j, \omega) = \langle |\mathbf{E}(\mathbf{r}_j, \omega)|^2 \rangle$ es un real positivo, por lo que

$$S(\mathbf{r}, \omega) = S^{(1)}(\mathbf{r}, \omega) + S^{(2)}(\mathbf{r}, \omega) + 2 \frac{K_1^* K_2}{R_1 R_2} \sqrt{S(\mathbf{r}_1, \omega)} \sqrt{S(\mathbf{r}_2, \omega)} \times Re \left\{ \eta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) e^{ik(R_2-R_1)} \right\}, \quad (4.13)$$

pero como $K_1^* K_2 = |K_1| |K_2|$ se obtiene, finalmente, la expresión

$$S(\mathbf{r}, \omega) = S^{(1)}(\mathbf{r}, \omega) + S^{(2)}(\mathbf{r}, \omega) + 2 \sqrt{S^{(1)}(\mathbf{r}, \omega)} \sqrt{S^{(2)}(\mathbf{r}, \omega)} \times Re \left\{ \eta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) e^{ik(R_2-R_1)} \right\}, \quad (4.14)$$

siendo ésta la ley espectral de interferencia para haces electromagnéticos aleatorios y estacionarios. Representando el grado espectral de coherencia en su forma polar como $\eta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = |\eta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)| e^{i\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)}$ se obtiene la expresión equivalente

$$S(\mathbf{r}, \omega) = S^{(1)}(\mathbf{r}, \omega) + S^{(2)}(\mathbf{r}, \omega) + 2 \sqrt{S^{(1)}(\mathbf{r}, \omega)} \sqrt{S^{(2)}(\mathbf{r}, \omega)} \times |\eta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)| \cos[\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) + \delta], \quad (4.15)$$

donde $\delta = k(R_2 - R_1)$.

En la ley espectral de interferencia las cantidades observables son las densidades espectrales. Éstas se miden por medio de técnicas de espectroscopía. Por lo tanto, dicha ley se puede emplear para determinar el valor absoluto del grado espectral de coherencia. Note que si $S^{(1)}(\mathbf{r}, \omega) \approx S^{(2)}(\mathbf{r}, \omega)$, entonces

$$S_{max}(\mathbf{r}, \omega) = 2S^{(1)}(\mathbf{r}, \omega) \{1 + |\eta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)|\} \quad (4.16)$$

y

$$S_{min}(\mathbf{r}, \omega) = 2S^{(1)}(\mathbf{r}, \omega) \{1 - |\eta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)|\}. \quad (4.17)$$

Este par de ecuaciones permite expresar el valor de $|\eta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)|$, también conocido como visibilidad espectral, como

$$\mathcal{V}(\mathbf{r}, \omega) = |\eta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)| = \frac{S_{max}(\mathbf{r}, \omega) - S_{min}(\mathbf{r}, \omega)}{S_{max}(\mathbf{r}, \omega) + S_{min}(\mathbf{r}, \omega)}. \quad (4.18)$$

Como la fase de $\eta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$ también se determina a partir del patrón de interferencia, entonces el grado espectral de coherencia queda determinado por completo.

4.1.2. Similitud estadística

En [12] y [13] se define el concepto de similitud estadística como sigue: si $z_1(t)$ y $z_2(t)$ son dos procesos estocásticos, estadísticamente estacionarios, al menos en sentido amplio, se dice que son estadísticamente similares si existe algún $\tau = \tau_0$ tal que

$$z_2(t + \tau_0) = Az_1(t) \quad (4.19)$$

se cumple para toda t , siendo A un número no aleatorio, generalmente complejo.

En las mismas referencias se muestra que si $z_1(t)$ y $z_2(t)$ se sustituyen por oscilaciones de campo electromagnético $\mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t)$ y $\mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t)$, entonces el campo será completamente coherente en \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 si y sólo si las fluctuaciones de campo en \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 son estadísticamente similares, para cierta elección del número A . Lo anterior se cumple de la misma forma para las componentes escalares del campo $E_x(\mathbf{r}_1, t)$ y $E_x(\mathbf{r}_2, t)$, así como para $E_y(\mathbf{r}_1, t)$ y $E_y(\mathbf{r}_2, t)$. Dos fluctuaciones son completamente coherentes si y sólo si el grado complejo de coherencia es unimodular, i.e., cuando $|\eta_{12}| = 1$.

Si ahora $z_1(t)$ y $z_2(t)$ se sustituyen por las componentes cartesianas del campo eléctrico en algún punto \mathbf{r} de un haz, $E_x(\mathbf{r}, t)$ y $E_y(\mathbf{r}, t)$, respectivamente, entonces estas fluctuaciones son estadísticamente similares para el mismo instante de tiempo ($\tau_0 = 0$) si y sólo si el campo eléctrico en \mathbf{r} está completamente polarizado ($\mathcal{P} = 1$).

4.1.3. Tensores de correlación

A lo largo de la historia de las funciones de correlación en la teoría de coherencia se ha visto un proceso de generalización. Al considerar correlaciones de campo en dos instantes de tiempo se pasó de la intensidad mutua a la función de coherencia mutua. Al considerar correlaciones entre diferentes componentes cartesianas se pasó de las funciones a las matrices de correlación. Sin embargo, estas matrices sólo consideran correlaciones entre las componentes x y y del campo eléctrico. El siguiente paso en la generalización consiste en considerar correlaciones entre todas las componentes cartesianas del campo, incluyendo la componente z . En [15] Wolf definió la matriz 3×3 de correlación de campo eléctrico

$$\mathcal{E}_{jk} = \langle E_j^*(\mathbf{r}_1, t) E_k(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle, \quad (4.20)$$

donde $j, k = \{x, y, z\}$. Sin embargo, en esa misma referencia Wolf afirma que es posible definir matrices que involucren vectores de otro tipo, tales como \mathbf{H} , \mathbf{D} y \mathbf{B} e, incluso, matrices tales que sus elementos sean pares mixtos, por ejemplo de campo eléctrico con campo magnético. Comenta también que las matrices de correlación que involucren campo magnético no suelen ser muy empleadas en cuestiones ópticas dado que, en este caso, el campo magnético es muy débil para ser detectado en comparación con el campo eléctrico.

En [25] Karczewski enlista, junto con la anterior, una matriz 3×3 de correlación de campo magnético y dos mixtas:

$$\mathcal{H}_{jk} = \langle H_j^*(\mathbf{r}_1, t) H_k(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle, \quad (4.21)$$

$$\mathcal{G}_{jk} = \langle H_j^*(\mathbf{r}_1, t) E_k(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle, \quad (4.22)$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_{jk} = \langle E_j^*(\mathbf{r}_1, t) H_k(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle, \quad (4.23)$$

en las que $j, k = x, y, z$. Algunas referencias se refieren a estas matrices como tensores de correlación.

4.2. Medición de las entradas de la matriz de densidad espectral cruzada

En [8] y [22] se propone un proceso de medición para determinar los elementos de la matriz de densidad espectral cruzada. Éste hace uso del interferómetro de Young y elementos ópticos adicionales. Primero es necesario elegir la frecuencia ω para la que se harán las mediciones. Dado que, en la realidad, la luz no es monocromática se emplea un filtro en frecuencia \mathcal{F} que provea de luz cuasimonocromática centrada en la frecuencia deseada. También se emplean dos polarizadores, Π_1 y Π_2 , los cuales se colocan en frente

CAPÍTULO 4. TEORÍA UNIFICADA DE POLARIZACIÓN Y COHERENCIA
4.2. MEDICIÓN DE LAS ENTRADAS DE LA MATRIZ DE DENSIDAD ESPECTRAL CRUZADA

de las rendijas, es decir, la luz debe atravesar los polarizadores antes que las rendijas. La figura 4.2-a) muestra la ubicación del filtro y los polarizadores en el arreglo experimental.

Para determinar el elemento $W_{xx}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$ de la matriz los polarizadores deben orientarse de forma que permitan el paso de la luz únicamente a través del eje x . En este caso, los demás elementos de la matriz serán nulos, es decir

$$\mathbf{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \begin{bmatrix} \langle E_x^*(\mathbf{r}_1, \omega) E_x(\mathbf{r}_2, \omega) \rangle & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Recuérdese, por las ecuaciones (4.5) y (4.8), que $Tr \mathbf{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \sqrt{S(\mathbf{r}_1, \omega)} \sqrt{S(\mathbf{r}_2, \omega)} \eta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$. Sin embargo, en este caso particular $Tr \mathbf{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = W_{xx}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$, por lo cual

$$W_{xx}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \sqrt{S_x(\mathbf{r}_1, \omega)} \sqrt{S_x(\mathbf{r}_2, \omega)} \eta_{xx}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega), \quad (4.25)$$

donde los subíndices indican que las cantidades corresponden a las componentes en x del campo.

De forma análoga, al orientar ambos polarizadores de modo que sólo permitan el paso de la componente y de la luz se obtendrán mediciones correspondientes al elemento $W_{yy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$. En este caso se tendrá que

$$\mathbf{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \langle E_y^*(\mathbf{r}_1, \omega) E_y(\mathbf{r}_2, \omega) \rangle \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

y que

$$W_{yy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \sqrt{S_y(\mathbf{r}_1, \omega)} \sqrt{S_y(\mathbf{r}_2, \omega)} \eta_{yy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega). \quad (4.27)$$

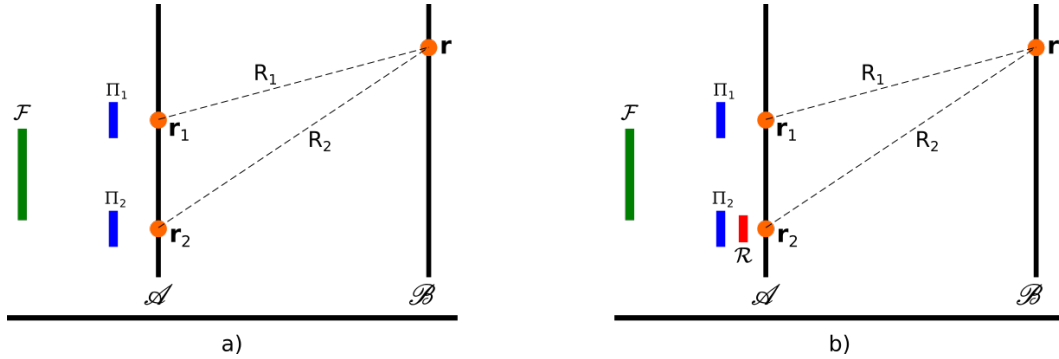


Figura 4.2: Arreglo experimental para determinar las entradas, a) diagonales y b) no diagonales, de la matriz $\mathbf{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$.

Los elementos que se encuentran fuera de la diagonal de la matriz \mathbf{W} expresan la correlación entre componentes ortogonales del campo. Sin embargo, si bien el grado espectral de coherencia se mide a partir del patrón de interferencia, las ondas con vectores de campo eléctrico ortogonales no generan dicho patrón. Por esta razón, para determinar los elementos que se encuentran fuera de la diagonal se agrega un rotador \mathcal{R} al arreglo, entre alguno de los polarizadores y la rendija inmediata, como puede apreciarse en la figura 4.2-b). A manera de ejemplo se supondrá que se coloca entre el polarizador Π_2 y la rendija en \mathbf{r}_2 . Dicho rotador tiene la función de cambiar la orientación del campo eléctrico un ángulo de 90° . Así, si los polarizadores Π_1 y Π_2 permiten el paso de las componentes x y y del campo, respectivamente, el rotador cambiará la orientación del campo transmitido por Π_2 de modo que oscile en el mismo plano que el transmitido por Π_1 . Al ser paralelos sus vectores de campo eléctrico, las ondas transmitidas podrán interferir. La matriz \mathbf{W} para este caso particular es

$$\mathbf{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \begin{bmatrix} \langle E_x^*(\mathbf{r}_1, \omega) E_y(\mathbf{r}_2, \omega) \rangle & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.28)$$

con

$$W_{xy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \sqrt{S_x(\mathbf{r}_1, \omega)} \sqrt{S_y(\mathbf{r}_2, \omega)} \eta_{xy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega). \quad (4.29)$$

El elemento $W_{yx}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$ se obtiene rotando los polarizadores y el rotador 90° a partir de la posición anterior. En este último caso

$$\mathbf{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \langle E_y^*(\mathbf{r}_1, \omega) E_x(\mathbf{r}_2, \omega) \rangle \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

y

$$W_{yx}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \sqrt{S_y(\mathbf{r}_1, \omega)} \sqrt{S_x(\mathbf{r}_2, \omega)} \eta_{yx}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega). \quad (4.31)$$

De esta forma se han expresado todos los elementos de la matriz \mathbf{W} en términos de densidades espectrales (que son cantidades observables) y el grado espectral de coherencia (que se determina a partir del patrón de interferencia).

4.3. Cambios inducidos por correlación

4.3.1. Propagación de la matriz de densidad espectral cruzada

Como puede verse en las ecuaciones (4.5), (4.6) y (4.8), el grado espectral de coherencia, el grado espectral de polarización y el espectro (densidad espectral) de un haz electromagnético, aleatorio y estadísticamente estacionario dependen de la matriz de densidad espectral cruzada \mathbf{W} . En consecuencia, las tres cantidades mencionadas al inicio de este párrafo cambiarán cuando lo haga \mathbf{W} , lo que bien ocurre durante la propagación del haz.

Para obtener un modelo de propagación de la matriz de densidad espectral cruzada, tanto en [8] como en [21] primero se describe la forma en que cambian las componentes espectrales del campo ante la propagación. Considérese un haz de luz que se propaga muy cercano a la dirección de propagación (eje z en este caso). Considérense también dos posiciones: una sobre el plano de la fuente, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, 0) = \boldsymbol{\rho}'$, y otra en algún punto del haz, $\mathbf{r} = (x, y, z) = \boldsymbol{\rho} + z\hat{\mathbf{z}}$ ($z > 0$). La componente rectangular i de la componente espectral ω del campo en la primera posición se describe por medio del ensamble $\{E_i^{(0)}(\boldsymbol{\rho}', \omega)\}$. De la misma manera, el ensamble correspondiente a la segunda posición es $\{E_i(\mathbf{r}, \omega)\}$. La relación entre dos realizaciones de ambos ensambles está dada por

$$E_i(\mathbf{r}, \omega) = \int_{(z=0)} E_i^{(0)}(\boldsymbol{\rho}', \omega) G(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z; \omega) d^2 \boldsymbol{\rho}' \quad (4.32)$$

donde

$$G(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z; \omega) = -\frac{ik}{2\pi z} \exp(ik|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|^2/2z) \quad (4.33)$$

se conoce como la función de Green para propagación paraxial de la luz. La deducción de las relaciones anteriores puede consultarse en [1], sec. 5.6.

Cada entrada de la matriz \mathbf{W} puede expresarse como $W_{ij} = \langle E_i^*(\mathbf{r}_1, \omega) E_j(\mathbf{r}_2, \omega) \rangle$ ($i, j = x, y$). Por la relación (4.32),

$$\langle E_i^*(\mathbf{r}_1, \omega) E_j(\mathbf{r}_2, \omega) \rangle = \iint_{(z=0)} \langle E_i^{(0)*}(\boldsymbol{\rho}'_1, \omega) E_j^{(0)}(\boldsymbol{\rho}'_2, \omega) \rangle G^*(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}'_1, z; \omega) G(\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}'_2, z; \omega) d^2 \boldsymbol{\rho}'_1 d^2 \boldsymbol{\rho}'_2, \quad (4.34)$$

por lo que

$$W_{ij} = \iint_{(z=0)} W_{ij}^{(0)} K(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}'_1; \boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}'_2, z; \omega) d^2 \boldsymbol{\rho}'_1 d^2 \boldsymbol{\rho}'_2, \quad (4.35)$$

donde

$$K(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}'_1; \boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}'_2, z; \omega) = G^*(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}'_1, z; \omega) G(\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}'_2, z; \omega). \quad (4.36)$$

Reescribiendo (4.35) en su forma matricial se obtiene

$$\mathbf{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \iint_{(z=0)} \mathbf{W}^{(0)}(\boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}'_2, \omega) K(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}'_1; \boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}'_2, z; \omega) d^2 \boldsymbol{\rho}'_1 d^2 \boldsymbol{\rho}'_2. \quad (4.37)$$

La ecuación anterior describe la propagación de \mathbf{W} en el espacio libre. Si se desea analizar la propagación en algún medio material entonces la función de Green (4.33) debe ser sustituida por otra función de Green que corresponda al medio en cuestión. En [8], sec. 9.4, se analiza el cambio ante propagación de la matriz de densidad espectral cruzada para un haz Gaussian Schell (Gaussian Schell-model beam). Por la subsección 2.2.4, la expresión anterior (4.37) es una solución de la ecuación de Helmholtz.

4.3.2. Parámetros generalizados de Stokes

El grado de polarización tiene la misma forma en el dominio de la frecuencia que en el dominio del tiempo, cambiando sólo la matriz argumento. De manera análoga los parámetros de Stokes se definen en función de la matriz de densidad espectral cruzada como

$$\begin{aligned} s_0(\mathbf{r}, \omega) &= W_{xx}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega) + W_{yy}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega), \\ s_1(\mathbf{r}, \omega) &= W_{xx}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega) - W_{yy}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega), \\ s_2(\mathbf{r}, \omega) &= W_{xy}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega) + W_{yx}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega), \\ s_3(\mathbf{r}, \omega) &= i[W_{yx}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega) - W_{xy}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega)] \end{aligned} \quad (4.38)$$

y se denominan parámetros espectrales de Stokes. Si, en estas expresiones, se cambia la matriz $\mathbf{W}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega)$ por $\mathbf{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$ se obtienen los parámetros generalizados de Stokes

$$\begin{aligned} S_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) &= W_{xx}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) + W_{yy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega), \\ S_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) &= W_{xx}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) - W_{yy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega), \\ S_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) &= W_{xy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) + W_{yx}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega), \\ S_3(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) &= i[W_{yx}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) - W_{xy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)]. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Por su dependencia en $\mathbf{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$ estos parámetros también cambiarán con la propagación del haz. Por la ecuación (4.35), cualquiera de ellos se propaga como

$$S_\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \iint_{(z=0)} S_\alpha^{(0)}(\rho'_1, \rho'_2, \omega) K(\rho_1 - \rho'_1; \rho_2 - \rho'_2, z; \omega) d^2 \rho'_1 d^2 \rho'_2, \quad (4.40)$$

donde $S_\alpha^{(0)}(\rho'_1, \rho'_2, \omega)$ es el parámetro en la posición $z = 0$.

4.4. Expresiones alternativas para el grado espectral de coherencia

En [22], los autores señalan que la propuesta hecha por Wolf en [20] para definir el grado espectral de coherencia para haces electromagnéticos,

$$\eta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \frac{\text{Tr} \mathbf{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)}{\sqrt{\text{Tr} \mathbf{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \omega)} \sqrt{\text{Tr} \mathbf{W}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, \omega)}}, \quad (4.41)$$

tiene como objetivo representar cuantitativamente el contraste de las franjas de interferencia del experimento de Young de la misma forma en que Zernike definió el grado espectral de coherencia para haces escalares en [14].

Sin embargo, diversos autores han contribuido con diferentes propuestas para definir el grado de coherencia para haces electromagnéticos. Por ejemplo, B. Karczewski lo definió en [24] y en [25], 1963, como

$$\delta(Q_1, Q_2, P, \tau) = \frac{\Delta(Q_1, Q_2, P, \tau)}{\sqrt{\Delta(Q_1, Q_1, P, 0)} \sqrt{\Delta(Q_2, Q_2, P, 0)}}, \quad (4.42)$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta(Q_1, Q_2, P, \tau) &= \langle [\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{E}(Q_1, t + \tau) \cdot \hat{\mathbf{r}}_1) - \mathbf{E}(Q_2, t + \tau)(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_1)] \\ &\quad \times [\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{E}(Q_1, t + \tau) \cdot \hat{\mathbf{r}}_2) - \mathbf{E}^*(Q_2, t + \tau)(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_2)] \rangle. \end{aligned} \quad (4.43)$$

CAPÍTULO 4. TEORÍA UNIFICADA DE POLARIZACIÓN Y COHERENCIA
4.4. EXPRESIONES ALTERNATIVAS PARA EL GRADO ESPECTRAL DE COHERENCIA

En las dos ecuaciones anteriores, Q_1 y Q_2 son las posiciones de las dos rendijas sobre una pantalla opaca, P es la posición donde se mide la intensidad de recombinación (como un punto en el plano de interferencia), $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario perpendicular al plano que contiene las rendijas y $\hat{\mathbf{r}}_j$ es el vector unitario que apunta desde P hacia la rendija en Q_j ($j=1,2$). Se ha usado la misma nomenclatura que usó Karczewski, así que Δ no debe confundirse con la desviación estadística del capítulo 1 ni δ con la diferencia de camino en las leyes de interferencia. La expresión (4.42) parece ser más precisa. De hecho, bajo ciertas aproximaciones se simplifica para coincidir con la propuesta de Wolf. En [10] Wolf comenta que la propuesta de Karczewski no es fácil de medir.

En [27] se presentan y comparan algunas propuestas recientes. En el resto de esta sección se rescatará, de esta última referencia, la crítica que se hace a la propuesta de Wolf y se presentará, con propósito ilustrativo, una de las propuestas alternativas.

Dicha crítica afirma que, al no considerar los elementos fuera de la diagonal de la matriz, la propuesta de Wolf no emplea toda la información de la coherencia del haz. Esto implica que dos campos de luz diferentes, cuyas matrices de densidad espectral cruzada son, por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} W_{xx}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) & W_{xy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) \\ W_{yx}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) & W_{yy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

y

$$\begin{bmatrix} W_{xx}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) & 0 \\ 0 & W_{yy}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) \end{bmatrix}, \quad (4.45)$$

tengan el mismo grado espectral de coherencia, de acuerdo a Wolf.

Una definición alternativa para este coeficiente de correlación es la propuesta por Tervo, Setälä y Friberg en [26] y su expresión matemática es

$$\tilde{\eta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \frac{\|\mathbf{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)\|}{\sqrt{\text{Tr}\mathbf{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \omega)}\sqrt{\text{Tr}\mathbf{W}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, \omega)}}. \quad (4.46)$$

Nótese que esta propuesta es similar a la de Wolf, excepto porque se ha cambiado el numerador por la norma de Frobenius de la matriz, es decir, por

$$\begin{aligned} \|\mathbf{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)\| &= \sqrt{\sum_{ij} |W_{ij}|^2} \\ &= \sqrt{\sum_{ij} |\eta_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)|^2 S_i(\mathbf{r}_1, \omega) S_j(\mathbf{r}_2, \omega)}, \end{aligned} \quad (4.47)$$

donde tanto i como j pueden tomar los valores x e y , y donde se ha usado el hecho de que $W_{ij} = \eta_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)\sqrt{S_i(\mathbf{r}_1, \omega)S_j(\mathbf{r}_2, \omega)}$ por la definición de Wolf, como se vio en la sección 4.2 (note que se está usando η para definir $\tilde{\eta}$).

Si las ondas que atraviesan las rendijas son linealmente polarizadas en la misma dirección, se tiene un caso similar al de ondas escalares. Así, $\tilde{\eta}$ debería coincidir con el grado espectral de coherencia discutido en la sección 2.2. Por ejemplo, cuando la matriz $\mathbf{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$ tiene todas sus entradas nulas excepto la primera, W_{xx} , se tiene que $\|\mathbf{W}\| = |W_{xx}|$ y en este caso, $\tilde{\eta}_{xx}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = |\eta_{xx}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)|$.

Por otro lado, como se cumple que

$$\sqrt{\text{Tr}\mathbf{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \omega)}\sqrt{\text{Tr}\mathbf{W}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, \omega)} = \sqrt{\sum_{ij} S_i(\mathbf{r}_1, \omega)S_j(\mathbf{r}_2, \omega)}, \quad (4.48)$$

se tiene que la ecuación (4.46) puede ser reescrita como

$$\tilde{\eta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \sqrt{\frac{\sum_{ij} |\eta_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)|^2 S_i(\mathbf{r}_1, \omega) S_j(\mathbf{r}_2, \omega)}{\sum_{ij} S_i(\mathbf{r}_1, \omega) S_j(\mathbf{r}_2, \omega)}}, \quad (4.49)$$

de donde se puede notar que $\tilde{\eta} = 1$ sólo cuando $\eta_{ij} = 1$ para toda η_{ij} y que $\tilde{\eta} = 0$ sólo cuando $\eta_{ij} = 0$ para toda η_{ij} .

Capítulo 5

Discusión de resultados

La siguiente es una lista de comentarios sobre diferentes conceptos y temas presentados a lo largo de los capítulos anteriores.

- La correlación $\Gamma_{ij} = \langle x_i x_j \rangle$ es una generalización del momento de segundo orden $\langle x_i^2 \rangle$. La covarianza $\mu_{ij} = \langle (\Delta x_i)(\Delta x_j) \rangle$, por su parte, es una generalización del momento central de segundo orden (o varianza) $\langle (\Delta x_i)^2 \rangle$ y describe el cambio de dos variables aleatorias con respecto a sus promedios. La correlación y la covarianza contienen información similar, puesto que $\mu_{ij} = \Gamma_{ij} - \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle$. En base a esto, dadas dos variables aleatorias, cuando sus promedios son nulos, su covarianza será igual a su correlación. Por esta razón algunos textos emplean ambos términos de forma indistinta.
- Un proceso aleatorio temporal puede verse como un conjunto de variables aleatorias, una para cada instante de tiempo. Cada una de dichas variables tiene una propia distribución de probabilidad. De esta forma, un proceso aleatorio no puede ser descrito por una sola distribución sino por una familia de ellas. Por esta razón, las medidas estadísticas de un proceso estocástico son, en general, instantáneas. Sin embargo, en los procesos estacionarios las medidas estadísticas no dependen del origen de tiempo.
- Dado que, en la realidad, el campo eléctrico presenta fluctuaciones aleatorias, su evolución en una posición determinada del espacio se modela como un proceso aleatorio. De esta manera, si un campo eléctrico existe en una región del espacio, entonces para cada punto de dicha región se define un ensamble. Luego, al seleccionar una posición particular se selecciona un ensamble particular que, a su vez, es una colección infinita de realizaciones. Cada medición en dicho punto corresponde a una realización del ensamble y cada instante de tiempo dentro de la realización define una variable aleatoria. Una función de coherencia expresa la correlación entre dos (o más) de tales variables aleatorias.
- El interferómetro de Young permite analizar la correlación de campo en puntos de un plano transversal del haz, es decir, coherencia espacial, mientras que el interferómetro de Michelson lo hace para un mismo punto en dos instantes de tiempo diferentes, esto es, coherencia longitudinal.
- En el experimento de Young, la capacidad de la luz para formar un patrón de franjas de interferencia depende, en gran parte, de la diferencia de camino óptico introducido. Si la diferencia de tiempo de viaje es menor al tiempo de coherencia, entonces se forma un patrón de franjas. La visibilidad proporciona una medida de la nitidez de dicho patrón y es igual a la magnitud del grado complejo de coherencia γ_{ij} . La visibilidad se define en términos de intensidades, las cuales son cantidades observables. Además, la ley de interferencia permite calcular la parte real de γ_{ij} también en términos de intensidades, mientras que el argumento de γ_{ij} se determina a partir de las separaciones entre franjas. De esta forma, el grado complejo de coherencia puede determinarse por completo con ayuda del experimento de Young.
- Con el fin de determinar la función de coherencia mutua $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ en el espacio-tiempo, se requieren mediciones del campo en dos instantes de tiempo, t y $t + \tau$. En la ley de interferencia, la

diferencia de tiempo τ define la diferencia de camino de la luz. Por otro lado, para determinar la función de densidad espectral cruzada $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$ en el espacio-frecuencia basta medir la componente espectral para una sola frecuencia. Así, en el espacio-frecuencia desaparece toda referencia a τ , lo que es compensado en la ley espectral de interferencia (tanto en el caso escalar como en el vectorial) por el factor $e^{ik(R_2-R_1)}$.

- Como la intensidad mutua, por su definición, no admite una diferencia de camino óptico, la porción del patrón de interferencia que le corresponde es la central. Por su parte, la función de coherencia mutua puede asociarse con todo el patrón: a cada valor de la diferencia de tiempo de recorrido τ le corresponde una región del patrón.
- Existen diferentes enfoques para definir el tiempo de coherencia. Se ha definido, por ejemplo, como el ancho de banda recíproco o como el tiempo para el cual la función de auto-coherencia cae a un valor de $1/e$ de su máximo. Sin embargo, todo enfoque considera que el tiempo de coherencia es el tiempo t_c tal que los campos $V(t)$ y $V(t + t_c)$ presentan cierta correlación de acuerdo a algún criterio. Éste último puede variar con cada enfoque.
- Como se vio en la sección 4.1, los elementos que no se encuentran en la diagonal de la matriz de densidad espectral cruzada expresan la correlación entre componentes cartesianas ortogonales de $\mathbf{E}(\mathbf{r}_1, \omega)$ y $\mathbf{E}(\mathbf{r}_2, \omega)$. Por otro lado, la ley de interferencia permite determinar el grado espectral de coherencia en términos de observables que, a su vez, se determinan a partir del patrón de interferencia. Sin embargo, de la teoría elemental se sabe que las ondas con vectores de campo eléctrico ortogonales no interfieren. Por esta razón se emplea el rotador, ya que éste permite que dos componentes de campo eléctrico que inicialmente eran ortogonales pasen a ser paralelas y se produzca el fenómeno de interferencia.

Por lo anterior, que dos ondas con campos eléctricos ortogonales no puedan interferir no implica que no exista cierta correlación entre la información que portan ambas ondas, pues al rotar alguna de ellas es posible que se produzca interferencia, a partir de la cual se calcula el grado de correlación. Esto conlleva a una limitación en el proceso experimental: cuando se mide la correlación entre componentes paralelas no se puede medir entre componentes perpendiculares, y viceversa. Esto sugiere que, con el arreglo experimental propuesto por Wolf, la interferencia no proporciona una medida instantánea completa de la correlación entre fluctuaciones para el caso vectorial. Es decir, para especificar los elementos de la matriz se requiere una configuración específica para cada uno de dichos elementos, por lo que se necesitan cuatro mediciones diferentes para determinar toda la matriz. Por lo anterior, es necesario asegurar que el campo sea estacionario (al menos en sentido amplio) y que las condiciones del experimento permanezcan invariables en todas las mediciones.

Capítulo 6

Conclusiones

- Un proceso estocástico puede expresarse como un conjunto de variables aleatorias parametrizado por un conjunto parametral. Una función de auto-correlación expresa la correlación entre dos variables aleatorias que pertenecen al mismo proceso estocástico; mientras que una función de correlación cruzada expresa la correlación entre dos variables aleatorias que pertenecen a dos procesos aleatorios distintos. Por lo tanto, las funciones de auto-correlación son un caso especial de las funciones de correlación cruzada.
- En óptica estadística se emplea el concepto de ensamble para describir el conjunto de funciones (muestrales) que pueden describir la evolución temporal del campo eléctrico en un punto determinado del espacio. De esta forma, cada punto del espacio define un ensamble $\{V(\mathbf{r}, t)\}$. Un valor de campo eléctrico, $V(\mathbf{r}, t_0)$, para un tiempo específico t_0 de una función muestral (o realización) es considerado como una variable aleatoria.
- La coherencia óptica estudia las relaciones estadísticas entre fluctuaciones de campo en diferentes puntos por medio de funciones de correlación, las cuales, en este contexto, son llamadas funciones de coherencia. El orden de una función de coherencia está relacionado con el número de posiciones en las que se analiza la correlación del campo.
- En el contexto de la óptica estadística las funciones de auto-correlación y de correlación cruzada se denominan funciones de auto-coherencia y de coherencia mutua, respectivamente. La función compleja de coherencia mutua de segundo orden $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ expresa la correlación del campo eléctrico complejo en dos posiciones y en dos instantes de tiempo. Esto es, la correlación entre variables aleatorias que pertenecen a dos ensambles de campo eléctrico, $\{V(\mathbf{r}_1, t)\}$ y $\{V(\mathbf{r}_2, t + \tau)\}$. Por su parte, la función de densidad espectral cruzada $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$ puede ser representada como la correlación entre variables aleatorias que pertenecen a dos ensambles de campo monocromático, $\{U(\mathbf{r}_1, \omega)e^{-i\omega t}\}$ y $\{U(\mathbf{r}_2, \omega)e^{-i\omega t}\}$, en la frecuencia ω . Esto es una consecuencia de la representación de modos coherentes.
- Tres casos especiales de la función compleja de coherencia mutua $\Gamma_{ij}(\tau)$ son la intensidad mutua ($\tau = 0$), la función de auto-coherencia ($i = j$) y la intensidad ordinaria ($\tau = 0$ y $i = j$).
- El fenómeno de interferencia permite caracterizar las correlaciones de la luz. La magnitud del grado complejo de coherencia, que es igual a la visibilidad del patrón de franjas de interferencia (en el experimento de la doble rendija), proporciona una medida de la correlación del campo eléctrico y, por lo tanto, caracteriza el estado de coherencia de la luz.
- Dadas dos ondas cuyos vectores de campo eléctrico son ortogonales, si bien no interfieren, la información contenida en ellas puede estar correlacionada, por lo que su grado de correlación puede ser no nulo. En consecuencia, es posible calcular la correlación entre componentes ortogonales de campo eléctrico. En la coherencia de segundo orden para ondas escalares se consideran solamente correlaciones entre ondas paralelas, mientras que en el caso de ondas vectoriales se deben considerar

las correlaciones entre las componentes cartesianas del campo. Es decir, si $\mathbf{V}(\mathbf{r}_1, t)$ y $\mathbf{V}(\mathbf{r}_2, t)$ representan dos ondas vectoriales que se propagan en la dirección z , entonces es posible indagar cuatro funciones de correlación entre ondas escalares de la forma $\langle V_i^*(\mathbf{r}_1, t)V_j(\mathbf{r}_1, t + \tau) \rangle$, pues $i, j = x, y$ produce cuatro combinaciones posibles. Al ordenar este tipo de funciones de correlación como las entradas de una matriz 2×2 se obtiene una matriz de correlación para haces electromagnéticos aleatorios.

- En un campo óptico que no se propaga paralelo a una única dirección (como lo hace un haz) el vector de campo eléctrico, en general, tendrá tres componentes cartesianas. En consecuencia habrá nueve funciones de correlación entre las componentes de dos vibraciones de campo eléctrico y tendrán la misma forma que en el caso anterior, con la diferencia de que $i, j = x, y, z$. La matriz de correlación formada con estas funciones será de dimensión 3×3 . En lugar de considerar dos vibraciones de campo eléctrico es posible considerar dos de campo magnético, o bien, una de campo eléctrico y una de campo magnético y, de la misma forma, calcular funciones de correlación entre sus componentes.
- En el dominio espacio-tiempo las cantidades observables son intensidades. Por su parte, en el dominio espacio-frecuencia las cantidades observables son densidades espectrales. La ley de interferencia permite expresar la parte real del grado complejo de coherencia en términos de intensidades, mientras que la ley espectral de interferencia expresa la parte real del grado espectral de coherencia en términos de densidades espectrales.
- La función de auto-coherencia y la densidad espectral forman un par de transformadas de Fourier (teorema de Wiener-Khintchine). Por su parte, la función de coherencia mutua y la función de densidad espectral cruzada forman, también, un par de transformadas de Fourier (teorema generalizado de Wiener-Khintchine).
- Si se conoce la relación exacta entre las componentes cartesianas del campo eléctrico en un punto de un haz de luz, entonces se dice que éste está completamente polarizado. En este caso el estado de polarización está completamente determinado por la forma y orientación de la elipse de polarización. El caso contrario corresponde a un haz completamente no polarizado.
- Los parámetros de Stokes resumen las características geométricas de la elipse de polarización, es decir, el estado de polarización. Además, existe una relación biyectiva entre cada conjunto de valores de los parámetros de Stokes y cada punto de la, así llamada, esfera de Poincaré. En un haz completamente no polarizado es imposible determinar el conjunto completo de los parámetros de Stokes.
- El estado de polarización de un haz parcialmente polarizado se define por los parámetros de Stokes y por el grado de polarización. Toda esta información se encuentra contenida en la matriz de polarización del haz, cuyas entradas son correlaciones entre las componentes cartesianas del campo en un punto del espacio y en el mismo instante de tiempo.
- La matriz de polarización de un haz completamente no polarizado es un múltiplo escalar de la matriz identidad. Por su parte, la matriz de polarización de un haz parcialmente polarizado es la suma de la matriz de la parte completamente polarizada con la matriz de la parte completamente no polarizada. Esto significa que un haz parcialmente polarizado puede representarse como la superposición de dos haces, uno completamente polarizado y uno completamente no polarizado. La razón entre la intensidad debida a la parte completamente polarizada y la intensidad total se conoce como grado de polarización. Esta razón es de carácter local, es decir, cambia con la propagación del haz.
- La matriz de coherencia mutua eléctrica, describe las correlaciones entre fluctuaciones de campo eléctrico (el cual se asume estadísticamente estacionario) en dos puntos del espacio y en instantes de tiempo diferentes (separados por una diferencia τ). Por lo tanto, dicha matriz es una medida de la coherencia de un haz electromagnético (ondas vectoriales). Por otro lado, al evaluar la matriz en una sola posición y para tiempos iguales se obtiene la matriz de polarización. Así, la matriz de coherencia mutua eléctrica constituye un formalismo que permite describir las propiedades de coherencia y polarización de un haz electromagnético estadísticamente estacionario. Como consecuencia,

los grados de coherencia y polarización se escriben en términos de la matriz de coherencia, en el dominio espacio-tiempo, o la matriz de densidad espectral cruzada, en el dominio espacio-frecuencia. Por esta razón, y al estar relacionadas por el teorema generalizado de Wiener-Khintchine, dichas matrices constituyen un modelo único para los fenómenos de polarización y coherencia de segundo orden, resultado principal de la teoría unificada.

- En el dominio espacio-frecuencia, los parámetros de Stokes se definen en términos de la matriz de densidad espectral cruzada, evaluada en una sola posición, en la misma forma en que en el dominio espacio-tiempo se definen en términos de la matriz de polarización. Al definirlos en términos de la matriz de densidad espectral cruzada, evaluada en dos posiciones diferentes, se obtienen los parámetros generalizados de Stokes.
- El grado espectral de coherencia para haces electromagnéticos (vectoriales) propuesto por Wolf tendrá el mismo valor para diferentes haces (estadísticamente estacionarios) siempre que sus matrices de densidad espectral cruzada tengan los mismos elementos diagonales. Diversos autores han propuesto definiciones alternativas del grado espectral de coherencia para haces electromagnéticos con el fin de que éste sea diferente para haces con matrices de densidad espectral cruzada diferentes. La mayoría de estas propuestas buscan respetar las características del grado espectral de coherencia para ondas escalares, por ejemplo, tener un módulo normalizado entre 0 y 1.
- La función y la matriz compleja de coherencia mutua satisfacen la ecuación de onda con respecto a las coordenadas de cada uno de los dos puntos en que se definen y con respecto a la diferencia de tiempo de viaje de la luz τ . El teorema de Van Cittert-Zernike es una solución aproximada de esta ecuación diferencial.
- La función y la matriz de densidad espectral cruzada satisfacen la ecuación de Helmholtz, lo que implica que varían al propagarse. Luego, por su dependencia de esta matriz, el grado espectral de coherencia, el grado de polarización y el espectro de un haz electromagnético también varían con la propagación.
- Los cambios inducidos por correlación se refieren a los cambios que experimentan el grado espectral de coherencia, el grado de polarización y el espectro de un haz electromagnético durante la propagación de éste. Este resultado es uno de los principales descubrimientos hechos en el dominio espacio-frecuencia.

Bibliografía

- [1] L. Mandel y E. Wolf. *Optical coherence and quantum optics*. Cambridge University Press, 1995.
- [2] B. P. Lathi. *An introduction to random signals and communication theory*. Student Edition. International Textbook Company, 1970.
- [3] J. W. Goodman. *Statistical optics*. 2nd Ed. Wiley, 2015.
- [4] F. Beichelt. *Applied probability and stochastic processes*. 2nd Ed. Chapman y Hall/CRC, 2016.
- [5] B. V. Gnedenko. *The theory of probability*. English translation. MIR Publishers, 1978.
- [6] J. Lamperti. *Stochastic Processes A survey of the mathematical theory (Applied Mathematical Sciences, 23)*. Springer/Verlag, 1977.
- [7] B. K. Øksendal. *Stochastic differential equations An introduction with applications*. 6th Ed. Springer, 2003.
- [8] E. Wolf. *Introduction to the Theory of Coherence and Polarization of Light*. Cambridge University Press, 2007.
- [9] E. Wolf. “The development of optical coherence theory”. En: *Selected works of Emil Wolf with commentary*. World Scientific, Singapore, 2001.
- [10] E. Wolf. “The influence of Young’s interference experiment on the development of statistical optics”. En: *Progress in Optics* 50 (2007), págs. 251-273.
- [11] E. Hecht. *Optics*. 4th Ed. Addison Wesley, 2002.
- [12] H. Roychowdhury y E. Wolf. “Statistical similarity and the physical significance of complete spatial coherence and complete polarization of random electromagnetic beams”. En: *Optics Communications* 248 (2005), págs. 327-332.
- [13] E. Wolf. “Statistical similarity as a unifying concept of the theories of coherence and polarization of light”. En: *Optics Communications* 283 (2010), págs. 4427-4429.
- [14] F. Zernike. “The concept of degree of coherence and its application to optical problems”. En: *Physica* 5 (1938), págs. 785-795.
- [15] E. Wolf. “Optics in terms of observable quantities”. En: *Nuovo Cimento* 12 (1954), págs. 884-888.
- [16] E. Wolf. “Macroscopic Theory of Interference and Diffraction of Light from Finite Sources. II. Fields with a Spectral Range of Arbitrary Width”. En: *Proceedings of the Royal Society Lond. A* 230 (1955), págs. 246-265.
- [17] E. Wolf. “Coherence properties of partially coherent electromagnetic radiation”. En: *Nuovo Cimento* 13 (1959), págs. 1165-1181.
- [18] E. Wolf. “New spectral representation of random sources and of the partially coherent fields that they generate”. En: *Optics Communications* 38(1) (1981), págs. 3-6.
- [19] J. Tervo, T. Setälä y A. T. Friberg. “Theory of partially coherent electromagnetic fields in the space-frequency domain”. En: *J. Opt. Soc. Am. A* 21 (2004), págs. 2205-2215.
- [20] E. Wolf. “Unified theory of coherence and polarization of random electromagnetic beams”. En: *Physics Letters A* 312 (2003), págs. 263-267.

- [21] E. Wolf. "Correlation-induced changes in the degree of polarization, the degree of coherence, and the spectrum of random electromagnetic beams on propagation". En: *Optics Letters* 28 (2003), págs. 1078-1080.
- [22] H. Roychowdhury y E. Wolf. "Determination of the electric cross-spectral density matrix of a random electromagnetic beam". En: *Optics Communications* 226 (2003), págs. 57-60.
- [23] G. Gbur y T. D. Visser. "Chapter 5. The structure of partially coherent fields". En: *Progress in optics* 55 (2010), págs. 285-341.
- [24] B. Karczewski. "Degree of coherence of the electromagnetic field". En: *Phys. Lett.* 5 (1963), págs. 191-192.
- [25] B. Karczewski. "Coherence theory of the electromagnetic field". En: *Nuovo Cimento* 30 (1963), págs. 906-915.
- [26] J. Tervo, T. Setälä y A. T. Friberg. "Degree of coherence for electromagnetic fields". En: *Opt. Express* 11 (2003), págs. 1137-1143.
- [27] A. S. Ostrovsky y col. "Vector coherence theory: An overview of basic concepts and definitions". En: *Recent Research Developments in Optics* 7 (2009), págs. 113-132.
- [28] S. Bochner. *Lectures on Fourier integrals*. Princeton University Press, 1959.
- [29] K. K. Sharma. *Optics. Principles and Applications*. Academic Press, 2006.
- [30] M. Born y E. Wolf. *Principles of optics. Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. 7th Ed., (expanded). Cambridge University Press, 1999.
- [31] M. V. Klein y T. E. Furtak. *Optics*. 2nd Ed. John Wiley & Sons, 1986.
- [32] D. F. V. James y E. Wolf. "Determination of the degree of coherence of light from spectroscopic measurements". En: *Optics Communications* 145 (1998), 1-4. (Reprinted in E. Wolf, *Selected Works of Emil Wolf* (World Scientific, Singapore, 2001)).
- [33] E. Wolf y D. F. V. James. "Correlation-induced spectral changes". En: *Reports on Progress in Physics* 59(6) (1996), págs. 771-818.