



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

POSTGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

UN ESTUDIO DE LA DINÁMICA DE LA CLASE DE
FUNCIONES MEROMORFAS κ

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

IVÁN HERNÁNDEZ ORZUNA

DIRECTORA DE TESIS:

DRA. PATRICIA DOMÍNGUEZ SOTO

PUEBLA, PUEBLA. 2015

A mi familia, compañeros de aula y mis maestros

Agradecimientos

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca recibida de agosto de 2011 a agosto de 2015.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Una breve historia de la dinámica compleja	1
1.2. Trabajo de esta tesis	5
1.3. Resultados principales de esta tesis	8
1.4. Organización del trabajo	11
2. Conceptos básicos	13
2.1. Singularidades de una función analítica	13
2.2. Funciones meromorfas	14
2.3. Valores singulares de f	16
2.4. Conjugación analítica	18
2.5. Familias Normales	19
2.6. Conjuntos de capacidad cero	20
3. Las clases de funciones meromorfas \mathcal{M} y \mathcal{K}, y sus conjuntos de Fatou y Julia	23
3.1. Las clases \mathcal{M} y \mathcal{K}	23
3.2. Algunos resultados en el estudio de la clase \mathcal{K}	24
3.3. Iteración de funciones en la clases \mathcal{M} y \mathcal{K}	27
3.4. Puntos fijos y su clasificación	28
3.5. Los conjuntos de Fatou y Julia, y algunas de sus propiedades	30
3.6. Clasificación de componentes de Fatou	35

3.7. Clasificación de componentes periódicas	36
3.8. Subclases $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ y $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}$	38
4. El conjunto residual en el conjunto de Julia para las clases \mathcal{M} y \mathcal{K}	41
4.1. Propiedades básicas del conjunto residual en el conjunto de Julia en las clases \mathcal{M} y \mathcal{K}	41
4.2. Demostraciones de los Teoremas A y B	44
4.3. Ejemplos de funciones $f \in \mathcal{K}$ con $\mathcal{J}_r(f) \neq \emptyset$	47
5. La familia de funciones $F_{\lambda,c,\mu}(z)$ en la clase \mathcal{K}	50
5.1. Puntos fijos y valores singulares de $F_{\lambda,c,\mu}(z)$	53
5.2. Componente atractora	60
5.3. Componente parabólica	69
5.3.1. Ejemplos de componentes parabólicas coexistiendo con compo- nentes atractoras	69
5.4. Disco de Siegel	78
5.5. Anillos de Herman en la clase \mathcal{K}	79
5.6. Estudio de $F_{\lambda,c,\mu}(z)$ con más de un punto fijo	80
6. Conclusiones y trabajo a futuro	83
6.1. Conclusiones	83
6.2. Trabajo a futuro	84
Referencias	85

Capítulo 1

Introducción

1.1. Una breve historia de la dinámica compleja

El estudio de los sistemas dinámicos holomorfos se dio a finales del siglo XIX y a principios del siglo XX. En sus orígenes, matemáticos tales como Leau, Schröder, Koenigs, Böttcher, entre otros, se interesaron en el comportamiento local de la iteración de funciones de variable compleja cerca de sus puntos fijos. Durante el período de 1918 a 1920, se produjo un cambio drástico por los trabajos pioneros de dos matemáticos franceses: Gaston Julia y Pierre Fatou. En lugar de considerar sólo el comportamiento local, Fatou y Julia estudiaron un punto de vista más global. Descubrieron que, en algunas ocasiones, las iteraciones de funciones racionales se comportaban de manera estable, y otras veces se comportaban de modo completamente diferente, es decir, de manera no estable. La idea principal de Fatou y Julia se basó en utilizar la teoría de familias normales, que investigó Paul Montel en su tesis doctoral, para dividir el plano complejo en dos conjuntos: el conjunto caótico y el conjunto estable. Actualmente, en honor a las contribuciones de estos matemáticos, llamamos al conjunto estable el conjunto de Fatou y al conjunto caótico el conjunto de Julia.

Fatou y Julia publicaron una serie de artículos sobresalientes, donde demostraron algunas propiedades de los conjuntos estable y caótico que en adelante llamaremos

conjunto de Fatou y Julia, respectivamente. Para funciones racionales de grado al menos dos; las propiedades son las siguientes:

- (i) El conjunto de Fatou es abierto y el conjunto de Julia es cerrado.
- (ii) El conjunto de Julia no es vacío y perfecto.
- (iii) Los conjuntos de Fatou y Julia son completamente invariantes.
- (iv) Los puntos fijos periódicos repulsivos son densos en el conjunto de Julia.

Estas aportaciones se encuentran en [34], [35] y [40].

Un dominio de normalidad U de las iteradas de una función racional f , denotadas por f^{on} , es una componente (conexa) del conjunto de Fatou. La n -ésima iterada de U bajo f , esto es, $f^{on}(U)$, está contenida en una componente de Fatou U_n . La componente U puede ser periódica, preperiódica o errante. Una componente periódica puede ser atractora, parabólica, disco de Siegel o anillo de Herman (véase la Sección 3.7 para la definición de cada componente). Esta clasificación fue, en esencia, formulada por Fatou y Cremer (véase [20] y [36]).

Para las componentes periódicas, Fatou demostró que si f es una función racional y $(f^{on}|_U)$ tiene funciones límite constantes, entonces U es una componente atractora o componente parabólica (véase [36]). Cremer demostró que si $(f^{on}|_U)$ tiene funciones límite no constantes, entonces U es una componente conformemente equivalente a un anillo o a un disco (véase [20]). Cremer llamó a este tipo de componentes dominios singulares. Cabe mencionar que Fatou y Cremer no enunciaron la clasificación de las componentes de Fatou como se conoce actualmente.

En 1942, C. L. Siegel demostró que existía en el conjunto de Fatou un dominio de rotación que era conformemente equivalente a un disco, actualmente llamado disco de Siegel (véase [58]). En 1979, M. Herman proporcionó un ejemplo de un dominio de rotación en el conjunto de Fatou que era conformemente equivalente a un anillo, a lo que hoy llamamos anillo de Herman (véase [38]). Uno de los problemas que surgieron

en ese tiempo en la teoría de iteración de funciones racionales fue la siguiente: ¿Existen componentes en el conjunto de Fatou que no sean periódicas o preperiódicas? Esta pregunta se conoció como el problema de componentes errantes. En 1985, D. Sullivan responde esta pregunta de manera negativa; en su demostración usó nuevas técnicas basadas en la teoría casi conforme (véase [59]). Con su respuesta, Sullivan enuncia formalmente lo que hoy es el teorema de clasificación de las componentes de Fatou para una función racional, esto es, componentes atractoras, componentes parabólicas, discos de Siegel y anillos de Herman.

Fatou, en [36], extendió la teoría de iteración de funciones racionales a funciones trascendentes enteras. Fatou se preguntó si las propiedades (i)-(iii) mencionadas anteriormente eran válidas para la clase de funciones trascendentes enteras, y observó que las pruebas de las propiedades (i)-(iii), para funciones racionales, no funcionaban para la clase de funciones trascendentes enteras, porque las pruebas se basaban en el hecho que las funciones racionales siempre tienen puntos fijos, mientras que las trascendentes enteras pueden no tener, por ejemplo, la función $f(z) = e^z + z$. Fatou demostró las propiedades (i)-(iii) usando otras herramientas matemáticas como el crecimiento de las funciones trascendentes enteras. También investigó la función $f(z) = z + 1 + e^{-z}$ y observó que existía una componente con un comportamiento que no ocurre en la iteración de funciones racionales, a la que llamó componente de indeterminación; actualmente a este tipo de componente la llamamos dominio de Baker. Fatou murió, dejando la pregunta de que si la propiedad (iv) valía para funciones trascendentes enteras. En 1968, Baker demuestra la propiedad (iv). Baker aplicó, por primera vez, el Teorema de las Cinco Islas de Ahlfors en la teoría de iteración compleja (véase [5]). Mas aún, Baker en 1976 proporciona el primer ejemplo de una función trascendente entera cuyo conjunto de Fatou contiene una componente errante (véase [6]). Con el ejemplo proporcionado por Baker se enuncian nuevas conjeturas relacionadas con las componentes errantes en el conjunto de Fatou. Por otro lado, no fue difícil demostrar que, usando el principio del módulo máximo, los anillos de Herman no existen en el conjunto de Fatou de una fun-

ción trascendente entera. En conclusión, una función trascendente entera puede tener en su conjunto de Fatou componentes atractoras, componentes parabólicas, discos de Siegel, dominios de Baker y componentes errantes.

Como mencionamos anteriormente, Sullivan resolvió el problema de componentes errantes en el conjunto de Fatou para funciones racionales; varios matemáticos observaron que una condición en la demostración de Sullivan era que las funciones racionales tienen un conjunto finito de valores críticos. A. Eremenko y M. Ju. Lyubich definieron en [32] la clase \mathcal{S} como el conjunto de funciones trascendentes enteras que tienen un conjunto finito de valores críticos y valores asintóticos. Con la definición de la clase \mathcal{S} , Eremenko y Lyubich demostraron que las funciones trascendentes enteras que pertenecen a la clase \mathcal{S} no tienen componentes errantes ni dominios de Baker en su conjunto de Fatou (véase [32]).

En 1991, Baker, Kotus y Lü extendieron la teoría de iteración de funciones racionales, que desarrollaron Fatou y Julia, a la clase de funciones trascendentes meromorfas que denotaron por \mathcal{M} (véase [8]). Estos matemáticos demostraron que las propiedades (i)-(iv), mencionadas anteriormente, se extendían a la clase \mathcal{M} . El conjunto de Fatou de una función trascendente meromorfa puede tener todas las posibles componentes de Fatou del teorema de clasificación de Sullivan añadiendo los dominios de Baker y componentes errantes. En 1992, Baker, Kotus y Lü definieron la clase \mathcal{S} para funciones trascendentes meromorfas de manera similar a la de Eremenko y Lyubich, y demostraron que funciones que pertenecen a esta clase no tienen en su conjunto de Fatou dominios errantes ni dominios de Baker (véase [10]).

En 1997, Andreas Bolsch, en su tesis doctoral, generalizó la teoría de iteración de funciones trascendentes meromorfas a una clase de funciones meromorfas cuyo dominio es el complemento de un conjunto compacto y contable de singularidades aisladas o de puntos de acumulación de tales singularidades, a esta clase de funciones la denotaremos como \mathcal{K} en este trabajo de tesis (véase [16], [17] y [18]). Bolsch demostró las propiedades (i)-(iv) de los conjuntos de Fatou y Julia, que se mencionaron

anteriormente. La propiedad (iv) la demostró usando resultados de familias normales y consecuencias del Teorema Fundamental de Nevanlinna (véase [16]). También, Bolsch demostró que una componente periódica en el conjunto de Fatou de una función en la clase \mathcal{K} puede tener conectividad uno, dos o infinito. La clasificación de las componentes periódicas del conjunto de Fatou de funciones trascendentes meromorfas se extiende para funciones en la clase \mathcal{K} . Sin embargo, hasta hoy no existen ejemplos de planos dinámicos de funciones en la clase \mathcal{K} que contengan componentes atractoras, componentes parabólicas, discos de Siegel y dominios de Baker. Con respecto a los anillos de Herman en la clase de funciones \mathcal{K} , Domínguez y Fagella, en [24], construyeron anillos de Herman usando cirugía casi conforme, cabe mencionar que este método no muestra explícitamente la expresión de la función resultante. Los dominios de Baker en la clase \mathcal{K} no han sido investigados hasta hoy, de forma que las condiciones que deben cumplir las funciones en la clase \mathcal{K} para que existan dominios de Baker se deben investigar cuidadosamente y, por lo tanto, son problemas abiertos en el área de sistemas dinámicos complejos.

Como conclusión de esta breve historia queda claro que la dinámica de funciones en la clase \mathcal{K} no ha sido investigada lo suficiente y, por tanto, existen una gran variedad de problemas abiertos.

1.2. Trabajo de esta tesis

En la sección anterior mencionamos que Baker, Kotus y Lü demostraron la propiedad (iv) para funciones trascendentes meromorfas, usando el Teorema de las Cinco Islas de Ahlfors, sin utilizar Teoría de Nevanlinna. Bolsch, en [16], demostró la propiedad (iv) para funciones meromorfas fuera de un conjunto compacto y contable de singularidades aisladas o de puntos de acumulación de tales singularidades usando resultados de familias normales y consecuencias del Teorema Fundamental de Nevanlinna. En esta tesis proporcionamos otra demostración, diferente a la de Bolsch, de la propiedad (iv) para funciones en la clase \mathcal{K} , siguiendo la idea de Baker, Kotus y Lü para

funciones trascendentes meromorfas, es decir, utilizando el Teorema de las Cinco Islas de Ahlfors.

Baker, Kotus y Lü investigaron en [9] las componentes completamente invariantes del conjunto de Fatou de funciones en la clase \mathcal{M} . Dos resultados importantes se enuncian de la siguiente forma:

- (1) Si f es una función en la clase \mathcal{M} y su conjunto de Fatou tiene sólo una componente completamente invariante U , entonces la frontera U es el conjunto de Julia.
- (2) Si el conjunto de Fatou de una función en la clase \mathcal{M} tiene dos o más componentes completamente invariantes, entonces cada una de ellas es simplemente conexa.

Bolsch, en su tesis doctoral, demostró un resultado relacionado con la conectividad de las componentes de Fatou, para funciones en la clase \mathcal{K} . Sin embargo, las componentes completamente invariantes del conjunto de Fatou para funciones en la clase \mathcal{K} no han sido estudiadas. En este trabajo de tesis, extendemos los resultados (1) y (2) de Baker, Kotus y Lü para funciones en la clase \mathcal{K} .

En 1985, D. Sullivan hace corresponder la teoría de grupos de Klein con la iteración de funciones racionales mediante un diccionario, llamado ahora diccionario de Sullivan (véase [59]). Si Γ es un grupo de Klein, entonces denotamos por $\Omega(\Gamma)$ su conjunto ordinario y por $\Lambda(\Gamma)$ su conjunto límite. William Abikoff definió el conjunto residual límite de un grupo de Klein Γ , denotándolo por $\Lambda_r(\Gamma)$, como el subconjunto de puntos del conjunto límite $\Lambda(\Gamma)$ que no está sobre la frontera de ninguna componente del conjunto ordinario $\Omega(\Gamma)$ (véase [1] y [2]). Abikoff proporcionó ejemplos para demostrar que el conjunto residual límite puede ser diferente del vacío. En 1988, Curt McMullen usa el diccionario de Sullivan para definir y dar un ejemplo de una función racional con componentes enterradas en el conjunto de Julia (véase [44]). McMullen definió una componente enterrada (o punto enterrado) en el conjunto de Julia como la componente (o punto) que no está en la frontera de ninguna componente del conjunto de Fatou.

Seguramente, el escaso interés en el conjunto residual desde Abikoff a McMullen en sistemas dinámicos complejos fue provocado por el hecho de que los polinomios siempre tienen componentes completamente invariantes en el conjunto de Fatou y, por lo tanto, el conjunto residual es vacío.

En 1991, Beardon demostró que el conjunto de Julia de una función racional con grado mayor o igual que dos tiene componentes enterradas si el conjunto de Julia es desconexo y cada componente del conjunto de Fatou tiene conectividad finita (véase [13]). Este resultado proporcionó las primeras condiciones para la existencia del conjunto residual en el conjunto de Julia para funciones racionales. A partir del resultado de Beardon, varios matemáticos estudiaron componentes enterradas para funciones racionales, por ejemplo, [46], [47] y [55]. En 1995, Qiao proporciona los primeros resultados del conjunto residual en el conjunto de Julia para funciones trascendentes enteras (véase [56]). En 1997, Domínguez, en [21], demuestra que los puntos enterrados son densos en el conjunto de Julia y proporciona ejemplos de funciones trascendentes enteras cuyo conjunto residual es diferente del vacío. En 2000, Baker y Domínguez extendieron algunos de los resultados de Morosawa y Qiao a funciones trascendentes meromorfas (véase [7]). Una pregunta natural relacionada con el conjunto residual sería: ¿Es el conjunto residual no vacío para funciones en la clase \mathcal{K} ? En este trabajo de tesis proporcionamos condiciones para que el conjunto residual en el conjunto de Julia sea no vacío.

Como mencionamos en la Sección 1.1, hasta hoy, no se ha realizado un estudio del plano dinámico de funciones en la clase \mathcal{K} . En esta tesis investigamos la siguiente familia de funciones $F_{\lambda,c,\mu}(z) = \lambda e^{1/(z^2+c)} + \mu$, donde $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $c, \mu \in \mathbb{C}$, que pertenece a la clase de funciones \mathcal{K} , porque el conjunto de singularidades esenciales es $\{\pm i\sqrt{c}\}$ que es un conjunto compacto y contable.

La importancia de investigar esta familia de funciones se menciona a continuación:

- (a) La familia de funciones tiene dos singularidades esenciales no omitidas distintas

de cero e infinito.

- (b) La familia es la composición de las funciones $h_1(z) = z^2 + c$, $h_2(z) = 1/z$, $h_3(z) = \lambda e^z$ y $h_4(z) = z + \mu$. La función $h_1(z) = z^2 + c$ pertenece a la familia cuadrática $f_c(z) = z^2 + c$, que ha sido ampliamente estudiada y sus planos dinámicos aparecen para valores λ, c y μ de la familia $F_{\lambda, c, \mu}(z)$ investigada en este trabajo de tesis.
- (c) No hay resultados en el plano dinámico de funciones en la clase \mathcal{K} . La familia de funciones $F_{\lambda, c, \mu}(z)$ es la primera vez que se investiga en el área de la dinámica compleja.

Los resultados originales que se demostraron en este trabajo de tesis los enunciamos en la siguiente sección.

1.3. Resultados principales de esta tesis

En esta tesis se definen las siguientes clases de funciones meromorfas:

$\mathcal{M} := \{f : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \mid f \text{ es trascendente meromorfa no constante, con al menos un polo que no es un valor omitido}\}.$

$\mathcal{K} := \{f : \widehat{\mathbb{C}} \setminus B(f) \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \mid f \text{ es meromorfa no constante en } \widehat{\mathbb{C}} \setminus B(f)\}.$

El conjunto $B(f)$ es compacto, contable y está formado por singularidades aisladas de f o puntos de acumulación de tales singularidades. También el conjunto $B(f)$ tiene al menos dos elementos, uno de ellos no omitido, y la capacidad del conjunto $B(f)$ es cero.

La clase \mathcal{M} tiene a infinito como única singularidad esencial aislada, mientras que en la clase \mathcal{K} , infinito puede ser o no singularidad esencial. Observemos que las clases de funciones \mathcal{M} y \mathcal{K} son disjuntas.

El conjunto residual en el conjunto de Julia, mencionado en la Sección 1.2, se ha investigado para funciones en la clase \mathcal{M} , pero en la literatura no hay resultados del

conjunto residual para funciones en la clase \mathcal{K} . Por esta razón, definimos el conjunto residual en el conjunto de Julia para la clase de funciones \mathcal{K} , que denotamos por $\mathcal{J}_r(f)$ para $f \in \mathcal{K}$, y proporcionamos condiciones para asegurar que este conjunto no es vacío.

El primer resultado (Teorema A) es una extensión del Teorema 1 en [7], que se cumple para funciones en la clase \mathcal{M} . Es importante mencionar que lo novedoso del resultado en esta tesis consiste en remover la hipótesis de la existencia de componentes no errantes, que se requería en el Teorema 1.

Teorema A. [27] *Sea f en la clase \mathcal{K} . Si el conjunto de Julia $\mathcal{J}(f)$ no es conexo y el conjunto de Fatou $\mathcal{F}(f)$ no tiene componentes completamente invariantes, entonces el conjunto residual en el conjunto de Julia $\mathcal{J}_r(f)$ no es vacío.*

Usando resultados de la teoría de aproximación compleja, se construye un ejemplo del Teorema A.

El siguiente resultado es una extensión de la Proposición 6.22 que se demostró en [25].

Teorema B. [27] *Sea $f \in \mathcal{K}$ y $A \subsetneq (\widehat{\mathbb{C}} \setminus B(f))$ un conjunto cerrado con interior no vacío. Supongamos que las siguientes condiciones se satisfacen:*

$$(a) \left((\widehat{\mathbb{C}} \setminus B(f)) \setminus A \right) \cap \mathcal{J}(f) \neq \emptyset.$$

(b) *Si Ω es una componente de Fatou conexa, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^{on}(\Omega) \subset A$ para cada $n > N$, donde N depende de Ω .*

Entonces $\mathcal{J}_r(f) \neq \emptyset$.

El teorema anterior es un criterio para asegurar la existencia de puntos enterrados en el conjunto de Julia.

En esta tesis se investiga la familia de funciones $F_{\lambda,c,\mu}(z)$ en la clase \mathcal{K} , donde $F_{\lambda,c,\mu}(z)$ está dada por la siguiente expresión:

$$F_{\lambda,c,\mu}(z) = \lambda e^{1/(z^2+c)} + \mu, \text{ donde } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ y } c, \mu \in \mathbb{C}. \quad (1.1)$$

Con respecto a las componentes periódicas en el conjunto de Fatou para la familia $F_{\lambda,c,\mu}(z)$, demostraremos que para ciertos valores de los parámetros λ, c y $\mu \in \mathbb{C}$ la familia $F_{\lambda,c,\mu}(z)$ tiene en su conjunto de Fatou las siguientes componentes: (a) atractoras, (b) parabólicas y (c) discos de Siegel. También, demostramos que los dominios de Baker no existen para la familia $F_{\lambda,c,\mu}(z)$. Con respecto a las componentes errantes, demostraremos que no existen en el conjunto de Fatou de esta familia de funciones. Para demostrar la no existencia de componentes errantes y dominios de Baker en el conjunto de Fatou de la familia $F_{\lambda,c,\mu}(z)$, definiremos una subclase de funciones $\mathcal{S} \subset \mathcal{K}$ y demostraremos que el conjunto de valores singulares de $F_{\lambda,c,\mu}(z)$ es un conjunto finito.

Los siguientes teoremas proporcionan condiciones que deben cumplir los parámetros para que existan en el conjunto de Fatou de la familia $F_{\lambda,c,\mu}(z)$ componentes atractoras (véase [28]).

Teorema C. *Sea $F_{\lambda,c,\mu}(z)$ como en (1.1). Si $\mu = -\lambda e^{1/c}$, $|\lambda|$ es suficientemente pequeño, y $1/|c| < \log(3/2)$ para $\lambda, c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces el conjunto de Fatou de $F_{\lambda,c,-\lambda e^{1/c}}(z)$ es una componente atractora completamente invariante y múltiplemente conexa.*

El Teorema C proporciona de forma gratuita un ejemplo de un resultado que demostró Bolsch en [18] que dice: Si $f \in \mathcal{K}$ y U es una componente periódica del conjunto de Fatou, entonces U tiene conectividad uno, dos o infinito. En este mismo teorema, consideramos el caso, cuando el único punto fijo es $z = 0$.

El siguiente corolario se obtiene tomando los parámetros λ, c y μ reales y z real.

Corolario 1. *Sea $F_{\lambda,c,\mu}(z)$ como en (1.1). Si $z \in \mathbb{R}$, $\mu = -\lambda e^{1/c}$ y $e^{1/c} - 1 < \lambda^{-1}$ para $\lambda, c \in \mathbb{R}^+$, entonces el conjunto de Fatou de $F_{\lambda,c,-\lambda e^{1/c}}(z)$ es una componente atractora completamente invariante y múltiplemente conexa.*

Teorema D. *Sea $F_{\lambda,c,\mu}(z)$ como en (1.1). Si $z \in \mathbb{R}$, $\mu = 0$, $1/2 < c < 1$, $0 < \lambda < (e^{1/c})^{-1}$ para cada $\lambda, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, entonces el conjunto de Fatou de $F_{\lambda,c,0}(x)$ es una componente atractora completamente invariante y múltiplemente conexa.*

El siguiente resultado, proporciona las condiciones que los parámetros λ , c y μ deben cumplir, para que exista una componente parabólica en el conjunto de Fatou de $F_{\lambda,c,\mu}(z)$.

Teorema E. *Sea $F_{\lambda,c,\mu}(z)$ como en (1.1). Si $c \in \mathbb{C} \setminus \{-u^2\}$, $\lambda = -(c+u^2)^2/(2ue^{1/(u^2+c)})$ y $\mu = u + (c+u^2)^2/2u$, donde u es una raíz de la unidad, entonces el conjunto de Fatou de $F_{\lambda,c,\mu}(z)$ contiene una componente parabólico.*

Se proporcionan ejemplos de componentes parabólicas para los parámetros dados en el Teorema E. Aún más, estos componentes coexisten con componentes atractoras que pueden ser acotadas o no acotadas.

La existencia de un disco de Siegel en el conjunto de Fatou de $F_{\lambda,c,\mu}(z)$ viene dada por el siguiente teorema.

Teorema F. *Sea $F_{\lambda,c,\mu}(z)$ como en (1.1). Si $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es un número de Brjuno, $c = (1/2)e^{2\pi i\theta} + 1$ y $\lambda = e^{-1}\sqrt{1-c}$, entonces el conjunto de Fatou de $F_{\lambda,c,0}(z)$ contiene un disco de Siegel.*

Para la existencia de anillos de Herman en la clase \mathcal{K} , se utiliza la técnica de cirugía casi conforme como en [24], tomando para la cirugía los discos de Siegel del Teorema F. Cabe mencionar que en la tesis no se demostró la existencia de anillos de Herman en la familia $F_{\lambda,c,\mu}(z)$.

1.4. Organización del trabajo

El Capítulo 1 contiene una introducción a la dinámica compleja y los resultados que demostramos en esta tesis. En el Capítulo 2 se exponen algunos conceptos básicos

relacionados con singularidades de una función analítica y de su inversa, familias normales, conjugación analítica y conjuntos de capacidad cero. En el Capítulo 3 se definen las clases de funciones \mathcal{M} y \mathcal{K} , los conjuntos de Fatou y Julia para estas clases, y se enuncian algunas propiedades básicas de estos conjuntos. También se estudian las componentes completamente invariantes del conjunto de Fatou para funciones en la clase \mathcal{K} y se demuestra la propiedad (iv) usando sólo el Teorema de la Cinco Islas de Ahlfors. En el Capítulo 4 definimos el conjunto residual en el conjunto de Julia, enunciamos algunas propiedades establecidas para la clase de funciones \mathcal{M} , y extendemos estas propiedades a la familia de funciones \mathcal{K} . En este mismo capítulo demostramos los Teoremas A y B. En el Capítulo 5 se investiga la dinámica de la familia de funciones $F_{\lambda,c,\mu}(z)$ y demostramos que su conjunto de Fatou contiene componentes atractoras, componentes parabólicas, discos de Siegel y anillos de Herman (Teoremas C, D y E). También, se presentan imágenes de los planos dinámicos de la familia $F_{\lambda,c,\mu}(z)$, que se elaboraron con el *software* FractalStream. Cabe mencionar que estos planos dinámicos se pudieron realizar con la ayuda del Dr. Christian Henriksen. Finalmente, en el Capítulo 6 se enuncian las conclusiones de la tesis y el trabajo a futuro.

Capítulo 2

Conceptos básicos

En este capítulo exponemos algunos conceptos, como singularidades de una función analítica y de su inversa, conjugación analítica, familias normales y conjuntos de capacidad cero. El objetivo de este capítulo es su uso en las demostraciones de varios resultados de esta tesis.

En este trabajo suponemos que se conocen conceptos de topología tales como espacio topológico, homeomorfismo, conjunto compacto, conjunto conexo, conjunto perfecto y espacio Hausdorff. Estos conceptos se pueden encontrar en [14], [30], [51] y [48].

También suponemos que se conocen conceptos básicos de variable compleja. Para mayor referencia se pueden consultar los textos de [4], [19], [37], [43], [50] y [53].

2.1. Singularidades de una función analítica

Recordemos que $w \in \mathbb{C}$ no es un punto singular de una función de variable compleja $f(z)$; si existe un abierto W con $w \in W$ tal que para cada componente V de $f^{-1}(W)$, se tiene que $f|_V : V \rightarrow W$ es un homeomorfismo.

Decimos que z_0 es un punto singular aislado de una función de variable compleja si existe una vecindad de z_0 en la que f es analítica en toda la vecindad menos en el punto z_0 . Un punto z_0 es una singularidad no aislada si para cada vecindad de z_0 contiene otra singularidad diferente de z_0 .

Los puntos singulares aislados tienen la siguiente clasificación:

Sea z_0 un punto singular aislado.

- (i) El punto z_0 se llama *punto singular evitable (removable)* de la función f si existe el límite de la función f en el punto z_0 .
- (ii) El punto z_0 se llama *polo* de la función f si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, y definimos $f(z_0) = \infty$.
- (iii) El punto z_0 se llama *singularidad esencial* de la función f si no es polo y no es singularidad evitable.

2.2. Funciones meromorfas

Recordemos que la esfera de Reimann, que denotamos por $\widehat{\mathbb{C}}$, es el plano complejo ampliado $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. La distancia entre dos puntos en la esfera está dada por:

$$\chi(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \sqrt{1 + |z_2|^2}}.$$

Si $z_2 = \infty$, entonces

$$\chi(z_1, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z_1|^2}}.$$

Se puede demostrar que $(\widehat{\mathbb{C}}, \chi)$ es un espacio métrico, la métrica χ se utilizará en las siguientes secciones.

Una función f que es analítica en \mathbb{C} excepto en sus polos se llama *función meromorfa*. Un punto z_0 se llama *valor omitido* de una función meromorfa f si $f(z) \neq z_0$ para cada z en el dominio de definición de f . Decimos que f asume o toma el valor w si existe z en el dominio de definición de f tal que $f(z) = w$.

Sea f una función meromorfa en un dominio Ω . Si $z \in \Omega$ no es un polo, entonces

la derivada de la métrica esférica se llama la derivada esférica y está dada por:

$$f^\#(z) = \frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2}.$$

Si ζ es un polo de f , definimos

$$f^\#(\zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2}.$$

Los siguientes teoremas son muy importantes en el estudio de las funciones meromorfas. Recordemos que, dado un dominio $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$ de conectividad $c(G) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, la característica de Euler está definida por

$$\rho(G) = \sup\{\rho(\Omega) : \Omega \text{ es un subdominio de } G\} = \begin{cases} c(G) - 2, & \text{si } G \neq \widehat{\mathbb{C}}, \\ -2, & \text{si } G = \widehat{\mathbb{C}}. \end{cases}$$

Teorema 2.1 (Fórmula de Riemann-Hurwitz). *Sean U y V dominios acotados por curvas disjuntas de Jordan. Si f es meromorfa en \overline{U} , la derivada $f^\#(z) \neq 0$ sobre ∂U , $f(U) \subset V$ y $f(\partial U) \subset \partial V$, entonces para alguna $n \in \mathbb{N}$, f asume en U cada valor de V exactamente n veces y $\rho(U) = n \cdot \rho(V) + v$, donde v es el número de puntos críticos de f en G contando multiplicidades.*

Teorema 2.2 (Ahlfors). *Para cualquier dominio seccionalmente analítico V , existe algún $h \in \mathbb{R}$ tal que si U es cualquier dominio seccionalmente analítico, f es meromorfa en \overline{U} , $f(U) \subset V$, y $f^\#(z) \neq 0$ sobre ∂U , entonces*

$$\max\{\rho(U), 0\} \geq \frac{I}{\text{área}(V)} \left(\rho(V) - h \frac{L}{I} \right),$$

donde L es la longitud de la frontera relativa de $f(U)$ con respecto a V , que es la longitud esférica de $f(\partial \setminus f^{-1}(\partial V))$, e I denota el área esférica de $f(U)$, ambas contando multiplicidades.

Un teorema muy importante que involucra los valores omitidos y las singulari-

dades esenciales es el Teorema Grande de Picard (véase [4]).

Teorema 2.3. *Sea z_0 una singularidad esencial de una función meromorfa f . Si U es cualquier vecindad agujereada de z_0 , entonces para cada $w \in \mathbb{C}$, excepto a lo más dos valores, la ecuación $f(z) = w$ tiene infinitas soluciones z en U .*

2.3. Valores singulares de f

En esta sección discutimos los valores singulares de la inversa, siguiendo la idea de Iversen en [39]; véase también [15] y [49].

Sea $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ y $f : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ una función meromorfa no constante. Para cada $r > 0$, sea U_r la componente de $f^{-1}(D_\chi(a, r))$, escogemos a $U_{r'}$ de tal forma que $U_{r'} \subset U_r$ para $r' < r$. Entonces se tienen dos posibilidades:

(a) $\bigcap_r U_r = \{z\}$ para un z único en \mathbb{C} , ó

(b) $\bigcap_r U_r = \emptyset$.

La colección de los $\{U_r\}$ se llama *tractos* para f .

Estudiemos el significado del caso (a).

(a) Si $\bigcap_r U_r = \{z\}$, entonces $a = f(z)$.

- Si $a \in \mathbb{C}$ y $f'(z) \neq 0$, o si $a = \infty$ y z es un polo simple de f , entonces z se llama *punto regular* o *punto ordinario*.
- Si $a \in \mathbb{C}$ y $f'(z) = 0$, o si $a = \infty$ y z es un polo múltiple de f , entonces z se llama punto crítico y a se llama valor crítico. También, decimos que f^{-1} tiene una *singularidad algebraica* sobre a .

Por ejemplo, sea $f(z) = \text{sen}(z)$, entonces $f'(z) = \text{cos}(z)$. A partir de la derivada, podemos calcular los puntos críticos, que son $(2k-1)\frac{\pi}{2}$, donde $k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, los valores críticos de f son $f\left((2k-1)\frac{\pi}{2}\right)$, es decir, es el conjunto $\{\pm 1\}$.

Si sucede el caso **(b)**, entonces $\bigcap_r U_r = \emptyset$, y a es una *singularidad trascendente* sobre f .

- Una singularidad trascendente sobre a se llama *directa* si para algún $r > 0$ tenemos que $f(z) \neq a$ para cada $z \in U_r$. De lo contrario se llama *indirecta*.
- Una singularidad directa se llama *logarítmica* si la restricción $f : U_r \rightarrow D_\chi(a, r) \setminus \{a\}$ es una cubriente universal para algún $r > 0$.

Si existe una curva $\gamma(t) \rightarrow \infty$ tal que $f(\gamma(t)) \rightarrow a$, entonces a se llama *valor asintótico* de f (véase la Figura 2.1).

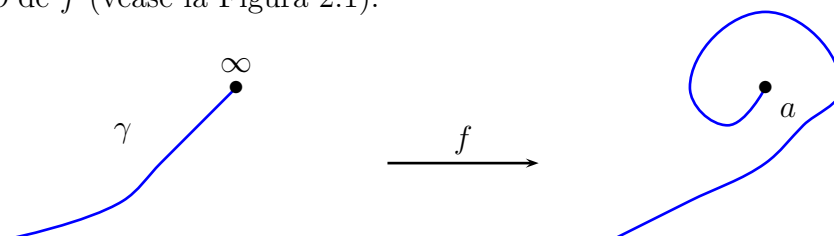


Figura 2.1: El punto a es un valor asintótico de f .

Ejemplo 2.1. Sea $f(z) = \tan(z)$, esta función aplica todo el eje imaginario a un segmento con extremos i y $-i$ (véase la Figura 2.2).

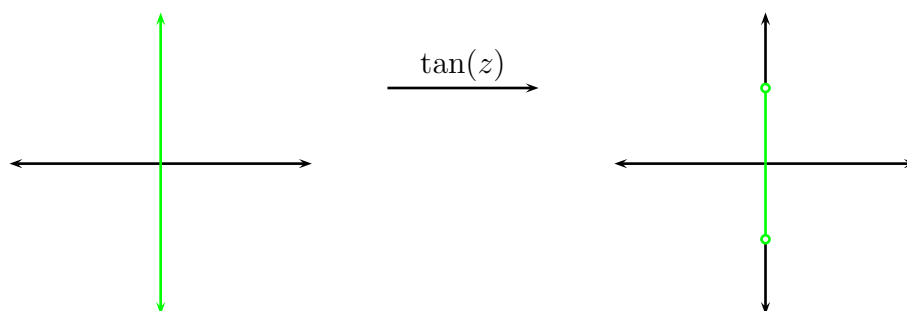


Figura 2.2: Los valores asintóticos para la función $\tan(z)$ son $\pm i$.

Si tomamos a $\gamma_1(t) = it$ con $t \in [0, \infty)$ y hacemos tender a t a infinito, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \tan(\gamma_1(t)) = i$. De manera análoga, al tomar $\gamma_2(t) = -it$ con $t \in [0, \infty)$, tenemos que $\lim_{t \rightarrow \infty} \tan(\gamma_2(t)) = -i$. Por lo tanto, el conjunto de los valores asintóticos de $f(z) = \tan(z)$ es $\{\pm i\}$.

Definición 2.1. Los *valores singulares* de f son:

- (i) Los valores críticos de la función f .
- (ii) Los valores asintóticos de la función f .
- (iii) Los puntos de acumulación de (i) y (ii).

2.4. Conjugación analítica

Un concepto muy importante en la teoría de iteración compleja es el de conjugación analítica, que definimos a continuación.

Definición 2.2. Sean $U, V \subset \mathbb{C}$, decimos que la función $f : U \rightarrow U$ *conjugada topológicamente* a una función $g : V \rightarrow V$ si, y sólo si existe $\varphi : U \rightarrow V$ homeomorfismo tal que $g(\varphi(z)) = \varphi(f(z))$, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo.

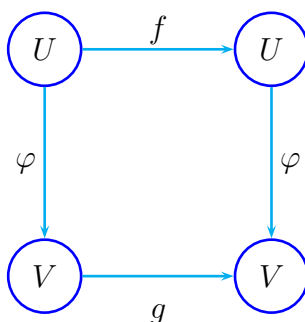


Figura 2.3: Diagrama de conjugación.

- (a) Si φ es conforme, entonces decimos que f es *conformemente conjugada* a g y

$$g \circ \varphi = \varphi \circ f. \quad (2.1)$$

- (b) Si φ es analítica, entonces decimos que f es *analíticamente conjugada* a g .

Observación 2.1. La ecuación (2.1) se llama ecuación de Schröder. La Definición 2.2 implica que f^{-1} y g^{-1} son conformemente conjugadas para funciones holomorfas.

2.5. Familias Normales

En esta sección estudiamos el concepto de familia normal; este estudio nos servirá para definir dos conjuntos muy importantes: el conjunto de Fatou y el conjunto de Julia, que se estudiarán en el Capítulo 3. La métrica involucrada en las siguientes definiciones es χ , que se definió en la Sección 2.2.

El concepto de equicontinuidad esférica es importante para definir familias normales, por esta razón se enuncia a continuación.

Definición 2.3. Una familia \mathcal{F} de funciones definidas en un dominio en común D es esféricamente equicontinua en un punto $z_0 \in D$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0$ tal que si $|z - z_0| < \delta$, entonces $\chi(f(z), f(z_0)) < \varepsilon$ para cada $f \in \mathcal{F}$. Mas aún, una familia \mathcal{F} es esféricamente equicontinua sobre un subconjunto $E \subset D$, si es esféricamente equicontinua en cada punto de E .

A continuación se presenta una primera definición de convergencia en la teoría de familias normales.

Definición 2.4. Una sucesión de funciones (f_n) meromorfas converge *uniformemente sobre subconjuntos compactos* de un dominio D hacia una función $f(z)$ si para cada subconjunto compacto $K \subset \widehat{\mathbb{C}}$ y $\varepsilon > 0$ existe un número $N(K, \varepsilon)$ tal que si $n \geq N$ y $z \in K$, entonces $\chi(f_n(z), f(z)) < \varepsilon$.

Convergencia uniforme local y *convergencia normal* son sinónimos de convergencia uniforme sobre subconjuntos compactos. Teniendo estas definiciones en cuenta, podemos definir familias normales para funciones meromorfas.

Definición 2.5. Una familia \mathcal{F} de funciones meromorfas, definidas en un dominio en común D , es *normal* en D si cada sucesión de funciones $(f_n) \subset \mathcal{F}$ contiene una subsucesión que converge uniformemente sobre subconjuntos compactos en D .

En muchos textos la noción de familias normales se estudia con el concepto de acotación local, es más, se demuestra que bajo ciertas condiciones estos conceptos son

equivalentes, pero discutir la acotación local en la normalidad de funciones meromorfas no es tan relevante. Sin embargo, la equicontinuidad esférica se puede sustituir por la acotación local, los siguientes resultados se pueden consultar en [57] .

Teorema 2.4. (*Arzelà- Ascoli*) *Una familia \mathcal{F} de funciones meromorfas en un dominio D es normal si y sólo si la familia \mathcal{F} es esféricamente equicontinua en D .*

El criterio de normalidad fundamental dado por Montel tiene su extensión para funciones meromorfas, que se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 2.5. (*Montel*) *Sea \mathcal{F} una familia de funciones meromorfas definidas en un dominio en común D que omiten tres valores distintos, a , b y c , en \mathbb{C} . Entonces la familia \mathcal{F} es una familia normal en D .*

2.6. Conjuntos de capacidad cero

En esta sección introducimos la definición de un conjunto de capacidad cero e incluimos resultados acerca de este concepto; los resultados se pueden encontrar en [17], [52], [54] y [60] . Los conjuntos de capacidad cero nos servirán para definir la clase de funciones meromorfas \mathcal{K} en el Capítulo 3.

Consideremos un subconjunto compacto $E \subset \mathbb{C}$ fijo y denotemos por $\zeta_{1,n}, \dots, \zeta_{n,n}$ (en general, no únicos) para cada $n \in \mathbb{N}$ puntos en E tales que el máximo se alcanza en

$$\Delta_n(E) := \max_{z_1, \dots, z_n \in E} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \prod_{j=1}^n |z_j - z_k|. \quad (2.2)$$

Por la maxibilidad de $\Delta_{n-1}(E)$, tenemos que:

$$\Delta_n(E) = \left(\prod_{k=1, k \neq m}^n |\zeta_{m,n} - \zeta_{k,n}|^2 \right) \cdot \left(\prod_{\substack{j, k=1 \\ j \neq k, j \neq m, k \neq m}}^n |\zeta_{j,n} - \zeta_{k,n}| \right) \leq$$

$$\leq \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^n |\zeta_{m,n} - \zeta_{k,n}|^2 \cdot \Delta_{n-1}(E),$$

se cumple para $m = 1, \dots, n$.

Tomando el mínimo con respecto a m , tenemos:

$$\left(\frac{\Delta_n(E)}{\Delta_{n-1}(E)} \right)^{1/2} \leq \delta_n(E) := \min_{m=1, \dots, n} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^n |\zeta_{m,n} - \zeta_{k,n}| \leq \Delta_n^{1/n}(E). \quad (2.3)$$

Así, $\Delta_n^{n-2}(E) \leq \Delta_{n-1}^n(E)$ y, tomando la raíz $n(n-1)(n-2)$ -ésima, se deduce que $\Delta_n^{1/n(n-1)}(E)$ es decreciente y, por lo tanto, tiene límite (no negativo).

Ahora, tomemos cualquier $c > \limsup_{n \rightarrow +\infty} \delta_n^{1/(n-1)}(E)$. Así, $\delta_n(E) \leq c^{n-1}$ para $n \geq N$ y como $\Delta_n(E) \leq \delta_n^2(E) \Delta_{n-1}(E)$ por (2.3), obtenemos que:

$$\begin{aligned} \delta_n^n(E) \leq \Delta_n(E) &\leq \delta_n^2(E) \delta_{n-1}^2(E) \cdots \delta_{N+1}^2(E) \Delta_N(E) \leq (c^{(n-1)+(n-2)+\dots+N})^2 \Delta_N(E) \leq \\ &\leq c^{(n-1)(n-2)} c^{-(N-1)(N-2)} \Delta_N(E). \end{aligned}$$

Como $\Delta_n^{1/n(n-1)}(E)$ converge, tomando la $n(n-1)$ -ésima raíz y tendiendo a $n \rightarrow +\infty$, entonces $\limsup \delta_n^{1/(n-1)}(E) \leq \lim \Delta_n^{1/n(n-1)}(E) \leq c$, aunque $\Delta_N(E) = 0$. Por lo tanto,

$$\text{cap}(E) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta_n^{1/n(n-1)}(E) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \delta_n^{1/(n-1)}. \quad (2.4)$$

Observemos que el producto en (2.2) contiene $n(n-1)$ factores, además, por la ecuación (2.4) se tiene que para $\phi : E \rightarrow \mathbb{C}$, $\text{cap}(\phi(E)) \leq M \text{cap}(E)$, si $|\phi(w_1) - \phi(w_2)| \leq M|w_1 - w_2|$ para cada $w_1, w_2 \in E$.

Teorema 2.6. *Para cualquier subconjunto compacto $E \subset \mathbb{C}$ las siguientes tres proposiciones son equivalentes.*

1. $\text{cap}(E) = 0$.

2. Existe una función de Evans para E , es decir, existe una función armónica $u : U \setminus E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $u(z) + \log |z|$ es armónica en ∞ , y $u(z) \rightarrow +\infty$, cuando $z \rightarrow E$.
3. Si U es cualquier vecindad de E , y $v : U \setminus E \rightarrow \mathbb{R}$ es armónica y acotada, entonces v tiene una extensión armónica a todo U .

Lema 2.1. Si $E \subset \mathbb{C}$ es un subconjunto compacto y $\text{cap}(E)=0$, entonces,

1. E es totalmente desconexo, es decir, no contiene continuos.
2. Para cualquier $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus E$ existen \bar{z}_1 y $\bar{z}_2 \in \mathbb{C}$ arbitrariamente cercanos a z_1 y z_2 respectivamente, tal que el segmento de línea $[\bar{z}_1, \bar{z}_2]$ no se encuentra en E .
3. $\mu(E) = 0$ (la medida de Lebesgue de dimensión dos).

Definición 2.6. Un subconjunto compacto $E \subset \widehat{\mathbb{C}}$ es de capacidad cero si cada función armónica acotada $v : U \setminus E \rightarrow \mathbb{R}$, donde U es una vecindad de E y tiene una extensión armónica a todo U .

Un subconjunto arbitrario de $\widehat{\mathbb{C}}$ es de capacidad cero si todos sus subconjuntos son de capacidad cero.

Proposición 2.1. Sea $E \subset \widehat{\mathbb{C}}$ un conjunto compacto y contable, entonces E tiene capacidad cero.

Demostración. Supongamos que $E = \{\zeta_1, \zeta_2, \dots\}$ es acotado. Sea la siguiente función de Evans para E

$$u(z) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \log |z - \zeta_n|$$

Por el Teorema 2.6, E tiene capacidad cero. ■

Capítulo 3

Las clases de funciones meromorfas \mathcal{M} y \mathcal{K} , y sus conjuntos de Fatou y Julia

En este capítulo estudiamos dos clases de funciones meromorfas y algunos conceptos fundamentales de la teoría de iteración para estas clases, esto es, definimos los conjuntos de Fatou y Julia, enunciaremos algunas propiedades de estos conjuntos, y clasificamos las componentes de Fatou para estas clases. Además, definimos la clase \mathcal{S} , que se mencionó en el Capítulo 1, para estas dos clases de funciones.

3.1. Las clases \mathcal{M} y \mathcal{K}

Baker, Kotus y Lü definieron en [8] la siguiente clase de funciones meromorfas:

$$\mathcal{M} := \{f : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \mid f \text{ es trascendente meromorfa no constante, con al menos un polo que no es un valor omitido}\}$$

Observemos que funciones en la clase \mathcal{M} tienen a ∞ como la única singularidad esencial.

Ejemplo 3.1. Las siguientes familias de funciones pertenecen a la clase \mathcal{M} :

- (a) $\mathcal{F} = \{f_\lambda(z) = \lambda \tan(z) \mid \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$.
- (b) $\mathcal{F} = \left\{ f_\mu(z) = \mu \operatorname{sen}(z) + \frac{1}{z} \mid \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}$.

Bolsch investigó en [17] la siguiente clase de funciones meromorfas:

$$\mathcal{K} := \{f : \widehat{\mathbb{C}} \setminus B(f) \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \mid f \text{ es meromorfa no constante en } \widehat{\mathbb{C}} \setminus B(f)\}$$

El conjunto $B(f)$ es un conjunto compacto, contable y está formado por las singularidades aisladas de f o por puntos de acumulación de tales singularidades. El conjunto $B(f)$ tiene al menos dos elementos uno de ellos es no omitido. Cuando el conjunto $B(f) = \{\infty\}$, el estudio de la función es en la clase \mathcal{M} .

Ejemplo 3.2. Las siguientes familias de funciones pertenecen a la clase \mathcal{K} .

- (a) $\mathcal{F} = \{f_{\lambda,\mu}(z) = \tan(\lambda \tan(\mu z)) \mid \mu, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$.
- (b) $\mathcal{F} = \left\{ f_{\lambda,c,\mu}(z) = \lambda e^{1/(z^2-c)} - \mu \mid \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ y } \mu, c \in \mathbb{C} \right\}$.

3.2. Algunos resultados en el estudio de la clase \mathcal{K}

Los siguientes resultados son fundamentales en el estudio de la clase \mathcal{K} ; se encuentran en [41].

Recordemos que un espacio métrico X es de Baire si, y sólo si para cada colección contable de subconjunto abiertos y densos no vacíos en X , la intersección de dicha colección es densa en X . El Teorema de Baire nos asegura que cada espacio métrico completo es de Baire. Del Teorema de Baire podemos asegurar que no hay espacios métricos completos contables sin puntos aislados. También, recordemos que el Teorema de Cantor-Bendixson nos asegura que todo subconjunto cerrado no contable en un espacio separable se puede ver como la unión de un conjunto perfecto (posiblemente vacío) y un conjunto contable (véase [45]).

Si f es una función en la clase \mathcal{K} , entonces su conjunto de singularidades $B(f)$ es un conjunto compacto y contable. Este conjunto se puede representar como la unión $B(f) = B_A(f) \cup B_N(f)$, donde $B_A(f)$ son las singularidades aisladas y $B_N(f)$ son las singularidades no aisladas. Afirmamos que $B_N(f) \subset B_A(f)'$. En efecto, supongamos que no, es decir, existe un punto z y un $r > 0$ tal que el disco $D(z, r)$ no contiene ningún punto de $B_A(f)$. Así, el espacio métrico (como subespacio métrico) $\overline{D(z, r/2)} \cap B(f)$ sería cerrado y por tanto completo, contable y sin puntos aislados, que es una contradicción por el Teorema de Baire. Por lo tanto, cada punto de $B_N(f)$ es un punto de acumulación de $B_A(f)$. Así, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 3.1. ([17]) *Sea $f \in \mathcal{K}$. El conjunto $B(f)$ es la clausura de las singularidades esenciales aisladas de f .*

Demostración. Sabemos que $B_N(f) \subset B_A(f)'$. Así,

$$B_N(f) \subset B_A(f)' \Rightarrow B_A(f) \cup B_N(f) \subset B_A(f) \cup B_A(f)' \Rightarrow B(f) \subset \overline{B_A(f)}.$$

Pero,

$$B_A(f) \subset B(f) \Rightarrow \overline{B_A(f)} \subset \overline{B(f)} \Rightarrow \overline{B_A(f)} \subset B(f).$$

Por lo tanto, $\overline{B_A(f)} = B(f)$. ■

Un punto singular z de $f \in \mathcal{K}$ se llama de *tipo I* si el rango de f en cada vecindad agujereada de z es denso en el plano. Por ejemplo, los polos de f no son de tipo I, pero una singularidad esencial es de tipo I. Observemos que cada punto z de $B(f)$ es de tipo I.

Observación 3.1. El conjunto $B(f)$, donde la función f está definida en $\widehat{\mathbb{C}} \setminus B(f)$, es compacto y contable. Por la Proposición 3.1 contiene las singularidades esenciales de f , y por la Proposición 2.1, tiene capacidad cero.

Lema 3.1. *Sea $f \in \mathcal{K}$. Si ζ es un punto singular no aislado de f , entonces ζ es de tipo I.*

Demostración. La afirmación es clara si ζ es punto de acumulación de singularidades esenciales aisladas de f . Por tanto, vamos a suponer que ζ es punto de acumulación sólo de polos de f . Sea $r > 0$, como $B(f)$ es contable, podemos tomar el disco de ζ de tal forma que $K = \overline{D(\zeta, r/2)} \setminus \{\zeta\} \subset D(\zeta, r)$ no contiene polos de f sobre la frontera de $D(\zeta, r)$.

Supongamos que ζ no es de tipo I. Así, $\text{Int}(\mathbb{C} \setminus f(K)) \neq \emptyset$. Por esta razón, existe $z \in \text{Int}(\mathbb{C} \setminus f(K))$, es decir, existe $s > 0$ tal que $D(z, s) \subset \mathbb{C} \setminus f(K)$ ó $f(K) \subset \mathbb{C} \setminus D(z, s)$. De modo que $|f(\xi) - z| \geq s$ para cada $\xi \in K$. Se sigue que $h : K \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $h(\xi) = 1/(f(\xi) - z)$ es regular y satisface que $|h(\xi)| \leq s^{-1}$ en K . Como K es cerrado y acotado, tenemos que f es acotada en K . Por lo tanto, h no tiene singularidades aisladas en K .

Como $h(\xi)$ es analítica en cada punto de K donde $f(z)$ sea analítica, tenemos que las singularidades de $h(\xi)$ en K forman un conjunto cerrado contable sin puntos aislados. Por el Teorema de Baire, este conjunto debe ser vacío. Por lo tanto, $h(\xi)$ es analítica en ζ . Como ζ es punto de acumulación de polos de $f(z)$, tenemos que ζ es un punto de acumulación de ceros de $h(\xi)$. Así, $h(\xi)$ es constante, lo que contradice que $f(z)$ no es constante. Por lo tanto, ζ es una singularidad de tipo I. ■

La siguiente proposición es una versión del Teorema de Picard para funciones en la clase \mathcal{K} (véase Teorema 2.3).

Proposición 3.2. *Sea $f \in \mathcal{K}$. Si U es cualquier vecindad de $\zeta \in B(f)$, entonces f asume en $U \setminus B(f)$ cada valor de $\widehat{\mathbb{C}}$ infinitas veces, a excepción, posiblemente, de dos.*

Demostración. Sea $\zeta \in B(f)$ y U una vecindad de ζ . Como $B(f)$ es la clausura de singularidades tipo I, tenemos que existe una sucesión de singularidades $(z_n) \subset B(f)$ tal que $z_n \rightarrow \zeta$. Así, U contiene una cantidad infinita de tales singularidades, de modo que en la vecindad U de ζ debe existir una singularidad esencial de f . Por el teorema grande de Picard (véase Teorema 2.3), f asume en $U \setminus B(f)$ cada valor en $\widehat{\mathbb{C}}$ excepto dos valores. ■

Una versión más fuerte del Teorema de Picard es el siguiente teorema:

Teorema 3.1 (Hällström, Kametani). *Sea E un conjunto compacto de capacidad cero contenido en un dominio D . Supongamos que f es una función meromorfa y univaluada en $D \setminus E$ y cada punto z_0 en E es una singularidad esencial de f . Si U es cualquier vecindad de z_0 , entonces $f(z)$ asume en $U \setminus E$ cada valor de $\widehat{\mathbb{C}}$ excepto, posiblemente, un conjunto de capacidad cero.*

3.3. Iteración de funciones en la clases \mathcal{M} y \mathcal{K}

Sea $f \in \mathcal{K}$ ó \mathcal{M} . Definimos la n -ésima iterada de f como la composición de f con ella misma n veces, es decir, $\underbrace{f \circ f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ veces}} = f^{\circ n}$. Por convención, usaremos $f^{\circ 0} := Id$.

Observemos que la clase \mathcal{M} no es cerrada bajo composición de funciones, como lo muestra el siguiente ejemplo: Sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ fijo y $f_\lambda(z) = \lambda \tan(z)$, así,

$$(f_\lambda \circ f_\lambda)(z) = \lambda \tan(\lambda \tan(z)) = \lambda \left(\frac{\operatorname{sen} \left(\lambda \frac{\operatorname{sen}(z)}{\cos(z)} \right)}{\cos \left(\lambda \frac{\operatorname{sen}(z)}{\cos(z)} \right)} \right);$$

del cálculo anterior observamos que la segunda iterada $f_\lambda^{\circ 2}(z)$ no está definida en $\{z : \cos(z) = 0\} = \{(2k-1)\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$, que es un conjunto contable de singularidades esenciales. Por lo tanto, ∞ no es la única singularidad esencial y la familia no pertenece a la clase \mathcal{M} .

Para evitar este problema, el dominio de definición de la segunda iterada debe ser $\mathbb{C} \setminus \{z : f^{\circ 2}(z) = \infty\}$. En general, si $f \in \mathcal{M}$ y queremos calcular la n -ésima iterada de f , entonces el dominio de $f^{\circ n}$ debe ser $\mathbb{C} \setminus \{z : f^{\circ n}(z) = \infty, \text{ para alguna } n \in \mathbb{N}\}$.

La clase \mathcal{K} es cerrada bajo composición de funciones y se demuestra en el siguiente resultado:

Proposición 3.3. *Si $f, g \in \mathcal{K}$, entonces $f \circ g$ está en \mathcal{K} y $B(f \circ g) = B(g) \cup g^{-1}(B(f))$.*

Demostración. Sean f y $g \in \mathcal{K}$. Primero, vamos a demostrar que $B(g) \cup g^{-1}(B(f))$ es un conjunto compacto y contable. Como $g(z)$ es analítica en $\widehat{\mathbb{C}} \setminus B(g)$, tenemos que $g^{-1}(B(f))$ es un conjunto cerrado. Por lo tanto, $B(g) \cup g^{-1}(B(f))$ es un conjunto compacto. Si $g^{-1}(B(f))$ es contable, entonces el conjunto $B(g) \cup g^{-1}(B(f))$ es contable. Supongamos que $g^{-1}(B(f))$ no es contable. Por el Teorema de Cantor Bendixson, el conjunto $B(g) \cup g^{-1}(B(f))$ es la unión de un conjunto perfecto y un conjunto contable. Como $B(g)$ son puntos aislados, tenemos que $B(g) \cup g^{-1}(B(f))$ no puede tener un subconjunto perfecto. Por lo tanto, $B(g) \cup g^{-1}(B(f))$ es contable.

Claramente, $f \circ g$ es meromorfa fuera del conjunto contable $B(g) \cup g^{-1}(B(f))$. Sea U un disco que contiene a $z_1 \in B(g)$. Por la Proposición 3.2, $g(U \setminus B(g)) \setminus B(f)$ es denso en $\widehat{\mathbb{C}}$. Aplicando la Proposición 3.2 a f , tenemos que $f(g(U \setminus B(g)) \setminus B(f))$ es denso en $\widehat{\mathbb{C}}$. Por lo tanto, $f \circ g$ no es continua en z_1 .

Si V es cualquier disco que contiene $z_2 \in g^{-1}(B(f)) \setminus B(g)$, entonces $g(V \setminus B(g))$ es una vecindad de $g(z_2) \in B(f)$. Por la proposición 3.2, implica que $f(g(V \setminus B(g)) \setminus B(f))$ es denso en $\widehat{\mathbb{C}}$, es decir, $f \circ g$ no es continua en z_2 . ■

Observemos que si $f = g$, entonces $B(f^{\circ 2}) = B(f) \cup f^{-1}(B(f))$. Razonando inductivamente, se tiene que para $n > 1$, $B(f^{\circ n}) = \bigcup_{j=0}^{n-1} f^{\circ j}(B(f))$.

Un problema que puede surgir al iterar funciones en la clase \mathcal{K} es cuando el conjunto $\widehat{\mathbb{C}} \setminus B(f^{\circ n})$ sea vacío. Como el conjunto $B(f)$ es compacto y de capacidad cero, el Teorema 3.1 justifica porqué el conjunto $\widehat{\mathbb{C}} \setminus B(f^{\circ n})$ no es vacío.

3.4. Puntos fijos y su clasificación

Los puntos fijos de una función desempeñan un papel muy importante en el estudio de la dinámica compleja. A continuación, definimos y clasificamos los puntos fijos de una función en las clases \mathcal{M} y \mathcal{K} .

Definición 3.1. Sea f una función en la clase \mathcal{M} o \mathcal{K} . Un punto ζ es un *punto periódico de período n* si $f^{on}(\zeta) = \zeta$ y $f^{oj}(\zeta) \neq \zeta$ para $j = 1, \dots, n-1$. Cuando $n = 1$, el punto ζ se llama *punto fijo* de f .

Observaciones 3.1.

(a) Para calcular los puntos fijos de una función f se necesita resolver la ecuación $f(z) = z$. En muchos casos, no es fácil encontrar soluciones de la ecuación $f(z) = z$ por medio de cálculos analíticos simples. Este problema se soluciona usando métodos numéricos.

(b) Una función puede no tener puntos fijos, por ejemplo $f(z) = e^z + z$.

Sea $f \in \mathcal{K}$ o \mathcal{M} , definimos los siguientes conceptos:

- (i) El conjunto que denotamos por $\mathcal{O}^+(\zeta)$ se llama *órbita hacia adelante* de ζ bajo f y se define por $\mathcal{O}^+(\zeta) := \{f^{on}(\zeta) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Si el punto ζ es un punto periódico de período n , entonces $\langle \zeta \rangle = \{\zeta, f(\zeta), \dots, f^{o(n-1)}(\zeta)\}$ se llama *n -ciclo*.
- (ii) El conjunto que denotamos por $\mathcal{O}^-(\zeta)$ se llama *órbita hacia atrás* de ζ bajo f y se define por $\mathcal{O}^-(\zeta) := \{z : f^{on}(z) = \zeta, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$.
- (iii) El conjunto que denotamos por $\mathcal{O}(\zeta)$ se llama *la gran órbita* de ζ bajo f y se define por $\mathcal{O}(\zeta) = \mathcal{O}^+(\zeta) \cup \mathcal{O}^-(\zeta)$.

Sea ζ un punto fijo de período n de una función f en la clase \mathcal{M} o \mathcal{K} . Se define el *multiplicador* de ζ como $\eta = (f^{on})'(\zeta)$, que se puede calcular usando la regla de la cadena, es decir,

$$\eta = (f^{on})'(\zeta) = \prod_{j=0}^{n-1} f'(f^{oj}(\zeta)).$$

Si $\zeta = \infty$, entonces el multiplicador η está definido por $(h^{on})'(0)$, donde $h(z) = \frac{1}{f(1/z)}$.

Un punto periódico ζ de período n de una función f en la clase \mathcal{M} ó \mathcal{K} se clasifica de la siguiente forma:

- (a) ζ es super atractor, si $\eta = 0$;
- (b) ζ es atractor, si $0 < |\eta| < 1$;
- (c) ζ es repulsor, si $|\eta| > 1$;
- (d) ζ es indiferente, si $|\eta| = 1$;

Los puntos periódicos indiferentes se dividen en dos casos:

- (i) ζ es racional indiferente, si $\eta^m = 1$ para algún $m \in \mathbb{N}$;
- (ii) ζ es irracional indiferente, si $\eta = e^{2\pi i\theta}$, donde $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

3.5. Los conjuntos de Fatou y Julia, y algunas de sus propiedades

Sea $f \in \mathcal{M}$ o \mathcal{K} . El *conjunto de Fatou* para f , que se denota por $\mathcal{F}(f)$, se define como el conjunto de puntos $z \in \mathbb{C}$ (o $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ para $f \in \mathcal{K}$) tal que la sucesión de iteradas está definida, es meromorfa y forma una familia normal en alguna vecindad de z .

El *conjunto de Julia* para f , que se denota por $\mathcal{J}(f)$, se define como el complemento del conjunto de Fatou, es decir, $\mathcal{J}(f) := \mathbb{C} \setminus \mathcal{F}(f)$ (ó $\mathcal{J}(f) := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{F}(f)$ para $f \in \mathcal{K}$).

Los conjuntos de Fatou y Julia cumplen las siguientes propiedades para funciones en las clases de funciones \mathcal{M} y \mathcal{K} .

- (a) El conjunto $\mathcal{F}(f)$ es abierto en \mathbb{C} ($\widehat{\mathbb{C}}$ para $f \in \mathcal{K}$) y $\mathcal{J}(f)$ es cerrado en \mathbb{C} ($\widehat{\mathbb{C}}$ para $f \in \mathcal{K}$).
- (b) El conjunto $\mathcal{J}(f)$ no es vacío y es perfecto.
- (c) Los conjuntos $\mathcal{F}(f)$ y $\mathcal{J}(f)$ son completamente invariantes bajo f .
- (d) El conjunto $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(f^{on})$ y $\mathcal{J}(f) = \mathcal{J}(f^{on})$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

(e) Los puntos fijos periódicos repulsivos de f son densos en $\mathcal{J}(f)$.

Observación 3.2. Si $f \in \mathcal{K}$, entonces el conjunto de Julia $\mathcal{J}(f)$ es compacto en $\widehat{\mathbb{C}}$.

Baker, Kotus y Lü en [9] demostraron las propiedades (a)-(e) para funciones en la clase \mathcal{M} .

Bolsch demostró las propiedades (a)-(e) para la clase de funciones \mathcal{K} en su tesis doctoral (véase [17]). Como mencionamos en el Capítulo 1, Bolsch demostró la propiedad (e) usando el Teorema Fundamental de Nevanlinna. En esta tesis proporcionamos una prueba diferente a la de Bolsch para (e), utilizando el Teorema de las Cinco Islas de Ahlfors, que se enuncia a continuación y se puede consultar en [3].

Definición 3.2. Sea $V \subset \mathbb{C}$ un dominio de Jordan y $g : W \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica. Una *isla simple* sobre V es un dominio $I \subset W$ tal que $g : I \rightarrow V$ es un homeomorfismo conforme.

Teorema 3.2. *Supongamos que f es meromorfa en $D = \{z : |z| < R\}$ con $R > 0$. Si E_1, E_2, E_3, E_4 y E_5 son regiones simplemente conexas en el w -plano, acotadas por curvas de Jordan seccionalmente analíticas, y \overline{E}_i mutuamente disjuntas, entonces existe una isla simple sobre algún E_i .*

Si una función f meromorfa cumple con el teorema anterior, entonces se dice que f cumple con la Propiedad de las Cinco Islas, en particular la clase de funciones \mathcal{K} tiene la propiedad de las Cinco Islas de Ahlfors.

Para demostrar la propiedad (e) necesitamos una serie de lemas y resultados que enunciamos a continuación.

Lema 3.2. [17] *Sea $f \in \mathcal{K}$. Si $E \subset \widehat{\mathbb{C}}$ es un conjunto compacto, invariante hacia atrás, y contiene al menos tres puntos, entonces E es infinito y $\mathcal{J}(f) \subset E$.*

Una consecuencia del lema anterior es el siguiente resultado:

Proposición 3.4. [17] Sea $f \in \mathcal{K}$.

- (i) El conjunto $X(f) := \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : \mathcal{O}^-(\{z\}) \text{ es finito}\}$ contiene a lo más dos puntos.
- (ii) $\widehat{\mathbb{C}} \setminus X(f) \subset \mathcal{O}^+(U)$ para cada conjunto abierto que interseca a $J(f)$.

Baker, Domínguez y Herring demostraron el siguiente lema en [11] para una clase de funciones meromorfas diferente de la clase \mathcal{K} . La demostración para la clase de funciones \mathcal{K} se presenta a continuación.

Lema 3.3. Sea $f \in \mathcal{K}$. Si $w \in \mathcal{J}(f) \setminus X(f)$, entonces $\overline{\mathcal{O}^-(w)} = \mathcal{J}(f)$.

Demostración. Primero, demostremos que $\mathcal{J}(f) \subset \overline{\mathcal{O}^-(w)}$. Por la Observación 3.2, tenemos que $\mathcal{J}(f)$ es compacto en $\widehat{\mathbb{C}}$. Así, podemos encontrar un conjunto contable de discos $D_n = D_n(z_n, \rho_n)$ tal que $z_n \in \mathcal{J}(f)$, $\rho_n \rightarrow 0$ y cada punto del conjunto de Julia $\mathcal{J}(f)$ pertenece a un disco D_n .

Por esta razón, D_n debe intersecar a algún $B(f^{ok(n)})$. Sea $V_n := f^{ok(n)}(D_n \setminus B(f^{ok(n)}))$. Por la Proposición 3.2, V_n es abierto y denso en $\widehat{\mathbb{C}}$. Como $X(f)$ contiene no más de dos puntos, tenemos que $\widehat{\mathbb{C}} \setminus V_n$ contiene no más de dos puntos. Por lo tanto, $\widehat{\mathbb{C}} \setminus X(f) \subset f(V_n \setminus B(f))$.

Se sigue que si $w \notin X(f)$, entonces $w \in f(V_n \setminus B(f))$. Como $w \in f(V_n \setminus B(f))$, existe $\xi \in V_n \setminus B(f)$ tal que $f(\xi) = w$. Luego existe $\zeta \in D_n \setminus B(f^{ok(n)})$ tal que $f^{ok(n)}(\zeta) = \xi$. De modo que

$$f(f^{ok(n)}(\zeta)) = f(\xi) \Rightarrow f^{o(k(n)+1)}(\zeta) = w \Rightarrow \zeta \in \mathcal{O}^-(w) \Rightarrow \zeta \in \mathcal{O}^-(w) \cap D_n.$$

Por lo tanto, $\mathcal{J}(f) \subset \overline{\mathcal{O}^-(w)}$.

Finalmente, demostremos $\overline{\mathcal{O}^-(w)} \subset \mathcal{J}(f)$. Sea $\zeta \in \overline{\mathcal{O}^-(w)}$, entonces cualquier disco abierto de ζ interseca a $\mathcal{O}^-(w)$. Como $w \notin X(f)$, tenemos que $\mathcal{O}^-(w)$ es infinita. Así, ζ es un punto de acumulación de $\mathcal{O}^-(w)$. Además, como el conjunto de Julia $\mathcal{J}(f)$ es completamente invariante, tenemos que ζ es un punto de acumulación de $\mathcal{J}(f)$. Sabemos que el conjunto de $\mathcal{J}(f)$ es cerrado, de modo que $\zeta \in \mathcal{J}(f)$. ■

Ahora, demostremos la propiedad (e) para la clase de funciones \mathcal{K} siguiendo la idea de Baker, Domínguez y Herring en [11].

Demostración de la propiedad (e). Sea w un punto fijo repulsor de f . Así,

$$(f)^\#(w) = \frac{|f'(w)|}{1 + |w|^2} \rightarrow +\infty, \text{ cuando } n \rightarrow +\infty.$$

Por el criterio de Marty (véase [4]), el punto $w \notin \mathcal{F}(f)$. Por lo tanto, los puntos fijos repulsores pertenecen al conjunto de Julia $\mathcal{J}(f)$.

Vamos a suponer que $\mathcal{O}^-(B(f))$ tiene al menos tres puntos. Claramente, todas las iteradas de f son meromorfas en $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathcal{O}^-(B(f))}$ y se omiten en $\mathcal{O}^-(B(f))$. Así, $\overline{\mathcal{O}^-(B(f))} \subset \mathcal{J}(f)$. Por el teorema de Montel de los tres puntos, tenemos:

$$\mathcal{J}(f) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} (B(f^{on}) \setminus B(f^{o(n-1)}))} = \overline{\mathcal{O}^-(B(f))}.$$

Observemos que si $f \in \mathcal{K}$, entonces cumple con el Teorema de las Cinco Islas de Ahlfors. Además, recordemos que $X(f)$ contiene a lo más dos puntos.

Como el conjunto de Julia $\mathcal{J}(f)$ es perfecto, tenemos que existe $e \in \mathcal{J}(f) \setminus X(f)$ y por el Lema 3.3, tenemos que $\overline{\mathcal{O}^-(e)} = \mathcal{J}(f)$.

Sea $p \in J(f)$ y T un conjunto abierto tal que $p \in T$. En consecuencia, existe $N \in \mathbb{N}$ y $z \in T$ tal que $f^{oN}(z) = e$. De modo que existe una vecindad S de z tal que $S \subset T$, y f^{oN} es meromorfa en S con $(f^{oN})' \neq 0$ excepto quizá en z .

Vamos a demostrar que S (y por tanto T) contiene algún punto periódico repulsor de f .

Sabemos que z pertenece al conjunto perfecto $\mathcal{J}(f) = \overline{\mathcal{O}^-(e)}$, entonces S contiene infinitos puntos de $\mathcal{O}^-(e)$ y, en particular, algún $w \in \mathcal{O}^-(e)$ que no es ninguno de los valores excepcionales de f en e . Así, en la vecindad $f^{oN}(S)$ de e , existe una sucesión de valores diferentes e_n tal que $e_n \rightarrow e$ y $f(e_n) = w$. De modo que existe una sucesión

z_n en S tal que $z_n \rightarrow z$ y $f^{\circ N}(z_n) = e_n$. Así, existe un entero l tal que $f^{\circ(l-1)}(w) = e$. Por lo tanto, $f^{\circ(N+l)}(z_n) = e$ (véase la Figura 3.1).

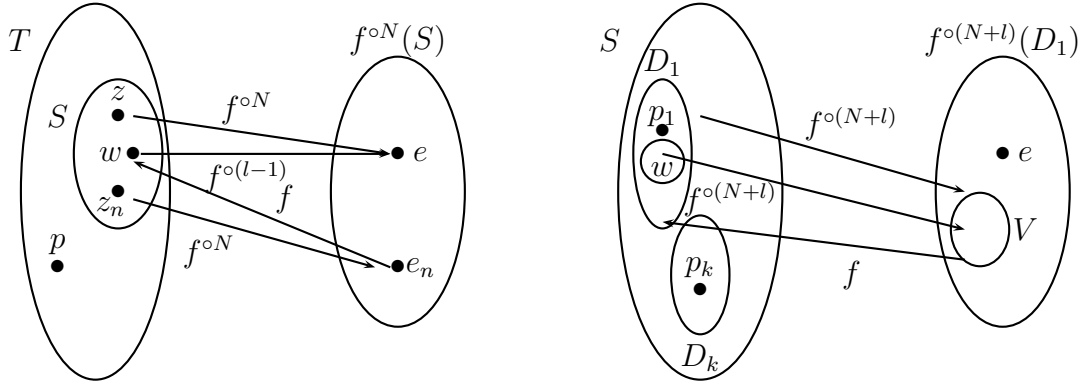


Figura 3.1: La vecindad S contiene algunos puntos periódicos repulsivos.

Tomemos cinco de los puntos z_n que están en S y etiquetemos estos puntos como p_1, p_2, p_3, p_4 y p_5 . Sea D_i un disco centrado en p_i tal que $\overline{D_i} \subset S$, $\overline{D_i} \cap \overline{D_j} = \emptyset$ para $j \neq i$, y sea D_i lo suficiente pequeño tal que $(f^{\circ(N+l)})' \neq 0$ y $f^{\circ(N+l)} \neq e$ sobre $\overline{D_i} \setminus \{p_i\}$. Por el Teorema de las Cinco Islas, existe alguna $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tal que en cada vecindad de e existe un dominio simplemente conexo V_i en el que f aplica univalentemente a algún D_i . Sin pérdida de generalidad, supongamos que $i = 1$.

Como $f^{\circ(N+l)}(D_1)$ es una vecindad de e , existe un dominio del tipo V_i , digamos V , con $\overline{V} \subset f^{\circ(N+l)}(D_1)$. Recordemos que $f^{\circ(N+l)}(p_1) = e$, $f^{\circ(N+l)}$ es localmente univalente en D_1 excepto quizá en p_1 y $e \notin V$. Así, existe algún subdominio W simplemente conexo con $\overline{W} \subset D_1$ tal que $f^{\circ(N+l)} : W \rightarrow V$ es un cubriente univalente. De modo que $f^{\circ(N+l+1)} : W \rightarrow D_1$ es un cubriente univalente.

Si g es la inversa de $f^{\circ(N+l+1)}$, entonces $g : D_1 \rightarrow W$. Por el teorema de Rouché, la función $z - g(z) \equiv (z - p_1) - (g(z) - p_1)$ tiene un cero en el disco D_1 , de modo que g tiene un punto fijo en D_1 , digamos t . Sea ψ una transformación lineal que aplica D_1 al disco unitario \mathbb{D} y $\psi(t) = 0$. Así, $G = \psi \circ g \psi^{-1}$ es una función univalente definida en \mathbb{D} que aplica al disco \mathbb{D} a un subconjunto de si mismo, es decir, $|G(z)| < \delta < 1$. Además, $G(0) = \psi(g(\psi^{-1}(0))) = \psi(g(t)) = \psi(t) = 0$. Por el lema de Schwarz, $G'(0) < \delta$, de

modo que

$$g'(t) = \frac{1}{(f^{\circ(N+l+1)})'(z_0)} < \delta.$$

Por lo tanto, el multiplicador del punto periódico t es al menos $1/\delta > 1$. Así, t es un punto fijo repulsor de $f^{\circ(N+l+1)}$. ■

3.6. Clasificación de componentes de Fatou

Sabemos que un conjunto abierto no vacío en el plano complejo es la unión de componentes disjuntas dos a dos. Por la propiedad (a), en la sección anterior, el conjunto de Fatou de una función en la clase \mathcal{M} o \mathcal{K} es abierto; podemos afirmar que este conjunto contiene componentes conexas. Por esta razón tiene sentido definir una *componente conexa de Fatou* (o simplemente una componente) como un subconjunto del conjunto de Fatou abierto y conexo maximal. Las componentes son importantes en la dinámica compleja, ya que la dinámica de una función en la clase \mathcal{M} o \mathcal{K} se puede estudiar, en parte, al determinar el comportamiento de estas componentes.

Sea $f \in \mathcal{K}$ o \mathcal{M} . Si U es una componente del conjunto de Fatou $\mathcal{F}(f)$, entonces la componente U se clasifica de la siguiente forma:

(i) U es *periódica* si $f^{\circ p}(U) \subset U$, donde el entero p más pequeño que satisface $f^{\circ p}(U) \subset U$ se llama período.

(ii) U es *preperiódica* si $f^{\circ m}(U)$ es una componente de Fatou periódica para alguna $m > 0$.

(iii) U es *errante* si no es periódica ni es preperiódica.

Las componentes en el conjunto de Fatou se han estudiado en la teoría de iteración de diferentes clases de funciones. Como mencionamos en el Capítulo 1, a la pregunta: ¿existen componentes errantes en el conjunto de Fatou para las funciones racionales? D. Sullivan respondió esta pregunta de manera negativa (véase [59]). Sin embargo, para funciones en la clase \mathcal{M} y \mathcal{K} sí existen ejemplos de la existencia de

componentes errantes. Para funciones en la clase \mathcal{M} , Baker, Kotus y Jinian proporcionaron ejemplos de componentes errantes de cualquier conexidad, que se obtuvieron usando aproximación compleja (véase [9]). Para funciones en la clase \mathcal{K} , Domínguez y Sienna construyeron ejemplos de componentes errantes usando cirugía casi-conforme (véase [29]).

3.7. Clasificación de componentes periódicas

Sea U una componente periódica del conjunto de Fatou $\mathcal{F}(f)$ de período p para $f \in \mathcal{K}$ ó \mathcal{M} , esta componente U tiene la siguiente clasificación:

1. La componente U se llama *componente atractora* o dominio de Böttcher si contiene un punto periódico z_0 de período p tal que $f^{\circ(np)}(z) \rightarrow z_0$ para cada $z \in U$, cuando $n \rightarrow \infty$.
2. La componente U se llama *componente parabólica* o de Leau si la frontera de la componente ∂U contiene un punto z_0 periódico de período p y $(f^{\circ p})'(z_0) = 1$ tal que $f^{\circ(np)}(z) \rightarrow z_0$, para cada $z \in U$, cuando $n \rightarrow \infty$.
3. La componente U se llama *disco de Siegel* si existe un homeomorfismo analítico $\varphi : U \rightarrow D$, donde D es el disco unitario tal que $\varphi(f^{\circ p}(\varphi^{-1}(z))) = e^{2\pi i\alpha}$ para alguna $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
4. La componente U se llama *anillo de Herman* si existe un homeomorfismo analítico $\varphi : U \rightarrow A$, donde A es un anillo $A = \{z : 1 < |z| < r\}$ con $r > 1$ tal que $\varphi(f^{\circ p}(\varphi^{-1}(z))) = e^{2\pi i\alpha} z$ para alguna $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
5. La componente U se llama *dominio de Baker* si existe $z_0 \in \partial U$ tal que $f^{\circ(np)} \rightarrow z_0$ para cada $z \in U$, cuando $n \rightarrow \infty$ pero $f^{\circ p}(z_0)$ no está definida.

Para las funciones en las clases \mathcal{M} y \mathcal{K} , se tienen todas las posibilidades de las componentes periódicas en conjunto de Fatou, pero hasta hoy no existen ejemplos de

estas componentes en la clase \mathcal{K} . Así, una diferencia de la teoría de iteración de funciones racionales con las clase \mathcal{M} y \mathcal{K} es la existencia de dominios errantes y dominios de Baker.

A continuación, enunciamos algunos resultados importantes acerca de las componentes conexas de Fatou.

Baker, Kotus y Lü demostraron en [9] el siguiente resultado para funciones meromorfas:

Teorema 3.3. *Si $f \in \mathcal{M}$ y U es una componente invariante del conjunto de Fatou $\mathcal{F}(f)$, entonces U tiene conectividad 1, 2, o ∞ . Si U es doblemente conexas, entonces U es un anillo de Herman.*

Bolsch demostró el siguiente resultado en [17]. La demostración depende del Teorema 2.1 y del Teorema 2.2.

Teorema 3.4. *Sea f una función meromorfa afuera de un conjunto compacto de singularidades esenciales de capacidad cero. Si G un dominio que es una componente de $f^{-1}(G)$, entonces G tiene conectividad 1, 2, o ∞ .*

En la Sección 1.1 mencionamos que Baker, Kotus y Lü investigaron las componentes completamente invariantes del conjunto de Fatou de funciones en la clase \mathcal{M} , y demostraron los resultados (1) y (2) (véase la página 6), relacionados con componentes completamente invariantes. A continuación, enunciamos y demostramos estos resultados para funciones en la clase \mathcal{K} . Las ideas de las demostraciones de estos resultados se basan en las pruebas de [9].

Proposición 3.5. *Si $f \in \mathcal{K}$ y U es una componente completamente invariante del conjunto de Fatou $\mathcal{F}(f)$, entonces $\partial U = \mathcal{J}(f)$.*

Demostración. Es claro que $\partial U \subset \mathcal{J}(f)$. Vamos a demostrar que $\mathcal{J}(f) \subset \partial U$. Sea $\alpha \in \mathcal{J}(f)$ y V cualquier vecindad de α , entonces existe un punto $\beta \in V$ y un entero N tal que $f^{\circ N}(\beta) = e \in B(f)$, o bien, $\beta \in f^{\circ -N}(B(f))$. Así, V contiene a un punto β de

algún $B(f^{\circ N})$. Por la Proposición 3.2, f asume en $(f^{\circ N}(V \setminus B(f^{\circ N})) \setminus B(f))$ cada valor de $\widehat{\mathbb{C}}$, excepto, dos valores. Por lo tanto, hay puntos en V donde la iterada $f^{\circ N}$ toma valores que están en U . Como U es completamente invariante, entonces tales puntos deben estar en U , de modo que $\alpha \in \partial U$. ■

Proposición 3.6. *Sea $f \in \mathcal{K}$. Si hay dos o más componentes completamente invariantes U_0, U_1, \dots en el conjunto de Fatou $\mathcal{F}(f)$, entonces cada componente es simplemente conexa.*

Demostración. Supongamos que U_0 y U_1 son componentes completamente invariantes del conjunto de Fatou $\mathcal{F}(f)$ y U_0 es múltiplemente conexa. Por la proposición 3.5, tenemos que $\partial U_0 = \mathcal{J}(f)$ y $\partial U_1 = \mathcal{J}(f)$. Sea γ una curva cerrada de Jordan en U_0 que separa dos componentes frontera, α y β , de ∂U_0 . Supongamos que α está contenida en el complemento de la región delimitada por γ . Así, $\alpha \subset \mathcal{J}(f) = \partial U_1$. Se sigue que U_1 está en el complemento de la región delimitada por γ , pero esto contradice el hecho de que $\beta \subset \partial U_1$. ■

Se sabe que, para una función trascendente entera, su conjunto de Fatou contiene a lo más una componente completamente invariante. Si f está en la clase \mathcal{M} y el conjunto de polos de la función f es finito, entonces existe a lo más una componente completamente invariante (véase [22]). Si el conjunto de polos no es finito, es un problema abierto. Sin embargo, hay ejemplos de funciones meromorfas con un conjunto de polos no finito que tienen es su conjunto de Fatou exactamente dos componentes completamente invariantes que cumplen esta condición (véase [42]).

3.8. Subclases $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ y $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}$

En esta sección estudiamos la importancia de los valores singulares, que definimos en la Sección 2.1, y definimos la clase de funciones \mathcal{S}_f para $f \in \mathcal{M}$ y \mathcal{K} similar a la de Eremenko y Lyubich (véase [32]).

Recordemos que los valores singulares de f son los valores críticos, valores asintóticos y puntos de acumulación de críticos y asintóticos, que denotamos por $\text{sing}(f^{-1})$.

Una de las principales razones del por qué los valores singulares de f son importantes se presenta en el siguiente teorema.

Teorema 3.5. *Sea f una función meromorfa y U una componente periódica del conjunto de Fatou de f .*

- (a) *Si U es una componente atractora o una componente parabólica, entonces $U \cap \text{sing}(f^{-1}) \neq \emptyset$.*
- (b) *Si U es un disco de Siegel o un anillo de Herman, entonces $\partial U \subset \overline{\mathcal{O}^+(\text{sing}(f^{-1}))}$.*

Fatou demostró la parte (a) del teorema anterior en [35] para la clase de funciones racionales, pero su demostración se extiende al caso trascendente meromorfo.

Eremenko y Lyubich en [33] definieron la clase de funciones \mathcal{S} para funciones trascendentes enteras (véase la Sección 1.2, página 3). Baker, Kotus y Lü extendieron y definieron la clase \mathcal{S} para funciones en \mathcal{M} (véase [10]). En esta tesis definimos las siguientes clases de funciones siguiendo la idea de Eremenko y Lyubich.

$$\mathcal{S}_{\mathcal{M}} := \{f \in \mathcal{M} \mid \text{el conjunto de valores singulares de } f \text{ es finito}\},$$

$$\mathcal{S}_{\mathcal{K}} := \{f \in \mathcal{K} \mid \text{el conjunto de valores singulares de } f \text{ es finito}\}.$$

Baker, Kotus y Lü demostraron en [10] el siguiente teorema para funciones en la clase \mathcal{M} .

Teorema 3.6. *Si $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}$, entonces el conjunto de Fatou $\mathcal{F}(f)$ de f no contiene componentes errantes ni dominios de Baker.*

En esta tesis, el Teorema 3.6 se puede extender a funciones en la clase $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}$ y se enuncia a continuación.

Teorema 3.7. *Si $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{K}}$, entonces el conjunto de Fatou $\mathcal{F}(f)$ de f no contiene componentes errantes ni dominios de Baker.*

La demostración del Teorema 3.7 se deduce de [31], con algunas modificaciones, y por lo tanto, omitimos la demostración.

Referente a las componentes completamente invariantes en el conjunto de Fatou de funciones en la clase $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$, Baker, Kotus y Lü demostraron el siguiente resultado:

Teorema 3.8. *[9] Si $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}$, entonces f tiene a lo más dos componentes completamente invariantes.*

Se conjetura que el Teorema 3.8 se puede extender a la clase de funciones $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}$.

Capítulo 4

El conjunto residual en el conjunto de Julia para las clases \mathcal{M} y \mathcal{K}

En el Capítulo 1 mencionamos que el concepto de conjunto residual en el conjunto de Julia se introdujo en los trabajos de grupos de Klein por W. Abikoff. A continuación definimos este concepto para las clases de funciones meromorfas que se definieron en el Capítulo 3.

Sea $f \in \mathcal{M}$ o \mathcal{K} . Un *punto enterrado* es un punto en el conjunto de Julia $\mathcal{J}(f)$ que no pertenece a la frontera de ninguna componente del conjunto de Fatou $\mathcal{F}(f)$, análogamente se define la componente enterrada en el conjunto de Julia. El *conjunto residual*, denotado por $\mathcal{J}_r(f)$, es el conjunto de puntos enterrados y componentes enterradas en el conjunto de Julia.

4.1. Propiedades básicas del conjunto residual en el conjunto de Julia en las clases \mathcal{M} y \mathcal{K}

En esta sección enunciamos algunos resultados básicos relacionados con el conjunto residual en el conjunto de Julia de las clases \mathcal{K} y \mathcal{M} . Las demostraciones de estos resultados se pueden encontrar en [7] y [24] para funciones en las clases \mathcal{M} y \mathcal{K}

respectivamente.

La primera proposición está relacionada con componentes completamente invariantes del conjunto de Fatou.

Proposición 4.1. *Sea f una función en la clase \mathcal{K} . Si el conjunto de Fatou tiene una componente completamente invariante, entonces el conjunto residual es vacío, esto es $\mathcal{J}_r(f) = \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que el conjunto de Fatou $\mathcal{F}(f)$ tiene una componente U completamente invariante. Vamos a demostrar que $\partial U = \mathcal{J}(f)$. Es claro que $\partial U \subset J(f)$. Como U es completamente invariante, tenemos que \overline{U} es completamente invariante. Sabemos que el conjunto de Julia $J(f)$ es el conjunto cerrado más pequeño, completamente invariante y que contiene al menos tres puntos, por esta razón, se tiene que $\mathcal{J}(f) \subset \overline{U}$. Así, $J(f) \subset \partial U$. Por lo tanto, el conjunto residual $\mathcal{J}_r(f) = \emptyset$. ■

Observación 4.1. Para polinomios no lineales $P(z)$, las componentes de Fatou no acotadas son completamente invariantes, por la Proposición 4.1, el conjunto residual en el conjunto de Julia $J_r(P)$ es vacío. Quizá esto contribuyó a que el conjunto residual en el conjunto de Julia se estudiara mucho después de su aparición.

El siguiente resultado es una observación inmediata de la definición del conjunto residual en el conjunto de Julia para la clase \mathcal{K} .

Proposición 4.2. *Sea $f \in \mathcal{K}$. Si existe una componente enterrada en el conjunto de Julia, entonces el conjunto de Julia $\mathcal{J}(f)$ no es conexo.*

Demostración. Observemos que las componentes enterradas están definidas como componentes conexas del conjunto de Julia $\mathcal{J}(f)$ que pertenecen a $\mathcal{J}_r(f)$. Si tales componentes existen, entonces el conjunto de $\mathcal{J}(f)$ debe ser desconexo. ■

Observemos que la Proposición 4.2 sólo se cumple para componentes enterradas, pero no para puntos enterrados. Hay ejemplos de funciones donde el conjunto de Julia es conexo y su conjunto residual no es vacío (véase Domínguez y Fagella, [24]).

La siguiente proposición se demostró para funciones racionales por Morosawa [46]. Baker y Domínguez en [7] la extendieron a funciones trascendentes meromorfas. La extensión a funciones en la clase \mathcal{K} es la siguiente:

Proposición 4.3. *Sea f en la clase \mathcal{K} . Si $\mathcal{J}_r(f) \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{J}_r(f)$ es completamente invariante, denso en $\mathcal{J}(f)$ e infinito no contable.*

Demostración. El conjunto residual en el conjunto de Julia $\mathcal{J}_r(f)$ es completamente invariante por la invarianza del conjunto de Fatou $\mathcal{F}(f)$. Como $\mathcal{J}_r(f)$ es completamente invariante, tenemos que la cerradura del conjunto residual $\overline{\mathcal{J}_r(f)}$ debe ser completamente invariante. Por el Lema 3.4, $X(f)$ tiene a los más dos puntos y tales puntos están en $\mathcal{F}(f)$. Así, para $\zeta \in \mathcal{J}_r(f)$, $\{f^{on}(\zeta)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es un conjunto infinito. En conclusión, $\overline{\mathcal{J}_r(f)}$ es un conjunto cerrado, completamente invariante y tiene al menos tres puntos. Por la minimidad del conjunto de Julia $\mathcal{J}(f)$, se tiene que $\mathcal{J}(f) \subset \overline{\mathcal{J}_r(f)}$. Así, tenemos que $\mathcal{J}(f) = \overline{\mathcal{J}_r(f)}$ es denso. Para demostrar que $\mathcal{J}_r(f)$ es infinito no contable, Morosawa construyó en [46] un conjunto de Cantor contenido en el conjunto residual $\mathcal{J}_r(f)$, siguiendo el método de Abikoff en [2]. ■

Baker y Domínguez demostraron los siguientes lemas en [7].

Lema 4.1. *El conjunto $D(f) = \{z : z \in \mathcal{J}(f), \mathcal{O}^+(z) \text{ está definido y es denso en } \mathcal{J}(f)\}$ es un G_δ denso con la topología relativa del conjunto de Julia $\mathcal{J}(f)$.*

Lema 4.2. *Sea $f \in \mathcal{K}$. Si el conjunto de Fatou $\mathcal{F}(f)$ no contiene componentes errantes y $\alpha \in D(f)$ contenido en $\mathcal{J}(f) \setminus \mathcal{J}_r(f)$, entonces existe una componente de Fatou G tal que $\mathcal{J}(f) = \partial G$.*

La siguiente proposición es un corolario de los lemas anteriores.

Proposición 4.4. *Si $f \in \mathcal{K}$ no tiene dominios errantes y $\mathcal{J}_r(f) = \emptyset$, entonces existe una componente U periódica del conjunto de Fatou $\mathcal{F}(f)$ tal que $\mathcal{J}(f) = \partial U$.*

Demostración. Por hipótesis sabemos que $\mathcal{J}_r(f)$ es vacío, de modo que no hay puntos enterrados. Así, los puntos del conjunto de $\mathcal{J}(f)$ pertenecen a la frontera de alguna

componente del conjunto de Fatou $\mathcal{F}(f)$. Por el Lema 4.1, el conjunto $D(f)$ es un conjunto denso en la topología relativa de $\mathcal{J}(f)$. Así, para cada conjunto abierto en el conjunto de Julia $\mathcal{J}(f)$, existe $\alpha \in D(f)$. De modo que, $\alpha \in J(f)$ y $O(z)$ está definida y es densa en $\mathcal{J}(f)$. Por lo tanto, $\alpha \in D(f)$ y $\alpha \in \mathcal{J}(f) \setminus \mathcal{J}_r(f)$. Por el Lema 4.2, existe una componente periódica G del conjunto de Fatou $\mathcal{F}(f)$ tal que $\mathcal{J}(f) = \partial G$. ■

4.2. Demostraciones de los Teoremas A y B

En esta sección demostramos los Teoremas A y B enunciados en la Sección 1.3 de esta tesis, para eso necesitamos extender algunos resultados del conjunto residual en el conjunto de Julia de la clase \mathcal{M} a la clase \mathcal{K} .

Qiao en [56] demostró el siguiente resultado para las funciones racionales:

Teorema 4.1. *Sea f una función racional y $\mathcal{J}(f) \neq \widehat{\mathbb{C}}$. Entonces el conjunto de Julia $\mathcal{J}(f)$ contiene componentes enterradas si, y sólo si el conjunto de Julia $\mathcal{J}(f)$ es disconexo y el conjunto de Fatou no tiene componentes completamente invariantes.*

Baker y Domínguez demostraron la generalización del Teorema 4.1 para la clase \mathcal{M} (véase [7]).

Teorema 4.2. *Sea f una función meromorfa en \mathbb{C} sin dominios errantes. Supongamos que el conjunto de Julia $\mathcal{J}(f)$ no es conexo y que el conjunto de Fatou $\mathcal{F}(f)$ no tiene componentes completamente invariantes. Entonces el conjunto residual en el conjunto de Julia $\mathcal{J}_r(f)$ no es vacío.*

Domínguez y Hernández en [27] suprimieron la hipótesis de los dominios no errantes en el Teorema 4.2 y lo extendieron a la clase de funciones \mathcal{K} , obteniendo el siguiente resultado:

Teorema A. [27] *Sea f en la clase \mathcal{K} . Si el conjunto de Julia $\mathcal{J}(f)$ no es conexo y el conjunto de Fatou $\mathcal{F}(f)$ no tiene componentes completamente invariantes, entonces el conjunto residual en el conjunto de Julia $\mathcal{J}_r(f)$ no es vacío.*

A continuación, enunciamos algunos resultados válidos para las clases \mathcal{M} y \mathcal{K} , que necesitamos para la demostración del Teorema A.

Lema 4.3. *Si $f \in \mathcal{K}$ y U es una componente periódica de Fatou múltiplemente conexa tal que $\partial U = \mathcal{J}(f)$, entonces U es completamente invariante.*

El lema anterior se demostró en [12] para una clase de funciones más general; este lema con pequeñas modificaciones también es cierto para funciones en la clase \mathcal{K} , por lo que omitimos la demostración.

El siguiente resultado se demostró para la clase de funciones \mathcal{K} (véase [23]).

Teorema 4.3. *Sea $f \in \mathcal{K}$. Supongamos que el conjunto de Fatou $\mathcal{F}(f)$ no tiene componentes completamente invariantes, y que el conjunto de Julia es desconexo de tal forma que el conjunto de Fatou tenga una componente H de conectividad al menos cinco. Entonces las componentes de un solo punto son densas y enterradas en el conjunto de Julia $\mathcal{J}(f)$.*

Una vez enunciados los resultados anteriores, demostremos el Teorema A.

Demostración del Teorema A. Si U es una componente en el conjunto de Fatou $\mathcal{F}(f)$, entonces la componente es periódica, preperiódica o errante. Dividimos la prueba en dos casos: (i) componentes errantes y (ii) componentes no errante.

Para demostrar el caso (i), supongamos que no hay componentes errantes en el conjunto de Fatou $\mathcal{F}(f)$ y que $\mathcal{J}_r(f)$ es vacío. Por la Proposición 4.4, existe una componente de Fatou U periódica tal que $\partial U = \mathcal{J}(f)$. La componente U es múltiplemente conexa porque el conjunto de Julia, por hipótesis, no es conexo. Por el Lema 4.3, la componente U debe ser completamente invariante, lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto, el conjunto residual no es vacío.

Para demostrar el caso (ii), supongamos que el conjunto de Fatou $\mathcal{F}(f)$ tiene componentes errantes. Probemos este caso en dos partes:

- (1) Todas las componentes del conjunto de Fatou $\mathcal{F}(f)$ tienen conectividad finita y

(2) El conjunto de Fatou $\mathcal{F}(f)$ tiene al menos una componente de conectividad infinita.

(1) Como el conjunto de Julia es disconexo, tenemos que éste consiste de componentes no contables. Ahora, como la conectividad de cada componente del conjunto de Fatou de f es finita, entonces el número de fronteras de todas las componentes de Fatou es contable. Así, el conjunto de Julia tiene un número no contable de componentes enterradas. Por lo tanto, $\mathcal{J}_r(f) \neq \emptyset$.

(2) Si tomamos una componente de Fatou U múltiplemente conexa de conectividad n , $n \geq 5$, $n \in \mathbb{N}$, entonces la prueba se sigue como la demostración del Teorema 3.4 en [23]. Por lo tanto, las componentes de un solo punto son densas en el conjunto de Julia. Así, el conjunto residual $\mathcal{J}_r(f) \neq \emptyset$.

El siguiente teorema es un extensión del la Proposición 6.22 en [25] a funciones en la clase \mathcal{K} , que anunciamos a continuación.

Teorema B. [27] *Sea $f \in \mathcal{K}$ y $A \subsetneq (\widehat{\mathbb{C}} \setminus B(f))$ un conjunto cerrado con interior no vacío. Supongamos que las siguientes condiciones se satisfacen:*

$$(a) \left((\widehat{\mathbb{C}} \setminus B(f)) \setminus A \right) \cap \mathcal{J}(f) \neq \emptyset.$$

(b) *Si Ω es una componente de Fatou conexa, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^{on}(\Omega) \subset A$ para cada $n > N$, donde N depende de Ω .*

Entonces $\mathcal{J}_r(f) \neq \emptyset$.

Demostración. Tomemos un punto $z \in \left((\widehat{\mathbb{C}} \setminus B(f)) \setminus A \right) \cap \mathcal{J}(f)$ y una vecindad $V \subset \left((\widehat{\mathbb{C}} \setminus B(f)) \setminus A \right)$ de z . Como los puntos periódicos son densos en el conjunto de Julia, entonces V debe contener un punto periódico ζ del conjunto de Julia. Bajo iteración, el punto ζ tiene que regresar al punto ζ infinitas veces.

Por hipótesis, los puntos de la frontera de cualquier componente de Fatou afuera de A deben iterarse dentro de A para alguna $N \in \mathbb{N}$. El punto $\zeta \in \mathcal{J}(f)$ que bajo

iteración sale del conjunto A no está en la frontera de ninguna componente de Fatou, porque los punto frontera se iteran en puntos frontera. Así, $\zeta \in \mathcal{I}_r(f)$, porque ζ está en el complemento de A . Por lo tanto, $\mathcal{I}_r(f) \neq \emptyset$. ■

4.3. Ejemplos de funciones $f \in \mathcal{K}$ con $\mathcal{I}_r(f) \neq \emptyset$

Baker y Domínguez en [7] construyeron, usando teoría de aproximación compleja, ejemplos de funciones en la clase \mathcal{M} sin dominios errantes en el conjunto de Fatou y con conjunto residual distinto del vacío. En esta sección proporcionamos un ejemplo de una función en la clase \mathcal{K} con las misma propiedades antes mencionadas; para ello necesitamos el siguiente teorema de aproximación compleja.

Teorema 4.4. [Runge] Supongamos que K es compacto en \mathbb{C} , f es analítica sobre K y $\varepsilon > 0$. Entonces existe una función racional R con polos en $\mathbb{C} \setminus K$ tal que $|f(z) - R(z)| < \varepsilon$ para cada $z \in K$.

Demostración. Como f es una función analítica, existe un conjunto abierto $U \subset \mathbb{C}$ en donde f es analítica. Sea Γ una curva de Jordan y consideremos a $f(\zeta)/(\zeta - z)$, para $(\zeta, z) \in \Gamma \times K$. Entonces la función f es continua en $\Gamma \times K$, por lo tanto, es uniformemente continua. Se sigue que para cada $r > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f(\zeta')}{\zeta' - z} \right| < r,$$

para cada $z \in K$ y $\zeta, \zeta' \in \Gamma$, con $|\zeta - \zeta'| < \delta$.

Partimos a Γ en subcurvas Γ_j de longitud menor que δ y escogemos $\zeta_j \in \Gamma_j$. Entonces,

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{f(\zeta_j)}{\zeta_j - z} d\zeta \right| < \frac{r}{2\pi} |\Gamma_j|,$$

para cada $z \in K$.

Sumando sobre j , obtenemos que $|f(z) - R(z)| < r/2\pi|\Gamma|$, para cada $z \in K$.

Por lo tanto, R es una función racional

$$R(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_j \frac{f(\zeta_j)}{\zeta_j - z} \int_{\Gamma_j} d\zeta$$

que tiene polos simples en los puntos $\zeta_j \in \Gamma_j \subset \mathbb{C} \setminus K$. Si escogemos a $r = 2\pi\varepsilon/|\Gamma|$, se obtiene el resultado. ■

Ahora estamos en condiciones de proporcionar ejemplos del Teorema A, usando la misma técnica que se usó en [7], para funciones en la clase \mathcal{K} . A continuación presentamos un ejemplo.

Ejemplo 4.1. Sea $f(z) = R(z)e^{\alpha/(z^2-c)}$ con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c \in \mathbb{C}$ y $R(z)$ una función racional. La función $f(z)$ pertenece a la clase \mathcal{K} , porque $f(z)$ tiene dos singularidades esenciales en $z = \pm\sqrt{c}$ y “polos” donde la función $R(z)$ se hace cero. El conjunto de valores singulares de $f(z)$ es un conjunto finito, porque hay un número finito de soluciones de $R(z)(-2\alpha z/(z^2-c)^2) + R'(z) = 0$ y hay tres valores asintóticos $\infty, \pm\sqrt{c}$. Así, el conjunto de Fatou de $f(z)$ no tiene dominios errantes ni dominios de Baker (véase Teorema 3.7).

Definimos diez dominios cerrados denotados $A_1, A_2, A_3, D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7$ por $D_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z + 20| \leq 1\}$, $D_2 := \{z \in \mathbb{C} : |z + 10| \leq 1\}$, $D_3 := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, $A_1 := \{z \in \mathbb{C} : 2 \leq |z + 20| \leq 3\}$, $A_2 := \{z \in \mathbb{C} : 2 \leq |z + 10| \leq 3\}$, $A_3 := \{z \in \mathbb{C} : 2 \leq |z| \leq 3\}$, $D_4 := \{z \in \mathbb{C} : |z - 6| \leq 1\}$, $D_5 := \{z \in \mathbb{C} : |z - 10| \leq 1\}$, $D_6 := \{z \in \mathbb{C} : |z - 14| \leq 1\}$, $D_7 := \{z \in \mathbb{C} : |z - 18| \leq 1\}$ (véase la Figura 4.1).

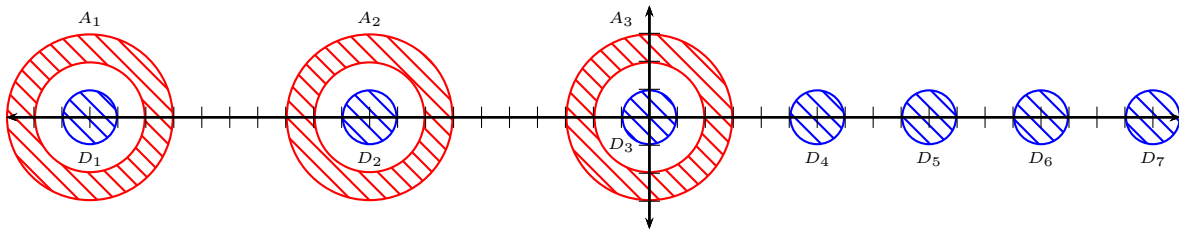


Figura 4.1: Dominios $A_1, A_2, A_3, D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6$ y D_7 .

Definimos $g(z) = 6$ en $A_1 \cup D_4$, $g(z) = 10$ en $A_2 \cup D_5$, $g(z) = 14$ en $A_3 \cup D_6$ y $g(z) = 18$ en $D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_7$. Por el Teorema de Runges (véase el Teorema 4.4), existe una función racional $R_0(z)$ tal que $|R_0(z) - g(z)| < \frac{1}{4}$ en $K = (\bigcup_{i=1}^3 A_i) \cup (\bigcup_{i=1}^7 D_i)$.

Escogemos a c en el eje imaginario lo suficientemente lejos del origen y α suficientemente pequeño tal que $|R(z)e^{\alpha/(z^2-c)} - g(z)| < 1/2$ en K . Sea $w \in f(D_4)$, entonces existe $z \in D_4$ tal que $f(z) = w$. Así, $|w - 6| = |f(z) - g(z)| = |R(z)e^{\alpha/(z^2-c)} - g(z)| < 1/2$, es decir, $|w - 6| < 1/2$. Por lo tanto, $w \in D_4$. De manera similar se puede demostrar que $f(D_i) \subset D_i$ para $i = 5, 6, 7$. Así, existe una componente G_i del conjunto de Fatou $F(f)$ para estos valores de i tal que $D_i \subset G_i$ y G_4, G_5, G_6, G_7 son componentes disjuntas. Además, tenemos que $f(D_1 \cup D_2 \cup D_3) \subset G_7$, $f(A_1) \subset G_4$, $f(A_2) \subset G_5$ y $f(A_3) \subset G_6$, entonces A_1, A_2 y A_3 pertenecen a diferentes componentes múltiplemente conexas del conjunto de Fatou. Por lo tanto, el conjunto de Fatou no es completamente invariante y el conjunto de Julia no es conexo. Por el Teorema A, el conjunto residual en el conjunto de Julia no es vacío.

Ejemplo 4.2. Se construyeron funciones en la clase \mathcal{K} con dominios errantes usando cirugía casi conforme en [29]. Los autores probaron que existe una función $h \in \mathcal{K}$ tal que el conjunto de Fatou tiene un dominio errante doblemente conexo. La función h satisface las hipótesis del Teorema A, por lo tanto, $\mathcal{J}_r(f) \neq \emptyset$.

Un ejemplo que satisface las hipótesis del Teorema B es el siguiente:

Ejemplo 4.3. Usando cirugía como en [24], podemos construir una función en la clase \mathcal{K} con las propiedades deseadas, tomando una función trascendente entera (por ejemplo $f(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$) y una función en la clase \mathcal{M} , ambas con un disco de Siegel invariante y acotado. La función resultante, digamos f_1 , es una función en la clase \mathcal{K} que tiene un anillo de Herman acotado. Todas las componentes de Fatou de f_1 son eventualmente iteradas sobre el anillo de Herman, ya que no hay dominios errantes; por tanto, tenemos las hipótesis del Teorema B. Así, el conjunto residual en el conjunto de Julia no es vacío.

Capítulo 5

La familia de funciones $F_{\lambda,c,\mu}(z)$ en la clase \mathcal{K}

En este capítulo se proporciona un ejemplo específico de una familia de funciones en la clase \mathcal{K} que contiene en su conjunto de Fatou componentes atractoras, componentes parabólicas, discos de Siegel y anillos de Herman.

La siguiente familia de funciones:

$$G_{\lambda,\mu}(z) = \lambda e^{R(z)} + \mu, \tag{5.1}$$

es una familia que pertenece a la clase \mathcal{K} , donde $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\mu \in \mathbb{C}$ y $R(z)$ es una función racional.

En la familia (5.1) de funciones podemos observar lo siguiente:

- (a) Los polos de $R(z)$ son las singularidades esenciales de $G_{\lambda,\mu}(z)$.
- (b) La solución de $R'(z) = 0$ son los puntos críticos de $G_{\lambda,\mu}(z)$.

Estudiar la dinámica de la familia (5.1) no es una tarea fácil. Por esta razón, en este capítulo investigamos la dinámica de una subfamilia de $G_{\lambda,\mu}(z)$ que se define a

continuación:

$$F_{\lambda,c,\mu}(z) = \lambda e^{1/(z^2+c)} + \mu, \text{ donde } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ y } \mu, c \in \mathbb{C}. \quad (5.2)$$

La familia $F_{\lambda,c,\mu}(z)$ es la composición de cuatro funciones, es decir, $F_{\lambda,c,\mu}(z) = h_4 \circ h_3 \circ h_2 \circ h_1(z)$, donde $h_1(z) = z^2 + c$; $h_2(z) = 1/z$; $h_3(z) = \lambda e^z$, y $h_4(z) = z + \mu$. La Figura 5.1 muestra la composición de $h_4 \circ h_3 \circ h_2 \circ h_1(z)$ por pasos.

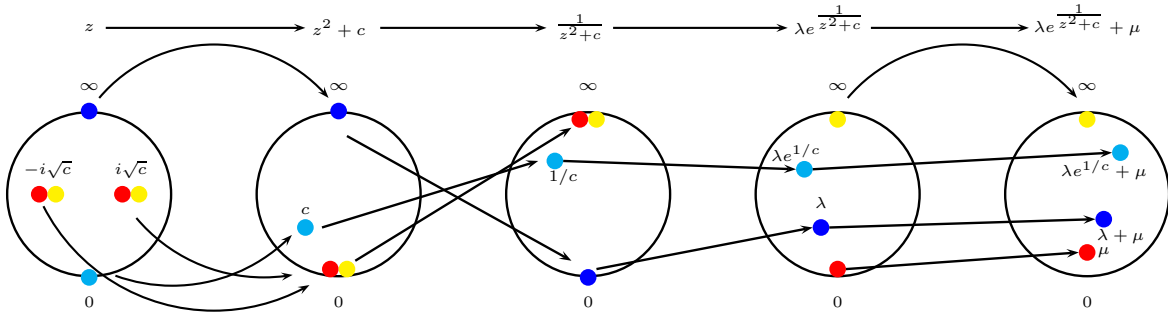


Figura 5.1: La composición de $F_{\lambda,c,\mu}(z) = h_4 \circ h_3 \circ h_2 \circ h_1(z) = \lambda e^{1/(z^2+c)} + \mu$, $\lambda, c, \mu \in \mathbb{C}$.

De la Figura 5.1, podemos observar que:

- (a) $\infty \mapsto \infty \mapsto 0 \mapsto \lambda \mapsto \lambda + \mu$.
- (b) $0 \mapsto c \mapsto 1/c \mapsto \lambda e^{1/c} \mapsto \lambda e^{1/c} + \mu$.
- (c) $i\sqrt{c} \mapsto 0 \mapsto \infty \mapsto \infty \mapsto \infty$.
- (d) $-i\sqrt{c} \mapsto 0 \mapsto \infty \mapsto 0 \mapsto \mu$.

La familia $F_{\lambda,c,\mu}(z)$ tiene a los puntos μ e ∞ como valores omitidos. Para demostrar esta afirmación, supongamos que existen $\zeta, \xi \in \widehat{\mathbb{C}}$ tales que $F_{\lambda,c,\mu}(\zeta) = \mu$ y $\lim_{z \rightarrow \xi} F_{\lambda,c,\mu}(z) = \infty$. Si $F_{\lambda,c,\mu}(\zeta) = \mu$, entonces

$$\lambda e^{1/(z^2+c)} + \mu = \mu \Rightarrow \lambda e^{1/(z^2+c)} = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \vee e^{1/(z^2+c)} = 0.$$

Como $e^{1/(z^2+c)}$ no puede ser cero, tenemos que $\lambda = 0$, pero contradice que $\lambda \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$.

Si $\lim_{z \rightarrow \xi} F_{\lambda, c, \mu}(z) = \infty$, entonces $\lim_{z \rightarrow \xi} (F_{\lambda, c, \mu}(z) - \mu) = \infty$. Así,

$$\lim_{z \rightarrow \xi} \lambda e^{1/(z^2+c)} = \infty \Rightarrow \lambda \lim_{z \rightarrow \xi} e^{1/(z^2+c)} = \infty,$$

que es una contradicción, porque la función exponencial es trascendente entera y la única singularidad aislada es el punto del infinito.

El conjunto de singularidades esenciales de la familia $F_{\lambda, c, \mu}(z)$ es $\{\pm i\sqrt{c}\}$. Para demostrar esta afirmación, recordemos que el desarrollo en serie de Taylor de e^z está dado por:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

y es válido para todos los número complejos. Así, podemos reemplazar a $1/(z^2 + c)$ por z , excepto por los polos $\pm i\sqrt{c}$.

$$\begin{aligned} F_{\lambda, c, \mu}(z) &= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(z^2 + c)^k} + \mu = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{1}{2i\sqrt{c}} \left(\frac{1}{z - i\sqrt{c}} - \frac{1}{z + i\sqrt{c}} \right) \right]^k + \mu = \\ &= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{1}{(k-j)!j!} \left(\frac{1}{z - i\sqrt{c}} \right)^{k-j} \left[\frac{1}{2i\sqrt{c}(z + i\sqrt{c})} \right]^k + \mu. \end{aligned}$$

De la expresión anterior, observamos que la expansión en serie de $F_{\lambda, c, \mu}(z)$ contiene un número infinito de términos, que a su vez contiene potencias de $1/(z - i\sqrt{c})$ y $1/(z + i\sqrt{c})$. Por lo tanto, $z \pm i\sqrt{c}$ son singularidades esenciales aisladas de $F_{\lambda, c, \mu}(z)$. Como $\{\pm i\sqrt{c}\}$ es un conjunto compacto, contable y las singularidades no son omitidas, tenemos que la familia $F_{\lambda, c, \mu}(z)$ dada en (5.2) pertenece a la clase de funciones \mathcal{K} . Observemos que $F_{\lambda, c, \mu}(z)$ tiene dos singularidades esenciales diferentes de cero e infinito.

En las siguientes secciones demostramos que para ciertos valores de los parámetros λ , c y μ , el conjunto de Fatou de la familia $F_{\lambda, c, \mu}(z)$ contiene una componente atractora, una componente parabólica y un disco de Siegel. Domínguez y Fagella construyeron ejemplos de anillos de Herman en la clase \mathcal{K} , usando cirugía casi conforme (véase [24]).

5.1. Puntos fijos y valores singulares de $F_{\lambda,c,\mu}(z)$

En esta sección calculamos los valores críticos, valores asintóticos y los puntos fijos de $F_{\lambda,c,\mu}(z)$.

A. Puntos fijos de $F_{\lambda,c,\mu}(z)$

De la definición 3.1 sabemos que z_0 es un punto fijo de una función f si satisface la ecuación $f(z_0) - z_0 = 0$. Así, para determinar los puntos fijos de $F_{\lambda,c,\mu}(z)$, debemos resolver la siguiente ecuación:

$$F_{\lambda,c,\mu}(z) = \lambda e^{1/(z^2+c)} + \mu - z = 0. \quad (5.3)$$

Encontrar una solución a la ecuación (5.3) no es un trabajo fácil, lo cual entorpece saber cuáles son los puntos fijos de la función $F_{\lambda,c,\mu}(z)$. Por esta razón, asignamos a los parámetros λ, c y μ ciertos valores particulares y obtuvimos los siguientes casos:

I. Tomando los parámetros $\mu = -\lambda e^{1/c}$ y $c, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, vemos que el punto $z = 0$ es un punto fijo de $F_{\lambda,c,\mu}(z)$, ya que $F_{\lambda,c,\mu}(0) = \lambda e^{1/c} - \lambda e^{1/c} = 0$.

Si tomamos a $z = x \in \mathbb{R}$, $\mu = -\lambda e^{1/c}$ y $c, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, podemos observar que la función $F_{\lambda,c,-\lambda e^{1/c}}(x)$ tiene uno, dos o tres puntos fijos, como se consta en los tres siguientes subcasos:

(i) Un punto fijo. Tomando $\lambda, c \in \mathbb{R}^+$ tal que $e^{1/c} - 1 < \lambda^{-1}$ y $\mu = -\lambda e^{1/c}$, vemos que el único punto fijo de la función $F_{\lambda,c,-\lambda e^{1/c}}(x)$ es el cero, como se muestra en la Figura 5.2.

(ii) Dos puntos fijos. Tomando $c = 1.399$, $\lambda = -1/(e^{1/(c+1)} - e^{1/c})$ y $\mu = -\lambda e^{1/c}$, tenemos que la familia de funciones $F_{\lambda,c,\mu}(z)$ tiene dos punto fijos, como se demuestra en la siguiente proposición:

Proposición 5.1. *Si $c = 1.399$, $\lambda = -1/(e^{1/(c+1)} - e^{1/c})$ y $\mu = -\lambda e^{1/c}$, entonces la línea tangente a la gráfica de $F_{\lambda,c,-\lambda e^{1/c}}(x)$ en el punto $(-1, F_{\lambda,c,\mu}(-1))$ no se interseca*

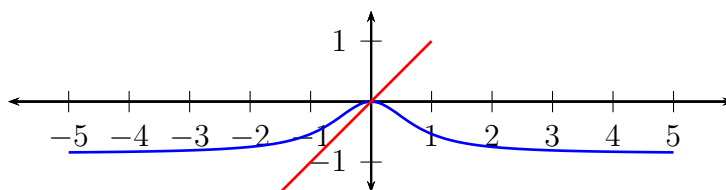


Figura 5.2: Gráfica de la función $F_{0.5,1,-1.3591}(x)$.

con la gráfica, excepto en el origen.

Demostración. Para simplificar los cálculos, sean $c_0 = 1.399$, $\lambda_0 = -1/(e^{1/(c_0+1)} - e^{1/c_0})$ y $\mu_0 = -\lambda_0 e^{1/c_0}$. Denotemos por $F(x) = \lambda_0 e^{1/(x^2+c_0)} - \lambda_0 e^{1/c_0}$. Observemos que $F(0) = 0$. La tangente en el punto $(-1, F(-1))$ es la gráfica de $G(x) = F'(-1)(x+1) + F(-1)$.

Si $F(x) = G(x)$, entonces

$$F(x) = F'(-1)(x+1) + F(-1). \quad (5.4)$$

Observemos que una raíz de la ecuación anterior es $x = -1$.

Evaluando $x = 0$ en (5.4), tenemos que

$$F(0) = F'(-1) + F(-1) \Rightarrow -F(-1) = F'(-1).$$

Así,

$$-(\lambda_0 e^{\frac{1}{1+c_0}} - \lambda_0 e^{\frac{1}{c_0}}) = \lambda_0 e^{\frac{1}{c_0+1}} \left(\frac{2}{(1+c_0)^2} \right),$$

o bien,

$$e^{1/(c_0+1)} + e^{1/(c_0+1)} \left(\frac{2}{(1+c_0)^2} \right) = e^{1/c_0}.$$

Simplificando la expresión anterior, tenemos que

$$e^{1/(c_0^2+c_0)} = 1 + 2/(1+c_0)^2.$$

Al evaluar el valor de c_0 en la ecuación anterior, se obtiene la igualdad. Por lo

tanto, la recta tangente toca sólo dos puntos de la gráfica. ■

Una consecuencia inmediata de la proposición anterior es que la función $F_{\lambda,c,-\lambda e^{1/c}}(x)$ para $c = 1.399$ sólo tiene dos puntos fijos, 0 y -1 , como se observa en la siguiente gráfica.

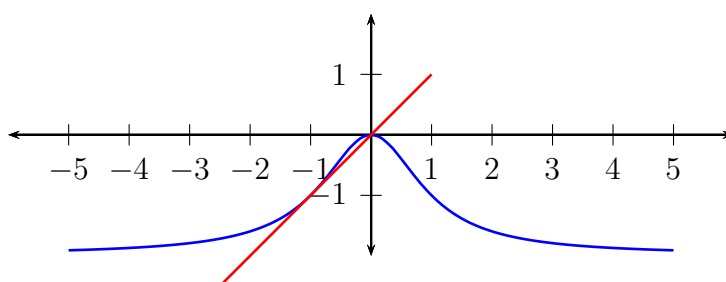


Figura 5.3: Gráfica de $F_{1.8989, 1.399, -3.881}(x)$.

Observemos que al tomar -1.8989 se obtienen los mismos puntos fijos (véase la Figura 5.4).

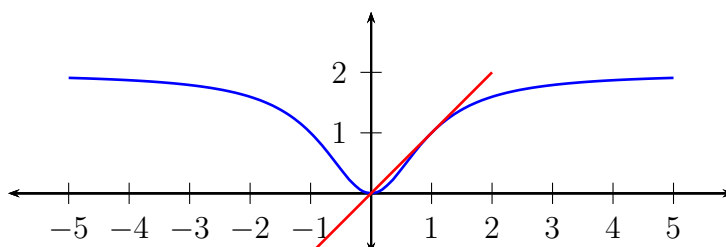


Figura 5.4: Gráfica de $F_{-1.8989, 1.399, 3.881}(x)$.

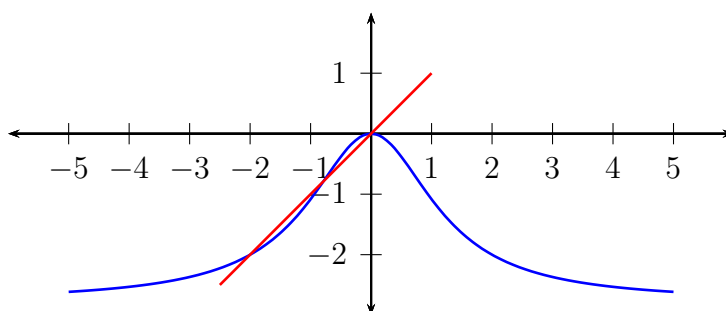
(iii) Tres puntos fijos. Tomando $0 < c < 4$, $\lambda = 2/(e^{1/c} - e^{1/(c+4)})$ y $\mu = -\lambda e^{1/c}$, el punto -2 es un punto fijo de la función $F_{\lambda,c,\mu}(x)$, ya que

$$F_{\lambda,c,\mu}(-2) = 2/(e^{1/c} - e^{1/(c+4)})(e^{1/(4+c)} - e^{1/c}) = -2.$$

La Figura 5.5 muestra un ejemplo de este caso.

II. Tomando los parámetros $\mu = 0$ y $c, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tenemos el siguiente lema:

Lema 5.1. Si $\lambda, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ con $0 < c < 1$ y $\mu = 0$, entonces la familia $F_{\lambda,c,0}(x)$ tiene un punto fijo real.

Figura 5.5: Gráfica de $F_{4.2793,2,-7.0555}(x)$.

Demostración. Tomemos $\lambda \neq 0$ y c tal que $0 < c < 1$ y $F(x) = F_{\lambda,c,0}(x) - x$. Vamos a demostrar el resultado en dos casos: (1) para $\lambda > 0$ y (2) para $\lambda < 0$.

Caso (1) Si $\lambda > 0$, tenemos

$$F(\lambda) = \lambda e^{1/(\lambda^2+c)} - \lambda > 0 \text{ and } F(\lambda e) = \lambda e^{1/(e^2\lambda^2+c)} - \lambda e < 0.$$

Como la función F es continua y $F(\lambda)F(\lambda e) < 0$, por el Teorema del valor intermedio, existe un punto x_λ tal que $F(x_\lambda) = 0$, es decir, $F_{\lambda,c,0}(x_\lambda) = x_\lambda$.

Caso (2) Si evaluamos los puntos λ y λe en la función $F(x)$, entonces tenemos que

$$F(\lambda) = \lambda e^{1/(\lambda^2+c)} - \lambda < 0 \text{ and } F(\lambda e) = \lambda e^{1/(e^2\lambda^2+c)} - \lambda e > 0;$$

por el Teorema del valor intermedio, existe un punto x_λ tal que $F_{\lambda,c,0}(x_\lambda) = x_\lambda$. Por tanto, la función $F_{\lambda,c,0}(x)$ tiene un punto fijo en x_λ . ■

Observación 5.1. La función $F_{\lambda,c,\mu}(x)$ es acotada, es decir, $F_{\lambda,c,0}(x) \in (\lambda, \lambda e^{1/c}]$. Para demostrar esta afirmación, observemos que $\lim_{x \rightarrow \infty} \lambda e^{1/(x^2+c)} = \lambda$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \lambda e^{1/(x^2+c)} = \lambda$. Además, sabemos que $x^2 \geq 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$, así,

$$x^2 + c > c \Rightarrow \frac{1}{x^2 + c} < \frac{1}{c} \Rightarrow e^{1/(x^2+c)} < e^{1/c} \Rightarrow \lambda e^{1/(x^2+c)} < \lambda e^{1/c}.$$

Por lo tanto $F_{\lambda,c,0}(0) = \lambda e^{1/c}$ es el valor máximo de $F_{\lambda,c,0}(x)$. Es claro que si x_λ es un punto fijo de $F_{\lambda,c,0}(x)$, entonces $F_{\lambda,c,0}(x_\lambda) = x_\lambda \in (\lambda, \lambda e^{1/c}]$.

En la Figura 5.6 se muestra un ejemplo de este caso, cuando $z \in \mathbb{R}$, $\mu = 0$, $c = 0.9$ y $\lambda = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$.

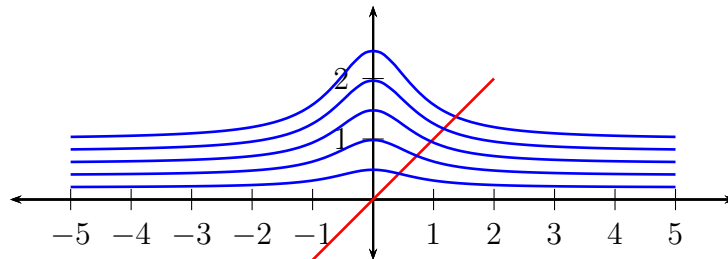


Figura 5.6: Gráfica de $F_{\lambda,1,0}(x)$ con $\lambda = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$.

Observemos que para los valores de λ negativos se obtienen los mismos puntos fijos, como se muestra en la Figura 5.7.

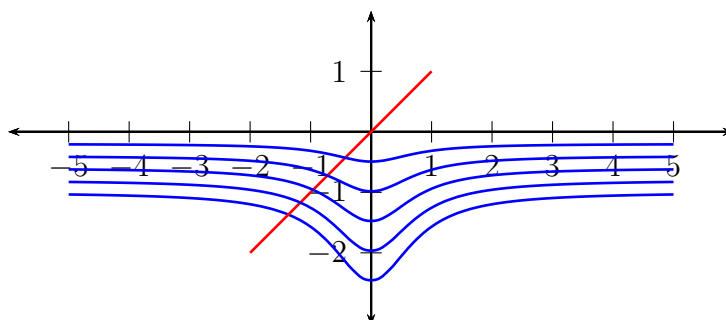


Figura 5.7: Gráfica de $F_{\lambda,1,0}(x)$ con $\lambda = -0.2, -0.4, -0.6, -0.8, -1$.

III. Tomando el parámetro $c \in \mathbb{C} \setminus \{-u^2\}$, $\lambda = -(c + u^2)^2 / 2ue^{1/(u^2+c)}$ y $\mu = u + (c + u^2)^2 / 2u$, donde u es raíz cuadrada de la unidad, afirmamos que $F_{\lambda,c,\mu}(z)$ tiene un punto fijo en $z = u$.

Si evaluamos el punto $z = u$ en la función $F_{\lambda,c,\mu}(z)$, tenemos que

$$F_{\lambda,c,\mu}(u) = -\frac{(u^2 + c)^2}{2ue^{1/(u^2+c)}} e^{1/(u^2+c)} + u + \frac{(c + u^2)^2}{2u} = u.$$

Por lo tanto, el punto $z = u$ es un punto fijo de la función $F_{\lambda,c,\mu}(z)$. En la Figura 5.8 se muestra un ejemplo de este caso.

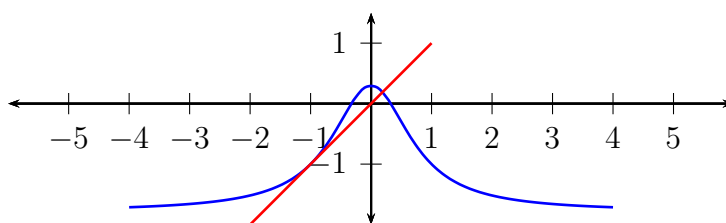


Figura 5.8: Gráfica de la función $F_{2e^{-1/2},1,-3}(x)$.

Observación 5.2. Observemos que, cuando $c < 0$ y $z \in \mathbb{R}$, la gráfica de $F_{\lambda,c,\mu}(x)$ es discontinua, esto se debe a que las singularidades esenciales de $F_{\lambda,c,\mu}(x)$ se siguen preservando. P. Domínguez y A. Hernández estudiaron este caso en [26].

De los cálculos anteriores observamos que la familia $F_{\lambda,c,\mu}(z)$ puede tener más de un punto fijo, pero en este trabajo de tesis estamos interesados en los casos **I**, **II** y **III**.

B. Valores críticos de $F_{\lambda,c,\mu}(z)$

La derivada de $F_{\lambda,c,\mu} \in \mathcal{F}$ está dada por la siguiente fórmula:

$$F'_{\lambda,c,\mu}(z) = \lambda e^{1/(z^2+c)} \left(\frac{-2z}{(z^2+c)^2} \right), \quad \lambda, c \in \mathbb{C}. \quad (5.5)$$

De la ecuación (5.5), tenemos que $F'_{\lambda,c,\mu}(0) = 0$. Como

$$F'_{\lambda,c,\mu}\left(\frac{1}{z}\right) = \lambda e^{z^2/(1+cz^2)} \left(\frac{-2z^3}{(1+z^2c)^2} \right)$$

es analítica en 0, decimos que $F'_{\lambda,c,\mu}(z)$ es analítica en ∞ y $F'_{\lambda,c,\mu}(\infty) = 0$. Por lo tanto, 0 e ∞ son puntos críticos de la familia $F_{\lambda,c,\mu}(z)$. Así, los valores críticos son $\lambda e^{1/c} + \mu$ y $\lambda + \mu$.

C. Valores asintóticos de $F_{\lambda,c,\mu}(z)$

Para calcular los valores asintóticos se procede de la siguiente forma. Sean $\Gamma_1(t) = i\sqrt{c+1/t}$ y $\Gamma_2(t) = -i\sqrt{c+1/t}$, estas curvas tienden a $i\sqrt{c}$ y a $-i\sqrt{c}$, cuando t tiende a ∞ , respectivamente. Al evaluar las curvas Γ_1 y Γ_2 en $F_{\lambda,c,\mu}(z)$, y calcular los límites, cuando $t \rightarrow \infty$, tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F_{\lambda,c,\mu}(\Gamma_1(t)) = \mu, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} F_{\lambda,c,\mu}(\Gamma_2(t)) = \infty.$$

Por lo tanto, los valores asintóticos de $F_{\lambda,c,\mu}(z)$ son μ y ∞ .

Observación 5.3. Por los cálculos que se realizaron en las secciones **A** y **B** podemos asegurar que el conjunto de valores críticos y los valores asintóticos de $F_{\lambda,c,\mu}(z)$ es un conjunto finito. Así, podemos concluir que la familia de funciones $F_{\lambda,c,\mu}(z)$ pertenece a la clase $\mathcal{S}_{\mathcal{X}}$ (véase la Sección 3.8). Por lo tanto, el conjunto de Fatou de $F_{\lambda,c,\mu}(z)$ no

contiene dominios errantes ni dominios de Baker (véase el Teorema 3.6 y el Teorema 3.7).

5.2. Componente atractora

En esta sección demostramos la existencia de una componente atractora para λ, c y μ dados en $F_{\lambda,c,\mu}(z)$, y los puntos fijos estudiados en las Secciones **A-I**, **A-I(i)** y **A-II**.

Primero, estudiemos los puntos fijos de **A-I**. Sean $\lambda, c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Si evaluamos a $\mu = -\lambda e^{1/c}$ en $F_{\lambda,c,\mu}(z)$, obtenemos lo siguiente:

$$F_{\lambda,c,-\lambda e^{1/c}}(z) = \lambda e^{1/(z^2+c)} - \lambda e^{1/c}.$$

Observemos que el conjunto de valores singulares de $F_{\lambda,c,\mu}(z)$ es $\{\lambda - \lambda e^{1/c}, 0, -\lambda e^{1/c}, \infty\}$.

El siguiente teorema se demostró para una clase de funciones más general; la misma demostración es verdadera para la clase de funciones en \mathcal{K} (véase [11]).

Teorema 5.1. *Sea $f \in \mathcal{K} \cap S_{\mathcal{K}}$ y supongamos que existe un punto fijo atractor cuya componente contiene todos los valores singulares de f , entonces el conjunto de Julia $J(f)$ es totalmente desconexo.*

El teorema anterior se utilizará para la demostración del Teorema C que se enuncian en la Sección 1.3.

Teorema C. *Sea $F_{\lambda,c,\mu}(z)$ como en (5.2). Si $\mu = -\lambda e^{1/c}$, $|\lambda|$ es suficientemente pequeño, y $1/|c| < \log(3/2)$ para $\lambda, c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces el conjunto de Fatou de $F_{\lambda,c,-\lambda e^{1/c}}(z)$ es una componente atractora completamente invariante y múltiplemente conexa.*

Para demostrar el Teorema C necesitamos el siguiente lema, que es básico del análisis complejo.

Lema 5.2. Para cada $z \in \mathbb{C}$, se tiene:

$$(a) |e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1.$$

$$(b) |e^z| \leq e^{|z|}.$$

Demostración. Sea $z \in \mathbb{C}$. Para demostrar (a), sabemos que la serie $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ es absolutamente convergente. Así,

$$|e^z - 1| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - 1 \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|} - 1.$$

Ahora demostremos (b).

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)} \leq e^{|z|}.$$

■

Demostración del Teorema C. Sea $\lambda, c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ fijos. Por los cálculos que se realizaron en la sección **A-I**, la función $F_{\lambda, c, -\lambda e^{1/c}}(z)$ tiene un punto fijo en $z = 0$.

Ahora, evaluando $z = 0$ en la fórmula (5.5), tenemos

$$F'_{\lambda, c, -\lambda e^{1/c}}(0) = \lambda e^{1/(0+c)} \left(\frac{-2 \cdot 0}{(0+c)^2} \right) = 0 \Rightarrow |F'_{\lambda, c, -\lambda e^{1/c}}(0)| = 0.$$

Por lo tanto, cero es un punto fijo superatractor.

Sabemos que el conjunto de valores singulares de la familia $F_{\lambda, c, -\lambda e^{1/c}}(z)$ es $\{\lambda - \lambda e^{1/c}, 0, -\lambda e^{1/c}, \infty\}$, dos de ellos, ∞ y $-\lambda e^{1/c}$, son valores omitidos. Demostremos que los valores singulares $0, \lambda(1 - e^{1/c}), \infty$ y $-\lambda e^{1/c}$ pertenecen a una misma componente del punto $z = 0$.

Observemos que:

$$\lim_{z \rightarrow 0} F_{\lambda, c, -\lambda e^{1/c}}(z) = \lambda \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{e^{1/z^2+c} - e^{1/c}}{z} = \lambda \lim_{z \rightarrow 0} z \left(e^{1/z^2+c} \right)' \Big|_{z=0} = 0 = F_{\lambda, c, -\lambda e^{1/c}}(0).$$

Del límite anterior tenemos que existe $r > 0$ tal que si $|z| < r$. Así,

$$|F_{\lambda,c,-\lambda e^{1/c}}(z)| < 1.$$

Demostremos que $\lambda(1 - e^{1/c}) \in U_r = \{z : |z| < r\}$.

Si $1/|c| < \log(3/2)$ y $|\lambda| < r/3$, entonces

$$|\lambda(1 - e^{1/c})| = |\lambda||e^{1/c} - 1|.$$

Por el Lema 5.2-(a), tenemos que:

$$|\lambda(1 - e^{1/c})| \leq |\lambda|(e^{1/|c|} - 1) < |\lambda|(e^{\log(3/2)} - 1) < r/6 < r.$$

Así, el punto $\lambda(1 - e^{1/c}) \in U_r$. El punto $-\lambda e^{1/c}$ está en U_r porque $|\mu| = |\lambda||e^{1/c}|$ y por el Lema 5.2-(b), tenemos que:

$$|\mu| \leq |\lambda|e^{1/|c|} < r/2 < r.$$

Sabemos que el punto $z = 0$ es punto fijo superatractor y un valor singular de la familia $F_{\lambda,c,-\lambda e^{1/c}}(z)$. Así, si tomamos $0 < r < s$, entonces la componente del cero $U_s = \{z : |z| < s\}$ contiene la componente U_r . El punto del ∞ bajo la función $F_{\lambda,c,-\lambda e^{1/c}}(z)$ toma el valor $\lambda - \lambda e^{1/c}$ que está en U_r , por los cálculos anteriores.

Por el Teorema 5.1, el conjunto de Fatou de $F_{\lambda,c,-\lambda e^{1/c}}(z)$ es sólo una componente atractora y múltiplemente conexa. Más aún, el conjunto de Julia de $F_{\lambda,c,-\lambda e^{1/c}}(z)$ es totalmente desconexo. ■

Observación 5.4. El conjunto residual de $F_{\lambda,c,-\lambda e^{1/c}}(z)$, que se definió en el Capítulo 4, es vacío.

Del punto fijo que se calculó en la sección **A-I(i)**, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 5.1. Sea $F_{\lambda,c,\mu}$ como en (5.2). Si $z \in \mathbb{R}$, $\mu = -\lambda e^{1/c}$ y $e^{1/c} - 1 < \lambda^{-1}$ para $\lambda, c \in \mathbb{R}^+$, entonces el conjunto de Fatou de $F_{\lambda,c,-\lambda e^{1/c}}(z)$ es una componente atractora completamente invariante y múltiplemente conexa.

Demostración. Sea $c, \lambda \in \mathbb{R}^+$ tal que $e^{1/c} - 1 < \lambda^{-1}$. Observemos que $\lambda - \lambda e^{1/c} > -1$.

Como $\lim_{x \rightarrow \infty} \lambda e^{1/(x^2+c)} - \lambda e^{1/c} = \lambda - \lambda e^{1/c}$, y el valor máximo de $F_{\lambda,c,-\lambda e^{1/c}}(x)$ es 0, tenemos que $-1 < \lambda e^{1/(x^2+c)} - \lambda e^{1/c} \leq 0$. Por lo tanto, 0 es el único punto fijo de $F_{\lambda,c,-\lambda e^{1/c}}(x)$, ya que la gráfica de $F_{\lambda,c,-\lambda e^{1/c}}(x)$ nunca se interseca con la gráfica de función identidad.

Sabemos que $-1 < \lambda e^{1/(x^2+c)} - \lambda e^{1/c} < 0$, entonces $\lambda - \lambda e^{1/c}$ y 0 pertenece a la componente $U := \{x : |x| < 1\}$. Los puntos ∞ y $-\lambda e^{1/c}$ se demuestra que están en U de manera similar que en el Teorema A. Por el Teorema 5.1, el conjunto de Fatou de $F_{\lambda,c,-\lambda e^{1/c}}(x)$ es una componente atractora múltiplemente conexa y completamente invariante. ■

La Figura 5.9 muestra el plano dinámico de $F_{\lambda,c,\mu}(x)$, cuando los parámetros son $\lambda = 0.5$, $c = 1$ y $\mu = -\lambda e^{1/c}$.

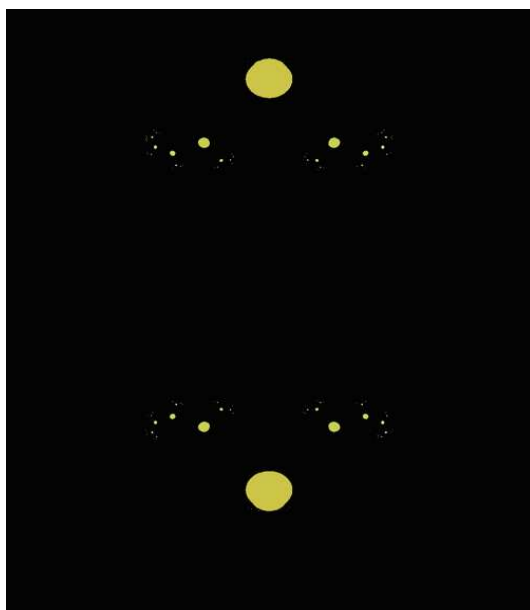


Figura 5.9: Plano dinámico de $F_{\lambda,c,\mu}(x)$ con $\lambda = 0.5$, $c = 1$ y $\mu = -\lambda e^{1/c}$.

Tomando algunos puntos y sus iteraciones, observemos sus órbitas en la Figura 5.12.

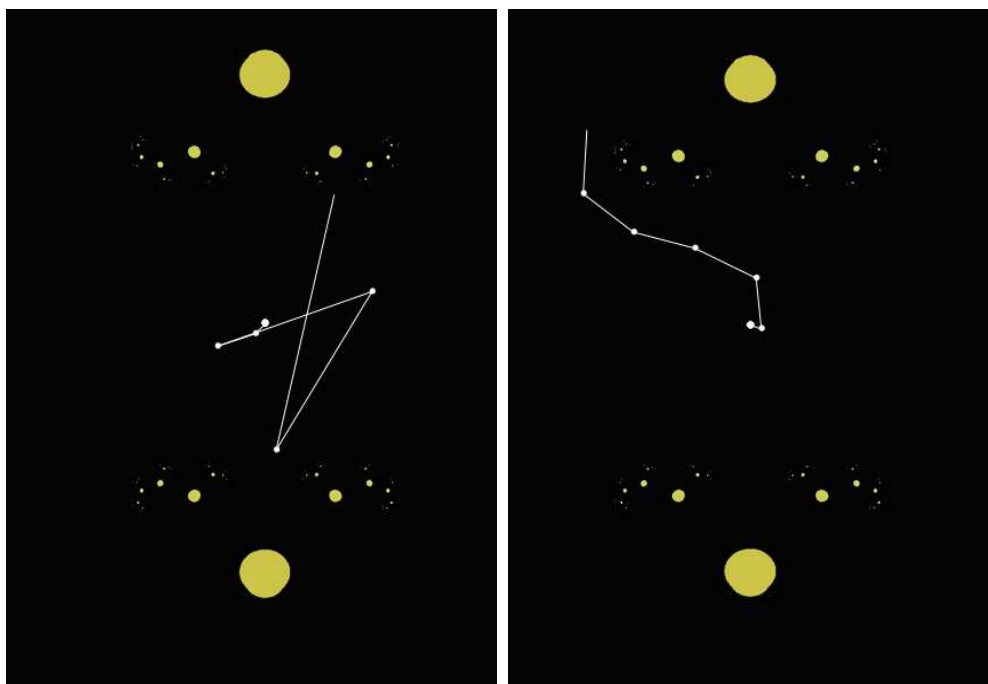


Figura 5.10: Órbitas de algunos puntos.

Finalmente, estudiamos los puntos fijos que se encontraron en la sección **A-II**.

Evaluando $\mu = 0$ en la familia de funciones $F_{\lambda,c,\mu}(z)$, obtenemos la siguiente subfamilia:

$$F_{\lambda,c,0}(x) = \lambda e^{1/(z^2+c)}.$$

Observemos que la derivada de la familia $F_{\lambda,c,\mu}(x)$ se puede escribir de la siguiente forma:

$$F'_{\lambda,c,0}(z) = F_{\lambda,c,0}(z) \left(\frac{-2z}{(z^2+c)^2} \right).$$

Además, el conjunto de valores singulares de la familia $F_{\lambda,c,0}(x)$ es $\{\lambda, \lambda e^{1/c}, 0, \infty\}$, los puntos ∞ y 0 son valores omitidos.

Tomando los parámetros λ, c y μ reales, obtenemos el Teorema D enunciado en la Sección 1.3.

Teorema D. *Sea $F_{\lambda,c,\mu}(z)$ como en (5.2). Si $z \in \mathbb{R}$, $\mu = 0$, $1/2 < c < 1$, $0 < \lambda < (e^{1/c})^{-1}$ para $\lambda, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, entonces el conjunto de Fatou de $F_{\lambda,c,0}(x)$ es una componente atractora completamente invariante y múltiplemente conexa.*

Demostración. Tomemos $1/2 < c < 1$, $0 < \lambda < (e^{1/c})^{-1}$ y $\mu = 0$. Por el Lema 5.1, existe x_λ tal que x_λ es punto fijo de la familia $F_{\lambda,c,0}(x)$. De la expresión de la derivada en (5.5), tenemos

$$F'_{\lambda,c,0}(z) = \lambda e^{1/(z^2+c)} \left(\frac{-2z}{(z^2+c)^2} \right) = F_{\lambda,c,0}(z) \left(\frac{-2z}{(z^2+c)^2} \right). \quad (5.6)$$

Si x_λ es punto fijo de $F_{\lambda,c,0}(x)$, entonces tenemos, por (5.6), que

$$|F'_{\lambda,c,0}(x_\lambda)| = \left| F_{\lambda,c,0}(x_\lambda) \left(\frac{-2x_\lambda}{(x_\lambda^2+c)^2} \right) \right| = \frac{2x_\lambda^2}{(x_\lambda^2+c)^2}.$$

Vamos a probar que $|F'_{\lambda,c,0}(x_\lambda)| < 1$.

Observemos que

$$1/2 < c \Rightarrow -2c + 1 < 0 \Rightarrow c^2 - 2c + 1 - c^2 < 0 \Rightarrow (c - 1)^2 - c^2 < 0.$$

Más aún,

$$x^4 + 2x^2(c - 1) + c^2 = (x^2 + (c - 1))^2 + c^2 - (c - 1)^2 \geq c^2 - (c - 1)^2,$$

pero $c^2 - (c - 1)^2 > 0$, de modo que $x^4 + 2x^2(c - 1) + c^2 > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

Como $x_\lambda^2 + c > 0$ y por la desigualdad anterior, tenemos

$$|F'_{\lambda,c,0}(x_\lambda)| = \frac{2x_\lambda^2}{(x_\lambda^2 + c)^2} < 1.$$

Así, x_λ es un punto fijo atractor.

Sabemos que la familia $F_{\lambda,c,0}(x)$ pertenece a la clase \mathcal{S}_K , ya que el conjunto de valores singulares de la familia $F_{\lambda,c,0}(x)$ es el conjunto $\{\lambda, \lambda e^{1/c}, 0, \infty\}$.

Vamos a aplicar el Teorema 5.1 para este caso. Demostremos que λ y $\lambda e^{1/c}$ pertenecen a la misma componente U de x_λ , donde $U = \{x : |x| < 1\}$.

Por la observación 5.1, si x_λ es un punto fijo de la función $F_{\lambda,c,0}(x)$, entonces $x_\lambda \in (\lambda, \lambda e^{1/c}]$.

Demostremos que $\lambda \in U$. Claramente, $2e^{1/c} > 1$, entonces

$$\lambda < 2\lambda e^{1/c} \Rightarrow \lambda - \lambda e^{1/c} < \lambda e^{1/c} < 1.$$

Además, $\lambda < x_\lambda < \lambda e^{1/c}$. Así,

$$0 < x_\lambda - \lambda < \lambda - \lambda e^{1/c} \Rightarrow 0 < x_\lambda - \lambda < 1.$$

Por lo tanto, $|x_\lambda - \lambda| < 1$.

Ahora, demostremos que $\lambda e^{1/c} \in U$. Por hipótesis, tenemos que $\lambda e^{1/c} < 1$, entonces

$$-\lambda e^{1/c} > -1 \Rightarrow \lambda - \lambda e^{1/c} > \lambda - 1 > -1.$$

Como $\lambda < x_\lambda < \lambda e^{1/c}$, entonces

$$\lambda - \lambda e^{1/c} < x_\lambda - \lambda e^{1/c} < 0 \Rightarrow -1 < \lambda - \lambda e^{1/c} < x_\lambda - \lambda e^{1/c}.$$

Por lo tanto, $|x_\lambda - \lambda e^{1/c}| < 1$.

Así, los valores singulares λ y $\lambda e^{1/c}$ pertenecen a la componente

$$U = \{x : |x_\lambda - x| < 1\},$$

que está contenida en la componente de Fatou de x_λ . Los puntos 0 e ∞ bajo la función $F_{\lambda,c,0}(x)$ toman los valores λ y $\lambda e^{1/c}$, respectivamente. Así, los puntos 0 e ∞ están en U . Por el Teorema 5.1, el conjunto de Fatou $F_{\lambda,c,0}(x)$ es una componente atractora completamente invariante y múltiplemente conexa. ■

La Figura 5.11 muestra el plano dinámico de $F_{\lambda,c,\mu}(x)$, cuando los parámetros son $c = 0.7$, $\lambda = 0.2$ y $\mu = 0$.

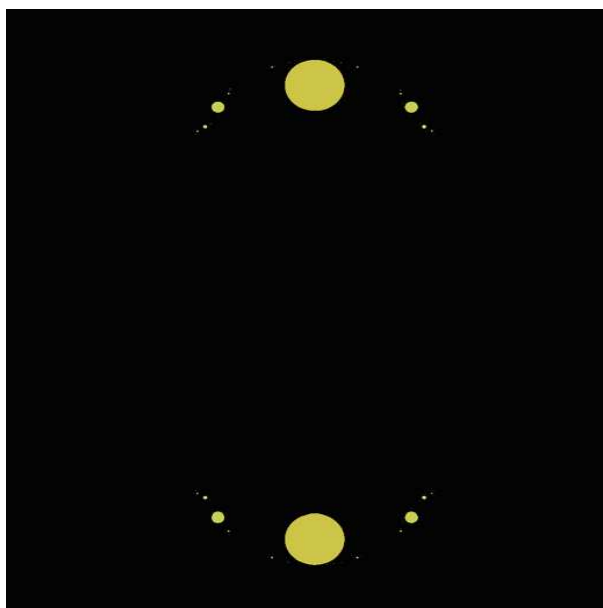


Figura 5.11: Plano dinámico de $F_{\lambda,c,\mu}(x)$, cuando los parámetros son $c = 0.7$, $\lambda = 0.2$ y $\mu = 0$.

Tomando algunos puntos y sus iteraciones en la función $F_{0.2,0.7,0.2}(x)$, observamos sus órbitas en la Figura 5.12.

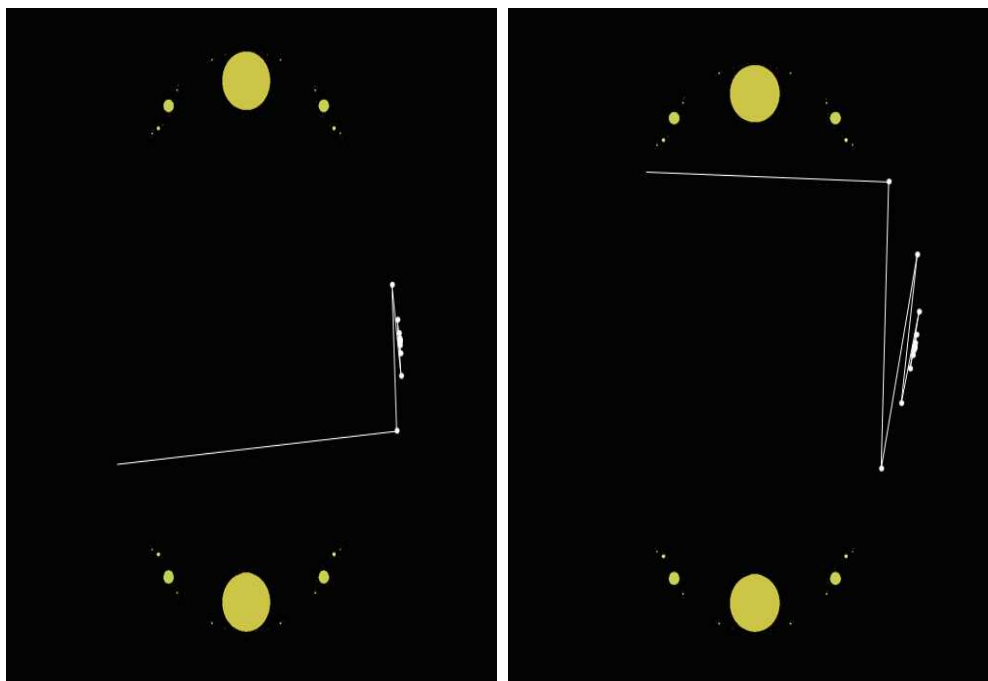


Figura 5.12: Órbitas de algunos puntos.

5.3. Componente parabólica

En esta sección demostramos la existencia de una componente parabólica en el conjunto de Fatou de $F_{\lambda,c,\mu}(z)$.

Teorema E. *Sea $F_{\lambda,c,\mu}(z)$ como en (5.2). Si $c \in \mathbb{C} \setminus \{-u^2\}$, $\lambda = -(c+u^2)^2/(2ue^{1/(u^2+c)})$ y $\mu = u + (c+u^2)^2/2u$, donde u es una raíz de la unidad, entonces el conjunto de Fatou de $F_{\lambda,c,\mu}(z)$ contiene un dominio parabólico.*

Demostración. Tomemos $c \in \mathbb{C} \setminus \{-u^2\}$, $\lambda = -(c+u^2)^2/(2ue^{1/(u^2+c)})$ y $\mu = u + (c+u^2)^2/2u$ fijos. En la sección **A-(iii)** probamos que la familia de funciones $F_{\lambda,c,\mu}(z)$ tiene un punto fijo en u .

Si evaluamos u en la derivada (5.5), tenemos que

$$F'_{\lambda,c,\mu}(u) = -\frac{(u^2+c)^2}{2ue^{1/(u^2+c)}} e^{1/(u^2+c)} \left(\frac{-2u}{(u^2+c)^2} \right) = 1.$$

Así, $|F'_{\lambda,c,\mu}(u)| = 1$. Como $F'_{\lambda,c,\mu}(u) = 1$ es raíz de la unidad, entonces u es un punto fijo racional indiferente. Por lo tanto, el conjunto de Fatou de $F_{\lambda,c,\mu}(z)$ contiene un dominio parabólico. ■

5.3.1. Ejemplos de componentes parabólicas coexistiendo con componentes atractoras

Los siguientes ejemplos muestran algunos casos del Teorema E. Estos ejemplos son de componentes parabólicas que coexisten con componentes atractoras acotadas y no acotadas.

Ejemplo 5.1. Si tomamos $z \in \mathbb{R}$, $u = -1$ y $c = 1$ en el Teorema E, entonces $\lambda = 2e^{-1/2}$ y $\mu = -3$. El resultado es la función

$$F_{2e^{-1/2},1,-3}(x) = (2e^{-1/2})e^{1/(x^2+1)} - 3.$$

Por el Teorema E, $u = -1$ es un punto fijo racional indiferente. Para los parámetros que se tomaron, se puede probar que existe otro punto fijo $u_1 = 0.19$ (véase la gráfica de $F_{2e^{-1/2},1,-3}(x)$ en la Figura 5.13). El punto fijo u_1 es repulsor, porque $|F'_{\lambda,c,\mu}(u_1)| > 1$.

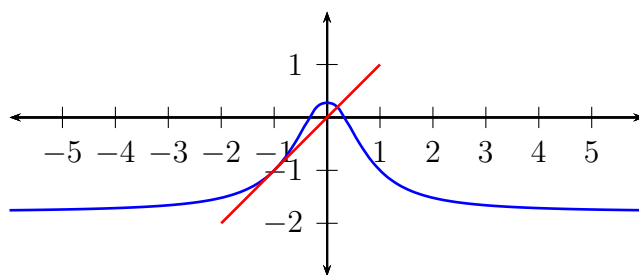


Figura 5.13: Gráfica de la función $F_{2e^{-1/2},1,-3}(x)$.

La segunda iterada de $F_{2e^{-1/2},1,-3}(x)$, es decir, $F_{2e^{-1/2},1,-3}^{\circ 2}(x)$, tiene cuatro puntos fijos. Dos de ellos son de la función $F_{2e^{-1/2},1,-3}(x)$ (uno parabólico, $u = -1$, y el otro repulsor, $u_1 = 0.19$) y los otros dos son puntos fijos atractores $u_2 = 0.06$ y $u_3 = 0.29$. La Figura 5.14 muestra una parte de la gráfica de la función $F_{2e^{-1/2},1,-3}^{\circ 2}(x)$.

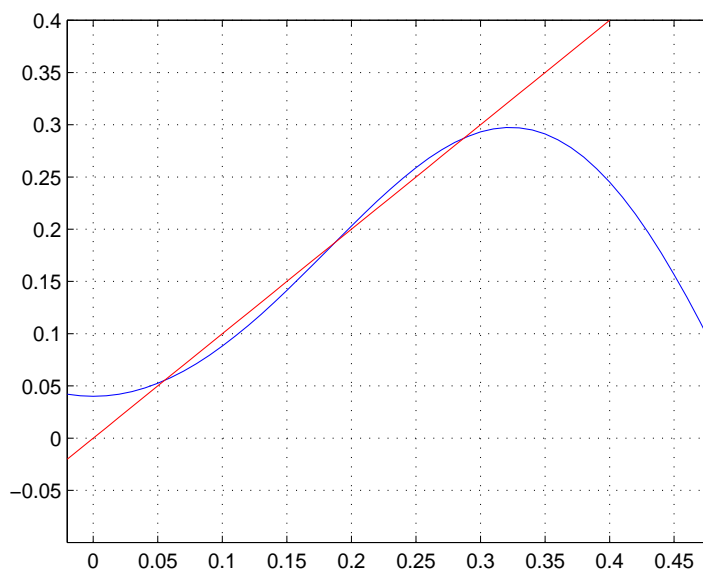


Figura 5.14: Parte de la gráfica de la función $F_{2e^{-1/2},1,-3}^{\circ 2}(x)$.

Hay una componente atractora de período dos, digamos $F_{0.06}$ y $F_{0.29}$, donde $F_{0.06}$ contiene a 0.06 y $F_{0.29}$ contiene a 0.29. Las dos regiones son intercambiadas por $F_{2e^{-1/2},1,-3}(x)$, es decir, $F_{2e^{-1/2},1,-3}(F_{0.06}) = F_{0.29}$ y $F_{2e^{-1/2},1,-3}(F_{0.29}) = F_{0.06}$. Esta es una consecuencia del hecho que $F_{2e^{-1/2},1,-3}(0.06) = 0.29$ y $F_{2e^{-1/2},1,-3}(0.29) = 0.06$.

La Figura 5.15 muestra que el conjunto de Fatou de la función $F_{2e^{-1/2},1,-3}(x)$ contiene una componente parabólica de un pétalo, en color azul, y una componente atractora, en color negro.

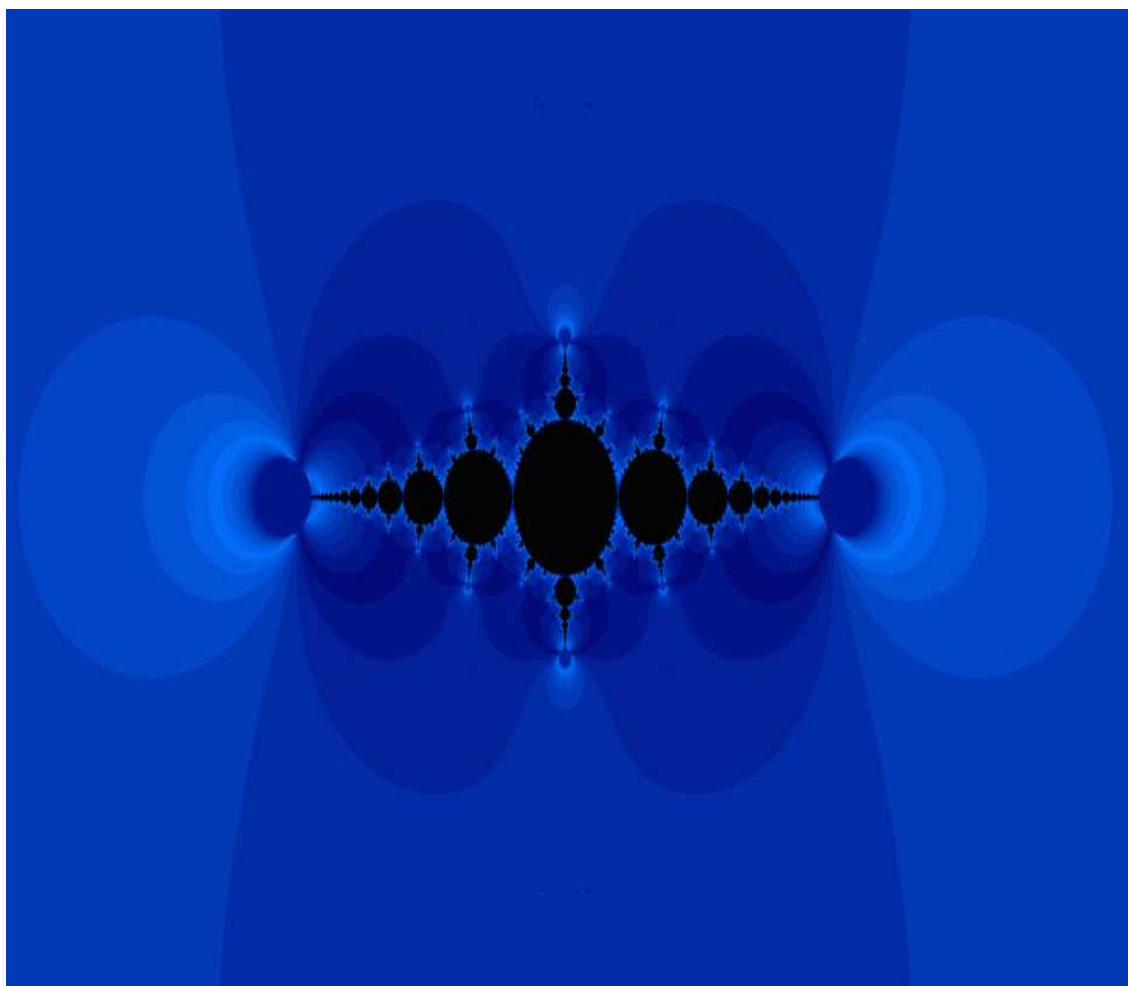


Figura 5.15: Componente parabólica de color azul.

Tomando algunos puntos y sus iteraciones, vemos las órbitas de los puntos en la Figura 5.16.

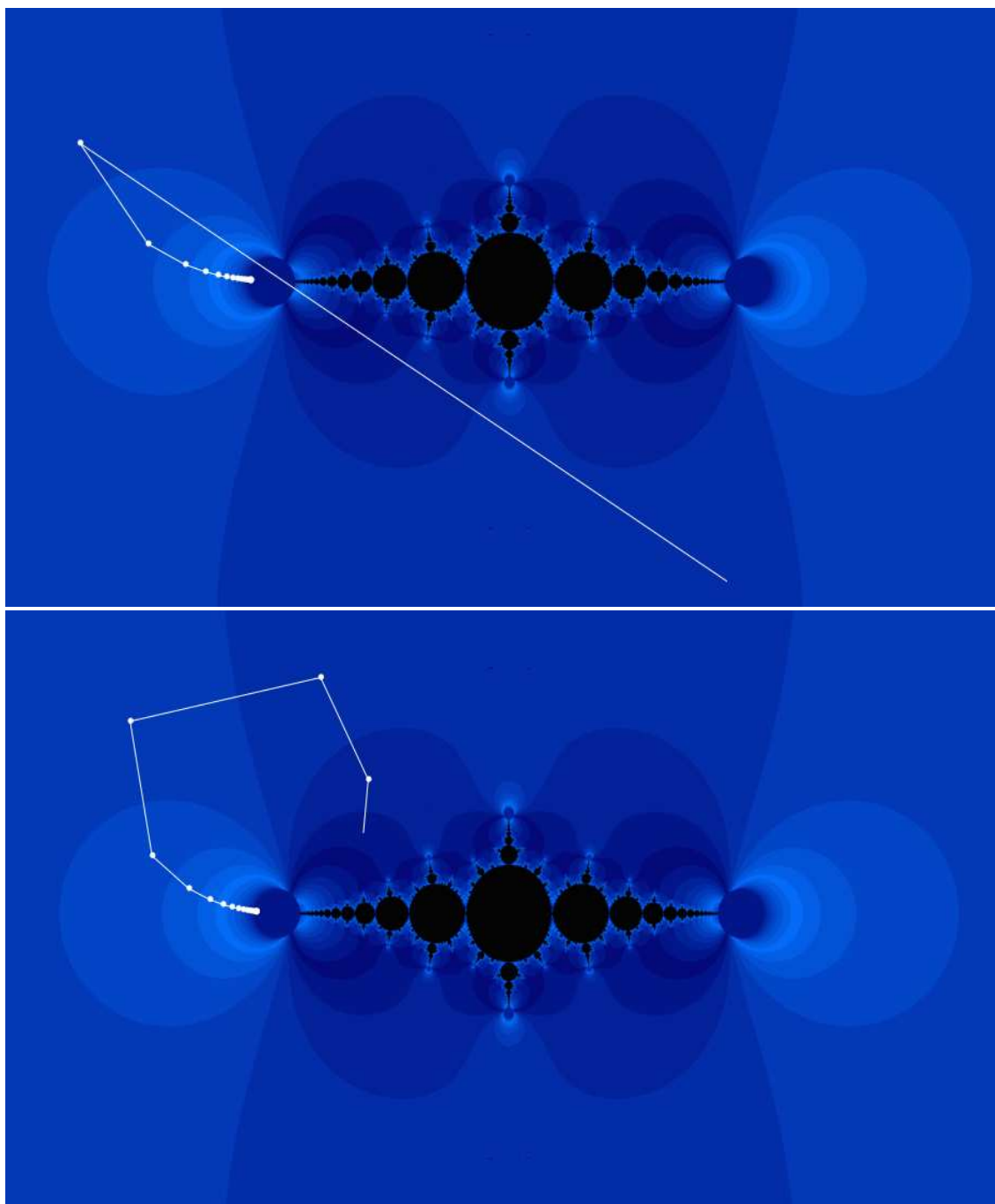


Figura 5.16: Órbitas de algunos puntos en la componente parabólica.

En la Figura 5.17 se observa la componente atractora acotada y algunas órbitas que se tomaron en la componente. La forma de la figura negra es parecida al conjunto de Fatou y Julia del polinomio $p(z) = z^2 - 1$. La componente parabólica debe ser

múltiplemente conexa, ya que los puntos cerca de las singularidades esenciales son preimágenes de la componente atractora doblemente periódica.

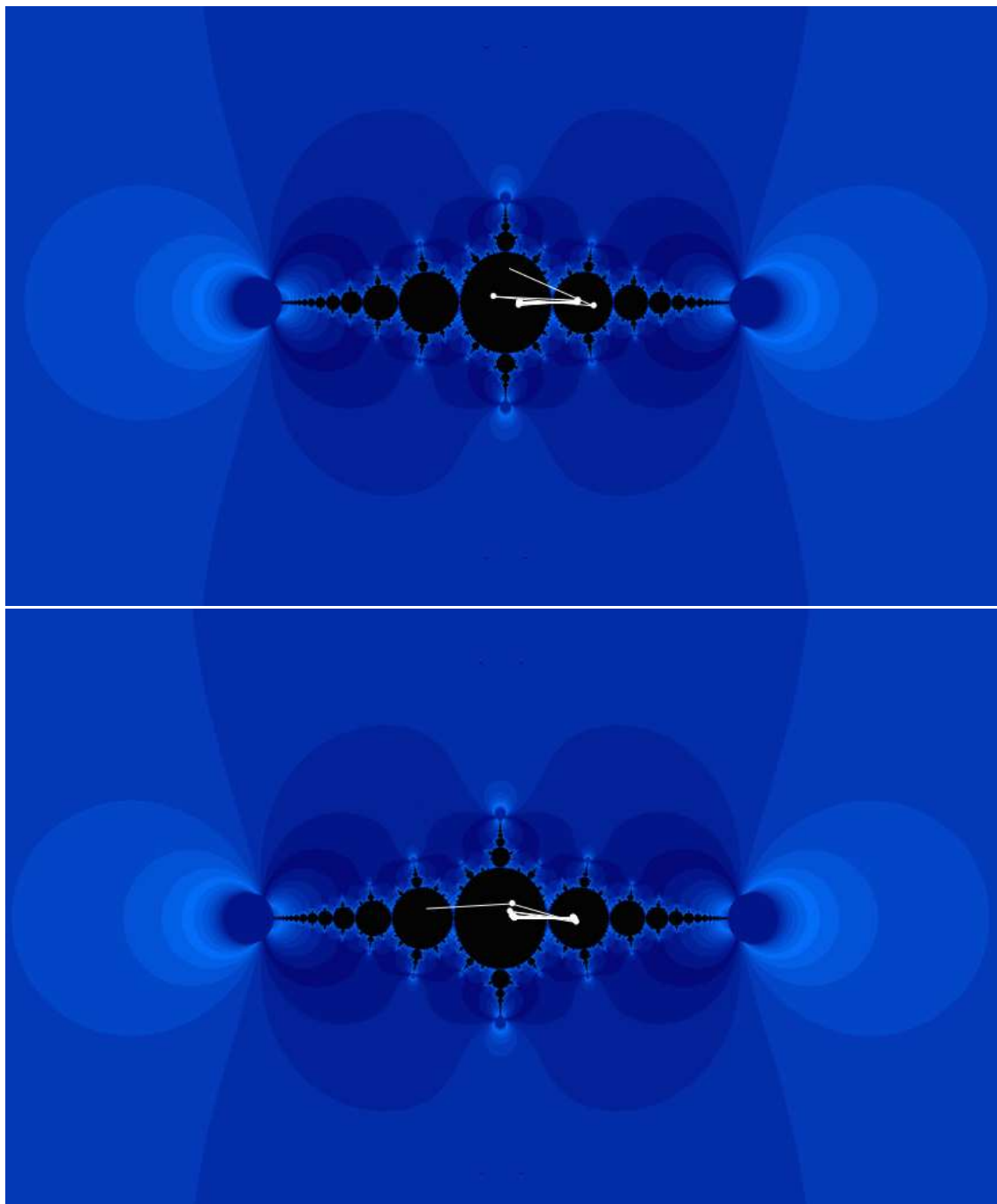


Figura 5.17: Componente atractora y detalles de algunas órbitas de algunos puntos, en color blanco.

En la siguiente figura se tienen acercamientos de: (a) una singularidad esencial y (b) del punto fijo parabólico.

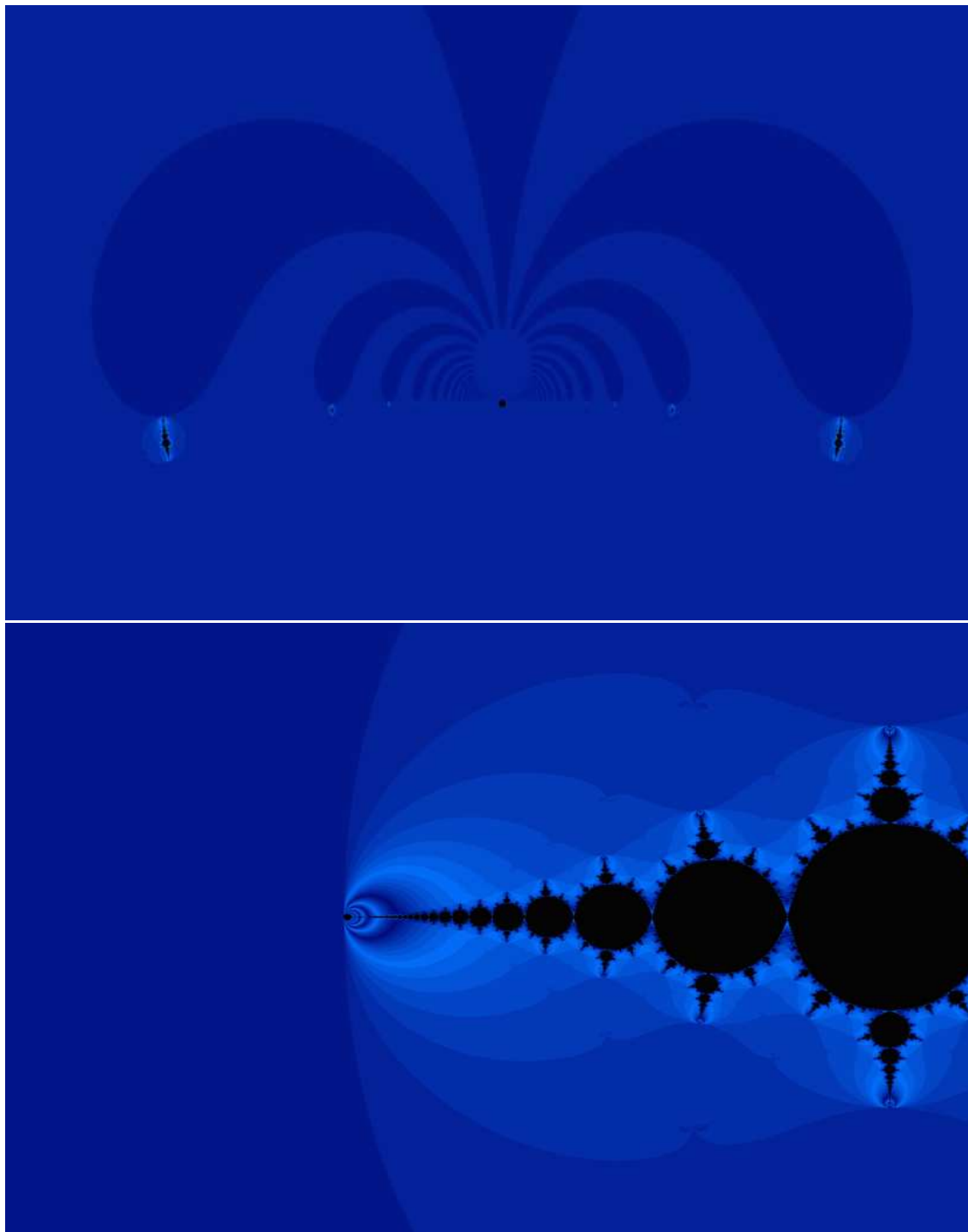


Figura 5.18: Acercamientos de la singularidad esencial y el punto fijo parabólico..

Ejemplo 5.2. Si tomamos $z = x \in \mathbb{R}$, $u = -1$ y $c = 9$, en el Teorema E, entonces los parámetros son $\lambda = 50/e^{1/10}$ y $\mu = -51$.

El conjunto de Fatou de la función $F_{50/e^{1/10}, 9, -51}(x)$ contiene una componente parabólica, donde $u = -1$ es un punto fijo. La Figura 5.19 muestra la componente parabólica.

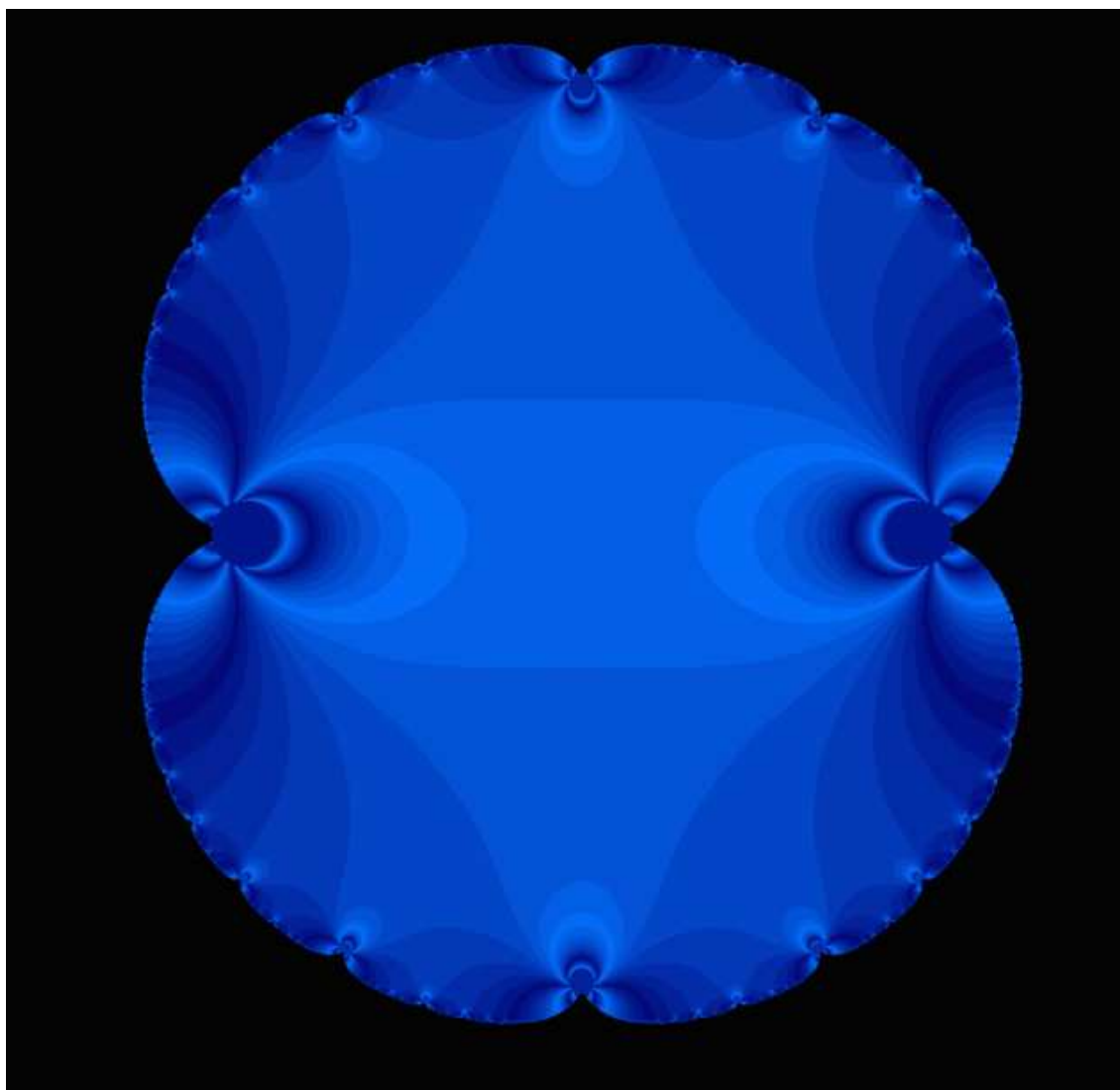


Figura 5.19: La componente parabólica, en color azul.

Tomando algunos puntos y sus iteradas, obtenemos órbitas en la componente parabólica que se muestran en la Figura 5.20.

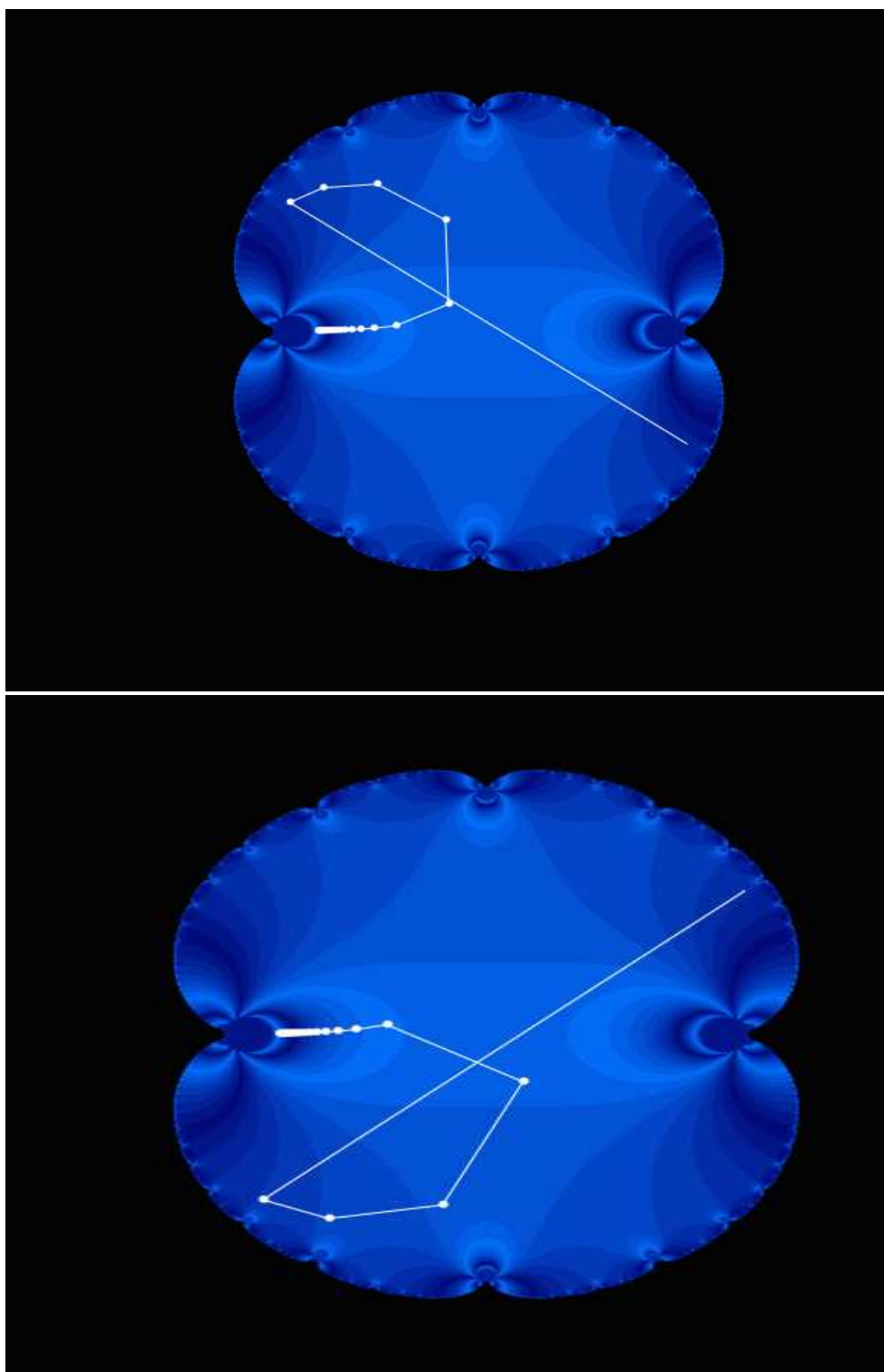


Figura 5.20: Las órbitas de algunos puntos en la componente parabólica.

En la Figura 5.21 se observa otra componente (color negro) en la que las órbitas de los puntos convergen a otro punto fijo. Haciendo algunos cálculos, podemos asegurar que punto fijo es -3.76 , de modo que la componente de color negro es una componente atractora no acotada.

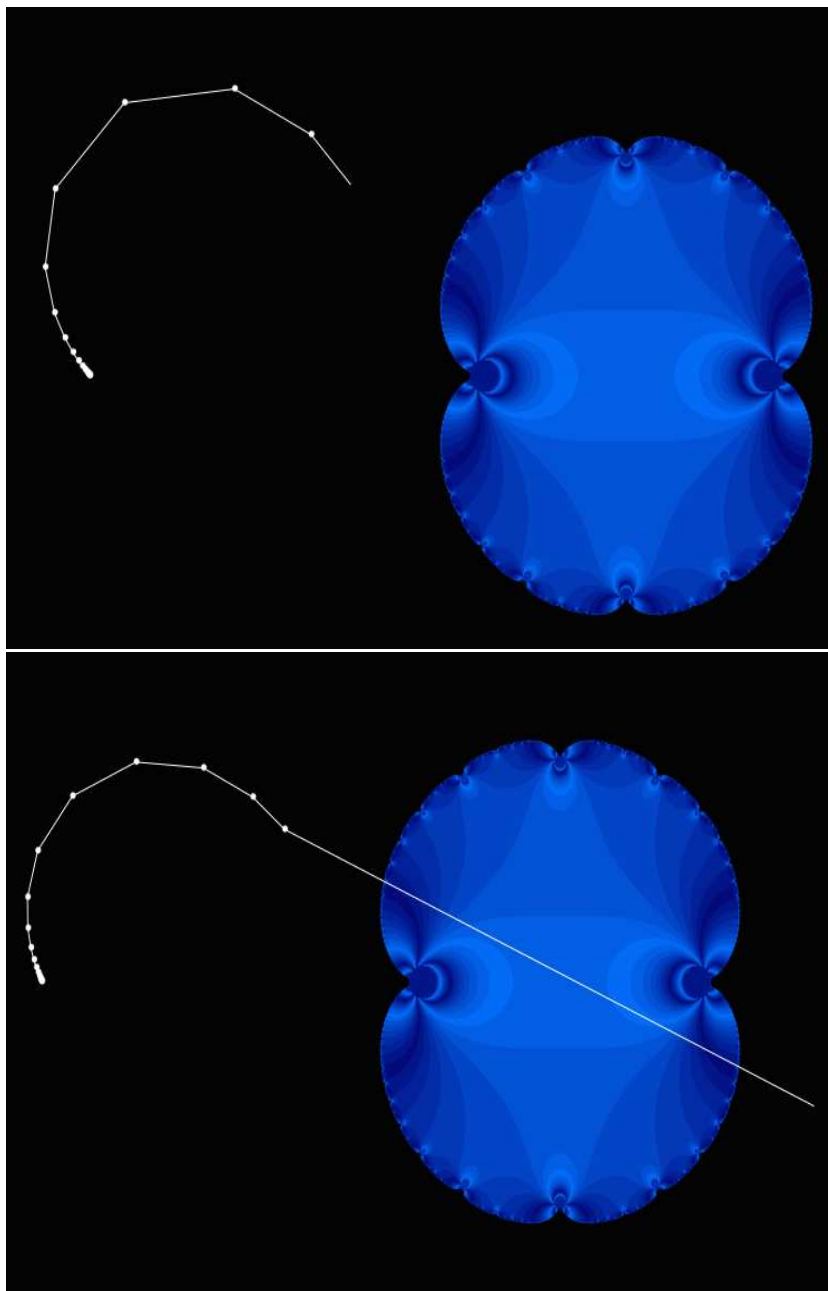


Figura 5.21: Una componente atractora y algunas órbitas.

Es una pregunta abierta para qué parámetros es posible tener:

- (a) Una componente parabólica y otra componente atractora de período dos, o
- (b) Una componente parabólica y otra atractora.

Tampoco sabemos si, en los casos (a) o (b), la componente es completamente invariante, porque para funciones en la clase \mathcal{K} no se sabe cuántas componentes completamente invariantes pueden existir.

5.4. Disco de Siegel

En esta sección demostramos el Teorema F enunciado en la Sección 1.3, es decir, que el conjunto de Fatou de la familia $F_{\lambda,c,\mu}(z)$ contiene un disco de Siegel.

Evaluando $\lambda = e^{-1}\sqrt{1-c}$ y $\mu = 0$, tenemos la siguiente subfamilia:

$$F_{e^{-1}\sqrt{1-c},c,0}(z) = (e^{-1}\sqrt{1-c})e^{1/(z^2+c)}.$$

Para simplificar la notación, llamemos a $F_{e^{-1}\sqrt{1-c},c,0}(z)$ como $h_c(z)$, es decir, $h_c(z) = (e^{-1}\sqrt{1-c})e^{1/(z^2+c)}$.

La derivada de la familia $h_c(z)$ se puede escribir de la siguiente manera:

$$h'_c(z) = h_c(z) \left(-\frac{2z}{(z^2+c)^2} \right).$$

Se calculan los puntos fijos de $h_c(z)$:

$$h_c(z_0) = z_0 \iff (e^{-1}\sqrt{1-c})e^{1/(z_0^2+c)} = z_0 \iff (e^{-1}\sqrt{1-c})e^{1/(z_0^2+c)} - z_0 = 0.$$

Si $z_0 = -\sqrt{1-c}$, entonces

$$h_c(-\sqrt{1-c}) = (-e^{-1}\sqrt{1-c})e^{1/(1-c+c)} + \sqrt{1-c} = (-e^{-1}\sqrt{1-c})e + \sqrt{1-c} = 0.$$

De manera similar, si $z_0 = \sqrt{1-c}$, entonces

$$h_c(\sqrt{1-c}) = (e^{-1}\sqrt{1-c})e^{1/(1-c+c)} - \sqrt{1-c} = (e^{-1}\sqrt{1-c})e - \sqrt{1-c} = 0.$$

Por lo tanto, los puntos fijos de la familia $h_c(z)$ son $w = \pm\sqrt{1-c}$. Para estos puntos fijos tenemos el siguiente resultado:

Teorema F. *Sea $F_{\lambda,c,\mu}(z)$ como en (5.2). Si $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es un número de Brjuno, $c = (1/2)e^{2\pi i\theta} + 1$ y $\lambda = e^{-1}\sqrt{1-c}$, entonces el conjunto de Fatou de $F_{\lambda,c,0}(z)$ contiene un disco de Siegel.*

Demostración. Hemos demostrado que los puntos fijos de la familia de $h_c(z)$ son $\pm\sqrt{1-c}$.

Ahora, determinemos un valor de c tal que los puntos fijos $\pm\sqrt{1-c}$ sean irracionales indiferentes.

Evaluando el punto $w = \sqrt{1-c}$ en la fórmula de la derivada, tenemos lo siguiente:

$$h'_c(w) = \frac{-2\sqrt{1-c}}{((\sqrt{1-c})^2 + c)^2} = -2(1-c).$$

El punto fijo w es un punto fijo racional indiferente si $h'_c(w) = e^{2\pi i\theta}$ para algún $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Entonces, el valor de c debe satisfacer que

$$h'(w) = e^{2\pi i\theta} \Leftrightarrow -2(1-c) = e^{2\pi i\theta} \Leftrightarrow c = \frac{e^{2\pi i\theta}}{2} + 1.$$

Por lo tanto, el conjunto de Fatou de la familia $h_c(z)$ contiene un disco de Siegel.

El mismo resultado se obtiene cuando el punto fijo es $w = -\sqrt{1-c}$. ■

5.5. Anillos de Herman en la clase \mathcal{K}

Como mencionamos en la Sección 1.1 es posible tener ejemplos de anillos de Herman en el conjunto de Fatou para $f \in \mathcal{K}$ usando los resultados de Domínguez y

Fagella en [24].

Observando la tabla, Sección 4, en Domínguez y Fagella en [24], podemos combinar una función en la clase \mathcal{K} con un disco de Siegel S_1 y otra función en la clase \mathcal{K} con un disco de Siegel S_2 , de modo que la función resultante es la función $G(z)$ en la clase \mathcal{K} con un anillo de Herman acotado (véase la Sección 2 de [24]).

En particular, podemos tomar la función $F_{\lambda,c,\mu}(z) = \lambda e^{1/(z^2+c)} + \mu$ con los parámetros del Teorema F, para que el conjunto de Fatou de $F_{\lambda,c,\mu}(z)$ tenga un disco de Siegel, digamos S , y hacer la construcción, como en [24], con la misma función y el mismo disco de Siegel S (véase la Figura 5.22).

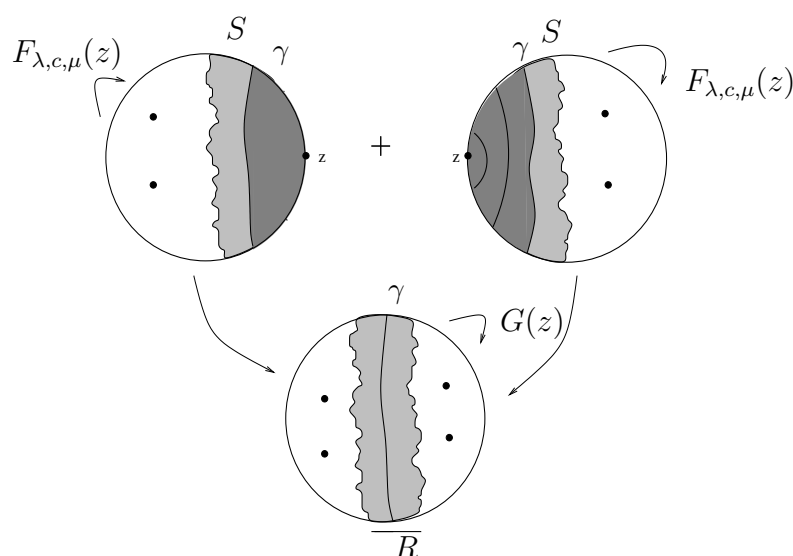


Figura 5.22: El anillo de Herman.

Así, la función resultante es una función en la clase \mathcal{K} con un anillo de Herman acotado.

5.6. Estudio de $F_{\lambda,c,\mu}(z)$ con más de un punto fijo

Investigando los puntos fijos en la secciones **A-I-(ii)** y **A-I-(iii)**, observamos que la familia $F_{\lambda,c,\mu}(z)$ puede tener más de dos puntos fijos. En esta sección se proporciona un breve estudio de estos casos.

Lema 5.3. Si $0 < x \leq 4$, entonces $e^{1/(x+4)-1/x} < (x+4)^2/[(x+4)^2+8]$.

Demostración. Sean $f(x) = e^{[1/(x+4)-1/x]}$ y $g(x) = (x+4)^2/[(x+4)^2+8]$. Sabemos que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = L$, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} f(1/x) = L$. Como $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$, podemos concluir que $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-1/x} = 0$. Así, $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{[1/(x+4)-1/x]} = 0$.

Las derivadas de f y g son $f'(x) = e^{[1/(x+4)-1/x]}[1/x^2 - 1/(x+4)^2]$ y $g'(x) = 16(x+4)/[(4+x)^2+8]^2$, respectivamente. Al tomar $0 < x \leq 4$, tenemos que $f'(x) > 0$ y $g'(x) > 0$. Por lo tanto, f y g son funciones crecientes.

También, $g(0) = 2/3 = 0.6667$, $g(4) = 8/9 = 0.8889$ y $f(4) = e^{-1/4} = 0.7788$. Así,

$$f(x) < g(x) \Rightarrow e^{[1/(x+4)-1/x]} < (x+4)^2/[(x+4)^2+8].$$

■

Lema 5.4. Si $z = x \in \mathbb{R}$, $0 < c \leq 4$, $\lambda = 2/(e^{1/c} - e^{1/(c+4)})$ y $\mu = -\lambda e^{1/c}$, entonces -2 es un punto fijo atractor de $F_{\lambda,c,\mu}(x)$.

Demostración. Hemos demostrado que -2 es un punto fijo de la familia $F_{\lambda,c,\mu}(x)$. Ahora, demostremos que -2 es un punto fijo de la familia $F_{\lambda,c,\mu}(z)$.

Como $0 < c \leq 4$, por el Lema 5.3, tenemos que

$$e^{[1/(c+4)-1/c]} < (c+4)^2/[(c+4)^2+8] \Rightarrow \frac{e^{1/(c+4)}}{e^{1/c}} < \frac{(c+4)^2}{(c+4)^2+8}.$$

O bien,

$$e^{1/(c+4)}[(c+4)^2+8] < (c+4)^2 e^{1/c} \Rightarrow e^{1/(c+4)}(c+4)^2 + 8e^{1/(c+4)} < (c+4)^2 e^{1/c}.$$

Así,

$$8e^{1/(c+4)} < (c+4)^2 e^{1/c} - e^{1/(c+4)}(c+4)^2 \Rightarrow \frac{8e^{1/(c+4)}}{e^{1/c} - e^{1/(c+4)}} < (c+4)^2.$$

Por la desigualdad anterior, tenemos que:

$$|F'_{\lambda,c,-\lambda e^{1/c}}(-2)| = \left| \frac{2}{e^{1/c} - e^{1/(c+4)}} e^{1/(c+4)} \left(\frac{4}{(4+c)^2} \right) \right| = \left| \frac{8}{e^{1/c} - e^{1/(c+4)}} \cdot \frac{e^{1/(c+4)}}{(4+c)^2} \right| < 1.$$

■

Proposición 5.2. Si $z = x \in \mathbb{R}$, $0 < c \leq 4$, $\lambda = 2/(e^{1/c} - e^{1/(c+4)})$ y $\mu = -\lambda e^{1/c}$, entonces la familia $F_{\lambda,c,\mu}(z)$ tiene tres puntos fijos.

Demostración. Sea $0 < c \leq 4$ y $\lambda = 2/(e^{1/c} - e^{1/(c+4)})$ fijos, y $F(x) = F_{\lambda,c,\mu}(x) - x$.

Por el Lema 5.4 y el cálculo que se realizó en la sección **(A)-(i)**, la función $F(x)$ tiene como puntos fijos a 0 y -2 . Además, la función $F(x)$ tiene como punto de inflexión a $x_0 = \sqrt{1/3\sqrt{(c+1)^2 + 3c^2} - 1/3(c+1)}$ (véase la Figura 5.23).

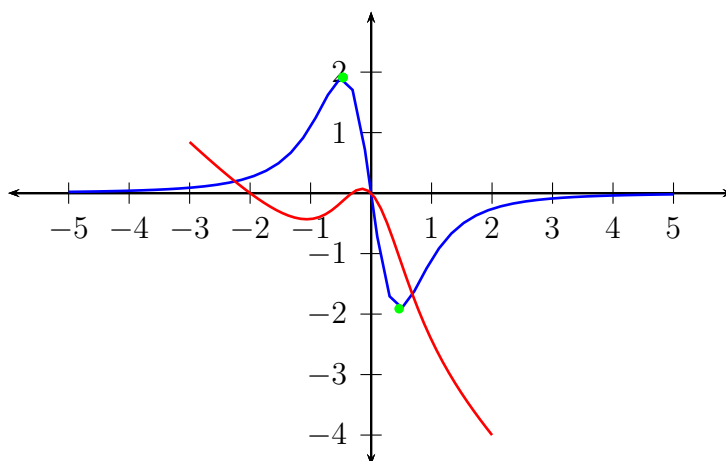


Figura 5.23: Gráfica de $F_{1.3361,1,-3.6319}(x)$, en color rojo y la gráfica de la derivada de $F_{1.3361,1,-3.6319}(x)$, en color azul.

Como $0 < c \leq 4$, entonces $x_0 \in (-2, 0)$. Así, deben existir α y $\beta \in (-2, 0)$ tal que $F(\alpha) > 0$ y $F(\beta) < 0$. Por el Teorema del valor intermedio existe $t_0 \in (-2, 0)$ tal que $F(t_0) = 0$. Por lo tanto, la función $F_{\lambda,c,-\lambda e^{1/c}}$ tiene tres puntos fijos. ■

Los tres puntos fijos anteriores no los estudiamos en esta trabajo de tesis, este estudio se puede considerar como un trabajo a futuro.

Finalmente, analizamos los puntos fijos que se calcularon en la sección **A-I-(ii)**.

Sea $c_0 = 1.399$, $\lambda = -1/(e^{1/(c_0+1)} - e^{1/c_0})$ y $\mu_0 = -\lambda e^{1/c_0}$. Por la Proposición 5.1, la función $F_{\lambda_0,c_0,\mu_0}(x)$ tiene como puntos fijos 0 y -1 . Al sustituir en la fórmula de la derivada (5.5), tenemos que $|F'_{\lambda_0,c_0,\mu_0}(-1)| > 1$. Por lo tanto, el punto es un punto fijo débilmente repulsor ($|\eta| > 1$ ó $\eta = -1$) que no estudiaremos en este trabajos de tesis. Este estudio se puede considerar como un trabajo a futuro.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo a futuro

En este capítulo se enuncian las conclusiones y posible trabajo a futuro de este trabajo de tesis.

6.1. Conclusiones

1. Se investigó la clase de funciones meromorfas \mathcal{K} que contiene funciones meromorfas, cuyo dominio es el complemento de un conjunto compacto contable de singularidades esenciales. Se definieron los conjuntos de Fatou y Julia para esta clase de funciones.
2. Se presentó una demostración diferente a la de Bolsch [16] de la densidad de los puntos fijos repulsores en el conjunto de Julia para funciones en la clase \mathcal{K} . En esta demostración se usaron resultados de familias normales y el Teorema de las Cinco Islas de Ahlfors.
3. Se extendieron dos resultados: Proposición 3.5 y Proposición 3.6, que se cumplen para funciones en la clase \mathcal{M} , relacionados con componentes completamente invariantes en el conjunto de Fatou a funciones en la clase \mathcal{K} .
4. Se definió el conjunto residual en el conjunto de Julia para funciones en la clase \mathcal{K} . Se demostraron los Teoremas A y B que proporcionan condiciones para que el

conjunto residual en el conjunto de Julia no sea vacío para funciones en la clase \mathcal{K} . Además, se presentó un ejemplo de funciones en la clase $S_{\mathcal{K}}$ cuyo conjunto residual no es vacío, este ejemplo se construyó usando aproximación compleja.

5. Se realizó un estudio del plano dinámico de la familia de funciones $F_{\lambda,c,\mu}(z) = \lambda e^{1/(z^2+c)} + \mu$ para ciertos parámetros $c, \mu \in \mathbb{C}$ y $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Esto es, en esta investigación se demostró que para ciertos valores de los parámetros λ, c y μ , el conjunto de Fatou contiene componentes atractoras, componentes parabólicas y discos de Siegel. A lo largo del trabajo surgieron problemas de investigación que mencionamos en la siguiente sección.
6. Con las investigación que se realizó en este trabajo de tesis se tienen dos artículos, uno aceptado y el otro en revisión (véase [27] y [28]).

6.2. Trabajo a futuro

1. No existen ejemplos de funciones en la clase \mathcal{K} que tengan en su conjunto de Fatou dominios de Baker. Una conjetura de este trabajo de tesis es que la familia de funciones $F_{\lambda,c,\mu}(z) = \lambda e^{1/(z^2+c)} + \mu/z$ contiene en su conjunto de Fatou dominios de Baker.
2. Para un rango de parámetros λ, c, μ de la familia $F_{\lambda,c,\mu}(z)$ es posible tener:
 - (a) Una componente parabólica y otra componente atractora de período dos.
 - (b) Una componente parabólica y otra atractora.
 - (c) Demostrar si en los casos (a) y (b) la componente atractora es completamente invariante.
3. Los puntos fijos que se calcularon en la secciones **(A)-(I)-(c)** y **(A)-(i)-(b)** no se estudiaron con profundidad, por lo que se considera como un trabajo a futuro.

-
4. Demostrar que si $f \in \mathcal{S}_\kappa$, entonces existen a lo más dos componentes completamente invariantes en el conjunto de Fatou.

Referencias

- [1] Abikoff, W., (1971) “Some remarks on Kleinian groups”. *Ann. of Math. Studies*, **66**, 1-5.
- [2] Abikoff, W., (1973) “The residual limits sets of Kleinian groups”. *Acta Math.* , **130**, 127-144.
- [3] Ahlfors, L. V., (1933) “Sur les domaines dans lesquels une fonction méromorphe prend des valeurs appartenant à une région donnée”. *Acta Societatis Scientiarum Fennicae Nova Series A*, **II.2**, 1-17.
- [4] Ahlfors, L. V., (1979) *Complex analysis an introduction to the theory of analytic function of one complex variable*. McGraw-Hill, Inc.
- [5] Baker, I. N., (1968) “Repulsive fixpoints of entire functions”. *Math. Zeitschr.*, **104**, 252-256.
- [6] ———, (1976) “An entire function which has wandering domains”. *The Journal of the Australian Math. Soc. (Series A)*, **22**, 173-176.
- [7] Baker, I. N. and Domínguez, P., (2000) “Residual Julia sets”. *J. Analysis*, **8**, 121-137.
- [8] Baker, I. N., Kotus, J., and Lü, Y., (1991) “Iterates of meromorphic functions I”. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, **11**, 241-248.
- [9] ———, (1991) “Iterates of meromorphic functions III: Preperiodic domains”. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, **11**, 603-618.
- [10] ———, (1992) “Iterates of meromorphic functions IV: Critical finite functions”. *Result in Math.*, **22**, 651-656.

-
- [11] Baker, I. N., Domínguez, P. and Herring, M. E., (2001) “Dynamics of functions meromorphic outside a small set”. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **21**(3), 647-672.
- [12] ———, (2004) “Functions meromorphic outside a small set: Completely invariant domains”. *Complex Variables*, **49**(2), 95-100.
- [13] Beardon, A., (1991) “The components of a Julia set”. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ, Serie A. I. Mathematica*, **16**, 173-177.
- [14] Berge, C., (1963) *Topological spaces including a treatment of multi-valued vector spaces and convexity*. Oliver & Boyd Edinburgh and London.
- [15] Bergweiler, W. and Eremenko, A. (1995) “On the singularities of the inverse to a meromorphic function of finite order”. *Rev. Mat. Iberoamericana*, **11**(2), 355-373.
- [16] Bolsch, A., (1996) “Repulsive periodic points of meromorphic function”, *Complex Variables Theory and Application*, **31**(1), 75-79.
- [17] ———, (1997) *Iteration of meromorphic functions with countably many singularities*. Dissertation, Berlin.
- [18] ———, (1999) “Periodic Fatou components of meromorphic functions”, *Bull. London Math. Soc.* , **31** (5), 519-522.
- [19] Conway, J. B., (1978) *Functions of one complex variable*. Graduate Texts in Mathematics. Springer Verlag.
- [20] Cremer, H., (1932) “Über die Schrödersche Funktionalgleichung und das Schwarzsche Eckenabbildungsproblem”, *Ber. Verh. Sächs, Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Kl.*, **84**, 291-324.
- [21] Domínguez, P., (1997) “Connectedness properties of Julia Sets of transcendental entire functions”, *Complex Variables*, **32**, 199-215.
- [22] ———, (1998) “Dynamics of transcendental meromorphic functions”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math.*, **23**, 225-250.

-
- [23] ———, (2010) “Residual Julia sets for meromorphic functions with countably many essential singularities”, *Journal of Difference Equations and Applications*, **16**, 519-522.
- [24] Domínguez, P. and Fagella, N., (2004) “Existence of Herman rings for meromorphic functions”, *Complex Variables*, **49**(12), 851-870.
- [25] ———, (2008) “Residual Julia sets for rational and transcendental functions”, *London Mathematical Society Lecture Notes Series. Transcendental Dynamics and Complex Analysis*, **348**, 138-164.
- [26] Domínguez, P. and Hernández, A., (2013) “Examples of simply and multiply connected Fatou sets for a class of meromorphic functions”, *British Journal of Mathematics and Computer Science*, **3**(2), 108-114.
- [27] Domínguez, P. and Hernández, I., (2013) “Conditions where the chaotic set has a non-empty residual Julia set for two classes of meromorphic functions”, *Applied Mathematics*, **4**, 18-21.
- [28] ———, (2015) “A study of the dynamics of the family $F_{\lambda,c,\mu}(z) = \lambda e^{1/(z^2+c)} + \mu$, where $\lambda, c, \mu \in \mathbb{C}$, $\lambda, c \neq 0$ ”, *Revisión en International Journal of Mathematics*.
- [29] Domínguez P. and Sienna G., (2010) “Double connected wandering domains for meromorphic functions”, *Complex Variables and Elliptic Equations*, **55**(4), 407-416.
- [30] Dugundji, J., (1966) *Topology*, Allyn and Bacon, Inc.
- [31] Epstein, A. L., (1993) *Towers of finite type complex analytic maps*. Ph. D. Thesis, C. U. N. Y.
- [32] Eremenko, A. E. and Lyubich, M. Y., (1990) “The dynamics of analytic transformations”, *Leningrad Math. J.*, **1**(3), 563-639.
- [33] ———, (1992) “Dynamical properties of some classes of entire functions”, *Ann. Inst. Fourier*, **42**, 989-1020.
- [34] Fatou, P., (1919) “Sur les équations fonctionnelles”, *Bull Soc. Math. France*, **47**, 161-271.

-
- [35] ———, (1920) “Sur les équations fonctionnelles, II”, *Bull Soc. Math. France*, **48**, 33-94.
- [36] ———, (1926) “Sur l’itération des fonctions transcendentes entières”, *Acta Math.*, **47**, 337-370.
- [37] Gamelin, T. W. (2000) *Complex analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer.
- [38] Herman, M. (1979) “Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations”, *Math. IHES*, **49**, 5-234.
- [39] Iversen, F., (1914) “Recherches sur les fonctions inverses des fonctions mèromorphes, Ph D. Thesis. Helsingfors.
- [40] Julia, G., (1918) “Sur Iteration des fonctions rationnelles”, *J. Math Pure Appl.*, **7**(4), 47-245.
- [41] Karlin, S. and McGregor, J., (1968) “ Embedding Iterates of analytic functions with two fixed points into continuous groups”, *Transactions of the American Mathematical Society*, **132**(1), 137-145.
- [42] Keen, L. and Kotus, J. (1997) “Dynamics of the family $\lambda \tan z$ ”, *Conformal Geom. Dynam.*, **1**, 28-57.
- [43] Markushevich, I. A., (1977) *Theory of functions of an complex variable*, volumen 1. Chelsea Publishing Company.
- [44] McMullen, C., (1988) *Automorphisms of rational maps, holomorphic functions an Moduli I MSRI Publications 10*. Springer Verlag, New York.
- [45] Morgan-II, J. C., (1990) *Point set theory, Monographs and textbooks in pure and applied mathematics*, Número 131. Marcel Dekker, Inc.
- [46] Morosawa, S., (1997) “On the residual Julia sets of rational functions”, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **17**(1), 205-210.
- [47] Morosawa, S.; Nishimura, Y.; Taniguchi, M., and Ueda T., (2000) *Holomorphic dynamics*, Cambridge University Press.

-
- [48] Munkres, J. R., (2000) *Topology*. Second Edition, Prentice Hall.
- [49] Nevanlinna, R., (1970) *Analytic functions, Die Grundlehren der mathematischen wissenschaften einzeldarstellungen*, Número 162. Springer Verlag, Göttingen.
- [50] Nevanlinna, R., and Paatero, V., (1969) *Introduction to Analysis complex*. Addison Wesley Publishing Company.
- [51] Newman, M. H. A., (1985) *Elements of the Topology of plane sets of points*. Greenwood Press.
- [52] Noshiro, K., (1960) *Cluster sets, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Número 2. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg.
- [53] Palka, B. P., (2000) *Theory of functions of a complex variable*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer.
- [54] Pommerenke, C., (1992) *Boundary Behaviour of Conformal Maps, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, Número 299. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg GmbH.
- [55] Qiao, J. Y., (1994) "The Julia set of the function $z \rightarrow z \exp(z + \mu)$ ", *Chinese Sci. Bulletin* , **39**(7), 529-533
- [56] Qiao, J. Y., (1995) "The buried points on the Julia sets of rational and entire functions", *Sci. China Ser. A*, **38**, 1409-1419.
- [57] Schiff, J. L., (1993) *Normal Families*. Springer-Verlag.
- [58] Siegel, C. L., (1942) "Iteration of analytic function", *Ann. of Math.*, **103**, 607-612.
- [59] Sullivan, D., (1985) "Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I: Solutions of the Fatou-Julia problem on wandering domains", *Ann. of Math.*, **122**(2), 401-418.
- [60] Tsuji, M., (1959) *Potential theory in modern function theory*. Chelsea Publishing Company, New York, N. Y.