

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA  
DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO  
MATEMÁTICAS



ESTRUCTURA DE NORMA DE  
GRAVEDAD LINEALIZADA CON  
DIMENSIONES EXTRA COMPACTAS

Tesis presentada para obtener el grado de Maestro en  
Ciencias

Presenta: Mauro Huerta Leal

**Asesor:** Dr. J. Jesús Toscano Chávez

Diciembre 2020



**Título:** Estructura de Norma de Gravedad  
Linealizada con Dimensiones Extra Compactas.

**Estudiante:** Mauro Huerta Leal

COMITÉ

---

Dra. Ana Aureila Avilez López  
Presidente

---

Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada  
Secretario

---

Dr. Alberto Escalante Hernández  
Vocal

---

Dr. Arturo Fernández Téllez  
Suplente

---

Dr. J. Jesús Toscano Chávez  
Asesor



# Agradecimientos

*Dedicado a la memoria de mi abuelo, Héctor Leal Hermoso.*

Agradezco a mi asesor, el Dr. Jesús Toscano Chávez, por su paciencia y su guía, sin ellas no podría haber llegado a ningún sitio. Gracias a mi familia, en especial a mis padres, quienes me han apoyado durante el curso de todo el posgrado. A mi novia Gloria, por permitirme seguir a su lado y apoyarme en cada paso. Gracias al Conacyt, por el apoyo económico brindado para el desarrollo y realización de esta tesis.



# Resumen

En este trabajo se presenta un estudio de la teoría linealizada de la gravedad sin masa con  $n$  dimensiones extra, en analogía con el procedimiento empleado en el contexto de las teorías de Yang-Mills extradimensionales. Gravedad linealizada tiene parámetros de norma vectoriales, en contraposición con aquellos hallados en YM, los cuales son escalares. Esto da pie a una clasificación diferente de objetos, los cuales son de diversos tipos: tensoriales  $h_{\mu\nu}^{(0)}, h_{\mu\nu}^{(m)}$ , vectoriales  $h_{\mu\bar{\nu}}^{(m)}$  y escalares  $h_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)}$ . Así, el contenido de pseudo-bosones de Goldstone de la teoría también cambia: se tiene un pseudo-bosón vectorial  $h_{\mu G}^{(m)}$  y un pseudo-bosón escalar  $\psi_G^{(m)}$ , los cuales son absorbidos a la escala de compactificación con la ayuda de una norma unitaria, por los campos de norma tensoriales  $h_{\mu\nu}^{(m)}$  y vectoriales  $h_{\mu\bar{n}}^{(m)}$ . Finalmente se construye el propagador de las excitaciones de Kaluza-Klein  $h_{\mu\nu}^{(m)}$ , las cuales constituyen un sector análogo a gravedad masiva.

**Palabras Clave:** gravedad linealizada, gravedad masiva ocultando de simetrías, Kaluza-Klein, pseudo-bosones de Goldstone.





# Introducción

Es ya conocido que la implementación de más de cuatro dimensiones es necesaria para la correcta descripción de teorías a la escala de Planck. Este trabajo está basado principalmente en el artículo *Symmetry in the extra-dimensional Yang-Mills theory and its Kaluza-Klein effective description*, [1], en donde se analiza la teoría de Yang-Mills pura en dimensiones extra a nivel clásico, así como en el artículo titulado *A gauge-invariant approach to asymptotic freedom in Yang-Mills theories with universal extra dimensions*, [2], aquí se estudia la teoría anteriormente mencionada a nivel cuántico. Así, en este trabajo de tesis se presenta el estudio de una teoría de gravedad linealizada con  $n$  dimensiones extra.

Gravedad linealizada surge de considerar que la métrica, el campo dinámico en la teoría general de la relatividad, en cierto límite de campo débil, se descompone como una perturbación 2-tensorial simétrica  $h_{\mu\nu}$  más la métrica de Minkowski; esto conlleva a la modificación de la acción de Einstein-Hilbert, de manera que se llega al principio variacional cuya lagrangiana, descubierta por Fierz y Pauli en 1939 [3] en la búsqueda de una ecuación de campo para un campo de espín 2, describe la dinámica del campo antes mencionado. Esta descripción podía dotar de masa, o no, a la perturbación. Sin embargo, diversos problemas relacionados principalmente con la renormalización de la teoría fueron hallados. Hendrik van Dam y Martinus Veltman ya recalaban los problemas que esta teoría tenía en el límite de masa igual a cero, pues no se obtenían los resultados predichos por relatividad general [4]. Sin embargo, estos y otros problemas (ghost de Boulware-Deser [5]) fueron resueltos en el contexto de gravedad linealizada sin ghosts, en un trabajo de de Rham y Gabadadze [6].

Sin embargo, el objetivo de este trabajo de tesis no es analizar a fondo los problemas que tiene la teoría linealizada en cualquiera de sus dos modalidades originales, masiva o no masiva. El objetivo de esta tesis es implementar el procedimiento exitosamente usado en la compactificación de teorías de Yang-Mills extradimensionales [1, 2] en la teoría linealizada obtenida a partir de la lagrangiana de Fierz-Pauli, esto en pos de observar los alcances que tiene este proceso, basado en el mecanismo de Kaluza-Klein.

Así, partiendo de una versión de la lagrangiana de FP en dimensiones extra, válida a una escala energética mucho mayor a  $R^{-1}$ , conocida como escala de compactificación, en donde  $R$  el tamaño promedio de las dimensiones extra, las cuales en este régimen se verán bajo todo propósito práctico como infinitas, de forma tal que pueden tratarse en igualdad de condiciones que las dimensiones usuales. Se ocultará la simetría que rige la teoría, i.e. aquella brindada por el grupo de Poincaré extendido  $ISO(1, 3 + n)$ , en la simetría estándar, bajo la cual es invariante la teoría linealizada usual y que está dada por el grupo inhomogéneo usual  $ISO(1, 3)$ . Es así como se construye una teoría efectiva bajo esta perspectiva, válida para un régimen energético del orden de la escala  $R^{-1}$ , y se analizan los objetos que se obtienen en el proceso, así como el significado de los mismos y sus interacciones. Además, se resaltan las diferencias y similitudes que guarda esta teoría con aquella desarrollada en el contexto de Yang-Mills pura.

La estructura del contenido de este trabajo de tesis es la siguiente: en el primer capítulo se encuentra una revisión, con el detalle necesario, de la teoría de Yang-Mills en dimensiones extra [1, 2]. Se discuten los mapeos que ocultan la simetría, la escisión de las transformaciones de norma, el mecanismo de generación de masa de Kaluza-Klein y la implementación de la norma estándar. Por otro lado, en el capítulo dos se discute la teoría linealizada de la gravedad: la lagrangiana de Fierz-Pauli, caso no-masivo, y las transformaciones de norma. Finalmente, en el tercer capítulo se desarrolla el trabajo original de la tesis: un análisis desde el punto de vista de las dimensiones extra universales, para la teoría de gravedad linealizada. Se oculta la simetría, teniendo en cuenta que hay diferentes tipos de objetos en esta teoría. Posteriormente se estudian las transformaciones de norma, piedra angular en la clasificación de los objetos hallados en el proceso previo. Cada sector emergente ante el ocultamiento es analizado, además se implementa el mecanismo de Kaluza-Klein para generar las masas necesarias y se implementa la norma unitaria en este caso.

# Índice general

<b>1. Compactificación de la teoría de Yang-Mills</b>	<b>1</b>
1.1. El mecanismo de Englert-Higgs (EHM) . . . . .	2
1.2. Teorías de Yang-Mills con dimensiones extra . . . . .	3
1.3. El espectro de masas . . . . .	8
<b>2. Gravedad linealizada</b>	<b>17</b>
2.1. Lagrangiana de Fierz-Pauli . . . . .	17
2.2. Constricciones de la teoría linealizada . . . . .	19
<b>3. Compactificación de Gravedad Linealizada</b>	<b>23</b>
3.1. Gravedad Linealizada con dimensiones extra . . . . .	24
3.2. El espectro de masas . . . . .	28
3.3. Norma Unitaria . . . . .	32
3.4. Propagador de las excitaciones de Kaluza-Klein . . . . .	33
<b>A. Espectro de masas escalar</b>	<b>41</b>
A.1. Nulidad de las matrices de masa . . . . .	42



# 1

## Compactificación de la teoría de Yang-Mills

En esta sección se estudia una teoría de Yang-Mills sin campos de materia en un espacio-tiempo de fondo extendido, con el objetivo de esclarecer las ideas relacionadas con los procesos de compactificación de dimensiones extra. Así, si el punto de partida es la teoría de Yang-Mills pura sobre un espacio  $\mathcal{M}^d = \mathcal{M}^4 \times \mathcal{N}^n$ , siendo esta última una variedad euclídeana  $n$ -dimensional no compacta, la cual será denominada *variedad extra* [1, 2, 7]. Adicionalmente, se requerirá que la teoría sea invariante ante  $ISO(1, 3+n)$ , denominado *grupo de Poincaré extendido* y ante el grupo de norma  $SU(N, \mathcal{M}^d)$ . El tamaño promedio de las dimensiones extra,  $R$ , es demasiado grande comparado con las escalas de distancia a las que es válida esta teoría, de manera que pueden tomarse efectivamente como infinitas, y considerarse en igualdad de condiciones que las dimensiones usuales. A energías muy por arriba de la escala de compactificación  $R^{-1}$  la simetría reinante es  $\{ISO(1, 3+n), SU(N, \mathcal{M}^d)\}$ , denominada en lo sucesivo como *simetría extendida*. Así, si se requiere describir la teoría a una escala energética menor, en donde la compacidad de la variedad extra ya es evidente, es necesario ocultar la simetría extendida en la *simetría estándar*,  $\{ISO(1, 3), SU(N, \mathcal{M}^4)\}$  [1, 2, 8].

Para poder hallar un esquema de compactificación válido para la variedad extra, es necesario en primer lugar definir un mapeo canónico que permita reclasificar objetos covariantes ante la simetría extendida en objetos que se transformen bajo la simetría usual. El hecho de que el grupo  $SU(N, \mathcal{M}^d)$  difiera de  $SU(N, \mathcal{M}^4)$  sólo en el número de conexiones es crucial, pues aquellos objetos que no representen campos de norma desde la perspectiva estándar aparecen como representaciones tensoriales del grupo  $SU(N, \mathcal{M}^4)$ . Un segundo mapeo deberá implementarse para poder retirar todo papel dinámico de la variedad extra  $\mathcal{N}^n$ , pues sólo así es posible construir una teoría efectiva bajo la simetría estándar. Luego, en analogía con sistemas que presentan rompimiento espontáneo de simetría (SSB), debe implementarse algún instrumento que dote de masa

a estos campos. Todo campo nuevo que emerge en el proceso de ocultamiento de simetrías deberá obtener término masivo a esta nueva escala. Finalmente, la estructura de norma de la teoría no debe perderse; las transformaciones de norma se dividen en dos: las transformaciones estándar (SGT's), relacionadas con los parámetros de norma del grupo  $SU(N, \mathcal{M}^4)$  y las transformaciones no-estándar (NSGT's), dependientes de parámetros que no pertenecen al grupo usual. [1, 7]

Así pues, el objetivo principal de esta sección será establecer un esquema de ocultamiento de simetrías que permita pasar de la simetría extendida, respecto a la cual nuestra teoría es invariante a escalas energéticas mucho más grandes que  $R^{-1}$ , la escala de compactificación, a la simetría usual, la cual gobierna la teoría a escalas en donde la compacidad de las dimensiones extra es evidente. En el proceso, un mecanismo para dotar de masa a los campos que aparecen en representaciones tensoriales del grupo usual deberá de aparecer. Es importante hacer hincapié en el hecho de que no estamos pasando de una teoría a otra, sino que la misma teoría se observa desde dos perspectivas diferentes, lo cual es un asunto meramente relacionado con la escala energética a la que se trabaje.

### 1.1. El mecanismo de Englert-Higgs (EHM)

En pos de brindar un contexto adecuado para describir la compactificación de las teorías de Yang-Mills en dimensiones extra, es meritorio hablar brevemente acerca de un par de fenómenos que ocurren en el contexto de las teorías de campo: el ocultamiento de una simetría continua y, por otro lado, el rompimiento espontáneo de una simetría (SSB).

Supóngase que cierta teoría es gobernada por algún grupo  $G$ , un *grupo de norma*, a energías muy por arriba de la escala  $v$ . Los grados de libertad de esta teoría estarán representados por las conexiones del grupo, *campos de norma*, y por representaciones tensoriales del mismo, *campos de materia*. Sin embargo, la simetría de norma admite, a nivel cuántico, términos de masa sólo para campos de materia [1, 9].

Supóngase que  $H \subseteq G$  es un subgrupo de  $G$ . Para poder dotar de masa a algunos de los campos que aparecen como conexiones desde la perspectiva de  $G$ , lo cual arruinaría invariancia de norma en este contexto, es necesario visualizar a la teoría desde la perspectiva del subgrupo  $H$ , pues en ella algunas de las conexiones de  $G$  aparecerán como campos de materia: aquellas que no resultan ser campos de norma desde la perspectiva del subgrupo  $H$ , i.e. no son conexiones del mismo.

Para lograr este cambio de perspectiva es necesario establecer un mapeo canónico entre objetos del grupo  $G$  y objetos del subgrupo  $H$ . El hecho crucial, como se mencionó, es que  $G$  tiene más conexiones que  $H$ , por lo que algunas de estas deberán de transformarse en representaciones tensoriales de  $H$ .

Este proceso conforma el ocultamiento de la simetría establecida por el grupo  $G$  en aquella dictada por su subgrupo  $H$ . Empero, a pesar de que este es crucial para que surjan términos masivos relacionados con las conexiones de  $G$  que no resultan ser campos de norma desde la perspectiva de  $H$ , no proporciona per se estos términos.

Para completar el esquema propuesto, es necesario romper la simetría descrita por  $G$ . Esto se lleva a cabo al considerar un potencial escalar, el cual induce un mínimo de energía con degeneración infinita, en el caso más sencillo se trata de una hipersfera en donde todos los puntos de la superficie son equivalentes y se relacionan entre ellos debido a la simetría  $G$ .

Se dirá que la simetría descrita por  $G$  se rompe en aquella descrita por su subgrupo  $H$  a la escala  $v$ , cuando se elige un punto en particular de la hipersfera referida, caracterizado por el vector  $\Phi_0$ , tal que es invariante ante  $H$ , esto es: los generadores  $T^{\bar{a}}$  de  $H$  aniquilan a  $\Phi_0$ . Por otro lado, el resto de los generadores de  $G$  que no generan a  $H$ ,  $T^{\hat{a}}$ , no aniquilarán al vector que rompe la simetría, es decir  $T^{\hat{a}}\Phi_0 \neq 0$ . En este sentido se dice que estos generadores están rotos.

Ahora bien, si la teoría es global, i.e.  $G$  no es de norma, entonces por cada generador roto  $T^{\hat{a}}$  de  $G$ , existe una partícula sin masa llamada *bosón de Goldstone*. Este es el teorema de Goldstone.

Por otro lado, si efectivamente el grupo  $G$  es de norma, por cada generador roto  $T^{\hat{a}}$  se tiene un campo de norma asociado, el cual recibirá masa a la escala  $v$ .

Así, es posible concluir que la descripción de cierta teoría de campo es posible bajo la perspectiva del grupo continuo  $G$  o aquella referida a su subgrupo  $H$ , dependiendo únicamente de la escala energética a la que se trabaja. A energías del orden de  $v$  se usará la descripción proporcionada por el grupo  $H$ , en tanto que a energías mucho mayores se deberá emplear aquella concerniente al grupo  $G$ . Esta última simetría no se pierde durante el proceso de ocultamiento, pues el mapeo canónico que permite enviar campos que se transforman ante  $G$  a objetos invariantes bajo  $H$  siempre puede ser invertido.

## 1.2. Teorías de Yang-Mills con dimensiones extra

Se propone una teoría invariante ante los grupos que conforman la previamente denominada simetría extendida. Sin embargo, esta resulta ser no-renormalizable en el sentido de Dyson, por lo que la acción correspondiente se escribe como [1, 7]:

$$S_{\text{eff}}[\mathcal{A}_M^a] = \int d^4x d^n \bar{x} \mathcal{L}_{4+n}(\mathcal{F}_{MN}^a, \mathcal{D}_A^a \mathcal{F}_{MN}^a, \dots) \quad (1.1)$$

en esta expresión, la densidad lagrangiana está dada por

$$\mathcal{L}_{4+n} = -\frac{1}{4}\mathcal{F}_{MN}^a\mathcal{F}_a^{MN} + \sum_d \frac{\lambda_d}{\Lambda^d}\mathcal{L}^{d+d}(\mathcal{F}_{MN}^a, \mathcal{D}_A^a\mathcal{F}_{MN}^a, \dots). \quad (1.2)$$

Es claro que el primer término de la expresión anterior es una extensión a dimensiones extra de la teoría de Yang-Mills pura. En cuanto a los otros términos, se trata de interacciones de dimensión canónica mayor a  $d$ , [1], los cuales son suprimidos por potencias de  $\Lambda$  y no serán relevantes en lo sucesivo.

Respecto al primer término de (1.2), es importante notar que está compuesto a partir del objeto  $\mathcal{F}_{MN}^a$ , el cual resulta ser una curvatura, definida de la siguiente manera:

$$\mathcal{F}_{MN}^a(x, \bar{x}) = \partial_M\mathcal{A}_N^a(x, \bar{x}) - \partial_N\mathcal{A}_M^a(x, \bar{x}) + g_d f^{abc}\mathcal{A}_M^b(x, \bar{x})\mathcal{A}_N^c(x, \bar{x}) \quad (1.3)$$

siendo  $g_d$  y  $f^{abc}$  la constante de acoplamiento y las constantes de estructura de  $SU(N, \mathcal{M}^d)$ , respectivamente.

En (1.3) aparecen los campos de norma del grupo  $SU(N, \mathcal{M}^d)$ , los cuales obedecen las siguientes transformaciones de norma:

$$\delta\mathcal{A}_M^a(x, \bar{x}) = \mathcal{D}_M^{ab}\alpha^b(x, \bar{x}) \quad (1.4)$$

en donde  $\mathcal{D}_M^{ab} = \delta^{ab}\partial_M - g_d f^{abc}\mathcal{A}_M^c$  es la derivada covariante en la representación adjunta del grupo y  $\alpha^a$  son los parámetros de norma de  $SU(N, \mathcal{M}^d)$ . Además, las curvaturas obedecen la siguiente regla de transformación:

$$\delta\mathcal{F}_{MN}^a(x, \bar{x}) = g_d f^{abc}\mathcal{F}_{MN}^b(x, \bar{x})\alpha^c(x, \bar{x}). \quad (1.5)$$

De esta manera, la acción relevante estará dada por:

$$S[\mathcal{A}_M^a] = -\frac{1}{4}\int d^4x d^n\bar{x}\mathcal{F}_{MN}^a(x, \bar{x})\mathcal{F}_a^{MN}(x, \bar{x}). \quad (1.6)$$

De manera similar a lo estudiado en la primera parte de este capítulo, se buscará analizar la teoría en regímenes de energía menores, del orden de  $R^{-1}$ , por lo que será necesaria la implementación de un mapeo canónico que permita ir de la simetría extendida a algún subgrupo de esta, compuesta por subgrupos de  $ISO(1, 3+n)$  y  $SU(N, \mathcal{M}^d)$ .

En primer lugar, es notable que  $SO(1, 3)$  y  $SO(n)$  son subgrupos de  $SO(1, 3+n)$ . Así, los campos de norma  $\mathcal{A}_M^a$  pueden ser mapeados a objetos covariantes respecto a los subgrupos del grupo de Lorentz extendido, i.e. el *primer mapeo* esquemáticamente implica



$$SO(1, 3 + n) \quad \longrightarrow \quad \{SO(1, 3), SO(n)\}$$

así, ante este mapeo los objetos de interés resultan transformados de la siguiente manera:

$$\mathcal{A}_M^a(x, \bar{x}) \quad \longrightarrow \quad \{\mathcal{A}_\mu^a(x, \bar{x}), \mathcal{A}_{\bar{\mu}}^a(x, \bar{x})\} \quad (1.7)$$

$$\mathcal{F}_{MN}^a(x, \bar{x}) \quad \longrightarrow \quad \{\mathcal{F}_{\mu\nu}^a(x, \bar{x}), \mathcal{F}_{\mu\bar{\nu}}^a(x, \bar{x}), \mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^a(x, \bar{x})\}. \quad (1.8)$$

A partir de este mapeo, la acción en (1.6) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} S[\mathcal{A}_\mu^a, \mathcal{A}_{\bar{\mu}}^a] = & -\frac{1}{4} \int d^4x d^n\bar{x} [\mathcal{F}_{\mu\nu}^a(x, \bar{x})\mathcal{F}_a^{\mu\nu}(x, \bar{x}) + 2\mathcal{F}_{\mu\bar{\nu}}^a(x, \bar{x})\mathcal{F}_a^{\mu\bar{\nu}}(x, \bar{x}) \\ & + \mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^a(x, \bar{x})\mathcal{F}_a^{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x, \bar{x})]. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Este primer mapeo también afecta a las transformaciones (1.4) y (1.5), las cuales resultan trivialmente divididas en dos ecuaciones, una para  $\mathcal{A}_\mu^a$  y otra para  $\mathcal{A}_{\bar{\mu}}^a$ , y tres ecuaciones, una para  $\mathcal{F}_{\mu\nu}^a$ , otra para  $\mathcal{F}_{\mu\bar{\nu}}^a$  y una más para  $\mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^a$ , respectivamente. Evidentemente, la simetría de  $SO(1, 3 + n)$  ha sido ocultada exitosamente, pues (1.9) es invariante ante los subgrupos de este. Más aún, como puede verse en [7], es muy sencillo elevar tal mapeo de punto a un mapeo canónico.

De cualquier manera, la acción (1.9) sigue siendo manifiestamente gobernada por el grupo de norma  $SU(N, \mathcal{M}^d)$ . Para poder concluir este proceso de ocultamiento de la simetría extendida, debe retirarse todo papel dinámico a la variedad extra, i.e.  $\bar{x}$  debe dejar de etiquetar grados de libertad.

Para lograr esto, debe proponerse un segundo mapeo, que retire cualquier papel dinámico al grupo  $ISO(n)$ . Para esto, se supondrá que ya se ha establecido un esquema de compactificación para la variedad extra  $\mathcal{N}^n$ . Además, se introduce un conjunto completo de funciones ortogonales definidas en esta variedad,  $\{f^{(m)}(\bar{x})\}$ , respecto al cual se pretende obtener expansiones en series de Fourier para cada campo. Sin embargo, debido a que en la teoría de Yang-Mills pura no existen los campos escalares [1], se considera que la función constante, denotada por  $f^{(0)}$ , debe formar parte de este conjunto de funciones.

Se debe asegurar que se están mapeando correctamente los objetos que hasta ahora siguen siendo invariantes ante  $SU(N, \mathcal{M}^d)$ . En pos de esto se establece el siguiente

**Postulado:** Todo campo con contraparte estándar es par ante el intercambio  $\bar{x} \rightarrow -\bar{x}$ . Aquellos objetos que no tengan contraparte estándar serán impares ante dicho intercambio. Esto es

$$\mathcal{A}_\mu^a(x, -\bar{x}) = +\mathcal{A}_\mu^a(x, \bar{x}), \quad \mathcal{A}_{\bar{\mu}}^a(x, -\bar{x}) = -\mathcal{A}_{\bar{\mu}}^a(x, \bar{x}). \quad (1.10)$$

De esta manera, en vistas de lo anterior, será necesaria la separación del conjunto completo de funciones ortogonales en su parte par y su parte impar, para obtener las correctas expansiones en serie de los campos antes mencionados; esto es:  $\{f_E^{(0)}, f_E^{(m)}(\bar{x}), f_O^{(m)}(\bar{x})\}$ , en donde se pone de manifiesto que la función constante es par respecto al intercambio  $\bar{x} \rightarrow -\bar{x}$ .

Con todo esto en consideración, se establece el *segundo mapeo*, de forma tal que las expansiones para los objetos invariantes bajo la simetría de Lorentz estándar y los parámetros de norma son:

$$\mathcal{A}_\mu^a(x, \bar{x}) = f_E^{(0)} A_\mu^{(0)a}(x) + \sum_{(m)} f_E^{(m)}(\bar{x}) A_\mu^{(m)a}(x) \quad (1.11)$$

$$A_\mu^a(x, \bar{x}) = \sum_{(m)} f_O^{(m)}(\bar{x}) A_\mu^{(m)a}(x) \quad (1.12)$$

$$\alpha^a(x, \bar{x}) = f_E^{(0)} \alpha^{(0)a}(x) + \sum_{(m)} f_E^{(m)}(\bar{x}) \alpha^{(m)a}(x). \quad (1.13)$$

Así, respecto a lo anterior, los grados de libertad quedan caracterizados por los campos  $\{A_\mu^{(0)}, A_\mu^{(m)}, A_\mu^{(m)}\}$ , en tanto que las funciones del conjunto completo ya no representan grados de libertad, con lo que se ha retirado el papel dinámico que las coordenadas extra jugaban, estas pueden ser integradas a nivel acción.

Este mapeo se puede reconocer como canónico fácilmente, [7]. Explícitamente:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{A}_\mu^a(x, \bar{x}), \Pi_\nu^b(x', \bar{x}')\} &= \delta_{ab} \delta_{\mu\nu} \delta(x - x') \delta(\bar{x} - \bar{x}') \\ \Rightarrow \{A_\mu^{(m)a}(x), \pi_\nu^{(n)b}(x)\} &= \delta_{ab} \delta_{\mu\nu} \delta^{(mn)} \delta(x - x'). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Además, las transformaciones canónicas deben modificarse ante la acción de este segundo mapeo. Su forma puede ser apreciada a continuación:

$$\delta A_\mu^{(0)a}(x) = \mathcal{D}_\mu^{(0)ab} \alpha^{(0)b}(x) + g f^{abc} \sum_{(m)} A_\mu^{(m)b}(x) \alpha^{(m)c}(x) \quad (1.15)$$

$$\delta A_\mu^{(m)a}(x) = g f^{abc} A_\mu^{(m)b}(x) \alpha^{(0)c}(x) + \sum_{(r)} \mathcal{D}_\mu^{(mr)ab} \alpha^{(r)b}(x) \quad (1.16)$$

$$\delta A_\mu^{(m)a}(x) = g f^{abc} A_\mu^{(m)b}(x) \alpha^{(0)c}(x) - \sum_{(r)} \mathcal{D}_\mu^{(mr)ab} \alpha^{(r)b}(x) \quad (1.17)$$

en las ecuaciones anteriores, aparece el objeto  $\mathcal{D}_\mu^{(0)ab} = \delta^{ab} \partial_\mu - g f^{abc} A_\mu^{(0)c}(x)$ , el cual puede ser reconocido como la derivada covariante en la representación adjunta de  $SU(N, \mathcal{M}^4)$  si se admite primero que los  $\alpha^{(0)}$  son los parámetros de

norma concernientes a este grupo de norma estándar. Además, aparecen otros objetos, los cuales se definen de la siguiente manera:

$$\mathcal{D}_\mu^{(mr)ab} = \delta^{(mr)} \mathcal{D}_\mu^{(0)ab} - gf^{abc} \sum_{(s)} \Delta_{(mrs)} A_\mu^{(s)c}(x) \quad (1.18)$$

$$\mathcal{D}_{\bar{\mu}}^{(mr)ab} = -\delta^{ab} \int d^n \bar{x} f_O^{(m)}(\bar{x}) \partial_{\bar{\mu}} f_E^{(r)}(\bar{x}) + gf^{abc} \sum_{(s)} \Delta'_{(msr)} A_{\bar{\mu}}^{(s)c}(x). \quad (1.19)$$

En las expresiones (1.18) y (1.19) se puede apreciar la aparición de objetos denotados por los símbolos  $\Delta_{(mrs)}$  y  $\Delta'_{(msr)}$ , los cuales resultan ser integrales de tres funciones del conjunto completo antes definido. Estas integrales pueden hallarse explícitamente en [1, 2, 7]. Además, en (1.19) se observa una integral peculiar en el primer término, la cual no puede resolverse sin antes revelar la naturaleza de las funciones del conjunto completo.

Por otro lado, empleando criterios que dependen únicamente de los parámetros  $\{\alpha^{(0)a}, \alpha^{(m)a}\}$  es posible categorizar a las transformaciones resultantes en las expresiones (1.15), (1.16) y (1.17). Al identificar a  $\alpha^{(0)a}$  como los parámetros de norma del grupo  $SU(N, \mathcal{M}^4)$ , y demandar que  $\alpha^{(m)a} = 0$ , resultan las *transformaciones de norma estándar*, o SGT's:

$$\delta_s A_\mu^{(0)a}(x) = \mathcal{D}_\mu^{(0)ab} \alpha^{(0)b}(x) \quad (1.20)$$

$$\delta_s A_\mu^{(m)a}(x) = gf^{abc} A_\mu^{(m)b}(x) \alpha^{(0)c}(x) \quad (1.21)$$

$$\delta_s A_{\bar{\mu}}^{(m)a}(x) = gf^{abc} A_{\bar{\mu}}^{(m)b}(x) \alpha^{(0)c}(x). \quad (1.22)$$

A partir de estas es posible ver que los campos de norma de  $SU(N, \mathcal{M}^4)$  resultan ser los objetos  $A_\mu^{(0)a}$ , en tanto que de las ecuaciones (1.21) y (1.22) se aprecia que  $A_\mu^{(m)a}$  y  $A_{\bar{\mu}}^{(m)a}$  se transforman como campos de materia, i.e. en la representación adjunta del grupo.

Sin embargo, los parámetros  $\alpha^{(m)a}$  también definen transformaciones para los campos de interés. De hecho, estos parámetros están en relación uno-a-uno con los campos; de esto y del hecho de que el álgebra que satisfacen las constricciones de la teoría está dada por paréntesis de Poisson, preservados por ambos mapeos canónicos, [1], resulta que los  $A_\mu^{(m)a}$  también son campos de norma. Los parámetros  $\alpha^{(m)a}$  definen las *transformaciones de norma no-estándar*, o NSGT's:

$$\delta_{ns} A_\mu^{(0)a}(x) = g f^{abc} \sum_{(m)} A_\mu^{(m)b}(x) \alpha^{(m)c}(x) \quad (1.23)$$

$$\delta_{ns} A_\mu^{(m)a}(x) = \sum_{(r)} \mathcal{D}_\mu^{(mr)ab} \alpha^{(r)b}(x) \quad (1.24)$$

$$\delta_{ns} A_\mu^{(m)a}(x) = - \sum_{(r)} \mathcal{D}_\mu^{(mr)ab} \alpha^{(r)b}(x). \quad (1.25)$$

Esto completa el proceso de ocultamiento de la simetría extendida, compuesta por el grupo de Poincaré extendido  $ISO(1, 3 + n)$  y el grupo de norma  $SU(N, \mathcal{M}^d)$ , en la denominada simetría estándar, compuesta por los grupos de Poincaré usual  $ISO(1, 3)$  y el grupo unitario especial sobre el espaciotiempo de Minkowski  $SU(N, \mathcal{M}^4)$ .

### 1.3. El espectro de masas

Como se estableció previamente, los campos  $\{A_\mu^{(m)a}, A_{\bar{\mu}}^{(m)a}\}$  se transforman como campos de materia, por lo que en principio, desde esta perspectiva, es posible hallar términos de masa para estos. A continuación hablaré del mecanismo que permite hallar explícitamente estos términos para los campos mencionados.

En primer lugar, a partir del segundo mapeo, es posible escribir expansiones en serie respecto a las funciones del conjunto completo para las curvaturas. Esto es

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^a(x, \bar{x}) = f_E^{(0)} \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(0)a}(x) + \sum_{(m)} f_E^{(m)}(\bar{x}) \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(m)a}(x) \quad (1.26)$$

$$\mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^a(x, \bar{x}) = \sum_{(m)} f_O^{(m)}(\bar{x}) \mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)a}(x) \quad (1.27)$$

$$\mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^a(x, \bar{x}) = f_E^{(0)} \mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(0)a}(x) + \sum_{(m)} f_E^{(m)}(\bar{x}) \mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)a}(x). \quad (1.28)$$

Así, la acción de la teoría debe modificarse: su lagrangiana debe estar escrita en términos de los objetos que aparecen en el lado derecho de cada expresión obtenida en (1.26), (1.27), (1.28). A este nivel, será necesario integrar respecto a las coordenadas extra, lo cual es sencillo y se emplea únicamente la ortogonalidad del conjunto completo; tras esto, se llega a una lagrangiana efectiva con la forma:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{YM} = \mathcal{L}_{\text{v-v}}^{YM} + \mathcal{L}_{\text{v-s}}^{YM} + \mathcal{L}_{\text{s-s}}^{YM}. \quad (1.29)$$

Cada uno de los términos de los que se compone la lagrangiana efectiva se desglosa explícitamente a continuación:

$$\mathcal{L}_{\text{v-v}}^{YM} = -\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(0)a}(x)\mathcal{F}_a^{(0)\mu\nu}(x) - \frac{1}{4}\sum_{(m)}\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(m)a}(x)\mathcal{F}_a^{(m)\mu\nu}(x) \quad (1.30)$$

$$\mathcal{L}_{\text{v-s}}^{YM} = \frac{1}{2}\sum_{(m)}\mathcal{F}_{\mu\bar{\nu}}^{(m)a}(x)\mathcal{F}_{\bar{\nu}}^{(m)a\mu}(x) \quad (1.31)$$

$$\mathcal{L}_{\text{s-s}}^{YM} = -\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(0)a}(x)\mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(0)a}(x) - \frac{1}{4}\sum_{(m)}\mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)a}(x)\mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)a}(x). \quad (1.32)$$

A su vez, es necesario escribir qué tipo de objetos se pueden encontrar en las expresiones anteriores. En primer lugar, la ecuación (1.30) está compuesta por los objetos

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(0)a}(x) = F_{\mu\nu}^{(0)a}(x) + gf^{abc}\sum_{(m)}A_{\mu}^{(m)b}(x)A_{\nu}^{(m)c}(x) \quad (1.33)$$

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(m)a}(x) = \mathcal{D}_{\mu}^{(0)ab}A_{\nu}^{(m)b}(x) - \mathcal{D}_{\nu}^{(0)ab}A_{\mu}^{(m)b}(x) + gf^{abc}\sum_{(rs)}\Delta_{(mrs)}A_{\mu}^{(r)b}(x)A_{\nu}^{(s)c}(x) \quad (1.34)$$

la curvatura de la teoría de Yang-Mills usual puede reconocerse a partir de lo anterior, esta es  $F_{\mu\nu}^{(0)a} = \partial_{\mu}A_{\nu}^{(0)a} - \partial_{\nu}A_{\mu}^{(0)a} + gf^{abc}A_{\mu}^{(0)b}A_{\nu}^{(0)c}$ . Adicionalmente, en (1.34) se obtienen términos cinéticos para los campos de materia. De esta manera, (1.30) se asemeja al sector de Yang-Mills correspondiente al grupo electrodébil, en donde los campos  $A_{\mu}^{(m)a}$  juegan un papel similar al de los bosones  $W_{\mu}^{(0)\pm}$  [1].

Además, las expresiones (1.31) y (1.32) se construyen a partir de los objetos que se escriben a continuación:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mu\bar{\nu}}^{(m)a}(x) &= \mathcal{D}_{\mu}^{(0)ab} A_{\bar{\nu}}^{(m)b}(x) - \sum_{(r)} \int d^n \bar{x} f_O^{(m)}(\bar{x}) \partial_{\bar{\nu}} f_E^{(r)}(\bar{x}) A_{\mu}^{(r)a}(a) \\ &\quad + g f^{abc} \sum_{(rs)} \Delta'_{(mrs)} A_{\mu}^{(s)b}(x) A_{\bar{\nu}}^{(r)c}(x) \end{aligned} \quad (1.35)$$

$$\mathcal{F}_{\mu\bar{\nu}}^{(0)a}(x) = g f^{abc} \sum_{(m)} A_{\mu}^{(m)b}(x) A_{\bar{\nu}}^{(m)c}(x) \quad (1.36)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mu\bar{\nu}}^{(m)a}(x) &= \sum_{(r)} \left[ \delta_{\bar{\nu}\bar{\alpha}} \int d^n \bar{x} f_E^{(m)}(\bar{x}) \partial_{\bar{\mu}} f_O^{(r)}(\bar{x}) - \delta_{\bar{\mu}\bar{\alpha}} \int d^n \bar{x} f_E^{(m)}(\bar{x}) \partial_{\bar{\nu}} f_O^{(r)}(\bar{x}) \right] A_{\bar{\alpha}}^{(r)a}(x) \\ &\quad + g f^{abc} \sum_{(rs)} \Delta'_{(rsm)} A_{\mu}^{(r)b}(x) A_{\bar{\nu}}^{(s)c}(x) \end{aligned} \quad (1.37)$$

en donde se puede apreciar la aparición de términos que contienen a los objetos  $\partial_{\bar{\mu}} f_E^{(m)}$  y  $\partial_{\bar{\nu}} f_O^{(m)}$ , cantidades que resultan ser funciones impares y pares, respectivamente. Al acompañar a los campos de materia, generan términos lineales con posibilidad de ser términos de masa a nivel lagrangiana. La forma de estos objetos sugiere cómo proceder para develar la forma de las funciones del conjunto completo.

De lo anterior, es posible observar que  $\mathcal{L}_{v-s}^{YM}$  corresponde a un sector cinético, en tanto que  $\mathcal{L}_{s-s}^{YM}$  es el análogo de un potencial escalar. Como se mencionó, de aquí surgirán más adelante los términos de masa para  $A_{\mu}^{(m)a}$  y  $A_{\bar{\mu}}^{(m)a}$ , respectivamente.

Para poder dilucidar exactamente la forma de las funciones del conjunto completo, será imprescindible el uso de una observable relacionada con la variedad extra. Resulta que los  $(n+1)/2$  invariantes de Casimir para  $ISO(n)$  están disponibles para nuestros fines, [1]. De todos ellos, el operador relacionado con  $T(n)$ , el grupo de las traslaciones,  $\bar{P}^2 = P_{\bar{\mu}} P_{\bar{\mu}}$  cumplirá con lo buscado. De esta manera, considérese la base de kets generada por el operador hermitiano  $P_{\bar{\mu}}$ , i.e.  $\{|\bar{p}\rangle\}$ ; es sencillo observar que estos kets también son eigenkets del invariante de Casimir:

$$\bar{P}^2 |\bar{p}\rangle = \bar{p}^2 |\bar{p}\rangle \quad (1.38)$$

en donde se ha definido  $\bar{p}^2 = p_{\bar{\mu}} p_{\bar{\mu}}$ . Posteriormente, al considerar la base de kets de posición de la variedad extra,  $\{|\bar{x}\rangle\}$ , es posible contraer con ellos la ecuación (1.38), para obtener

$$\bar{\nabla} f(\bar{x}) = -\bar{p}^2 f(\bar{x}) \quad (1.39)$$

siendo  $\langle \bar{x} | \bar{p} \rangle \equiv f(\bar{x})$ . El espectro de esta ecuación diferencial es continuo en general, sin embargo, la variedad dentro de la cual están definidas las funciones

$f(\bar{x})$  es compacta, por lo que a continuación se mostrará que, en realidad, el espectro es discreto. Así, las soluciones de esta ecuación serán senos y cosenos  $n$ -dimensionales definidos sobre la variedad compactificada.

La naturaleza de la variedad compactificada surge de considerar que cada coordenada extra  $\bar{x}_i$  debe caracterizar una circunferencia  $S^1$ , cuyo radio en general será denotado por  $R_i$ , sin embargo, por cuestiones de sencillez en el tratamiento subsecuente se considerará que el radio de todas las circunferencias es igual a  $R$ . Posteriormente se regresará al caso general.

Lo anterior permite pensar en que la variedad podrá pensarse como el producto cartesiano de  $n$  copias de la circunferencia  $S^1$ , de manera tal que se obtendría un  $n$ -toro, es decir

$$S^1 \times \cdots \times S^1. \quad (1.40)$$

En el caso de una dimensión extra, el  $n$ -toro se reduce a la simple circunferencia  $S^1$ , la cual se entiende como un segmento de recta  $[0, 2\pi R]$  en el cual se han identificado las fronteras, conformando un punto común. Es conocido que los puntos de la variedad  $S^1$  son invariantes bajo la transformación

$$\bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_1 + 2\pi R, \quad (1.41)$$

lo cual se resume al enfatizar que la circunferencia posee una simetría llamada *periodicidad*: cualquier punto trasladado en  $2\pi R$  a lo largo de  $S^1$  no sufrirá cambios.

El 2-toro, por ejemplo, se construye al identificar las fronteras de una región plana cuadrada  $[0, 2\pi R] \times [0, 2\pi R]$ . Luego, la variedad posee periodicidad en sus dos direcciones, esto es

$$\bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_1 + 2\pi R, \quad \bar{x}_2 \rightarrow \bar{x}_2 + 2\pi R. \quad (1.42)$$

Lo anterior sigue cumpliéndose para casos de dimensión más alta: en general, el  $n$ -toro se puede construir al identificar las fronteras del  $n$ -cubo  $[0, 2\pi R] \times \cdots \times [0, 2\pi R]$ , y tendrá periodicidad en todas sus direcciones.

Sin embargo, esta descripción no es completa, pues todo objeto que ha surgido a partir del proceso de ocultamiento de la simetría extendida en la simetría estándar debe transformarse de alguna manera ante el intercambio  $\bar{x} \rightarrow -\bar{x}$ , es decir, deben tener *paridad* definida.

En la persecución de este fin, se introduce el grupo cíclico  $\mathbb{Z}_2$ , de manera tal que será posible construir la variedad  $S^1/\mathbb{Z}_2$  sobre la cual, como se verá en breve, la separación del conjunto completo de funciones respecto a su paridad, tiene sentido. La acción del grupo cíclico sobre la circunferencia asignará a cada punto  $\bar{x}_1$  de esta su antípoda  $-\bar{x}_1$ . En este sentido, la identificación de los puntos  $\bar{x}_1 = 0$  y  $\bar{x}_1 = \pi R$  con sus respectivas antípodas conlleva a los mismos puntos

de donde se parte. Para el caso del cero esto es evidente, sin embargo, para el otro punto se observa que

$$\pi R \rightarrow -\pi R = -\pi R + 2\pi R = \pi R. \quad (1.43)$$

Luego, los puntos  $\bar{x}_1 = 0$  y  $\bar{x}_1 = \pi R$  son inmutables ante la acción del grupo cíclico sobre la circunferencia. Por otro lado, ¿qué ocurre con aquellos puntos que están entre  $\pi R$  y  $2\pi R$ ? Estos se identificarán con sus antípodas de la siguiente manera

$$\pi R < \bar{x}_1 < 2\pi R \rightarrow -2\pi R < \bar{x}_1 < -\pi R \quad (1.44)$$

sin embargo, al considerar la noción de periodicidad de la circunferencia, de manera completamente análoga a aquello hecho en la ecuación (1.43), se verá que tal intervalo es nuevamente  $(0, \pi R)$ . Así, la variedad  $S^1/\mathbb{Z}_2$ , denominada *orbifold*, identificará cada punto de la circunferencia en el segmento de recta  $[0, \pi R]$ , en el cual las nociones de paridad y periodicidad están bien definidas.

En el caso general de  $n$  dimensiones, se tendrá un producto cartesiano conformado por  $n$  copias de este orbifold, así que es posible notar que la variedad compactificada es el  $n$ -cubo definido como se muestra:

$$\frac{S^1}{\mathbb{Z}_2} \times \dots \times \frac{S^1}{\mathbb{Z}_2} \quad (1.45)$$

el cual tiene paridad y periodicidad definidas en cada una de sus direcciones.

Este proceso de compactificación es análogo al hecho de imponer condiciones de frontera sobre las funciones del conjunto completo, las cuales toman valores dependen de las coordenadas de esta variedad. Así, se introduce

$$f_O^{(m)}(\bar{x}) \Big|_{\partial D} = 0 \quad (\text{condiciones de Dirichlet}) \quad (1.46)$$

$$\partial_{\bar{\mu}} f_E^{(m)}(\bar{x}) \Big|_{\partial D} = 0 \quad (\text{condiciones de Neumann}) \quad (1.47)$$

en donde  $\partial D$  es la frontera de la variedad, i.e. las “aristas” del orbifold. Además, las funciones del conjunto completo, como se mencionó, resultan ser senos y cosenos  $n$ -dimensionales; explícitamente:

$$f_O^{(m)}(\bar{x}) = f_O^{(m)}(\bar{p} \cdot \bar{x}) = \sin(\bar{p} \cdot \bar{x}) \quad (1.48)$$

$$f_E^{(m)}(\bar{x}) = f_E^{(m)}(\bar{p} \cdot \bar{x}) = \cos(\bar{p} \cdot \bar{x}). \quad (1.49)$$



Luego, de las condiciones de frontera impuestas sobre las funciones impares, es decir los  $n$ -senos, es posible obtener la relación

$$p_{\bar{\mu}}^{(m)} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{R_i} \delta_{\bar{\mu}, 4+i}, \quad (1.50)$$

en donde los  $m_i$  representan números enteros diferentes de cero. Esta última condición surge debido a que respecto a la función constante  $f^{(0)}$  se desarrollan los campos identificados como de norma desde la perspectiva estándar, y no reciben masa a la escala de compactificación.

De esta manera, el espectro de masas  $\bar{p}^2 = p_{\bar{\mu}} p_{\bar{\mu}}$  será denotado como se aprecia a continuación

$$m_{(m)}^2 = p_{\bar{\mu}}^{(m)} p_{\bar{\mu}}^{(m)}. \quad (1.51)$$

En la ecuación anterior,  $m_{(m)}$  denotará a la masa. Luego, es posible identificar, a partir de las últimas dos ecuaciones, que esta masa estará relacionada con los números enteros  $m_i$  y el radio  $R$  de la siguiente manera:

$$m_{(m)}^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{m_i}{R_i} \right)^2. \quad (1.52)$$

De esta manera, ante el esquema de compactificación y las nociones respecto al espectro de masas de la teoría, lo cual se estableció en los párrafos anteriores, las forma de las ecuaciones (1.35) y (1.37) debe modificarse, con lo que se llega a que

$$\mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)a}(x) = \mathcal{D}_{\bar{\mu}}^{(0)ab} A_{\bar{\nu}}^{(m)b}(x) + p_{\bar{\nu}}^{(m)} A_{\bar{\mu}}^{(m)a}(x) + g f^{abc} \sum_{(rs)} \Delta'_{(mrs)} A_{\bar{\mu}}^{(s)b}(x) A_{\bar{\nu}}^{(r)c}(x) \quad (1.53)$$

$$\mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)a}(x) = p_{\bar{\mu}}^{(m)} A_{\bar{\nu}}^{(m)a}(x) - p_{\bar{\nu}}^{(m)} A_{\bar{\mu}}^{(m)a}(x) + g f^{abc} \sum_{(rs)} \Delta'_{(rsm)} A_{\bar{\mu}}^{(r)b}(x) A_{\bar{\nu}}^{(s)c}(x). \quad (1.54)$$

A partir de estas expresiones será posible obtener términos de masa para las excitaciones de Kaluza-Klein del tipo  $A_{\bar{\mu}}^{(m)a}$ , pues sucede que el término  $\mathcal{L}_{\bar{\nu}-s}^{YM}$  de la lagrangiana efectiva debe escribirse como se muestra:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\nu-s}^{YM} = & \sum_{(m)} \left[ \frac{1}{2} (\mathcal{D}_\mu^{(0)ab} A_\nu^{(m)b}) (\mathcal{D}^{(0)ac\mu} A_\nu^{(m)c}) + \frac{1}{2} m_{(m)}^2 A_\mu^{(m)a} A^{(m)a\mu} \right. \\
& + (\mathcal{D}_\mu^{(0)ab} A_\nu^{(m)b}) p_\nu^{(m)} A^{(m)a\mu} \left. + g f^{abc} \sum_{(mrs)} \Delta'_{(mrs)} \left[ (\mathcal{D}_\mu^{(0)ad} A_\nu^{(m)d}) A^{(s)b\mu} A_\nu^{(r)c} \right. \right. \\
& \left. \left. + p_\nu^{(m)} A_\mu^{(m)a} A^{(s)b\mu} A_\nu^{(r)c} + \frac{1}{2} g f^{ade} \sum_{(pq)} \Delta'_{(mpq)} A_\mu^{(s)b} A_\nu^{(r)c} A^{(q)d\mu} A_\nu^{(p)e} \right] \right] \quad (1.55)
\end{aligned}$$

en esta expresión es clara la aparición del término masivo, de forma similar sucede con el término cinético de los campos de materia escalares. Además, es posible ver la aparición de interacciones de diferentes tipos que son relevantes a nivel cuántico [2, 8].

Por otro lado, partiendo de la expresión que se obtiene para el término  $\mathcal{L}_{s-s}^{YM}$  de la lagrangiana efectiva, se puede apreciar:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{s-s}^{YM} = & - \sum_{(m)} \left\{ \frac{1}{2} A_\mu^{(m)a} \mathfrak{M}_{\mu\nu}^{(m)} A_\nu^{(m)a} + g f^{abc} \sum_{(rs)} \Delta'_{(rsm)} p_\mu^{(m)} A_\nu^{(m)a} A_\mu^{(r)b} A_\nu^{(s)c} \right. \\
& + \frac{g^2}{4} \sum_{(r)} \left[ f^{abc} f^{ade} A_\mu^{(m)b} A_\nu^{(m)c} A_\mu^{(r)d} A_\nu^{(r)e} \right. \\
& \left. \left. + f^{abc} f^{ade} \sum_{(spq)} \Delta'_{(rsm)} \Delta'_{(pqm)} A_\mu^{(r)b} A_\nu^{(s)c} A_\mu^{(p)d} A_\nu^{(q)e} \right] \right\} \quad (1.56)
\end{aligned}$$

Sin embargo, el término de masa explícito para los campos del tipo  $A_\mu^{(m)a}$  no aparece, en su lugar, es posible definir la siguiente matriz  $n \times n$ :

$$\mathfrak{M}_{\mu\nu}^{(m)} = m_{(m)}^2 \delta_{\mu\nu} - p_\mu^{(m)} p_\nu^{(m)}. \quad (1.57)$$

La matriz así definida es nombrada como *matriz de masa*, y es análoga a un tensor de inercia para una partícula situada en el punto  $r^\dagger = (p_5, \dots, p_d)$ , la cual rota con una velocidad angular  $\omega$ , respecto a un sistema de referencia  $n$ -dimensional euclideo y sobre un eje arbitrario  $\hat{\omega}$ , [7].

Por otro lado, al evaluar la traza de esta matriz se nota que

$$\delta^{\mu\nu} \mathfrak{M}_{\mu\nu}^{(m)} = (n-1) m_{(m)}^2 \quad (1.58)$$

lo cual es sumamente ilustrativo: convendrá estudiar la diagonalización de esta

matriz de masas. Al analizar estas cuestiones, es posible llegar a la expresión

$$\mathfrak{M}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)} = \mathfrak{R}_{\bar{\mu}\bar{\mu}'}^{(m)} \mathfrak{M}_{\bar{\mu}'\bar{\nu}'}^{(m)} \mathfrak{R}_{\bar{\nu}\bar{\nu}'}^{(m)} \quad (1.59)$$

siendo  $\mathfrak{R}^{(m)}$  matrices ortogonales y  $\mathfrak{M}_{\bar{\mu}'\bar{\nu}'}^{(m)}$  la matriz de masa diagonalizada. De este proceso se obtienen  $n - 1$  campos escalares masivos y uno sin masa, el cual será identificado como el *pseudo-bosón* de Goldstone.

A partir de las matrices ortogonales es posible descomponer a los campos escalares de la siguiente manera:

$$A_{\bar{\mu}}^{(m)a} = \mathfrak{R}_{\bar{\mu}\bar{\mu}'}^{(m)} A_{\bar{\mu}'}^{(m)a} = \mathfrak{R}_{\bar{\mu}\bar{n}}^{(m)} A_{\bar{n}}^{(m)a} + \mathfrak{R}_{\bar{\mu}G}^{(m)} A_G^{(m)a} \quad (1.60)$$

allí explícitamente se hallan los  $n - 1$  esclares masivos  $A_{\bar{n}}^{(m)a}$ , al igual que el pseudo-bosón de Goldstone  $A_G^{(m)a}$ .

Más aún, debido a que  $\mathfrak{R}^{(m)}$  es tal que sus columnas contienen las componentes de momento de los ejes de rotación principales, es posible hallar la siguiente identidad:

$$p_{\bar{\nu}}^{(m)} \mathfrak{R}_{\bar{\nu}\bar{\nu}'}^{(m)} = m_{(\underline{m})} \delta_{\bar{\nu}'G}. \quad (1.61)$$

Adicionalmente, para aquella columna de las matrices ortogonales  $\mathfrak{R}^{(m)}$  concierne los pseudo-bosones de Golstone en la expansión (1.60) cumple que

$$\mathfrak{R}_{\bar{\nu}G}^{(m)} = \frac{p_{\bar{\nu}}^{(m)}}{m_{(\underline{m})}}. \quad (1.62)$$

Así, empleando a las matrices ortogonales  $\mathfrak{R}^{(m)}$ , es posible reescribir la expresión (1.52) y obtener:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{s-s}^{YM} = & - \sum_{(m)} \left\{ \frac{1}{2} m_{(\underline{m})}^2 A_{\bar{n}}^{(m)a} A_{\bar{n}}^{(m)a} \right. \\ & + g f^{abc} p_{\bar{\mu}}^{(m)} \sum_{(rs)} \Delta'_{(rsm)} \mathfrak{R}_{\bar{\nu}\bar{\nu}'}^{(m)} \mathfrak{R}_{\bar{\mu}\bar{\mu}'}^{(r)} \mathfrak{R}_{\bar{\mu}\bar{\lambda}'}^{(s)} A_{\bar{\nu}'}^{(m)a} A_{\bar{\mu}'}^{(r)b} A_{\bar{\lambda}'}^{(s)c} \\ & + \frac{g^2}{4} \sum_{(r)} \left[ f^{abc} f^{ade} \mathfrak{R}_{\bar{\mu}\bar{\mu}'}^{(m)} \mathfrak{R}_{\bar{\nu}\bar{\nu}'}^{(m)} \mathfrak{R}_{\bar{\mu}\bar{\lambda}'}^{(r)} \mathfrak{R}_{\bar{\nu}\bar{\rho}'}^{(r)} A_{\bar{\mu}'}^{(m)b} A_{\bar{\nu}'}^{(m)c} A_{\bar{\lambda}'}^{(r)d} A_{\bar{\rho}'}^{(r)e} \right. \\ & \left. \left. + f^{abc} f^{ade} \sum_{(spq)} \Delta'_{(rsm)} \Delta'_{(pqm)} \mathfrak{R}_{\bar{\mu}\bar{\mu}'}^{(r)} \mathfrak{R}_{\bar{\nu}\bar{\nu}'}^{(s)} \mathfrak{R}_{\bar{\mu}\bar{\lambda}'}^{(p)} \mathfrak{R}_{\bar{\nu}\bar{\rho}'}^{(q)} A_{\bar{\mu}'}^{(r)b} A_{\bar{\nu}'}^{(s)c} A_{\bar{\lambda}'}^{(p)d} A_{\bar{\rho}'}^{(q)e} \right] \right\} \quad (1.63) \end{aligned}$$

explícitamente, en esta última ecuación, es posible identificar al término de masa para los campos  $A_{\bar{n}}^{(m)a}$ . Además se pueden hallar más interacciones, las cuales son estudiadas a nivel cuántico a un lazo [2, 8].

En cuanto a los pseudo-bosones de Goldstone, estos pueden ser removidos de la teoría mediante la elección adecuada de una norma no-estándar, denominada *norma unitaria*. Los grados de libertad que estos representaban quedan acomodados como parte de la polarización longitudinal de las excitaciones de Kaluza-Klein  $A_{\mu}^{(m)a}$ . De forma manifiesta, esta norma unitaria se define de la siguiente manera:

$$\alpha^{(m)a}(x) = \frac{A_G^{(m)a}(x)}{m_{(m)}} \quad (1.64)$$

luego, entonces, a primer orden en los campos, se obtendrá:

$$A_{\mu}^{\prime(m)a}(x) = A_{\mu}^{(m)a}(x) + \frac{\partial_{\mu} A_G^{(m)a}(x)}{m_{(m)}} \quad (1.65)$$

$$A_{\bar{n}}^{\prime(m)a}(x) = A_{\bar{n}}^{(m)a}(x) \quad (1.66)$$

$$A_G^{\prime(m)a}(x) = 0 \quad (1.67)$$

lo cual permite corroborar la forma en que los pseudo-bosones fueron absorbidos por los campos de norma.

## 2

# Gravedad linealizada

El tema central de esta sección será el estudio de la teoría linealizada de la gravedad. En la primera parte se construye la *lagrangiana de Fierz-Pauli*, con base en la lagrangiana que aparece en el contexto de la acción de Einstein-Hilbert [10, 11, 12]. Esta teoría resulta ser invariante de Lorentz. Además se discuten las *transformaciones de norma*, cruciales en el desarrollo posterior de este trabajo de tesis. Finalmente, y para completar el análisis, se discuten las constricciones de la teoría, demostrando que únicamente se tendrán constricciones de primera clase [13, 14].

A partir de todo lo discutido, se plantea seguir un enfoque como aquel presentado por Feynman [15] y continuado por diferentes autores, siendo de suma importancia aquel llevado a cabo por Veltman [16], con un enfoque más cercano a teoría cuántica de campos. Fue necesario esclarecer las ideas básicas necesarias para poder trabajar esta teoría cuando se consideran dimensiones extra universales.

### 2.1. Lagrangiana de Fierz-Pauli

En 1915, David Hilbert propone un principio variacional mediante el cual es posible derivar las ecuaciones obtenidas por Albert Einstein previamente, durante el transcurso del mismo año. De esta forma, la denominada *acción de Einstein-Hilbert* sostiene que

$$S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (2.1)$$

siendo  $g = \det(g_{\mu\nu})$ , con  $g_{\mu\nu}$  el tensor métrico, y  $R$  el escalar de Ricci.

La siguiente lagrangiana se puede aislar a partir de el principio variacional anterior, de manera que:

$$\mathcal{L}_H = \sqrt{-g}R. \quad (2.2)$$

Por otro lado, en cierto límite de un campo gravitacional débil, es posible pensar en una pequeña perturbación gravitatoria propagándose sobre un espaciotiempo plano de fondo, i.e. el espaciotiempo de Minkowski [11, 17]. En este sentido, el tensor métrico en general puede ser escrito como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (2.3)$$

En la expresión anterior  $\eta_{\mu\nu}$  representa la métrica de Minkowski (se emplea la convención  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$ ), en tanto que  $h_{\mu\nu}$  es un 2-tensor simétrico, el cual juega el papel de la perturbación pequeña,  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ , la cual a nivel ecuaciones de movimiento será despreciada a segundo orden. Así, es posible concluir que en este contexto  $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$ , además de que sucede lo siguiente:  $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}h_{\rho\sigma}$ .

Así, pensando en todas estas ideas, es posible obtener una versión linealizada para la lagrangiana (2.2), la cual está constituida fundamentalmente por la métrica, ya que el escalar de Ricci se compone de símbolos de Christoffel y estos a su vez de la métrica. Así, la lagrangiana que se obtiene [12] es:

$$\mathcal{L}_{FP} = \frac{1}{2} \left( \partial_\mu h^\mu_\nu \partial_\lambda h^{\lambda\nu} - \partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\nu h + \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - \frac{1}{2} \partial_\mu h^{\rho\sigma} \partial^\mu h_{\rho\sigma} \right). \quad (2.4)$$

La anterior es conocida como lagrangiana de Fierz-Pauli, y describe a esta teoría de manera efectiva. Otras lagrangianas que describen la teoría son equivalentes a esta hasta un término de superficie. Adicionalmente, modificaciones a esta teoría se exploran actualmente con diversos fines, impulsados principalmente por el carácter no renormalizable de la teoría linealizada sin masa [6, 10].

Por otro lado, no es difícil reconocer que esta teoría es invariante de Lorentz. Además, es posible hablar de *transformaciones de norma* en este contexto. En general puede haber otros sistemas coordenados bajo los cuales la métrica puede ser escrita como  $\eta_{\mu\nu}$  más una perturbación, sin embargo, en cada uno de estos sistemas la perturbación sería distinta. Esto quiere decir que aquella expresión propuesta en (2.3) no es única.

En general, la teoría gravitacional puede ser tratada como una teoría de norma, siendo el grupo de difeomorfismos su grupo de norma. Al considerar esto es posible emplear un conjunto de difeomorfismos entre el espaciotiempo de fondo (Minkowski) y el espaciotiempo en general, en donde la métrica válida es  $g_{\mu\nu}$  [17]. A partir de esto, se define la perturbación en este conexto, lo cual permite

escribir en última instancia que las transformaciones de norma para la teoría linealizada son:

$$\delta h_{\mu\nu} = \xi_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu \quad (2.5)$$

siendo  $\xi_\mu$  un campo vectorial en el espaciotiempo de Minkowski, los *parámetros de norma*.

Sin embargo, las anteriores transformaciones pueden ser deducidas de forma similar a partir de considerar un cambio de coordenadas de  $x^\mu$  a  $x^\mu - \xi^\mu$ , manteniendo todos los cálculos a primer orden [18].

A partir de aquí, se puede proceder hacia un esquema de fijación de la norma y solucionar las ecuaciones que surgen al variar la lagrangiana (2.4), sin embargo, esto no será explorado pues queda fuera de los objetivos de este trabajo, [12, 17].

## 2.2. Constricciones de la teoría linealizada

Es un asunto importante dilucidar qué tipo de constricciones contiene una teoría de campo pues, a pesar de que se mencionó que es posible fijar la norma y solucionar las ecuaciones emergentes, esto no puede realizarse si las constricciones no resultan ser de primera clase [10]. En esta sección se trabajará, de forma más general, con la teoría linealizada en  $n + 1$  dimensiones.

Para poder hablar de las constricciones de la teoría linealizada, es útil renombrar las diferentes componentes del 2-tensor  $h_{\mu\nu}$  como se hace a continuación [13]

$$\phi \equiv h_{00} \qquad \phi_i \equiv h_{0i} \qquad \phi_{ij} \equiv h_{ij}. \quad (2.6)$$

Ante esto, es posible escribir a la lagrangiana de Fierz-Pauli (2.4) en términos de estos nuevos objetos. Así, los *momentos canónicos* de la teoría se definen como:

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}_{FP}}{\partial \dot{\phi}} \qquad \pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}_{FP}}{\partial \dot{\phi}_i} \qquad \pi_{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}_{FP}}{\partial \dot{\phi}_{ij}}. \quad (2.7)$$

Luego, al calcular directamente las derivadas sobre la lagrangiana, se obtienen las expresiones explícitas para estos momentos

$$\pi = -\frac{1}{2}\partial_i\phi_i \quad (2.8)$$

$$\pi_i = \partial_j\phi_{ij} + \frac{1}{2}\partial_i\phi - \frac{1}{2}\partial_i\phi_{jj} \quad (2.9)$$

$$\pi_{ij} = \frac{1}{2}\left[\delta_{ij}\left(\dot{\phi}_{mm} - \partial_k\phi_k\right) - \dot{\phi}_{ij}\right]. \quad (2.10)$$

Ahora bien, a pesar de que es posible, de (2.10), expresar a la velocidad  $\dot{\phi}_{ij}$  en función del momento  $\pi_{ij}$

$$\dot{\phi}_{ij} = -2\pi_{ij} + \delta_{ij}\left(\frac{2}{n-1}\pi_{mm} + \frac{1}{n-1}\partial_k\phi_k\right), \quad (2.11)$$

la teoría es claramente singular, en concordancia con lo mencionado en la sección anterior.

Después de esto, es posible construir la hamiltoniana de la teoría, obteniendo la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & -\pi_{ij}\pi_{ij} + \frac{1}{n-1}\pi_{ii}\pi_{mm} + \frac{1}{n-1}\pi_{ii}\partial_k\phi_k - \frac{n-2}{4(n-1)}\partial_k\phi_k\partial_s\phi_s \\ & -\frac{1}{2}\partial_i\phi\partial_i\phi_{jj} + \frac{1}{4}\partial_i\phi_{jj}\partial_i\phi_{kk} + \frac{1}{2}\partial_i\phi_j\partial_i\phi_j - \frac{1}{4}\partial_i\phi_{jk}\partial_i\phi_{jk} \\ & +\frac{1}{2}\partial_i\phi_{ij}\partial_k\phi_{kj} + \frac{1}{2}\partial_i\phi_{ij}\partial_j\phi - \frac{1}{2}\partial_i\phi_{ij}\partial_j\phi_{kk}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Así, entonces, de las ecuaciones (2.8) y (2.9) ya pueden obtenerse constricciones primarias, las cuales, como se ve en las expresiones que se escriben abajo, son de primera clase. Más aún, luego de construir la hamiltoniana primaria y buscar consistencia respecto a las constricciones primarias, se obtienen constricciones secundarias de primera clase. Explícitamente, las  $2(n+1)$  constricciones de la teoría son

$$\Phi^{(1)} \equiv \pi + \frac{1}{2}\partial_i\phi_i \approx 0 \quad (2.13)$$

$$\Phi_k^{(1)} \equiv \pi_k + \frac{1}{2}\partial_k\phi_{jj} - \frac{1}{2}\partial_k\phi - \partial_j\phi_{kj} \approx 0 \quad (2.14)$$

$$\Phi^{(2)} \equiv \frac{1}{2}(-\partial_{ii}\phi_{jj} + \partial_{ij}\phi_{ij}) \approx 0 \quad (2.15)$$

$$\Phi_k^{(2)} = \partial_{mm}\phi_k + 2\partial_l\pi_{lk} \approx 0. \quad (2.16)$$



Finalmente, de lo anterior, y al considerar que en el caso de un 2-tensor simétrico sólo hay  $(n + 1)(n + 2)/2$  componentes independientes, los grados de libertad de la teoría linealizada son

$$\frac{(n - 2)(n + 1)}{2}, \quad (2.17)$$

resultando en 2 grados de libertad para el caso usual, con  $n = 3$ .



## 3

# Compactificación de Gravedad Linealizada

Se propone una teoría de gravedad linealizada sobre un espaciotiempo extendido  $\mathcal{M}^d = \mathcal{M}^4 \times \mathcal{N}^n$ . Así, esta teoría describirá la dinámica de un objeto 2-tensorial  $h_{MN}$  ( $M = 0, 1, 2, 3; 5, 6, \dots, d$ ) sobre un espaciotiempo plano extendido de fondo; este objeto será invariante ante el grupo de Lorentz  $SO(1, 3+n)$ , de manera que la teoría en general será gobernada por el grupo de Poincaré extendido  $ISO(1, 3+n)$ . Sin embargo, a diferencia de las teorías de Yang-Mills en dimensiones extra, la teoría linealizada extendida no posee un grupo interno. Así pues, el grupo inhomogéneo extendido será el único que dicte la invariancia para esta teoría a escalas muy por arriba de la escala de compactificación  $R^{-1}$ .

Así, de forma análoga al caso de Yang-Mills, se deberán establecer mapeos que permitan reclasificar a los campos que aparecen en la teoría lineal extendida. Esto representará un cambio respecto al caso mencionado, pues habrá más objetos de los cuáles hablar. Además, las transformaciones de norma de la teoría contendrán parámetros que ya no son escalares, lo cual permitirá en este caso enriquecer las posibilidades al mapearlos. El objetivo, entonces, será ocultar la simetría extendida en la usual, de forma tal que a energías del orden de  $R^{-1}$ , cuando la compacidad de la variedad extra es evidente, el grupo  $ISO(1, 3)$ , de Poincaré estándar será aquel que determine la invariancia de los objetos para esta teoría. Nuevamente, se verá que el contenido de la física es una cuestión de escalas energéticas.

Finalmente, se hablará de los propagadores que pueden construirse a partir de esta teoría y los objetos que emerjan al finalizar el proceso de ocultamiento de simetría.

### 3.1. Gravedad Linealizada con dimensiones extra

La lagrangiana de Fierz-Pauli (2.4) se extiende directamente a dimensiones extra, usando el campo  $h_{MN}$  como su elemento fundamental. Este, como se dijo, será la perturbación gravitacional propagándose sobre el espaciotiempo plano  $\mathcal{M}^d$ . Así, la acción correspondiente será

$$S[h_{MN}] = \int d^4x d^n\bar{x} \mathcal{L}_{ED}, \quad (3.1)$$

en donde la lagrangiana tiene la forma

$$\mathcal{L}_{ED} = \frac{1}{2} \left( \partial_M h_N^M \partial_L h^{LN} - \partial_M h^{MN} \partial_N h + \frac{1}{2} \partial_M h \partial^M h - \frac{1}{2} \partial_M h^{RS} \partial^M h_{RS} \right). \quad (3.2)$$

Aún más, las transformaciones de norma de la teoría se extienden de aquellas discutidas en el capítulo anterior; de esta forma, las transformaciones en dimensiones extra son

$$\delta h_{MN}(x, \bar{x}) = \xi_{MN}(x, \bar{x}) = \partial_M \xi_N + \partial_N \xi_M \quad (3.3)$$

en donde los objetos vectoriales  $\xi_M$ , covariantes bajo  $SO(1, 3 + n)$ , serán los parámetros de norma en este caso.

Como se sabe ya, los grupos  $SO(1, 3)$  y  $SO(n)$  son subgrupos de  $SO(1, 3 + n)$ , de manera que teniendo en mente que el primer paso para poder ocultar la simetría extendida en la estándar consiste en mapear el campo  $h_{MN}$  y su traza  $h$ , de los cuales se compone la acción de esta teoría, en objetos invariantes bajo los subgrupos. Así, el *primer mapeo* que se busca es

$$SO(1, 3 + n) \quad \longrightarrow \quad \{SO(1, 3), SO(n)\} \quad (3.4)$$

de manera tal que el contenido de la teoría resulta transformado de la siguiente forma

$$h_{MN}(x, \bar{x}) \quad \longrightarrow \quad \{h_{\mu\nu}(x, \bar{x}), h_{\mu\bar{\nu}}(x, \bar{x}), h_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x, \bar{x})\} \quad (3.5)$$

$$h \quad \longrightarrow \quad h. \quad (3.6)$$

Ante este mapeo, la acción de la teoría se ve modificada, esta dependerá de los objetos:  $h_{\mu\nu}$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ), los cuales resultan ser 2-tensores,  $h_{\mu\bar{\nu}}$  ( $\bar{\mu} = 5, 6, \dots, d$ ), los cuales resultan ser objetos vectoriales y  $h_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ , escalares; todo esto

bajo la perspectiva del grupo de Lorentz estándar  $SO(1, 3)$ . Así, la acción queda como

$$S[h_{\mu\nu}, h_{\mu\bar{\nu}}, h_{\bar{\mu}\bar{\nu}}] = \int d^4x d^n\bar{x} \mathcal{L}_{ED}, \quad (3.7)$$

en donde la lagrangiana extra-dimensional se escribe como se muestra:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ED} = & \frac{1}{2} \left[ \left( \partial_\mu h_\nu^\mu \partial_\lambda h^{\lambda\nu} - \partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\nu h + \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - \frac{1}{2} \partial_\mu h^{\rho\sigma} \partial^\mu h_{\rho\sigma} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \partial_{\bar{\mu}} h^{\rho\sigma} \partial_{\bar{\mu}} h_{\rho\sigma} - \frac{1}{2} \partial_{\bar{\mu}} h \partial_{\bar{\mu}} h \right) \right. \\ & + \left( - \partial_\mu h_\nu^\mu \partial_\lambda h_\nu^\lambda + \partial_\mu h_\sigma^\rho \partial^\mu h_{\rho\bar{\sigma}} + \partial_{\bar{\mu}} h_{\mu\nu} \partial_{\bar{\lambda}} h_\lambda^\nu - \partial_{\bar{\mu}} h_\sigma^\rho \partial_{\bar{\mu}} h_{\rho\bar{\sigma}} \right) \\ & + \left( - \frac{1}{2} \partial_\mu h_{\bar{\rho}\bar{\sigma}} \partial^\mu h_{\bar{\rho}\bar{\sigma}} - \partial_{\bar{\mu}} h_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \partial_{\bar{\lambda}} h_{\bar{\lambda}\bar{\nu}} + \frac{1}{2} \partial_{\bar{\mu}} h_{\bar{\rho}\bar{\sigma}} \partial_{\bar{\mu}} h_{\bar{\rho}\bar{\sigma}} \right) \\ & \left. + \left( - 2 \partial_\mu h_\nu^\mu \partial_{\bar{\lambda}} h_\lambda^\nu + 2 \partial_\mu h_\nu^\mu \partial_{\bar{\lambda}} h_{\bar{\lambda}\bar{\nu}} + \partial_\mu h_\nu^\mu \partial_{\bar{\nu}} h + \partial_{\bar{\mu}} h_{\bar{\mu}}^\nu \partial_\nu h - \partial_{\bar{\mu}} h_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \partial_{\bar{\nu}} h \right) \right]. \quad (3.8) \end{aligned}$$

A pesar de esto, la acción (3.7) sigue siendo válida a escalas energéticas mayores a  $R^{-1}$ , el proceso de compactificación aún no se ha llevado a cabo. La teoría ahora es manifiestamente invariante bajo  $SO(1, 3)$ , sin embargo, los objetos de los que se compone la lagrangiana (3.8) dependen aún de las coordenadas extra.

Además, el primer mapeo también afectará a las transformaciones de norma (3.3). En el caso de Yang-Mills sólo se mencionaba la separación de aquellas ante el mapeo, sin embargo, en esta teoría conviene escribir explícitamente en qué expresiones se escindieron las transformaciones. Resulta que habrá una expresión para cada objeto que compone la lagrangiana, mas es importante antes de escribirlas, mencionar que los parámetros de norma mencionados en el contexto de las transformaciones en dimensiones extra, se ven también afectados por el primer mapeo, a diferencia del caso revisado en el capítulo uno; estos objetos,  $\xi_M(x, \bar{x})$ , deberán mapearse como se muestra

$$\xi_M(x, \bar{x}) \quad \longrightarrow \quad \{\xi_\mu(x, \bar{x}), \xi_{\bar{\mu}}(x, \bar{x})\}. \quad (3.9)$$

en donde, desde la perspectiva de Lorentz estándar,  $\xi_\mu(x, \bar{x})$  serán considerados vectores, en tanto que los  $\xi_{\bar{\mu}}(x, \bar{x})$  clasificarán como escalares. Así, ante esto, las expresiones explícitas en las que se separan las transformaciones de norma son:

$$\delta h_{\mu\nu}(x, \bar{x}) = \partial_\mu \xi_\nu(x, \bar{x}) + \partial_\nu \xi_\mu(x, \bar{x}) \quad (3.10)$$

$$\delta h_{\mu\bar{\nu}}(x, \bar{x}) = \partial_\mu \xi_{\bar{\nu}}(x, \bar{x}) + \partial_{\bar{\nu}} \xi_\mu(x, \bar{x}) \quad (3.11)$$

$$\delta h_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x, \bar{x}) = \partial_{\bar{\mu}} \xi_{\bar{\nu}}(x, \bar{x}) + \partial_{\bar{\nu}} \xi_{\bar{\mu}}(x, \bar{x}). \quad (3.12)$$

No obstante, como se mencionó, todos los objetos que han aparecido hasta ahora, siguen dependiendo de las coordenadas de la variedad extra, lo cual no es válido si se quiere construir una teoría efectiva invariante bajo  $ISO(1, 3)$ .

De esta forma, se introduce el segundo mapeo, el cual, como se intuye, tiene por objetivo retirar todo papel dinámico de  $\mathcal{N}^n$ . Así, se supondrá que el esquema de compactificación se ha elegido, de manera tal que es posible considerar a un conjunto completo de funciones ortogonales  $\{f^{(m)}(\bar{x})\}$ , respecto al cual, como en el caso ya estudiado, se expandirán los objetos que se tienen hasta este momento.

Así, debido a que en la teoría linealizada usual no existen vectores ( $h_{\mu\bar{\nu}}$ ), ni escalares ( $h_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ ), la función escalar debe formar parte de este conjunto. Bajo estos argumentos, también se propone:

**Postulado:** Todo objeto con contraparte estándar será par respecto al cambio  $\bar{x} \rightarrow -\bar{x}$ ; aquellos objetos que no tengan contraparte estándar serán impares:

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}(x, -\bar{x}) &= +h_{\mu\nu}(x, \bar{x}) & h_{\mu\bar{\nu}}(x, -\bar{x}) &= -h_{\mu\bar{\nu}}(x, \bar{x}) \\ h_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x, -\bar{x}) &= -h_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x, \bar{x}) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Así, ante esto, también se concluye la separación del conjunto completo de funciones en su parte par e impar, para la correcta expansión de los objetos de la teoría, i.e.  $\{f_E^{(0)}, f_E^{(m)}(\bar{x}), f_O^{(m)}(\bar{x})\}$ . Así pues, el segundo mapeo establecerá lo siguiente

$$h_{\mu\nu}(x, \bar{x}) = f_E^{(0)} h_{\mu\nu}^{(0)}(x) + \sum_{(m)} f_E^{(m)}(\bar{x}) h_{\mu\nu}^{(m)}(x) \quad (3.14)$$

$$h(x, \bar{x}) = f_E^{(0)} h^{(0)}(x) + \sum_{(m)} f_E^{(m)}(\bar{x}) h^{(m)}(x) \quad (3.15)$$

$$h_{\mu\bar{\nu}}(x, \bar{x}) = \sum_{(m)} f_O^{(m)}(\bar{x}) h_{\mu\bar{\nu}}^{(m)}(x) \quad (3.16)$$

$$h_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x, \bar{x}) = \sum_{(m)} f_O^{(m)}(\bar{x}) h_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)}(x) \quad (3.17)$$

$$\xi_\mu(x, \bar{x}) = f_E^{(0)} \xi_\mu^{(0)}(x) + \sum_{(m)} f_E^{(m)}(\bar{x}) \xi_\mu^{(m)}(x) \quad (3.18)$$

$$\xi_{\bar{\mu}}(x, \bar{x}) = \sum_{(m)} f_O^{(m)}(\bar{x}) \xi_{\bar{\mu}}^{(m)}(x). \quad (3.19)$$

Así, los grados de libertad de la teoría quedan representados sólo por  $\{h_{\mu\nu}^{(0)}, h_{\mu\nu}^{(m)}, h_{\mu\bar{\nu}}^{(m)}, h_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)}\}$  objetos que sólo dependen de las coordenadas usuales. Por otro lado,

las funciones del conjunto completo ya no etiquetan grados de libertad y se integrarán a nivel acción, empleando la ortogonalidad de las mismas.

Por otro lado, respecto a las ecuaciones (3.18) y (3.19) se debe recalcar que en la teoría linealizada estándar no existen los parámetros de norma escalares, así que en la búsqueda de recuperar la teoría usual, estos son expandidos usando sólo las funciones impares.

Luego, las transformaciones de norma modificadas ante el primer mapeo, (3.10), (3.11), (3.12), nuevamente cambiarán su forma respecto a la implementación de este segundo mapeo. Así, usando la ortogonalidad del conjunto completo, es posible llegar a:

$$\delta h_{\mu\nu}^{(0)}(x) = \partial_\mu \xi_\nu^{(0)}(x) + \partial_\nu \xi_\mu^{(0)}(x) \quad (3.20)$$

$$\delta h_{\mu\nu}^{(m)}(x) = \partial_\nu \xi_\mu^{(m)}(x) + \partial_\mu \xi_\nu^{(m)}(x) \quad (3.21)$$

$$\delta h_{\mu\bar{\nu}}^{(m)}(x) = \partial_\mu \xi_{\bar{\nu}}^{(m)}(x) - \left( \int d^m \bar{x} f_O^{(n)}(\bar{x}) \partial_\nu f_E^{(m)}(\bar{x}) \right) \xi_\mu^{(m)}(x) \quad (3.22)$$

$$\delta h_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)}(x) = 0. \quad (3.23)$$

Así pues, ante la aparición de  $\{\xi_\mu^{(0)}, \xi_\mu^{(m)}, \xi_{\bar{\mu}}^{(m)}\}$  en las transformaciones anteriores, si se identifican a los  $\xi_\mu^{(0)}$  como los parámetros de norma de la teoría usual, entonces claramente se puede reconocer que los campos de norma para gravedad linealizada estándar serán los  $h_{\mu\nu}^{(0)}$ . Además, es crucial resaltar que los  $h^{(0)}$  emergerán de tomar la traza respecto a los primeros, su transformación se sigue directamente de (3.20), como dos veces una 4-divergencia. Así, si en las transformaciones anteriores se exige que  $\xi_\mu^{(m)} = 0, \xi_{\bar{\mu}}^{(m)} = 0$ , emergen las SGT's para esta teoría

$$\delta_s h_{\mu\nu}^{(0)}(x) = \partial_\mu \xi_\nu^{(0)}(x) + \partial_\nu \xi_\mu^{(0)}(x) \quad (3.24)$$

$$\delta_s h_{\mu\nu}^{(m)}(x) = 0 \quad (3.25)$$

$$\delta_s h_{\mu\bar{\nu}}^{(m)}(x) = 0 \quad (3.26)$$

$$\delta_s h_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)}(x) = 0. \quad (3.27)$$

en donde se confirma lo antes dicho respecto a los campos de norma. A su vez, es evidente que el resto de objetos,  $h_{\mu\nu}^{(m)}, h_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)}, h_{\mu\bar{\nu}}^{(m)}$ , las excitaciones de Kaluza-Klein de los campos de norma, son invariantes, de manera que podrán recibir término de masa cuando se analice la lagrangiana.

Por otro lado, las transformaciones que caracterizan los parámetros  $\xi_\mu^{(m)}, \xi_{\bar{\mu}}^{(m)}$  son importantes. Al exigir  $\xi_\mu^{(0)} = 0$  en esta ocasión es posible obtener las NSGT's, esto es

$$\delta_{ns} h_{\mu\nu}^{(0)}(x) = 0 \quad (3.28)$$

$$\delta_{ns} h_{\mu\nu}^{(m)}(x) = \partial_\mu \xi_\nu^{(m)}(x) + \partial_\nu \xi_\mu^{(m)}(x) \quad (3.29)$$

$$\delta_{ns} h_{\mu\bar{\nu}}^{(m)}(x) = \partial_\mu \xi_{\bar{\nu}}^{(m)}(x) + \left( \int d^n \bar{x} f_O^{(n)}(\bar{x}) \partial_{\bar{\nu}} f_E^{(m)}(\bar{x}) \right) \xi_\mu^{(m)}(x) \quad (3.30)$$

$$\delta_{ns} h_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)}(x) = 0. \quad (3.31)$$

A partir de esto, se puede ver que (3.29) tiene la misma forma que (3.24), pero la transformación es para  $h_{\mu\nu}^{(m)}$  y los parámetros implicados son las excitaciones vectoriales de Kaluza-Klein de los parámetros de norma estándar  $\xi_\mu^{(m)}$ , por lo que se puede concluir que a pesar de que bajo la perspectiva estándar  $h_{\mu\nu}^{(m)}$  reciben término de masa, son campos de norma. A su vez, la ecuación (3.30) tiene un significado interesante: si sólo se toma en cuenta el primer término de la derecha, es claro que las excitaciones escalares de Kaluza-Klein  $\xi_\mu^{(m)}$  hacen que la transformación se vea como la de un campo de norma en la teoría abeliana del grupo  $U(1)$ , por lo que los objetos vectoriales  $h_{\mu\bar{\nu}}^{(m)}$ , a pesar de recibir masa, también son de norma, sin embargo, será necesario un análisis al respecto, pues hay pseudo-bosones de Goldstone implicados, lo cual se realiza más adelante. Finalmente, la ecuación (3.31) indica que respecto a ambas perspectivas los  $h_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)}$  se comportan adecuadamente como objetos escalares físicos.

## 3.2. El espectro de masas

Tal y como ocurre en el caso de Yang-Mills, es necesario hablar del mecanismo que da masa a los campos mencionados en la sección anterior. Así, se observa de nuevo la aparición de las derivadas de las funciones del conjunto completo, (3.30), de forma tal que será útil el invariante de Casimir  $\bar{P}^2$  para generar el espectro de masas de esta teoría. Como se sabe, las funciones del conjunto completo cumplen la ecuación

$$\bar{\nabla} f(x) = -\bar{p}^2 f(x),$$

y debido a que la variedad extra ya ha sido compactificada, el espectro de esta será discreto. Las soluciones nuevamente son senos y cosenos  $n$ -dimensionales, las cuales cumplen las condiciones de frontera antes mencionadas para cada cual: de Dirichlet y Neumann. Además, estas cumplirán la siguiente regla de derivación

$$\partial_{\bar{\mu}} f_{E,O}^{(m)}(\bar{x}) = \mp p_{\bar{\mu}}^{(m)} f_{O,E}^{(m)}(\bar{x}). \quad (3.32)$$



La variedad compactificada será la misma que la propuesta en el caso de Yang-Mills: el producto de  $n$  copias del orbifold  $S^1/\mathbb{Z}_2$ .

Entonces, la masa estará definida como

$$m_{(m)}^2 = p_{\bar{\mu}}^{(m)} p_{\bar{\mu}}^{(m)}. \quad (3.33)$$

Con esto en mente, es posible reescribir la expresión (3.30) empleando la información que esclarece el espectro de masas de la teoría. Esto es

$$\delta_{ns} h_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)}(x) = \partial_{\bar{\mu}} \xi_{\bar{\nu}}^{(m)}(x) - p_{\bar{\nu}}^{(m)} \xi_{\bar{\mu}}^{(m)}(x). \quad (3.34)$$

Por otro lado, ante la implementación de los dos mapeos que hacen posible obtener una teoría efectiva bajo  $ISO(1,3)$ , es necesario hacer hincapié en que las coordenadas  $\bar{x}$  ya no etiquetan grados de libertad, por lo que, como se mencionó, se deberán integrar las dependencias a nivel acción. De esta manera se obtiene

$$S[h_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(0)}, h_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)}, h_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)}, h_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)}] = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{eff}} \quad (3.35)$$

en donde aparece la lagrangiana efectiva de la teoría, la cual se escribe como se muestra:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_{\text{FP}} + \mathcal{L}_{\text{Mass}} + \mathcal{L}_{\text{Vec}} + \mathcal{L}_{\text{Scal}} + \mathcal{L}_{\text{Mezcla}}. \quad (3.36)$$

En primer lugar, el término  $\mathcal{L}_{\text{FP}}$  refiere a la parte de la lagrangiana efectiva (3.36) que corresponde con la teoría usual de gravedad linealizada, la lagrangiana de Fierz-Pauli:

$$\mathcal{L}_{\text{FP}} = \frac{1}{2} \left( \partial^{\mu} h_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(0)} \partial_{\lambda} h^{(0)\lambda\nu} - \partial_{\bar{\mu}} h^{(0)\mu\nu} \partial_{\bar{\nu}} h^{(0)} + \frac{1}{2} \partial_{\bar{\mu}} h^{(0)} \partial^{\mu} h^{(0)} - \frac{1}{2} \partial_{\bar{\mu}} h^{(0)\rho\sigma} \partial^{\mu} h_{\bar{\rho}\bar{\sigma}}^{(0)} \right). \quad (3.37)$$

Posteriormente, el segundo término de la ecuación (3.36), es decir  $\mathcal{L}_{\text{Mass}}$  corresponde a las excitaciones tensoriales de los campos de norma de la teoría estándar. Explícitamente

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Mass}} = & \frac{1}{2} \sum_{(m)} \left( \partial^{\mu} h_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)} \partial_{\lambda} h^{(m)\lambda\nu} - \partial_{\bar{\mu}} h^{(m)\mu\nu} \partial_{\bar{\nu}} h^{(m)} + \frac{1}{2} \partial_{\bar{\mu}} h^{(m)} \partial^{\mu} h^{(m)} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \partial_{\bar{\mu}} h^{(m)\rho\sigma} \partial^{\mu} h_{\bar{\rho}\bar{\sigma}}^{(m)} + \frac{1}{2} m_{(m)}^2 h^{(m)\rho\sigma} h_{\bar{\rho}\bar{\sigma}}^{(m)} - \frac{1}{2} m_{(m)}^2 h^{(m)} h^{(m)} \right) \end{aligned} \quad (3.38)$$

el cual correspondería a la lagrangiana de un campo masivo de espín 2, i.e. *gravedad masiva*. Esto es interesante, pues resulta entonces que las excitaciones

de Kaluza-Klein de los  $h_{\mu\nu}^{(0)}$ , de la teoría estándar, conforman la versión masiva de gravedad linealizada.

Aún más, por otro lado, la parte  $\mathcal{L}_{\text{Vec}}$  de la lagrangiana (3.36) corresponde a términos que tienen que ver con los objetos vectoriales de la teoría. Estos son

$$\mathcal{L}_{\text{Vec}} = \frac{1}{2} \sum_{(m)} \left( -\partial^\mu h_{\mu\nu}^{(m)} \partial^\lambda h_{\lambda\nu}^{(m)} + \partial_\mu h_{\sigma}^{(m)\rho} \partial^\mu h_{\rho\sigma}^{(m)} + p_\mu^{(m)} p_\lambda^{(m)} h_{\mu\nu}^{(m)} h_{\lambda}^{(m)\nu} - m_{(m)}^2 h_{\sigma}^{(m)\rho} h_{\rho\sigma}^{(m)} \right). \quad (3.39)$$

Resulta que, hasta un término de superficie a nivel acción, los primeros dos términos de la expresión anterior, i.e. términos cinéticos, pueden escribirse como

$$\frac{1}{2} (\partial_\mu h_{\nu\sigma}^{(m)} - \partial_\nu h_{\mu\sigma}^{(m)}) (\partial^\mu h^{(m)\nu} - \partial^\nu h^{(m)\mu}), \quad (3.40)$$

de donde ya se reconoce el término cinético de un *campo de Proca*.

El tercer y cuarto término de (3.39) también sufren importantes abreviaciones. En primer lugar, estos se pueden escribir como

$$-h_{\mu\nu}^{(m)} \mathfrak{M}_{\mu\lambda}^{(m)} h_{\lambda}^{(m)\nu} \quad (3.41)$$

siendo  $\mathfrak{M}_{\mu\lambda}^{(m)}$  la matriz de masas

$$\mathfrak{M}_{\mu\lambda}^{(m)} = m_{(m)}^2 \delta_{\mu\lambda} - p_\mu^{(m)} p_\lambda^{(m)}, \quad (3.42)$$

exactamente la misma matriz de masas que aparece en el contexto de los campos escalares de la teoría de Yang-Mills. Esta, como se sabe, se puede diagonalizar por medio de las matrices ortogonales  $\mathfrak{R}^{(m)}$ , de manera tal que

$$\mathfrak{M}_{\mu\nu}^{(m)} = \mathfrak{R}_{\mu\mu'}^{(m)} \mathfrak{M}_{\mu'\nu'}^{(m)} \mathfrak{R}_{\nu\nu'}^{(m)}. \quad (3.43)$$

Así, ante la diagonalización es posible hallar  $n - 1$  campos vectoriales masivos, con masa igual a  $m_{(m)}$ . Además, se halla un objeto vectorial sin masa, un *pseudo-bosón de Goldstone* vectorial, el cual, ante la implementación de la norma unitaria, será absorbido por el campo de norma  $h_{\mu\nu}^{(m)}$ , en pos de que este último obtenga masa a través de este mecanismo.

La matriz ortogonal  $\mathfrak{R}^{(m)}$ , además, tiene la siguiente propiedad sobre los objetos vectoriales

$$h_{\nu\mu}^{(m)} = \mathfrak{R}_{\nu\nu'}^{(m)} h_{\nu'\mu}^{(m)} = \mathfrak{R}_{\nu n}^{(m)} h_{n\mu}^{(m)} + \mathfrak{R}_{\nu G}^{(m)} h_{G\mu}^{(m)}, \quad (3.44)$$

en donde los  $h_{\mu\bar{n}}^{(m)}$  resultan ser los campos vectoriales masivos, en tanto que  $h_{\mu G}^{(m)}$  es el pseudo-bosón de Goldstone vectorial.

Es importante no olvidar la siguiente relación, útil en el contexto de la norma unitaria:

$$\mathfrak{R}_{\nu G}^{(m)} = \frac{p_{\nu}^{(m)}}{m_{(m)}}. \quad (3.45)$$

Así, empleando la transformación del campo vectorial  $h_{\nu\mu}^{(m)}$  ante las matrices ortogonales, en conjunción con los términos cinéticos de Proca hallados en la ecuación (3.40), es posible reescribir el término  $\mathcal{L}_{\text{Vec}}$  de la lagrangiana efectiva como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Vec}} = - \sum_{(m)} \left[ -\frac{1}{4} (\partial_{\mu} h_{\nu\bar{n}}^{(m)} - \partial_{\nu} h_{\mu\bar{n}}^{(m)}) (\partial^{\mu} h_{\bar{n}}^{(m)\nu} - \partial^{\nu} h_{\bar{n}}^{(m)\mu}) + \frac{1}{2} m_{(m)}^2 h_{\bar{n}\nu}^{(m)} h_{\bar{n}}^{(m)\nu} \right. \\ \left. - \frac{1}{4} (\partial_{\mu} h_{\nu G}^{(m)} - \partial_{\nu} h_{\mu G}^{(m)}) (\partial^{\mu} h_{G}^{(m)\nu} - \partial^{\nu} h_{G}^{(m)\mu}) \right], \end{aligned} \quad (3.46)$$

en donde los primeros dos términos son semejantes a aquellos que aparecerían para el bosón débil  $Z_{\mu}^{(0)}$ , en tanto que el último se asemeja a aquel para el campo electromagnético.

Ahora bien, continuando con los términos que conforman a la lagrangiana efectiva (3.36), se analiza a continuación a  $\mathcal{L}_{\text{Sca}}$ , el cual contiene los términos correspondientes a los objetos escalares que surgieron a partir del ocultamiento de la simetría. De manera explícita

$$\mathcal{L}_{\text{Sca}} = \frac{1}{2} \sum_{(m)} \left( -\frac{1}{2} \partial_{\mu} h_{\rho\bar{\sigma}}^{(m)} \partial^{\mu} h_{\rho\bar{\sigma}}^{(m)} - p_{\bar{\mu}}^{(m)} p_{\bar{\lambda}}^{(m)} h_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)} h_{\bar{\lambda}\bar{\nu}}^{(m)} + \frac{1}{2} m_{(m)}^2 h_{\rho\bar{\sigma}}^{(m)} h_{\rho\bar{\sigma}}^{(m)} \right) \quad (3.47)$$

Como se puede ver, en la expresión anterior se halla el término cinético para estos objetos, además de un par de términos que tienen que ver con la masa de estos. Sin embargo, el espectro de masas de estos escalares es complicado de hallar, por lo que en el Apéndice A se puede hallar la discusión completa al respecto. Después del análisis, de los  $n(n+1)/2$  objetos escalares que contiene la teoría, se halla que  $n-1$  no tendrán masa, por lo que son identificados como pseudo-bosones de Goldstone escalares, los cuales también serán absorbidos, esta vez por los campos vectoriales masivos  $h_{\bar{n}\nu}^{(m)}$ .

Los escalares que aparecen son renombrados siguiendo la notación de Veltman [16]. Así, se define

$$\psi_{\bar{i}}^{(m)} \equiv h_{\bar{\rho}\bar{\rho}}^{(m)}, \quad \bar{i} = 1, \dots, n \quad (3.48)$$

$$\psi_{\bar{i}}^{(m)} \equiv h_{\bar{\rho}\bar{\sigma}}^{(m)}, \quad \bar{\rho} \neq \bar{\sigma}, \quad \bar{i} = n+1, n+2, \dots, \frac{n(n+1)}{2}. \quad (3.49)$$

Por otro lado, la matriz de masas asociada a este tipo de objetos puede ser diagonalizada mediante el uso de ciertas matrices  $\mathfrak{Q}^{(m)}$ , las cuales transforman a los escalares como se muestra

$$\psi_{\bar{i}}^{(m)} = \mathfrak{Q}_{\bar{i}\bar{i}'}^{(m)} \psi_{\bar{i}'}^{(m)} = \mathfrak{Q}_{\bar{i}\bar{n}}^{(m)} \psi_{\bar{n}}^{(m)} + \mathfrak{Q}_{\bar{i}G}^{(m)} \psi_G^{(m)}, \quad (3.50)$$

siendo  $\psi_G^{(m)}$  los pseudo-bosones de Goldstone escalares mencionados anteriormente, en tanto que  $\psi_{\bar{n}}^{(m)}$  son los objetos escalares físicos de la teoría.

Luego, a partir de lo anterior, es posible reescribir el término  $\mathcal{L}_{\text{Sca}}$  como

$$\mathcal{L}_{\text{Sca}} = -\frac{1}{4} \sum_{(m)} \left( \partial_\mu \psi_{\bar{n}}^{(m)} \partial^\mu \psi_{\bar{n}}^{(m)} - \sum_{\bar{n}} m_{(m)\bar{n}}^2 \psi_{\bar{n}}^{(m)} \psi_{\bar{n}}^{(m)} + \partial_\mu \psi_G^{(m)} \partial^\mu \psi_G^{(m)} \right). \quad (3.51)$$

Finalmente, en cuanto al término  $\mathcal{L}_{\text{Mezcla}}$  de la ecuación (3.36), contiene sólo un término que, claramente, mezcla dos tipos de objetos de la teoría, es decir

$$\mathcal{L}_{\text{Mezcla}} = - \sum_{(m)} p_{\bar{\lambda}}^{(m)} h_{\bar{\lambda}\bar{\nu}}^{(m)} \partial_\mu h^{(m)\mu\nu}. \quad (3.52)$$

### 3.3. Norma Unitaria

A partir de las transformaciones de norma no-estándar obtenidas para vectores (3.34) es posible introducir valores para los parámetros  $\xi_\mu^{(m)}$  y  $\xi_{\bar{\mu}}^{(m)}$ , pues se pretende que los grados de libertad que representan los pseudo-bosones de Goldstone hallados,  $h_{\mu G}^{(m)}$  y  $\psi_G^{(m)}$ , aparezcan como parte de la polarización longitudinal de las excitaciones que reciben masa a esta escala, i.e.  $h_{\mu\nu}^{(m)}$  y  $h_{\bar{\mu}\bar{n}}^{(m)}$ , respectivamente.

De esta manera, se propone que

$$\xi_\mu^{(m)} = \frac{h_{\mu G}^{(m)}}{m_{(m)}} \quad (3.53)$$

así que, aplicando en las transformaciones (3.29) y (3.34), es posible escribir

$$h'_{\mu\nu}{}^{(m)} = h_{\mu\nu}{}^{(m)} + 2 \frac{\partial_{(\mu} h_{\nu G)}^{(m)}}{m_{(m)}} \quad (3.54)$$

$$h'_{\mu\bar{n}}{}^{(m)} = h_{\mu\bar{n}}{}^{(m)} + \partial_{\mu} \tilde{\xi}_{\bar{\nu}}^{(m)} \quad (3.55)$$

$$h'_{\mu G}{}^{(m)} = 0 \quad (3.56)$$

en donde se ha definido  $\tilde{\xi}_{\bar{n}}^{(m)} \equiv \mathfrak{R}_{\bar{n}\bar{\nu}}^{(m)} \xi_{\bar{\nu}}^{(m)}$ .

A su vez, a partir de la implementación de esta norma, se tiene que los campos vectoriales se transforman como  $h_{\bar{\nu}\mu}^{(m)} = \mathfrak{R}_{\bar{\nu}\bar{\nu}'}^{(m)} h_{\bar{\nu}'\mu}^{(m)} = \mathfrak{R}_{\bar{\nu}\bar{n}}^{(m)} h_{\bar{n}\mu}^{(m)}$ .

Por otro lado, respecto a los parámetros escalares modificados  $\tilde{\xi}_{\bar{n}}^{(m)}$ , se hace

$$\tilde{\xi}_{\bar{n}}^{(m)} = \frac{\psi_G^{(m)}}{m_{(m)\bar{n}}} \quad (3.57)$$

de manera tal que, a partir de (3.55) y (3.31) se obtiene

$$h'_{\mu\bar{n}}{}^{(m)} = h_{\mu\bar{n}}{}^{(m)} + \frac{\partial_{\mu} \psi_G^{(m)}}{m_{(m)\bar{n}}} \quad (3.58)$$

$$\psi'_{\bar{n}}{}^{(m)} = 0 \quad (3.59)$$

$$\psi'_G{}^{(m)} = 0. \quad (3.60)$$

Así pues, (3.53) y (3.57) definen la norma unitaria, y los pseudo-bosones de Goldstone han sido retirados de la teoría. En esta norma, sucede que  $\psi_{\bar{\nu}}^{(m)} = \mathfrak{Q}_{\bar{\nu}\bar{\nu}'}^{(m)} \psi_{\bar{\nu}'}^{(m)} = \mathfrak{Q}_{\bar{\nu}\bar{n}}^{(m)} \psi_{\bar{n}}^{(m)}$ .

### 3.4. Propagador de las excitaciones de Kaluza-Klein

Resulta interesante, como se mencionó, que de una teoría de gravedad linealizada pura (sin términos de masa) en dimensiones extra, se pueda derivar la lagrangiana de gravedad masiva,  $\mathcal{L}_{\text{Mass}}$ . En esta sección se concluye el análisis iniciado para esta teoría con la escritura del propagador correspondiente para el campo  $h_{\mu\nu}^{(m)}$  [16, 19, 20].

En primer lugar, el diagrama de Feynman relevante en este caso [16] es

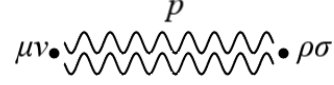


Figura 3.1: Proceso relevante

Luego, el propagador de la partícula correspondiente al campo  $h_{\mu\nu}^{(m)}$  será

$$\frac{-if^{\mu\nu\rho\sigma}(p)}{p^2 - m_{(m)}^2}. \quad (3.61)$$

De esta forma, el propagador se construye a partir de  $\mathcal{L}_{\text{Mass}}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Mass}} = & \frac{1}{2} \sum_{(m)} \left( \partial^\mu h_{\mu\nu}^{(m)} \partial_\lambda h^{(m)\lambda\nu} - \partial_\mu h^{(m)\mu\nu} \partial_\nu h^{(m)} + \frac{1}{2} \partial_\mu h^{(m)} \partial^\mu h^{(m)} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \partial_\mu h^{(m)\rho\sigma} \partial^\mu h_{\rho\sigma}^{(m)} + \frac{1}{2} m_{(m)}^2 h^{(m)\rho\sigma} h_{\rho\sigma}^{(m)} - \frac{1}{2} m_{(m)}^2 h^{(m)} h^{(m)} \right). \end{aligned} \quad (3.62)$$

Así, resulta que la expresión anterior puede reescribirse como

$$\mathcal{L}_{\text{Mass}} = \frac{1}{2} \sum_{(m)} \frac{1}{2} h_{\mu\nu}^{(m)} C^{\mu\nu\rho\sigma} h_{\rho\sigma}^{(m)} \quad (3.63)$$

con el objeto

$$\begin{aligned} C^{\mu\nu}_{\rho\sigma} = & \left( \eta^{\mu}_{(\rho} \eta^{\nu)}_{\sigma)} - \eta^{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} \right) (\square + m_{(m)}^2) - 2\partial^{(\mu} \partial_{(\rho} \eta^{\nu)}_{\sigma)} \\ & + \eta_{\rho\sigma} \partial^\mu \partial^\nu + \eta^{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\sigma \end{aligned} \quad (3.64)$$

debido a que el campo  $h_{\mu\nu}^{(m)}$  es simétrico.

Luego, pasando al espacio de momentos, se busca resolver

$$C^{\mu\nu\alpha\beta}(p) D_{\alpha\beta\rho\sigma}(p) = \frac{i}{2} (\delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma + \delta^\mu_\sigma \delta^\nu_\rho). \quad (3.65)$$

Finalmente, se obtiene la siguiente expresión para el propagador correspondiente

$$\begin{aligned}
 D^{\mu\nu\rho\sigma}(p) = \frac{-i}{p^2 - m_{(\underline{m})}^2} & \left\{ \frac{1}{2} \left( \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho} - \frac{2}{3} \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} \right) \right. \\
 & - \frac{1}{2} \left[ \eta^{\mu\sigma} \frac{p^\nu p^\rho}{m_{(\underline{m})}^2} + \eta^{\nu\rho} \frac{p^\mu p^\sigma}{m_{(\underline{m})}^2} + \eta^{\mu\rho} \frac{p^\nu p^\sigma}{m_{(\underline{m})}^2} + \eta^{\nu\sigma} \frac{p^\mu p^\rho}{m_{(\underline{m})}^2} \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{2}{3} \left( \eta^{\mu\nu} \frac{p^\rho p^\sigma}{m_{(\underline{m})}^2} + \eta^{\rho\sigma} \frac{p^\mu p^\nu}{m_{(\underline{m})}^2} \right) \right] \right. \\
 & \quad \left. + \frac{2}{3} \frac{p^\mu p^\nu p^\rho p^\sigma}{m_{(\underline{m})}^4} \right\}. \tag{3.66}
 \end{aligned}$$





# Conclusiones

En este trabajo se revisó una versión de gravedad linealizada en dimensiones extra, llevando el procedimiento exitosamente usado para teorías de Yang-Mills.

En el primer capítulo de esta tesis fue presentada una revisión de la teoría de Yang-Mills pura con  $n$  dimensiones extra a detalle, puesto que como ya se ha mencionado, este fue el marco en donde se desarrolló el trabajo original.

Posteriormente, el segundo capítulo discutió brevemente la construcción de la lagrangiana de Fierz-Pauli, así como de las transformaciones de norma que dejan invariante a la misma, las cuales fueron cruciales al momento de clasificar objetos en el capítulo tres de este trabajo.

Así, con base en lo anterior, se planteó partir de una lagrangiana idéntica a la de Fierz-Pauli, pero que describe una perturbación 2-tensorial en un espacio de fondo  $\mathcal{M}^d = \mathcal{M}^4 \times \mathcal{N}^n$ . Así, se obtuvieron, después de realizar el ocultamiento de la simetría  $ISO(1, 3 + n)$  en  $ISO(1, 3)$  y de especificar el esquema de compactificación de la variedad  $\mathcal{N}^n$ , diferentes sectores para la lagrangiana efectiva, los cuales fueron analizados a fondo. Además, a diferencia del caso de Yang-Mills, los parámetros de norma de la teoría resultaron ser objetos vectoriales y escalares, lo cual enriqueció la clasificación de objetos en vistas de los sectores antes mencionados. El contenido se discute a continuación

- En el sector estándar, o bien de Fierz-Pauli de la teoría

$$\mathcal{L}_{FP} = \frac{1}{2} \left( \partial^\mu h_{\mu\nu}^{(0)} \partial_\lambda h^{(0)\lambda\nu} - \partial_\mu h^{(0)\mu\nu} \partial_\nu h^{(0)} + \frac{1}{2} \partial_\mu h^{(0)} \partial^\mu h^{(0)} - \frac{1}{2} \partial_\mu h^{(0)\rho\sigma} \partial^\mu h_{\rho\sigma}^{(0)} \right),$$

se logró dar con la lagrangiana de Fierz-Pauli, luego de identificar los campos de norma estándar,  $h_{\mu\nu}^{(0)}$ . Esto es crucial, pues a energías del orden de  $R^{-1}$  se debía obtener la teoría usual de gravedad linealizada.

- El sector de excitaciones tensoriales de Kaluza-Klein de la teoría:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Mass}} = & \frac{1}{2} \sum_{(m)} \left( \partial^\mu h_{\mu\nu}^{(m)} \partial_\lambda h^{(m)\lambda\nu} - \partial_\mu h^{(m)\mu\nu} \partial_\nu h^{(m)} + \frac{1}{2} \partial_\mu h^{(m)} \partial^\mu h^{(m)} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \partial_\mu h^{(m)\rho\sigma} \partial^\mu h_{\rho\sigma}^{(m)} + \frac{1}{2} m_{(m)}^2 h^{(m)\rho\sigma} h_{\rho\sigma}^{(m)} - \frac{1}{2} m_{(m)}^2 h^{(m)} h^{(m)} \right) \end{aligned}$$

contiene términos cinéticos y masivos de las excitaciones de Kaluza-Klein tensoriales  $h_{\mu\nu}^{(m)}$ , de forma tal que se obtiene la lagrangiana de gravedad masiva, la cual describe la dinámica de una partícula de espín 2 propagándose en el espaciotiempo de Minkowski. El propagador para esta fue obtenido a partir de su lagrangiana correspondiente.

- En cuanto al sector vectorial, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Vec}} = & - \sum_{(m)} \left[ - \frac{1}{4} (\partial_\mu h_{\nu\bar{n}}^{(m)} - \partial_\nu h_{\mu\bar{n}}^{(m)}) (\partial^\mu h_{\bar{n}}^{(m)\nu} - \partial^\nu h_{\bar{n}}^{(m)\mu}) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} m_{(m)}^2 h_{\bar{n}\nu}^{(m)} h_{\bar{n}}^{(m)\nu} - \frac{1}{4} (\partial_\mu h_{\nu G}^{(m)} - \partial_\nu h_{\mu G}^{(m)}) (\partial^\mu h_{\bar{G}}^{(m)\nu} - \partial^\nu h_{\bar{G}}^{(m)\mu}) \right] \end{aligned}$$

este contiene términos para las excitaciones vectoriales  $h_{\mu\nu}^{(m)}$ . El estudio de esta sección finalizó en que  $n - 1$  objetos vectoriales son campos de norma masivos, además de la obtención de uno sin masa, identificado como el pseudo-bosón de Goldstone, el cual fue retirado de la teoría mediante la implementación de la norma unitaria, de manera tal que quedó como parte de la polarización longitudinal de  $h_{\mu\nu}^{(m)}$ , el cual recibe masa a esta escala, como ya se vio.

- Un sector escalar fue hallado, su contenido final está dado por

$$\mathcal{L}_{\text{Sca}} = - \frac{1}{4} \sum_{(m)} \left( \partial_\mu \psi_{\bar{n}}^{(m)} \partial^\mu \psi_{\bar{n}}^{(m)} - \sum_{\bar{n}} m_{(m)\bar{n}}^2 \psi_{\bar{n}}^{(m)} \psi_{\bar{n}}^{(m)} + \partial_\mu \psi_G^{(m)} \partial^\mu \psi_G^{(m)} \right)$$

fue encontrado; en este se halló el término cinético para los objetos  $h_{\mu\nu}^{(m)}$ . Después de implementar una nueva notación conveniente, fue posible concluir que  $n - 1$  objetos escalares no reciben masa a la escala de compactificación, por lo que se les identificó como pseudo-bosones de Goldstone, absorbidos por los objetos vectoriales masivos  $h_{\mu\nu}^{(m)}$  después de la elección conveniente de una norma unitaria.

- Finalmente, se halló sólo una mezcla de objetos en la teoría, esta es

$$\mathcal{L}_{\text{Mezcla}} = - \sum_{(m)} p_{\lambda}^{(m)} h_{\lambda\nu}^{(m)} \partial_{\mu} h^{(m)\mu\nu}$$

se obtiene un término de interacción entre los objetos vectoriales y  $h_{\mu\nu}^{(m)}$ , la cual puede eliminarse eligiendo la norma estándar adecuada, de forma tal que  $\partial_{\mu} h^{(m)\mu\nu} = 0$ .

Así pues, al final es posible obtener la versión masiva de gravedad linealizada a partir de considerar el caso sin masa en  $n$  dimensiones extra. La capacidad del mecanismo de Kaluza-Klein se demuestra nuevamente, pues a partir de su implementación en diferentes tipos de teoría es posible obtener resultados con repercusiones previamente insospechadas.



## Apéndice A

# Espectro de masas escalar

El espectro de masas del sector escalar de la teoría de gravedad linealizada en dimensiones extra es complicado de abordar desde la perspectiva general. El estudio de casos particulares es crucial para poder establecer una conclusión general al respecto.

Un análisis del sector escalar para el caso que únicamente agrega una dimensión extra es sumamente trivial, sin embargo, es un caso especial, como se describe. Sólo habrá un campo vectorial en la teoría,  $h_{\mu 5}^{(m)}$ , el cual no recibe masa a la escala de compactificación, pues es el pseudo-bosón de Goldstone absorbido por las excitaciones de Kaluza-Klein  $h_{\mu\nu}^{(m)}$ , por lo que el escalar que emerge será un escalar físico sin masa, puesto que no puede ser retirado de la teoría.

A continuación se hará un análisis del sector escalar para dos dimensiones extra. Será de utilidad observar la representación matricial del campo  $h_{MN}$  para este caso. Esta es

$$\begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} & h_{03} & h_{0\bar{5}} & h_{0\bar{6}} \\ h_{10} & h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{1\bar{5}} & h_{1\bar{6}} \\ h_{20} & h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{2\bar{5}} & h_{2\bar{6}} \\ h_{30} & h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{3\bar{5}} & h_{3\bar{6}} \\ h_{50} & h_{51} & h_{52} & h_{53} & h_{5\bar{5}} & h_{5\bar{6}} \\ h_{\bar{6}0} & h_{\bar{6}1} & h_{\bar{6}2} & h_{\bar{6}3} & h_{\bar{6}\bar{5}} & h_{\bar{6}\bar{6}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

en ella se han resaltado las componentes del tensor que corresponden a la adición de más dimensiones extra: para una dimensión extra, se marcan en azul las componentes. Se nota que sólo habrá un vector, de Goldstone, y un escalar sin masa.

### A.1. Nulidad de las matrices de masa

En el caso de dos dimensiones extra, como se nota en (A.1), se tienen dos campos vectoriales, los cuales son  $h_{\mu 5}^{(m)}$  y  $h_{\mu 6}^{(m)}$ . Uno de estos es el pseudo-bosón de Goldstone, en tanto que el otro recibe masa a la escala de compactificación. A su vez, es posible observar que habrá tres objetos escalares  $\psi_1^{(m)} = h_{55}^{(m)}$ ,  $\psi_2^{(m)} = h_{66}^{(m)}$  y  $\psi_3^{(m)} = h_{56}^{(m)}$ .

Una vez que se han tratado los términos de masa provenientes de la ecuación (3.47), es posible escribirlos como

$$\frac{1}{2} \left( \psi_1^{(m)}, \psi_2^{(m)}, \psi_3^{(m)} \right) \mathfrak{M}_{Sc}^{(m)} \begin{pmatrix} \psi_1^{(m)} \\ \psi_2^{(m)} \\ \psi_3^{(m)} \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

siendo  $\mathfrak{M}_{Sc}^{(m)}$  la matriz de masas escalar, la cual tiene la forma

$$\mathfrak{M}_{Sc}^{(m)} = \begin{pmatrix} m_{(m)}^2 - 2p_5^{(m)} p_5^{(m)} & 0 & -2p_5^{(m)} p_6^{(m)} \\ 0 & m_{(m)}^2 - 2p_6^{(m)} p_6^{(m)} & -2p_5^{(m)} p_6^{(m)} \\ -2p_5^{(m)} p_6^{(m)} & -2p_5^{(m)} p_6^{(m)} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Sin embargo, su diagonalización no es simple. Esta se lleva a cabo con las matrices antes mencionadas  $\mathfrak{Q}^{(m)}$ . Sin embargo, es importante notar que ante la diagonalización, de los tres eigenvalores obtenidos, uno es cero.

Lo anterior es fácil de observar si uno piensa en la *nulidad* de la matriz (A.3); es claro que si se analiza el sistema de ecuaciones  $\mathfrak{M}_{Sc}^{(m)} |\phi\rangle = |0\rangle$  se obtendrá que la dimensión del espacio nulo generado por esta matriz es igual a uno. Lo anterior es evidente si se entiende que la nulidad de una matriz es exactamente igual al número de eigenvalores cero que esta tiene.

A su vez, al observar los términos masivos para los objetos escalares en (3.47), es posible dilucidar que para el caso de tres dimensiones extra, el número de ceros en los primeros tres renglones, aquellos concernientes a los escalares  $\psi_1^{(m)} = h_{55}^{(m)}$ ,  $\psi_2^{(m)} = h_{66}^{(m)}$ ,  $\psi_3^{(m)} = h_{77}^{(m)}$ , es decir, del tipo  $\psi_i^{(m)} = h_{\bar{\rho}\bar{\rho}}^{(m)}$ , es igual a 3, mientras que en los otros tres renglones, concernientes a los escalares del tipo  $\psi_i^{(m)} = h_{\bar{\rho}\bar{\sigma}}^{(m)}$ , con  $\bar{\rho} \neq \bar{\sigma}$ , contendrán 1 cero cada uno. La nulidad en este caso es igual a 2, por lo que habrá 2 eigenvalores iguales a cero en la matriz de masas diagonalizada.

Para el caso de cuatro dimensiones extra, el análisis pertinente permite observar que para los renglones respectivos a los 4 escalares  $\psi_i^{(m)} = h_{\bar{\rho}\bar{\rho}}^{(m)}$  contienen seis entradas iguales a cero, en tanto que los renglones concernientes a los otros 6

escalares  $\psi_{\bar{i}}^{(m)} = h_{\bar{\rho}\bar{\sigma}}^{(m)}$ , con  $\bar{\rho} \neq \bar{\sigma}$ , contendrán tres componentes iguales a cero. La nulidad en este caso es igual a 3, habrá tres eigenvalores iguales a cero.

Así pues, en el caso de  $n$  dimensiones extra en general, el número de ceros en las filas de la matriz de masas concernientes a los  $n$  escalares del tipo  $\psi_{\bar{i}}^{(m)} = h_{\bar{\rho}\bar{\rho}}^{(m)}$  es igual a  $n(n-1)/2$ , en tanto que el número de ceros en los renglones correspondientes a los  $n(n-1)/2$  escalares del tipo  $\psi_{\bar{i}}^{(m)} = h_{\bar{\rho}\bar{\sigma}}^{(m)}$ , con  $\bar{\rho} \neq \bar{\sigma}$ , es igual a  $(n-1)(n-2)/2$ , para  $n > 2$  (en el caso  $n = 2$  ya se vio que el número de ceros para estos renglones es igual a uno). De esta forma, la nulidad de la matriz  $n$ -dimensional es igual a

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} = n-1 \quad (\text{A.4})$$

de donde se sigue que el número de eigenvalores iguales a cero de esta matriz será igual a la nulidad, i.e.  $n-1$ . Esto permite dilucidar que el número de escalares sin masa y que resultan ser pseudo-bosones de Goldstone escalares es igual a  $n-1$  para  $n > 2$ .





# Bibliografía

- [1] I. García-Jiménez, A. Granados-González, M. Huerta-Leal, G. I. Nápoles-Cañedo, H. Novales-Sánchez, J.J. Toscano. *Symmetry in the extra-dimensional Yang-Mills theory and its Kaluza-Klein effective description (2018)*. (Enviado a Int. J. Phys. A.). arxiv:1801.07843v1
- [2] M. Huerta-Leal, H. Novales-Sánchez, J. J. Toscano. *A gauge-invariant approach to asymptotic freedom in Yang-Mills theories with universal extra dimensions*. Phys. Rev. D. **101**, 095038 (2020)
- [3] M. Fierz, W. Pauli, Proc. Roy. Soc. Lond. A **173**, 211 (1939)
- [4] H. van Dam, M. Veltman. *Massive and massless Yang-Mills and gravitational fields*. Nucl. Phys. B. **22** (2): 397-411 (1970)
- [5] D. Boulware, S. Deser. *Can gravitation have a finite range?*. Phys. Rev. D. **6** (12): 3368-3382.
- [6] C. de Rham, G. Gabadadze. *Generalization of the Fierz–Pauli Action (2010)*. arXiv:1007.0443v2
- [7] I. García-Jiménez, M. A. López Osorio, E. Martínez-Pascual, H. Novales-Sánchez, J. J. Toscano. *Standard Model with extra dimensions I: The Kaluza-Klein mass generating mechanism and the classical lagrangian*. arXiv:1603.03128.
- [8] M. Huerta-Leal. *Materia oscura en teorías de Yang-Mills con dimensiones extra* Tesis, Licenciatura.
- [9] M. A. López Osorio, E. Martínez-Pascual, H. Novales-Sánchez, J. J. Toscano. *Hidden Symmetries induced by a canonical transformation and gauge structure of compactified Yang-Mills theories*. Phys. Rev. D, 88:036015, Aug 2013. doi: 10.1103/PhysRevD.88:036015.
- [10] Alberto Escalante, Melissa Rodríguez-Zárate. *Canonical and symplectic analysis of actions describing linearized gravity*. Eur. Phys. J. Plus (2019) **134**: 152.

- [11] Stephani, H. *General Relativity: An introduction to Special and General Relativity*. Cambridge University Press, Third Edition (2004).
- [12] Toscano, J. *Notas de QFT*. Recuperadas en el transcurso de 2017-2018.
- [13] Ghalati, R. N. *Constraint Analysis of Linearized Gravity and a Generalization of the HTZ Approach*.
- [14] Hugo García-Compeán, Francisco J. Turrubiates. *Ground-state Wigner functional of linearized gravitational field*. arXiv:1109.1036v1 (6 Sep 2011).
- [15] Feynman, R. P., Moringo, F. B., Wagner, W. G. *Feynman Lectures on Gravitation*. Addison-Wesley Publishing Company (1995).
- [16] Veltman, M.J.G. *Quantum Theory of Gravitation*, in Methods in Field Theory, R. Balian and Jean Zinn-Justin, editors, North-Holland Publishing Company (1975).
- [17] Carroll, S. *Spacetime and Geometry. An introduction to General Relativity*. Pearson. Pearson New International Edition, 2014.
- [18] Hirata, C. M. *General Relativity: Lecture VIII, Linearized Gravity*. Lectures impartidas en Caltech, <http://www.tapir.caltech.edu/~chirata/ph236/lec08.pdf>
- [19] J.W. Wagenaar, T.A. Rijken. *On the Quantization of the Higher Spin Fields*. arXiv:0905.3893v1 (February 25, 2013)
- [20] S. Folkerts, C. Germani, N. Wintergerst. *Massive spin-2 theories*. arXiv:1310.0453v2. (6 Dec 2013)