



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE  
PUEBLA

---

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

MEDIDAS SBR EN UN SISTEMA DE DOS FUNCIONES  
CUADRÁTICAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

P R E S E N T A:

Laura Angelica Cano Cordero

Director de tesis:  
Dr. Gamaliel Blé González

Puebla, Pue.

Abril 2016

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>i</b>
<b>Introducción</b>	<b>ii</b>
<b>1. La familia logística</b>	<b>1</b>
1.1. Propiedades Básicas . . . . .	1
1.2. El diagrama y la constante de Feigenbaum . . . . .	13
1.3. Comportamiento tras el punto de Feigenbaum . . . . .	15
1.4. Sensibilidad a condiciones iniciales y exponente de Lyaunov . . . . .	17
1.5. Análisis de la función logística $f_\mu$ con $\mu = 4$ . . . . .	20
<b>2. Medidas SBR en la <math>Q</math>-familia</b>	<b>28</b>
2.1. La familia logística alternada . . . . .	28
2.2. Resultados básicos de la $Q$ -familia . . . . .	30
2.3. Parámetros estocásticos en la $Q$ -familia . . . . .	36
2.3.1. Construcción del conjunto $\wp$ . . . . .	36
2.3.2. Medida del conjunto $\wp$ . . . . .	41
2.3.3. Propiedades ergódicas de los elementos en $\wp$ . . . . .	42
2.3.4. Puntos de densidad de $\wp$ . . . . .	43
2.3.5. Teorema de Jakobson alternado . . . . .	45
<b>3. Huesos: definición y propiedades</b>	<b>47</b>
3.1. Introducción . . . . .	47
3.2. Geometría del hueso . . . . .	48
3.3. Propiedades dinámicas de los elementos de un hueso . . . . .	52
3.4. Curvas de Feigenbaum . . . . .	53

3.5. Propiedad regular o estocástica en la $Q$ -familia . . . . .	55
<b>4. Diagrama de bifurcación por hilos</b>	<b>57</b>
4.1. Nacimiento de bifurcaciones . . . . .	58
4.2. Los diagramas de bifurcación como grafos . . . . .	60
4.3. La región de conexidad . . . . .	63
4.4. Convergencia de diagramas de bifurcación en $I_Q$ . . . . .	64
<b>A. Topología dinámica y teoría ergódica</b>	<b>65</b>
A.1. Topología dinámica . . . . .	65
A.2. Teoría ergódica . . . . .	66
A.3. Consecuencias topológicas y dinámicas . . . . .	68
A.4. Atractores . . . . .	69
<b>Conclusiones</b>	<b>73</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>75</b>

# Agradecimientos

No pudo iniciar estas líneas sin agradecer profunda e infinitamente al M.C. Juan Francisco Estrada García por su apoyo constante, paciencia y motivación durante casi una década, sin él no habría llegado tan lejos sobre todo durante toda la realización de esta tesis. También, me gustaría agradecer al Dr. Gamaliel Blé, por sus consejos y guía.

Asimismo, quiero expresar mi eterna gratitud a la Dra. Patrica Soto cuya colaboración y ayuda desinteresada en el último tramo del camino hicieron posible que la presente investigación doctoral pudiera llegar a buen puerto.

Igualmente expreso mi gratitud a los doctores, que a continuación menciono, que como sinodales enriquecieron con su trabajo de revisión el presente manuscrito: Dr. Arnoldo Bezanilla (BUAP), Dr. Jorge Bustamante (BUAP), Dr. Carlos Cabrera (UNAM), Dr. Manuel Falconi (UNAM), Dr. Alberto Escamilla (BUAP), Dr. David Herrera Carrasco (BUAP), Dr. Francisco J. Mendoza (BUAP) y Dr. Guillermo Sienra (UNAM).

Por último, y no por ello menos importante, manifiesto mi gratitud a: el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) y a la Fundación Sofía Kovaleskáya, por el apoyo económico proporcionado para la realización y término de esta investigación doctoral.

# Introducción

A finales del siglo XVIII, se desarrollaron los primeros trabajos para entender y predecir el crecimiento de organismos vivos; entre los más célebres tenemos por ejemplo, el modelo geométrico de Thomas Malthus, [25], y el **modelo logístico** de Pierre Francois Verhulst, publicado bajo el título **Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement**, véase [43]. Este último modelo considera que el crecimiento poblacional es exponencial al principio, pero que al cabo de un tiempo aparece la competición entre los miembros de la población por los recursos existentes, frenando el crecimiento y alcanzando una cota en el número de efectivos.

La ecuación logística en su forma discreta ha mostrado ser, a pesar de su simplicidad, uno de los objetos más fascinantes de la matemática como lo muestra el artículo de Robert May, [28]. Al igual que sus antecesores May estableció un modelo demográfico que describe en tiempos discretos la evolución de una población a partir del conocimiento de la misma en un instante inicial. Matemáticamente, el modelo logístico, en su forma discreta, se rige por una ecuación en diferencias de la forma:

$$x_n = \mu x_{(n-1)}(1 - x_{(n-1)}), \quad (1)$$

donde  $x_n$  es un número entre cero y uno que representa la proporción de población existente al máximo de población posible.

May comprobó que al cambiar los valores del único parámetro de la Ecuación 1, ésta presentaba soluciones muy distintas y a veces muy complejas, además de presentar una gran cantidad de soluciones de acuerdo al valor del parámetro que se consideraba. Estos cambios de comportamiento fueron estudiados de manera paralela por **Mitchell Feigenbaum**, quien en sus artículos [12, 14, 13] muestra la existencia de las llamadas **constantes**

**de Feigenbaum**, cocientes que aparecen en los diagramas de bifurcación de esta teoría. Los diagramas de bifurcación son los valores límite de sucesiones del tipo  $x_{n+1} = \lambda f(x_n)$ , donde  $f$  es una función real, definida positiva, tres veces derivable sobre  $[0,1]$  y con un único valor máximo sobre este intervalo. El valor de estas constantes es independiente de la función, fenómeno que se conoce en la literatura como **Universalidad**.

Por otra parte, también se ha mostrado la veracidad de la **Conjetura de Fatou**; [15], [23], en la familia logística, es decir, que el conjunto de parámetros con un ciclo atractor es un conjunto abierto y denso en el espacio de parámetros  $(0,4]$ . En [18] Jakobson probó que los parámetros estocásticos forman un conjunto de medida positiva respecto a la medida de Lebesgue. Este resultado representa el estudio ergódico del comportamiento de las órbitas generadas por los elementos de la familia logística, mostrando que en la familia logística existen parámetros que admiten una única **medida SBR**.

Las medidas SBR deben su nombre a Sinai, Bowen y Ruelle y tienen su origen en la Mecánica Estadística. En 1968, **Sinai** construyó para los difeomorfismos de Anosov ciertas particiones llamadas **particiones de Markov**, [38]. Estas particiones le permitieron identificar puntos en el espacio fase con configuraciones de sistemas lattice de dimensión uno. En [39], desarrolló para sistemas de Anosov una Teoría de Gibbs análoga a la Mecánica Estadística. Las medidas SBR son casos especiales de medidas de Gibbs. Casi simultáneamente, **Bowen** extendió la construcción de particiones de Markov a los atractores Axioma A, [6]. **Ruelle**, por su parte en [36] introdujo los conceptos de equilibrio y el principio variacional al Axioma A. En general, que un sistema dinámico posea una medida SBR  $\mu$  significa que existe un subconjunto  $S$  de medida positiva de Lebesgue tal que, para todas las órbitas generadas por los elementos de  $S$ , la medida  $\mu$  está dada por

$$\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{S^i},$$

donde  $\delta$  es la medida de Dirac. Un caso particular, de medidas SBR son las medidas absolutamente continuas, y a aquellas funciones que admiten una medida absolutamente continua, se les conoce como **estocásticas**.

La existencia de una medida SBR es un problema difícil a nivel matemáti-

co. Al contrario de las medidas ergódicas, no hay resultados generales sobre la existencia de medidas SBR. El ejemplo más general para el cual su existencia puede ser probado es para los atractores Axioma A, véase [36]. Para el caso de Sistemas Dinámicos Discretos en la familia logística se ha mostrado que la medida de Lebesgue en  $(0,4]$  de los parámetros regulares y estocásticos es total, [24]. En términos de la existencia de medidas SBR se puede decir que, los parámetros que admiten una medida SBR en la familia logística forman un conjunto de medida total en el espacio de parámetros.

El estudio del comportamiento de la familia logística ha sido fructífero, abarcando diferentes ramas dentro de los Sistemas Dinámicos. Por otra parte, derivado nuevamente de un trabajo de Dinámica Poblacional, véase [20], surge la **Familia Logística Alternada**. Esta familia modela el crecimiento poblacional de una especie de insecto en la época de reproducción (primavera) y de bajas temperaturas (invierno).

El modelo se rige por la composición alternada de cualesquiera dos funciones de la familia logística, esto es, un elemento de la familia logística alternada es de la forma  $F_{a,b} = f_a \circ f_b$  con  $f_a(x) = ax(1-x)$  y  $f_b(x) = bx(1-x)$ .

Los sistemas dinámicos alternados vistos como un objeto matemático son una rama nueva de la matemática, cuyo estudio se ha llevado a cabo en los trabajos realizados por A. Radelescu, [33],[34], y por Blé-Castellanos- Falconi en 2011, [4]. En el primer trabajo se estudió el comportamiento de la entropía vía los huesos, el cual fue un concepto introducido en [30] para el estudio de polinomios cúbicos, y en el segundo se estudió la conexidad de los parámetros regulares.

Un aspecto interesante en el modelo logístico alternado es que, la familia logística es un subconjunto de esta nueva familia de funciones. Así, en el espacio de parámetros de la familia logística alternada existen parámetros estocásticos, regulares y Feigenbaum en un conjunto de medida cero. Por lo que en esta tesis, se investigan las propiedades que se preservan de la familia logística en la familia logística alternada obteniéndose los siguientes teoremas:

1. Los parámetros estocásticos en la familia logística alternada forman un conjunto de **medida positiva** en el espacio de parámetros de la

familia logística alternada. En particular, se muestra que la composición alternada de dos parámetros estocásticos es un parámetro estocástico.

2. Los parámetros regulares y estocásticos forman un conjunto de medida total en los huesos y en una vecindad de los huesos.
3. Los parámetros de Feigenbaum existen en la familia logística alternada.
4. Para la región en la cual la familia logística alternada tiene un único punto crítico, los diagramas de bifurcación asociados para un  $a$  fijo, convergen en la métrica de Hausdorff al diagrama de bifurcación de la familia de funciones  $F_{2b}$ , con  $b \in (0, 4]$ .

Estos resultados son abordados en detalle a lo largo de esta tesis y se distribuyen de la siguiente manera; en el **Capítulo 1** se presenta de manera sucinta algunos resultados derivados del estudio de la familia logística (parámetro de Feigenbaum, tipos de órbitas, bifurcaciones, entre otras).

En el **Capítulo 2** se estudia la existencia de parámetros que admiten una medida absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue (estocásticos), y la medida de dichos parámetros en el espacio de parámetros; lo cual es una generalización del teorema de Jakobson, este estudio forma parte de un artículo a publicarse en la revista **Pioneer Journal of Mathematics and Mathematical Science**; [3].

En el **Capítulo 3** se aborda la problemática de describir las características de los atractores para esta familia. Sin embargo, dicho estudio se realiza para los huesos, concepto que introdujera Tresser y Milnor en [30] para funciones cúbicas.

Por último, en el **Capítulo 4** se investiga el comportamiento del diagrama de bifurcación de la familia logística alternada, por líneas.

# Capítulo 1

## La familia logística

En este capítulo se presentan algunos resultados relacionados con el estudio de la familia logística, y que serán utilizados a lo largo de esta tesis.

### 1.1. Propiedades Básicas

La **familia logística** está definida por la siguiente regla de correspondencia:

$$f_{\mu}(x) = \mu x(1 - x),$$

donde  $\mu$  indica el crecimiento de una población con recursos limitados. Gráficamente esta función es una parábola, que intersecta al eje  $x$  en  $(0,0)$  y  $(1,0)$ , véase la Figura 1.1.

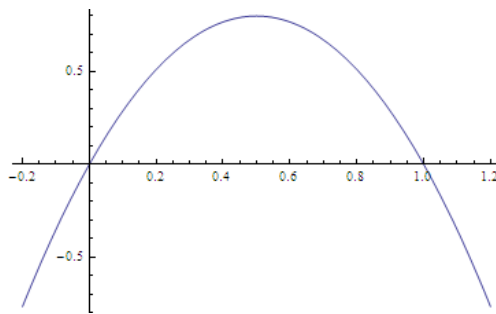


Figura 1.1: Gráfica de la función logística  $f_{\mu}$  con  $\mu=3.2$ .

Para valores de  $\mu$  entre 0 y 4, la altura de la parábola estará contenida en el intervalo cerrado  $[0,1]$ , véase Figura 1.2.

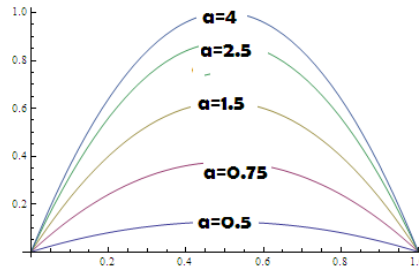


Figura 1.2: Gráficas asociadas a los elementos de la familia logística.

Algunas propiedades de la familia logística son:

**Proposición 1.1.1** *La familia logística satisface:*

1. Para cada parámetro  $\mu \in (0, 4]$ , se tiene

$$f_{\mu}(0) = 0 = f_{\mu}(1).$$

2. La familia logística es una familia creciente de funciones, es decir, para todo  $x \in (0, 1)$  y  $\mu_1 < \mu_2$  se satisface:

$$f_{\mu_1}(x) < f_{\mu_2}(x).$$

3. Si  $c = 1/2$  y  $\mu \in (0, 4]$ , entonces la función  $f_{\mu}$  es estrictamente creciente en  $[0, c]$  y estrictamente decreciente  $[c, 1]$ .

4. Para cada parámetro  $\mu \in (0, 4]$ , la **derivada Schwarziana**, en símbolos  $S(f_{\mu})(x)$ , es negativa siempre que  $x \neq c$ , donde

$$S(f_{\mu})(x) = \frac{D^3 f_{\mu}(x) D f_{\mu}(x) - \frac{3}{2} (D^2 f_{\mu}(x))^2}{(D f_{\mu}(x))^2}.$$

5. Existen  $l > 1$ ,  $L > 0$  y una vecindad  $U(c)$  tal que

$$\frac{|x - c|^{l-1}}{L} \leq |D f_{\mu}(x)| \leq L |x - c|^{l-1}$$

para todo  $x \in U(c)$ .

**Demostración:** (1) Si  $\mu \in (0, 4]$ , entonces

$$f_\mu(0) = 0(1 - 0) = 1(1 - 1) = f_\mu(1).$$

Ahora probemos el inciso (2). Sean  $x_0 \in (0, 1)$  y  $\mu_1, \mu_2 \in (0, 4]$  tales que  $\mu_1 < \mu_2$ , entonces

$$f_{\mu_1}(x_0) = \mu_1 x_0(1 - x_0) < \mu_2 x_0(1 - x_0) = f_{\mu_2}(x_0).$$

Mostremos el inciso (3). Sean  $x \in (c, 1)$  y  $\mu \in (0, 4]$  dado que  $x > \frac{1}{2}$  se sigue que  $1 - 2x < 0$ , por lo que  $Df_\mu(x) = \mu(1 - 2x) < 0$  de lo que se sigue el resultado.

Ahora veamos la veracidad del inciso (4). Si  $x_0 \in (0, 1)$  con  $x_0 \neq \frac{1}{2}$ , entonces,

$$\begin{aligned} S(f_\mu)(x_0) &= \frac{D^3 f_\mu(x_0) Df_\mu(x_0) - \frac{3}{2} D^2 f_\mu(x_0)^2}{Df_\mu(x_0)^2} \\ &= -6\mu^2 < 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

para todo  $\mu \in (0, 4]$ .

Finalmente mostremos el inciso (5). Si  $l=2$  y  $L > 8$ , entonces

$$\frac{|x - \frac{1}{2}|}{8} < |p_\mu(x)| = \mu |1 - 2x| = 2\mu |x - \frac{1}{2}| < 8 |x - \frac{1}{2}|. \blacksquare$$

**Observación 1.1.2** (a) Cuando el punto crítico de una función satisface el inciso 5 de la Proposición 1.1.1 se le llama **punto crítico no plano**.

(b) Dado que la familia logística es un polinomio, en particular, es una función de clase  $C^\infty$ .

Antes de dilucidar sobre la iteración de la familia logística se probará que la familia logística es una familia de funciones **no singulares**, recordar que, si  $(\Omega, f, \mathcal{B}, \lambda)$  es un espacio de probabilidad se dice que  $f$  es una función no singular con respecto a una medida  $\lambda$  si  $\lambda(A) = 0$  implica que  $\lambda(f^{-1}(A)) = 0$  para todo  $A \in \mathcal{B}$ , donde  $\mathcal{B}$  denota a la  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\Omega$ .

**Proposición 1.1.3** *La familia logística es una familia de funciones no singulares.*

**Demostración.** Sean  $f_a$  un elemento de la familia logística y  $A$  un elemento en  $\mathcal{B}$ , donde  $\mathcal{B}$  es la  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $[0, \frac{a}{4}]$ , tal que  $\lambda(A) = 0$ .

Dado que  $\lambda(A) = 0$  por definición tenemos que para cada  $\epsilon > 0$  existe una familia numerable de subintervalos cerrados  $R_i$  de  $[0, \frac{a}{4}]$  tales que:

- (i)  $A \subset \cup_{i=1}^{\infty} R_i$  y  $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(R_i) < \epsilon$ .
- (ii)  $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(f_a^{-1}R_i) < \frac{\epsilon}{2}$

Dado que  $R_i$  es un subintervalo de  $[0, \frac{a}{4}]$ , entonces para todo  $i$  los subintervalos  $R_i$  son de la forma  $[\alpha_i, \beta_i]$  para  $0 \leq \alpha_i < \beta_i < \frac{a}{4}$ . Más aún,  $f_a$  es una función unimodal en  $[0,1]$  por lo tanto satisface:

- (a) Existe la función inversa  $\hat{f}_a$  de  $f_a$  con dominio en  $[f_a(\alpha_i), f_a(\beta_i)]$
- (b)  $f_a^{-1}(R_i)$  es un subintervalo cerrado en  $[0,1]$ , para cada  $i$ .

Así,  $f_a^{-1}(R_i) = [f_a^{-1}(\alpha_i), f_a^{-1}(\beta_i)] = [\delta_i, \eta_i] \cup [\xi_i, \theta_i]$ , para cada  $i$ . De la Fórmula de Cardano, se sigue que  $\delta_i, \xi_i < \alpha_i$  y  $\eta_i, \theta_i < \beta_i$ . Así,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(f_a^{-1}(R_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda([\delta_i, \eta_i] \cup [\xi_i, \theta_i]) < 2 \sum_{i=1}^{\infty} \lambda([\alpha_i, \beta_i]) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(R_i) < \epsilon.$$

Por lo tanto,  $\lambda(f^{-1}(A)) = 0$ . De lo que se se sigue la proposición. ■

En otro orden de ideas, de ahora en adelante se estudiará el comportamiento de la  $n$ -ésima iterada de los elementos de la familia logística, donde la  $n$ -ésima iterada de  $f_\mu$  en el punto inicial  $x_0$  se define como:

$$\underbrace{(f_\mu \circ f_\mu \circ \cdots \circ f_\mu)}_{n \text{ veces}}(x_0).$$

Si **iteramos** un elemento de esta familia, observaremos la dinámica discreta que genera la función. Como se mencionó anteriormente, para iterar una función se necesita un valor inicial  $x_0$ , a la imagen de  $x_0$  bajo  $f_\mu$ , le llamamos  $x_1$ , luego  $x_2 = f_\mu(x_1)$ . Por lo tanto, obtenemos una sucesión  $\{x_n\}$  de números reales tal que  $x_n = f_\mu(x_{n-1})$ .

Una forma sencilla de visualizar la iterada de una función, es trazar la función identidad y la función  $f_\mu$ , comenzamos a dibujar líneas siguiendo los puntos  $(x_0, x_0)$ ,  $(x_0, f_\mu(x_0) = x_1)$ ,  $(x_1, x_1)$ ,  $(x_1, x_2 = f_\mu(x_1))$ ,  $(x_2, x_2)$ ,  $(x_2, x_3)$ ,  $(x_3, x_3)$ , y así sucesivamente, véase la Figura 1.3.

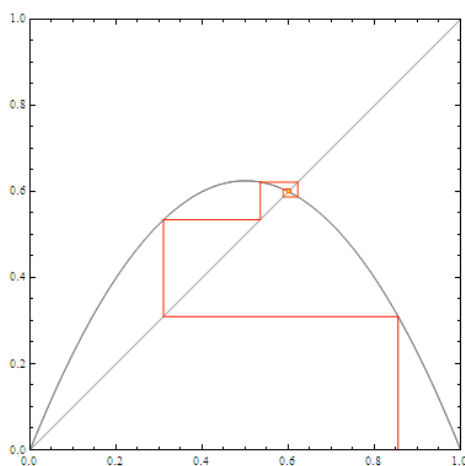


Figura 1.3: Iteración de  $x_0 = 0.855$  bajo  $f_{2.5}$ .

En la iteración de una función se observa un caso particular, como el que se presenta en la Figura 1.3, esto es, para algún  $n \in \mathbb{N}$  se satisface que  $f_\mu^n(x_0) = x_0$ . Cuando la órbita de un punto  $x_0$  satisface estas condiciones recibe el nombre de **órbita periódica**. En particular, si consideramos  $n = 1$  obtenemos los **puntos fijos** de  $f_\mu$ . Por otra parte, el **punto Misiurewicz**, se presenta cuando la ecuación,  $f^n(x) = f^{n+m}(x)$  se satisface para algunos enteros positivos  $n$  y  $m$ .

Para cada  $\mu \in (0, 1]$  la función  $f_\mu$  tiene a 0 como único punto fijo en el intervalo  $[0, 1]$ , véase la Figura 1.4.

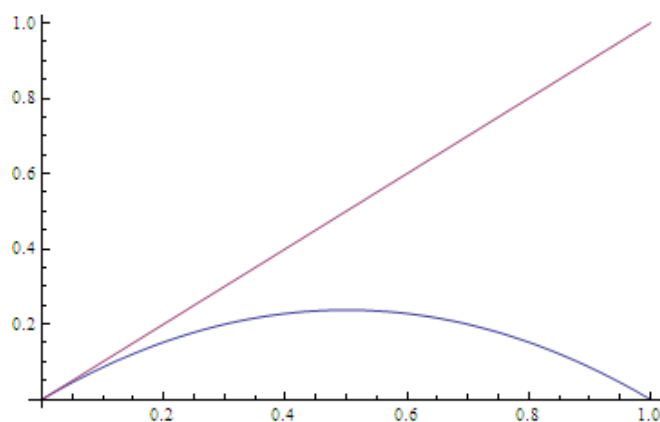


Figura 1.4: Elementos de la familia logística con un solo punto fijo.

Considerando la iterada bajo  $f_\mu$  con  $\mu \in (0, 1]$  de cualquier condición inicial  $x_0$ , como lo muestra la Figura 1.5, vemos que converge a cero, esto es, la **cuenca de atracción de 0** que se define como  $\{x \in [0, 1] : \lim_{n \rightarrow \infty} f_\mu^{(nk)}(x) = 0\}$  y es  $[0, 1]$ , formalmente la demostración puede encontrarse en [9].

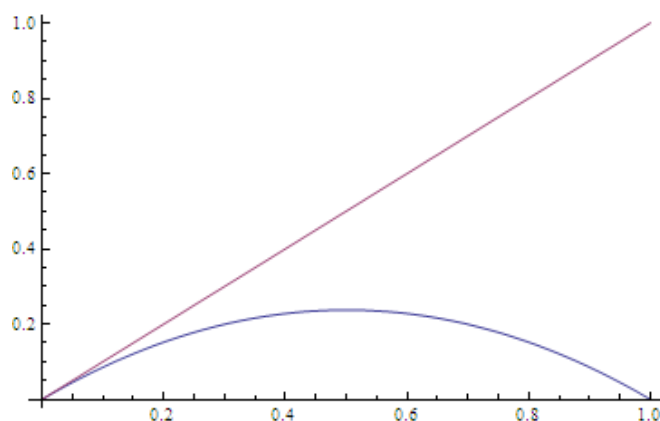


Figura 1.5: Órbita de  $x_0 = 0.25, 0.5, 0.8$  bajo  $f_{0.3}$ .

A medida que incrementamos el valor de  $\mu$ , el comportamiento de las iteradas cambia, como lo muestra la Figura 1.6, y con ello la cuenca de atracción de las condiciones iniciales, generando que la dinámica de  $f_\mu$  sea atraída a la

intersección de la parábola con la línea identidad, véase Figura 1.7.

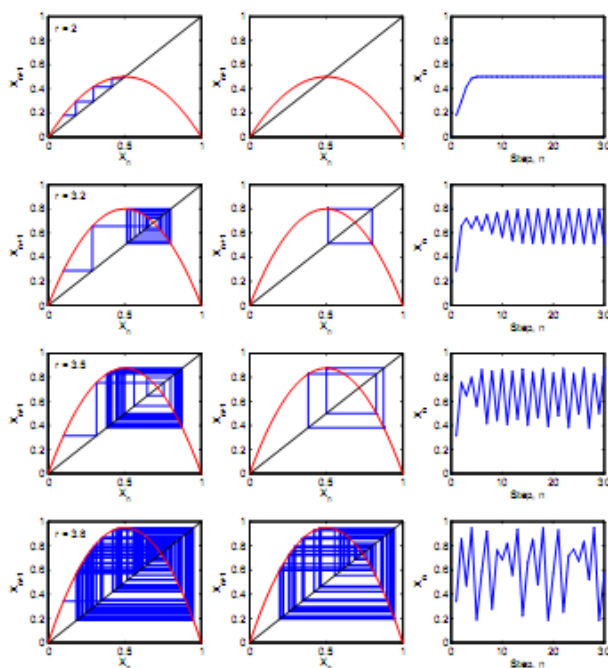


Figura 1.6: La iterada de 0.2 bajo distintos valores  $\mu$ .

En la Figura 1.6 observamos que el atractor está cambiando, lo cual se debe a que un punto atractor satisface las siguientes condiciones:

1. El punto  $x_0$  es un punto fijo de  $f_\mu$ , es decir,  $f_\mu(x_0) = x_0$ .
2. El valor absoluto de su derivada es menor o igual a uno.

Las dos condiciones se satisfacen para los parámetros  $\mu \in (1, 3)$  y  $x_0 = 1 - \frac{1}{\mu}$ . Sin embargo, cuando  $\mu = 3$  podemos observar un cambio como lo muestra la Figura 1.8.

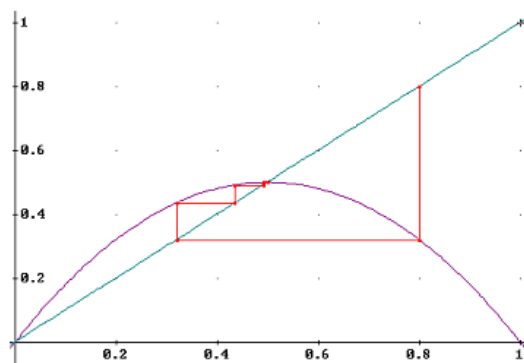


Figura 1.7: La órbita de 0.8 para  $\mu = 2$ .

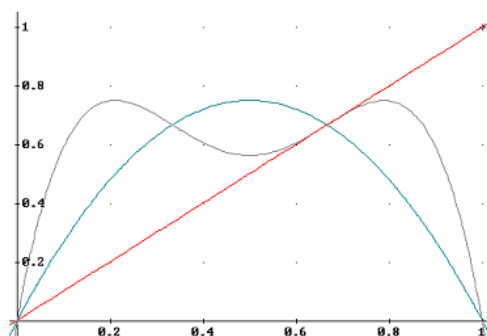
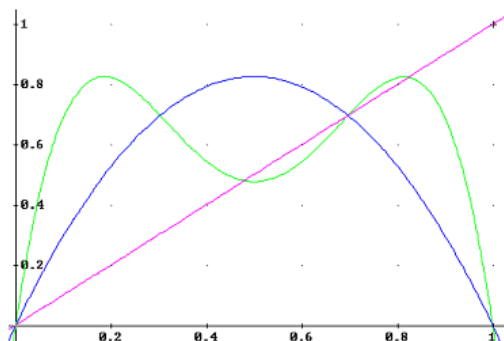
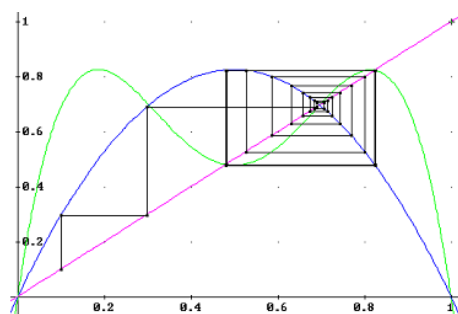


Figura 1.8: Gráfica de la función  $f_3$  y su segunda iterada.

Si examinamos valores mayores a 3, podemos observar que la gráfica de la función  $f_\mu^2$  interseca la línea identidad en cuatro puntos distintos, véase Figura 1.9. Si consideramos la iteración de la función logística para parámetros  $\mu$  mayores a 3, veremos que el ciclo de periodo 2 atractor está dado precisamente por los puntos donde  $f_\mu^2$  interseca a la línea identidad, véase Figura 1.10.

Resolviendo la ecuación  $f_\mu^2(x_0) = x_0$ , podemos encontrar los elementos del 2-ciclo: Dado que  $f_\mu^2(x_0) = \mu(\mu x_0(1 - \mu x_0))(1 - \mu x_0(1 - \mu x_0))$ , esta expresión es un polinomio de grado cuarto, cuyas raíces son:

$$0, 1 - \frac{1}{\mu}, \frac{\mu + 1 \pm \sqrt{(\mu - 3)(\mu + 1)}}{2\mu}.$$

Figura 1.9: Gráfica de la función  $f_3$  y su iterada  $f_3^2$ .Figura 1.10: Gráfica de  $f_{3.1}$  y  $f_{3.1}^2$ .

Dado que  $0$  y  $1 - \frac{1}{\mu}$  son los puntos fijos de  $f_\mu$ , entonces  $\frac{\mu+1 \pm \sqrt{(\mu-3)(\mu+1)}}{2\mu}$  son los elementos del ciclo periódico de periodo 2. Más aún, estos últimos resultan ser atractores para  $3 < \mu < 1 + \sqrt{6}$ , y repulsores para los parámetros mayores a  $1 + \sqrt{6}$ . Para dichos parámetros, es posible determinar numéricamente la existencia de ciclos periódicos atractores de periodo 4, encontrando los ceros del polinomio, de grado 8,  $f_\mu^4(x) = x$ . Geométricamente hablando, podemos asegurar la existencia de estas soluciones observando el comportamiento de la gráfica de la función  $f_\mu^4$  con la función identidad, como lo muestra la Figura 1.11.

**Observación 1.1.4** (a) Si  $f_\mu$  es una función regular, entonces los elementos del ciclo satisfacen que el  $\omega$  límite de casi todo punto en  $[0,1]$  converge a uno de ellos.

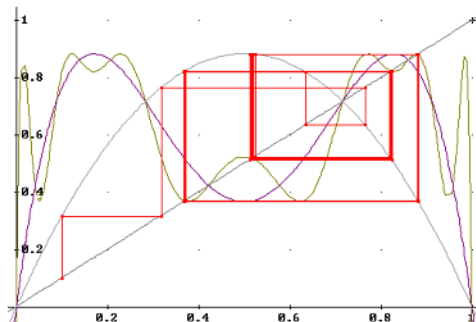


Figura 1.11: Gráfica de la función  $f_{3.7}$ .

(b) La órbita periódica generada por un punto  $x_0$  se clasifica, de acuerdo a su **multiplicador**, esto es el valor de la derivada en  $x_0$ , en tres tipos:

- (i) **Atractora** si  $0 < |Df^n(x_0)| < 1$ ;
- (ii) **Repulsora** si  $|Df^n(x_0)| > 1$ ;
- (iii) **Neutral** si  $|Df^n(x_0)| = 1$ .

**Lema 1.1.5** Una órbita de periodo  $n$  para algún  $n \in \mathbb{N}$  es super atractora si, y sólo si  $\frac{1}{2}$  es un elemento de la órbita.

**Demostración:** Sea  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  un ciclo super atractor de periodo  $n$ , si, y sólo si  $Df_\mu^n(x_i) = 0$  para algún  $1 < i < n$  si, y sólo si  $\prod_{i=1}^n Df(x_i) = 0$  si y sólo si para algún  $i \in \{1, \dots, n\}$   $Df(x_i) = 0$  si, y sólo si para algún  $i \in \{1, \dots, n\}$   $x_i = \frac{1}{2}$ . ■

**Observación 1.1.6** Para endomorfismos continuos del intervalo en general, el lema anterior afirma que una órbita es super atractora si, y sólo si el punto crítico de la función es un elemento de la órbita.

Dado que la familia logística es una familia de polinomio cuadráticos con derivada Schwarziana negativa, es posible saber algunos elementos que constituyen a la cuenca de atracción como lo muestra el siguiente teorema.

**Teorema 1.1.7** [40] Sea  $f$  un endomorfismo continuo de un intervalo compacto  $I$  clase  $C^3$  con derivada Schwarziana negativa, entonces:

- (a) La cuenca de atracción de cualquier punto periódico contiene ya sea un punto crítico de  $f$  o un punto de la frontera de  $I$ .
- (b) Cada punto periódico neutral es atractor.
- (c) No existen intervalos de puntos periódicos.

Por otra parte, retomando el comportamiento de dinámico tenemos que a medida que aumenta el periodo del ciclo, el grado del polinomio también lo hace, así que determinar los elementos del ciclo de manera explícita se convierte en una tarea del Análisis Numérico. Este fenómeno genera la existencia de órbitas periódicas de periodo  $2^k$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ , generándose así una sucesión de parámetros  $\mu_n$  tal que  $f_{\mu_n}$  tiene un ciclo periódico atractor de periodo  $2^n$ . Más aún, dado que esta sucesión es acotada y creciente y por ende, convergente. Al parámetro de convergencia de la sucesión de parámetros  $\{\mu_n\}$  se le denomina **parámetro de Feigenbaum**.

Numéricamente M. Feigenbaum demostró que el parámetro que lleva su nombre, denotado por  $\mu_\infty$ , es igual 3.5699456.... así  $\mu_\infty < 4$ . Una demostración de este hecho se hace a continuación para ello es necesario enunciar la siguiente definición y un teorema técnico.

**Definición 1.1.8** Sean  $m, n \in \mathbb{N}$ . Consideremos el siguiente orden en el conjunto de los números naturales, llamado orden de Sharkovskii,

$$3 \succ 5 \succ 7 \succ \dots \succ 2n + 1 \succ \dots \succ 6 \succ 10 \succ 14 \succ \dots \succ 2 \times (2n + 1) \succ \dots \succ 2^m \times 3 \succ 2^m \times 5 \succ 2^m \times 7 \succ \dots \succ 2^m \times (2n + 1) \succ \dots \succ 2^n \succ \dots \succ 2 \succ 1.$$

**Teorema 1.1.9 ([37], Teorema 6)** Sea  $f : I \rightarrow I$  una función continua en el intervalo cerrado  $I$ , la cual tiene una órbita de periodo  $n$ . Si  $n \succ m$  en el orden de Sharkovskii entonces  $f$  tiene una órbita periódica de periodo  $m$ .

Ahora demostraremos que  $\mu_\infty < 4$ , para esto es necesario enunciar y demostrar los siguientes lemas.

**Lema 1.1.10** Para cada polinomio de la familia logística, existe  $c \in [-2, \frac{1}{4}]$  tal que  $f_\mu$  y  $g_c = x^2 + c$ , son topológicamente conjugados. De hecho, la conjugación es una función afín de la forma  $ax + b$ .

**Demostración:** Queremos demostrar que se satisface la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}\phi \circ f_\mu &= g_c \circ \phi \\ \phi(\mu x(1-x)) &= g_c(ax+b) \\ a(\mu x(1-x)) + b &= (ax+b)^2 + c \\ a\mu x - a\mu x^2 + b &= a^2 x^2 + 2abx + b^2 + c.\end{aligned}$$

Para que la igualdad se cumpla necesitamos:

$$\begin{aligned}-a\mu &= a^2 \\ a\mu &= 2ab \\ b &= b^2 + c.\end{aligned}$$

Resolviendo obtenemos que si  $b = \frac{\mu}{2}$ ,  $a = -\mu$  y  $c = \frac{\mu}{2} - \frac{\mu^2}{4}$ , entonces  $f_\mu$  es conjugada a  $g_c$ . Lo que concluye la demostración del lema. ■

**Lema 1.1.11** *La función  $f_4$  tiene un ciclo de periodo tres.*

**Demostración:** Por el Lema 1.1.10,  $f_4$  es conjugada a un polinomio cuadrático de la forma  $g_c$ , donde  $c = -2$ . Por ende,  $f_4^3$  y  $g_{-2}^3$  son conjugados también (este hecho, se demuestra por inducción sobre  $n$ .)

Si  $g_{-2}$  tiene un punto periódico de periodo tres, entonces  $f_\mu$  también lo tiene. Para obtener el ciclo de periodo tres en  $g_{-2}$  basta resolver la ecuación  $g_{-2}^3(x) = x$ . De ésta última ecuación se obtiene que sus raíces son:

$$\{-1, 2, -1.8794, 0.3473, 1.5321, -0.44504, -1.8019, 1.247\},$$

donde  $\{0.3473, -1.8794, 1.5321\}$  es un ciclo de periodo tres para  $g_{-2}$ .

Por ende,  $f_4$  tiene un ciclo de periodo tres; lo que demuestra el lema. ■

**Proposición 1.1.12** *En la familia logística, el parámetro de Feigenbaum satisface que  $3 < \mu_\infty < 4$ .*

**Demostración:** Dado que la sucesión  $\{\mu_n\}$  es monótona creciente, se tiene que  $\{\mu_n\}$  es una sucesión convergente y converge a  $\sup \mu_n$ . Así,  $\mu_n < \mu_\infty$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto,  $\mu_\infty > 3$ .

Si suponemos que  $\mu_\infty = 4$ , entonces por el Teorema 1.1.9,  $f_{\mu_\infty}$  sólo tiene órbitas periódicas de periodo  $2^n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Por el Lema 1.1.10,  $f_4$  tiene un ciclo de periodo tres y por el Teorema 1.1.9 tiene ciclos de todos los periodos, lo cual contradice que  $f_4$  solo tiene ciclos de periodo  $2^n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por ende,  $\mu_\infty < 4$ . ■

La dinámica de la familia logística en el parámetro  $\mu_\infty$  es difícil de describir y de entender en comparación a lo que hemos explicado anteriormente, porque el  $\omega$ -límite de casi todo Lebesgue  $x_0 \in (0, 1)$  bajo  $f_{\mu_\infty}$  es un conjunto de Cantor de medida cero. Una demostración detallada de esta proposición, sobrepasa el cometido de este apartado por lo que solo daremos una descripción de la dinámica del mismo.

Si observamos detenidamente para cada  $n \in \mathbb{N}$  podemos encontrar  $2^n$  intervalos cerrados  $I_1^n, \dots, I_{2^n}^n$  tales que  $f_{\mu_\infty}$  envía los puntos cíclicamente de un intervalo al siguiente. Así,  $f_{\mu_\infty}(I_i^n) = I_{i+1}^n$  y  $f_{\mu_\infty}(I_{2^n}^n) = I_1^n$ .

Las órbitas periódicas repulsoras de periodo  $2^{n-1}, \dots, 2, 1$  se encuentran entre los espacios de los segmentos, por lo que eventualmente cualquier punto excepto los elementos de estos ciclos son enviadas a algún  $I_i^n$  y eventualmente son enviados a  $I_1^n$  donde permanecen para cualquier  $n$ . Los  $2^{n+1}$  intervalos  $I^{n+1}$  y las órbitas repulsoras de periodo  $2^n$  están contenidas en el intervalo  $I^n$ , entonces podemos considerar  $I^\infty := \{x \in I^n \forall n \in \mathbb{N}\}$ . Dicho conjunto es cerrado y no vacío (pues es la intersección anidada de conjuntos cerrados y no vacíos) e invariante bajo  $f_{\mu_\infty}$  (por construcción). De hecho, es posible mostrar que la longitud de los intervalos  $I^n$  converge a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ . Por ende,  $I^\infty$  es un conjunto de Cantor.

## 1.2. El diagrama y la constante de Feigenbaum

Si representamos en unos ejes los puntos a los que converge la órbita del punto  $(1/2)$  bajo la aplicación logística, para los diferentes valores del

parámetro  $\mu$ , se obtiene el diagrama de bifurcación que recoge en cierto sentido el comportamiento de toda la familia logística. El hecho de utilizar siempre el punto  $1/2$  para detectar los atractores se basa en que cuando existe un ciclo atractivo, el punto  $1/2$  siempre está en la cuenca de atracción del ciclo, véase Figura 1.12.

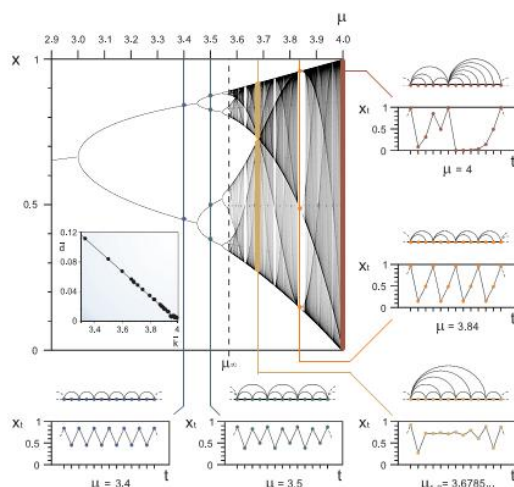


Figura 1.12: Diagrama de bifurcación de la familia logística.

Si denotamos por  $m_1 = 3, m_2 = 1 + \sqrt{6}, \dots$ , a los puntos en que se produce la duplicación del periodo en la curva logística y definimos  $d_k := m_{k+1} - m_k$  y  $D_k := \frac{d_k}{d_{k+1}}$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , tenemos:

$$D_1 = 4.7514\dots, D_2 = 4.6562\dots, D_3 = 4.6682\dots, D_4 = 4.6687\dots$$

Se puede probar que  $D := \lim D_k = 4.6692016091029\dots$ . A este valor  $D$  se le llama **constante de Feigenbaum** o **constante del caos**.

La constante de Feigenbaum es universal en el sentido de que si reemplazamos  $f_\mu$  por otra función unimodal (esto es, con un único punto crítico) se repite el fenómeno de duplicación de periodos. Estos ocurrirán en puntos diferentes a los de la aplicación logística y por lo tanto el punto  $m_\infty$  de entrada al caos será distinto. Sin embargo, el valor de  $D$  será el mismo que para

la aplicación logística.

### 1.3. Comportamiento tras el punto de Feigenbaum

Si observamos el diagrama de bifurcación que acabamos de construir se observa que con posterioridad al parámetro de Feigenbaum ocurren diferentes tipos de comportamiento, a saber:

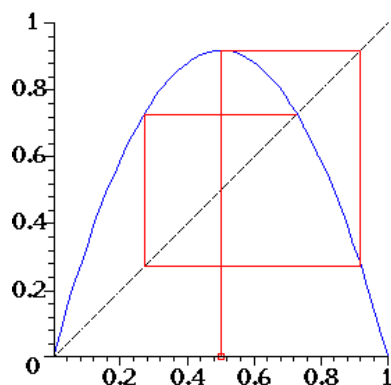
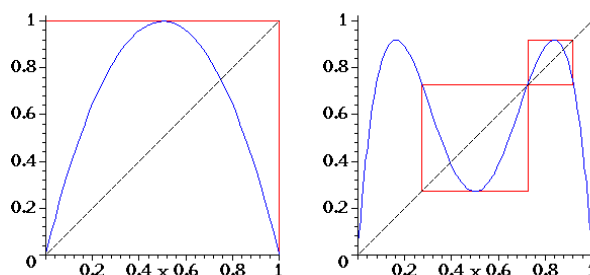
1. Para  $c=3.627$  aparece una órbita periódica atractora de periodo 6.
2. Para  $c=3.702$  aparece una órbita periódica atractora de periodo 7.
3. Para  $c=3.74$  aparece una órbita periódica atractora de periodo 5.

Para  $c=3.83..$  aparece una órbita periódica atractora de periodo 3 que se transforma en una órbita periódica atractora de periodo 6 y ésta en una de periodo 12, repitiéndose todo el esquema anterior de duplicación del periodo a una escala mucho más reducida.

Consideremos el punto  $a_1 = 3.6785$  que corresponde con el punto en que confluyen las dos ramas. Equivalentemente, si recorremos los parámetros en sentido decreciente,  $a_1$  puede considerarse como un punto en el que una franja se divide en 2. En primer lugar, observamos que  $a_1$  se caracteriza porque  $f_{a_1}^3(1/2)$  es igual al punto fijo de  $f_{a_1}$ .

Para observar lo que tiene de particular el punto  $a_1$  consideramos las gráficas de  $f_4$  y de  $f_{a_1}^2$ .

La gráfica de  $f_{a_1}^2$  contiene dos cuasiparábolas (en realidad son curvas de cuarto grado) cuya imagen rellena el cuadrado correspondiente y que son por lo tanto equivalentes a la gráfica de  $f_4$ . Según disminuye el parámetro, la altura de las cuasiparábolas disminuye y las imágenes de los intervalos ya no son los intervalos completos. El comportamiento de  $f_c$  para valores un poco menores que  $a_1$  va a ser un reflejo, con alternancia entre esos dos intervalos, del comportamiento de  $f_c$  para valores un poco menores que 4.

Figura 1.13: Gráfica de la función  $f_{a_1}$ .Figura 1.14: Gráfica de la función  $f_4$  y  $f_4^2$ .

A la derecha de  $a_1$  se pueden ver franjas, progresivamente más finas, correspondientes a 5-ciclos, 7-ciclos, ... , atractores. Por otra parte, estas franjas se repetirán, correspondiendo a  $2 \cdot 3$ -ciclos,  $2 \cdot 5$ -ciclos,  $2 \cdot 7$ -ciclos, ... , en el intervalo  $(a_2, a_1)$ . Análogamente, en  $(a_3, a_2)$  aparecerán franjas correspondientes a ciclos de periodo de la forma  $2k$  con  $k$  un número natural impar y así sucesivamente. Éstos, junto con los ciclos atractores de periodo  $2k$  que aparecían en la franja  $(0, m)$  nos dan ciclos atractivos de todos los periodos posibles.

Finalmente, para entender completamente la dinámica de la curva logística en  $[0, 4]$ , únicamente nos faltaría por estudiar lo que ocurre a la derecha

de  $a_1$ .

En esta región observamos que se alternan regiones caóticas con franjas que corresponden a periodos atractores. Existen un número infinito de tales franjas. La más prominente de éstas corresponde a un 3-ciclo atractor y sucede para valores del parámetro entre  $\mu = 1 + \sqrt{8} \approx 3.828$  y  $c \approx 3.857$ . Observamos que en esa franja vuelve a ocurrir el fenómeno de duplicación del periodo, visto para  $c \in (0, m_\infty)$ , aunque ahora todo sucede con relación a  $f_{a_1}$ . En un momento dado, ese 3-ciclo atractor se convierte en repulsor a la vez que aparece un 6-ciclo atractor, y así sucesivamente, siguiendo intervalos cuya longitud está regida por la constante de Feigenbaum, hasta llegar a un punto, equivalente a  $m_\infty$ , situado cerca de  $\mu = 3.8415$ . Esto ocurre simultáneamente en las tres ramas.

Para ver con un poco más de detalle como es la evolución de las órbitas en esta franja vamos a considerar los valores del parámetro en  $\mu = 3.828$ ,  $\mu = 3.82842$  y  $\mu = 3.839$  situados, respectivamente, justo antes de la franja, en el extremo izquierdo y en el interior, aunque antes de la duplicación del periodo. Veamos en la Figura 1.15 las series de tiempo de  $1/2$  en estos 3 casos.

## 1.4. Sensibilidad a condiciones iniciales y exponente de Lyapunov

En general, la series de tiempo asociadas a las órbitas generadas por los elementos de la familia no presentan un comportamiento tan predecible como el caso de los parámetros en  $(0, \mu_\infty)$  pues para  $\mu = 3.7$  la órbita de las condiciones iniciales  $x_0 = 0.45$  y  $x_1 = 0.451$  a pesar de que las condiciones iniciales se encuentran cercanas una de la otra, las órbitas divergen, véase Figura 1.16. Este comportamiento se conoce como **sensibilidad a condiciones iniciales**.

Otra manera de apreciar la sensibilidad a condiciones iniciales es observar la evolución de un pequeño intervalo de condiciones iniciales, véase Figura 1.17.

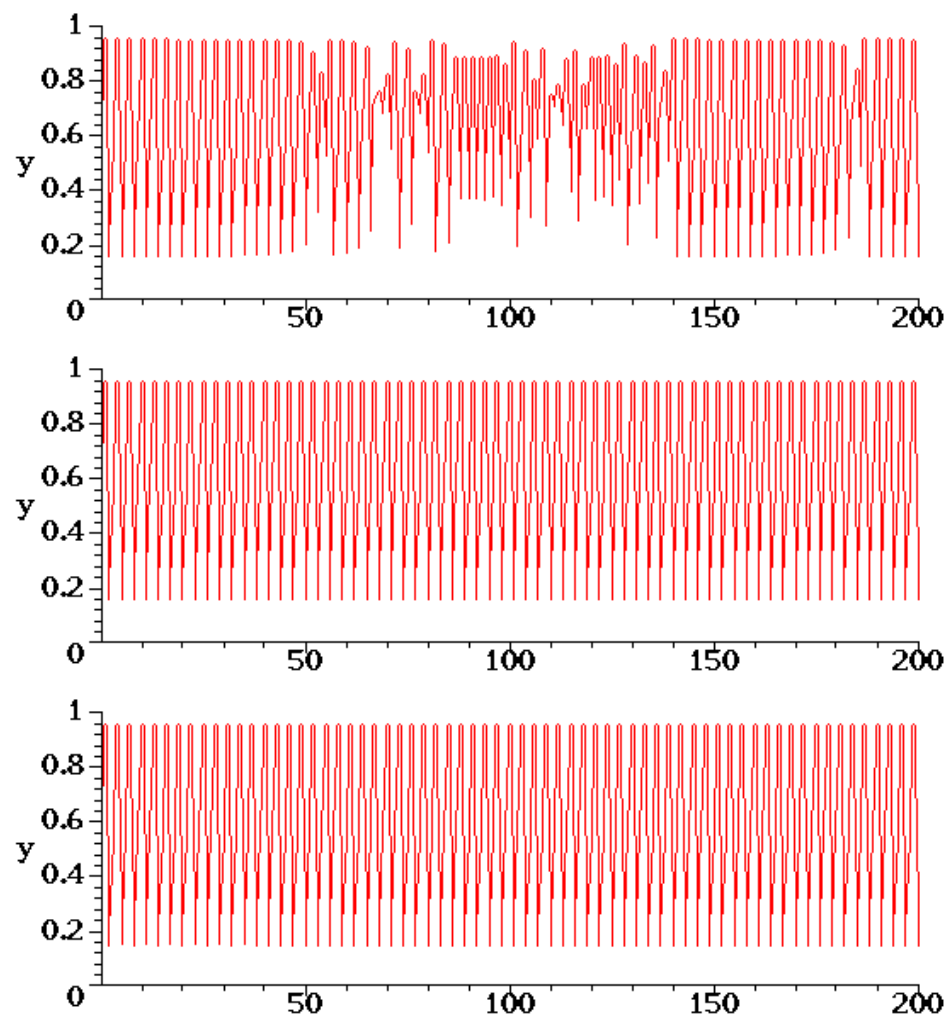


Figura 1.15: Series de tiempo de  $\mu = 3.828$ ,  $\mu = 3.82842$  y  $\mu = 3.839$ .

La sensibilidad a condiciones iniciales puede ser calculada mediante el **exponente de Lyapunov**. Dada una condición inicial  $x_0$ , consideramos un punto cercano  $x_0 + \delta$ , donde la separación inicial  $\delta$  es extremadamente pequeña. Sea  $\delta_n$  la separación después de  $n$  iteraciones. Si

$$|\delta_n| \approx |\delta_0 e^{n\lambda}|,$$

entonces  $\lambda$  es llamado el **exponente de Lyapunov**.

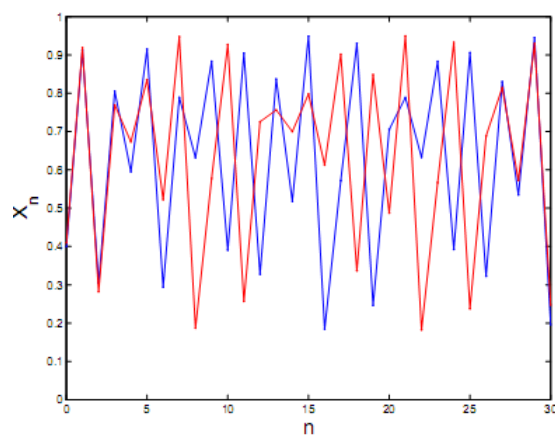


Figura 1.16: Sensibilidad a condiciones iniciales.

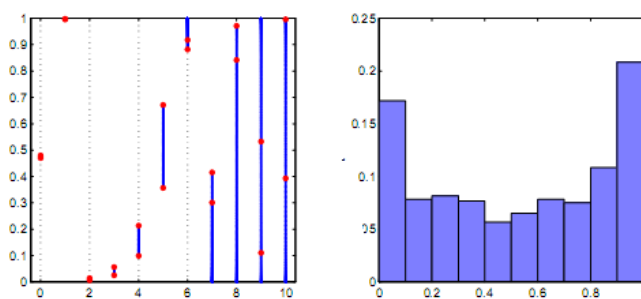


Figura 1.17: Sensibilidad a condiciones iniciales.

Una fórmula precisa y útil para  $\lambda$  en una condición inicial  $x_0$  es la siguiente:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |Df(x_i)| \right],$$

que en el caso de la familia logística se convierte en:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |r - 2rx_i| \right].$$

La Figura 1.18 muestra el exponente de Lyapunov para la familia logística, para los parámetros  $\mu$  tales que  $3 < \mu < 4$ . Podemos observar que  $\lambda$  permanece negativo para  $\mu < \mu^* = 1 + \sqrt{6}$ , y se aproxima a 0 en los puntos que corresponde al doblamiento de periodo. Los picos negativos corresponden a los  $2^n$  ciclos. El comienzo del caos es visible cerca de  $\mu = \mu^*$ , donde  $\lambda > 0$ .

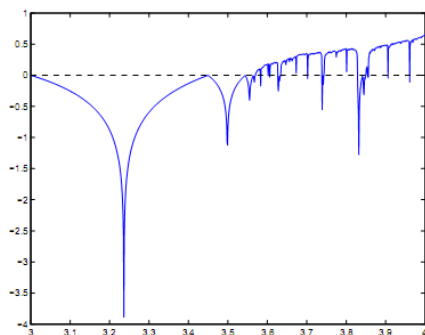


Figura 1.18: Comportamiento de  $\lambda$  para  $3 < \mu < 4$ .

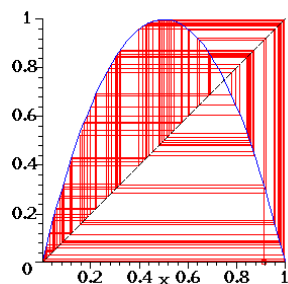
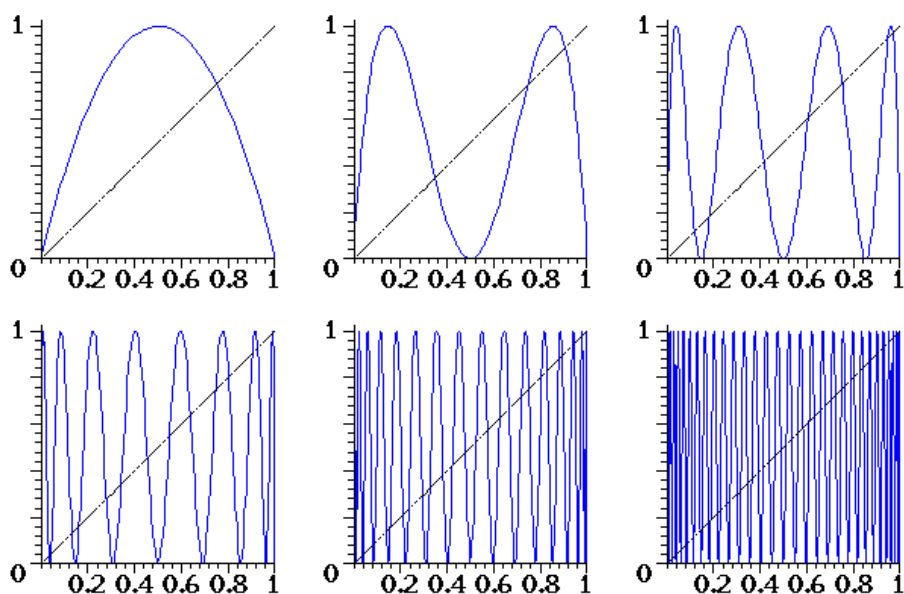
## 1.5. Análisis de la función logística $f_\mu$ con $\mu = 4$

En el caso cuando  $\mu = 4$  tenemos que la evolución de las gráficas de las iteraciones de  $f_4$  está dada por la Figura 1.19.

Se observa que hay puntos periódicos repulsores de todos los periodos posibles y que además éstos son densos, esto es, sea cual sea el subintervalo que escojamos existe siempre un punto periódico en ese intervalo, Figura 1.20.

Por otra parte, a pesar de esta componente de regularidad, la imagen de cualquier subintervalo, por pequeño que sea, acaba siendo todo  $[0,1]$ , lo cual puede observarse en la Figura 1.21.

El análisis del comportamiento de las órbitas para la función  $f_4$ , se realiza considerando el número de veces que un elemento de la órbita visita una

Figura 1.19: Iteraciones de  $f_4$ .Figura 1.20: Comportamiento de  $f_4$ .

vecindad dada, así como el número de iteradas en las que permanece en la vecindad. Para  $p_4$  debemos considerar la división del intervalo de la forma

$$I_k = \left[ \frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right), \quad k = 1, \dots, N.$$

Contemos el número de eventos que caen en  $I_k$ , para ello es necesario contar el número de iteradas  $x_0, x_1, \dots, x_m$  que caen en el intervalo  $I_k$ . Sea

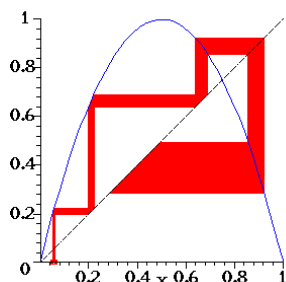


Figura 1.21: Iteración de un subintervalo  $J$  bajo  $f_4$ .

$n_k$  este número. Como queremos producir un conteo que sea independiente de la longitud de la órbita  $m$ , y, contando que la órbita tiene  $m + 1$  elementos, definimos

$$\eta_k = \frac{n_k N}{m + 1}.$$

Estos números varían entre 0 y  $N$  por definición, sumando hasta  $N$ ,

$$\eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_N = N.$$

En otras palabras,  $\frac{\eta_k}{N}$  puede ser interpretada como una probabilidad: es la probabilidad que acertemos correctamente (sin cálculo alguno) los intervalos  $I_k$  en los cuales un elemento de la órbita cae, escogida aleatoriamente de los primeros  $m + 1$  elementos de la órbita de  $x_0$ . Ahora podemos graficar columnas con peso  $\eta_k$  y ancho  $\frac{1}{N}$  en un histograma como el que se muestra en la Figura 1.22.

A medida que incrementamos el número de subintervalos  $N$  y la longitud  $m$  de la órbita, el efecto será una suavización de la forma como se muestra en la Figura 1.22. En el límite se obtiene la región acotada por la curva:

$$\nu(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}}. \quad (1.2)$$

En este caso, las órbitas generadas bajo  $f_4$ , pueden ser estudiadas mediante la medida de probabilidad,  $\int \nu$  donde  $\nu$  es como en (1.2). Más aún, como medida de probabilidad  $\int \nu$  es invariante y absolutamente continua. Así, la pregunta natural a plantearse es ¿qué condiciones debe satisfacer un

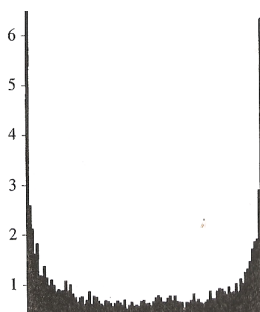


Figura 1.22: Histograma de la función  $f_4$ .

elemento de la familia logística para que admita una medida de probabilidad invariante y absolutamente continua?

Claramente, el parámetro no puede ser regular porque por la Observación 1.1.4 casi todo punto en la medida de Lebesgue converge a un elemento del ciclo atractor, tampoco puede ser Feigenbaum por ser el  $\omega$ -límite un conjunto de Cantor. Así nuestra interrogante se reduce a responder ¿bajo qué condiciones una función posee órbitas cuyo comportamiento tenga que estudiarse de manera ergódica? Para responder a esta interrogante, enunciaremos la siguiente definición y su correspondiente teorema.

**Definición 1.5.1** *Sea  $f$  un endomorfismo continuo del intervalo  $[0,1]$  decimos que  $f$  satisface la condición **Collet-Eckmann**, **(CE)**, si existen  $k > 0, \lambda > 1$  tales que  $|Df_\mu^n(c)| > k\lambda^n$ .*

**Teorema 1.5.2 ([9], Teorema 1.4)** *Sea  $f$  un endomorfismo continuo del intervalo  $[a,b]$ . Si  $f$  satisface la condición Collet-Eckmann entonces  $f$  admite una medida invariante absolutamente continua.*

En general, dar ejemplos de endomorfismos continuos que satisfagan la condición CE no es simple, sin embargo, el siguiente teorema facilita la tarea.

**Teorema 1.5.3 ([31], Teorema 1)** *Sean  $f$  un endomorfismo continuo de un intervalo compacto  $I$   $S$ -multimodal sin puntos atractores, y  $V \subset I$  un conjunto abierto que contenga todos los puntos críticos de  $f$ . Entonces existen  $C, \gamma > 0$  tales que si  $x, f(x), \dots, f^{n-1}(x) \notin V$ , entonces  $|Df^n(x)| \geq Ce^{\gamma n}$ .*

Más aún, existe  $K < 1$  tal que si  $J$  es un intervalo tal que  $f^k(J) \cap V = \emptyset$  for  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , entonces

$$\frac{|Df^n(x)|}{|Df^n(y)|} \leq K.$$

**Observación 1.5.4** Del Teorema 1.1 y el Teorema 1.5 se sigue que una función Misiurewicz satisface la condición **CE**.

**Definición 1.5.5** Sea  $f$  es un endomorfismo continuo del intervalo  $[a, b]$  tal que admite una medida invariante absolutamente continua, (**miac**), entonces a  $f$  se llama **función estocástica**.

En términos puramente de Teoría Ergódica, es posible caracterizar la existencia de parámetros estocásticos mediante el siguiente teorema.

**Teorema 1.5.6 ([41], Teorema 1)** Sea  $(\Omega, \mathcal{B}, \eta)$  un espacio de medida con medida normalizada  $\eta$ ,  $f$  una función no singular de  $\Omega$  en sí misma. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes.

1. Existe una medida normalizada  $f$ -invariante la cual es absolutamente continua respecto a  $\eta$ .
2. Existen  $\delta > 0$ , y  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , tales que

$$\eta(E) < \delta \Rightarrow \sup_{k \in \mathbb{N}} \eta(f^{-k}(E)) < \alpha, \forall E \in \mathcal{B}.$$

Como hemos visto anteriormente en la familia logística se presentan varios comportamientos dinámicos. Por ello, es necesario realizar una clasificación de los mismos. Recordar que un punto crítico de  $f_\mu$  es el punto  $x$  donde la derivada se anula, esto es,  $Df_\mu(x) = 0$ .

**Teorema 1.5.7 ([5], Teorema 2)** Sea  $f_\mu$  un elemento de la familia logística. Entonces el  $\omega$  límite de casi todo punto en  $[0, 1]$  satisface una de las siguientes condiciones:

1. Es un ciclo atractor (**regular**).
2. es un ciclo de intervalos que contienen al punto crítico (**estocástico**).

3. Es un conjunto minimal tal que el punto crítico es recurrente (**Feigenbaum**).

Por otra parte, si consideramos una familia de funciones definida en un compacto  $[a,b]$ , denotada por  $\mathcal{FU}$ , esto es, una familia de funciones de clase  $C^2$  tal que cada elemento  $g_u \in \mathcal{FU}$  satisface lo siguiente:

1. Tiene un único punto crítico cuadrático;
2. Tiene un punto fijo  $x_0$  el cual satisface que es repulsor y  $x_0 = a$  o  $x_0 = b$ ;
3. La función  $(x, a) \mapsto (g_u(x), Df_u(x), D^2f_u(x))$  es una función de clase  $C^1$ .

**Teorema 1.5.8 (Benedicks-Carleson)** ([10], Teorema 4.6.1) *Consideremos una familia  $\mathcal{FU}$  y  $a_* \in \mathcal{FU}$  tal que  $f_{a_*}$  es Misiurewicz y no tiene ciclos periódicos atractores. Más aún, supongamos que*

$$\frac{d}{da}(x_a - f_a(c)) \neq 0$$

*en  $a = a_*$ . Entonces existen constantes  $C_0$ ,  $\gamma > 0$  y un subconjunto  $E$  de parámetros que tienen a  $a_*$  como un punto de densidad tal que para cada  $a \in E$ ,*

$$|D^n f_a(a)| \geq C_0 e^{\gamma n} \text{ para todo } n \geq 1.$$

Como consecuencia de este teorema se obtiene el Teorema de Jakobson, que estudia los parámetros estocásticos solo para la familia logística. Sin embargo, para esta familia es posible determinar algunas otras propiedades como la entropía y los puntos de densidad. Antes de enunciar el Teorema de Jakobson es necesario definir el concepto de entropía.

**Definición 1.5.9** 1. Sean  $(X, d)$  un espacio métrico compacto y  $f$  un endomorfismo continuo de  $X$ .

Dados  $\epsilon > 0$  y  $n \in \mathbb{N}$ ; se dice que un subconjunto  $S \subset X$  es  $(n, \epsilon)$  **separado** si:

para  $x, y \in S, x \neq y \Rightarrow \exists m : 0 \leq m < n$ , tal que  $d(f^m(x); f^m(y)) > \epsilon$ .

2. Sea  $H(f, n, \epsilon)$  el número maximal de  $(n, \epsilon)$  conjuntos separados. La **entropía algebraica** de  $f$  se define como:

$$h(f) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_n \frac{1}{n} \log H(f; n; \epsilon).$$

**Corolario 1.5.10 (Jakobson)** ([10], pp. 403) Sea  $f_\mu : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ,  $\mu \in [0, 4]$ , la familia logística. Para  $\{f_\mu\}$  existe un subconjunto  $\mathcal{A} \subset [0, 4]$  de medida de Lebesgue positiva con las siguientes propiedades:

1. Si  $\mu \in \mathcal{A}$ , entonces  $f_\mu$  tiene una medida invariante absolutamente continua con entropía positiva.
2. El parámetro  $\mu = 4$  es un punto de densidad de Lebesgue de  $\mathcal{A}$ , esto es,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda(\mathcal{A} \cap [4 - \epsilon, 4])}{\epsilon} = 1. \quad (1.3)$$

Si bien el Teorema de Benedicks-Carleson proporciona una generalización del Teorema de Jakobson, en [19] se muestra una condición necesaria y suficiente para la existencia de miac's y, en [42] se muestra un enunciado que considera un espectro más amplio de funciones los cuales enunciaremos a continuación.

**Teorema 1.5.11 (Keller)** ([10], Teorema 5.3.2) Sea  $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  una función unimodal no plana en el punto crítico  $c$  con derivada Schwarziana negativa. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1.  $f$  tiene una miac;
2. El exponente de Lyapunov es positivo para casi todo  $x$ .

**Definición 1.5.12** Sea  $\{f_\alpha\}$  una familia de funciones a un parámetro de clase  $C^2$ . Decimos que  $\beta$  es un **parámetro Tsujii** si satisface las siguientes condiciones:

1. Todos los puntos críticos de  $f_\beta$  son no degenerados.
2. Los ciclos periódicos de  $f_\beta$  no son atractores.

3.  $f_\beta$  satisface que existen  $K > 0$  y  $\alpha > 1$  tales que

$$|Df^n(f(c))| \geq K \alpha^n, \text{ para } n \in \mathbb{N}.$$

4.  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \log |df_\beta(f_\beta^n(\eta))| = 0$ , para cualquier valor crítico  $\eta$  de  $f_\beta$ .

5.  $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\partial_t F(f_t^j(c), c)}{Df_t^j(f_t(c))} \neq 0$  para cualquier valor crítico  $c$  de  $f_t$  cuando  $t = \beta$  y  $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  dado por  $F(x, \alpha) = f_\alpha(x)$ .

**Teorema 1.5.13 ([42], Teorema 4.5)** *Sea  $\{g_\beta\}_{\beta \in [a, b]}$  una familia de funciones continuas de clase  $C^2$  de un conjunto compacto en sí mismo. Si la familia tiene un parámetro de Tsujii, entonces existe un subconjunto  $\mathbf{T} \subset [a, b]$  tal que:*

1. *La medida de Lebesgue de  $\mathbf{T}$  es positiva.*
2. *Casi todo parámetro  $t \in \mathbf{T}$  es un punto de densidad de Lebesgue.*

# Capítulo 2

## Medidas SBR en la $Q$ -familia

El presente capítulo versa sobre la existencia de funciones estocásticas en la  $Q$ -familia. La familia logística alternada o  $Q$ -familia es la familia de funciones cuárticas en la que cada elemento de la familia es de la forma  $F_{a,b} = f_a \circ f_b$ , donde  $f_a(x) = ax(1-x)$  y  $f_b(x) = bx(1-x)$  con  $a, b \in (0, 4]$ . Por lo que, el espacio de parámetros para la  $Q$ -familia es el conjunto  $(0, 4]^2$ , el cual se denotará por  $I_Q$ .

### 2.1. La familia logística alternada

La familia logística alternada se diferencia de la familia logística en diversos aspectos, que van desde el grado de la familia hasta la dimensión del espacio de parámetros.

A simple vista los cambios dinámicos que se presentan en la familia logística alternada como subconjunto de la  $Q$ -familia no deberían ser significantes; sin embargo, un primer cambio que tiene la  $Q$ -familia respecto a la familia logística es la forma de iteración gráfica. Del Capítulo 1, sabemos que la iteración gráfica en el caso de la familia logística se genera con la intersección alternada de la gráfica de la función con la función identidad, en el caso de la  $Q$ -familia se consideran las gráficas de las funciones  $f_a$  y  $f_b$  como lo muestra la Figura 2.1.

Otra diferencia que presenta la  $Q$ -familia con la familia logística es el orden de la periodicidad de los puntos fijos. Para ilustrar este hecho conside-

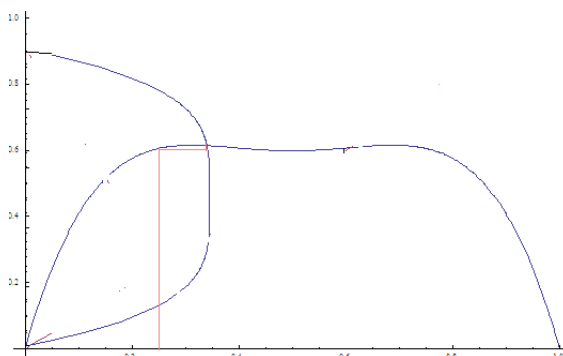


Figura 2.1: Iteración gráfica en la  $Q$ -familia.

remos  $\mu = 3$ , para este parámetro se sabe que es un parámetro de bifurcación de doble periodo, sin embargo, visto como un elemento de la familia logística alternada  $F_{33}$  es un parámetro de bifurcación tangencial.

El cambio en el comportamiento dinámico de  $F_{33}$  se debe a que la función  $\nu : [0, 1] \times [0, 4]^2 \rightarrow [-1, 1]$  dada por  $\nu(x_0, \mu, \mu) = DF_{\mu\mu}(x_0) = (-2 + \mu)^2$ , donde  $x_0 = 1 - 1/\mu$ , es un punto fijo de  $F_{\mu\mu}$ . Como la derivada es no negativa, la función  $F_{\mu\mu}$  es creciente, véase Figura 2.2.

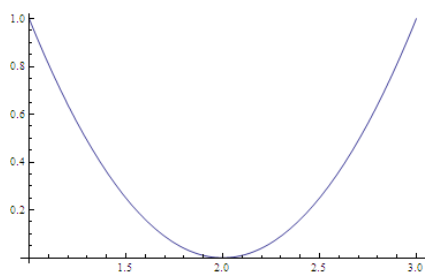


Figura 2.2: Gráfica de la función  $DF_{\mu\mu}$ .

Así, el cambio en el multiplicador de las órbitas periódicas genera un cambio sustancial en la forma del diagrama de bifurcación, como lo muestra la Figura 2.3.

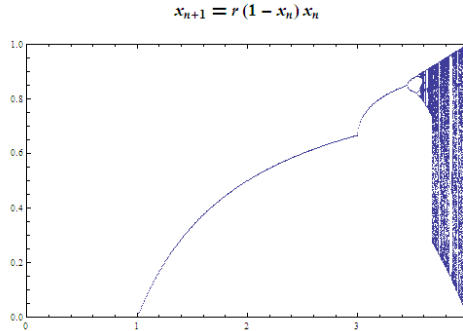


Figura 2.3: Diagrama de bifurcación de la familia de funciones  $F_{\mu\mu}$ .

En el sistema alternado ambas funciones afectan el comportamiento de la órbita de una condición inicial  $x_0$ . Uno de los efectos de este proceso desemboca directamente en el concepto de órbita periódica, cuya definición formal se da a continuación.

**Definición 2.1.1** *El conjunto de puntos  $\{x_1, \dots, x_{2n}\}$  tales que*

$$x_1 \xrightarrow{f_a} x_2 \xrightarrow{f_b} x_3 \xrightarrow{f_a} \dots \xrightarrow{f_a} x_{2n-1} \xrightarrow{f_b} x_{2n} \xrightarrow{f_b} x_1,$$

*recibe el nombre **diórbita**.*

A pesar de la diferencia en el número de elementos de un ciclo periódico de periodo  $n$  en la  $Q$ -familia y la familia logística, existe una relación entre las órbitas periódicas de una función logística  $f_a$  y las correspondientes diórbitas en la familia alternada  $F_{aa}$ , como lo muestra el siguiente lema.

**Lema 2.1.2 ([7], Teorema 1.3)** *Un punto es periódico de periodo  $2n$  en la  $Q$ -familia si, y sólo si es de periodo  $n$  o  $2n$  en el sistema sin alternar.*

## 2.2. Resultados básicos de la $Q$ -familia

En esta sección enunciamos algunos resultados básicos de la  $Q$ -familia .

**Definición 2.2.1** Sea  $f$  un endomorfismo continuo del intervalo  $[0,1]$ , se dice que  $f$  es  **$l$ -modal** si existen  $m$  puntos distintos  $c_1, \dots, c_m$  en  $(0,1)$  tales que en cada intervalo  $(c_i, c_{i+1})$ , la función es estrictamente creciente o decreciente, alternando el tipo de monotonicidad.

**Proposición 2.2.2** En la  $Q$ -familia las siguientes afirmaciones son válidas:

1. Si  $(a, b) \in (0, 4] \times [0, 2]$ , entonces  $F_{a,b}$  es una función unimodal.
2. Si  $(a, b) \in I_Q \setminus [0, 4] \times (0, 2]$ , entonces  $F_{a,b}$  es una aplicación 3-modal.

**Demostración:** Sean  $F_{a,b}$  y  $F_{b,a}$  elementos de la  $Q$ -familia, entonces los puntos críticos de  $F_{a,b}$  y  $F_{b,a}$  son:

$$\frac{1}{2}, \xi_{1b} := \frac{b + \sqrt{b^2 - 2b}}{2b}, \xi_{2b} = \frac{b - \sqrt{b^2 - 2b}}{2b},$$

$$\frac{1}{2}, \xi_{1a} := \frac{a + \sqrt{a^2 - 2a}}{2a}, \xi_{2a} := \frac{a - \sqrt{a^2 - 2a}}{2a}$$

respectivamente.

Por ende,  $\xi_{ka} \neq 0$  and  $\xi_{kb} \neq 0$  son números reales si, y sólo si  $a \geq 2$  y  $b \geq 2$ , respectivamente. De lo cual se sigue la proposición. ■

El comportamiento modal descrito en el lema anterior, se observa de manera más clara en el espacio de parámetros como lo muestra la Figura 2.4.

A continuación mostraremos las propiedades de los puntos críticos de la  $Q$ -familia.

**Lema 2.2.3** Los puntos críticos de la  $Q$ -familia son no planos.

**Demostración:** Dado que cada elemento de la  $Q$ -familia es la composición de polinomios, entonces la  $Q$ -familia es una familia de funciones de clase  $C^\infty$  funciones, por lo cual existe un  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $D^n f_{a,b}(c_i) = y_0$ , y donde  $c_i$  son los puntos críticos de la  $Q$ -familia y  $y_0$  es una constante, de lo que se sigue el resultado. ■

**Lema 2.2.4** Para todo  $(a, b) \in I_Q \setminus (\{2\} \times (0, 4] \cup (0, 4] \times \{2\})$  se cumple que, los puntos críticos de la  $Q$ -familia son no degenerados.

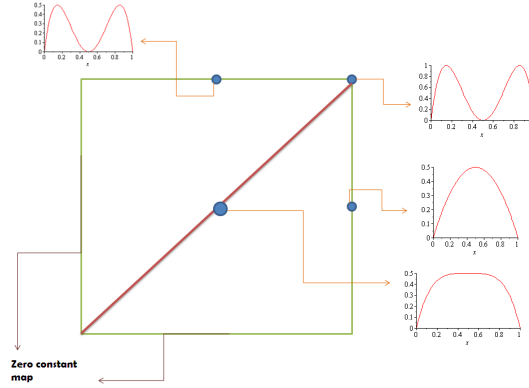


Figura 2.4: Comportamiento modal.

**Demostración:** Sea  $(a, b) \in I_Q \setminus (\{2\} \times (0, 4] \cup (0, 4] \times \{2\})$ , entonces por la regla de la cadena, tenemos que

$$D^2 F_{a,b}(x) = -2ab(b(1-2x)^2 + (1-2f_b(x)))$$

así por la Proposición 2.2.2 debemos considerar dos casos.

**Caso I.** Si  $(a, b) \in ([0, 4] \times (0, 2))$ , entonces el único punto crítico es  $\frac{1}{2}$ , y es no degenerado dado que

$$D^2 F_{a,b}\left(\frac{1}{2}\right) = -2ab\left(1 - 2f_b\left(\frac{1}{2}\right)\right) = -2ab\left(1 - \frac{b}{2}\right) \neq 0, \quad b \neq 2.$$

**Caso II.** Si  $(a, b) \in I_Q \setminus ((0, 4] \times (0, 2))$ , entonces los puntos críticos de  $F_{a,b}$  son  $\frac{1}{2}$  y  $\xi_{2b}$ . Por el caso anterior, solo resta probar la afirmación para  $\xi_{1b}$  y  $\xi_{2b}$ , la cual realizaremos solo para el punto crítico  $\xi_{2b}$  para el punto crítico  $\xi_{1b}$  la demostración es análoga.

Dado que:

$$DF_{ab}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{b^2 - 2b}}{2b}\right) = -2ab\left(\frac{\sqrt{b^2 - 2b}}{b} + b\left(1 + b\sqrt{b^2 - 2b}\right)^2\right), \quad (2.1)$$

y  $-2ab\left(\frac{\sqrt{b^2 - 2b}}{b} + b\left(1 + b\sqrt{b^2 - 2b}\right)^2\right)$  es distinto de cero para todo  $b \in (2, 4)$  se sigue el lema. ■

**Observación 2.2.5** Si un elemento de la  $Q$ -familia es una función tres modal, con puntos críticos  $c_1, c_2$  y  $\frac{1}{2}$ , entonces  $c_1 \in \omega(c_2)$ .

Las siguientes definiciones y resultados, se pueden encontrar en [21].

**Definición 2.2.6 ([21], Condición C)** Una función real  $f$  definida en un intervalo  $[a, b]$  se llama una  $C$ -**función** si  $f$  es continuamente diferenciable y su derivada  $f'$  tiene las siguientes propiedades:

- (a) La derivada de  $f$ ,  $Df$ , satisface que para todo  $x, y \in [a, b]$  con  $x \neq y$  existen  $\alpha > 1$  y  $C > 0$  tales que  $|Df(x) - Df(y)| \leq C \|x - y\|^\alpha$  (Condición de Hölder).
- (b) El número de puntos críticos  $a_i$  de  $f$  es finito.
- (c) Existen números positivos  $k^-(k^+)$  tales que

$$\left\| \log \frac{|f'(x)|}{|x - a_i|^{k^-(k^+)}} \right\|$$

es acotada en una vecindad izquierda (derecha) de  $a_i$ .

**Teorema 2.2.7 ([21], Teorema 2)** Sea  $f$  un endomorfismo continuo del intervalo, con  $f$  una  $C$ -función tal que admite una medida  $\mu$  invariante absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue (miac),  $\mu$  es de entropía positiva si, y sólo si se satisface la fórmula de Rohlin; esto es,

$$h(\mu) = \int \log |Df| d\mu.$$

Antes de proseguir es necesario enunciar la siguiente definición y un teorema.

**Definición 2.2.8** Sea  $f$  un endomorfismo continuo del intervalo  $[a, b]$  y sea  $J \subset [a, b]$ , se dirá que  $J$  es un **intervalo errante** si  $f^k(J) \cap f^l(J) = \emptyset$ , para toda  $l \neq k$ , ambos mayores o iguales a cero y el  $\omega$ -límite de  $J$  no es una órbita periódica.

**Teorema 2.2.9 ([10], Teorema 4A)** Sea  $f$  un endomorfismo continuo del intervalo cerrado  $[a, b]$  tal que sus puntos críticos son no planos, esto es, los puntos críticos satisfacen la Observación 1.1.2, entonces  $f$  no tiene intervalos errantes.

**Teorema 2.2.10** *Cada miembro de la  $Q$ -familia es una familia de  $C$ -funciones no singulares y sin intervalos errantes.*

**Demostración:** La demostración de este teorema se realizará en tres pasos; en el primero estableceremos que la  $Q$ -familia es una familia no singular, en el segundo que es una familia de  $C$ -funciones y por último que no tiene intervalos errantes.

**Paso I. La  $Q$ -familia es una familia de polinomios cuárticos no singular.**

Sea  $C \in \mathcal{B}$  de medida de Lebesgue  $\lambda$  cero. Entonces por la Proposición 1.1.3 se sigue que

$$\lambda_{I_Q}(f_a^{-1}(f_b^{-1}C)) = 0.$$

De lo que se tiene el resultado.

**Paso II. La  $Q$ -familia es una  $C$ -familia.**

Dado que  $F_{ab}$  es un polinomio cuártico, por ende, es una función diferenciable con a lo más tres puntos críticos; por lo que se cumple la propiedad (2) y sólo falta demostrar (1) y (3) de la Proposición 2.2.2. Primero demostraremos que  $F_{a,b}$  es 1-Hölder, esto es, para todo  $x, y \in (0, 1]$  se tiene:

$$| DF_{a,b}(x) - DF_{a,b}(y) | = O(|x - y|).$$

Calculando la derivada de  $F_{a,b}$  obtenemos que:

$$DF_{a,b}(x) = -ab(4bx^3 - 6bx^2 + 2x(b+1) - 1).$$

Así,

$$| DF_{a,b}(x) - DF_{a,b}(y) | \leq 1696 |x - y|.$$

De la regla de cadena se desprende que:

$$DF_{a,b}(x) = ab(1 - 2f_b(x))(1 - 2x) = 2ab(1 - 2f_b(x))\left(\frac{1}{2} - x\right). \quad (2.2)$$

Para probar la condición (3) de la Definición 2.2 es necesario considerar dos casos:

**Caso I. El parámetro**  $(a, b) \in (0, 4] \times (0, 2]$ .

Por la Proposición 2.2.2, sabemos que  $\frac{1}{2}$  es el único punto crítico de  $F_{a,b}$ .

Sea  $U := [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$  una vecindad derecha de  $\frac{1}{2}$ , entonces para cada elemento en  $U$  se cumple:

$$\begin{aligned} \left| \log \frac{|DF_{a,b}(x)|}{|\frac{1}{2} - x|} \right| &= \left| \log \frac{|2ab(1 - 2f_b(x))(x - \frac{1}{2})|}{|x - \frac{1}{2}|} \right| \\ &\leq \log 16 + \log 2 + |\log(f_b(x))|. \end{aligned}$$

Dado que  $\log(f_b(x))$  es una función continua en  $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ , entonces existe  $\xi \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$  tal que

$$|\log(f_b(x))| \leq |\log(f_b(\xi))| \quad \forall x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$$

Así,

$$\left| \log \frac{|DF_{a,b}(x)|}{|x - \frac{1}{2}|} \right| \leq \log 16 + \log 2 + |\log(f_b(\xi))| \quad \forall x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right].$$

**Caso II. El parámetro**  $(a, b) \in Q \setminus ((0, 4] \times (0, 2])$ .

En este caso,  $F_{a,b}$  tiene tres puntos críticos, a saber:

$$\frac{1}{2}, \xi_{1b} := \frac{1}{2} - \frac{b + \sqrt{b^2 - 2b}}{2b}, \quad \xi_{2b} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{b^2 - 2b}}{2b}.$$

Cuando el punto crítico es igual a  $\frac{1}{2}$  aplicamos el caso anterior.

La demostración de esta proposición para el punto crítico  $\xi_{1b}$  es análoga para  $\xi_{2b}$ . Por esta razón, probaremos el teorema sólo para  $\xi_{1b}$ .

Consideremos  $\alpha := \frac{\sqrt{b^2 - 2b}}{2b}$  y  $[\frac{1}{2} - \alpha, \frac{9}{20}]$  una vecindad de  $\alpha$  entonces:

$$\begin{aligned} \left| \log \frac{|DF_{a,b}(x)|}{|x - (\frac{1}{2} - \alpha)|} \right| &= \left| \log \frac{|2ab(1 - 2f_b(x))(x - \frac{1}{2})|}{|x - \frac{1}{2} + \alpha|} \right| \\ &\leq |\log |16(1 - 2f_b(x))|| + \left| \log \left| x - \frac{1}{2} \right| \right| + \\ &+ \left| \log \left| x - \frac{1}{2} + \alpha \right| \right|. \end{aligned}$$

Como el caso anterior la función  $\log |16(1 - 2f_b(x))|$  alcanza un valor máximo en  $\xi$ . Más aún,  $\log |x - \frac{1}{2}|$  y  $\log |x + \frac{1}{2} + \alpha|$  tiene un valor máximo  $\rho_1$  y  $\rho_2$  respectivamente. Entonces

$$\left| \log \frac{|DF_{a,b}(x)|}{|x - (\frac{1}{2} - \alpha)|} \right| \leq \xi + \rho_1 + \rho_2.$$

Lo cual prueba la afirmación para ambos casos.

**Paso III. La  $Q$ -familia no tiene intervalos errantes.** Dado que la  $Q$ -familia es una familia de funciones de clase  $C^\infty$ , y los puntos críticos son no planos, entonces por el Teorema 2.2.9 se sigue el paso. ■

### 2.3. Parámetros estocásticos en la $Q$ -familia

En este apartado se estudiará la existencia y medida de los parámetros estocásticos en la  $Q$ -familia. Para ello, se mostrará que existe un conjunto  $\mathcal{P} \subset I_Q$ , de medida de Lebesgue positiva tal que para toda  $(a, b) \in \mathcal{P}$ ,  $F_{ab}$  admite una miac. Además  $\mathcal{P} = \cup_{i=1}^6 C_i$  donde:

- (a)  $C_1 := \{(a, b) \in (0, 4] \times (0, 2] : F_{a,b} \text{ admite una miac}\}$
- (b)  $C_2 := \{(a, b) \in (c_\infty, 2] \times (0, 2] : F_{a,b} \text{ admite una miac}\},$
- (c)  $C_3 := \{(a, b) \in (0, 2] \times (0, 4] : F_{a,b} \text{ admite una miac}\}$  y
- (d)  $C_4 := \{(a, b) \in (b, 2] \times (0, 4] : F_{a,b} \text{ admite una miac}\},$
- (e)  $C_5 := \{(a, b) : f_a \text{ y } f_b \text{ admite una miac}\};$
- (f)  $C_6 := \{(b, a) : f_b \text{ y } f_a \text{ admit an miac}\},$

son subconjuntos de  $I_Q$  no vacíos y de medida de Lebesgue positiva en  $I_Q$ .

#### 2.3.1. Construcción del conjunto $\wp$

Para construir los subconjuntos  $C_1, C_2, C_3$  y  $C_4$  se introducirá el siguiente concepto.

**Definición 2.3.1** *Sea  $\alpha$  un parámetro en  $(0, 4]$  fijo.*

1. Un **hilo**  $h_\alpha$  en  $I_Q$  es la función

$$\Gamma_\alpha : (0, 4] \rightarrow I_Q$$

definida por  $\Gamma_\alpha(b) = F_{\alpha,b}$ .

2. El parámetro  $\alpha$  es la **punta del hilo**  $h_\alpha$ .

Geoméricamente los hilos son ilustrados en la Figura 2.5.

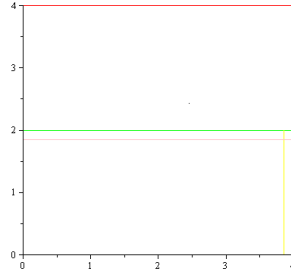


Figura 2.5: Hilos en el espacio de parámetros.

**Observación 2.3.2** Una consecuencia de la definición anterior, es la existencia de una laminación en el espacio de parámetros, en la cual la familia de funciones resultante depende de un solo parámetro.

Como sabemos una **laminación** es un espacio Hausdorff  $X$  junto con una cubierta  $\{U_i\}$  de subconjuntos de abiertos y funciones coordenadas  $\phi_i : U_i \rightarrow T_i \times D_i$ , donde  $D_i$  es homeomorfo a un dominio en un espacio euclideo y  $T_i$  es algún espacio topológico.

**Lema 2.3.3** Sean  $h_4$  y  $h_2$  hilos. Entonces en los hilos existen subconjuntos  $\mathfrak{A}$  y  $\mathfrak{B}$  de parámetros estocásticos con medida positiva de Lebesgue en los hilos

**Demostración:** Sea  $(a_i, 2)$  un elemento de  $\Lambda_2$  y consideremos el hilo  $h_{a_j,2}$ . Así, cada elemento en  $h_{a_j,2}$  es una función 1-modal,  $h_j$ , donde  $h_j$  está definida por  $h_j(x) = f_{a_i,2-j}$ ,  $j \in (0, 2]$ . Por último, dado que  $F_{42}$  es una función de Misiurewicz y  $h_j$  es una familia de funciones  $\mathcal{FU}$ , entonces por el

Teorema 1.5.8 se sigue el resultado. ■

Ahora, procederemos a mostrar que los parámetros estocásticos en la  $Q$ -familia forman un conjunto  $\wp$  de medida positiva en  $I_Q$ , antes de ello probaremos los siguientes lemas técnicos.

**Lema 2.3.4** *El parámetro  $(4, 2)$  es un parámetro de Tsujii para los hilos  $\mathbf{I}_{4,b}$  y  $\mathbf{I}_{a,2}$ .*

**Demostración:** Para mostrar este lema es necesario mostrar primero que  $(4, 2)$  es un parámetro de Misiurewicz, esto, esto, probar que existen  $n, m \geq 0$  tales que  $F_{4,2}^n(\frac{1}{2}) = F_{4,2}^{n+m}(\frac{1}{2})$ . Si  $n = 2$  y  $m = 1$ , entonces

$$F_{4,2}^2\left(\frac{1}{2}\right) = f_4(f_2(f_4(f_2\left(\frac{1}{2}\right)))) = f_4(0) = 0 = F_{4,2}^3\left(\frac{1}{2}\right).$$

Por otra parte,  $\frac{1}{2}$  es un punto crítico no degenerado por el Lema 2.2.4. Dado que  $F_{4,2}$  es una función de Misiurewicz entonces por el Teorema 1.1 no puede tener puntos periódicos hiperbólicos, y por la observación 1.5  $F_{4,2}$  satisface la condición **CE**.

Dado que  $F_{4,2}$  es un parámetro Misiurewicz con periodo igual a uno y preperiodo igual a dos, entonces para todo  $n \geq 2$  se cumple que  $Df_{4,2}(f_{4,2}^n(1))$  es igual a 8. Así,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |Df_{4,2}(f_{4,2}^n(1))| = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log 8 = 0.$$

Por último, consideremos  $(4, 2)$  como elemento del hilo  $\mathbf{I}_{4,b}$ . Entonces, la serie

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\partial_b F(c_j, b)}{Df_{4,2}^j(f_{4,2}(c_1))},$$

donde  $c_i$  corresponde a la iterada de  $\frac{1}{2}$  bajo  $F_{4,2}$  es convergente porque

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\partial_b F(f_{4,b}^j(c), b)}{Df_{4,2}^j(f_{4,2}(c_1))} = \sum_{j=0}^1 \frac{8 - 4c_j - 20c_j^2 + 24c_j^3 - 8c_j^4}{Df_{4,2}^j(f_{4,2}(c_1))} = \frac{3}{2} - \frac{7}{8} = \frac{5}{8}$$

lo que demuestra el lema. ■

**Lema 2.3.5** *Sea  $\{h_j\}_{j \in (0,2]}$  como antes. Entonces esta familia de polinomios cuárticos satisface las hipótesis del Teorema 1.5.*

**Demostración:** Como sabemos  $F_{4,2}$  es un elemento de la familia, y por el Lema 2.3.4 es una función Misiurewicz, entonces por el Teorema 1.5 se sigue el lema. ■

**Corolario 2.3.6** *Si  $C_1 := \{(a, b) \in (0, 4] \times (0, 2] : F_{a,b} \text{ admite una miac}\}$  y  $C_2 := \{(a, b) \in (c_\infty, 2] \times (0, 2] : F_{a,b} \text{ admite una miac}\}$ , donde  $c_\infty$  corresponde al parámetro de Feigenbaum de la familia  $F_{4,2}$ , entonces los conjuntos  $C_1$  y  $C_2$  son no vacíos.*

**Demostración:** El Lema 2.3.5 puede ser aplicado a cada elemento de  $\Lambda_2$ . Así, para cada elemento  $(a_i, 2) \in \Lambda_2$  obtenemos  $\Sigma_i \subset (0, 2]$  de medida positiva respecto a la línea, tal que para cada  $(\alpha_i, \beta_i) \in \Sigma_i$   $f_{\alpha_i, \beta_i}$  admite una miac.

Un argumento análogo se puede dar para la familia  $\{f_{4,b}\}_{b \in (0,2]}$ . Así, al considerar  $C_1$  y  $C_2$  como en la hipótesis, entonces por construcción los conjuntos  $C_1$  y  $C_2$  son no vacíos. ■

**Observación 2.3.7** *La construcción de los subconjuntos  $C_3$  y  $C_4$  es análoga a la realizada para los subconjuntos  $C_1$  y  $C_2$ .*

**Lema 2.3.8** *La medida de Lebesgue en  $(0, 2] \times (0, 4]$  de los conjuntos  $C_3$  y  $C_4$  es positiva.*

La demostración de este hecho es análoga a la dada para  $C_1$  y  $C_2$ .

**Lema 2.3.9** *Sea  $F_{a,b}$  un elemento de la familia logística alternada, tal que  $f_a$  y  $f_b$  admiten una miac. Entonces  $F_{a,b}$  admite una miac.*

**Demostración:** Sea  $\mathcal{B}$  el álgebra de Borel en  $(0, 1]$ . Dado que  $f_a$  y  $f_b$  son funciones continuas entonces son funciones medibles para el espacio de medida  $((0, 1], \mathcal{B}, \lambda)$ . Sea  $B \in \mathcal{B}$ , puesto que  $f_a$  admite una miac, entonces por el Teorema 1.5 existen  $\delta > 0$ , y  $0 < \alpha < 1$ , tales que

$$\lambda(B) < \delta \Rightarrow \sup_{k \in \mathbb{N}} \lambda(f_a^{-k}(B)) < \alpha.$$

Si denotemos por  $A_1$  a  $f_a^{-1}(B)$  se satisface que

$$\lambda(A_1) < \alpha. \quad (2.3)$$

Por otra parte, dado que  $f_b$  admite una miac, y  $f_b^{-1}(A_1) \in \mathcal{B}$ , entonces por el Teorema 1.5 existen  $\delta_1 > 0$ , y  $0 < \beta < 1$ , tales que

$$\lambda(A_1) < \delta \Rightarrow \sup_{k \in \mathbb{N}} f_b^{-k}(A) < \beta.$$

De la ecuación (2.3) tenemos que  $\lambda(A_1) < \alpha$ . Así, al considerar  $\alpha_1 := \min(\alpha, \delta_1)$  y  $B_1 := f_b^{-1}(A_1)$ , tendremos

$$\lambda(B_1) < \beta. \quad (2.4)$$

En conclusión, existen  $\delta > 0$ , y  $\alpha_1 \in (0, 1)$ , tales que

$$\lambda(F_{a,b}^{-1}(B)) < \alpha_1. \quad (2.5)$$

Ahora, si consideramos  $A_2 := f_a^{-1}(B_1) \in \mathcal{B}$ , al aplicar nuevamente el Teorema 1.5, se concluye que existen  $\delta_2 > 0$ , y  $0 < \beta_2 < 1$ , tales que

$$\lambda(A_2) < \delta_2 \Rightarrow \sup_{k \in \mathbb{N}} \lambda(f_a^{-k}(A_2)) < \beta_2.$$

Dado que  $\lambda(A_2) < \delta_1$  por la desigualdad (2.5), entonces basta considerar  $\alpha_2 := \min(\alpha_1, \delta_2)$  y obtenemos una desigualdad similar a (2.3). De hecho podemos seguir con este argumento para cada  $n \in \mathbb{N}$ , y obtenemos una sucesión de conjuntos  $A_n$  y  $B_n$  tales que

$$\lambda(F_{a,b}^{-n}(B_n)) < \alpha_n, \text{ con } 0 < \alpha_n < 1. \quad (2.6)$$

Por la ecuación (2.6) y por construcción sabemos que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_b^{-n}(B_n)$  y  $f_a^{-n}(A_n)$  son conjuntos medibles que pertenecen al soporte  $\beta_b$  y  $\beta_a$  de la miac de las funciones  $f_b$  y  $f_a$ , respectivamente. Sin embargo,  $\beta_b = \cup_{i=1}^k J_i$  y  $\beta_a = \cup_{j=1}^n H_j$  donde  $\{J_i\}$  y  $\{H_j\}$  son ciclos de subintervalos en  $(0, 1]$  para  $f_b$  y  $f_a$ , respectivamente. Más aún,  $0 < \lambda(J_i), \lambda(H_j) < 1$  para todo  $i \in \{1, \dots, k\}$  y  $j \in \{1, \dots, n\}$ , entonces para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_n < \max_{i,j} \{\lambda(J_i), \lambda(H_j)\}$  para algún  $J_i$  y  $H_j$ .

Entonces tenemos:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} F_{a,b}^{-n}(B) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \leq \max_{i,j} \{\lambda(J_i), \lambda(H_j)\}.$$

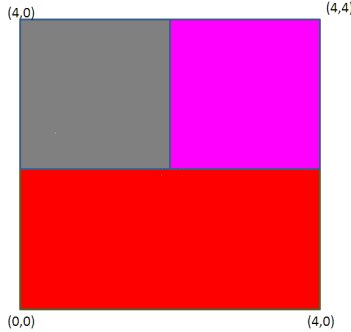


Figura 2.6: Regiones del espacio de parámetros  $I_Q$ .

Así,  $\bar{\alpha} := \sup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n < 1$ .

Por ende, del Teorema 1.5 tenemos que  $F_{a,b}$  admite una miac, y se concluye la prueba del lema. ■

**Observación 2.3.10** *En términos de hilos, el lema anterior nos dice que dados dos hilos  $h_1$  y  $h_2$  tales que las puntas  $a_0$  y  $b_0$  son estocásticas y  $h_1 \cap h_2 = (a_0, b_0)$ , entonces  $(a_0, b_0)$  es un parámetro estocástico.*

Para construir los subconjuntos  $C_1, \dots, C_6$ , el espacio de parámetros se ha sido dividido en tres regiones,  $\Omega_1 = (0, 2] \times (0, 4]$ ,  $\Omega_2 = (0, 4] \times (0, 2]$  y  $\Omega_3 = I_Q \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$ . En las regiones  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  se utilizó el hecho que los parámetros en estas regiones dependen de la modalidad de la familia, y en  $\Omega_3$  se utilizó el hecho que las funciones  $F_{ab}$  y  $F_{ba}$  son conjugadas. Las regiones  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$  se encuentran ilustradas en la Figura 2.6.

### 2.3.2. Medida del conjunto $\emptyset$

**Lema 2.3.11** *Los conjuntos  $C_i$  definidos anteriormente, son de medida de Lebesgue positiva en el espacio de parámetros.*

**Demostración:** La demostración de este lema lo haremos por casos.

**Caso I. Los conjuntos  $C_1$  y  $C_2$  son de medida positiva respecto a  $\lambda_2$ .**

Por el lema anterior y la Observación 2.3.6 se sigue que

$$C_1 := \mathcal{A} \times \cup_{\alpha \in \mathcal{A}} \Lambda_\alpha = \cup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{A} \times \Lambda_\alpha.$$

Así,

$$\begin{aligned} \lambda_2(C_1) &= \lambda_2(\cup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{A} \times \Lambda_\alpha) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_2(\mathcal{A} \times \Lambda_\alpha) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda(\mathcal{A}) \lambda(\Lambda_\alpha) \\ &= \lambda(\mathcal{A}) \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda(\Lambda_\alpha) > 0. \end{aligned}$$

Para el subconjunto  $C_2$ , tenemos  $C_2 = \cup_{\beta \in \Lambda_4} \Lambda_\beta \times \Lambda_2$ , y la prueba es similar a la realizada para el subconjunto  $C_1$ .

La prueba para los conjuntos  $C_3$  y  $C_4$  es análogo al caso anterior.

**Caso II. La medida de los conjuntos  $C_5$  y  $C_6$  es positiva.**

Por construcción de  $C_5$ , tenemos que  $C_5 = \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ , entonces  $\lambda(C_5) = \lambda(\Gamma \times \Gamma) = \lambda_1(\Gamma) \lambda_1(\Gamma) > 0$ . La demostración de la afirmaciones para el subconjunto  $C_6$ , es análoga. ■

### 2.3.3. Propiedades ergódicas de los elementos en $\wp$

Con los lemas anteriores, se ha probado que las funciones estocásticas existen y forman un conjunto de medida en  $l_Q$ . Por lo que a continuación, nos enfocaremos en las propiedades que poseen las miac que admiten las funciones.

**Lema 2.3.12** *Si  $(\mu_1, \mu_2) \in C_i$  con  $i = 1, \dots, 6$ , entonces  $f_{\mu_1, \mu_2}$  tiene entropía positiva.*

**Demostración:** Sea  $f_{\mu_1\mu_2}$  un elemento en  $C_i$  para algún  $i \in \{1, \dots, 6\}$ . Sabemos que  $f_{\mu_1\mu_2}$  admite una miac,  $\eta$ . Más aún,  $f_{\mu_1,\mu_2}$  restringida al soporte de  $\eta$  es una función de tipo unimodal, el exponente de Lyapunov es estrictamente positivo. Por ende,  $h_{top} = \gamma > 0$ , de lo que se sigue el lema. ■

Ahora, estamos en condiciones de probar la siguiente proposición para el caso de la  $Q$ -familia, para ello enunciaremos un teorema.

**Teorema 2.3.13** *Una medida invariante ergódica con entropía positiva es miac si y sólo si la fórmula de Rohlin es válida, esto es,*

$$h(\mu) = \int \log |Df| d\mu.$$

**Proposición 2.3.14** *Si  $F_{a,b}$  admite una miac  $\mu$ , entonces*

$$h(F_{a,b}) = \int \log |Df| d\mu.$$

**Demostración:** Dado que  $\mu$  es una miac entonces es una medida ergódica y por el Lema 2.3.12 tiene entropía positiva, entonces del Teorema 2.3.13 se sigue la proposición. ■

Dado que cada elemento en los conjuntos  $C_i$  admite una miac entonces por el Teorema de diferenciación de Lebesgue casi todo parámetro en la medida de Lebesgue  $C_i$  es un punto de densidad de  $C_i$ , para una explicación más detallada el lector puede consultar [27].

### 2.3.4. Puntos de densidad de $\wp$

Tomando en cuenta los resultados obtenidos en las subsecciones anteriores, a continuación mostraremos los puntos de densidad de los subconjuntos  $C_i$ , y por ende de  $\wp$ . Probaremos la existencia de los puntos de densidad para cada subconjunto  $C_i$  como lo muestra el siguiente lema.

**Lema 2.3.15** *El conjunto  $\Lambda_1 = \{(a, 2) : a \in (0, 4] : F_{a,b} \text{ admite una miac}\}$  es el conjunto de puntos de densidad del conjunto  $C_1$ .*

**Demostración.** Por construcción cada elemento del conjunto

$$\Lambda_1 = \{(a, 2) : a \in (0, 4] : F_{a,b} \text{ admite una miac}\}$$

es un punto de densidad del subconjunto  $h_{a,b} \cap C_1$ .

De la definición de  $C_1$  y del hecho que cualquier familia de conjuntos medibles  $\{E_\alpha\}$  en  $\mathbb{R}^n$  tales que cada elemento de la familia tiene un punto de densidad  $x_\alpha$ , se tiene que  $\cup_\alpha x_\alpha$  es el conjunto de puntos de densidad de  $\cup_\alpha E_\alpha$ . Así,  $\Lambda_1$  es el conjunto de puntos de densidad de  $C_1$ . ■

**Observación 2.3.16** *Analógamente, se demuestra el Lema 2.3.15 para los conjuntos  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$ . Del argumento anterior, se siguen las propiedades de los puntos de densidad si los consideramos como los puntos de densidad de la familia de funciones unimodales.*

**Lema 2.3.17** *Sea  $(\mu_1, \mu_2) \in I_Q$  tal que  $f_{\mu_1, \mu_2}$  es una función Tsujii, entonces el parámetro  $(\mu_1, \mu_2)$  es un punto de densidad para  $C_1$  y  $C_2$  respecto a  $\lambda_{(0,4] \times (0,2]}$ .*

**Demostración:** La prueba de este lema se sigue del Lema 5.3 en [2] y la construcción de  $C_1$  y  $C_2$ . ■

En el caso de los subconjuntos  $C_5$  y  $C_6$ , debemos recordar que tanto  $C_5$  como  $C_6$  pueden ser considerados desde dos puntos de vista diferentes, esto es, como un elemento en un hilo y como un elemento en el producto cartesiano. Estas consideraciones son importantes dado que queremos entender el comportamiento de los puntos de densidad que probaremos en el siguiente lema.

**Lema 2.3.18** *Sean  $t_1$  y  $t_2$  parámetros de Tsujii en la familia logística, entonces  $(t_1, t_2)$  es un punto de densidad para  $C_5$  y  $C_6$  respecto a  $\lambda_{(0,4] \times (0,2]}$ .*

**Demostración:** Para probar este lema, usaremos el concepto de hilos y consideraremos el espacio de parámetros con la topología producto. Sin pérdida de generalidad solamente consideraremos elementos de la base de la forma  $U \times U$  donde  $U$  es un conjunto abierto en la topología euclídeana en  $(0,4]$ , esta restricción de la topología producto es metrizable por la métrica

$$m_\infty := \text{máx}_{x_1, x_2 \in U} \{ |x_1|, |x_2| \}.$$

Por otra parte, debemos recordar que la medida de Lebesgue en el espacio de parámetros es la medida producto de  $(0,4]$  con sí mismo. Por ende, para concluir utilizaremos el límite 2.3.15. Así,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda_2(B_\epsilon(t_1, t_2) \cap C_5)}{\lambda_2(B_\epsilon(t_1, t_2))} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda_2((t_1 - \epsilon, t_1] \times (t_2 - \epsilon, t_2] \cap \mathcal{A} \times \mathcal{A})}{\lambda_2((t_1 - \epsilon] \times (t_2 - \epsilon])} \lambda_2(t_2 - \epsilon, t_2] = 1.$$

Por lo tanto,  $(t_1, t_2)$  es un punto de densidad de  $C_5$ . ■

### 2.3.5. Teorema de Jakobson alternado

En esta subsección enunciaremos y probaremos, con ayuda de los resultados obtenidos en las subsecciones anteriores, la generalización del Teorema de Jakobson, en el siguiente teorema.

**Teorema 2.3.19 (Blé-Cano-Estrada)** (*Teorema de Jakobson alternado*)  
*En la  $Q$ -familia existe un subconjunto  $\wp$  de parámetros estocásticos de medida positiva tales que:*

1. *Casi todo parámetro en  $\wp$  es un punto de densidad de  $\wp$ .*
2. *Cada elemento en  $\wp$  tiene entropía positiva.*

**Demostración.** Sea  $\wp = \cup_{i=1}^6 C_i$  por el Corolario 2.3.6 sabemos que cada uno de los conjuntos  $C_i$  corresponde a parámetros estocásticos. Por otra parte, por la Proposición 2.3.11 sabemos que cada uno de los conjuntos  $C_i$  es de medida de Lebesgue positiva, por lo que

$$\lambda_Q(\wp) = \lambda_Q(\cup_{i=1}^6 C_i) = \sum_{i=1}^6 \lambda_Q(C_i) > 0.$$

Del Lema 2.3.18 se sigue que cada elemento en  $C_i$  es un punto de densidad respecto a la medida de Lebesgue, y por ende, en  $\wp$ . Un argumento análogo se sigue para la entropía por el Lema 2.3.12. De lo que se sigue el teorema. ■

---

**Observación 2.3.20** *El Teorema 2.3.19 puede enunciarse y demostrarse para familias de funciones alternadas en general, es decir, considerar la familia de funciones originadas por la composición de dos o más funciones unicríticas a un parámetro.*

# Capítulo 3

## Huesos: definición y propiedades

### 3.1. Introducción

En el presente capítulo definiremos el concepto de hueso de periodo  $2n$  para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ , y mostraremos las propiedades dinámicas que poseen los parámetros que pertenecen a estos conjuntos.

Comenzamos definiendo el concepto de hueso.

**Definición 3.1.1** Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Un **hueso derecho** de periodo  $2n$ , denotado por  $\mathcal{B}_{2n}$ , se define como la curva algebraica que consta de los puntos de la forma  $\{(a, b) \in I_Q : F_{ab}^n(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\}$ . Análogamente se define un **hueso izquierdo**, considerando funciones de la forma  $F_{ba}$ .

**Observación 3.1.2** (a) De la definición de hueso y del hecho que  $F_{ab}$  y  $F_{ba}$  son conjugadas, se sigue que los huesos derechos e izquierdos tienen las mismas propiedades, por lo que es suficiente con estudiar los huesos derechos.

(b) Un elemento del hueso es el parámetro que cumple:

$$\frac{1}{2} \xrightarrow{f_a} x_2 \xrightarrow{f_b} x_3 \xrightarrow{f_a} \dots \xrightarrow{f_a} x_{2n-1} \xrightarrow{f_b} \frac{1}{2} \xrightarrow{f_a} \dots \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Antes de mostrar las propiedades de los huesos, definiremos los elementos que constituyen un hueso.

**Definición 3.1.3** Sean  $n \in \mathbb{N}$  y  $\mathcal{B}_{2n}$  un hueso de periodo  $2n$ . Un parámetro  $(a, b) \in \mathcal{B}_{2n}$  es llamado:

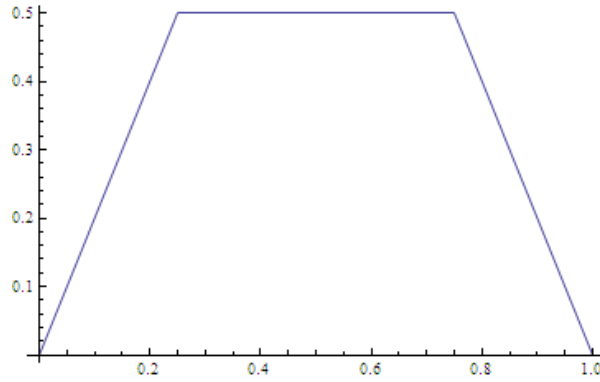


Figura 3.1: Gráfica de la tienda truncada para  $a = 0.5$ .

- (i) **Bicrítico** si los puntos críticos  $c_1$  y  $c_2$  de  $F_{a,b}$  satisfacen que la di-órbita de  $c_1$  es periódica y  $c_2$  pertenece a ésta.
- (ii) La **epíffisis** de  $\mathcal{B}_{2n}$  si  $b = 4$ .

## 3.2. Geometría del hueso

Con el propósito de estudiar la geometría de un hueso de cualquier periodo, es necesario enunciar el siguiente concepto.

**Definición 3.2.1** La **familia de tiendas truncada alternada**, denotada por  $T_{ab}$ , se define como  $T_{ab} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  por  $T_{ab} := T_a \circ T_b$ , donde  $a, b \in (0, 1]$  y  $T_a$  es un endomorfismo a trozos del intervalo cerrado  $[0, 1]$  dado por:

$$T_a(x) = \begin{cases} 2x & x \in [0, \frac{a}{2}]; \\ a & x \in [\frac{a}{2}, \frac{1-a}{2}]; \\ 2(1-x) & x \in [\frac{1-a}{2}, 1]. \end{cases}$$

**Observación 3.2.2** (a) La familia de endomorfismos continuos  $T_a$  definidos anteriormente, es llamada la **familia de tiendas truncadas**. La gráfica de uno de los elementos de la familia de tiendas truncadas se ilustra en la Figura 3.1.

- (b) Los huesos de periodos  $2n$  se definen de manera análoga para la familia de tiendas truncadas alternadas.

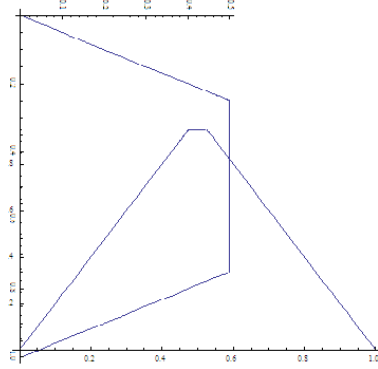


Figura 3.2: Iteración gráfica de  $x_0 = 0.2$  bajo  $T_{0.5,0.75}$ .

(c) Dada una condición inicial  $x_0$ , la órbita de  $x_0$  bajo un elemento de la familia de tiendas truncadas alternadas se realiza de manera análoga al caso de la  $Q$ -familia, véase Figura 3.2.

Para comenzar nuestro estudio de los huesos de la tiendas truncadas mostraremos en el siguiente lema que son conjuntos no vacíos.

**Lema 3.2.3** Sea  $\mathcal{B}_{2n}$  un hueso de periodo  $2n$  para las tiendas truncadas, para algún  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces en el hueso  $\mathcal{B}_{2n}$  existe un único parámetro bicrítico.

**Demostración.** Sea  $m \in \mathbb{N}$ , entonces la di órbita de periodo  $2m$  de la tienda truncada alternada es el conjunto de puntos de la forma

$$\left\{a, x_1, x_2, \dots, \frac{1}{2}, b, x_n, \dots, \frac{1}{2}\right\},$$

donde los términos  $x_1 = 2a$ ,  $x_2 = 2(1 - 2a)$ ,  $x_3 = 2(2(1 - a))$  y así sucesivamente. Entonces existe un  $1 < j < 2m$  tal que  $x_j = \frac{1}{2}$ , y  $T_{a,b}^j(x_1) = x_j$  esta última expresión es una expresión algebraica con variable  $a$ .

Por tanto, existe una única solución respecto a  $a$  para el término  $x_j$ . Análogamente, podemos obtener el valor de  $b$ .

Así, el valor bicrítico existe y es único.■

**Observación 3.2.4** *Por la construcción dada en el lema anterior, se desprende que un parámetro bicrítico en las tiendas truncadas alternadas se da precisamente para los valores  $a, b$ , tales que la gráfica de  $T_a^n$  y  $T_b^n$  se intersectan exactamente en  $\frac{1}{2}$ .*

**Lema 3.2.5** *[?] Los huesos en la familia de tiendas truncadas alternada son la unión de tres segmentos de línea.*

**Observación 3.2.6** *La relevancia de los Lemas 3.2.3 y 3.2 radica en que los huesos de las tiendas truncadas alternadas y los huesos de la  $Q$ -familia son homeomorfos, para una demostración véase [?].*

Continuaremos nuestro estudio de los huesos en  $I_Q$  con los siguientes teoremas

**Lema 3.2.7** *Para cualquier hueso de cualesquier periodo, no existe un parámetro  $(a, b)$  diferente del parámetro bicrítico tal que en  $F_{a,b}$  coexistan dos dinámicas superatractoras del mismo periodo.*

**Demostración:** Sean  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{B}_{2m}$  un hueso de periodo  $2m$  y  $\beta$  el parámetro bicrítico de  $\mathcal{B}_{2m}$ .

Supongamos que existe un parámetro  $\alpha$  distinto de  $\beta$  en  $\mathcal{B}_{2m}$  tal que en  $F_\alpha$  coexisten dos ciclos superatractores del mismo periodo. Entonces se satisface que  $\alpha \ll \beta$  o  $\alpha \gg \beta$ , donde  $\gg$  denota el orden lexicográfico en los elementos del hueso  $\mathcal{B}_{2m}$ .

Supongamos sin pérdida de generalidad que  $\alpha \gg \beta$ . Dado que el valor del multiplicador de la órbita  $\mathcal{O}_{2m}$  depende continuamente de los parámetros y los parámetros regulares son estables bajo pequeñas perturbaciones, entonces para todo  $\delta$  que satisface que  $\beta \ll \delta$ ,  $F_\delta$  tiene una órbita estable de periodo  $2m$  con multiplicador estrictamente mayor a cero, esto implicaría que existe una vecindad  $\mathcal{U}$  tal que  $\alpha, \beta, \delta \in \mathcal{U}$  tal que el valor del multiplicador crece y decrece, pues  $F_\alpha$  tiene una órbita superatractora lo cual es una contradicción. Por lo tanto, no coexisten órbitas superatractoras del mismo periodo. ■

**Teorema 3.2.8** *Un hueso es una curva tipo cónica en el espacio de parámetros, tal que el mínimo de la curva corresponde a un punto bicrítico e intersecta a la frontera del espacio de  $I_Q$  en dos epíffisis distintas.*

**Demostración:** La demostración de este teorema se seguirá de la demostración de las siguientes afirmaciones.

**Afirmación 1.** Si  $m \in \mathbb{N}$ , entonces el hueso  $\mathcal{B}_{2m}$  intersecta a la frontera de  $Q$  en exactamente dos puntos de la forma  $(\alpha, 4)$  y  $(\beta, 4)$ .

Esta afirmación se desprende de manera inmediata del Lema 3.2.

**Afirmación 2.** Un hueso de periodo  $2m$ , denotado por  $\mathcal{B}_{2m}$ , es una curva diferenciable.

Dado que  $\mathcal{B}_{2m}$  es una curva algebraica, del Teorema de la Función Implícita se sigue que salvo en las singularidades de la curva ésta es una variedad, véase [16].

**Afirmación 3.** El hueso  $\mathcal{B}_{2m}$  visto como curva en  $I_Q$  tiene una única singularidad que corresponde al parámetro bicrítico.

Supongamos que la singularidad  $\alpha$  de  $\mathcal{B}_{2m}$  no es el parámetro bicrítico  $\beta$ .

Sea  $\tau : \mathcal{B}_{2m} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $(a, b) \mapsto \frac{\partial F_{a,b}(c_2)}{\partial a}$  donde  $c_2$  es un punto crítico de  $F_{ab}$  distinto de  $c_1$ . Recorriendo el hueso tenemos que  $\tau$  es una función monótona decreciente definida en un compacto, entonces existe un parámetro  $(\alpha, \beta)$  tal que el valor de  $Df_{\alpha,\beta}(c_2)$  es minimal.

Dado que  $Df_{\alpha,\beta}(c_2) = 0$ , esto implica que tiene una órbita superatractora de periodo  $2m$ , lo cual contradice el Lema 3.2.7.

De las afirmaciones anteriores se sigue que  $\mathcal{B}_{2m}$  es una curva con una única singularidad. ■

**Observación 3.2.9** *El Teorema 3.2.8 nos dice que para dibujar un hueso en el espacio de parámetros solo basta conocer tres puntos: la articulación y las*

*epífisis y que dos huesos derechos de periodo  $2n$  y  $2m$ , respectivamente, son disjuntos.*

### 3.3. Propiedades dinámicas de los elementos de un hueso

Una vez que hemos investigado la geometría de los huesos, en la presente subsección mostraremos las propiedades dinámicas que poseen los parámetros en los huesos.

**Teorema 3.3.1 ([8], Teorema 7.1)** *Sean  $(\alpha, \beta)$  en  $(2, 4]^2$  tal que en la función  $f_{\alpha, \beta}$  coexisten atractores. Entonces  $f_{\alpha, \beta} |_{\Lambda_i}$ , con  $i \in \{1, 2\}$  y  $\Lambda_i$  un atractor, es casi-simétricamente conjugado a un elemento de la familia logística.*

**Corolario 3.3.2** *Sean  $\mathcal{B}$  y  $\hat{\mathcal{B}}$  dos huesos del mismo periodo, y sean  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{B}$  y  $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \in \hat{\mathcal{B}}$ , entonces  $F_{\alpha, \beta}$  y  $F_{\hat{\alpha}, \hat{\beta}}$  son cuasi-simétricamente conjugados.*

**Demostración:** Por el Teorema 3.3.1 para todo  $(a, b) \in Q$  para el cual coexisten dinámicas, existe un  $c \in (0, 4]$  tal que  $F_{a, b}$  es cuasi simétricamente conjugado a  $cx(1 - x)$ .

Dado que solo existen tres posibles dinámicas para la familia logística, entonces cada elemento en un hueso es cuasi-conjugado a un elemento de la familia logística, y del hecho que la casi-conjugación es una relación de equivalencia se sigue el corolario. ■

**Lema 3.3.3** *Sean  $\mathcal{B}_{2n}$  y  $\mathcal{B}_{2m}$  dos huesos. Entonces  $\mathcal{B}_{2n}$  y  $\mathcal{B}_{2m}$  se intersectan en 0, 1, ó 2 puntos.*

**Demostración:** Dado que la intersección de  $\mathcal{B}_{2n}$  y  $\mathcal{B}_{2m}$  son soluciones en común que tienen las ecuaciones algebraicas que dan origen a los huesos, las cuales por el Teorema de Bezout, véase [16], es a lo más  $\text{mcm}(2n, 2m)$ , donde  $\text{mcm}$  es el mínimo común múltiplo de  $m$  y  $n$ .

Sin embargo, los huesos restringidos a  $Q$  son curvas de tipo cuadrático. Por tanto, la cardinalidad de  $\mathcal{B}_{2n} \cap \mathcal{B}_{2m}$  corresponde a la intersección de dos

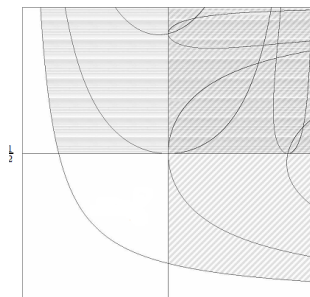


Figura 3.3: Ejemplo de un hueso tangente.

curvas de tipo cuadráticos, es decir, 0, 1 ó 2 puntos. ■

Dado que sabemos el número de veces que dos huesos se intersectan, nos resta saber las configuraciones posibles en las que un hueso  $\mathcal{B}_{2n}$  derecho y un hueso  $\mathcal{B}_{2m}$  izquierdo se intersectan, véase Figura 3.3.

**Observación 3.3.4** *Respecto a la intersección de dos huesos en  $[4]$  se probó que el hueso de periodo 6 intersecta a los huesos de cualquier periodo.*

### 3.4. Curvas de Feigenbaum

Del Capítulo 1 sabemos que los parámetros de Feigenbaum existen y son el puntos de acumulación de parámetros regulares de periodo  $2^m \cdot n$ , para todo  $m, n \in \mathbb{N}$ . Mostraremos que en el caso de la  $Q$ -familia además de la existencia de los parámetros de Feigenbaum, éstos forman una curva. Para ello, es necesario, enunciar algunos conceptos previos.

**Definición 3.4.1** *Sea  $\gamma$  una curva en  $(0, 4]^2$ . Diremos que  $\gamma$  es una **curva de Feigenbaum** si satisface:*

1. *Existe un único  $(\alpha, \beta) \in \gamma$  tal que  $F_{\alpha, \beta}$  tiene un único atractor de tipo Feigenbaum.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{m2^{2n}}, b_{m2^{2n}}) = (\alpha, \beta)$ , donde  $(a_{m2^{2n}}, b_{m2^{2n}})$  es la sucesión de parámetros bicríticos de los huesos de periodo  $2m$  para algún  $m \in \mathbb{N}$ .*

2. Para cada elemento  $(a, b)$  en  $\gamma$  distinto a  $(\alpha, \beta)$  en la correspondiente función  $F_{a,b}$  coexisten dinámicas, donde una de ellas es de tipo Feigenbaum.

**Teorema 3.4.2** *Las curvas de Feigenbaum existen en  $I_Q$ .*

**Demostración:** Por el Corolario 3.3.2 basta considerar los huesos que intersectan a la diagonal de  $Q$ .

Sea  $\mathcal{B}_{2n}$  un hueso de periodo  $2n$  que intersecta a la diagonal, entonces  $\mathcal{B}_{2n}$  intersectan a la diagonal en dos parámetros  $c_1$  y  $c_2$  tal que tanto  $c_1$  y  $c_2$ , considerados como elementos de la familia logística, tienen un ciclo atractor de periodo  $m$  y  $2m$  respectivamente.

Si denotamos por  $\mathcal{B}_{2n}^{2m}$  a los huesos que intersecta a la diagonal en los puntos de doblamientos de periodo de la ventana de periodo  $m$ . Por el Lema 1.5 para cada  $m \in \mathbb{N}$  existen  $\phi_{1m}, \phi_{2m} : [0, 1] \rightarrow I_Q$  homeomorfismos tales que  $\phi_{im}([0, 1])$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , corresponde a la partes decreciente y creciente de  $\mathcal{B}_{2n}^{2m}$ , respectivamente.

Así, la sucesión de funciones  $\phi_{1m}$  y  $\phi_{2m}$  convergen puntualmente a una función continua  $\phi_{1\infty}$  y  $\phi_{2\infty}$ , respectivamente.

Por construcción,  $\phi_{1\infty} \cup \phi_{2\infty}$  es una parametrización de la curva límite  $\mathcal{B}_{n\infty}$  que intersecta a la diagonal en los parámetros de Feigenbaum de las ventanas de periodo  $n$  y  $2n$  y la frontera de  $I_Q$  en dos parámetros distintos, para demostrar que esta curva es un hueso solo resta probar la siguiente afirmación.

**Afirmación.** Existe un parámetro bicrítico Feigenbaum, es decir, existe un parámetro tal que el omega límite de ambos puntos críticos pertenecen a un atractor de Feigenbaum.

Del Lema 2.3.6 sabemos que el parámetro bicrítico en un hueso es el punto crítico de la curva en  $Q$ , entonces para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe una sucesión acotada de parámetros bicríticos  $(\alpha_n, \beta_n)$  del hueso  $\mathcal{B}_{2n}$ . Entonces, cada punto límite existe y pertenece al interior de  $I_Q$  dado que dicha sucesión es convergente a un parámetro  $\alpha$  en la frontera de  $Q$  entonces  $d(\alpha, \Delta) = 0$ , donde

$\Delta = \{(a, b) \in I_Q : a = b\}$  lo cual es una contradicción porque  $\mathcal{B}_\infty \cap \Delta \neq \emptyset$ .

Por otra parte, por el Lema 3.3.2 sabemos que  $F_{(\alpha_n, \beta_n)}$  existe  $\mu_n \in (0, 4]$  tal que  $F_{(\alpha_n, \beta_n)}$  es casi-simétricamente conjugado a  $f_{\mu_n}$ , con  $\mu_n$  un parámetro superatractor de periodo  $n$ . Así, para cada  $n \in \mathbb{N}$   $\mu_n$  converge a un parámetro de Feigenbaum de lo que se sigue la afirmación.

Por lo tanto,  $\mathcal{B}_\infty$  es un hueso en la que una dinámica es un atractor de Feigenbaum. ■

**Corolario 3.4.3** *En la  $Q$ -familia existen parámetros en los que coexisten dos atractores de tipo Feigenbaum.*

**Demostración:** Por la Observación 3.3.4 sabemos que para cada  $n \in \mathbb{N}$  se satisface que el hueso  $\mathcal{B}_6$  interseca a  $\mathcal{B}_{2n}$ , por ende, para mostrar la afirmación basta mostrar que  $\mathcal{B}_\infty \cap \mathcal{B}_6 \neq \emptyset$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe al menos un parámetro  $\mathbf{a}_n$  tal que  $\mathcal{B}_{2n} \cap \mathcal{B}_6 = \mathbf{a}_n$  esto implica que  $\mathbf{a}_n \in \mathcal{B}_{2n}$ , por Lema 3.4.2 se desprende que  $\mathbf{a}_n \rightarrow \mathbf{a}_\infty$ , para un único  $\mathbf{a}_\infty \in Q$ .

Por lo tanto,  $\mathcal{B}_\infty \cap \mathcal{B}_6 = \mathbf{a}_\infty$ . Esto implica que en  $\mathcal{B}_\infty$  se realizan todas las dinámicas, de lo que se sigue el lema. ■

### 3.5. Propiedad regular o estocástica en la $Q$ -familia

A continuación se investiga la propiedad regular ó estocástica en los huesos.

**Teorema 3.5.1** *Si  $\mathcal{B}_{2n}$  es un hueso de periodo  $2n$ , entonces los parámetros regulares y estocásticos son de medida total en el hueso. Más aún, existe una vecindad tubular del hueso, llamada carne, en la que los parámetros regulares y estocásticos son de medida total.*

**Demostración:** Si  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{B}_{2n}$ , entonces  $f_{\alpha, \beta}$  tiene a lo más dos atractores  $\Lambda_1, \Lambda_2$ ; tales que  $f_{\alpha, \beta} |_{\Lambda_i}$  es casi-simétricamente conjugada a un elemento de la familia logística. Así,  $\Lambda_i$  es un atractor regular, estocástico o tipo

Feigenbaum.

Como  $\Lambda_1$  y  $\Lambda_2$  no son simultáneamente atractores de tipo Feigenbaum, y  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{B}_{2n}$ , entonces  $\Lambda_1$  es un atractor regular de periodo  $2n$ . Más aún,  $\Lambda_1$  corresponde a la cuenca de atracción de una órbita superatractora. Así, existe una vecindad  $\mathbf{V}$  alrededor de  $(\alpha, \beta)$  tal que todo elemento en  $\mathbf{V}$  es regular de periodo  $2n$ .

Por el Teorema regular o estocástico de Lyubich, casi todo elemento en la familia logística es regular o estocástico. Por tanto, en  $\mathcal{B}_{2n}$  se satisface el teorema, y en la vecindad  $\mathbf{V}$  se satisface por un argumento análogo. ■

**Teorema 3.5.2** *Sean  $\mathcal{B}_{2n}$  y  $\mathcal{B}_{2m}$  dos huesos que se intersectan en a lo más dos puntos  $\alpha, \beta$  tales que  $\alpha$  corresponde al parámetro bicrítico. Entonces la región acotada por la intersección de los dos huesos, o su carne, es una región de estabilidad.*

**Demostración:** Cuando los huesos  $\mathcal{B}_{2n}$  y  $\mathcal{B}_{2m}$  son tangentes, el punto de tangencia es el parámetro bicrítico. Así, la región de estabilidad de los huesos es estable. Por otra parte, cada elemento en la carne del hueso  $\mathcal{B}_{2n}$  es regular por definición y los dos puntos en los que intersecta al hueso  $\mathcal{B}_{2m}$  también lo son. Más aún, en la región acotada por la intersección de la carne de  $\mathcal{B}_{2n}$  y el hueso  $\mathcal{B}_{2m}$  determina la región de estabilidad del hueso  $\mathcal{B}_{2m}$ . Por lo que la región acotada por el hueso  $\mathcal{B}_{2m}$  y la carne es una región de estabilidad. Análogamente se sigue para la región acotada por la intersección de la carne del hueso  $\mathcal{B}_{2m}$  con  $\mathcal{B}_{2n}$ .

Por otra parte, cuando los huesos son secantes y uno de los puntos de intersección es el punto bicrítico. La demostración de este caso se sigue del caso anterior. ■

# Capítulo 4

## Diagrama de bifurcación por hilos

En este capítulo mostraremos el Teorema regular o estocástico de Lyubich. para parámetros que no pertenecen ni a un hueso ni a su carne. También, daremos una descripción de las regiones de estabilidad en el espacio de parámetros.

En el Capítulo 2, se mostró que el espacio de parámetros de  $Q$  se divide en tres regiones, y que en cada una de ellas el comportamiento dinámico es distinto. Comenzaremos estudiando la región de unimodalidad,  $\Omega$  que se define como  $\Omega := \{(a, b) : f_{ab} \text{ es unimodal}\}$ , véase Figura 4.1.

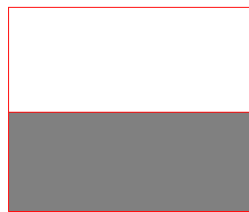


Figura 4.1: Región  $\Omega$  en  $Q$ .

En la región  $\Omega$  investigaremos las zonas de estabilidad, así como, el comportamiento del diagrama de bifurcación por hilos.

## 4.1. Nacimiento de bifurcaciones

En la región  $\Omega$  consideremos los hilos horizontales y los verticales, lo que con lleva a la creación de un rayado en el espacio de parámetros, como lo muestra la Figura 4.2.

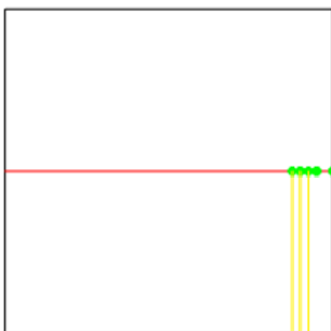


Figura 4.2: Rayado en el espacio de parámetros.

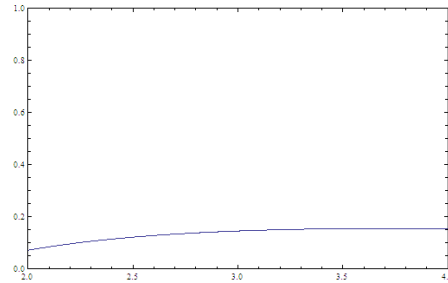
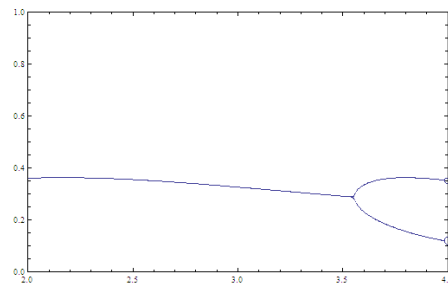
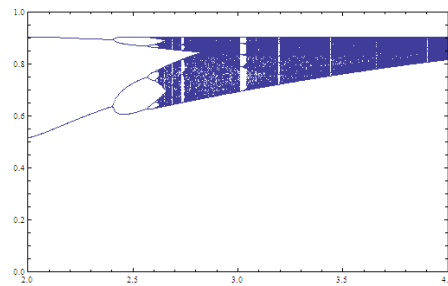
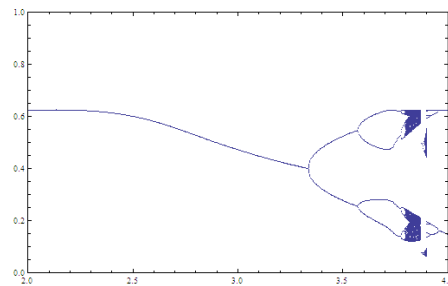
Cada fibra es una familia de funciones cuárticas unimodales y a un parámetro, en la cual es posible estudiar su correspondiente diagrama de bifurcación. El diagrama, contiene codificada la información dinámica de la familia asociada al diagrama.

De la Figura 4.3 a la Figura 4.6 se observa que a medida que el valor del hilo crece el diagrama asociado cambia y con ello el número de bifurcaciones. Dicho comportamiento nos permite introducir la siguiente definición.

**Definición 4.1.1** (a) Dada un hilo  $\nu$  en  $Q$  al diagrama generado por dicha familia se le llama **diagrama de raíz  $\nu$** , y se denotará por  $a_\nu$ .

(b) Las **ramas** de un diagrama es el mayor periodo de una órbita superatractora que tiene el diagrama, el orden de las órbitas es el dado por la  $U$ -sucesión.

(c) La **cúspide** de un diagrama corresponde al punto de intersección de un diagrama de raíz  $\nu$  con la línea  $l_{v4}$  o  $l_{h2}$ , y que se denota por  $cus(\nu)$ .

Figura 4.3: Diagrama de bifurcación para la fibra  $a=1.1$ .Figura 4.4: Diagrama de bifurcación para la fibra  $a=1.2$ .Figura 4.5: Diagrama de bifurcación para la fibra  $a=2.4$ .Figura 4.6: Diagrama de bifurcación para la fibra  $a=3.2$ .

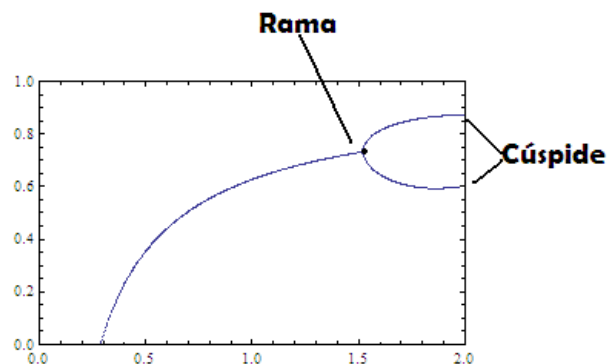


Figura 4.7: Diagrama de bifurcación de raíz 3.5 y sus elementos.

(d) La **clase** de un diagrama es el valor de la entropía de la cúspide del mismo.

En la Figura 4.7 se puede apreciar un diagrama y sus elementos.

## 4.2. Los diagramas de bifurcación como grafos

Para proseguir nuestro estudio debemos considerar al diagrama de bifurcación como un grafo, para ello enunciaremos los siguientes teoremas de Teoría de Grafos.

**Definición 4.2.1** (a) Un **grafo dirigido**  $G$  consiste en un conjunto  $V$  de vértices (o nodos) y un conjunto  $E$  de aristas (o arcos) tal que cada arista  $e \in E$  se asocia con un par ordenado de vértices, véase Figura 4.8. Si  $G$  es un grafo dirigido con vértices  $V$  y aristas  $E$ , se escribe  $G = (V, E)$ .

(b) Un grafo con números en las aristas (como en la Figura 4.9) se llama **grafo ponderado**.

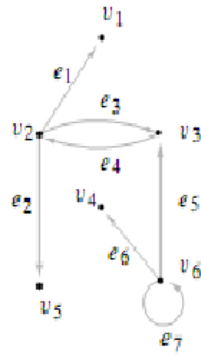


Figura 4.8: Ejemplo de grafo.

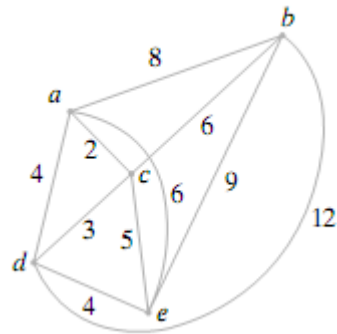


Figura 4.9: Grafo ponderado.

- (c) Un grafo  $G$  es **conexo** si dados cualesquiera dos vértices  $v$  y  $w$  en  $G$ , existe una trayectoria de  $v$  a  $w$ .
- (d) Sean  $G_1$  y  $G_2$  dos grafos. Diremos que  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfos si existe una función  $f$  biyectiva del conjunto de vértices de  $G_1$  al conjunto de vértices de  $G_2$  que satisface lo siguiente: los vértices  $v$  y  $w$  están unidos por una arista en  $G_1$  si, y sólo si los vértices  $f(v)$  y  $f(w)$  están unidos por una arista en  $G_2$ .

Con las definiciones anteriores enunciamos el concepto de árbol.

**Definición 4.2.2** Sea  $T$  un grafo. Diremos que  $T$  es un árbol si, y sólo si  $T$  es un grafo conexo tal que para cualesquiera dos vértices  $u$  y  $v$  existe una arista que une a  $u$  y  $v$ .

**Definición 4.2.3** Sean  $v \in (0, 2)$  y  $a_v$  el diagrama de bifurcación de raíz  $v$ . Entonces asociado a  $a_v$  existe un único árbol  $T$  cuya raíz es  $v$ , los vértices corresponden a los parámetros de bifurcación y las aristas corresponden a los parámetros entre dos parámetros de bifurcación.

**Lema 4.2.4** Sean  $a_\nu$  y  $a_\mu$  dos diagramas tales que los valores de sus cúspides y ramas son finitos e iguales. Entonces  $a_\nu$  y  $a_\mu$  son isomorfos.

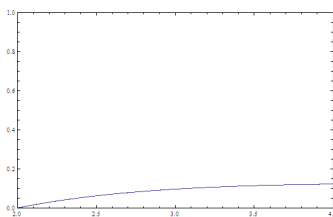
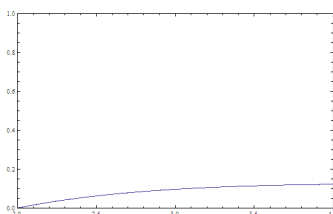
**Demostración:** Para la demostración de este lema, basta considerar la construcción anterior para cada diagrama, y la función biyectiva  $f$  se obtiene de mandar aristas en aristas y vértices en vértices. ■

**Observación 4.2.5** El lema anterior nos dice que dos diagramas homeomorfos pertenecen a la misma ventana del diagrama con raíz horizontal cuatro.

Las Figuras 4.10 y 4.11 muestran dos diagramas de bifurcación que son homeomorfos.

**Corolario 4.2.6** Existe una única sucesión creciente de diagramas  $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , salvo homeomorfismo, tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$  en  $H_n$  nacen dinámicas.

**Demostración:** Sea  $n \in \mathbb{N}$ , y sea  $H_n$  el diagrama con cúspide igual a  $n$ , entonces existe una vecindad  $\mathcal{V}$  alrededor de la cúspide tal que para todo elemento en  $\mathcal{V}$  las cúspides tienen valor  $n$ . Así, en  $H_n$  y  $H_{\bar{n}}$  nacen las mismas dinámicas y sus diagramas asociados son homeomorfos por el Lema 4.2.4. De lo que se sigue la demostración. ■

Figura 4.10: Diagrama de bifurcación para la fibra  $a = 0.9$ .Figura 4.11: Diagrama de bifurcación para la fibra  $a = 0.91$ .

### 4.3. La región de conexidad

La demostración de los lemas anteriores, nos permiten estudiar el siguiente conjunto.

**Definición 4.3.1** *Al conjunto de parámetros regulares de periodo  $m$  se le llama conjunto de **estabilidad de grado  $m$** .*

**Teorema 4.3.2 (Conexidad del conjunto de estabilidad)** *El conjunto de estabilidad de grado  $m$  para cualquier  $m \in \mathbb{N}$  es conexo.*

**Demostración:** Por una parte, sabemos que dado cualquier hilo la dinámica es ordenada. Por otra parte, para cualquier  $m$  tanto los elementos de la órbita de periodo  $m$  como el eigenvalor  $\lambda$  de la misma dependen de manera continua de los parámetros de lo que se sigue que la función dada por:

$$\tau_\lambda : \mathcal{UI} \rightarrow \text{Per}[m, \lambda],$$

donde  $\mathcal{UI}$  es el conjunto de parámetros regulares en los hilos y  $\text{Per}[m, \lambda]$  denota una órbita de periodo  $m$  y eigenvalor  $\lambda$ . La función  $\tau_\lambda$  es una función

monótona creciente. Por lo tanto, si consideramos  $\tau_1$  y  $\tau_{-1}$  para cualquier  $m$  obtenemos las regiones deseadas, la cual al estar contenidas en el espacio de parámetros y acotadas por una curva son conexas. ■

#### 4.4. Convergencia de diagramas de bifurcación en $I_Q$

En esta sección mostramos el teorema de convergencia de diagramas de bifurcación .

**Teorema 4.4.1** *El diagrama de bifurcación de la familia unicrítica  $\{f_{\dots, b}\}$   $b$  fijo y  $a \in (0, 4]$  converge en la métrica de Hausdorff al diagrama de bifurcación de  $f_{\dots, 2}$  cuando  $b$  tiende a dos.*

**Demostración:** Por el Corolario 4.2.6 podemos considerar sin pérdida de generalidad a un único elemento,  $\mathcal{C}_n$ , de cúspide  $n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces la sucesión  $\mathcal{C}_n$  con  $n \in \mathbb{N}$  es una sucesión con las siguientes características:

1. Para todo  $n$ ,  $\mathcal{C}_n$  es un continuo.
2. Para todo  $n$ , nacen dinámicas de manera creciente.

Más aún, se cumple que para todo  $x_n \in \mathcal{C}_n$  converge a un elemento  $x$  en  $\mathcal{C}_2$  considerando  $(\mathbb{R}^2, d_Q)$  como métrica, donde  $d_Q$  denota la métrica producto en  $(0, 4]^2$  y cualquier sucesión de elementos tiene una subsucesión convergente y su límite en  $\mathcal{C}_2$  de lo que se sigue la demostración. ■

**Observación 4.4.2** *Cabe mencionar que el teorema anterior solo es válido para las regiones de  $I_Q$  donde la  $Q$ -familia es unimodal, para el subconjunto de parámetros en el cual la familia es multiodal el comportamiento es distinto pues en esta región coexisten atractores.*

# Apéndice A

## Topología dinámica y teoría ergódica

### A.1. Topología dinámica

A lo largo de estas líneas asumimos que la bina  $(X, d)$  es un **espacio métrico** y que  $f : X \rightarrow X$  es una **función continua** (respecto a la métrica  $d$ .) La pareja  $(X, f)$  define entonces un **sistema dinámico topológico** al cual aplicamos los conceptos que se expondrán a lo largo de este apéndice.

Dicho esto, se presentarán los conceptos básicos de dinámica topológica.

**Definición A.1.1** *Un conjunto  $A \subset X$  se dice **invariante hacia adelante** si  $f(A) \subset A$ .*

**Observación A.1.2** *Si  $A$  es un invariante hacia adelante, entonces  $f^n(A) \subset A$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .*

**Definición A.1.3** *Un conjunto  $A \subset X$ , se dice **invariante** si  $f(A) = A$ .*

**Definición A.1.4** *Sea  $x \in X$ . El  $\omega$ -límite de  $x$ , denotado por  $\omega(x)$ , es el conjunto de todos los puntos a donde convergen subsucesiones de la órbita de  $x$ .*

**Proposición A.1.5 ([1], Lema 1.4)** *Sea  $x \in X$ . El  $\omega$ -límite de  $x$ , es un conjunto cerrado e invariante hacia adelante. Más aún, si  $X$  es un conjunto compacto, entonces  $\omega(x)$  es un conjunto compacto no vacío e invariante.*

**Definición A.1.6** Un conjunto compacto e invariante  $A$  se llama **topológicamente transitivo** si existe  $x \in A$  tal que  $\omega(x) = A$ .

**Definición A.1.7** Sea  $A$  un conjunto topológicamente transitivo.  $A$  se dice **minimal bajo  $f$**  si  $\omega(x) = A$ , para todo  $x \in A$ .

**Observación A.1.8** El terminal minimal de la definición anterior es apropiado dado que, la condición de minimalidad implica que, para cada  $x \in A$ , el  $\omega$ -límite más pequeño que contiene a  $x$  es el conjunto  $A$ , o en otras palabras que  $A$  no contiene subconjuntos propios no vacíos, compactos e invariantes.

**Definición A.1.9** Un conjunto compacto e invariante  $A$  se llama **Liapunov estable** si, para cada vecindad abierta  $U$  de  $A$ , existe una vecindad abierta  $V \subset U$  tal que  $f^n(V) \subset U$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Definición A.1.10** Un conjunto compacto e invariante  $A$  se llama **asintóticamente estable** si es Liapunov estable y existe una vecindad  $W$  de  $A$  tal que  $\omega(x) \subset A$  para todo  $x \in W$ .

## A.2. Teoría ergódica

**Definición A.2.1** Una **medida invariante**  $\mu$  es una medida de probabilidad definida sobre el álgebra de Borel de  $X$  tal que  $\mu(f^{-1}(B)) = \mu(B)$  para cualquier conjunto medible  $B$ . Si  $f^{-1}(B) = B \pmod{0}$  implica que  $\mu(B) = 0$  o  $1$ , entonces  $\mu$  es **ergódica**.

**Observación A.2.2** 1. La notación  $A = B \pmod{0}$  significa que la diferencia simétrica  $A \Delta B$  tiene  $\mu$ -medida cero.

2. En la literatura, a las funciones  $f$  también se les llama  **$f$ -invariantes**.

**Observación A.2.3** Si  $(X, d)$  es un espacio métrico compacto y  $f : X \rightarrow X$  es una función continua, existe al menos una medida ergódica cuyo soporte es  $X$ , el lector interesado puede consultar [26], [11], o [44]. Recordemos que el soporte de una medida es el subconjunto cerrado más pequeño de  $X$  de medida total, véase [35].

En lo sucesivo solo consideraremos medidas invariantes por las razones que se explican a continuación. Dado que se desea estudiar las propiedades estadísticas y probabilísticas de las órbitas generadas por un sistema dinámico, se necesita calcular promedios en el tiempo. De hecho, algunas propiedades básicas como los exponentes de Liapunov (mide el promedio de divergencia de órbitas cercanas) o la entropía métrica (mide el promedio de la información generada por las observaciones de un sistema) pueden ser vistos como promedio de tiempo.

Más específicamente, con frecuencia se desea dar una respuesta total a la siguiente pregunta: ¿Con qué frecuencia una órbita visita una región dada?.

Para formular esta pregunta de manera más precisa, se considera una transformación  $f$  del espacio  $X$ , que preserva la medida  $\mu$ , y sea  $A$  un elemento de la  $\sigma$ -álgebra de  $X$ . Entonces definimos:

$$V_n(x) = \text{no.}\{i : 0 \leq i < n, f^i(x) \in A\} \quad (\text{A.1})$$

y

$$v_n = \frac{1}{n} V_n(x), \quad x \in X, \quad (\text{A.2})$$

donde  $\text{no.}\{\cdot\}$  denota al número de elementos en el conjunto. Así,  $V_n(x)$  denota el número de visitas de un conjunto  $A$  después de  $n$  iteraciones.

Ahora si consideramos  $n$  suficientemente grande, nos gustaría saber cuando el límite

$$\hat{v}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x) \quad (\text{A.3})$$

existe. La existencia de este límite se desprende de un resultado de Teoría Ergódica, conocido como el **Teorema Ergódico de Birkhoff-Khinchin (B-K)**. En términos generales el Teorema B-K establece que, si  $f$  preserva una medida  $\mu$  y  $g$  es cualquier función  $\mu$ -integrable en  $X$ , entonces el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(g^i(x)) = \hat{f}(x) \quad (\text{A.4})$$

existe para  $\mu$ -casi todo punto  $x \in X$ ,  $\hat{f}(x)$  es integrable y  $\hat{f}(g(x)) = \hat{f}(x)$ , donde esté definida.

**Observación A.2.4** Si escogemos  $f = \chi_A$ , donde  $\chi_A$  denota a la **función característica** de  $A$ , entonces  $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(g^i(x)) = v_n(x)$  y por ende el Teorema B-K garantiza la existencia del límite A.4, para  $\mu$ -casi todo punto  $x \in X$ .

Una vez establecido el Teorema B-K, es posible dar una definición alternativa a medida ergódica a saber:

**Definición A.2.5** Una medida  $\mu$  es **ergódica** si la función  $\hat{f}$  definida en el Teorema B-K es una constante.

Una demostración de la equivalencia entre la Definición A.2.1 y la Definición A.2.5, puede consultarse en [11].

### A.3. Consecuencias topológicas y dinámicas

**Proposición A.3.1 ([1], Proposición 1.3.3)** Sea  $A \subset X$  un conjunto compacto e invariante. Sea  $\mu$  una medida soportada en  $A$ ; denotemos por  $S_\mu \subset A$  a su soporte. Entonces:

- (a)  $S_\mu$  es un conjunto compacto e invariante.
- (b) Si además suponemos que  $\mu$  es una medida ergódica, entonces  $S_\mu$  es topológicamente transitiva.

Ahora presentamos dos resultados que proveen caracterizaciones de la estabilidad de Liapunov y de estabilidad asintótica en términos de propiedades de vecindades de un conjunto compacto e invariante  $A$ .

**Lema A.3.2 ([1], Lema 1.3.8)** Sean  $X$  un espacio métrico localmente compacto,  $f : X \rightarrow X$  una función continua y  $A$  un conjunto compacto e invariante Liapunov bajo  $f$ . Entonces cualquier vecindad abierta  $U$  de  $A$  contiene una vecindad  $\hat{W}$  invariante hacia adelante de  $A$ .

**Lema A.3.3 ([1], Lema 1.3.9)** Sean  $X$  un espacio métrico compacto,  $f : X \rightarrow X$  una función continua y  $A$  un conjunto compacto e invariante. Entonces  $A$  es asintóticamente estable si, y sólo si  $X$  tiene una base de vecindades compactas  $\{\hat{W}_\alpha\}_{\alpha \in I}$  tal que  $f(\hat{W}_\alpha) \subset \hat{W}_\alpha$  y  $\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(\hat{W}_\alpha) = A$ .

## A.4. Atractores

En este apartado generalizaremos el concepto de punto fijo atractor, diremos que un conjunto compacto  $C \subset X$  es un **atractor** si existe un conjunto abierto  $U$  que contiene a  $C$  y  $f(\hat{U}) \subset U$  y  $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(U)$ . Se sigue que  $f(C) = C$ , dado que  $f(C) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(U) \subset C$ ; por otra parte,  $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(U) = f(C)$ , porque  $f(U) \subset U$ . Más aún, la órbita de cualquier  $x \in C$  converge a  $C$ , esto es, para cualquier vecindad abierta que contenga a  $C$ , existe  $N > 0$  tal que  $f^n(x) \in V$  para todo  $n \geq N$ . Para ver esto, observamos que  $X$  está cubierto por  $V$  junto con los conjuntos abiertos  $X \setminus f^n(\hat{U})$ ,  $n \geq 0$ . Por compacidad, existe una subcobertura abierta finita y dado que  $f(U) \subset f^n(U)$ , concluimos que existe  $N > 0$  tal que  $X = V \cup (X \setminus f^n(\hat{U}))$  para todo  $n \geq N$ . Así,  $f^n(x) \in f^n(U) \subset V$ , para todo  $n \geq N$ .

La **cuenca de atracción** de  $C$  es el conjunto  $BA(C) = f^{-n}(U)$ .

Un conjunto abierto  $U$  tal que  $\hat{U}$  es compacto y  $f(\hat{U}) \subset U$  es llamado una **región de atrape** para  $f$ . Si  $U$  es una región de atrape para  $f$ , entonces  $\bigcap_{n \geq 0} f^n(U)$  es un atractor.

Los ejemplos más sencillos de atractores son: la cuencas de atracción de los puntos fijos atractores y los ciclos atractores.

Muchos sistemas dinámicos no tiene atractores tan simples, como es el caso del atractor de Lorenz, véase [22]. Para este sistema dinámico la región de atrape contiene al cero pero no a los dos puntos repulsores. El atractor contenido en  $U$  es llamado el **atractor de Lorenz** para mayor información sobre este atractor el lector interesado puede consultar [45].

En términos puramente topológicos, esta es la definición más utilizada en la literatura de Sistemas Dinámicos. Sin embargo, existen algunas otras definiciones de atractor en las que se incorporan y eliminan condiciones de esta definición, las cuales comenzamos a presentar a continuación.

**Definición A.4.1** *Sea  $X$  un espacio métrico compacto y  $f$  un endomorfismo continuo de  $X$ . Un conjunto compacto e invariante  $A$  se llama un **atractor asintóticamente estable** si:*

- (a)  $A$  es asintóticamente estable.
- (b)  $A$  es topológicamente transitiva.

**Teorema A.4.2** ([1], Teorema 1.4.6) *Sean  $X$  un espacio métrico localmente compacto y localmente conexo y  $f$  un endomorfismo continuo de  $X$ . Supongamos que  $A$  es un atractor asintóticamente estable para  $f$ . Entonces  $A$  consta de una cantidad finita de componentes conexas las cuales son cíclicamente permutadas.*

Las siguientes definiciones de atractor fueron propuestas por Milnor en [29], las cuales conjugan Topología y Teoría de la Medida.

**Definición A.4.3** *Sean  $X$  una variedad de dimensión finita y  $f$  un endomorfismo continuo de  $X$  y  $\mu$  una medida de Borel equivalente a la medida de Lebesgue. Un conjunto compacto e invariante  $A \subset X$  se dice que es un **atractor minimal de Milnor** si:*

- (a) su cuenca de atracción  $B(A)$  tiene medida positiva;
- (b) no existe ningún subconjunto propio  $A' \subset A$  tal que  $B(A')$  y  $B(A)$  difieren por un conjunto de  $\mu$  medida cero.

**Definición A.4.4** *Sean  $X$  una variedad de dimensión finita y  $f$  un endomorfismo continuo de  $X$  y  $\mu$  una medida de Borel equivalente a la medida de Lebesgue. Un conjunto compacto  $A \subset X$  compacto e invariante se dice que es un **atractor minimal de Milnor** si:*

- (a) su cuenca de atracción  $B(A)$  tiene medida positiva;
- (b) no existe ningún subconjunto propio  $A' \subset A$  tal que  $B(A')$  tiene  $\mu$  medida positiva.

**Observación A.4.5** *Una conjetura inmediata entre las distintas definiciones de atractor es que los atractores asintóticamente estables son atractores minimales de Milnor. De hecho, la motivación para la definición de atractores minimales de Milnor fue generalizar el concepto de cuenca de atracción desde un punto de vista puramente topológico a punto de vista de Teoría de la medida. La situación, sin embargo, es más sutil de lo que parece. La cuenca de un atractor asintóticamente estable es abierta y así es un conjunto de*

medida positiva, véase [17]. La condición (a) de la Definición A.4.3 es así satisfecha. Sin embargo, hasta el momento no se ha probado que la transitividad topológica implique la condición (b). La razón es que estas definiciones se enmarcan en el contexto topológico y en el contexto de medida, respectivamente. Sin embargo, los conceptos dual de categoría de Baire y medida de Lebesgue son campos independientes, véase [32].

La siguiente definición no introduce un nuevo concepto de atractor, es más un especialización de la definición de Milnor a un caso de particular interés.

**Definición A.4.6** *Un conjunto compacto e invariante  $A$  es **esencialmente asintóticamente estable** o un **atractor Melbourne** si existe un conjunto  $C$  tal que, dada una vecindad  $U$  de  $A$  y para cualquier  $\alpha \in (0, 1)$ , existe una vecindad  $V \subset U$  de  $A$  tal que:*

- (a) *todas las órbitas que inician en  $V \setminus C$  permanecen en  $U$  y son asintóticas a  $A$ ,*
- (b)  *$\frac{\lambda(V \setminus C)}{\lambda(V)} > \alpha$ , donde  $\lambda$  denota a la medida de Lebesgue.*

Dados un atractor de Milnor  $A$  para un endomorfismo continuo  $f : X \rightarrow X$  de una variedad compacta  $X$ , consideremos el promedio de Birkhoff de una función continua  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  sobre la órbita que comienza en  $x$  :

$$L(\phi, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \phi(f^i(x)).$$

Supongamos que el límite existe y es independiente de  $x$  para casi todo elemento en  $B(A)$  o, al menos, en un subconjunto  $B \subset B(A)$  de medida positiva. Entonces  $L$  es un funcional lineal continuo en  $C(X, \mathbb{R})$ . Más aún, es positivo y normalizado. Por el Teorema de representación de Riesz define una única medida de probabilidad  $\mu$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \phi(f^i(x)) = \int_A \phi d(\mu) \tag{A.5}$$

para todo  $\phi \in C(X, \mathbb{R})$  y casi todo  $x \in B$ . Esta consideración es la base de la siguiente definición.

---

**Definición A.4.7** Sean  $X$  un espacio localmente compacto y  $f$  un endomorfismo compacto de  $X$  que admite un atractor minimal de Milno. Si existe una medida ergódica  $\mu$  cuyo soporte es  $A$  y tal que la Ecuación A.5 se satisface para todas las funciones continuas  $\phi$  y casi todo  $x \in B$ , donde  $B$  es un conjunto de medida positiva de Lebesgue, entonces  $\mu$  es llamada una **SBR** y  $A$  un **atractor SBR**.

# Conclusiones

El presente trabajo doctoral tuvo como objeto a la  $Q$ -familia o familia logística alternada, la cual es una familia de funciones de derivada Schwarziana negativa a dos parámetros. En esta familia se investigó la existencia de medidas SBR, vía la existencia de medidas absolutamente continuas.

Además, se probó que los parámetros estocásticos forman un conjunto de medida de Lebesgue positiva, con lo cual se prueba la validez del Teorema de Jakobson para sistemas dinámicos alternados reales, y en general, para sistemas dinámicos fibrados.

La generalización del Teorema de Jakobson para la familia alternada, permite conjeturar en la  $Q$ -familia la propiedad de regular o estocástico. Respecto a esta conjetura se ha obtenido una respuesta parcial, con la obtención de los siguientes resultados:

1. La existencia de parámetros tipo Feigenbaum.
2. Una descripción cualitativa de los atractores que coexisten en esta familia.
3. La medida de los parámetros regulares y estocásticos en algunas subregiones de  $I_Q$ .

Falta mostrar la propiedad de regular o estocástico para el espacio de parámetros en su totalidad. Por otra parte, otro aspecto interesante a investigar en esta familia es, usando técnicas reales la demostración de la conjetura de Fatou, es decir, demostrar que los parámetros regulares forman un conjunto abierto y denso en el espacio de parámetros, para ello es necesario estudiar

la combinatoria de los parámetros de Feigenbaum en  $I_Q$ .

Más aún, en lo concerniente a las medidas SBR en la  $Q$ -familia se conjetura que si dos parámetros  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son estocásticos, entonces su composición alternada es un parámetro estocástico y el coeficiente de densidad de la medida es el producto de los coeficientes de densidad de la medida de  $\mu_1$  y  $\mu_2$ .

# Bibliografía

- [1] ASHWIN, P., BUESCU, J. AND STEWART, I. From attractor to chaotic saddle: a tale of transverse instability. *Nonlinearity* 9, 3 (1996), 703.
- [2] AVILA, A., AND MOREIRA, C. Statistical properties of unimodal maps: smooth families with negative schwarzian derivative. *arXiv preprint math/0105221* (2001).
- [3] BLÉ, G., CANO, L. AND ESTRADA J.F. Sbr measures on the alternate logistic family. *Pioneer Journal of Mathematics and Mathematical Science* (por aparecer 2016).
- [4] BLÉ, G., CASTELLANOS, V. AND FALCONI, M. On the coexisting dynamics in the alternate iteration of two logistic maps. *Dynamical Systems* 26, 2 (2011), 189–197.
- [5] BLOKH, A., AND LYUBICH, M. Attractors of transformations of an interval. *Functional Analysis and its Applications* 21, 2 (1987), 148–150.
- [6] BOWEN, R., AND FRANKS, J. The periodic points of maps of the disk and the interval. *Topology* 15, 4 (1976), 337–342.
- [7] CÁNOVAS, J., AND LINERO, A. Periodic structure of alternating continuous interval maps. *Journal of Difference Equations and Applications* 12, 8 (2006), 847–858.
- [8] COMERFORD, M. A straightening theorem for non-autonomous iteration. *Commun. Appl. Nonlinear Anal.* 19, 2 (2012), 1–23.
- [9] COULLET, P., ECKMANN, J.P. AND LANFORD III, O.E. Universal properties of maps on an interval. *Communications in Mathematical Physics* 76, 3 (1980), 211–254.

- 
- [10] DE MELO, W., AND VAN STRIEN, S. *One-dimensional dynamics*, vol. 25. Springer Science & Business Media, 2012.
- [11] DENKER, M. , GRILLENBERGER, C., SIGMUND, K.B. AND JAMES R. Ergodic theory on compact spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.* 83 (1977), 1294-1296 DOI: [http://dx. doi. org/10.1090/S0002-9904-1977-14418-2](http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9904-1977-14418-2) PII (1977), 0002–9904.
- [12] FEIGENBAUM, M. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *Journal of Statistical Physics* 19, 1 (1978), 25–52.
- [13] FEIGENBAUM, M. The metric universal properties of period doubling bifurcations and the spectrum for a route to turbulence. *Annals of the New York Academy of Sciences* 357, 1 (1980), 330–336.
- [14] FEIGENBAUM, M. J. The universal metric properties of nonlinear transformations. *Journal of Statistical Physics* 21, 6 (1979), 669–706.
- [15] GRACZYK, J., AND SWIATEK, G. *The Real Fatou Conjecture.*(AM-144), vol. 144. Princeton University Press, 2014.
- [16] HARRIS, J. *Algebraic geometry: a first course*, vol. 133. Springer Science & Business Media, 2013.
- [17] HIRSCH, M. W. *Differential topology*, vol. 33. Springer Science & Business Media, 2012.
- [18] JAKOBSON, M. Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps. *Communications in Mathematical Physics* 81, 1 (1981), 39–88.
- [19] KELLER, G. Exponents, attractors and hopf decompositions for interval maps. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 10, 04 (1990), 717–744.
- [20] KOT, M., AND SCHAFFER, W. The effects of seasonality on discrete models of population growth. *Theoretical Population Biology* 26, 3 (1984), 340–360.
- [21] LEDRAPPIER, F. Some properties of absolutely continuous invariant measures on an interval. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 1, 01 (1981), 77–93.

- 
- [22] LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences* 20, 2 (1963), 130–141.
- [23] LYUBICH, M. Dynamics of quadratic polynomials, I–II. *Acta Mathematica* 178, 2 (1997), 185–297.
- [24] LYUBICH, M. Feigenbaum-Coulet-Tresser universality and Milnor’s hairiness conjecture. *Annals of Mathematics* 149 (1999), 319–420.
- [25] MALTHUS, T. An essay on the principle of population, as it affects the future improvement of society with remarks on the speculations of mr. godwin, m. condorcet, and other writers. london, printed for j. johnson, in st. paul church-yard, 1798. *St. Paul Church-yard, London* (1798).
- [26] MANÉ, R., AND LEVY, S. *Ergodic theory and differentiable dynamics*, vol. 8. Springer-Verlag Berlin, 1987.
- [27] MATTILA, P. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces: fractals and rectifiability*. No. 44. Cambridge University Press, 1999.
- [28] MAY, R. M. Simple mathematical models with very complicated dynamics. In *The Theory of Chaotic Attractors*. Springer-Verlag, 2004, pp. 85–93.
- [29] MILNOR, J. On the concept of attractor. In *The Theory of Chaotic Attractors*. Springer, 2004, pp. 243–264.
- [30] MILNOR, J., AND TRESSER, C. On entropy and monotonicity for real cubic maps. *Communications in Mathematical Physics* 209, 1 (2000), 123–178.
- [31] MISIUREWICZ M. Horseshoes for mappings of the interval. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math.* 27 (1979), 167–169.
- [32] OXTOBY, J. C. *Measure and category: A survey of the analogies between topological and measure spaces*, vol. 2. Springer Science & Business Media, 2013.
- [33] RADULESCU, A. The connected isentropes conjecture in a space of quartic polynomials. *Discrete and Continuous Dynamical Systems* 19.

- 
- [34] RADULESCU, A. Computing topological entropy in a space of quartic polynomials. *Journal of Statistical Physics* 130, 2 (2008), 373–385.
- [35] RUDIN, W. *Principles of mathematical analysis*, vol. 3. McGraw-Hill New York, 1964.
- [36] RUELLE, D. A measure associated with axiom a attractors. *Amer. J. Math* 98, 3 (1976), 619–654.
- [37] SHARKOVSKII, A. Coexistence of cycles of a continuous map of the line into itself. *International journal of bifurcation and chaos* 5, 05 (1995), 1263–1273.
- [38] SINAI, Y. G. Markov partitions and c-diffeomorphisms. *Functional Analysis and its applications* 2, 1 (1968), 61–82.
- [39] SINAI, Y. G. Gibbs measures in ergodic theory. *Russian Mathematical Surveys* 27, 4 (1972), 21.
- [40] SINGER, D. Stable orbits and bifurcation of maps of the interval. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 35, 2 (1978), 260–267.
- [41] STRAUBE, E. On the existence of invariant, absolutely continuous measures. *Communications in Mathematical Physics* 81, 1 (1981), 27–30.
- [42] TSUJII, M. Positive lyapunov exponents in families of one dimensional dynamical systems. *Inventiones Mathematicae* 111, 1 (1993), 113–137.
- [43] VERHULST, P. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. correspondance mathématique et physique publiée par a. *Quetelet* 10 (1838), 113–121.
- [44] WALTERS, P. *An introduction to ergodic theory*, vol. 79. Springer Science & Business Media, 2000.
- [45] WILLIAMS, R. Lorenz knots are prime. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 4, 01 (1984), 147–163.