



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

**“Modelo Monte Carlo-Mie del esparcimiento de luz a
través de un medio turbio”**

Tesis presentada al

Posgrado de Física

Como requisito parcial para la obtención del grado de

Doctor en Física Aplicada

Por

M.C. Enrique Eugenio Pérez Mayesffer Azcárraga

asesorado por

Dr. Wuiyebaldo Fermín Guerrero Sanchez

Dr. Edmundo Reynoso Lara

Puebla Pue.

Febrero de 2022

Honorables miembros del jurado

Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco.
PRESIDENTE

Dra. Yolanda Elinor Bravo García.
SECRETARIO

Dr. José Antonio Dávila Pintle.
VOCAL

Dr. José Jacobo Oliveros Oliveros.
VOCAL EXTERNO

Dr. José Álvaro David Hernández de la Luz.
VOCAL EXTERNO

Dr. Carlos Ignacio Robledo Sanchez.
SUPLENTE

Agradecimientos

A mi amada esposa Mary Paz, que ahora se encuentra en la gloria del señor, gracias por todo el apoyo, cariño y comprensión que me brindaste en vida para consolidar este proyecto que ahora se transformo en una realidad, a mis hijas Diana y Rebeca por brindarme el amor, cariño y animo que necesite, sobre todo, en los últimos días de la terminación de la tesis.

A mis asesores el Dr. Wuiyenbaldo Fermín Guerrero Sanchez, Dr. Edmundo Reynoso Lara y Dr. Gustavo Rodriguez Zurita, que en vida dedico gran parte de su tiempo ayudándome al lado de mis asesores a entender y analizar de manera profunda el estado del arte que conllevo el trabajo de tesis.

A mis Padres Eugenio y Rebeca y mi hermana Mónica por darme el apoyo y ánimo necesarios para dar el último paso para la conclusión del trabajo de tesis.

Gracias a todos las personas mencionadas previamente, gracias de todo corazón.

Índice general

INTRODUCCIÓN	1
CAPITULO 1: ESPARCIMIENTO RAYLEIGH	3
1.1 Sección transversal de esparcimiento y de absorción.....	3
1.2 Representación de amplitudes en esparcimiento para un campo eléctrico	6
1.3 Dipolo sujeto a onda incidente resonante.....	11
CAPITULO 2: ESPARCIMIENTO MIE	14
2.1 Solución a la ecuación de onda vectorial.....	14
2.2 Expansión de un vector de onda plana.....	21
2.3 Matriz de esparcimiento.....	28
2.4 Secciones de área transversal de extinción, esparcimiento y absorción	33
CAPITULO 3: MÉTODO ESTADÍSTICO MONTE CARLO	35
3.1 Método Monte Carlo y cuasi Monte Carlo	35
3.2 Simulación de variables aleatorias	35
3.2.1 Simulación de variables continuas	36
3.3 Sorteo de una variable continua	36
3.4 Análisis del paso de fotones a través de un medio turbio.....	40
CAPITULO 4: VECTOR UNITARIO MONTE CARLO-MIE	41
4.1 Modelo Monte Carlo Mie	41
4.2 Interpretación gráfica del plano transversal.....	44

4.3 Perfil gráfico de los vectores transversos	44
4.4 Gráficas esféricas en 3D de los vectores transversos... ..	48
4.5 Diagrama de flujo del algoritmo de programación.....	50
4.6 Descripción de los bloques del algoritmo.....	51
CAPITULO 5: RESULTADOS Y APORTACIONES.....	53
5.1 Simulaciones del paso de fotones a través de un medio turbio	53
5.1.1 Comparación de promedios y distribución espacial.....	53
5.1.2 Simulaciones del perfil de distribución espacial en función de la distancia de detección	54
5.1.3 Comparativo del retroesparcimiento en función de la distancia: población cien mil fotones	55
5.1.4 Comparativo del retroesparcimiento en función de la distancia: población un millón de fotones.....	56
5.1.5 Señales experimental-teóricas de retorno Lidar en múltiple esparcimiento	57
5.2 Aportaciones	59
CAPITULO 6: CONCLUSIONES.....	60
APÉNDICE 1: PROPIEDADES DE LA ATMÓSFERA	62
A.1.1 Perfiles verticales de temperatura, presión y densidad numérica	62
A.1.2 Propagación Laser en la atmósfera	63
A.1.3 Esparcimiento atmosférico	66
APÉNDICE 2: SEÑAL EXPERIMENTAL LIDAR EN MÚLTIPLE ESPARCIMIENTO	67
APÉNDICE 3: ALGORITMO PARA EL CÁLCULO DE LAS SECCIONES TRANSVERSALES DE ÁREA DE EXTINCIÓN, ESPARCIMIENTO Y ABSORCIÓN	68
APÉNDICE 4: ALGORITMO PARA CALCULAR FOTONES EN ESPARCIMIENTO	70
BIBLIOGRAFÍA.....	80
PUBLICACIÓN	87

Índice de figuras

1.1.1	Representación de un proceso de esparcimiento donde se visualiza una onda incidente impactando a una partícula de diferente permitividad y mismas permeabilidades, respecto del entorno, y a una onda en esparcimiento.....	3
1.1.2	Representación esquemática de una diferencial de ángulo sólido y su proyección en coordenadas esféricas	5
1.2.1	Representación de una geometría de una partícula arbitraria de distinta permitividad respecto de su entorno, con referencias de posición en \mathbf{r} y \mathbf{r}'	9
1.3.1	Representación en componentes vectoriales de una onda en dirección incidente hacia una partícula dispersora y una onda en esparcimiento en dirección arbitraria alejándose de la partícula	11
1.3.2	Coefficiente de retroesparcimiento e Índice de refracción usando el modelo atmosférico de 1971 , en la ciudad de Puebla	13
2.1.1	Representación esquemática de una onda incidiendo en dirección $+x$ a partícula esférica de radio $r=a$ y permitividad $\varepsilon(\mathbf{r})$ produciendo expansión en armónicos esféricos.....	16
2.1.2	Perfil gráfico de las funciones angulares π_n y τ_n	20
2.3.1	Representación esquemática de las proyecciones en componentes vectoriales de una matriz en esparcimiento en régimen de Mie	29
3.3.1	Curva de crecimiento monótono de la función $y(x)$ en el intervalo de 0 a 1.....	37
3.3.2	Curva de correlación de las variables γ y ξ	38
3.3.3	Curvas del perfil de una función de distribución exponencial para dos diferentes valores específicos de densidades $\sigma k = 1$ y $\sigma k = 2$	39
3.4.1	Representación gráfica de una abscisa al siguiente punto de colisión de un tren de fotones avanzando dentro de un medio turbio	40
4.1.1	Representación geométrica de una proyección en armónicos esféricos de una abscisa al siguiente punto de colisión	42

4.2.1	Representación geométrica de los planos ortogonales que proyectan las componentes del plano transverso	45
4.3.1	Perfil gráfico de la función $ i\pi_n \xi'_n - \tau_n \xi_n $ variando el grado (índice de la sumatoria) en $n = 1$ y para los siguientes valores de distancia: $\rho = 1.75m, \rho = 2m$ y $\rho = 2.6m$	46
4.3.2	Perfil gráfico de la función $ i\tau_n \xi'_n - \pi_n \xi_n $ variando el grado (índice de la sumatoria) en $n = 2$ y para los siguientes valores de distancia: $\rho = 1.75m, \rho = 2m$ y $\rho = 2.6m$	46
4.3.3	Perfil gráfico de la función $ i\pi_n \xi'_n - \tau_n \xi_n $ variando el grado (índice de la sumatoria) en $n = 3$ y para los siguientes valores de distancia: $\rho = 1.75m, \rho = 2m$ y $\rho = 2.6m$	46
4.3.4	Perfil gráfico de la función $ i\tau_n \xi'_n - \pi_n \xi_n $ variando el grado (índice de la sumatoria) en $n = 4$ y para los siguientes valores de distancia: $\rho = 1.75m, \rho = 2m$ y $\rho = 2.6m$	47
4.3.5	Perfil gráfico de la función $ i\pi_n \xi'_n - \tau_n \xi_n $ variando el grado (índice de la sumatoria) en $n = 5$ y para los siguientes valores de distancia: $\rho = 1.75m, \rho = 2m$ y $\rho = 2.6m$	47
4.3.6	Perfil gráfico de la función $ i\tau_n \xi'_n - \pi_n \xi_n $ variando el grado (índice de la sumatoria) en $n = 6$ y para los siguientes valores de distancia: $\rho = 1.75m, \rho = 2m$ y $\rho = 2.6m$	47
4.4.1	Gráfica esférica en 3D de la función escalar μ_{k2} para $n = 5$, con una variación de distancia en $\rho = 5m, \rho = 50m, \rho = 500m$	48
4.4.2	Gráfica esférica en 3D de la función escalar μ_{k3} para $n = 5$, con una variación de distancia en $\rho = 5m, \rho = 50m, \rho = 500m$	49
4.6.1	Representación esquemática del plano transverso sobre un sistema en coordenadas cartesianas representando fotones en retroesparcimiento proyectándose en direcciones que están contenidas dentro de un ángulo sólido de un telescopio.....	52
5.1.1	Representación esquemática de una distribución espacial de fotones de longitud de onda 532 nm, incidiendo a medios turbios con partículas esparcidoras de distintos tamaños: a) radio $r = 0.5 \mu m$, b) radio $r = 2 \mu m$, c) radio $r = 4 \mu m$, e índices de refracción de 1.58	54
5.3.1	Comparativo de los tres perfiles de retroesparcimiento fotonico en función de la distancia, en poblaciones de 10^5 partículas dispersoras de radios 0.5, 2 y 4 μm	55
5.4.1	Comparativo de los tres perfiles de retroesparcimiento fotonico en función de la distancia, en poblaciones de 10^6 partículas dispersoras de radios 0.5, 2 y 4 μm	56
5.5.1	Sistema de detección atmosférico LIDAR	57
5.5.2	Factor de escalamiento que correlaciona un factor de transmitancia de una señal experimental LIDAR.....	58

5.5.3	Curvas de perfiles probables de retroesparcimiento experimental/teóricos; de señal LIDAR.....	59
A.1.1	Representación esquemática del ángulo sólido en relación con el concepto visual de Radiancia	63
A.1.2	Representación esquemática de la propagación de la luz a través de distintas capas atmosféricas turbias de diferentes espesores	64
A.1.3	Representación de distintas ventanas atmosféricas en todo el espectro electromagnético	65
A.1.4	Representación esquemática del paso de fotones en un medio turbio	66
A.2.1	Curvas del perfil experimental de señal LIDAR de nube baja	67

Índice de tablas

Tabla I	Esparcimiento de fotones dentro de dispersores de radio $r = 0.5 \mu\text{m}$	53
Tabla II	Esparcimiento de fotones dentro de dispersores de radio $r = 2 \mu\text{m}$	53
Tabla III	Esparcimiento de fotones dentro de dispersores de radio $r = 4 \mu\text{m}$	54
Tabla IV	Comparativo del retroesparcimiento de 10^5 fotones por dispersores de dimensión radial $r = 0.5 \mu\text{m}, r = 2 \mu\text{m}, r = 4 \mu\text{m}$	55
Tabla V	Comparativo del retroesparcimiento de 10^6 fotones por dispersores de dimensión radial $r = 0.5 \mu\text{m}, r = 2 \mu\text{m}, r = 4 \mu\text{m}$	56
Tabla VI	Comparativo de perfiles experimental/teóricos de una señal Lidar	58
Tabla A.I	Clasificación del modelo atmosférico estándar estadounidense de 1976	62

Resumen

En este trabajo se investigaron los perfiles de esparcimiento atmosférico de la luz en un medio turbio, a través de simulaciones numéricas basadas en el método Monte Carlo y la teoría de Mie. El esparcimiento de fotones se trató aprovechando la dualidad onda partícula como ondas electromagnéticas asociadas a armónicos esféricos. La propuesta consistió en definir un vector unitario representando a la función de distribución de fase de esparcimiento en tres componentes vectoriales. Una componente de avance espacial y dos formando un plano transversal que define el frente de onda en esparcimiento. El avance espacial se propuso en proyección de armónicos esféricos de acuerdo a la teoría de Gustav Mie. Este vector unitario se evaluó dentro del algoritmo Monte Carlo lográndose obtener simulaciones de esparcimiento de la luz, consiguiéndose a su vez una considerable simplificación del algoritmo al momento de la fotodetección de luz en retroesparcimiento debido a las funciones complejas que están asociadas a las componentes vectoriales, paralela y perpendicular del plano transversal. Como consecuencia de dicha simplificación los resultados de las simulaciones se lograron ejecutar en tiempos reducidos. Se observó además una considerable disminución de los promedios de fotones en retroesparcimiento a medida que se aumentaba el diámetro de la partícula dispersora, confirmado esto último por la teoría de Mie, finalmente el modelo se validó con una señal experimental Lidar, cortesía de el laboratorio aeroespacial francés ONERA, gracias a dichos datos experimentales se logró obtener de manera indirecta la Transmitancia de la nube en baja altitud.

Objetivos.

Objetivo general.

Desarrollar un modelo teórico-numérico del esparcimiento de la luz, representado a través de ondas armónicas esféricas usando la teoría de Mie capaz de identificar propiedades de los elementos propios de un medio turbio, usando el método estadístico de Monte Carlo.

Objetivos particulares.

- Estudiar el estado del arte del esparcimiento de la luz en el régimen de Rayleigh.
- Estudiar el estado del arte del esparcimiento de la luz en el régimen de Mie.
- Desarrollar un algoritmo de programación, usando el método de Monte Carlo, capaz de cuantificar la cantidad de fotones en esparcimiento y a su vez detectar la cantidad de fotones que pueden ser captados por un fotodetector, hipotético, colocado a la distancia R .
- Validar el modelo teórico-numérico en datos experimentales provenientes de una señal Lidar de múltiple esparcimiento.

INTRODUCCIÓN

El uso de técnicas de sensado remotas son esenciales para investigaciones en la atmósfera terrestre. Una técnica que se ocupa hoy en día es conocida como LIDAR (*Light Detection and Ranging*). Esta técnica utiliza a la luz como medio de sensado remoto del entorno atmosférico. La comunidad científica que se dedica al estudio del medio ambiente se ha esforzado en presentar diferentes modelos de esparcimiento de luz con la intención de hacerlos cada vez más precisos y con el fin de obtener e identificar, a través del estudio de las propiedades, los distintos elementos atmosféricos de nuestro planeta. La contribución de estos modelos al estudio de la sustentabilidad del medio ambiente y cambio climático son de vital importancia para el Planeta, en México hasta ahora hay pocos registros de trabajos por parte de grupos de investigación consolidados referente al desarrollo de un modelo propio del esparcimiento atmosférico. En Países como el nuestro el intentar realizar investigación atmosférica es casi imposible debido a los costos y mantenimiento de la instrumentación que conforma un equipo LIDAR son muy elevados, como consecuencia de esto las posibilidades de adquirir equipos basados en esta tecnología son muy reducidas. Por todas estas razones es por ello que se trabajó en el proyecto de creación de un modelo combinando el método numérico de Monte Carlo y el modelo de esparcimiento de ondas electromagnéticas de la teoría de Gustav Mie con la variante de trabajar el modelo desde las funciones especiales que componen a un vector unitario de esparcimiento. El objetivo de esta tesis es contribuir al desarrollo de algoritmos usados en la tecnología aplicada dentro de los procesos de instrumentación LIDAR. Para lo cual el trabajo se centró específicamente en la parte de la interpretación de datos experimentales a través del desarrollo de un modelo teórico-numérico el cual, por medio de una computadora, logre dar información de las propiedades físicas del entorno. La forma de cómo se abordó el problema fue por medio del estudio del estado de arte referente al esparcimiento de la luz, por ende, este trabajo consta de dos partes fundamentales: El estudio del esparcimiento de la luz a través de la teoría de Rayleigh y a través de la teoría de Mie. Para posteriormente desarrollar y validar un modelo numérico que cuantifique estadísticamente el número de fotones en esparcimiento de la luz en el régimen de Mie. En el presente trabajo se investigaron los perfiles de esparcimiento atmosférico en un medio turbio, a través de simulaciones numéricas basadas en el método Monte Carlo y la teoría de Mie. Usando para ello un algoritmo desarrollado en Mathematica; como lenguaje de programación. El esparcimiento de fotones se trató, aprovechando la dualidad onda partícula, como ondas electromagnéticas asociadas a espacios tridimensionales armónicos esféricos. La propuesta consistió en definir un vector unitario de avance que represente una función de distribución de fase en sus tres componentes vectoriales, una de avance espacial y dos formando un plano transversal que define el frente de onda en esparcimiento. El avance espacial es en la proyección de armónicos esféricos de acuerdo a la teoría de Gustav Mie. Este vector compuesto se definió como una función de estado dentro del algoritmo y se evaluó usando el método de Monte Carlo lográndose obtener simulaciones de esparcimiento de la luz. Se compararon perfiles de retroesparcimiento para tres distintas dimensiones geométricas de partículas esféricas dentro del medio turbio, incluyendo una validación del modelo con una señal Lidar de nubes bajas.

La tesis consta de seis capítulos descritos a continuación: el primer capítulo describe el estado del arte de la teoría de Rayleigh, el segundo capítulo describe el estado del arte de la teoría de Mie, el tercer

capítulo describe de manera sintetizada el método de Monte Carlo, desde el enfoque que aborda el libro MÉTODO DE MONTECARLO del autor I.M. Sóbol. El cuarto capítulo describe la propuesta del modelo Monte Carlo Mie y desarrollo del algoritmo de simulación, el quinto capítulo describe los resultados y aportaciones y finalmente el sexto capítulo describe las conclusiones. Los apéndice finales se describen a continuación: el primer apéndice describe de manera general los parámetros de las propiedades atmosféricas usadas dentro de los modelos de esparcimiento de la luz, el segundo apéndice muestra los datos y gráfica experimental por cortesía del laboratorio aeroespacial ONERA, el tercer apéndice describe el algoritmo del cálculo de los coeficientes de una onda en esparcimiento lejano Mie y el cuarto apéndice describe el algoritmo de esparcimiento y cuantificación de fotones que pasan a través de un medio turbio. En la parte final se muestra la bibliografía y el artículo publicado.

Capítulo 1

ESPARCIMIENTO RAYLEIGH

Cuando una partícula es iluminada por una onda incidente parte de la potencia irradiada se absorbe en la partícula y el resto de la potencia se esparce en todas direcciones, tal y como se observa en la figura A.1.4 (apéndice 1), para describir los parámetros involucrados en el proceso de esparcimiento de luz y de este modo estudiar estos dos fenómenos naturales es conveniente representar a la onda incidente como una onda plana y polarizada en un eje del sistema coordenado, propagándose en un medio con una constante dieléctrica ϵ_0 y permeabilidad μ_0 . En la sección 1.1 se aborda las definiciones de las secciones transversales de área, en la 1.2 las representaciones de las amplitudes de la onda en esparcimiento asociada a un campo eléctrico y en la 1.3 el desarrollo de un dipolo sujeto a una onda incidente resonante.

1.1 Sección transversal de esparcimiento y de absorción.

Definiendo al campo eléctrico como [1 - 2]

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{e}}_i E_0 e^{ik\hat{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{r}}, \quad (1.1.1)$$

donde $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ es el vector de posición y

$$k = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (1.1.2)$$

donde k es el número de onda, λ es la longitud de onda, $\hat{\mathbf{k}}_i$ es un vector unitario que define la dirección de propagación de la onda y $\hat{\mathbf{e}}_i$ es un vector unitario que define la dirección de polarización del campo eléctrico incidente. Esta onda incide sobre la partícula tal y como se observa en la siguiente Figura 1.1.1.

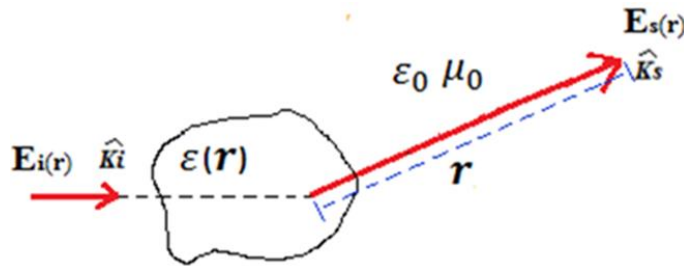


Figura 1.1.1

Onda plana $\mathbf{E}_i(\mathbf{r})$, incidiendo sobre una partícula dieléctrica y una onda en esparcimiento $\mathbf{E}_s(\mathbf{r})$, en dirección $\hat{\mathbf{k}}_s$ a una distancia \mathbf{r} .

Dicha partícula contiene una constante dieléctrica definida como [1 - 2]

$$\epsilon_r(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon(\mathbf{r})}{\epsilon_0} = \epsilon'_r(\mathbf{r}) + i\epsilon''_r(\mathbf{r}), \quad (1.1.3)$$

$\epsilon_r(\mathbf{r})$ es en general compleja y dependerá de la posición dentro de una partícula inhomogénea.

Para distancias de observación cercanas a la partícula ($r < \frac{D^2}{\lambda}$), donde D representa el diámetro de la partícula, el campo esparcido $\mathbf{E}_s(\mathbf{r})$ manifiesta amplitudes y variaciones de fase difíciles de estimar debido a la influencia de otras partículas que se encuentran cerca unas de las otras, pero para distancias lejanas de observación ($r > \frac{D^2}{\lambda}$) el campo en esparcimiento se comportará como onda esférica. Definiendo un campo en esparcimiento lejano en la dirección $\hat{\mathbf{k}}_s$ como [1 - 2]

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{e}}_s f(\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\mathbf{k}}_s) E_0 \frac{e^{ik\hat{\mathbf{k}}_s \cdot \mathbf{r}}}{r}, \quad (1.1.4)$$

donde $\hat{\mathbf{e}}_s$ es perpendicular a $\hat{\mathbf{k}}_s$. La función de proporcionalidad $f(\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\mathbf{k}}_s)$ es también conocida como función de fase y se refiere al esparcimiento en amplitud de una onda en dirección $\hat{\mathbf{k}}_s$.

La intensidad de campo magnético asociado con la onda incidente es

$$\mathbf{H}_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{\eta} \hat{\mathbf{k}}_i \times \mathbf{E}_i(\mathbf{r}), \quad (1.1.5)$$

donde la impedancia del medio asociada a la onda está definida por la relación $\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$.

El flujo de potencia por unidad de área de la onda incidente, conocido como *vector de Poynting*, es [1 - 7]

$$\mathbf{S}_i = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E}_i \times \mathbf{H}_i^*) = \frac{|E_0|^2}{2\eta} \hat{\mathbf{k}}_i. \quad (1.1.6)$$

Si definimos el campo magnético de la onda en esparcimiento como

$$\mathbf{H}_s(\mathbf{r}) = \frac{1}{\eta} \hat{\mathbf{k}}_s \times \mathbf{E}_s(\mathbf{r}). \quad (1.1.7)$$

Entonces el *vector de Poynting* de la onda en esparcimiento, es

$$\mathbf{S}_s = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*) = \frac{|E_s|^2}{2\eta} \hat{\mathbf{k}}_s, \quad (1.1.8)$$

sustituyendo, en magnitud, la ecuación (1.1.4) en la ecuación (1.1.8) resulta

$$\mathbf{S}_s = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*) = \frac{|f(\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\mathbf{k}}_s)|^2 |E_0|^2}{r^2 2\eta} \hat{\mathbf{k}}_s. \quad (1.1.9)$$

Considerando una diferencial de ángulo sólido $d\Omega_s$ en la dirección de esparcimiento $\hat{\mathbf{k}}_s$, en un sistema coordenado esférico, tal y como se observa en la Figura 1.1.2 [2], donde

$$d\Omega_s = \text{sen}\theta_s d\theta_s d\phi_s, \quad (1.1.10)$$

a la distancia r , el área que subtiende esta diferencial de ángulo $d\Omega_s$ sólido es

$$dA = r^2 d\Omega_s = r^2 \sin\theta_s d\theta_s d\phi_s. \quad (1.1.11)$$

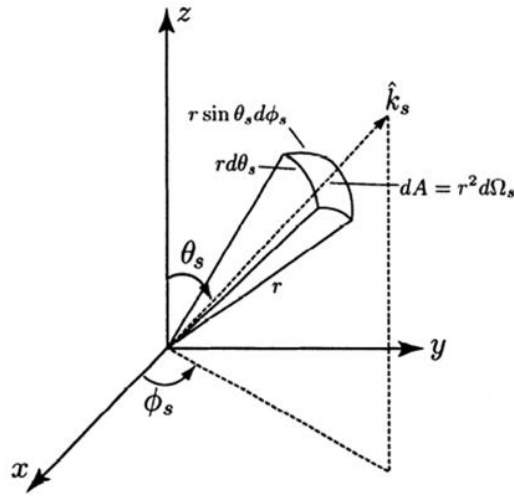


Figura 1.1.2

Diferencial de ángulo sólido $d\Omega_s = \sin\theta_s d\theta_s d\phi_s$, en un sistema de coordenadas esféricas.

La diferencial de potencia en esparcimiento dP_s a través de una diferencial de área dA se define como

$$dP_s = |\mathbf{S}_s| dA = |\mathbf{S}_s| r^2 d\Omega_s, \quad (1.1.12)$$

sustituyendo la ecuación (1.1.9) en la ecuación (1.1.12) resulta

$$dP_s = |f(\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\mathbf{k}}_s)|^2 \frac{|E_0|^2}{2\eta} d\Omega_s. \quad (1.1.13)$$

Si usamos la definición del vector de Poynting, en magnitud, para la onda incidente

$$\frac{dP_s}{|\mathbf{S}_i|} = |f(\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\mathbf{k}}_s)|^2 d\Omega_s, \quad (1.1.14)$$

entonces se introduce el concepto de *sección transversal de área diferencial* como

$$\frac{dP_s}{|\mathbf{S}_i|} = \sigma_d(\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\mathbf{k}}_s) d\Omega_s, \quad (1.1.15)$$

comparando ecuaciones (1.1.14) y (1.1.15) resulta [1 - 2]

$$\sigma_d(\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\mathbf{k}}_s) = |f(\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\mathbf{k}}_s)|^2, \quad (1.1.16)$$

integrando la ecuación (1.1.14) sobre todas las direcciones angulares en esparcimiento

$$\frac{dP_s}{|\mathbf{S}_i|} = \int d\Omega_s |f(\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\mathbf{k}}_s)|^2, \quad (1.1.17)$$

la potencia resultante en esparcimiento será

$$P_s = \sigma_s |\mathbf{S}_i|, \quad (1.1.18)$$

donde σ_s se conoce como la *sección transversal en esparcimiento* y se define como

$$\sigma_s = \int d\Omega_s |f(\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\mathbf{k}}_s)|^2 = \int d\Omega_s \sigma_a(\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\mathbf{k}}_s). \quad (1.1.19)$$

Se sabe que la partícula en un momento puede absorber energía de la onda incidente por lo tanto si definimos la sección transversal de absorción como el cociente de una potencia de absorción entre la irradiancia incidente, es decir [1 - 2]

$$\sigma_a = \frac{P_a}{|\mathbf{S}_i|}. \quad (1.1.20)$$

Considerando la constante dieléctrica de la partícula, ecuación (1.1.3), y considerando la ley de Ohm podemos definir la potencia de absorción como

$$P_a = \int \frac{1}{2} \omega \varepsilon_0 \varepsilon''_r |\mathbf{E}|^2 dV', \quad (1.1.21)$$

entonces de las ecuaciones (1.1.6), (1.1.20) y (1.1.21), suponiendo que la magnitud de campo en el vector de Poyting, de la onda incidente, es $|\mathbf{E}_0| = 1$. La sección transversal de absorción queda como

$$\sigma_a = \int k \varepsilon''_r(\mathbf{r}') |\mathbf{E}(\mathbf{r}')|^2 dV'. \quad (1.1.22)$$

1.2 Representación de amplitudes en esparcimiento para un campo eléctrico.

Partiendo de la ecuación de Maxwell para la intensidad de campo magnético y considerando un cuerpo cuya constante de permitividad relativa dependerá de su posición, tal y como lo describe la ecuación (1.1.3), dicho cuerpo abarcará un determinado volumen V y alrededor de dicho volumen existirá un medio cuya constante dieléctrica es ε_0 . De las ecuaciones de Maxwell en régimen de frecuencia, considerando un medio homogéneo e isotrópico de densidad de carga cero pero habiendo conductividad σ . La ley de Faraday, en términos de un campo eléctrico y de flujo magnético en régimen de frecuencia, se describe como

$$\nabla \times \bar{\mathbf{E}} e^{-i\omega t} = -\frac{\partial \bar{\mathbf{B}} e^{-i\omega t}}{\partial t} = i\omega \bar{\mathbf{B}} e^{-i\omega t}, \quad (1.2.1)$$

la ecuación (1.2.1) la podemos representar como

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B} = i\omega \mu \mathbf{H}, \quad (1.2.2)$$

donde $\mathbf{E} = \bar{\mathbf{E}} e^{-i\omega t}$ y $\mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}} e^{-i\omega t}$, finalmente la ecuación (1.2.2) queda representada en términos de la intensidad campo magnético como

$$\mathbf{H} = \frac{1}{i\omega \mu} \nabla \times \mathbf{E}, \quad (1.2.3)$$

Partiendo de la ley de Ampere

$$\nabla \times \bar{H} e^{-i\omega t} = \left(\bar{J}_f + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) e^{-i\omega t} = \sigma \bar{E} e^{-i\omega t} + \frac{\partial}{\partial t} [\varepsilon_0 \bar{E} e^{-i\omega t} + \varepsilon_0 \chi \bar{E} e^{-i\omega t}], \quad (1.2.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = [-i\omega \varepsilon_0 (1 + \chi) + \sigma] \mathbf{E} = -i\omega \left[\varepsilon_0 \varepsilon_r(\mathbf{r}) + \frac{i\sigma}{\omega} \right] \mathbf{E}. \quad (1.2.5)$$

Donde χ es la susceptibilidad eléctrica, ε_0 es la permitividad del vacío y $\varepsilon_r(\mathbf{r})$ es la permitividad relativa, haciendo un cambio de variable a la ecuación (1.2.5) se obtiene

$$\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}, \quad (1.2.6)$$

la ecuación (1.2.6) aplicada en medios homogéneos no conductores se simplifica a

$$\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (1.2.7)$$

donde $\mathbf{H} = \bar{H} e^{-i\omega t}$ finalmente la ecuación (1.2.7) queda representada en términos del campo eléctrico como

$$\mathbf{E} = \frac{i}{\omega \varepsilon_0} \nabla \times \mathbf{H}, \quad (1.2.8)$$

manipulando el término $\frac{1}{\omega \varepsilon_0} = \frac{\omega \mu}{\omega^2 \mu \varepsilon_0} = \frac{\omega \mu}{k^2}$ podemos representar a la ecuación (1.2.8) como

$$\mathbf{E} = \frac{i\omega \mu}{k^2} \nabla \times \mathbf{H}, \quad (1.2.9)$$

considerando el caso de un medio atmosférico sin magnetización, con partículas conductoras, entonces la Ley de Ampere se comporta como la ecuación (1.2.6) y se puede reescribir como

$$\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E} + i\omega \varepsilon_0 \mathbf{E} - i\omega \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (1.2.10)$$

de la ecuación (1.2.10) se puede asociar los dos primeros términos a una densidad de corriente resultante de la diferencia de la permitividad relativa (o constante dieléctrica) con respecto a la permitividad del vacío. Entonces esta densidad de corriente se puede visualizar como fuente de corriente dentro del volumen de la partícula, fuera de ella no existe, así entonces

$$\nabla \times \mathbf{H} = [-i\omega \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E} + i\omega \varepsilon_0 \mathbf{E}] - i\omega \varepsilon_0 \mathbf{E},$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{J}_f, \quad (1.2.11)$$

donde la fuente de corriente generadora de la onda en esparcimiento; se define como [1]

$$\mathbf{J}_f = -i\omega \varepsilon_0 \left[\frac{\varepsilon(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} - 1 \right] \mathbf{E} = -i\omega \varepsilon_0 [\varepsilon(\mathbf{r})_r - 1] \mathbf{E} \quad (1.2.12)$$

O bien

$$\mathbf{J}_f = \begin{cases} -i\omega\epsilon_0\epsilon(\mathbf{r})_r\mathbf{E} + i\omega\epsilon_0\mathbf{E} & ; \text{dentro del Volumen} \\ 0 & ; \text{fuera del Volumen} \end{cases}, \quad (1.2.13)$$

la densidad de corriente \mathbf{J}_f se puede representar como una fuente de corriente equivalente dentro del volumen de la partícula y que a su vez actúa como generador de ondas de esparcimiento. La solución para la ecuación (1.2.11) es

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_s(\mathbf{r}), \quad (1.2.14)$$

donde $\mathbf{E}_i(\mathbf{r})$ es el campo de la onda incidente y $\mathbf{E}_s(\mathbf{r})$ es el campo de la onda en esparcimiento. Este ultimo campo mencionado es el campo de interés en términos del esparcimiento de una onda electromagnética y como tal se desarrollara una expresión alterna del campo eléctrico a través del vector de Hertz [1, 8].

Heinrich Rudolf Hertz demostró que es posible representar a un campo electromagnético a través de una sola función vectorial denominada; vector de Hertz. Bajo consideraciones de un medio isotrópico y homogéneo donde no existen fuente de corriente ni cargas libres, se puede asociar el vector potencial \mathbf{A} proporcional a la variación temporal de un vector asociado $\mathbf{\Pi}$, entonces se puede expresar una intensidad magnética en términos de este potencial como [8]

$$\mathbf{A} = \mu\epsilon \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t}, \quad (1.2.15)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \epsilon \nabla \times \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t}, \quad (1.2.16)$$

y el campo eléctrico temporal se puede representar como

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = -\epsilon \nabla \phi - \mu\epsilon^2 \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial t^2}. \quad (1.2.17)$$

Tomando de nuevo la Ley de Ampere, bajo estas condiciones

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (1.2.18)$$

sustituyendo ecuación (1.2.16) y (1.2.17) en ecuación (1.2.18)

$$\nabla \times \epsilon \nabla \times \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[-\epsilon \nabla \phi - \mu\epsilon^2 \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial t^2} \right], \quad (1.2.19)$$

realizando simplificaciones algebraicas y reordenamiento de términos resulta

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \times \nabla \times \mathbf{\Pi} + \nabla \phi + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial t^2} \right) = 0, \quad (1.2.20)$$

proponiendo una función potencial escalar, que como requisito satisfaga la ecuación de onda escalar, de la forma

$$\phi = -\nabla \cdot \Pi, \quad (1.2.21)$$

sustituyendo ecuación (1.2.21) en (1.2.20) e integrando

$$\nabla \times \nabla \times \Pi - \nabla \nabla \cdot \Pi + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = C, \quad (1.2.22)$$

donde C es una constante arbitraria que en este caso conviene que sea cero, entonces se puede representar a un campo eléctrico de la forma

$$\mathbf{E} = \nabla \times \nabla \times \Pi = \nabla \nabla \cdot \Pi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2}.$$

En el dominio de la frecuencia el campo eléctrico en esparcimiento es

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = \nabla \times \nabla \times [-i\omega \varepsilon_0 \Pi_s(\mathbf{r})], \quad (1.2.23)$$

proponiendo una solución a la ecuación diferencial (1.2.23) a través de una función de espacio de Green como

$$-i\omega \varepsilon_0 \Pi_s(\mathbf{r}) = \int \mathbf{G}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}_f(\mathbf{r}') dV', \quad (1.2.24)$$

sustituyendo ecuación (1.2.12) en ecuación (1.2.24)

$$\Pi_s(\mathbf{r}) = \int [\varepsilon_r(\mathbf{r}') - 1] \mathbf{G}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') dV', \quad (1.2.25)$$

y definiendo a una onda esférica como:

$$\mathbf{G}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (1.2.26)$$

Para obtener la amplitud de esparcimiento se ubica el campo $\mathbf{E}(\mathbf{r})_s$ a una distancia lejana de la partícula, tal y como se ve en la Figura 1.2.1 [1], note que $\mathbf{r} = R\hat{\mathbf{k}}_s$. En la zona lejana la magnitud de $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ se puede aproximar a $\frac{1}{R}$, sin embargo

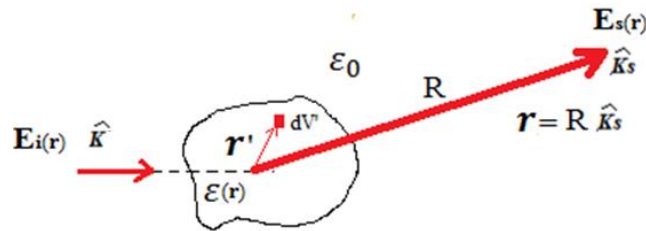


Figura 1.2.1

Geometría de una partícula con puntos de referencia en \mathbf{r}' y \mathbf{r} .

no sucede lo mismo para $k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ debido a las variaciones en el inverso de la longitud de onda pueden ser significativas. Entonces retomando la idea previa que a la distancia lejana se considera la siguiente aproximación

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \cong \frac{1}{|\mathbf{r}|} = \frac{1}{R}. \quad (1.2.27)$$

Además

$$\begin{aligned} k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| &= k(R^2 + r'^2 - 2R\mathbf{r}' \cdot \widehat{\mathbf{k}}_s)^{\frac{1}{2}} \\ &= kR(1 + [\frac{r'}{R}]^2 - 2\frac{1}{R}\mathbf{r}' \cdot \widehat{\mathbf{k}}_s)^{\frac{1}{2}} \\ &\cong kR(1 - \frac{2\mathbf{r}' \cdot \widehat{\mathbf{k}}_s}{R})^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (1.2.28)$$

La ecuación (1.2.28) se justifica ya que $R \gg r'$, ahora si aplicamos una expansión binomial resulta

$$k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \cong kR \left(1 - \frac{2}{2R}\mathbf{r}' \cdot \widehat{\mathbf{k}}_s\right) = k(R - \mathbf{r}' \cdot \widehat{\mathbf{k}}_s). \quad (1.2.29)$$

Sustituyendo ecuaciones (1.2.27) y (1.2.29) en ecuación (1.2.26) resulta

$$\mathbf{G}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ik(R-\mathbf{r}' \cdot \widehat{\mathbf{k}}_s)}}{4\pi R}. \quad (1.2.30)$$

Sustituyendo ahora ecuación (1.2.30) en ecuación (1.2.25)

$$\begin{aligned} \Pi_s(\mathbf{r}) &= \int \frac{e^{ik(R-\mathbf{r}' \cdot \widehat{\mathbf{k}}_s)}}{4\pi R} ([\varepsilon(\mathbf{r})_{\mathbf{r}} - 1]\mathbf{E}) dV', \\ \Pi_s(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{ik(R-\mathbf{r}' \cdot \widehat{\mathbf{k}}_s)}}{R} [\varepsilon(\mathbf{r})_{\mathbf{r}} - 1]\mathbf{E} dV', \end{aligned} \quad (1.2.31)$$

considerando ecuación (1.2.31); la ecuación (1.2.23) resulta

$$\mathbf{E}_{\text{esp}} = \nabla \times \nabla \times \left\{ \frac{1}{4\pi R} \int \frac{e^{ik(R-\mathbf{r}' \cdot \widehat{\mathbf{k}}_s)}}{R} [\varepsilon(\mathbf{r})_{\mathbf{r}} - 1]\mathbf{E} dV' \right\}. \quad (1.2.32)$$

Pero analizando el gradiente de

$$\nabla \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) = \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) ik\nabla R + e^{ikR} \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \cong \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) ik\nabla R \quad (1.2.33)$$

La ecuación (1.2.33) se justifica ya que se ha supuesto que estamos en distancias muy lejanas a la partícula. Por otro lado el gradiente ∇R , a grandes distancias se aproxima a [1]:

$$\nabla R = \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \cong \widehat{\mathbf{k}}_s. \quad (1.2.34)$$

La ecuación (1.2.34) se justifica puesto que para distancias lejanas $\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \cong \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \widehat{\mathbf{k}}_s$.

Notando entonces que la ecuación (1.2.33) se modifica dado el resultado de la ecuación (1.2.34) así $\nabla\left(\frac{e^{ikR}}{R}\right) \cong \left(\frac{e^{ikR}}{R}\right)(ik\nabla R) = (ik\hat{\mathbf{k}}_s)\left(\frac{e^{ikR}}{R}\right)$ y por comparación se concluye que

$$\nabla \cong ik\hat{\mathbf{k}}_s \quad (1.2.35)$$

Finalmente si sustituimos ecuación (1.2.35) en ecuación (1.2.32) se obtiene

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = ik\hat{\mathbf{k}}_s \times ik\hat{\mathbf{k}}_s \times \left\{ \frac{1}{4\pi R} \int \frac{e^{ik(R-r'\cdot\hat{\mathbf{k}}_s)}}{R} [\varepsilon(\mathbf{r})_r - 1] \mathbf{E}(\mathbf{r}') dV' \right\},$$

o bien

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = \frac{k^2}{4\pi} \int \{-\hat{\mathbf{k}}_s \times \hat{\mathbf{k}}_s \times [\mathbf{E}(\mathbf{r}')]\} [\varepsilon_r(\mathbf{r}') - 1] e^{-ikr'\cdot\hat{\mathbf{k}}_s} dV' \frac{e^{ikR}}{R} \quad (1.2.36)$$

la ecuación (1.2.36) representa la amplitud de esparcimiento en términos del campo eléctrico total $\mathbf{E}(\mathbf{r}')$ dentro de la partícula, aunque en general no se conoce este campo en muchos casos prácticos se aproxima por medio de diferentes funciones según los casos a analizar. De tal modo que así se puede obtener una expresión aproximada de la amplitud de esparcimiento de la onda [1]. En la siguiente sección se analizará el caso simple de un dipolo sometido a una onda incidente resonante.

1.3 Dipolo sujeto a onda incidente resonante.

En la Figura 1.3.1 se observa, una onda plana incidente polarizada en la dirección del eje x , el vector de campo incidente $\hat{\mathbf{k}}_i$ propagándose sobre el eje z , impactando a una partícula ubicada en el origen del sistema coordenado, también se observa a la onda esparcida superpuesta sobre el mismo sistema de referencia, donde el vector de campo en esparcimiento está ubicado en la posición $Q(r,\theta)$.

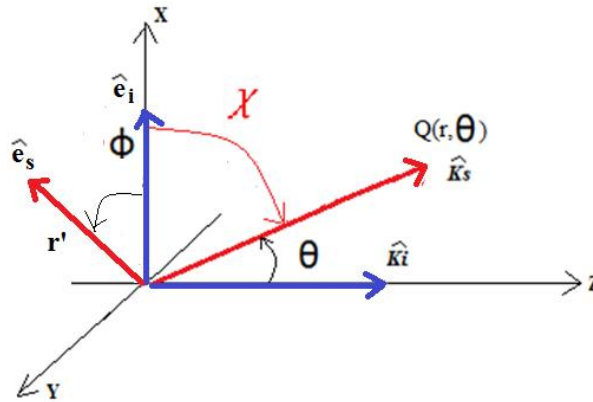


Figura 1.3.1

Onda plana incidente, en dirección $\hat{\mathbf{k}}_i$ impactando en una partícula y generando una onda esparcida en dirección $\hat{\mathbf{k}}_s$.

Suponiendo un punto de referencia dentro del dipolo de forma ortogonal respecto del vector unitario $\hat{\mathbf{k}}_s$ a la distancia lejana, es decir $\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{k}}_s = 0$ (ver Fig. 1.3.1), considerando un medio homogéneo e isotrópico dentro de la partícula, y comparado ecuación (1.1.4) con ecuación (1.2.36) se obtiene [1 - 2]

$$f(\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\mathbf{k}}_s) = \frac{k^2}{4\pi} \{-\hat{\mathbf{k}}_s \times [\hat{\mathbf{k}}_s \times \hat{\mathbf{e}}_i]\} [\varepsilon_r - 1] V, \quad (1.3.1)$$

donde de la geometría se ve $[-\hat{\mathbf{k}}_s \times [\hat{\mathbf{k}}_s \times \hat{\mathbf{e}}_i]] = \text{sen}\chi$, entonces

$$|f(\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\mathbf{k}}_s)| = \left| \frac{k^2}{4\pi} [\varepsilon_r - 1] V \right| \text{sen}\chi, \quad (1.3.2)$$

de modo que la sección diferencial de área transversal, de acuerdo a la ecuación (1.1.16), es

$$\sigma_d(\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\mathbf{k}}_s) = \left| \frac{k^2}{4\pi} [\varepsilon_r - 1] V \right|^2 \text{sen}^2\chi, \quad (1.3.3)$$

considerando la ecuación (1.1.2) y que la concentración de gas ideal molecular atmosférico está relacionado con el inverso del volumen, la ecuación (1.3.3) se convierte en [1 - 2]

$$\sigma_d(\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\mathbf{k}}_s) = \frac{\pi^2(n^2-1)^2}{N^2\lambda^4} \text{sen}^2\chi. \quad (1.3.4)$$

De la figura 1.3.1 se ve que: $\text{sen}^2\chi = 1 - (\hat{\mathbf{k}}_s \cdot \hat{\mathbf{e}}_i)^2 = 1 - (\text{sen}\theta\text{cos}\phi)^2$, entonces el área diferencial de retroesparcimiento se evalúa en $\theta = \pi, \phi = 0$, es decir; del esparcimiento en dirección a la fuente se obtiene la sección transversal de área en retroesparcimiento.

$$\sigma_{retro} = \frac{\pi^2(n^2-1)^2}{N^2\lambda^4}. \quad (1.3.5)$$

Para mezclas de gases atmosféricos presentes a alturas inferiores a 100km. Collins y Russell [9] han indicado que la sección transversal de área diferencial de retroesparcimiento se puede modelar como

$$\sigma_{retro} = \frac{d\sigma(\pi)}{d\Omega} = 5.45 \left[\frac{550}{\lambda_{(nm)}} \right]^4 * 10^{-28} \text{cm}^2 \text{sr}^{-1}. \quad (1.3.6)$$

El coeficiente volumétrico de retroesparcimiento se obtiene de multiplicar la ecuación (1.3.6) por la densidad numérica de dispersores N , entonces [9-10].

$$\beta_{retro} = N * 0.000545 \left[\frac{550}{\lambda_{(nm)}} \right]^4 * 10^{-28} \text{m}^{-1} \text{sr}^{-1}. \quad (1.3.7)$$

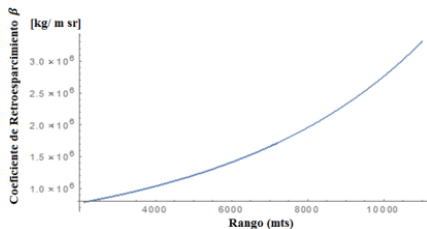
Y el índice de refracción en términos del coeficiente de retroesparcimiento a partir de la ecuación (1.3.5)

$$(n^2 - 1)^2 = \frac{\sigma_{retro} N^2 \lambda^4}{\pi^2} \rightarrow n = \left[\frac{N \lambda^2}{\pi} (\sigma_{retro})^{\frac{1}{2}} + 1 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (1.3.8)$$

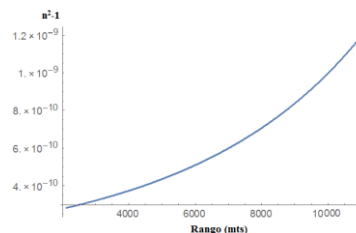
De ecuaciones (1.3.7) y (1.3.8) y usando Tabla A.I, se obtuvo el coeficiente de retroesparcimiento Rayleigh e índice de refracción para la ciudad de Puebla, a 790720 (Pa) y 295.15 (°K); ver Figura 1.3.2.

Altura troposférica de 2.135 a 11 km

Coefficiente de retroesparcimiento

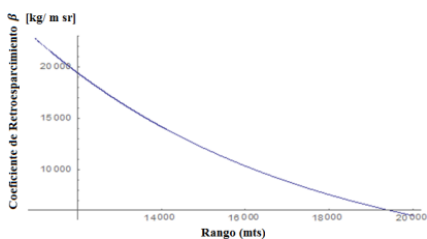


Índice de refracción

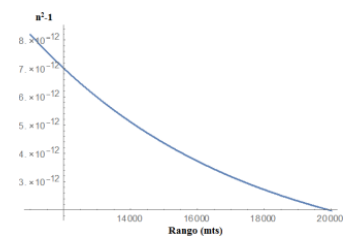


Altura troposférica de 11 a 20 km

Coefficiente de retroesparcimiento

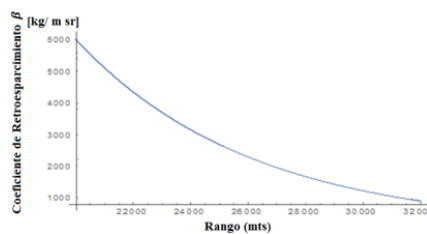


Índice de refracción

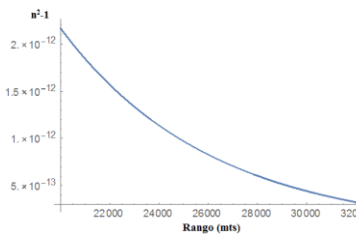


Altura estratosférica de 20 a 32 km

Coefficiente de retroesparcimiento

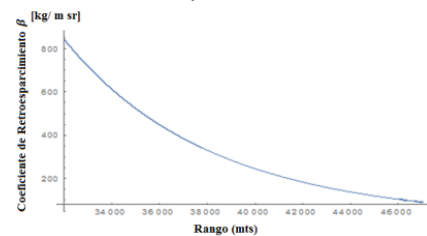


Índice de refracción



Altura estratosférica de 32 a 47 km

Coefficiente de retroesparcimiento



Índice de refracción

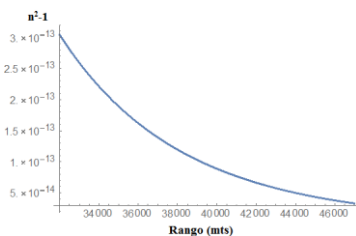


Figura 1.3.2

Coefficiente de retroesparcimiento e Índice de refracción en la ciudad de Puebla.

Capítulo 2

ESPARCIMIENTO MIE

El desarrollo de la teoría de absorción y esparcimiento por pequeñas partículas arroja soluciones precisas para geometrías esféricas, es decir para una esfera de radio arbitrario e índice de refracción dado. Sin embargo, soluciones exactas aparecieron hasta la aplicación de los sistemas de cómputo.

En 1908 Gustav Mie desarrollo la teoría para entender la absorción y esparcimiento de colores exhibidos por pequeñas partículas coloidales de oro suspendidas en agua. Al mismo tiempo Peter Debye analizaba la presión de radiación ejercida sobre pequeñas partículas suspendidas en el espacio (trabajo de su tesis doctoral) ambos investigadores contribuyeron en sentar las bases que nos preceden en el desarrollo de esta teoría a analizar denominada: Teoría de MIE. La parte matemática alrededor de esta teoría quizás se vea algo sencilla pero engorrosa. Sin embargo la parte física que relaciona la interacción de los campos electromagnéticos en una geometría esférica, sí resulta difícil de interpretar. Una herramienta que ayuda a dar tratamiento de la física de manera sencilla es el manejo de campos electromagnéticos expandidos en series infinitas en esparcimiento por el espacio. Y en el presente tiempo se hace aún más cómodo desde un tratamiento computacional [11]. En la sección 2.1 se aborda la solución a una ecuación de onda vectorial, en la 2.2 la expansión de un vector de una onda plana, en la 2.3 la matriz de esparcimiento y en la 2.4 se analizan las secciones transversales de área.

2.1 Solución a la ecuación de onda vectorial.

Para proponer una base vectorial en este régimen se establecen una serie de condiciones similares a la que cumplen los campos electromagnéticos (\mathbf{E}, \mathbf{H}), armónicos en el tiempo, inmersos en un medio homogéneo e isotrópico satisfaciendo las ecuaciones de Maxwell y a la ecuación de onda general, en el espacio libre, para un medio dieléctrico ($\sigma=0$). Entonces partiendo de las ecuaciones de Maxwell [11]:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = i\omega\varepsilon\mathbf{E},$$

aplicando el rotacional a las Leyes de Ampere-Maxwell y Faraday

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = i\omega\mu\nabla \times \mathbf{H} = \omega^2\varepsilon\mu\mathbf{E}, \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = -i\omega\varepsilon\nabla \times \mathbf{E} = \omega^2\varepsilon\mu\mathbf{H}, \quad (2.1.1)$$

aplicando la identidad mostrada a continuación

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \cdot (\nabla \mathbf{A}),$$

a la ecuación (2.1.1), entonces para el campo eléctrico se tiene

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla \cdot (\nabla \mathbf{E}) = -\nabla \cdot (\nabla \mathbf{E}), \quad (2.1.2)$$

El resultado de esta última ecuación se justifica dado que la divergencia del campo eléctrico es cero. Si se sustituye el resultado de la ecuación (2.1.1) para el caso eléctrico se tiene:

$$\omega^2 \epsilon \mu \mathbf{E} = -\nabla \cdot (\nabla \mathbf{E}), \quad (2.1.3)$$

a partir de la ecuación (2.1.3) se obtiene la ecuación de Helmholtz en términos del campo eléctrico como

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0, \quad (2.1.4)$$

Donde $k^2 = \omega^2 \epsilon \mu$

o en términos del campo de intensidad magnética como

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0. \quad (2.1.5)$$

Con estas restricciones se define una función escalar ψ y una constante vectorial arbitraria \mathbf{c} , construyendo así una función vectorial \mathbf{M} , como una solución a las ecuaciones de onda (2.1.4) y (2.1.5), así entonces:

$$\mathbf{M} = \nabla \times (\mathbf{c}\psi), \quad (2.1.6)$$

garantizando que la divergencia y divergencia del rotacional sean cero, así:

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = 0.$$

Si el operador $\nabla^2 + k^2$ es aplicado a la ecuación (2.1.6), entonces se tiene [12]:

$$\nabla^2 \mathbf{M} + k^2 \mathbf{M} = \nabla \times [\mathbf{c}(\nabla^2 \psi + k^2 \psi)], \quad (2.1.7)$$

de modo que \mathbf{M} satisface la ecuación vectorial de onda si y solo si ψ satisface la ecuación escalar de onda

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0. \quad (2.1.8)$$

Dentro de esta teoría se propone la construcción de una segunda solución a las ecuaciones de onda (2.1.4) y (2.1.5), como:

$$\mathbf{N} = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{M} \quad (2.1.9)$$

con divergencia igual a cero, el cual también satisface la ecuación de onda

$$\nabla^2 \mathbf{N} + k^2 \mathbf{N} = 0. \quad (2.1.10)$$

Donde se cumple que

$$k\mathbf{M} = \nabla \times \mathbf{N}, \quad (2.1.11)$$

además \mathbf{M} y \mathbf{N} deben cumplir con todas las propiedades de un campo electromagnético en cuanto a que satisfacen la ecuación vectorial de onda, están libres de divergencia y tanto el rotacional de \mathbf{M} es proporcional a \mathbf{N} como el rotacional de \mathbf{N} es proporcional a \mathbf{M} . Así que el objetivo de encontrar soluciones a la ecuación de los campos se reducirá a encontrar la solución a la ecuación escalar de onda. Denominaremos a la función escalar ψ como una función generadora de vectores armónicos esféricos \mathbf{M} y \mathbf{N} además como la ecuación de onda deberá operar en coordenadas polares r, θ, ϕ , tal y como se observa en la Figura 2.1.1 [2], entonces se puede sustituir el vector piloto constante \mathbf{c} por

$$\mathbf{M} = \nabla \times (r\psi). \quad (2.1.12)$$

Donde \mathbf{r} es radio vector por lo que el vector \mathbf{M} es solución a la ecuación vectorial de onda en coordenadas polares,

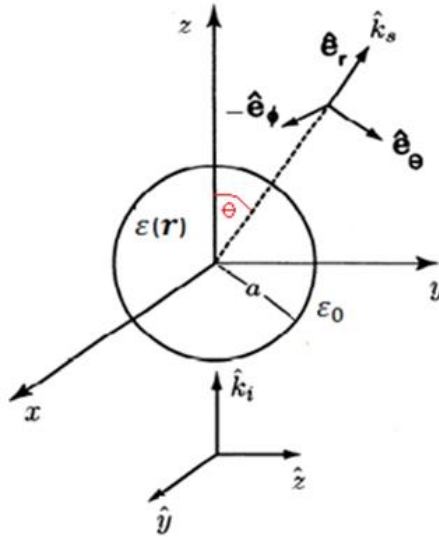


Figura 2.1.1

Geometría de una esfera de radio $r = a$ y permitividad $\varepsilon(\mathbf{r})$ donde incide una onda plana en dirección $+x$, produciendo expansión en armónicos esféricos.

La ecuación escalar de onda en coordenadas polares es [11 - 12]

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k^2 \psi = 0. \quad (2.1.13)$$

Proponiendo una solución particular para (2.1.7) de la forma

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi), \quad (2.1.14)$$

sustituyendo la solución propuesta en (2.1.14) genera tres ecuaciones por separado asociadas cada una a un eje coordenado (radial, polar y acimutal).

Las soluciones de cada una de las tres ecuaciones deberán ser linealmente independientes y univalueadas [13], así la solución total de la ecuación de onda escalar (2.1.8) se define por

una solución par:

$$\psi_{Pmn} = \cos(m\phi)P_n^m(\cos\theta)z_n(kr), \quad (2.1.15)$$

una solución impar:

$$\psi_{Imn} = \sen(m\phi)P_n^m(\cos\theta)z_n(kr), \quad (2.1.16)$$

las ecuaciones (2.1.15) y (2.1.16) se consideran funciones generadoras que satisfagan a la ecuación de onda escalar en coordenadas esféricas polares: donde P_n^m definen funciones asociadas de Legendre de grado n y orden m , z_n pueden ser cualquiera de las cuatro funciones de Bessel j_n , y_n , $h_n^{(1)}$ o $h_n^{(2)}$. Cualquier función expresada en términos de las ecuaciones (2.1.15) y (2.1.16) satisface la ecuación de onda escalar y puede ser expandida en una serie infinita a través de vectores generadores de armónicos esféricos definidos como

$$\mathbf{M}_{Pmn} = \nabla \times (r\psi_{Pmn}), \quad \mathbf{M}_{Imn} = \nabla \times (r\psi_{Imn}), \quad (2.1.17)$$

$$\mathbf{N}_{Pmn} = \frac{\nabla \times \mathbf{M}_{Pmn}}{k}, \quad \mathbf{N}_{Imn} = \frac{\nabla \times \mathbf{M}_{Imn}}{k}, \quad (2.1.18)$$

Si se aplica el gradiente a las ecuaciones (2.1.15) y (2.1.16), es decir $\nabla\psi$, estas satisfarán la ecuación de onda vectorial y si además se define un vector de posición constante $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$. Se está en la posibilidad de calcular las componentes vectoriales del vector \mathbf{M} como sigue:

$$\mathbf{M} = \nabla \times (r\psi)\mathbf{e}_r = \frac{1}{r^2 \sen\theta} \begin{vmatrix} \widehat{\mathbf{e}}_r & r\widehat{\mathbf{e}}_\theta & r\sen\theta\widehat{\mathbf{e}}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ r\psi & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{r}{r^2 \sen\theta} \left[-\frac{\partial}{\partial \phi} (r\psi) \right] \widehat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{r\sen\theta}{r^2 \sen\theta} \left[-\frac{\partial}{\partial \theta} (r\psi) \right] \widehat{\mathbf{e}}_\phi$$

$$\mathbf{M} = \left[\frac{1}{\sen\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right] \widehat{\mathbf{e}}_\theta - \left[\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right] \widehat{\mathbf{e}}_\phi \quad (2.1.19)$$

en términos de componentes escalares:

$$M_r = 0 \quad M_\theta = \frac{1}{\sen\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \quad M_\phi = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad (2.1.20)$$

de la relación $k\mathbf{N} = \nabla \times \mathbf{M}$ se observa:

$$\nabla \times \mathbf{M} = \frac{1}{r^2 \text{sen}\theta} \begin{vmatrix} \widehat{\mathbf{e}}_r & r\widehat{\mathbf{e}}_\theta & r\text{sen}\theta\widehat{\mathbf{e}}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ 0 & \frac{r}{\text{sen}\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} & -r\text{sen}\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \mathbf{M} = \frac{\widehat{\mathbf{e}}_r}{r^2 \text{sen}\theta} \left[-\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\text{sen}\theta \frac{\partial r\psi}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{\partial r\psi}{\partial \phi} \right) \right] - \frac{r\widehat{\mathbf{e}}_\theta}{r^2 \text{sen}\theta} \left[-\frac{\partial}{\partial r} \left(\text{sen}\theta \frac{\partial r\psi}{\partial \theta} \right) \right] + \frac{r\text{sen}\theta\widehat{\mathbf{e}}_\phi}{r^2 \text{sen}\theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{\partial r\psi}{\partial \phi} \right) \right]$$

$$k\mathbf{N} = \left[-\frac{1}{r^2 \text{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\text{sen}\theta \frac{\partial r\psi}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r^2 \text{sen}^2\theta} \frac{\partial^2(r\psi)}{\partial \phi^2} \right] \widehat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r \partial \theta} \right] \widehat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r \partial \phi} \right] \widehat{\mathbf{e}}_\phi \quad (2.1.21)$$

y como el Laplaciano en coordenadas esféricas, satisface:

$$\frac{d^2(r\psi)}{dr^2} + k^2 r\psi = -\frac{1}{r^2 \text{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\text{sen}\theta \frac{\partial r\psi}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r^2 \text{sen}^2\theta} \frac{\partial^2(r\psi)}{\partial \phi^2} \quad (2.1.22)$$

cumpliéndose además que [8]

$$\frac{d^2(r\psi)}{dr^2} + k^2 r\psi = \frac{n(n+1)\psi}{r}, \quad (2.1.23)$$

usando las ecuaciones (2.1.22) y (2.1.23) en la ecuación (2.1.21) se obtiene:

$$\mathbf{N} = \left[\frac{n(n+1)\psi}{kr} \right] \widehat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{kr} \left[\frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r \partial \theta} \right] \widehat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{kr} \left[\frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r \partial \phi} \right] \widehat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (2.1.24)$$

así, en términos de componentes escalares:

$$N_r = \frac{n(n+1)(r\psi)}{kr^2} \quad N_\theta = \frac{1}{kr} \left[\frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r \partial \theta} \right] \quad N_\phi = \frac{1}{kr} \left[\frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r \partial \phi} \right]. \quad (2.1.25)$$

Sustituyendo las soluciones generadoras de armónicos esféricos de los potenciales escalares par e impar identificados por las ecuaciones (2.1.15) y (2.1.16) en las ecuaciones (2.1.19) y (2.1.24) se obtienen:

$$\mathbf{M}_{Pmn} = \left[\frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{\partial(\cos(m\phi)P_n^m(\cos\theta)z_n(kr))}{\partial \phi} \right] \widehat{\mathbf{e}}_\theta - \left[\frac{\partial(\cos(m\phi)P_n^m(\cos\theta)z_n(kr))}{\partial \theta} \right] \widehat{\mathbf{e}}_\phi$$

$$\mathbf{M}_{Pmn} = \frac{-m}{\text{sen}\theta} \text{sen}(m\phi)P_n^m(\cos\theta)z_n(kr)\widehat{\mathbf{e}}_\theta - \cos(m\phi) \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} z_n(kr)\widehat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (2.1.26)$$

$$\mathbf{M}_{Imn} = \left[\frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{\partial(\text{sen}(m\phi)P_n^m(\cos\theta)z_n(kr))}{\partial\phi} \right] \widehat{\mathbf{e}}_r - \left[\frac{\partial(\text{sen}(m\phi)P_n^m(\cos\theta)z_n(kr))}{\partial\theta} \right] \widehat{\mathbf{e}}_\phi$$

$$\mathbf{M}_{Imn} = \frac{m}{\text{sen}\theta} \cos(m\phi)P_n^m(\cos\theta)z_n(kr)\widehat{\mathbf{e}}_\theta - \text{sen}(m\phi) \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} z_n(kr)\widehat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (2.1.27)$$

$$\mathbf{N}_{Pmn} = \left[\frac{n(n+1)\cos(m\phi)P_n^m(\cos\theta)z_n(kr)}{kr} \right] \widehat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{kr} \left[\frac{\partial^2(r\cos(m\phi)P_n^m(\cos\theta)z_n(kr))}{\partial r \partial \theta} \right] \widehat{\mathbf{e}}_\theta$$

$$+ \frac{1}{kr} \left[\frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{\partial^2(r\cos(m\phi)P_n^m(\cos\theta)z_n(kr))}{\partial r \partial \phi} \right] \widehat{\mathbf{e}}_\phi$$

$$\mathbf{N}_{Pmn} = \frac{z_n(kr)}{kr} \cos(m\phi) n(n+1)P_n^m(\cos\theta)\widehat{\mathbf{e}}_r + \cos(m\phi) \frac{\partial P_n^m(\cos\theta)}{\partial\theta} \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial kr} [krz_n(kr)]\widehat{\mathbf{e}}_\theta$$

$$- m\text{sen}(m\phi) \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\text{sen}\theta} \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial kr} [krz_n(kr)]\widehat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (2.1.28)$$

$$\mathbf{N}_{Imn} = \left[\frac{n(n+1)\text{sen}(m\phi)P_n^m(\cos\theta)z_n(kr)}{kr} \right] \widehat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{kr} \left[\frac{\partial^2(r\text{sen}(m\phi)P_n^m(\cos\theta)z_n(kr))}{\partial r \partial \theta} \right] \widehat{\mathbf{e}}_\theta$$

$$+ \frac{1}{kr} \left[\frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{\partial^2(r\text{sen}(m\phi)P_n^m(\cos\theta)z_n(kr))}{\partial r \partial \phi} \right] \widehat{\mathbf{e}}_\phi$$

$$\mathbf{N}_{Imn} = \frac{z_n(kr)}{kr} \text{sen}(m\phi) n(n+1)P_n^m(\cos\theta)\widehat{\mathbf{e}}_r + \text{sen}(m\phi) \frac{\partial P_n^m(\cos\theta)}{\partial\theta} \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial kr} [rz_n(kr)]\widehat{\mathbf{e}}_\theta$$

$$+ m\cos(m\phi) \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\text{sen}\theta} \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial kr} [rz_n(kr)]\widehat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (2.1.29)$$

cualquier solución a las ecuaciones de los campos electromagnéticos armónicos saldrá de la expansión en series infinitas de las ecuaciones (2.1.26) a (2.1.29). En esparcimiento Mie es común realizar un cambio de variable definiendo unas funciones llamadas *Funciones de dependencia angular* las cuales se definen a continuación como:

$$\pi_n = \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\text{sen}\theta}, \quad (2.1.30)$$

Y

$$\tau_n = \frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta}, \quad (2.1.31)$$

a continuación, en la Figura 2.1.2, se muestra un perfil grafico de π_n y τ_n , para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$,

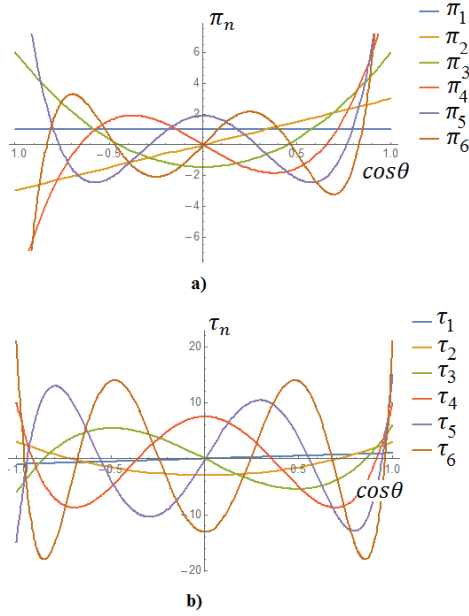


Figura 2.1.2

Perfil gráfico de las funciones π_n , τ_n variando el $\cos\theta$ desde -1 a 1.

a partir de las ecuaciones (2.1.30) y (2.1.31) se puede representar de una forma más compacta las bases vectoriales definidas por las ecuaciones (2.1.26) hasta (2.1.29) considerando además el cambio de variable en el orden $m = 1$, de la función generatriz de las funciones asociadas de Legendre que garantiza una simetría acimutal, y definiendo $\rho = kr$, entonces:

$$\mathbf{M}_{P1n} = -\text{sen } \phi \pi_n(\cos\theta) z_n(\rho) \widehat{\mathbf{e}}_\theta - \cos \phi \tau_n(\cos\theta) z_n(\rho) \widehat{\mathbf{e}}_\phi \quad (2.1.32)$$

$$\mathbf{M}_{I1n} = \cos \phi \pi_n(\cos\theta) z_n(\rho) \widehat{\mathbf{e}}_\theta - \text{sen } \phi \tau_n(\cos\theta) z_n(\rho) \widehat{\mathbf{e}}_\phi \quad (2.1.33)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{P1n} = & \cos \phi n(n+1) \text{sen} \theta \pi_n(\cos\theta) \frac{z_n(\rho)}{\rho} \widehat{\mathbf{e}}_r + \cos \phi \tau_n(\cos\theta) \frac{[\rho z_n(\rho)]'}{\rho} \widehat{\mathbf{e}}_\theta \\ & - \text{sen } \phi \pi_n(\cos\theta) \frac{[\rho z_n(\rho)]'}{\rho} \widehat{\mathbf{e}}_\phi \end{aligned} \quad (2.1.34)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{I1n} = & \text{sen } \phi n(n+1) \text{sen} \theta \pi_n(\cos\theta) \frac{z_n(\rho)}{\rho} \widehat{\mathbf{e}}_r + \text{sen } \phi \tau_n(\cos\theta) \frac{[\rho z_n(\rho)]'}{\rho} \widehat{\mathbf{e}}_\theta \\ & + \cos \phi \pi_n(\cos\theta) \frac{[\rho z_n(\rho)]'}{\rho} \widehat{\mathbf{e}}_\phi \end{aligned} \quad (2.1.35)$$

A partir de esta nueva base vectorial se analizará el esparcimiento de una onda incidiendo a una esfera arbitraria.

2.2 Expansión de un vector de onda plana.

En el análisis de una onda plana polarizada difractándose sobre un objeto esférico se centra en la idea de encontrar la expansión de las ondas esféricas difractadas debido al vector de onda incidente sobre la esfera y para esto se partirá de la base vectorial definida por las ecuaciones (2.1.32) a la (2.1.35).

El problema se centra ahora en analizar el esparcimiento de una onda plana polarizada en el eje x , la onda incidente descrita en coordenadas esféricas polares es [8, 11]

$$\mathbf{E}_{ent} = E_0 e^{ikr \cos \theta} \widehat{\mathbf{e}}_x, \quad (2.2.1)$$

donde

$$\widehat{\mathbf{e}}_x = \sin \theta \cos \phi \widehat{\mathbf{e}}_r + \cos \theta \cos \phi \widehat{\mathbf{e}}_\theta - \sin \phi \widehat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (2.2.2)$$

como la divergencia del vector $e^{ikr \cos \theta} \widehat{\mathbf{e}}_x$ es cero. El vector \mathbf{E}_{ent} (2.2.1) se puede expandir en términos de los vectores armónicos definidos por \mathbf{M}_{1mn} , \mathbf{N}_{1mn} . Se debe considerar que en $r = 0$, el campo es finito por lo que es recomendable ocupar funciones de primera clase. Tomando en cuenta la paridad de los términos en expansión de la serie y dada la definición natural del vector unitario (2.2.2) se toma el valor de $m = 1$. Entonces dada la propiedad de ortogonalidad implícita en las soluciones armónicas y garantizando convergencia al origen del sistema de referencia, se puede definir la expansión del vector armónico para el campo eléctrico como

$$\widehat{\mathbf{e}}_x e^{ikr \cos \theta} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \mathbf{M}_{11n}^{(1)} + b_n \mathbf{N}_{11n}^{(1)}), \quad (2.2.3)$$

De modo que si se multiplica la ecuación (2.2.3) por el vector armónico $\mathbf{M}_{11n}^{(1)}$ y posteriormente se integra de 0 a 2π en dirección acimutal y de 0 a π en la dirección cenital obtenemos una relación para el coeficiente a_n expresada de la forma [8]

$$a_n = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \widehat{\mathbf{e}}_x \mathbf{M}_{11n}^{(1)} e^{ikr \cos \theta} \sin \theta d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi [\mathbf{M}_{11n}^{(1)}]^2 \sin \theta d\theta d\phi}, \quad (2.2.4)$$

resolver las integrales implícitas en la ecuación (2.2.4) es un trabajo muy laborioso que requiere del uso de las propiedades de ortogonalidad, función generatriz y funciones de recurrencia muy extensas que salen del contexto de la tesis por lo que solo se darán los resultados finales. Así entonces, las integrales asociadas al numerador dan una solución de la forma [8]:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \widehat{\mathbf{e}}_x \mathbf{M}_{11n}^{(1)} e^{ikr \cos \theta} \sin \theta d\theta d\phi = 2\pi i^n n(n+1) [j_n(\rho)]^2,$$

y para el denominador respectivamente

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi [\mathbf{M}_{11n}^{(1)}]^2 \sin \theta d\theta d\phi = \frac{2\pi}{2n+1} [n(n+1)]^2 [j_n(\rho)]^2,$$

entonces el cociente de la ecuación (2.2.4) resulta en:

$$a_n = \frac{2n+1}{n(n+1)} i^n. \quad (2.2.5)$$

Del mismo modo se resuelve, pero ahora se multiplica por el vector armónico $\mathbf{N}_{P1n}^{(1)}$, para el coeficiente b_n obteniéndose un cociente de la forma:

$$b_n = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \widehat{\mathbf{e}}_x \mathbf{N}_{P1n}^{(1)} e^{ikr \cos \theta} \sin \theta d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi [\mathbf{N}_{P1n}^{(1)}]^2 \sin \theta d\theta d\phi}, \quad (2.2.6)$$

el resultado de resolver las integrales, arroja en este caso [8]

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \widehat{\mathbf{e}}_x \mathbf{N}_{P1n}^{(1)} e^{ikr \cos \theta} \sin \theta d\theta d\phi = -2\pi i^{n+1} \frac{n(n+1)}{2n+1} \{ (n+1)[j_{n+1}(\rho)]^2 + n[j_{n-1}(\rho)]^2 \},$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi [\mathbf{N}_{P1n}^{(1)}]^2 \sin \theta d\theta d\phi = \frac{2\pi}{(2n+1)^2} [n(n+1)]^2 \{ (n+1)[j_{n+1}(\rho)]^2 + n[j_{n-1}(\rho)]^2 \},$$

y entonces el cociente de la ecuación (2.2.6) resulta en:

$$b_n = -\frac{2n+1}{n(n+1)} i^{n+1}. \quad (2.2.7)$$

Sustituyendo ecuaciones (2.2.5) y (2.2.7) en (2.2.3) y el resultado en la ecuación (2.2.1), se obtiene la expansión de una onda plana en armónicos esféricos de la forma:

$$\mathbf{E}_{ent} = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} i^n (\mathbf{M}_{11n}^{(1)} - i\mathbf{N}_{P1n}^{(1)}). \quad (2.2.8)$$

Realizando cambio de variable $E_n = E_0 \frac{2n+1}{n(n+1)} i^n$, entonces

$$\mathbf{E}_{ent} = \sum_{n=1}^{\infty} E_n (\mathbf{M}_{11n}^{(1)} - i\mathbf{N}_{P1n}^{(1)}). \quad (2.2.9)$$

Para calcular el campo magnético se opera el rotacional de la ecuación (2.2.9) como:

$$\mathbf{H}_{ent} = \frac{k}{\omega\mu} \widehat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{E}_{ent} = \frac{k}{\omega\mu} \sum E_n [\widehat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{M}_{11n}^{(1)} - \widehat{\mathbf{e}}_r \times i\mathbf{N}_{P1n}^{(1)}] \quad (2.2.10)$$

analizando los rotacionales, a partir de las ecuaciones (2.1.33) y (2.1.34):

$$\widehat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{M}_{11n}^{(1)} = \begin{vmatrix} \widehat{\mathbf{e}}_r & \widehat{\mathbf{e}}_\theta & \widehat{\mathbf{e}}_\phi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi \pi_n j_n(\rho) & -\sin \phi \tau_n j_n(\rho) \end{vmatrix} = [\sin \phi \tau_n j_n(\rho)] \widehat{\mathbf{e}}_\theta + [\cos \phi \pi_n j_n(\rho)] \widehat{\mathbf{e}}_\phi$$

$$\widehat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{M}_{11n}^{(1)} = [\sin \phi \tau_n j_n(\rho)] \widehat{\mathbf{e}}_\theta + [\cos \phi \pi_n j_n(\rho)] \widehat{\mathbf{e}}_\phi \quad (2.2.11)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_r \times i\mathbf{N}_{P1n}^{(1)} = i \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_r & \hat{\mathbf{e}}_\theta & \hat{\mathbf{e}}_\phi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi \tau_n \frac{[\rho j_n(\rho)]'}{\rho} & -\sin \phi \pi_n \frac{[\rho j_n(\rho)]'}{\rho} \end{vmatrix} =$$

$$i \left\{ \left[\sin \phi \pi_n \frac{[\rho j_n(\rho)]'}{\rho} \right] \hat{\mathbf{e}}_\theta + \left[\cos \phi \tau_n \frac{[\rho j_n(\rho)]'}{\rho} \right] \hat{\mathbf{e}}_\phi \right\}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_r \times i\mathbf{N}_{P1n}^{(1)} = i \left\{ \left[\sin \phi \pi_n \frac{[\rho j_n(\rho)]'}{\rho} \right] \hat{\mathbf{e}}_\theta + \left[\cos \phi \tau_n \frac{[\rho j_n(\rho)]'}{\rho} \right] \hat{\mathbf{e}}_\phi \right\} \quad (2.2.12)$$

Considerando ahora una restricción definida por $\pi_n(1) = \tau_n(1)$, cuando $\cos\theta \rightarrow 1$ [8][11], y observando de las ecuaciones (2.1.32) y (2.1.35), entonces las ecuaciones (2.2.11) y (2.2.12) se modifican como

$$\hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{M}_{I1n}^{(1)} = -\mathbf{M}_{P1n}^{(1)} \quad (2.2.13)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_r \times i\mathbf{N}_{P1n}^{(1)} = i\mathbf{N}_{I1n}^{(1)}, \quad (2.2.14)$$

sustituyendo ecuaciones (2.2.13) y (2.2.14) en ecuación (2.2.10) se obtiene la representación en expansión de armónicos esféricos para un campo de intensidad magnética incidente como:

$$\mathbf{H}_{ent} = \frac{-k}{\omega\mu} \sum_{n=1}^{\infty} E_n (\mathbf{M}_{P1n}^{(1)} + i\mathbf{N}_{I1n}^{(1)}). \quad (2.2.15)$$

Proponiendo funciones esféricas de Bessel adecuadas en las funciones generadoras de vectores armónicos dentro de la esfera, para el campo eléctrico interno resulta [11]

$$\mathbf{E}_i = \sum_{n=1}^{\infty} E_n (c_n \mathbf{M}_{I1n}^{(1)} - id_n \mathbf{N}_{P1n}^{(1)}) \quad (2.2.16)$$

y para el campo magnético interno, resulta

$$\mathbf{H}_i = \frac{-k_1}{\omega\mu} \sum_{n=1}^{\infty} E_n (d_n \mathbf{M}_{P1n}^{(1)} + ic_n \mathbf{N}_{I1n}^{(1)}). \quad (2.2.17)$$

así también definiendo un campo eléctrico en expansión de armónicos esféricos en términos de funciones esféricas de Hankel, resulta [11]

$$\mathbf{E}_s = \sum_{n=1}^{\infty} E_n (ia_n \mathbf{N}_{P1n}^{(3)} - b_n \mathbf{M}_{I1n}^{(3)}). \quad (2.2.18)$$

$$\mathbf{H}_s = \frac{k}{\omega\mu} \sum_{n=1}^{\infty} E_n (ib_n \mathbf{N}_{I1n}^{(3)} + a_n \mathbf{M}_{P1n}^{(3)}). \quad (2.2.19)$$

Donde el superíndice (3) de las ecuaciones (2.2.18) y (2.2.19) refiere a vectores armónicos de la función de Hankel (Bessel de tercer orden) $h_n^{(1)}(\rho)$.

Aplicando condiciones de frontera desde una geometría esférica de radio a , entonces la frontera entre dicha esfera y el medio que la rodea impone la condición necesaria [2, 11]

$$(\mathbf{E}_{ent} + \mathbf{E}_s - \mathbf{E}_i) \times \hat{\mathbf{e}}_r = (\mathbf{H}_{ent} + \mathbf{H}_s - \mathbf{H}_i) \times \hat{\mathbf{e}}_r = 0, \quad (2.2.20)$$

en la región fuera de la esfera las funciones de Bessel j_n y y_n tienen un comportamiento estable por lo que representan correctamente la estructura de los campos electromagnéticos incidentes e incluso internos, sin embargo en campo lejano expandiéndose en esparcimiento es más conveniente hacer uso de las funciones de Hankel ya que manifiestan comportamientos asintóticos a grandes distancias. Entonces sustituyendo ecuaciones (2.2.9), (2.2.15) hasta (2.2.19) en ecuación (2.2.20). Se resuelven cuatro ecuaciones, evaluando la distancia en el radio de la esfera; es decir $r = a$,

$$\mathbf{E}_{ent(\theta)} + \mathbf{E}_{s(\theta)} = \mathbf{E}_{i(\theta)} \quad (2.2.21)$$

$$\mathbf{E}_{ent(\phi)} + \mathbf{E}_{s(\phi)} = \mathbf{E}_{i(\phi)} \quad (2.2.22)$$

$$\mathbf{H}_{ent(\theta)} + \mathbf{H}_{s(\theta)} = \mathbf{H}_{i(\theta)} \quad (2.2.23)$$

$$\mathbf{H}_{ent(\phi)} + \mathbf{H}_{s(\phi)} = \mathbf{H}_{i(\phi)} \quad (2.2.24)$$

las cuales son

$$(\mathbf{E}_{ent} + \mathbf{E}_s) \times \hat{\mathbf{e}}_r = \mathbf{E}_i \times \hat{\mathbf{e}}_r \rightarrow \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} E_n [(\mathbf{M}_{11n}^{(1)} - i\mathbf{N}_{P1n}^{(1)}) + (ia_n \mathbf{N}_{P1n}^{(3)} - b_n \mathbf{M}_{11n}^{(3)})] \right\} \times \hat{\mathbf{e}}_r = \sum_{n=1}^{\infty} E_n (c_n \mathbf{M}_{11n}^{(1)} - id_n \mathbf{N}_{P1n}^{(1)}) \times \hat{\mathbf{e}}_r \rightarrow$$

$$(\mathbf{M}_{11n}^{(1)} - i\mathbf{N}_{P1n}^{(1)}) \times \hat{\mathbf{e}}_r + (ia_n \mathbf{N}_{P1n}^{(3)} - b_n \mathbf{M}_{11n}^{(3)}) \times \hat{\mathbf{e}}_r = (c_n \mathbf{M}_{11n}^{(1)} - id_n \mathbf{N}_{P1n}^{(1)}) \times \hat{\mathbf{e}}_r$$

$$\mathbf{M}_{11n}^{(1)} \times \hat{\mathbf{e}}_r - i\mathbf{N}_{P1n}^{(1)} \times \hat{\mathbf{e}}_r + ia_n \mathbf{N}_{P1n}^{(3)} \times \hat{\mathbf{e}}_r - b_n \mathbf{M}_{11n}^{(3)} \times \hat{\mathbf{e}}_r = c_n \mathbf{M}_{11n}^{(1)} \times \hat{\mathbf{e}}_r - id_n \mathbf{N}_{P1n}^{(1)} \times \hat{\mathbf{e}}_r. \quad (2.2.25)$$

Analizando cada rotacional por separado en la ecuación (2.2.25) resulta

$$\mathbf{M}_{11n}^{(1)} \times \hat{\mathbf{e}}_r = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_r & \hat{\mathbf{e}}_\theta & \hat{\mathbf{e}}_\phi \\ 0 & \cos \phi \pi_n j_n(\rho) & -\sin \phi \pi_n j_n(\rho) \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\hat{\mathbf{e}}_\theta [-\sin \phi \pi_n j_n(\rho)] - \hat{\mathbf{e}}_\phi [\cos \phi \pi_n j_n(\rho)] =$$

$$\mathbf{M}_{11n}^{(1)} \times \hat{\mathbf{e}}_r = \sin \phi \pi_n j_n(\rho) \hat{\mathbf{e}}_\theta - \cos \phi \pi_n j_n(\rho) \hat{\mathbf{e}}_\phi \quad (2.2.26)$$

repetiendo un proceso similar para cada una de las componentes restantes, resulta

$$i\mathbf{N}_{P1n}^{(1)} \times \hat{\mathbf{e}}_r = i \sin \phi \pi_n \frac{[\rho j_n(\rho)]'}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\theta - i \cos \phi \pi_n \frac{[\rho j_n(\rho)]'}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\phi \quad (2.2.27)$$

$$ia_n \mathbf{N}_{P1n}^{(3)} \times \hat{\mathbf{e}}_r = ia_n \sin \phi \pi_n \frac{[\rho h_n^{(1)}(\rho)]'}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\theta - ia_n \cos \phi \pi_n \frac{[\rho h_n^{(1)}(\rho)]'}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\phi \quad (2.2.28)$$

$$b_n \mathbf{M}_{11n}^{(3)} \times \hat{\mathbf{e}}_r = b_n \text{sen } \phi \tau_n h_n^{(1)}(\rho) \hat{\mathbf{e}}_\theta - b_n \text{cos } \phi \pi_n h_n^{(1)}(\rho) \hat{\mathbf{e}}_\phi \quad (2.2.29)$$

$$c_n \mathbf{M}_{11n}^{(1)} \times \hat{\mathbf{e}}_r = c_n \text{sen } \phi \tau_n j_n(\rho) \hat{\mathbf{e}}_\theta - b_n \text{cos } \phi \pi_n j_n(\rho) \hat{\mathbf{e}}_\phi \quad (2.2.30)$$

$$id_n \mathbf{N}_{P1n}^{(1)} \times \hat{\mathbf{e}}_r = id_n \text{sen } \phi \pi_n \frac{[\rho j_n(\rho)]'}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\theta - id_n \text{cos } \phi \tau_n \frac{[\rho j_n(\rho)]'}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\phi \quad (2.2.31)$$

sustituyendo ecuaciones (2.2.26)-(2.2.31) en ecuación (2.2.25) y asociando componentes solo de la parte cenital; partiendo de la ecuación (2.2.21)

$$\mathbf{E}_{ent(\theta)} + \mathbf{E}_{s(\theta)} = \mathbf{E}_{i(\theta)}$$

$$\begin{aligned} \text{sen } \phi \tau_n j_n(\rho) \hat{\mathbf{e}}_\theta - i \text{sen } \phi \pi_n \frac{[\rho j_n(\rho)]'}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\theta + ia_n \text{sen } \phi \pi_n \frac{[\rho h_n^{(1)}(\rho)]'}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\theta - b_n \text{sen } \phi \tau_n h_n^{(1)}(\rho) \hat{\mathbf{e}}_\theta = \\ c_n \text{sen } \phi \tau_n j_n(\rho) \hat{\mathbf{e}}_\theta - id_n \text{sen } \phi \pi_n \frac{[\rho j_n(\rho)]'}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\theta. \end{aligned}$$

Asociando y factorizando términos reales e imaginarios

$$\begin{aligned} [\text{sen } \phi \tau_n (j_n(\rho) - b_n h_n^{(1)}(\rho)) - \text{sen } \phi i \pi_n \frac{1}{\rho} ([\rho j_n(\rho)]' - a_n [\rho h_n^{(1)}(\rho)]')] \hat{\mathbf{e}}_\theta = [\text{sen } \phi c_n \tau_n j_n(\rho) - \\ \text{sen } \phi id_n \pi_n \frac{[\rho j_n(\rho)]'}{\rho}] \hat{\mathbf{e}}_\theta. \end{aligned} \quad (2.2.32)$$

Sacando magnitudes e igualando partes real e imaginaria en ecuación (2.2.32)

$$\text{parte real:} \quad \text{sen } \phi \tau_n (j_n(\rho) - b_n h_n^{(1)}(\rho)) = c_n \text{sen } \phi \tau_n j_n(\rho)$$

eliminando términos semejantes

$$j_n(\rho) c_n + h_n^{(1)}(\rho) b_n = j_n(\rho) \quad (2.2.33)$$

$$\text{parte imaginaria:} \quad \text{sen } \phi \pi_n \frac{1}{\rho} ([\rho j_n(\rho)]' - a_n [\rho h_n^{(1)}(\rho)]') = \text{sen } \phi \pi_n d_n \frac{[\rho j_n(\rho)]'}{\rho}$$

eliminando términos semejantes

$$[\rho j_n(\rho)]' d_n + [\rho h_n^{(1)}(\rho)]' a_n = [\rho j_n(\rho)]' \quad (2.2.34)$$

para obtener las dos ecuaciones restantes, ahora se parte de la ecuación

$$(\mathbf{H}_{ent} + \mathbf{H}_s) \times \hat{\mathbf{e}}_r = \mathbf{H}_i \times \hat{\mathbf{e}}_r$$

$$\left\{ \frac{k}{\omega \mu} \sum_{n=1}^{\infty} -E_n [\mathbf{M}_{P1n}^{(1)} + i \mathbf{N}_{11n}^{(1)} + ib_n \mathbf{N}_{11n}^{(3)} + a_n \mathbf{M}_{P1n}^{(3)}] \right\} \times \hat{\mathbf{e}}_r = \frac{-k_1}{\omega \mu_1} \sum_{n=1}^{\infty} E_n (d_n \mathbf{M}_{P1n}^{(1)} + ic_n \mathbf{N}_{11n}^{(1)}) \times \hat{\mathbf{e}}_r$$

$$\begin{aligned}
\frac{k}{\mu} (\mathbf{M}_{P1n}^{(1)} + i\mathbf{N}_{I1n}^{(1)}) \times \hat{\mathbf{e}}_r - \frac{k}{\mu} (ib_n \mathbf{N}_{I1n}^{(3)} + a_n \mathbf{M}_{P1n}^{(3)}) \times \hat{\mathbf{e}}_r &= \frac{k_1}{\mu_1} (d_n \mathbf{M}_{P1n}^{(1)} + ic_n \mathbf{N}_{I1n}^{(1)}) \times \hat{\mathbf{e}}_r \\
\mu_1 \mathbf{M}_{P1n}^{(1)} \times \hat{\mathbf{e}}_r + \mu_1 i \mathbf{N}_{I1n}^{(1)} \times \hat{\mathbf{e}}_r - \mu_1 ib_n \mathbf{N}_{I1n}^{(3)} \times \hat{\mathbf{e}}_r - \mu_1 a_n \mathbf{M}_{P1n}^{(3)} \times \hat{\mathbf{e}}_r \\
&= \frac{\mu k_1}{k} d_n \mathbf{M}_{P1n}^{(1)} \times \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{\mu k_1}{k} ic_n \mathbf{N}_{I1n}^{(1)} \times \hat{\mathbf{e}}_r \\
\mu_1 \mathbf{M}_{P1n}^{(1)} \times \hat{\mathbf{e}}_r + \mu_1 i \mathbf{N}_{I1n}^{(1)} \times \hat{\mathbf{e}}_r - \mu_1 ib_n \mathbf{N}_{I1n}^{(3)} \times \hat{\mathbf{e}}_r - \mu_1 a_n \mathbf{M}_{P1n}^{(3)} \times \hat{\mathbf{e}}_r &= \\
\mu m d_n \mathbf{M}_{P1n}^{(1)} \times \hat{\mathbf{e}}_r + \mu m ic_n \mathbf{N}_{I1n}^{(1)} \times \hat{\mathbf{e}}_r & \quad (2.2.35)
\end{aligned}$$

donde $m = \frac{k_1}{k} = \frac{n_1}{n}$ y se denomina *índice de refracción relativo*. Analizando cada rotacional por separado en la ecuación (2.2.25) resulta un procedimiento similar al proceso del campo eléctrico, entonces

$$\mu_1 \mathbf{M}_{P1n}^{(1)} \times \hat{\mathbf{e}}_r = \mu_1 \cos \phi \tau_n j_n(\rho) \hat{\mathbf{e}}_\theta + \mu_1 \sin \phi \pi_n j_n(\rho) \hat{\mathbf{e}}_\phi \quad (2.2.36)$$

$$\mu_1 i \mathbf{N}_{I1n}^{(1)} \times \hat{\mathbf{e}}_r = -\mu_1 i \cos \phi \pi_n \frac{[\rho j_n(\rho)]'}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\theta - \mu_1 i \sin \phi \tau_n \frac{[\rho j_n(\rho)]'}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\phi \quad (2.2.37)$$

$$\mu_1 ib_n \mathbf{N}_{I1n}^{(3)} \times \hat{\mathbf{e}}_r = -\mu_1 ib_n \cos \phi \pi_n \frac{[\rho h_n^{(1)}(\rho)]'}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\theta - \mu_1 ib_n \sin \phi \tau_n \frac{[\rho h_n^{(1)}(\rho)]'}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\phi \quad (2.2.38)$$

$$\mu_1 a_n \mathbf{M}_{P1n}^{(3)} \times \hat{\mathbf{e}}_r = \mu_1 a_n \cos \phi \tau_n h_n^{(1)}(\rho) \hat{\mathbf{e}}_\theta + \mu_1 a_n \sin \phi \pi_n h_n^{(1)}(\rho) \hat{\mathbf{e}}_\phi \quad (2.2.39)$$

$$\mu m d_n \mathbf{M}_{P1n}^{(1)} \times \hat{\mathbf{e}}_r = \mu m d_n \cos \phi \tau_n j_n(\rho) \hat{\mathbf{e}}_\theta + \mu m d_n \sin \phi \pi_n j_n(\rho) \hat{\mathbf{e}}_\phi \quad (2.2.40)$$

$$\mu m ic_n \mathbf{N}_{I1n}^{(1)} \times \hat{\mathbf{e}}_r = \mu m ic_n \cos \phi \pi_n \frac{[\rho j_n(\rho)]'}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\theta + \mu m ic_n \sin \phi \tau_n \frac{[\rho j_n(\rho)]'}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\phi \quad (2.2.41)$$

sustituyendo ecuaciones (2.2.236)-(2.2.41) en ecuación (2.2.35) y asociando componentes solo de la parte cenital; partiendo de la ecuación (2.2.23)

$$\mathbf{H}_{ent(\theta)} + \mathbf{H}_{s(\theta)} = \mathbf{H}_{i(\theta)}$$

$$\begin{aligned}
\mu_1 \cos \phi \tau_n j_n(\rho) \hat{\mathbf{e}}_\theta - \mu_1 i \cos \phi \pi_n \frac{[\rho j_n(\rho)]'}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\theta + \mu_1 ib_n \cos \phi \pi_n \frac{[\rho h_n^{(1)}(\rho)]'}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\theta - \mu_1 a_n \cos \phi \tau_n h_n^{(1)}(\rho) \hat{\mathbf{e}}_\theta &= \\
\mu m d_n \cos \phi \tau_n j_n(\rho) \hat{\mathbf{e}}_\theta + \mu m ic_n \cos \phi \pi_n \frac{[\rho j_n(\rho)]'}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\theta & .
\end{aligned}$$

Asociando , factorizando términos reales e imaginarios y eliminando términos semejantes

$$\left\{ \mu_1 \tau_n \left[j_n(\rho) - a_n h_n^{(1)}(\rho) \right] - \mu_1 i \pi_n \left[\frac{[\rho j_n(\rho)]'}{\rho} - b_n \frac{[\rho h_n^{(1)}(\rho)]'}{\rho} \right] \right\} \hat{\mathbf{e}}_\theta = \left\{ [\mu m d_n \tau_n j_n(\rho)] + i \left[\mu m c_n \pi_n \frac{[\rho j_n(\rho)]'}{\rho} \right] \right\} \hat{\mathbf{e}}_\theta \quad (2.2.42)$$

sacando magnitudes e igualando partes real e imaginaria en ecuación (2.2.42)

parte real:

$$\begin{aligned} \mu_1 \tau_n \left[j_n(\rho) - a_n h_n^{(1)}(\rho) \right] &= [\mu m d_n \tau_n j_n(\rho)] \\ \mu_1 j_n(\rho) - a_n \mu_1 h_n^{(1)}(\rho) &= \mu m d_n j_n(\rho) \\ \mu m j_n(\rho) d_n + \mu_1 h_n^{(1)}(\rho) a_n &= \mu_1 j_n(\rho) \end{aligned} \quad (2.2.43)$$

parte imaginaria:

$$\begin{aligned} \mu_1 \pi_n \left[\frac{[\rho j_n(\rho)]'}{\rho} - b_n \frac{[\rho h_n^{(1)}(\rho)]'}{\rho} \right] &= \left[\mu m c_n \pi_n \frac{[\rho j_n(\rho)]'}{\rho} \right] \\ \mu_1 [\rho j_n(\rho)]' - b_n \mu_1 [\rho h_n^{(1)}(\rho)]' &= \mu m c_n [\rho j_n(\rho)]' \\ \mu m [\rho j_n(\rho)]' c_n + \mu_1 [\rho h_n^{(1)}(\rho)]' b_n &= \mu_1 [\rho j_n(\rho)]' \end{aligned} \quad (2.2.44)$$

evaluando ecuaciones (2.2.33), (2.2.34), (2.2.43) y (2.2.44) en $r = a$ y realizando el siguiente cambio de variable para introducir un parámetro de tamaño x e índice de refracción relativo m_x entonces [11]

$$x = ka = \frac{2\pi na}{\lambda} ; m_x = \left[\frac{k_1}{k} \right] ka = k_1 a$$

entonces

$$j_n(mx) c_n + h_n^{(1)}(x) b_n = j_n(x) \quad (2.2.45)$$

$$[mx j_n(mx)]' d_n + m [x h_n^{(1)}(x)]' a_n = m [x j_n(x)]' \quad (2.2.46)$$

$$\mu m j_n(mx) d_n + \mu_1 h_n^{(1)}(x) a_n = \mu_1 j_n(x) \quad (2.2.47)$$

$$\mu [mx j_n(mx)]' c_n + \mu_1 [x h_n^{(1)}(x)]' b_n = \mu_1 [x j_n(x)]' \quad (2.2.48)$$

Se resuelven simultáneamente dichas ecuaciones solo para los coeficientes de interés que son los de esparcimiento de la onda, obteniéndose [11 - 12]

$$a_n = \frac{\mu m^2 j_n(mx) [x j_n(x)]' - \mu_1 j_n(x) [mx j_n(mx)]'}{\mu m^2 j_n(mx) [x h_n^{(1)}(x)]' - \mu_1 h_n^{(1)}(x) [mx j_n(mx)]'} \quad (2.2.49)$$

$$b_n = \frac{\mu_1 j_n(mx) [x j_n(x)]' - \mu j_n(x) [mx j_n(mx)]'}{\mu_1 j_n(mx) [x h_n^{(1)}(x)]' - \mu h_n^{(1)}(x) [mx j_n(mx)]'} \quad (2.2.50)$$

aplicando cambio de variable en término de funciones Ricatti-Bessel, suponiendo que la permeabilidad de la partícula es similar a la del medio [11 - 12]

$$a_n = \left[\frac{m j_n(mx) [x j_n(x)]' - j_n(x) [mx j_n(mx)]'}{m j_n(mx) [x h_n^{(1)}(x)]' - h_n^{(1)}(x) [mx j_n(mx)]'} \right] \frac{x}{x} = \frac{m (m x j_n(mx)) [x j_n(x)]' - (x j_n(x)) [mx j_n(mx)]'}{m (m x j_n(mx)) [x h_n^{(1)}(x)]' - (x h_n^{(1)}(x)) [mx j_n(mx)]'}$$

$$a_n = \frac{m \psi_n(mx) \psi_n'(x) - \psi_n(x) \psi_n'(mx)}{m \psi_n(mx) \xi_n'(x) - \xi_n(x) \psi_n'(mx)} \quad (2.2.51)$$

$$b_n = \left[\frac{j_n(mx) [x j_n(x)]' - j_n(x) [mx j_n(mx)]'}{j_n(mx) [x h_n^{(1)}(x)]' - h_n^{(1)}(x) [mx j_n(mx)]'} \right] \frac{mx}{mx} = \frac{(m x j_n(mx)) [x j_n(x)]' - m (x j_n(x)) [mx j_n(mx)]'}{(m x j_n(mx)) [x h_n^{(1)}(x)]' - m (x h_n^{(1)}(x)) [mx j_n(mx)]'}$$

$$b_n = \frac{\psi_n(mx) \psi_n'(x) - m \psi_n(x) \psi_n'(mx)}{\psi_n(mx) \xi_n'(x) - m \xi_n(x) \psi_n'(mx)} \quad (2.2.52)$$

Donde $\psi_n(x) = x j_n(x)$, $\psi_n(mx) = mx j_n(mx)$, $\psi_n'(x) = [x j_n(x)]'$, $\psi_n'(mx) = [mx j_n(mx)]'$
y $\xi_n(x) = x h_n^{(1)}(x)$, $\xi_n'(x) = [x h_n^{(1)}(x)]'$

note que los coeficientes de esparcimiento a_n y b_n , dados por las ecuaciones (2.2.51) y (2.2.52), tienden a desaparecer conforme $m \rightarrow 1$ y la física indica que el esparcimiento se desvanece conforme la partícula tiende a desvanecerse.

Una vez definidos los coeficientes de los campos electromagnéticos en esparcimiento se está en la posibilidad de definir las secciones transversales de área, tanto de extinción, esparcimiento y absorción.

2.3 Matriz de esparcimiento.

Tomando la luz incidente polarizada en el eje x y la luz de esparcimiento, en un mismo origen de referencia, se observa la proyección de componentes de la luz incidente respecto la luz esparcida. Como se ve en la Figura 2.3.1 [11]

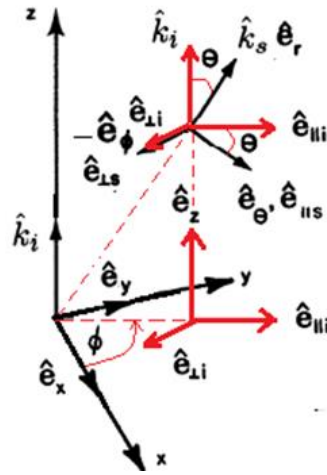


Figura 2.3.1

Proyección de componentes entre la luz incidente y la luz en esparcimiento.

Definiendo la ecuación de la onda incidente como [11]

$$\mathbf{E}_{ent} = (E_{O\parallel}\hat{e}_{\parallel i} + E_{O\perp}\hat{e}_{\perp i})e^{i(kz-\omega t)}, \quad (2.3.1)$$

donde los vectores ortonormales, realizando la proyección de $\hat{e}_{\parallel i}$ y $\hat{e}_{\perp i}$ sobre los versores \hat{e}_x, \hat{e}_y

$$\hat{e}_{\parallel i} = \cos \phi \hat{e}_x + \sin \phi \hat{e}_y \quad (2.3.2)$$

$$\hat{e}_{\perp i} = \cos \left(\frac{3}{4}\pi + \phi\right)\hat{e}_x + \sin \left(\frac{3}{4}\pi + \phi\right)\hat{e}_y = \sin \phi \hat{e}_x - \cos \phi \hat{e}_y \quad (2.3.3)$$

De la regla de la mano derecha se tiene que

$$\hat{e}_{\perp i} \times \hat{e}_{\parallel i} = \hat{e}_z \quad (2.3.4)$$

Realizando la proyección de $\hat{e}_{\parallel i}$ y $\hat{e}_{\perp i}$ sobre los versores $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi$

$$\hat{e}_{\parallel i} = \sin \theta \hat{e}_r + \cos \theta \hat{e}_\theta \quad (2.3.5)$$

$$\hat{e}_{\perp i} = -\hat{e}_\phi \quad (2.3.6)$$

Sea x y y las componentes del campo incidente, denotadas como E_{x_i} y E_{y_i} , respectivamente. Entonces las componentes paralela y perpendicular del campo incidente son definidas como

$$E_{\parallel i} = \cos \phi E_{x_i} + \sin \phi E_{y_i} \quad (2.3.7)$$

$$E_{\perp i} = \sin \phi E_{x_i} - \cos \phi E_{y_i}, \quad (2.3.8)$$

a distancias muy lejanas respecto del origen, $kr \gg 1$ el campo en esparcimiento es aproximadamente transverso, es decir $\hat{e}_r \cdot \mathbf{E}_{esp} \approx 0$ [11] Por lo tanto en la región lejana dicho campo puede ser escrito como

$$\mathbf{E}_{esp} = E_{\parallel s} \hat{e}_{\parallel s} + E_{\perp s} \hat{e}_{\perp s} = E_{\parallel s} \hat{e}_\theta - E_{\perp s} \hat{e}_\phi \quad (2.3.9)$$

Donde $\hat{e}_{\parallel s} = \hat{e}_\theta$, $\hat{e}_{\perp s} = -\hat{e}_\phi$, $\hat{e}_{\perp s} \times \hat{e}_{\parallel s} = \hat{e}_r$

Notar además que $\hat{e}_{\parallel s}, \hat{e}_{\perp s}$ son los versores paralelo y perpendicular al plano de esparcimiento. Debido a las condiciones de frontera, ecuación (2.2.20), la amplitud del campo en esparcimiento es función lineal de la amplitud del campo incidente, la relación de amplitudes incidente y de esparcimiento se puede representar en forma matricial, esta matriz se le conoce como *Matriz de esparcimiento* y está definida como [11]

$$\begin{pmatrix} E_{\parallel esp} \\ E_{\perp esp} \end{pmatrix} = \frac{e^{i\rho}}{-i\rho} \begin{pmatrix} S_2 & S_3 \\ S_4 & S_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\parallel ent} \\ E_{\perp ent} \end{pmatrix} \quad (2.3.10)$$

Donde los elementos S_j ($j = 1,2,3,4$) son las amplitudes de la matriz de esparcimiento y estarán en función del ángulo de esparcimiento θ como del ángulo acimutal ϕ .

Partiendo de la representación en campo lejano, ecuación (2.2.18)

$$\mathbf{E}_{esp} = \sum_{n=1}^{\infty} E_n (ia_n \mathbf{N}_{p1n}^{(3)} - b_n \mathbf{M}_{11n}^{(3)}) \quad (2.3.11)$$

Sustituyendo las bases vectoriales en funciones de Hankel se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{esp} &= \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left\{ ia_n \left[\cos \phi \tau_n \frac{[\rho h_n^{(1)}(\rho)]'}{\rho} \hat{e}_\theta - \sin \phi \pi_n \frac{[\rho h_n^{(1)}(\rho)]'}{\rho} \hat{e}_\phi \right] - b_n \left[\cos \phi \pi_n h_n^{(1)}(\rho) \hat{e}_\theta - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \sin \phi \tau_n h_n^{(1)}(\rho) \hat{e}_\phi \right] \right\} \\ \mathbf{E}_{esp} &= \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left\{ [ia_n \cos \phi \tau_n \frac{[\rho h_n^{(1)}(\rho)]'}{\rho} - b_n \cos \phi \pi_n h_n^{(1)}(\rho)] \hat{e}_\theta - [ia_n \sin \phi \pi_n \frac{[\rho h_n^{(1)}(\rho)]'}{\rho} - \right. \\ &\quad \left. \sin \phi \tau_n h_n^{(1)}(\rho)] \hat{e}_\phi \right\} \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

Asumiendo que los campos en esparcimiento son uniformemente convergentes y además convergen rápidamente después de n_c términos, donde se satisface $\rho = kr \gg n_c$

Desarrollando las derivadas dentro de la sumatoria de la ecuación (2.3.12) se observa lo siguiente

$$[\rho h_n^{(1)}(\rho)]' = h_n^{(1)}(\rho) + \rho [h_n^{(1)}(\rho)]' \quad (2.3.13)$$

Sustituyendo ecuación (2.3.13) en ecuación (2.3.12) y tomando las componentes polar y acimutal:

$$\left\{ ia_n \cos \phi \tau_n \left[\frac{h_n^{(1)}(\rho)}{\rho} + \frac{\rho [h_n^{(1)}(\rho)]'}{\rho} \right] - b_n \cos \phi \pi_n h_n^{(1)}(\rho) \right\} \hat{e}_\theta \quad (2.3.14)$$

$$\{ia_n \text{sen } \phi \pi_n \left[\frac{h_n^{(1)}(\rho)}{\rho} + \frac{\rho [h_n^{(1)}(\rho)]'}{\rho} \right] - b_n \text{sen } \phi \tau_n h_n^{(1)}(\rho)\} \widehat{\mathbf{e}}_\phi \quad (2.3.15)$$

Sustituyendo las aproximaciones de las funciones de Hankel de tercer orden definidas a continuación [11],

$$h_n^{(1)}(\rho) \approx \frac{(-i)^n e^{i\rho}}{i\rho}, \rho \gg n_c^2,$$

$$[h_n^{(1)}(\rho)]' \approx \frac{(-i)^n e^{i\rho}}{\rho}, \rho \gg n_c^2,$$

en ecuaciones (2.3.14) y (2.3.15), resulta

$$\{ia_n \cos \phi \tau_n \left[\frac{(-i)^n e^{i\rho}}{i\rho^2} + \frac{(-i)^n e^{i\rho}}{\rho} \right] - b_n \cos \phi \pi_n \frac{(-i)^n e^{i\rho}}{i\rho}\} \widehat{\mathbf{e}}_\theta \approx \{ia_n \cos \phi \tau_n \left[\frac{(-i)^n e^{i\rho}}{\rho} \right] - b_n \cos \phi \pi_n \frac{(-i)^n e^{i\rho}}{i\rho}\} \widehat{\mathbf{e}}_\theta \quad (2.3.16)$$

$$\{ia_n \text{sen } \phi \pi_n \left[\frac{(-i)^n e^{i\rho}}{i\rho^2} + \frac{(-i)^n e^{i\rho}}{\rho} \right] - b_n \text{sen } \phi \tau_n \frac{(-i)^n e^{i\rho}}{i\rho}\} \widehat{\mathbf{e}}_\phi \approx \{ia_n \text{sen } \phi \pi_n \left[\frac{(-i)^n e^{i\rho}}{i\rho} \right] - b_n \text{sen } \phi \tau_n \frac{(-i)^n e^{i\rho}}{i\rho}\} \widehat{\mathbf{e}}_\phi \quad (2.3.17)$$

Las ecuaciones (2.3.16) y (2.3.17) se justifican en su aproximación ya que se considera $\rho \gg n_c^2$; ahora el campo eléctrico en esparcimiento (ec. (2.3.12)) se puede expresar en términos de estas aproximaciones; manipulando algebraicamente los términos imaginarios, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{esp} &\sim \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left[\{ia_n \cos \phi \tau_n \frac{(-i)^n e^{i\rho}}{\rho} - b_n \cos \phi \pi_n \frac{(-i)^n e^{i\rho}}{i\rho}\} \widehat{\mathbf{e}}_\theta - \{ia_n \text{sen } \phi \pi_n \frac{(-i)^n e^{i\rho}}{i\rho} - b_n \text{sen } \phi \tau_n \frac{(-i)^n e^{i\rho}}{i\rho}\} \widehat{\mathbf{e}}_\phi \right] \\ &\sim \sum_{n=1}^{\infty} [E_n \left\{ \frac{(-i)^n e^{i\rho}}{\rho} \cos \phi ia_n \tau_n + \frac{(-i)^n e^{i\rho}}{\rho} \cos \phi ib_n \pi_n \right\} \widehat{\mathbf{e}}_\theta - E_n \left\{ \frac{(-i)^n e^{i\rho}}{\rho} \text{sen } \phi ia_n \pi_n + \frac{(-i)^n e^{i\rho}}{\rho} \text{sen } \phi ib_n \tau_n \right\} \widehat{\mathbf{e}}_\phi] \\ &\sim \sum_{n=1}^{\infty} [E_0 \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{i^n (-i)^n e^{i\rho}}{\rho} \cos \phi \{ia_n \tau_n + ib_n \pi_n\} \widehat{\mathbf{e}}_\theta - E_0 \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{i^n (-i)^n e^{i\rho}}{\rho} \text{sen } \phi \{ia_n \pi_n + ib_n \tau_n\} \widehat{\mathbf{e}}_\phi] \end{aligned}$$

$$\text{Ya que } E_n = E_0 \frac{2n+1}{n(n+1)} i^n,$$

$$\mathbf{E}_{esp} \sim E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{ie^{i\rho}}{\rho} \cos \phi \{a_n \tau_n + b_n \pi_n\} \widehat{\mathbf{e}}_\theta - \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{ie^{i\rho}}{\rho} \text{sen } \phi \{a_n \pi_n + b_n \tau_n\} \widehat{\mathbf{e}}_\phi \right]$$

$$\mathbf{E}_{esp} \sim E_0 \frac{ie^{i\rho}}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2n+1}{n(n+1)} \cos\phi \{a_n \tau_n + b_n \pi_n\} \widehat{\mathbf{e}}_{\parallel} + \frac{2n+1}{n(n+1)} \text{sen } \phi \{a_n \pi_n + b_n \tau_n\} \widehat{\mathbf{e}}_{\perp} \right] \quad (2.3.18)$$

La ecuación (2.3.18) se obtuvo considerando que: $i^n(-i^n) = -i^{2n} = -(-1)^n = 1$, además de factorizar el término imaginario que aparece multiplicando a los coeficientes de esparcimiento Mie de ambas componentes.

El campo eléctrico representado en términos de sus componentes polar y acimutal se observa a continuación:

$$\mathbf{E}_{esp\theta} \sim E_0 \left[\frac{e^{i\rho}}{-i\rho} \right] \cos\phi \sum_n \left[\frac{2n+1}{n(n+1)} \{a_n \tau_n + b_n \pi_n\} \widehat{\mathbf{e}}_{\theta} \right] \quad (2.3.19)$$

$$\mathbf{E}_{esp\phi} \sim -E_0 \left[\frac{e^{i\rho}}{-i\rho} \right] \text{sen}\phi \sum_n \left[\frac{2n+1}{n(n+1)} \{a_n \pi_n + b_n \tau_n\} \widehat{\mathbf{e}}_{\phi} \right] \quad (2.3.20)$$

o bien [11]

$$\mathbf{E}_{esp\theta} \sim E_0 \frac{e^{i\rho}}{-i\rho} \cos\phi S_2(\cos\theta)$$

$$\mathbf{E}_{esp\phi} \sim -E_0 \frac{e^{i\rho}}{-i\rho} \text{sen}\phi S_1(\cos\theta)$$

donde

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} (a_n \pi_n + b_n \tau_n) \widehat{\mathbf{e}}_{\theta} \quad (2.3.21)$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} (a_n \tau_n + b_n \pi_n) \widehat{\mathbf{e}}_{\phi} \quad (2.3.22)$$

La relación entre amplitudes entre los campos eléctricos incidente y esparcido será a través de la ecuación (2.3.10)

$$\begin{pmatrix} E_{\parallel esp} \\ E_{\perp esp} \end{pmatrix} = \frac{e^{i\rho}}{-i\rho} \begin{pmatrix} S_2 & 0 \\ 0 & S_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\parallel ent} \\ E_{\perp ent} \end{pmatrix} \quad (2.3.23)$$

de la función generatriz para $m = 1$, se obtiene [11]

$$\pi_n(1) = \tau_n(1) = \left. \frac{dP_n}{d\mu} \right|_{\mu=1} \quad (2.3.24)$$

y como los polinomios de Legendre P_n tienen la propiedad convergente en $\cos\theta = 1$,

$$\pi_n(1) = \tau_n(1) = \frac{n(n+1)}{2}, \quad (2.3.25)$$

evaluando ecuaciones (2.3.21) y (2.3.22) en $\theta = 0$ y considerando la ecuación (2.3.25):

$$S_2(0^\circ) = S_1(0^\circ) = S(0^\circ) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} n(n+1)(a_n + b_n) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(a_n + b_n). \quad (2.3.26)$$

De la ecuación (2.3.26) se deduce que ambas componentes, tanto la polar como acimutal, toman el mismo valor si son evaluadas en un ángulo polar $\theta = 0$ o si el $\cos \theta = 1$.

2.4 Secciones de área transversal de extinción, esparcimiento y absorción.

Usando el Teorema óptico que define la sección transversal de extinción como la razón entre la energía total W_{total} (suma de las energías de absorción y esparcimiento) y la irradiancia incidente [11], y al mismo tiempo definiendo en la dirección del eje x , un vector de amplitud en esparcimiento genérico \mathbf{X} , se obtiene la sección transversal de extinción, en la dirección $\theta = 0$, como:

$$\sigma_{ext} = \frac{W_{total}}{I_{inc}} = \frac{4\pi}{k^2} \mathbf{Re}\{(\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x)_{\theta=0}\}$$

Entonces, de la ecuación (2.3.26) se obtiene:

$$\sigma_{ext} = \frac{4\pi}{k^2} \mathbf{Re}\{S(0^\circ)\} = \frac{2\pi}{k^2} \{\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \mathbf{Re}(a_n + b_n)\} \quad (2.4.1)$$

La sección transversal de esparcimiento σ_{esp} se obtiene integrando la potencia total esparcida sobre el ángulo sólido 4π , entonces [2]

$$\sigma_{esp} = \frac{2\pi}{k^2} \int_0^\pi \sin \theta d\theta [|S_1(\theta)|^2 + |S_2(\theta)|^2] \quad (2.4.2)$$

Sustituyendo ecuación (2.3.21) y (2.3.22) en ecuación (2.4.2), resulta

$$\begin{aligned} \sigma_{esp} &= \frac{\pi}{k^2} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \sum_n \left[\frac{2n+1}{n(n+1)} \right]^2 [|a_n \pi_n + b_n \tau_n|^2 + |a_n \tau_n + b_n \pi_n|^2] \\ &= \frac{\pi}{k^2} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \sum_n \left[\frac{2n+1}{n(n+1)} \right]^2 [|a_n|^2 |\pi_n|^2 + |b_n|^2 |\tau_n|^2 + |a_n|^2 |\tau_n|^2 + |b_n|^2 |\pi_n|^2] \\ &= \frac{\pi}{k^2} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \sum_n \left[\frac{2n+1}{n(n+1)} \right]^2 [|a_n|^2 |\tau_n|^2 + |b_n|^2 |\tau_n|^2 + |a_n|^2 |\pi_n|^2 + |b_n|^2 |\pi_n|^2] \\ &= \frac{\pi}{k^2} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \sum_n \left[\frac{2n+1}{n(n+1)} \right]^2 [(|a_n|^2 + |b_n|^2) |\tau_n|^2 + (|a_n|^2 + |b_n|^2) |\pi_n|^2] \\ &= \frac{\pi}{k^2} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \sum_n \left[\frac{2n+1}{n(n+1)} \right]^2 [(|a_n|^2 + |b_n|^2) (|\tau_n|^2 + |\pi_n|^2)] \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Reordenando términos en la ecuación (2.4.3)

$$\sigma_{esp} = \frac{\pi}{k^2} \sum_n \left[\frac{2n+1}{n(n+1)} \right]^2 [(|a_n|^2 + |b_n|^2)] \int_0^\pi (|\tau_n|^2 + |\pi_n|^2) \text{sen } \theta d\theta$$

$$\sigma_{esp} = \frac{\pi}{k^2} \sum_n \left[\frac{2n+1}{n(n+1)} \right]^2 [(|a_n|^2 + |b_n|^2)] \frac{2[n(n+1)]^2}{2n+1} \quad (2.4.4)$$

La ecuación (2.4.4) se justifica por el conjunto ortogonal de funciones [2][11]

$$\int_0^\pi \text{sen } \theta d\theta [\pi_n \pi_{n'} + \tau_n \tau_{n'}] = \frac{2[n(n+1)]^2}{2n+1} \Big|_{n=n'}$$

$$\int_0^\pi \text{sen } \theta d\theta [\pi_n \tau_{n'} + \tau_n \pi_{n'}] = 0 |_{n \neq n'}$$

Eliminando términos semejantes en la ecuación (2.4.4) se obtiene:

$$\sigma_{esp} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (|a_n|^2 + |b_n|^2) \quad (2.4.5)$$

De las ecuaciones (2.4.1) y (2.4.5) se pueden obtener los parámetros de eficiencia de extinción y esparcimiento, con solo dividir estas ecuaciones entre una sección transversal total geométrica definida como $\sigma_{geom} = \pi a^2$, (donde a = radio de la partícula), resultando [2, 10, 12 – 14, 46 - 48]

$$Q_s = \frac{\sigma_s}{\sigma_{geom}} = \frac{2}{(ka)^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (|a_n|^2 + |b_n|^2), \quad (2.4.6)$$

$$Q_{ext} = \frac{\sigma_{ext}}{\sigma_{geom}} = \frac{2}{(ka)^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \mathbf{Re}(a_n + b_n). \quad (2.4.7)$$

En el caso de que la partícula pueda absorber energía de la onda incidente, se puede obtener la eficiencia de absorción a través de la relación

$$Q_{abs} = \frac{\sigma_{abs}}{\sigma_{geom}} = Q_{ext} - Q_{esp}. \quad (2.4.8)$$

Las ecuaciones (2.4.6) a la (2.4.8) formaran parte de los coeficientes de extinción, esparcimiento y absorción dentro del algoritmo de simulación Monte Carlo-Mie descrito en el capítulo 4.

Capítulo 3

MÉTODO ESTADÍSTICO MONTE CARLO

El método Monte Carlo, actualmente es considerado una herramienta estadística en el área de la investigación y sus inicios fueron dentro del área de la física. Posteriormente se aplicó en diferentes campos tales como: química, biología, bioinformática, por citar algunos. Debido a su base estadística lo hace un método muy flexible [15]. En la sección 3.1 se aborda una descripción cualitativa de los métodos Monte Carlo y cuasi Monte Carlo, en la 3.2 la simulación de variables aleatorias, en la 3.3 el sorteo de una variable continua y en la 3.4 un análisis del paso de fotones a través de un medio turbio.

3.1 Método Monte Carlo y cuasi Monte Carlo.

La esencia del método Monte Carlo es la experimentación con números aleatorios. El procedimiento usado consiste en diseñar juegos de azar con estos números, esperando obtener de su observación conclusiones útiles para la resolución del problema que se esté estudiando. Aunque se han publicado algunos trabajos relacionados con el método Monte Carlo que no han requerido el uso de computadoras, lo cierto es que la utilidad de este método se ha visto enormemente incrementada con el uso de las computadoras.

Los métodos Monte Carlo suelen clasificarse en dos tipos: Probabilistas y Deterministas, en el primer caso se simulan números aleatorios, fenómenos que son aleatorios en su entorno natural. En este método no determinista se eligen números de tal forma que reproduzcan la distribución de probabilidad de la población estudiada y de su observación para obtener una característica de la misma. Por ejemplo la óptica, que es una rama de la física, suministra las funciones que rigen el esparcimiento de la luz como leyes. Si se reproducen estas leyes en funciones con números aleatorios se puede simular los procesos de esparcimiento de la luz en su entorno natural y poder obtener propiedades del mismo a través de un modelo teórico. En el método de Monte Carlo determinista se resuelven problemas que no son aleatorios a través de un modelo aleatorio preciso en cada caso. El método cuasi Monte Carlo es similar a su precedente con la excepción al momento de generar los números asociados a la función probabilística de avance y dirección, dicha generación no es en base a distribuciones aleatorias, en vez de esto se usan números deterministas diseñados especialmente para que estén bien distribuidos. El método Monte Carlo se ha usado en un gran número de investigaciones referentes al cambio climático, esto por su gran potencial para describir fenómenos probabilísticos [15-32].

3.2 Simulación de variables aleatorias.

El término simulación se entiende como la experimentación sobre un modelo de cierto sistema, de cara a predecir el comportamiento del mismo. Si el proceso de simulación conlleva la generación de números aleatorios se suele llamar simulación por Monte Carlo. Se debe tener presente que el objetivo de la simulación es extraer conclusiones sobre cierto sistema real sin necesidad de experimentar directamente sobre el sistema en cuestión [15, 33-34].

3.2.1 Simulación de variables continuas.

Se dice que una variable aleatoria ξ es *continua* si se puede tomar cualquier valor comprendido en un intervalo (a, b) . Toda variable continua ξ queda definida si se da el intervalo (a, b) que contiene los valores posibles de esta variable y se asigna la función $p(x)$ que lleva el nombre de *densidad de probabilidad* de la variable aleatoria ξ (o *densidad de distribución* de ξ). El significado real de la función $p(x)$ es el siguiente: sea (a', b') un intervalo cualquiera contenido en (a, b) (es decir $a \leq a'$ y $b' \leq b$); entonces la probabilidad de que ξ tome un valor perteneciente al intervalo (a', b') es igual a la integral [33]

$$\mathbf{P}\{a' < \xi < b'\} = \int_{a'}^{b'} p(x) dx, \quad (3.2.1)$$

El conjunto de valores de ξ puede tomar un intervalo cualquiera. Puede darse incluso el caso de que $a = \infty$ y también de que $b = -\infty$. En cambio, la densidad $p(x)$ debe de cumplir dos condiciones:

1. La densidad $p(x)$ deberá ser positiva:

$$p(x) > 0. \quad (3.2.2)$$

2. La integral de la densidad $p(x)$ correspondiente a todo el intervalo (a, b) deberá ser igual a

$$\int_a^b p(x) dx = 1. \quad (3.2.3)$$

Otra ecuación estadística asociada a este método se denomina *esperanza matemática* de la variable aleatoria continua al número, y se describe como:

$$\mathbf{M}\xi = \int_a^b xp(x) dx \quad (3.2.4)$$

3.3 Sorteo de una variable continua.

Supóngase que ahora se debe obtener valores de una variable aleatoria ξ distribuida con la densidad de probabilidad $p(x)$ en el intervalo (a, b) .

Se demostrará que los valores de ξ se pueden determinar de la ecuación [33]

$$\int_a^{\xi} p(x) dx = \gamma, \quad (3.3.1)$$

Es decir: que escogido el valor de γ es preciso resolver la integral (3.3.1) para hallar el valor de ξ . Para demostrar esta afirmación considérese la función

$$y = \int_a^x p(x) dx.$$

De las propiedades generales de la densidad (3.2.1) y (3.2.2), resulta que

$$y(a) = 0, \text{ y } y(b) = 1$$

y que la derivada $y'(x) = p(x) > 0$.

Por lo tanto, la función $y(x)$ crece monótonamente de 0 a 1, como se observa en la Figura 3.3.1 [16].

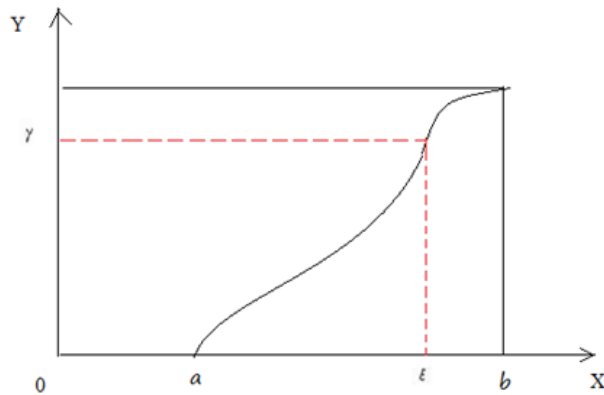


Figura 3.3.1

Función $y(x)$ creciente monótonamente de 0 a 1.

Debido a esto toda recta $y = \gamma$, donde $0 < \gamma < 1$, corta el gráfico en $y = y(x)$ en un punto único cuya abscisa se toma precisamente igual a ξ . Es decir, la ecuación (3.3.1) tiene siempre solución y esta solución es única. Tomando ahora un intervalo (a', b') contenido en (a, b) . A los puntos

$$a' < x < b',$$

de este intervalo corresponden las coordenadas de la curva $y = y(x)$ que satisfacen la desigualdad

$$y(a') < y < y(b').$$

Por eso si ξ pertenece al intervalo $a' < x < b'$, resulta que γ pertenece al intervalo $y(a') < y < y(b')$, y viceversa. Tal y como se observa en la Figura 3.3.2 [33],

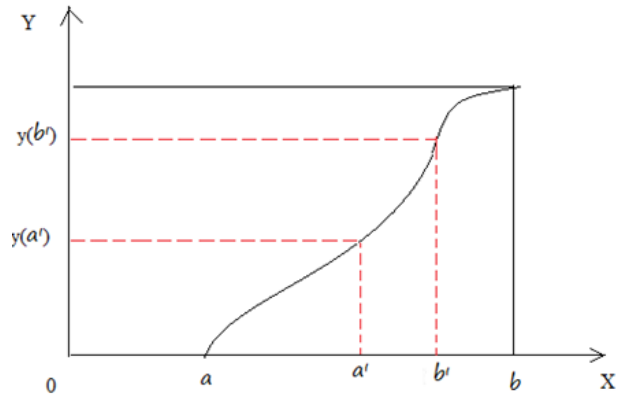


Figura 3.3.2

Correlación de intervalos que relacionan valores de γ y ξ .

luego

$$\mathbf{p}\{a' < \xi < b'\} = \mathbf{p}\{y(a') < \gamma < y(b')\}.$$

Puesto que γ esta distribuida uniformemente en $(0, 1)$, tenemos

$$\mathbf{p}\{y(a') < \gamma < y(b')\} = y(b') - y(a') = \int_{a'}^{b'} \mathbf{p}(x) dx,$$

y esto significa precisamente que la variable aleatoria ξ , raíz de la ecuación (3.3.1), tiene densidad de probabilidad $\mathbf{p}(x)$. Definiendo una variable aleatoria distribuida en el intervalo $(0, \infty)$ con una densidad de distribución definida como [19][33]

$$\mathbf{p}(x) = \sigma k e^{-\sigma k x}, \quad (3.3.2)$$

la ecuación (3.3.2) se le conoce como *densidad de distribución exponencial*, el perfil del comportamiento gráfico se muestra en la siguiente Figura 3.3.3 [33], (donde se representan densidades para $\sigma k = 1$ y $\sigma k = 2$).

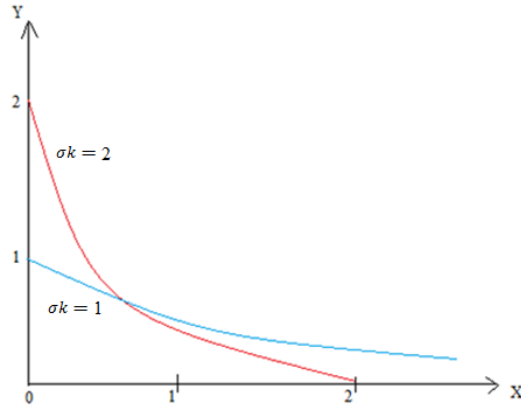


Figura 3.3.3

Perfil de la función de distribución exponencial $p(x)$.

La esperanza matemática, o estimador, en un intervalo de avance $\xi = \lambda$, para este caso se define como:

$$\mathbf{M}\lambda = \int_0^{\infty} xp(x)dx = \int_0^{\infty} x\sigma k e^{-\sigma kx} dx.$$

Integrando por partes ($u = x$, $dv = \sigma e^{-\sigma x} dx$), obtenemos,

$$\mathbf{M}\lambda = [-xe^{-\sigma kx}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\sigma kx} dx = [-\frac{e^{-\sigma kx}}{\sigma k}]_0^{\infty} = \frac{1}{\sigma k}. \quad (3.3.3)$$

Al parámetro σk se le denomina *flujo promedio de recorrido libre*. La fórmula para el sorteo de λ se obtiene de la ecuación (3.3.1), si calculamos la integral del primer miembro de la ecuación citada resulta en,

$$1 - e^{-\sigma k\lambda} = \gamma,$$

de donde resulta que,

$$\lambda = -\frac{1}{\sigma k} \ln(1 - \gamma),$$

Como no hay cambio de distribución de la variable en los casos γ y $1 - \gamma$ entonces podemos simplificar la expresión anterior como,

$$\lambda = -\frac{1}{\sigma k} \ln(\gamma). \quad (3.3.4)$$

La ecuación (3.3.4) se usará como fórmula para el sorteo del paso de fotones a través de un medio turbio.

3.4 Análisis del paso de fotones a través de un medio turbio.

Supóngase una representación del medio turbio como una hipotética placa homogénea de grosor ($0 < z < h$) y de paredes de áreas infinitas en donde se impactan fotones provenientes de un pulso gaussiano de energía E_0 . Supóngase ahora que en la trayectoria, dentro del medio turbio, pasa un *tren formado por un gran número ω_k de fotones* [33]. La interacción de este *tren* de fotones con el medio turbio se caracteriza en este caso por medio de dos constantes: *sección de absorción σ_c* y *sección de esparcimiento σ_s* . La suma de estas dos secciones da origen a una tercera sección conocida como *sección de extinción $\sigma = \sigma_c + \sigma_s$* . El significado físico de las secciones se explica como sigue: al impactarse el *tren* de fotones, en un punto geométrico, con abscisa z_k y dirección θ_k dentro del medio, tal y como se observa en la Figura 3.4.1. Existe la probabilidad de que un promedio $\omega_k(\sigma_c/\sigma)$ de fotones sea absorbido y la probabilidad de que un promedio $\omega_k(\sigma_s/\sigma)$ de fotones sea esparcido. En caso de ser cierto esto último se agrega al contador la cantidad $\omega_k(\sigma_c/\sigma)$, de fotones absorbidos y se continua el análisis del *tren* esparcido; aceptando que todo el *tren* restante se mueve en una misma dirección [33].

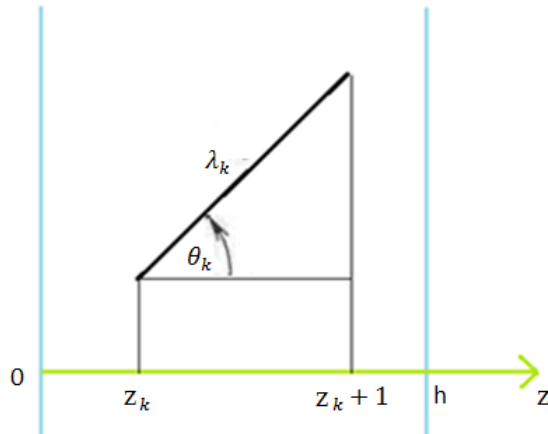


Figura 3.4.1

Abscisa al siguiente punto de colisión de un avance del tren de fotones en el medio turbio

El recorrido libre del *tren* de fotones, que hay entre un evento de esparcimiento y otro, se propone con una densidad de distribución exponencial (ecuación (3.3.4)) [33]. La abscisa al siguiente punto de colisión se muestra en la ecuación (3.4.1), donde $\mu_k = \cos\theta$

$$z_{k+1} = z_k + \lambda_k \mu_k, \quad (3.4.1)$$

Capítulo 4

VECTOR UNITARIO MONTE CARLO-MIE

Como ya se citó dentro del marco introductorio de este trabajo, la comunidad científica que se dedica al estudio del medio ambiente se ha esforzado en presentar vastos modelos de esparcimiento de luz. Algunos trabajos reportados, por citar algunos investigadores como: Zhensen Wu et al[35], Bissonnette L.R et al[36], Toubanc Dominique et al [37], Liaparinos, P.F. [38], Yuzaho Ma et al [39], Torres Garcian Eugenio et al [40], Pielsticker Lucas et al [41]. Proponen dentro de su modelado funciones aproximadas de fase simplificada, por citar dos ejemplos; se usa la función de Henyey-Greenstein o la función de distribución de Rutherford, para el esparcimiento las partículas esparcadoras de simetría esférica[42-63]. En este caso se propone considerar trabajar el modelado en todo su dominio analítico introduciendo parámetros asociados a las propiedades del medio, tales como índice de refracción relativo y dimensiones de los dispersores, buscando a su vez una simplificación dentro de las líneas del algoritmo para obtención de resultados de forma más rápida. En la sección 4.1 se aborda la propuesta del modelo Monte Carlo Mie, en la 4.2 la interpretación gráfica del plano transversal, en la sección 4.3 el perfil gráfico de los vectores transversos, en la sección 4.4 el perfil gráfico, en tres dimensiones (3D), de los vectores transversos; en la sección 4.5 la descripción del diagrama de flujo del algoritmo de programación y en la sección 4.6 la descripción a bloques del algoritmo.

4.1 Modelo Monte Carlo Mie.

Basándose en lo explicado en el capítulo 3 y capítulo 4 se propuso lo siguiente:

- Asociar bases vectoriales de un campo eléctrico definido desde el modelo Mie, a la función de avance usada en el cálculo de la abscisa en el nuevo punto de colisión (ecuación(3.4.1)), generando un nuevo vector unitario de avance espacial proyectado en armónicos esféricos, donde la componente radial ha sido proyectada desde un eje polar, dentro del medio turbio, pero a diferencia de utilizar la función $\mu_k = \cos\theta$ para la proyección, se propone una función en armónicos esféricos en términos funciones de Legendre, de orden $m = 1$ para garantizar simetría acimutal [2][11]., garantizando una proyección de la componente radial \hat{e}_r . Es decir

$$\mu_{k1} = P_n^1(\cos\theta_k), \quad (4.1.1)$$

- Ahora para la segunda y tercera componentes del vector unitario se propone asociarlas a los vectores de las componentes del campo en eléctrico en esparcimiento Mie; paralela $E_{\parallel s} [\mathbf{N}_{p1n}^{(3)}]$ y perpendicular $E_{\perp esp} [\mathbf{M}_{11n}^{(3)}]$. Entonces la propuesta es una proyección en armónicos esféricos del vector unitario para ondas en esparcimiento, en términos de funciones de Legendre-Hankel asociadas a sus componentes del plano transverso. La proyección escalar de la componente \hat{e}_θ se definió como:

$$\mu_{k2} = \sum_{n=1}^{\infty} \{i\tau_n \xi'_n - \pi_n \xi_n\} \frac{\cos\phi}{\rho}, \quad (4.1.2)$$

y en la componente $-\hat{e}_\phi$, como

$$\mu_{k3} = \sum_{n=1}^{\infty} \{i\pi_n \xi'_n - \tau_n \xi_n\} \frac{\text{sen}\phi}{\rho}, \quad (4.1.3)$$

La idea del manejo de las ecuaciones propuestas (4.1.2) y (4.1.3) se basa en la propuesta de Peing Qinqi et al. [64] para el estudio de retroesparcimiento de luz provocado por esferas anisotrópicas, pero complementando la idea de este trabajo con la adición de un vector piloto radial. Entonces la representación de un punto sobre una esfera dada por un vector unitario, que se proyecta desde el eje polar, es

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \hat{e}_r r_{k+1} + \hat{e}_\theta \theta_{k+1} - \hat{e}_\phi \phi_{k+1} = \\ & \hat{e}_r (r_k + \lambda_k \mu_{k1}) + \hat{e}_\theta (\theta_k + \lambda_{rad} \mu_{k2}) - \hat{e}_\phi (\phi_k + \lambda_{rad} \mu_{k3}). \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Donde se proponen dos funciones de la distribución exponencial; una asociada al recorrido libre entre eventos de esparcimiento como

$$\lambda_k = -\frac{1}{\sigma} \ln(\gamma). \quad (4.1.5)$$

Y otra asociada a las direcciones de esparcimiento como

$$\lambda_{rad} = -\frac{1}{\sigma_{rad}} \ln(\gamma) \quad (4.1.6)$$

Una representación grafica en el espacio de la onda esparcida en armónicos esféricos se observa en la Figura 4.1.1 [65]

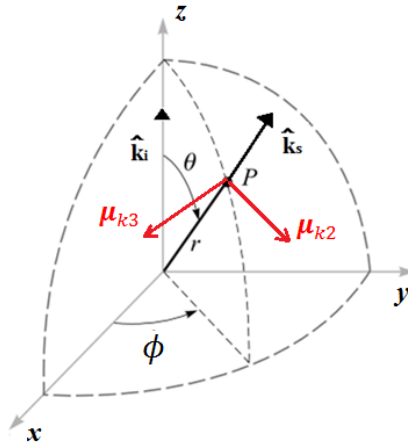


Figura 4.1.1

Proyección en armónicos esféricos de la abscisa al siguiente punto de colisión..

el vector de avance propuesto en la ecuación (4.1.4); la estructura es similar a la que propuso Bradinath et al. [66], excepto que en este caso las bases vectoriales se cimentan sobre armónicos esféricos. A partir de este vector se define una función de avance (de fotones) dentro del medio turbio quedando valores aleatorios para la variable cenital $\mu_k = [-1, 1]$ y para la variable acimutal $\phi = [0, 2\pi]$ y por supuesto dependiendo a su vez de la función de distribución propuesta λ_k , que en este caso es una *función exponencial*.

Se comprueba la condición de que el medio turbio de grosor $h = (\infty, \infty, z_k)$, ha sido atravesado

$$r_{k+1} + \theta_{k+1} + \phi_{k+1} > h. \quad (4.1.7)$$

Si esta condición se cumple concluye el análisis de la trayectoria del *tren* para ese sorteo y se incrementa, en uno, el contador de fotones que atraviesan el medio turbio. En caso contrario comprobamos la condición de reflexión

$$r_{k+1} + \theta_{k+1} + \phi_{k+1} < h. \quad (4.1.8)$$

Si esta condición se cumple concluye el análisis de la trayectoria del *tren* para ese sorteo y se incrementa, en uno, el contador de fotones que refleja el medio turbio. Si tampoco se cumple esta condición, es decir

$$0 < r_{k+1} + \theta_{k+1} + \phi_{k+1} < h. \quad (4.1.9)$$

Ello significa que el *tren* experimenta la $(k + 1)$ –ésima colisión dentro del mismo medio; habrá que sortear el destino del *tren* en su próxima colisión dentro del medio.

Resta explicar cómo se escoge la dirección aleatoria del *tren* cuando se produce el esparcimiento. Como se establece una simetría esférica alrededor del eje z , esta dirección se determina plenamente con solo indicar el ángulo θ del recorrido de avance del *tren* y el eje z (ver figura 4.1.1). La condición de que todas las direcciones son igualmente probables es equivalente a la condición de que el coseno de este ángulo ($\cos\theta$) este uniformemente distribuido en el intervalo $(-1, 1)$.

Después de cada colisión, la cantidad de fotones en el *tren* disminuirá siendo el nuevo promedio igual a

$$\omega_{k+1} = \omega_k(\sigma_s/\sigma), \quad (4.1.10)$$

o bien, ya sea que una parte de los fotones del *tren*, se absorba como

$$\omega_k(\sigma_c/\sigma). \quad (4.1.11)$$

La variable ω_k suele denominarse *ponderación* del fotón y en lugar de un *tren* formado por ω_k fotones, suele hablarse de un fotón ponderado ω_k , donde éste se define como $\omega_k = \omega_0 * \omega_k(\sigma_s/\sigma_e)$. En donde la ponderación inicial ω_0 se asocia con una energía tipo gaussiana del pulso laser incidente. Es decir se asocia como una *Función de Distribución Gaussiana Normalizada (FDG)*, emulando el comportamiento

de un pulso laser Q-Switching. Además se consideró que tanto la sección de esparcimiento (coeficiente de esparcimiento) σ_s , como la sección de absorción (coeficiente de absorción) σ_c sean generadas usando las ecuaciones (2.4.6) y (2.4.7). Como valores iniciales para cada trayectoria se eligieron, de nuevo

$$\mu_0 = 1 \text{ y } \omega_0 = FDG.$$

Definiendo las mismas probabilidades para los fotones esparcidos, reflejados y en absorción. En función de las razones

$$p^+ \cong \frac{N^+}{N}, \quad p^- \cong \frac{N^-}{N}, \quad p^0 \cong \frac{N^0}{N} \quad (4.1.12)$$

Donde N^+ es el número de fotones en esparcimiento que atraviesan al medio, N^- es el número de fotones que se reflejan del medio, N^0 es el número de fotones atrapados en el medio y N es el total de fotones que incide al medio.

4.2 Interpretación gráfica del plano transversal.

El plano trasversal o transversal está formado por las componentes polar μ_{k2} y acimutal μ_{k3} . La propuesta que sustenta este trabajo consiste en ubicar la dirección de esparcimiento de la onda a través del ángulo θ de la componente polar μ_{k2} el cual sería equivalente a la dirección angular del vector unitario de esparcimiento de la onda \hat{k}_s . A continuación se muestran los planos complejos asociados a cada componente del plano transversal.

En la Figura 4.2.1 **a**) se observan por separado los planos complejos perpendiculares entre sí, que están asociados, omitiendo las sumatorias; a los fasores $\{i\tau_n \xi'_n - \pi_n \xi_n\}$ y $\{i\pi_n \xi'_n - \tau_n \xi_n\}$, en la Figura 4.2.1 **b**) se observa la superposición de ambos planos ubicando cada uno la posición de su respectivo fasor y a su vez ambos fasores, ortogonales entre sí, forman las componentes vectoriales del plano transversal a la dirección de esparcimiento de la onda; y en la Figura 4.2.1 **c**) se observa las componentes vectoriales del plano transversal proyectadas sobre su plano acimutal, identificadas por las ecuaciones (4.1.2) y (4.1.3).

4.3 Perfil gráfico de los vectores transversos.

A continuación se muestra el perfil gráfico de las componentes escalares del plano transversal tomando el orden $m = 1$, tanto de la función generatriz de las funciones asociadas de Legendre, como de las funciones de Hankel.

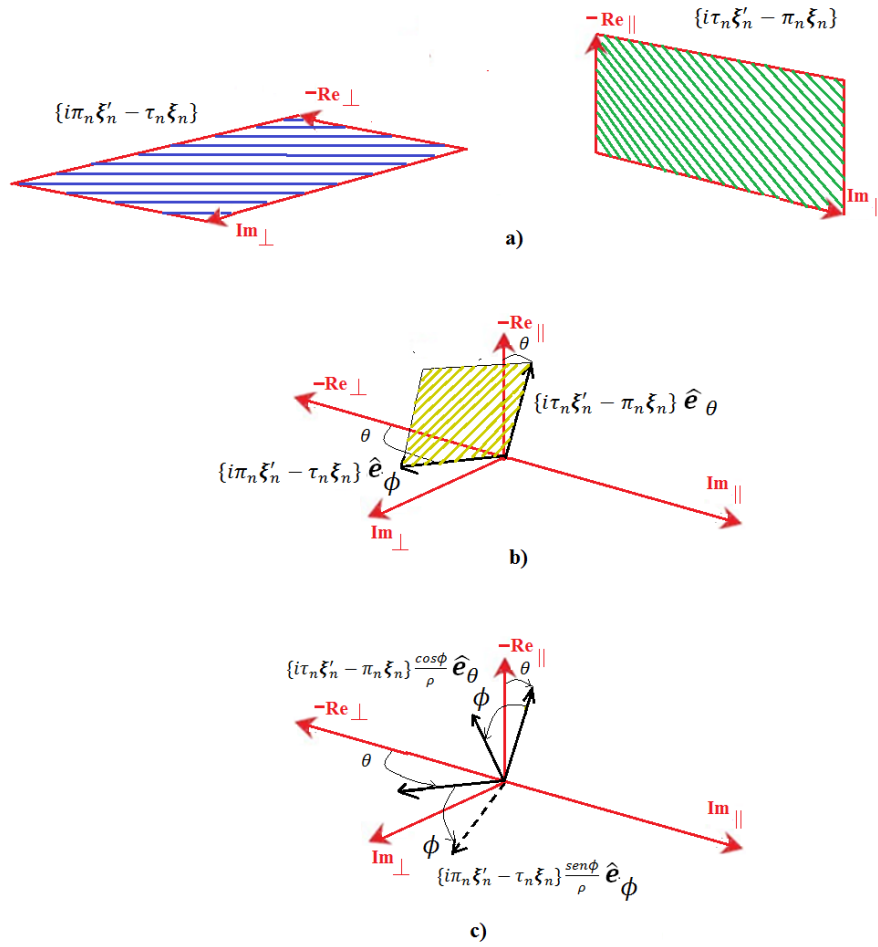


Figura 4.2.1

Representación gráfica de las componentes del Plano Transverso observando en los incisos:

- a) Planos complejos de las componentes escalares: $\{i\tau_n \xi'_n - \pi_n \xi_n\}$ y $\{i\pi_n \xi'_n - \tau_n \xi_n\}$.
- b) El plano transverso que se forma al superponer los planos complejos de ambos fasores.
- c) Vectores transversos definidos como: $\{i\tau_n \xi'_n - \pi_n \xi_n\} \frac{\cos\phi}{\rho} \hat{e}_\theta$ y $\{i\pi_n \xi'_n - \tau_n \xi_n\} \frac{\sen\phi}{\rho} \hat{e}_\phi$.

En la Figura 4.3.1 se muestra el perfil gráfico de la función $|i\pi_n \xi'_n - \tau_n \xi_n|$ variando el grado (índice de la sumatoria) en $n = 1$ y para los siguientes valores de distancia: $\rho = 1.75m$, $\rho = 2m$ y $\rho = 2.6m$.

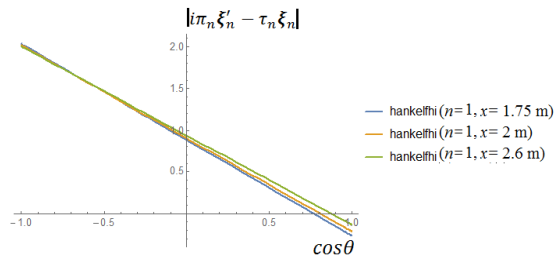


Figura 4.3.1

Perfil gráfico de la función $|i\pi_n \xi'_n - \tau_n \xi_n|$ asociada al vector unitario acimutal, para un índice $n=1$ y distancias 1.75, 2 y 2.6 mts.

En la Figura 4.3.2 se muestra el perfil gráfico de la función $|i\tau_n \xi'_n - \pi_n \xi_n|$ variando el grado (índice de la sumatoria) en $n = 2$ y para los siguientes valores de distancia: $\rho = 1.75m$, $\rho = 2m$ y $\rho = 2.6m$.

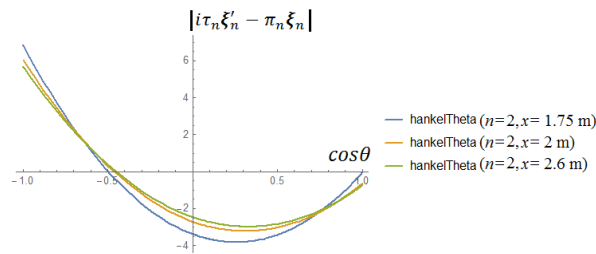


Figura 4.3.2

Perfil gráfico de la función $|i\tau_n \xi'_n - \pi_n \xi_n|$ asociada al vector unitario polar, para un índice $n=2$ y distancias 1.75, 2 y 2.6 mts.

En la Figura 4.3.3 se muestra el perfil gráfico de la función $|i\pi_n \xi'_n - \tau_n \xi_n|$ variando el grado (índice de la sumatoria) en $n = 3$ y para los siguientes valores de distancia: $\rho = 1.75m$, $\rho = 2m$ y $\rho = 2.6m$.

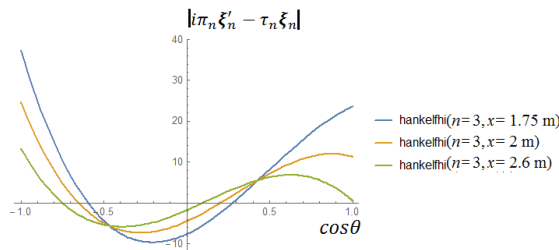


Figura 4.3.3

Perfil gráfico de la función $|i\pi_n \xi'_n - \tau_n \xi_n|$ asociada al vector unitario acimutal, para un índice $n=3$ y distancias 1.75, 2 y 2.6 mts.

En la Figura 4.3.4 se muestra el perfil gráfico de la función $|i\tau_n \xi'_n - \pi_n \xi_n|$ variando el grado (índice de la sumatoria) en $n = 4$ y para los siguientes valores de distancia: $\rho = 1.75m$, $\rho = 2m$ y $\rho = 2.6m$.

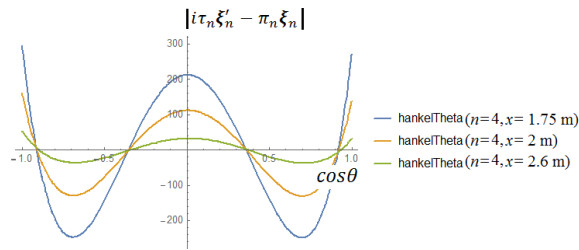


Figura 4.3.4

Perfil gráfico de la función $|i\tau_n \xi'_n - \pi_n \xi_n|$ asociada al vector unitario polar, para un índice $n=4$ y distancias 1.75, 2 y 2.6 mts.

En la Figura 4.3.5 se muestra el perfil gráfico de la función $|i\pi_n \xi'_n - \tau_n \xi_n|$ variando el grado (índice de la sumatoria) en $n = 5$ y para los siguientes valores de distancia: $\rho = 1.75m$, $\rho = 2m$ y $\rho = 2.6m$.

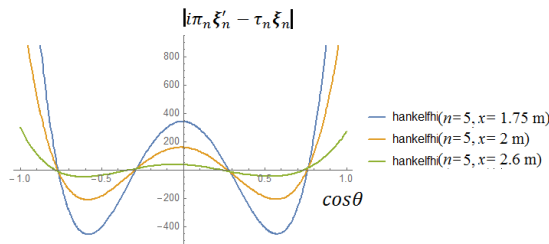


Figura 4.3.5

Perfil gráfico de la función $|i\pi_n \xi'_n - \tau_n \xi_n|$ asociada al vector unitario acimutal, para un índice $n=5$ y distancias 1.75, 2 y 2.6 mts.

En la Figura 4.3.6 se muestra el perfil gráfico de la función $|i\tau_n \xi'_n - \pi_n \xi_n|$ variando el grado (índice de la sumatoria) en $n = 6$ y para los siguientes valores de distancia: $\rho = 1.75m$, $\rho = 2m$ y $\rho = 2.6m$.

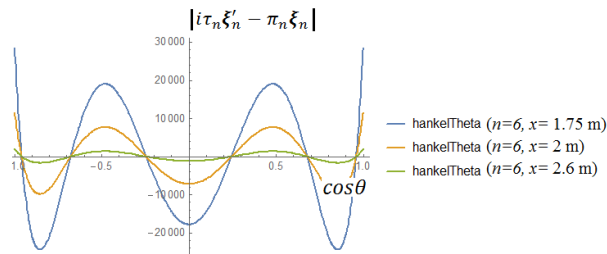


Figura 4.3.6

Perfil gráfico de la función $|i\tau_n \xi'_n - \pi_n \xi_n|$ asociada al vector unitario polar, para un índice $n=6$ y distancias 1.75, 2 y 2.6 mts.

Analizando las Figuras 4.3.1 hasta 4.3.6 se observa, tal como se esperaba, un comportamiento fasorial que va atenuándose conforme avanza la distancia hasta converger a un valor en distancia lejana. Ambos vectores están representando el plano transversal de la onda en esparcimiento, como consecuencia de esta propiedad se esperaría un comportamiento fasorial convergente del vector de onda de esparcimiento perpendicular al mismo plano.

4.4 Gráficas esféricas en 3D de los vectores transversos.

En la gráfica de la Figura 4.4.1 se observa el comportamiento en tres dimensiones desde un sistema de referencia esférico de la ecuación escalar μ_{k2} para tres muestras de las sumatorias; todas en $n = 5$, variando la distancia en $\rho = 5m$, $\rho = 50m$ y $\rho = 500m$.

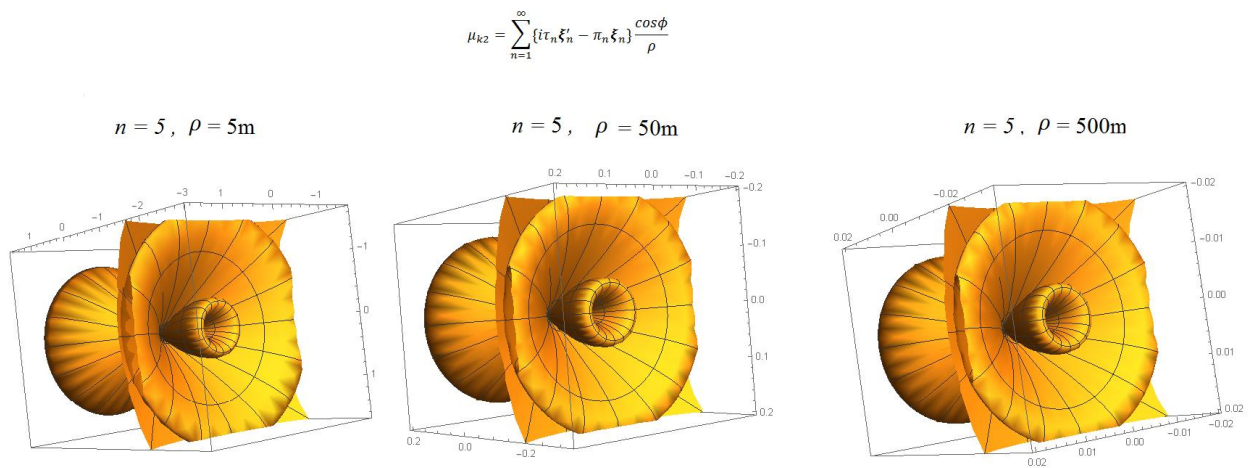


Figura 4.4.1

Representación en tres dimensiones desde un sistema esférico de la componente escalar μ_{k2} para la muestra $n = 5$ a una distancia de 5, 50 y 500 mts.

En la gráfica de la Figura 4.4.2 ahora se observa el comportamiento en tres dimensiones desde un sistema de referencia esférico de la ecuación escalar μ_{k3} para tres muestras de las sumatorias; todas en $n = 5$, variando la distancia en $\rho = 5m$, $\rho = 50m$ y $\rho = 500m$.

$$\mu_{k3} = \sum_{n=1}^{\infty} \{i\pi_n \xi_n' - \tau_n \xi_n\} \frac{\text{sen}\phi}{\rho}$$

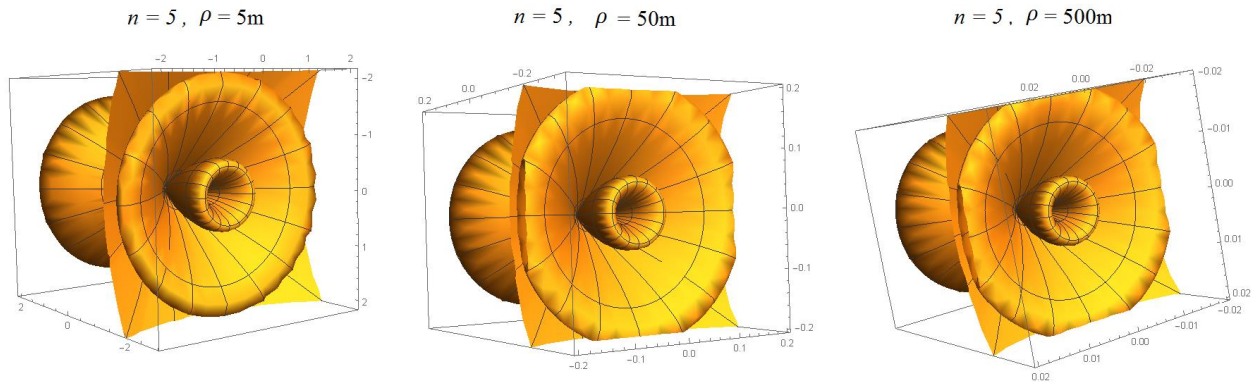


Figura 4.4.2

Representación en tres dimensiones desde un sistema esférico de la componente escalar μ_{k3} para la muestra $n = 5$ a una distancia de 5, 50 y 500 mts.

En las figuras 4.4.1 y 4.4.2 se observa una clara convergencia de las formas geométricas, en ambos vectores, esto en el índice $n = 5$ y una progresiva atenuación de la geometría conforme aumenta la distancia ρ . Dado el comportamiento anterior se eligió este índice como el índice convergente, dentro de la configuración de la serie que define el vector de estado dentro del algoritmo que se describe a continuación.

4.6 Descripción de los bloques del algoritmo.

BLOQUE 1. Declaración de los coeficientes de probabilidad de: esparcimiento, absorción y extinción; las probabilidades de: esparcimiento, absorción y extinción; espesor del ancho del medio turbio, número de eventos de esparcimiento y número de fotones [67].

En este block se genera:

La función de probabilidad de distribución de esparcimiento, como un listado de valores resultantes de la convolución entre la probabilidad de esparcimiento y una función de distribución gaussiana, dicho listado es etiquetado dentro del algoritmo como **wCC**[*R*, λ].

La función de detección de posición, que identifica la posición del tren de fotones mientras esté atrapado dentro del medio turbio. Esta función detecta la posición de cada fotón y de acuerdo a dicha posición le asocia un valor de probabilidad de esparcimiento desde la lista de probabilidad de distribución en esparcimiento **wCC**[*R*, λ].

La función de esparcimiento, que identifica los fotones que han atravesado el medio turbio. Esta función detecta la posición de cada fotón y de acuerdo a dicha posición le asocia un valor de probabilidad de esparcimiento desde la lista de probabilidad de distribución en esparcimiento **wCC**[*R*, λ].

La función de retroesparcimiento, que identifica los fotones que han sido retroesparcidos desde el medio turbio. Esta función detecta la posición de cada fotón y de acuerdo a dicha posición le asocia un valor de probabilidad de esparcimiento desde la lista de probabilidad de distribución en esparcimiento **wCC**[*R*, λ].

Bloque 2. Generación del avance, paso a paso, de un fotón dentro del medio turbio. Definiendo una función de avance vectorial como:

$$\hat{e}_r r_{k+1} + \hat{e}_\theta \theta_{k+1} - \hat{e}_\phi \phi_{k+1} = \hat{e}_r \lambda_k + \hat{e}_\theta \theta_k - \hat{e}_\phi \phi_k ; \text{ si } \mu_k = 1, \phi = 0.$$

o bien

$$\hat{e}_r r_{k+1} + \hat{e}_\theta \theta_{k+1} - \hat{e}_\phi \phi_{k+1} = \hat{e}_r (r_k + \lambda_k \mu_{k1}) + \hat{e}_\theta (\theta_k + \lambda_{krad} \mu_{k2}) - \hat{e}_\phi (\phi_k + \lambda_{krad} \mu_{k3}); \text{ si } \mu_{k1} \neq 1, \phi \neq 0.$$

Este bloque genera la función de estado, generando una lista de todas las posibles trayectorias y direcciones de esparcimiento, de acuerdo al número de fotones declarados y eventos de esparcimiento. Desde esta lista se obtiene una segunda lista etiquetada como **wCC**[*R*, λ]_{FOV} donde solo estarán todos los fotones en retroesparcimiento y ubicados dentro del campo de visión del fotodetector (FOV).

Bloque 3. Este bloque calcula, promedios de probabilidades y despliegue gráfico de la ubicación de todos los fotones capturados dentro del campo de visión del detector. Confirmando las cantidades físicas.

El cálculo de fotones en el fotodetector fue factible dada la naturaleza de las componentes del plano transversal de la función de avance dentro del medio, ya que tanto la componente paralela

$$\mu_{k2} = \frac{\cos \phi}{\rho} \{i\tau_n \xi'_n - \pi_n \xi_n\} \hat{e}_\theta, \quad (4.6.1)$$

como la componente perpendicular

$$\mu_{k3} = -\frac{\text{sen} \phi}{\rho} \{i\pi_n \xi'_n - \tau_n \xi_n\} \hat{e}_\phi, \quad (4.6.2)$$

su composición de ambas es compleja [2][11]. Por lo que fue posible establecer planos complejos ortogonales a las componentes angulares paralela y perpendicular respectivamente, tal y como se observa en la Figura 4.2.1 y así proponer la determinación de la dirección angular del vector de onda, desde el vector μ_{k2} , al momento de la colisión. El número de fotones detectados dependerá del ángulo sólido del telescopio, que contiene un fotodetector, y cuyo radio de apertura se declara como

$$\beta = \tan^{-1} \frac{x}{R}, \quad (4.6.3)$$

donde el numerador representa el radio de apertura y el denominador representa la distancia a la cual se ubica dicho telescopio fotodetector. Lo citado anteriormente se puede ver gráficamente en la Figura 4.6.1.

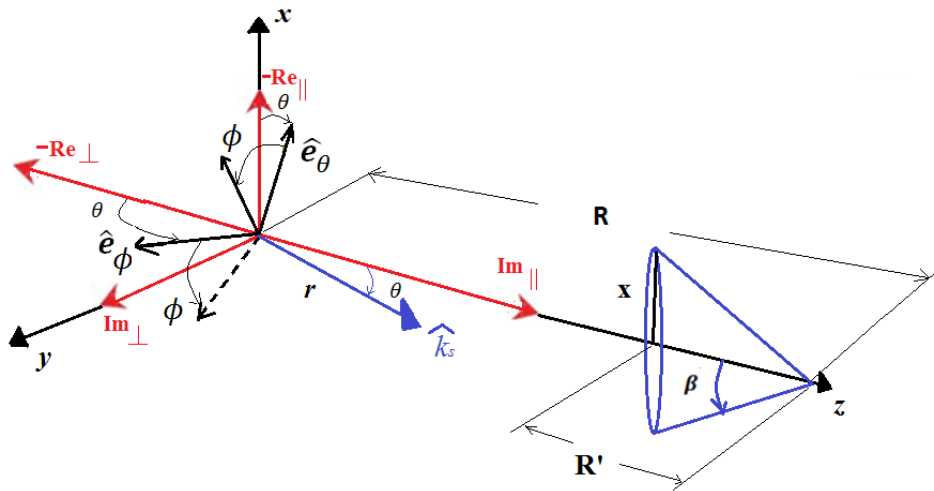


Figura 4.6.1

Superposición de: plano complejo $-\text{Re}_\parallel \text{Im}_\parallel$ sobre un plano xz ; plano complejo $-\text{Re}_\perp \text{Im}_\perp$ sobre un plano $-zy$. Observándose una proyección de un vector de onda magnificado; \hat{k}_s , hacia un campo de visión de un telescopio.

Donde se observa el vector de onda \hat{k}_s utilizado en la propuesta como vector de avance en armónicos esféricos dentro del algoritmo.

Capítulo 5

RESULTADOS Y APORTACIONES

Se realizaron primero simulaciones de un pulso de luz impactando a un medio turbio configurando el programa para detectar los promedios de esparcimiento, retroesparcimiento y extinción de fotones. Posteriormente se realizaron simulaciones de fotodetección del retroesparcimiento en función de la distancia. En la sección 5.1 se aborda el comparativo simulado de promedios cuantificados y formas de distribución espacial de fotones en esparcimiento, en la 5.2 las simulaciones de la distribución espacial de fotones en función de la distancia, en la 5.3 el comparativo de retroesparcimiento de cien mil fotones en función de la distancia, en la 5.4 el comparativo de retroesparcimiento de un millón de fotones en función de la distancia y en la 5.5 las señales experimental-teóricas de retorno Lidar en múltiple esparcimiento.

5.1 Simulaciones del paso de fotones a través de un medio turbio.

5.1.1 Comparación de promedios y distribución espacial.

Para obtener los resultados del esparcimiento de fotones se definieron los siguientes parámetros: Pulso de luz incidente 5.5×10^5 fotones, longitud de onda 532nm, ancho del medio turbio $h = 2$ m, dimensión radial de partículas esparcidoras $r = 0.5\mu\text{m}$, $r = 2\mu\text{m}$ y $r = 4\mu\text{m}$ y un índice de refracción relativo, correspondiente a vidrio ligero, de 1.58. Las Tablas I, II y III muestran los promedios del esparcimiento de fotones en el medio turbio.

Radio de partículas esparcidoras ($r=0.5\mu\text{m}$)				
Fotones incidentes	longitud de onda (nm)	Probabilidad de fotones en absorción (No. de fotones)	Probabilidad de fotones esparcidos (No. de fotones)	Probabilidad de fotones retroesparcidos (No. de fotones)
5.5E+05	532	3.88E-16	0.48	0.5

Tabla I

Esparcimiento de fotones dentro de dispersores de radio $r=0.5\mu\text{m}$.

Radio de partículas esparcidoras ($r=2\mu\text{m}$)				
Fotones incidentes	longitud de onda (nm)	Probabilidad de fotones en absorción (No. de fotones)	Probabilidad de fotones esparcidos (No. de fotones)	Probabilidad de fotones retroesparcidos (No. de fotones)
5.5E+05	532	4.44E-16	0.83	0.15

Tabla II

Esparcimiento de fotones dentro de dispersores de radio $r=2\mu\text{m}$.

Radio de partículas esparcidoras ($r=4 \mu\text{m}$)				
Fotones incidentes	longitud de onda (nm)	Probabilidad de fotones en absorción (No. de fotones)	Probabilidad de fotones esparcidos (No. de fotones)	Probabilidad de fotones retroesparcidos (No. de fotones)
5.5E+05	532	4.439E-16	0.94	0.04

Tabla III

Esparcimiento de fotones dentro de dispersores de radio $r=4 \mu\text{m}$

La Figura 5.1.1 muestra los perfiles de distribución espacial del esparcimiento de un promedio de 5.5×10^5 fotones dentro de un medio turbio con un índice de refracción de 1.58 y partículas esparcidoras de dimensiones radiales $r=0.5 \mu\text{m}$, $r=2 \mu\text{m}$ y $r=4 \mu\text{m}$.

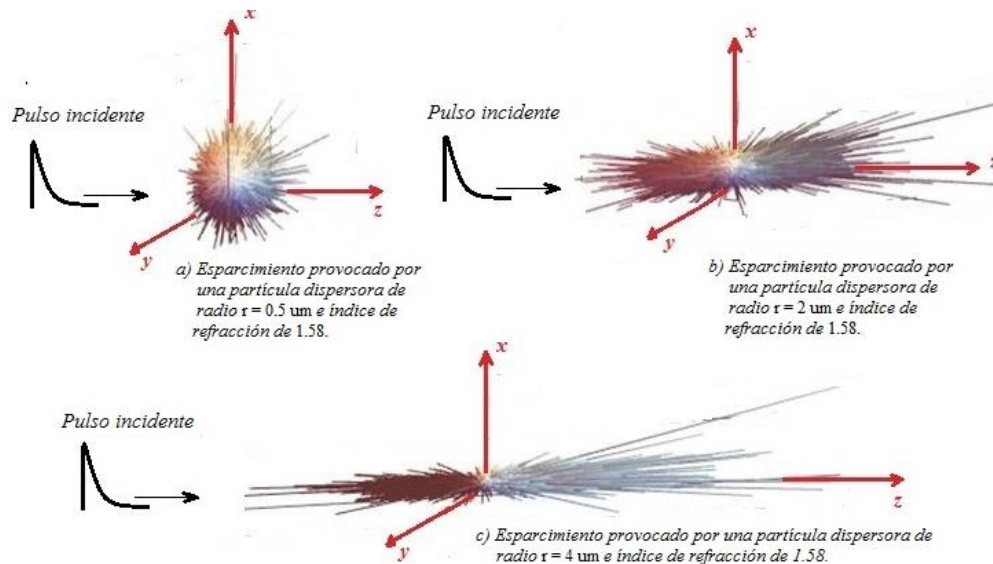


Figura 5.1.1

Distribución espacial del esparcimiento de fotones incidentes a medios turbios con partículas esparcidoras de distintos tamaños

5.1.2 Simulaciones del perfil de distribución espacial en función de la distancia de detección.

A continuación, se muestran los resultados del retroesparcimiento en función de la distancia provenientes de un medio turbio, de paredes infinitas separadas a una distancia de 2 m, conteniendo en su interior 55 millones de partículas dispersoras como promedio máximo, con una simetría esférica radial de $0.5 \mu\text{m}$, $2 \mu\text{m}$ y $4 \mu\text{m}$, en cada caso. Para esto el programa se ejecutó variando la posición del fotodetector contenido en un telescopio con un lente propuesto de radio $r = 0.5 \text{ m}$, iniciando a partir de una distancia 5 hasta 25 mts en incrementos de cinco en cinco. Las simulaciones se ejecutan tomando en cuenta los siguientes parámetros físicos: longitud de onda del pulso laser $\lambda=532\text{nm}$, una población de 10^5

y 10^6 fotones promedio y 100 iteraciones por sorteo, variando el índice de la función de estado (vector unitario Mie) desde $n = 1$ hasta $n = 5$.

5.1.3 Comparativo del retroesparcimiento en función de la distancia: población cien mil fotones.

La Tabla IV muestra el comparativo del comportamiento de probabilidad de 10^5 fotones retroesparcidos, en función de la distancia, por un medio turbio con partículas de simetrías esféricas de radio 0.5, 2 y 4 μm respectivamente con una concentración volumétrica máxima de dispersores de 10^7 (partículas/ m^3). (Limitada por las capacidades del sistema de cómputo.)

Dispersor($r=0.5 \mu\text{m}$) Población(10^5 fotones)		Dispersor ($r=2 \mu\text{m}$) Población(10^5 fotones)	Dispersor ($r=4 \mu\text{m}$) Población(10^5 fotones)
Distancia(m)	Probabilidad(σ_s/σ)	Probabilidad(σ_s/σ)	Probabilidad(σ_s/σ)
5	0.0055	0.0038	0.00064
10	0.002	0.0014	0.0003
15	0.00097	0.0007	0.00019
20	0.00056	0.00043	0.00011
25	0.00037	0.0003	0.00006

Tabla IV

Comparativo del retroesparcimiento de 10^5 fotones, por dispersores de dimensión radial $r=0.5, 2$ y $4\mu\text{m}$.

La Figura 5.1.3 muestra los perfiles en función de la distancia de los datos de la Tabla VIII

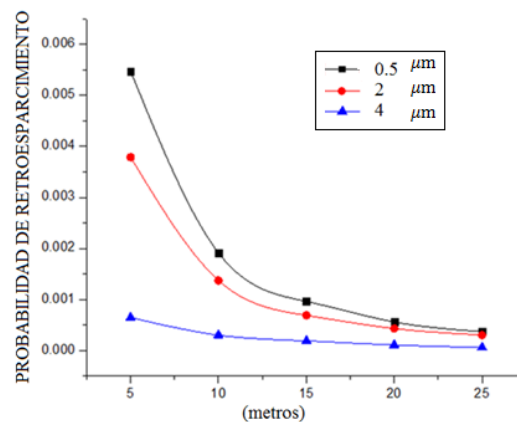


Figura 5.1.3

Comparativo de los perfiles de retroesparcimiento en función de la distancia en poblaciones de cien mil fotones provenientes de partículas esféricas de dimensiones radiales $r = 0.5, r = 2$ y $r = 4 \mu\text{m}$ respectivamente.

5.1.4 Comparativo del retroesparcimiento en función de la distancia: población un millón de fotones.

La Tabla V muestra el comparativo del comportamiento de probabilidad de 10^6 fotones retroesparcidos, en función de la distancia, por un medio turbio con partículas de simetrías esféricas de radio 0.5, 2 y 4 μm respectivamente con una concentración volumétrica máxima de dispersores, de 10^8 (partículas/ m^3).

Dispersor($r=0.5 \mu\text{m}$) Población(10^6 fotones)		Dispersor($r=2 \mu\text{m}$) Población(10^6 fotones)	Dispersor ($r=4 \mu\text{m}$) Población(10^6 fotones)
Distancia(mts)	Probabilidad(σ_s/σ)	Probabilidad(σ_s/σ)	Probabilidad(σ_s/σ)
5	0.0054	0.0038	0.00067
10	0.00183	0.00149	0.00027
15	0.00092	0.00080	0.00016
20	0.00056	0.00052	0.000094
25	0.00039	0.00036	0.000052

Tabla V

Comparativo del retroesparcimiento de 10^6 fotones, por dispersores de dimensión radial $r=0.5, 2$ y $4\mu\text{m}$.

La siguiente Figura 5.1.4 muestra los perfiles en función de la distancia de los datos de la Tabla XII

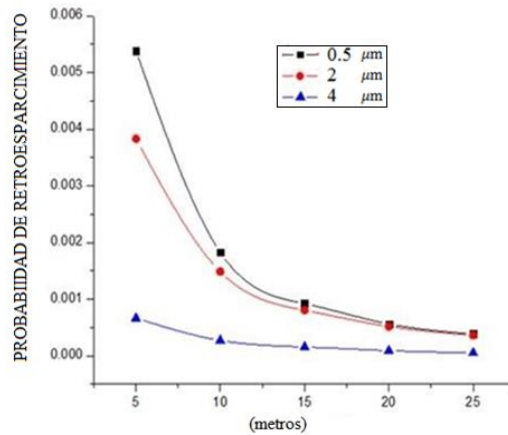


Figura 5.1.4

Comparativo de los perfiles de retroesparcimiento en función de la distancia en poblaciones de un millón de fotones provenientes de partículas esféricas de dimensiones radiales $r = 0.5, r = 2$ y $r = 4 \mu\text{m}$ respectivamente.

5.1.5 Señales experimental-teórica de retorno Lidar en múltiple esparcimiento.

Se realizó la comprobación del modelo Monte Carlo-MIE para representar el perfil de datos experimentales, proporcionados por cortesía del laboratorio aeroespacial de Francia (ONERA), referente una señal de retorno en esparcimiento de un LIDAR sobre un medio turbio en nubes ubicadas a una altura 1065 mts y máxima de 1147.5 mts.[68-73]. El monitoreo de datos atmosféricos a través de la luz ensambla a todo un equipo de instrumentación el cual consiste en un sistema Laser pulsante de alta energía, un telescopio modificado el cual incluye un fotodetector en su interior que actúa como transductor transformando los fotones captados en señal eléctrica la cual es enviada a una computadora (sistema de adquisición de datos) para ser cuantificados a través de un algoritmo de detección. La siguiente Figura 5.1.5 [74] muestra un diagrama a bloques de un sistema Lidar

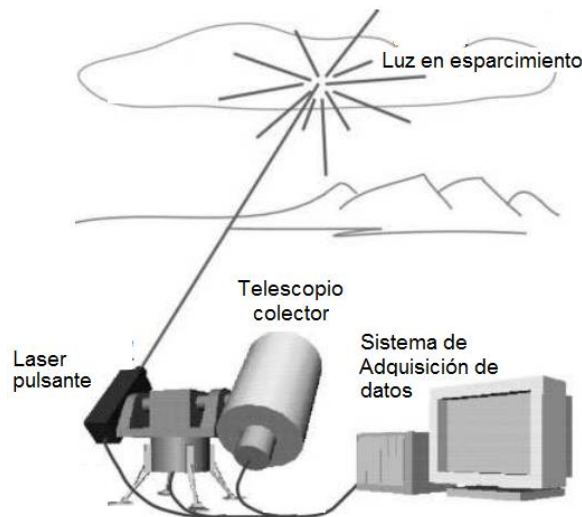


Figura 5.1.5

*Sistema de detección atmosférico
Lidar.*

Para esta validación dentro del algoritmo se consideraron los siguientes parámetros: Para una nube baja modelada como un medio turbio de paredes infinitas separadas a una distancia $h=100$ mts, un nivel de energía del pulso laser QSW de 0.05 Joules, con una longitud de onda de 355 nm; en el fotodetector hipotético se consideró una etapa de ganancia en amplificación de señal de aproximadamente 150 veces, esta compensación es resultado de la limitación en el equipo de cómputo referente al manejo del número de fotones propuesto para el pulso incidente [$(5.5 \times 10^5$ fotones) ya que éste es del orden de femtojules], con un campo de visión (FOV) de apertura radial $r=0.1$ mts. Respecto a las secciones de área transversales de los dispersores dentro del medio, se consideró lo siguiente; se propone un índice de refracción relativo, del medio turbio, no absorbente, de $n_r= 1.9996$ [11][75-77]; un radio $r=10 \mu\text{m}$ asociado a las gotas de agua de muy baja ionización contenidas en una nube de altura baja[78]. Se corrió el programa varias veces variando la ganancia del fotodetector, eligiendo dos corridas a mostrar; la primera con ganancia de 150 veces y la segunda corrida con ganancia de 157 veces. En todos los casos se varió la posición del sensor desde 1065mts hasta 1147.5mts con incrementos de 7.5mts, mostrando resultados similares. En los dos casos elegidos se realizó un ajuste numérico lineal para cada altura; y por

el resultado numérico encontrado se propuso asociarle a dicho ajuste un perfil de Transmitancia [79] tal y como se observa en la Figura 5.2.5

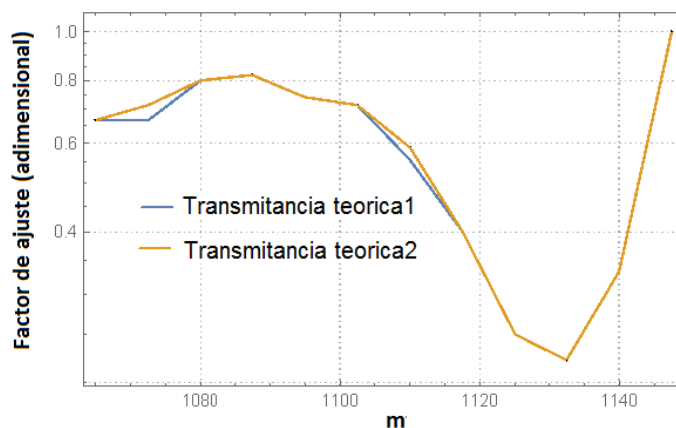


Figura 5.2.5

Factor de escalamiento en función de la altura.

La Tabla VI muestra el comparativo de resultados experimentales y teóricos generados por el modelo Monte Carlo-MIE, lográndose obtener una representación teórica cercana a la señal experimental como se puede verificar en el resultado de la segunda corrida. Ver Figura 5.3.5.

Altura(m)	Dato exp (J/s)	Dato Teo1 (J/s)	Error (%) Teo1/exp	Dato Teo2(J/s)	Error(%) Teo2/exp
1065	0.135868	0.112792	16.7	0.127796	5.94
1072.5	0.144561	0.138628	4.1	0.145604	0.72
1080	0.133041	0.125897	5.4	0.135138	1.57
1087.5	0.132182	0.123923	6.25	0.132309	0.09
1095	0.136594	0.130639	4.36	0.140323	2.73
1102.5	0.139296	0.133075	4.47	0.143451	2.99
1110	0.15148	0.147368	2.71	0.15779	4.1
1117.5	0.196363	0.177391	9.66	0.193537	1.44
1125	0.245753	0.226129	7.99	0.2396	2.5
1132.5	0.250331	0.239566	4.3	0.253361	1.21
1140	0.205713	0.193775	5.8	0.208712	1.46
1147.5	0.133023	0.106224	20.1	0.113055	15.01

Tabla VI

Comparativo de perfiles experimental/teóricos de una señal LIDAR.

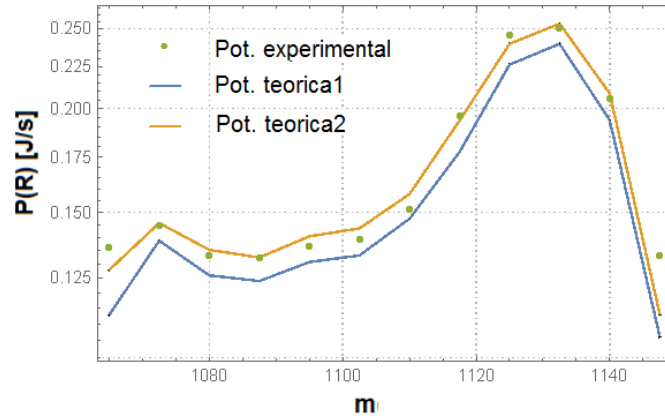


Figura 5.3.5

Perfiles de distribución experimental/teóricos de señal LIDAR

5.2 Aportaciones

Las aportaciones que se generaron de la tesis fundamentalmente son las mostradas a continuación:

- Desarrollo de un algoritmo y programación del mismo capaz de detectar y cuantificar fotones en retroesparcimiento usando funciones especiales de Hankel que son complejas en el plano transversal vectorial y como consecuencia de esto se logra obtener simulaciones en tiempos cortos, respecto a simulaciones de detección de fotones por cosenos directores.
- Generación del artículo titulado "3d Monte Carlo analysis on photons step through turbid medium by Mie scattering"; publicado en la revista mexicana de Física el mes de Marzo del 2021, el cual se muestra al final de la tesis.

Capítulo 6

CONCLUSIONES

En las simulaciones de esparcimiento y cuantificación de fotones proyectándose como ondas de armónicos esféricos, referida a la Figura 5.1.1, se concluye lo siguiente:

- a) Al introducir los parámetros físicos del radio del dispersor e índice de refracción relativo, dentro de los coeficientes de absorción y esparcimiento, así como las bases vectoriales MIE dentro de la función escalón. Se observa un esparcimiento con una dirección cada vez de mayor tendencia hacia adelante (en sentido del pulso incidente) y menor hacia atrás conforme se va aumentando el tamaño de la partícula del medio turbio, comprobando esto último también con las concentraciones promedio de fotones reflejados y esparcidos. Y con la forma de distribución espacial del esparcimiento similar al lóbulo de radiación de la función de fase MIE [74].

De los resultados de la sección del perfilado comparativo de distribución espacial en función de la distancia, para poblaciones de fotones de cien mil y un millón (Figuras 5.1.3 y 5.1.4), captados cada vez que se cambio de posición el fotodetector hipotético y suponiendo una apertura radial en el telescopio de 0.5 m.

- b) Se observó que ambos perfiles no son proporcionales al 100% ; esto debido a que siempre que se corre el programa, por el tipo no determinista del método de Monte Carlo-MIE usado, nunca se repite la misma distribución del medio turbio por la naturaleza aleatoria propia del algoritmo. Sin embargo, el perfil de distribución es parecido entre ambas poblaciones. Esto es debido a la naturaleza lineal de los campos electromagnéticos armónicos que soportan las bases vectoriales del plano transversal de la función de avance declarada dentro del programa.
- c) Se observó en el fotodetector, que conforme se incrementa el tamaño radial de las partículas dispersoras que conforman el medio turbio; cada vez llegan menos concentraciones de fotones retroesparcidos hacia el detector. Corroborándose de nuevo lo citado en el inciso a).
- d) Realizando el comparativo de las gráficas 5.1.3 y 5.1.4 se nota una gran similitud de perfiles entre ambas poblaciones, así como también se observó que para partículas dispersoras debajo de una micra de diámetro, la probabilidad de retroesparcimiento tiende a depender del inverso de la distancia al cuadrado ($1/R^2$). Además, y debido a la linealidad de los campos electromagnéticos armónicos, bajo reserva de realizar simulaciones con un número mayor de población de fotones, en procesadores más poderosos; se podría estimar un escalamiento a concentración de poblaciones del orden de hasta 10^{30} con perfiles de distribución lineal, esto se cita para futuros cálculos en estaciones de trabajo, dado que de momento las simulaciones fueron realizadas por equipos de trabajo de mediana gama que limitaron a poblaciones máximas de un millón de fotones.

De los resultados de la validación del modelo en una señal experimental LIDAR se deduce lo siguiente:

- e) En el fotodetector, dentro de un telescopio con apertura radial 0.1, se propone un perfil de re-escalamiento lineal específico para cada altura sobre un intervalo desde 1065 m hasta 1147.5 m. Aplicado a una nube, simulando múltiple retroesparcimiento y lográndose un muy próximo acercamiento entre la señal Lidar experimental y teórica, tal como se observa en las gráficas de la figura 5.3.5. Proponiendo que el acercamiento de este modelado es debido a que el medio turbio está compuesto por partículas esparcidoras de tipo esférico (gota de nube) con una dimensión radial promedio de 10 micras y el modelo Monte Carlo-MIE se cimienta sobre bases vectoriales que representan esparcimiento en armónicos esféricos lo cual hace que coincidan ambas geometrías. Por lo que, ajustando los parámetros del radio e índice de refracción relativo, dentro del modelo, se lograron resultados satisfactorios.
- f) En la Figura 5.2.5 se observó el perfil de retroesparcimiento escalado y se propuso asociarle a esta perturbación una relación física del factor Transmitancia que relaciona al coeficiente de extinción a la distancia R .
- g) La lista obtenida y etiquetada como $wCC(R, \lambda)_{FOV}$ es el promedio de fotones en retroesparcimiento, ubicados dentro del campo de visión del fotodetector (FOV), cuya variación depende de la longitud de onda, del inverso de distancia y esta es calculada por el algoritmo Monte Carlo-Mie. Con los ajustes indicados dentro de la lista citada en el inciso f), se logró obtener el perfil de potencia de retroesparcimiento de la Figura 5.3.5. Para tal efecto se propuso la ecuación numérica (6.1), que representa a la potencia en función de la altura, definida como [79-81]:

$$P(R, \lambda) = P_0 < wCC(R, \lambda)_{FOV} > T(R) \quad (6.1)$$

Donde: P_0 , es el valor de potencia del pulso incidente [J/s].

$wCC(R, \lambda)_{FOV}$, es el promedio de fotones retroesparcidos dentro del FOV (adimensional).

$T(R) = \exp[-2 \int_0^R \alpha_{t,\lambda}(x) dx]$, es el factor de Transmitancia (adimensional).

APÉNDICE 1

PROPIEDADES DE LA ATMOSFERA

Cuando se modelan datos de retorno de señal LIDAR es necesario conocer las propiedades del medio por donde pasa dicha señal. De modo que las propiedades de interés a monitorear son: presión, temperatura y la densidad atmosférica que a continuación se describirán en forma de promedios estimados en diferentes altitudes.

A.1.1 Perfiles verticales de temperatura, presión y densidad numérica.

La densidad numérica de moléculas de nitrógeno $N(h)$ a una altura (h) puede ser estimada dentro del modelo de estándares de condiciones atmosféricas dentro de los Estados Unidos de América propuestos en el año de 1976. Dicho modelo incluye variaciones de temperatura $T(h)$, en grados Kelvin; presión atmosférica $P(h)$, en pascales y altitudes (h), en metros. Considerando un gradiente de temperatura lineal $a=0.006545 \frac{^{\circ}K}{Km}$, temperatura inicial $T_0=288.15^{\circ}K$ y presión atmosférica inicial $P_0=1.013 \cdot 10^5 [Pa]$. En la Tabla A.I [36] se muestran los distintos parámetros distribuidos por intervalos de altura.

Densidad numérica $\frac{kg}{m^3}$	Temperatura K°	Presión Pa	Altura (h) km
$N(h_0)$ $= 0.003484 \frac{P(h_0)}{T(h_0)}$	$T(h_0) = T_0 - 0.006545 * h$	$P(h_0) = P_0 \left[\frac{288.15}{T(\Delta h_0)} \right]^{\frac{0.034164}{0.006545}}$	$0 \leq h_0 \leq 11$
$N(h_1)$ $= 0.003484 \frac{P(h_1)}{T(h_1)}$	$T(h_1) = 216.65$	$P(h_1) = 2.269 * 10^4 \exp \frac{-0.034164(h-11000)}{T(\Delta h_1)}$	$11 \leq h_1 \leq 20$
$N(h_2)$ $= 0.003484 \frac{P(h_2)}{T(h_2)}$	$T(h_2) = 216.65 + 0.0010[h - 20000]$	$P(h_2) = 5528 \left[\frac{216.65}{T(\Delta h_2)} \right]^{\frac{0.034164}{0.0010}}$	$20 \leq h_2 \leq 32$
$N(h_3)$ $= 0.003484 \frac{P(h_3)}{T(h_3)}$	$T(h_3) = 228.65 + 0.0028[h - 32000]$	$P(h_3) = 888.8 \left[\frac{228.65}{T(\Delta h_3)} \right]^{\frac{0.034164}{0.0028}}$	$32 \leq h_3 \leq 47$

Tabla A.I

Clasificación del modelo estadounidense de la densidad de moléculas, temperatura y presión atmosférica para una altura de 0 a 47 Km.

A.1.2 Propagación Laser en la atmósfera.

Los parámetros importantes que cuantifican la energía en un Laser pulsante son definidos a continuación [74]:

Flujo Radiante: denotado como "F" representa una cierta cantidad de energía radiante en un determinado espacio por unidad de tiempo (J/s , W).

Flujo Radiante Espectral: denotado como " F_λ " representa un flujo espectral acotado a cierta longitud de onda (W/ λ).

Densidad de Flujo Radiante: Cantidad de flujo radiante interceptada por una cierta unidad de área (W/ m^2), si el flujo es incidente hacia la superficie se conoce como irradiancia, si el flujo es radiado por la superficie se conoce como emitancia.

Ángulo Sólido: El ángulo sólido ω subtendido por un área sobre una superficie esférica, es igual al área de la circunferencia dividida entre su radio al cuadrado (stereoradianes) (A/ r^2).

Radiancia: Se define como el flujo radiante por unidad de ángulo sólido extendiéndose en una dirección dada por unidad de área proyectada (W/stereoradianes – m^2), la Figura A.1.1 [74], representa el concepto de Radiancia.

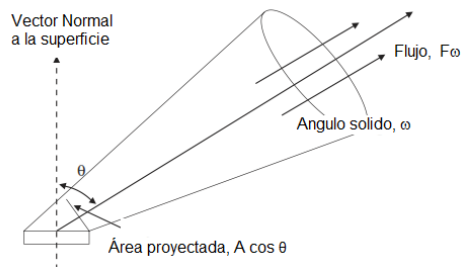


Figura A.1.1
Concepto visual de radiancia.

Cuando la luz es emitida a la atmósfera se presenta el fenómeno de esparcimiento de la luz, es decir, parte de ésta es esparcida en todas direcciones generándose una variación de intensidades según el ángulo de esparcimiento y los parámetros físicos de las partículas esparcidoras en el volumen dado, un fenómeno similar ocurre con la parte de la luz que incide sobre partículas absorbentes dentro del volumen, a diferencia del esparcimiento de luz , en procesos absorbentes si habrá un cambio de energía dentro de la partícula que absorbió luz [74]. En general la atenuación de radiación laser en la atmósfera

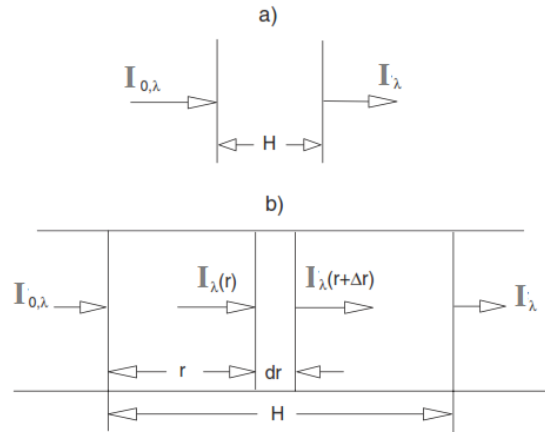


Figura A.1.2

- a) Propagación de la luz a través de una capa atmosférica turbia.
 b) Propagación de la luz a través de distintos espesores atmosféricos.

esta descrita por la Ley de Beer-Lambert [74][82-85]. La cual se analiza a partir de la siguiente Figura A.1.2 [74].

El rayo de luz $I_{0,\lambda}$ penetra una capa de longitud H atenuándose progresivamente hasta salir de la capa, identificado como I_{λ} al rayo de salida; se debe satisfacer $I_{\lambda} < I_{0,\lambda}$. La razón $I_{\lambda}/I_{0,\lambda}$ define la transparencia óptica T de la capa. Dicha transparencia describe la fracción del flujo radiante que atravesó dicha capa, entonces:

$$T = I_{\lambda} / I_{0,\lambda}, \quad (\text{A.1.2})$$

la ecuación (A.1.2) es una medida que indica que tan transparente es la capa atmosférica y está normalizada a un rango $[0 \ 1]$, este valor dependerá del número y tamaño de las partículas de esparcimiento o absorción. Analizando la Figura A.1.2 (b) como un medio heterogéneo se observa una diferencial de longitud dr donde se relaciona a su vez un factor probable $\alpha_{t,\lambda}$ de que un fotón sea removido al atravesar el elemento diferencial de longitud, ya sea por absorción o esparcimiento. Entonces la reducción del flujo de rayo al atravesar dr se puede definir como:

$$dI_{\lambda}(r) = -\alpha_{t,\lambda} I_{\lambda}(r) dr, \quad (\text{A.1.3})$$

donde $\alpha_{t,\lambda}$ se conoce como coeficiente de extinción.

Resolviendo ecuación (A.1.3):

$$I_{\lambda}(H) = I_{0,\lambda} \exp\left[-\int_0^H \alpha_{t,\lambda}(r) dr\right]. \quad (\text{A.1.4})$$

Entonces la transmitancia de una capa de espesor H queda definida como

$$T(H) = \frac{I_{\lambda}(H)}{I_{0,\lambda}} = \exp\left[-\int_0^H \alpha_{t,\lambda}(r) dr\right], \quad (\text{A.1.5})$$

tomando en cuenta el teorema del valor medio

$$T(H) = \frac{I_{\lambda}(r)}{I_{0,\lambda}} = \exp\left[-\frac{1}{H} \int_0^H \alpha_{t,\lambda}(r) dr\right] H. \quad (\text{A.1.6})$$

Y considerando una atmosfera homogénea entonces el factor probable de atenuación-esparcimiento se hace constante, entonces: $\alpha_{t,\lambda}(r) \rightarrow \alpha_t$. Note que si $r \rightarrow 1$ el coeficiente de extinción es numéricamente igual a la profundidad óptica. La transmitancia en una atmósfera homogénea entonces se puede definir de manera simple como

$$T(r) = \exp[-\alpha_t r], \quad (\text{A.1.7})$$

y en una sola dirección [74]

$$T(z) = \exp[-\alpha_t z]. \quad (\text{A.1.8})$$

El coeficiente de extinción está determinado, a su vez, por cuatro procesos individuales: absorción molecular (α_R), esparcimiento molecular (β_R), absorción por aerosoles (α_{MIE}) y esparcimiento por aerosoles (β_{MIE}) [83, 86-87]

$$\alpha_t(\lambda) = \alpha_R(\lambda) + \beta_R(\lambda) + \alpha_{MIE}(\lambda) + \beta_{MIE}(\lambda). \quad (\text{A.1.9})$$

La atmósfera permite la propagación de radiación en determinadas regiones específicas del espectro electromagnético. A estas regiones se les conoce como “ventanas atmosféricas” y toda radiación con longitudes de onda por fuera de este rango es atenuada drásticamente, ver Figura A.1.3 [88]. Programas científicos como LOWTRAN, MODTRAN, HITRAN por citar algunos; dichos programas evalúan la absorción basándose en el análisis de los parámetros atómicos de moléculas del gas atmosférico. Dentro de una ventana atmosférica la absorción se puede considerar despreciable y el coeficiente de extinción medido solo dependerá del coeficiente de esparcimiento [10,74, 82, 84 ,88]

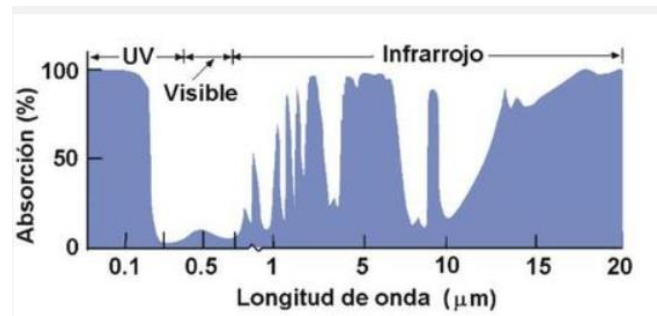


Figura A.1.3

Ventanas atmosféricas para longitudes de onda del ultravioleta, visible e infrarrojo.

Esto significa que en ciertas regiones específicas del espectro electromagnético la radiación se propagará a través de la atmósfera terrestre sin ser absorbida drásticamente. El caso desarrollado en este trabajo de tesis se centro en longitudes de onda de 532 nanómetros, la cual cae en una ventana atmosférica de acuerdo a lo mostrado en la Figura A.1.3. De esta forma el coeficiente de extinción dado en la ecuación (A.1.9) se reduce a [10]:

$$\alpha_t(\lambda) = \beta_R(\lambda) + \beta_{MIE}(\lambda). \quad (\text{A.1.10})$$

A.1.3 Esparcimiento atmosférico.

El esparcimiento atmosférico es un proceso mediante el cual pequeñas partículas suspendidas en la atmósfera hacen que una porción de radiación incidente se propague en cualquier dirección, este fenómeno representa una redistribución espacial de la radiancia, ver Figura A.1.4. Este esparcimiento depende de la longitud de onda de radiación incidente y del tamaño de las partículas (diámetro) presentes en la atmósfera. Por ejemplo, moléculas de aire cuyo diámetro es de varias unidades de Armstrong, producirán esparcimiento Rayleigh, mientras que los aerosoles, cuyo diámetro oscila hasta $100\mu\text{m}$, producirán esparcimiento Mie. Cuando las partículas son grandes tales como gotas de agua el proceso de dispersión es descrito por la teoría de difracción [10].

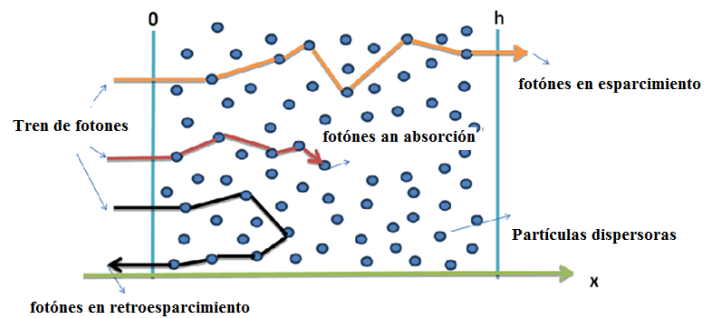


Figura A.1.4

Representación de fotones en esparcimiento o absorción, al paso de una atmósfera turbia

APÉNDICE 2

SEÑAL EXPERIMENTAL LIDAR EN MÚLTIPLE ESPARCIMIENTO.

(ONERA THE FRENCH AEROESPCE LAB)

Datos experimentales:

Azimuth(deg)=90.000
Elevation(deg)=90.000
Wavelength =355nm
Energy= 50mJ

Grafico:

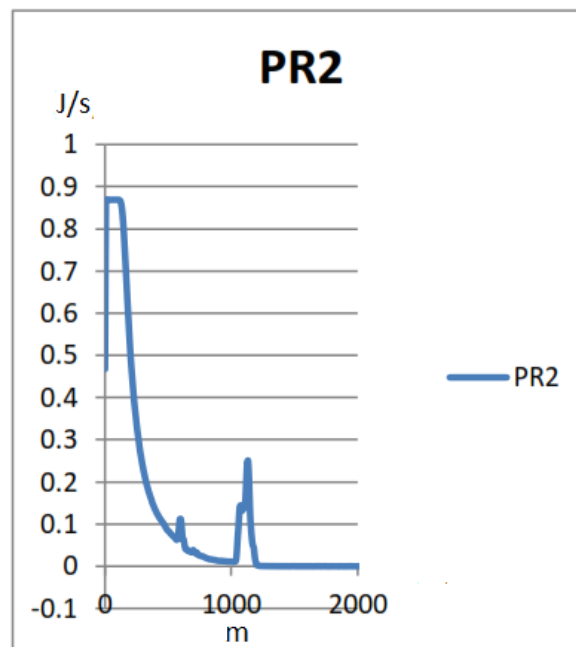


Figura A.2.1

Curva de un perfil experimental de una señal LIDAR de nube baja.

APÉNDICE 3

ALGORITMO PARA EL CÁLCULO DE LAS SECCIONES TRANSVERSALES DE ÁREA DE EXTINCIÓN, ESPARCIMIENTO Y ABSORCIÓN.

Clear["Global`*"]

Declaración de las funciones especiales esféricas de Bessel $\psi[n, z]$ y esféricas de Hankel $\zeta[n, z]$:

$\zeta[n, z] := z \text{SphericalHankelH2}[n, z];$

$\psi[n, z] := z \text{SphericalBesselJ}[n, z];$

Declaración de las derivadas de las funciones esféricas de Bessel y Hankel:

$D[\psi[n, x], x];$

$D[\zeta[n, x], x];$

Declaración del coeficiente de Mie a_n :

$$\begin{aligned} a_n[n, x, mrx] := & (-mrx^2 x \text{SphericalBesselJ}[n, mrx] (\text{SphericalBesselJ}[n, x] \\ & + x (-\frac{1}{2x} \text{SphericalBesselJ}[n, x] + \frac{1}{2} (\text{SphericalBesselJ}[-1 + n, x] \\ & - \text{SphericalBesselJ}[1 + n, x]))) \\ & + \frac{1}{mrx} x \text{SphericalBesselJ}[n, x] (mrx \text{SphericalBesselJ}[n, mrx] \\ & + mrx^2 x (-\frac{1}{2mrx} \text{SphericalBesselJ}[n, mrx] + \frac{1}{2} (\text{SphericalBesselJ}[-1 + n, mrx] \\ & - \text{SphericalBesselJ}[1 + n, mrx]))) / (\frac{1}{mrx} x (mrx \text{SphericalBesselJ}[n, mrx] \\ & + mrx^2 x (-\frac{1}{2mrx} \text{SphericalBesselJ}[n, mrx] + \frac{1}{2} (\text{SphericalBesselJ}[-1 + n, mrx] \\ & - \text{SphericalBesselJ}[1 + n, mrx]))) \text{SphericalHankelH2}[n, x] \\ & - mrx^2 x \text{SphericalBesselJ}[n, mrx] (\text{SphericalHankelH2}[n, x] \\ & + x (-\frac{1}{2x} \text{SphericalHankelH2}[n, x] + \frac{1}{2} (\text{SphericalHankelH2}[-1 + n, x] \\ & - \text{SphericalHankelH2}[1 + n, x]))) \end{aligned}$$

Declaración del coeficiente de Mie b_n :

Clear[x]

$$\begin{aligned}
bn[n, x, mr] := & (-mr x \text{SphericalBessel}[n, mr x] (\text{SphericalBessel}[n, x] \\
& + x (-\frac{1}{2x} \text{SphericalBessel}[n, x] + \frac{1}{2} (\text{SphericalBessel}[-1 + n, x] \\
& - \text{SphericalBessel}[1 + n, x]))) \\
& + x \text{SphericalBessel}[n, x] (mr \text{SphericalBessel}[n, mr x] \\
& + mr^2 x (-\text{SphericalBessel}[n, mr x] / (2mr x) + \frac{1}{2} (\text{SphericalBessel}[-1 + n, mr x] \\
& - \text{SphericalBessel}[1 + n, mr x]))) / (x (mr \text{SphericalBessel}[n, mr x] \\
& + mr^2 x (-\text{SphericalBessel}[n, mr x] / (2mr x) + \frac{1}{2} (\text{SphericalBessel}[-1 + n, mr x] \\
& - \text{SphericalBessel}[1 + n, mr x]))) \text{SphericalHankelH2}[n, x] \\
& - mr x \text{SphericalBessel}[n, mr x] (\text{SphericalHankelH2}[n, x] \\
& + x (-\frac{1}{2x} \text{SphericalHankelH2}[n, x] + \frac{1}{2} (\text{SphericalHankelH2}[-1 + n, x] \\
& - \text{SphericalHankelH2}[1 + n, x])))
\end{aligned}$$

Declaración de los parámetros físicos:

mr = 1.9996; (* índice de refracción relativo *)

NT = 5; (* número total de muestras en las sumatorias *)

a = 10 * 10⁻⁶; (* radio del dispersor, scattererradius *)

lambda = 355 * 10⁻⁹; (* longitud de onda incidente *)

ka = $\frac{2\pi}{\text{lambda}} * a$

x = ka; (* Factor de tamaño *)

Declaración de la función asociada a la sección de área transversal de esparcimiento:

$$\sigma_{\text{esp}}[NT, x, mr] := \sum_{n=1}^{NT} (2n + 1) (\text{Abs}[an[n, x, mr]]);$$

$$f11[NT, x, mr] := \left(\frac{2}{x^2}\right) \sigma_{\text{esp}}[NT, x, mr];$$

$$\sigma_{\text{esp}} = f11\left[5, \frac{4000\pi}{71}, 1.9996\right]$$

0.00306

Declaración de la función asociada a la sección de área transversal de extinción:

$$\sigma_{\text{ext}}[NT, x, mr] := \sum_{n=1}^{NT} (2n + 1) \text{Re}[an[n, x, mr] + bn[n, x, mr]];$$

$$f12[NT, x, mr] := \left(\frac{2}{x^2}\right) \sigma_{\text{ext}}[NT, x, mr]; \quad \sigma_{\text{ext}} = f12\left[5, \frac{4000\pi}{71}, 1.9996\right]$$

0.00306

Declaración de la función asociada a la sección de área transversal de absorción:

$$\sigma_{\text{abs}} = \sigma_{\text{ext}} - \sigma_{\text{esp}};$$

APÉNDICE 4

ALGORITMO PARA CALCULAR FOTONES EN ESPARCIMIENTO

Este programa simula el paso de partículas a través de una placa formada por un medio desordenado. Parámetros físicos (A continuación se declaran parámetros físicos del medio como el grosor "h" de la placa, el coeficiente de esparcimiento " σ_S " del medio, coeficiente de absorción " σ_C " del medio, coeficiente de extinción " σ ", así como las probabilidades de esparcimiento " σ_{SO} " y absorción " σ_{CO} ".)

```
Clear["Global`*"]
```

```
h = 100; (* Grosor de la placa *)
```

```
 $\sigma_S = 0.00306$ ; (* Coeficiente de esparcimiento *)
```

```
 $\sigma_C = 1.73 \times 10^{-18}$ ; (* Coeficiente de absorción *)
```

```
 $\sigma = \sigma_S + \sigma_C$  (* Coeficiente de extinción *)
```

```
 $\sigma_{SO} = \frac{\sigma_S}{\sigma}$  (* Probabilidad de esparcimiento *)
```

```
 $\sigma_{CO} = \frac{\sigma_C}{\sigma}$  (* Probabilidad de absorción *)
```

Parámetros del cómputo (A continuación se declaran "M" número de eventos de esparcimiento, "NP" número de trayectorias o fotones y la función de distribución Gaussiana que simula un pulso de fotones emitidos por una fuente LASER)

```
M = 100; (* eventos de dispersión *)
```

```
NP = 550000; (* Número de trayectorias o número de fotones iniciales *)
```

```
datos = Table[N[PDF[NormalDistribution[5000,25000], x]], {x, 3000000}]; (* Pulso de fotones *)
```

Cantidades pre-calculadas:

El k-ésimo (siguiente choque) peso o ponderación en esparcimiento del tren o pulso de fotones w_k y el número de fotones absorbidos en el k-ésimo evento (siguiente choque); son cantidades que se puede tener calculadas antes de correr el programa y usarlas cuando sea necesario dependiendo del destino del fotón.

```
wk = NestList[# $\sigma_{SO}$ &, 1, M]; (* Generación del Késimo peso en esparcimiento, hasta M veces *)
```

```
wkk = ListConvolve[{wk}, {datos}]; (*
```

```
Generación de la media Movil; datos de entrada en esparcimiento *)
```

```
wkkk = Abs[Flatten[wkk, 1]]; (* Generación del valor absoluto de datos de entrada *)
```

```
maxn = Max[wkkk]; (* Detección del dato maximo *)
```

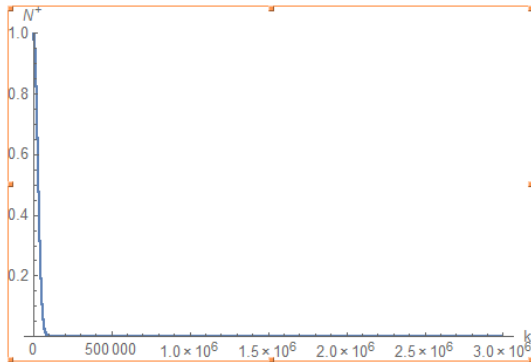
```
wCC = wkkk/maxn; (* Generación de la lista del K – esimo peso en esparcimiento *)
```

```
wC = wCC $\sigma_{CO}$ ; (* Generación de la lista del K – esimo peso atrapado dentro del medio *)
```

```
wCAcc = Accumulate[wC]; (* Generación normalizada de la lista del K – esimo peso en absorción *)
```

Perfil gráfico de la lista total del K-esimo peso en esparcimiento

ListPlot[wCC, Joined → False, PlotRange → {All, {0,1}}, AxesLabel → {k, N⁺}



Funciones para el programa

La función step, se usa para calcular el paso siguiente de la partícula, cuya posición inicial y posterior avance se establece en el eje radial r , la dirección de la trayectoria del fotón la establecen las componentes transversales de la onda \hat{e}_θ y $-\hat{e}_\phi$.

Definición de las funciones especiales, de la teoría MIE, que conforman las bases vectoriales de las componentes transversas.

Definición de las funciones especiales que utilizan las bases vectoriales del plano transverso.

$\zeta[n, z] := z \text{SphericalHankelH2}[n, z];$ (* Función esferica deHankel *)

$D[\zeta[n, x], x]$ (* Derivada de la función esferica de Hankel *)

$\text{SphericalHankelH2}[n, x] + x \left(-\frac{\text{SphericalHankelH2}[n, x]}{2x} + \frac{1}{2} (\text{SphericalHankelH2}[-1 + n, x] - \text{SphericalHankelH2}[1 + n, x]) \right)$

$\text{funpi}[n, m, \mu] := \frac{(-1)^m}{\sqrt{1-\mu^2}} \text{LegendreP}[n, m, \mu]$ (* Funcion de dependencia angular π_n *)

$\text{funtau}[n, m, \mu] := -((-1)^m ((-1 - n)\mu \text{LegendreP}[n, m, \mu] + (1 - m + n) \text{LegendreP}[1 + n, m, \mu]) \sqrt{1 - \mu^2}) / (-1 + \mu^2)$ (* Funcion de dependencia angular τ_n *)

Declaración de la función de avance (función step):

$m = 1.9996;$ (* indice de refracción *)

$\text{lambda} = 355 * 10^{-9};$ (* longitud de onda *)

$a = 10 * 10^{-6};$ (* radio de la partícula esparcidora *)

$ka = \frac{2\pi(1)}{\text{lambda}} * a$; (* número de onda *)

$x = ka$; (* Factor de tamaño *)

$n = 5$; (* número de muestras de la sumatoria de la función especial *)

```
step3D[rθψ_]:= With[{λ = RandomReal[ExponentialDistribution[σ]], λrad
= RandomReal[ExponentialDistribution[σ] * 10-3, μ = RandomReal[{-1,1}], ψ
= RandomReal[{0,2π}], If[rθψ [[1]] =
= 0, {rθψ [[1]] + λ, rθψ [[2]] , rθψ [[3]] }, {rθψ [[1]]
+ λRe[LegendreP[n, 1, μ]], rθψ [[2]] + Arg[funtau[n, 1, μ](SphericalHankelH2[n, x]
+ x(- $\frac{1}{2x}$  SphericalHankelH2[n, x] +  $\frac{1}{2}$ (SphericalHankelH2[-1 + n, x]
- SphericalHankelH2[1 + n, x])))]
- funpi[n, 1, μ](xSphericalHankelH2[n, x])  $\frac{\text{Cos}[\psi]\lambda\text{rad}}{x}$ , rθψ [[3]]
+ Arg[funpi[n, 1, μ](SphericalHankelH2[n, x] + x(- $\frac{1}{2x}$  SphericalHankelH2[n, x]
+  $\frac{1}{2}$ (SphericalHankelH2[-1 + n, x] - SphericalHankelH2[1 + n, x])))]
- funtau[n, 1, μ](xSphericalHankelH2[n, x])  $\frac{-\text{Sin}[\psi]\lambda\text{rad}}{x}$ }}]
```

Función para calcular N^0 para cada trayectoria

```
SelectwCAcc[trayectoria_]:= With[{l = Length[TakeWhile[Rest[trayectoria], (0 < # [[1]]
)&&(# [[1]] < h)&]], If[l == 0, l, wCAcc [[1]] ]]
```

Función para calcular N^+ para cada trayectoria

```
NTransmitido[trayectoria_] := Take[wCC, Position[Rest[trayectoria],_? ((#[[1]] > (h))&)]//
Flatten]
```

Función para calcular N^- para cada trayectoria

```
NReflejadoD[trayectoria_] := Take[wCC, Position[Rest[trayectoria],_? (((#[[1]] < 0))&)]//Flatten]
```

Programas

Cálculo de todas las trayectorias

El número con el que se prueba la condición para detener el ciclo es el último valor de x calculado. Por lo tanto definimos xTest como:

```
xTest = 1;
```

```
trayecrθψ = Table[NestWhileList[step3D[#]&, {0,0,0}, ((0 <= # [[1]] )&&(# [[1]] <
(h)))&, xTest, M], {i, NP}];
```

Probabilidad de absorción, transmisión y reflexión

Cálculo de la probabilidad de absorción. Se suman los N^0 de cada trayectoria y se divide el resultado entre el número de trayectorias

```
listaProbAbs = SelectwCAcc/@trayecrθψ;
```

$$PAbs = \frac{\text{Total}[listaProbAbs]}{NP}$$

1.744148914240584 × 10⁻¹⁶

Cálculo de la probabilidad de transmisión. Se suman los N^+ de cada trayectoria y se divide el resultado entre el número de trayectorias

```
listaProbTransmition = NTransmitido/@trayecrθψ;
```

$$PTrans = \frac{\text{Total}[listaProbTransmition//Flatten]}{NP}$$

0.8439079885054797

Cálculo de la probabilidad de reflexión. Se suman los N^- de cada trayectoria y se divide el resultado entre el número de trayectorias

```
listaProbReflection = NReflejadoD/@trayecrθψ;
```

$$PReflet = \frac{\text{Total}[listaProbReflection//Flatten]}{NP}$$

0.13669111124425146

Verificación de "conservación" de fotones

Note que $N^0 + N^+ + N^- = 1$:

```
(listaProbTransmition/. {} → {0}) + (listaProbReflection/. {} → {0}) + listaProbAbs;
```

Si sumamos la probabilidad de transmisión de reflexión y de absorción el resultado debe ser aproximado a 1:

```
PTrans + PReflet + PAbs
```

0.9805990997497314

Calculo de fotones retrodispersados, y que se direccionan dentro del campo de visión del detector.

(* Reestructuración de la lista total de las trayectorias del K – esimo peso *)

Trayectorias = List[trayecr $\theta\psi$]/Flatten;

(* Agrupamiento en grupos de tres números y multiplicados por un factor de transmitancia *)
angulostranversosfoto = Partition[Trayectorias, 3];

(* Declaración del ángulo de visión del telescopio a una distancia de 1065mts *)

$$\beta = \text{ArcTan}\left[\frac{0.1}{1065}\right];$$

(* Detección de fotones que estan dentro del campo de visión del detector FOV *)

CondicionRef = Position[angulostranversosfoto, _? ((#[[1]] < 0)&&((- β) < #[[2]] < (β))&)]//
Flatten;

(* Vinculación de las posiciones de cada dirección con las posiciones del K –
esimo peso de esparcimiento *)

fotondete = Flatten[Part[wCC, CondicionRef],1];

(* Cuantificación del total de los K – esimos pesos detectados dentro del FOV *)

Total[fotondete]

447.6936634214711

(* Amplificación por un factor de 3 al promedio del K – esimo peso de retroesparcimiento *)

Total[157 * fotondete]/NP

0.1277961911948563

(* Declaración del ángulo de visión del telescopio a una distancia de 1072.5mts *)

$$\beta 1 = \text{ArcTan}\left[\frac{0.1}{1072.5}\right];$$

angulostranversosfoto = Partition[Trayectorias, 3]/1.4;

CondicionRefle1 = Position[angulostranversosfoto, _? ((#[[1]] < 0)&&((- $\beta 1$) < #[[2]] < ($\beta 1$))&)]//Flatten;

fotondetec1 = Flatten[Part[wCC, CondicionRefle1],1];

Total[fotondetec1]

510.0762458588003

Total[157 * fotondetec1]/NP

0.14560358290878478

(* Declaración del ángulo de visión del telescopio a una distancia de 1080mts *)

$$\beta 2 = \text{ArcTan}\left[\frac{0.1}{1080}\right];$$

angulostranversosfoto = Partition[Trayectorias, 3]/1.25;

CondicionRefle2 = Position[angulostranversosfoto, _? ((#[[1]] < 0)&&((-β2) < #[[2]] < (β2))&)]//Flatten;

fotondetec2 = Flatten[Part[wCC, CondicionRefle2],1];

Total[fotondetec2]

473.4139379404846

Total[157 * fotondetec2]/NP

0.1351381604666474

(* Declaración del ángulo de visión del telescopio a una distancia de 1087.5mts *)

$$\beta 3 = \text{ArcTan}\left[\frac{0.1}{1087.5}\right];$$

angulostranversosfoto = Partition[Trayectorias, 3]/1.22;

CondicionRefle3 = Position[angulostranversosfoto, _? ((#[[1]] < 0)&&((-β3) < #[[2]] < (β3))&)]//Flatten;

fotondetec3 = Flatten[Part[wCC, CondicionRefle3],1];

Total[fotondetec3]

463.50227412443587

Total[157 * fotondetec3]/NP

0.13230883097733898

(* Declaración del ángulo de visión del telescopio a una distancia de 1095mts *)

$$\beta_4 = \text{ArcTan}\left[\frac{0.1}{1095}\right];$$

angulostranversosfoto = Partition[Trayectorias, 3]/1.35;

CondicionRefle4 = Position[angulostranversosfoto, _? ((#[[1]] < 0)&&((-β₄) < #[[2]] < (β₄))&)]//Flatten;

fotondetec4 = Flatten[Part[wCC, CondicionRefle4], 1];

Total[fotondetec4]

493.3302141935041

Total[157 * fotondetec4]/NP

0.14082335205160024

(* Declaración del ángulo de visión del telescopio a una distancia de 1102.5mts *)

$$\beta_5 = \text{ArcTan}\left[\frac{0.1}{1102.5}\right];$$

angulostranversosfoto = Partition[Trayectorias, 3]/1.4;

CondicionRefle5 = Position[angulostranversosfoto, _? ((#[[1]] < 0)&&((-β₅) < #[[2]] < (β₅))&)]//Flatten;

fotondetec5 = Flatten[Part[wCC, CondicionRefle5], 1];

Total[fotondetec5]

502.5347527257668

Total[157 * fotondetec5]/NP

0.14345082941444615

(* Declaración del ángulo de visión del telescopio a una distancia de 1110mts *)

$$\beta_6 = \text{ArcTan}\left[\frac{0.1}{1110}\right];$$

angulostranversosfoto = Partition[Trayectorias, 3]/1.7;

CondicionRefle6 = Position[angulostranversosfoto, _? ((#[[1]] < 0)&&((-β6) < #[[2]] < (β6))&)]//Flatten;

fotondetec6 = Flatten[Part[wCC, CondicionRefle6], 1];

Total[fotondetec6]

552.7685137090192

Total[157 * fotondetec6]/NP

0.15779028482239274

(* Declaración del ángulo de visión del telescopio a una distancia de 1117.5mts *)

$$\beta_7 = \text{ArcTan}\left[\frac{0.1}{1117.5}\right];$$

angulostranversosfoto = Partition[Trayectorias, 3]/2.5;

CondicionRefle7 = Position[angulostranversosfoto, _? ((#[[1]] < 0)&&((-β7) < #[[2]] < (β7))&)]//Flatten;

fotondetec7 = Flatten[Part[wCC, CondicionRefle7], 1];

Total[fotondetec7]

677.9956938565145

Total[157 * fotondetec7]/NP

0.1935369526099505

(* Declaración del ángulo de visión del telescopio a una distancia de 1125mts *)

$$\beta_8 = \text{ArcTan}\left[\frac{0.1}{1125}\right];$$

angulostranversosfoto = Partition[Trayectorias, 3]/4;

CondicionRefle8 = Position[angulostranversosfoto, _? ((#[[1]] < 0)&&((-β8) < #[[2]] < (β8))&)]//Flatten;

fotondetec8 = Flatten[Part[wCC, CondicionRefle8], 1];

Total[fotondetec8]

839.3643998044931

Total[157 * fotondetec8]/NP

0.23960038321691893

(* Declaración del ángulo de visión del telescopio a una distancia de 1132.5mts *)

$$\beta_9 = \text{ArcTan}\left[\frac{0.1}{1132.5}\right];$$

angulostranversosfoto = Partition[Trayectorias, 3]/4.5;

CondicionRefle9 = Position[angulostranversosfoto, _? ((#[[1]] < 0)&&((-β9) < #[[2]] < (β9))&)]//Flatten;

fotondetec9 = Flatten[Part[wCC, CondicionRefle9], 1];

Total[fotondetec9]

887.5711616127354

Total[157 * fotondetec9]/NP

0.25336122249672627

(* Declaración del ángulo de visión del telescopio a una distancia de 1140mts *)

$$\beta_{10} = \text{ArcTan}\left[\frac{0.1}{1140}\right];$$

angulostranversosfoto = Partition[Trayectorias, 3]/3;

CondicionRefle10 = Position[angulostranversosfoto, _? ((#[[1]] < 0)&&((-β₁₀) < #[[2]] < (β₁₀))&)]//Flatten;

fotondetec10 = Flatten[Part[wCC, CondicionRefle10], 1];

Total[fotondetec10]

731.1571209359325

Total[157 * fotondetec10]/NP

0.20871212361262073

(* Declaración del ángulo de visión del telescopio a una distancia de 1147.5mts *)

$$\beta_{11} = \text{ArcTan}\left[\frac{0.1}{1147.5}\right];$$

angulostranversosfoto = Partition[Trayectorias, 3];

CondicionRefle11 = Position[angulostranversosfoto, _? ((#[[1]] < 0)&&((-β₁₁) < #[[2]] < (β₁₁))&)]//Flatten;

fotondetec11 = Flatten[Part[wCC, CondicionRefle11], 1];

Total[fotondetec11]

396.05170849406835

Total[157 * fotondetec11]/NP

0.11305476042467043

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Ishimaru Akira. Wave Propagation and Scattering in Random Media SINGLE SACTTERING AND TRANSPORT THEORY VOL1. Ed Academic Press 1978.
- [2] Leung Tsang, Jin Au Kong, Kung-Hau Ding. Scattering of Electromagnetic Waves. Ed Jhon Wiley & Sons 2000.
- [3] M. Born and E. Wolf, Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light, Ed. Pergamon Press, 1970.
- [4] J. Cabrera, F. Agulló, F. López, Óptica Electromagnética II: Materiales y Aplicaciones, Ed. Addison-Wesley, 2000.
- [5] Amnon Yariv, Quantum Electronics, Ed. John Wiley & Sons Inc. 1989.
- [6] A. Sepúlveda, Notas de Electrodinámica Clásica, Universidad de Antioquia, Departamento de Física, 1986.
- [7] J. Jackson, Classical Electrodynamics, Ed. John Wiley & Sons Inc. 1962.
- [8] Stratton Julius Adams. ELECTROMAGNETIC THEORY. Ed Mc Graw Hill 1941.
- [9] R.T.H. COLLINS and P.B. RUSELL, Lidar Measurement of Particles and Gases by Elastic Backscattering and Differential Absorption 1976.
- [10] Nisperusa Toledo Daniel, Diseño y Construcción de un Sistema Óptico de Monitoreo Atmosférico aplicado a la Determinación de la capa límite Atmosférica en la Ciudad de Medellín, Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín, 2010.
- [11] Bohren Craig and Huffman Donald. Absorption and Scattering of Light by Small Particles. Ed Jhon Wiley & Sons 1983.
- [12] García-Cámara Braulio, ON LIGHT SCATTERING BY NANOPARTICLES WITH CONVENTIONAL AND NON-CONVENTIONAL OPTICAL PROPERTIES, PHD THESIS 2010 Universidad de Cantabria, Facultad de Ciencias.
- [13] Álvaro E. Bastidas, Construcción y montaje de un lidar elástico aplicado al estudio de partículas atmosféricas en suspensión y a la contaminación atmosférica en la región del Cauca, Tesis Doctoral 2004 Universidad del Valle.
- [14] Nisperusa Toledo Daniel, Propiedades Ópticas de los Aerosoles en la Región Andina Colombiana Mediante Análisis de Mediciones Remotas: LIDAR, Fotométricas y Satelitales, Tesis Doctoral 2015 Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín.

-
- [15] Zhang, Xubein., W. Zwieters, Francis., Le, Guilong.: Monte Carlo Experiments of the Detection of Trends in Extreme Values. *Journal of Climate*, Vol **17**, 1945-1952 (2004)
- [16] J, Zsemesova., M, Gera.: Uncertainty analysis for estimation of landfill methane emissions. *Contributions to Geophysics and Geodesy*, Vol **37/3** 247-261 (2007)
- [17] Waterson, I.G.: Calculation of probability density functions for temperatura and precipitation change undel global warming. *Journal of geophysical research*, Vol **13**, 1-13 (2008)
- [18] Beatrice B, Young., Bryan A, Tolson., Donald H, Burn.: Risk assessment of water supply system under climate variability: *a stochastic Approach*, *Can. J. Civ.* **38**, 252-262 (2011)
- [19] Dirk P. Kroese. Monte Carlo Methods, notes used in course Monte Carlo methods at Summer School of the Australian Mathematical Sciences Institute (AMSI), 2011
- [20] Robert S, Pindyck.: Fat Tails, Thin Tails, and Climate Change Policy. *Review of Environmental Economics and Plicy*, Vol **5**, No 2, 258-274 (2011)
- [21] T. Sreenuch., A. Alghassi., S. Perinpayanagam., Y. Xie.: Probabilistic Monte Carlo Method for Modelling and Prediction of Electronics Component Life. *International Journal of Advanced Computer Science and Aplications*, Vol **5**, No. 1 (2014)
- [22] Andrade, Thiago., Rodriguez, Heloisa., Bourguignon, Marcelo., Cordeiro, Gauss.: The Exponentiated Generalized Gumbel Distribution. *Revista Colombiana de Estadística*, Vol **38**, 123-143 (2015)
- [23] Luis M. Abadie., Elisa Sainz de Murieta., Ibon Lagarriaga.: Climate Risk Assessment under Uncertainty: An Application to Main European Coastal Cities. *Frontiers in Marine Science*, Vol **3**, article 265 (2016)
- [24] W. Fermín Guerrero S, C.I. Robledo S, G. Gaona B. Método Montecarlo en la Física Computacional, notas del curso de Métodos Numéricos, licenciatura en Física, Facultad de Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2017
- [25] Robert J. Webber., David A. Plotkin., Morgan E O'Neill.: Practical rare event sampling for exteme mesoscale wather. *Chaos* **29**, 053109 (2019)
- [26] Teng, D., He, X., Wang, J., Lv, G.: Uncertainty in gap filling and estimating the annual sum of carbon dioxide exchange fot the desert Tugai forest, Ebinur Lake Basin, Northwest China. *PeerJ* 8:e8530 DOI **10.7717/peerj.8530** (2020)
- [27] Lishamol, Tommy., Manju, Jose., Veena, G.: A review or recent generalizations of exponential distribution. *Biometrics & Biostatistics International Journal*, Vol **9**, issue 4 (2020)

-
- [28] Saowanit, Sukparungsee., Yupaporn, Areepong., Rattikarn, Taboran.: Exponentially weighted moving average-Moving average charts for monitoring the process mean. *PLOS ONE* **doi.org/10.1371/journal.pone.0228208** (2020)
- [29] Simões , Catarina., Silva Riveiro, Álvaro., do Céu Almeida, Maria.: Uncertainty evaluation related with the fitting of probability distributions to rainfall experimental data. *Measurement: sensors*, **18** 100284 (2021)
- [30] Nick Martin.: Watershed-Scale, Probabilistic Risk Assessment of Water Resources Impacts from Climate Change. *Water*, **13**, 40 (2021)
- [31] Xingpo, Liu., Chengfei, Xia., Yifan, Tang., Jiayang, Tu., Huimin Wuang.: Parameter optimization and uncertainty assessment for rainfall frequency modeling using an adaptive Metropolis-Hastings algorithm. *Water Sci Technol*, **83**, 1085-1102 (2021)
- [32] Fabrizio, Martelli., Federico, Tommasi., Angelo, Sassorili., Lorenzo, Fini., Stefano, Cavalieri.: Verification method of Monte Carlo codes for transport processes with arbitrary accuracy. *Scientific Reports*, **11**: 19486 (2021)
- [33] I. M. Sóbol. Método de Montecarlo, Segunda Edición. Editorial MIR, Moscú, 1983.
- [34] Gonzales Dan José R. Introducción al Factor Humano en el Análisis de Riesgo, Tesis Doctoral 2015 Universidad de Catalunya.
- [35] Zhensen, Wu., Yi, Yan., Lihong, Chen.: Monte Carlo Simulation for millimeter wave Propagation and Scattering in Rain Medium. *International Journal of Infrared and Millimeter Waves*, Vol. **13**, No. 7 (1992)
- [36] Bissonnette, L.R., Brusaglioni, P., Ismaelli, A., Zaccanti, G., Cohen, A., Benayahu, Y., Kleiman, M., Egert, S., Flesia, C., Schwendimann, P., Starkov, A.V., Noormohammadian, M., Oppel, U.G., Winker, D.M., Zege, E.P., Katsev, I.L., Polonsky, I.N.: LIDAR multiple Scattering from clouds. *Appl. Phys. B* **60**, 355-362 (1995)
- [37] Toubanc Dominique, Henyey Greenstein and Mie phase functions in Monte Carlo radiative transfer computations , *Applied Optics*. **35(18)**, 3272-3274 (1996)
- [38] Liaparinos, P.F.: Light Wavelength effects in submicrometer phosphor materials using Mie Scattering and Monte Carlo simulation. *Med. Phys.* **40(10)** October 2013
- [39] Yuzaho, Ma., Werong, Liu., Yafeng, Cui., Xinglong, Xiong.: Multiple-scattering effects of atmosphere aerosol on light-transmission measurements. *Opt. Rev.* **24**, 590-599 (2017)
- [40] Torres Garcia Eugenio, Oros-Pantoja Rigoberto, Aranda-Lara Liliana, Vieyra-Reyes Patricia.: A new Monte Carlo code for light transport in biological tissue. *Med. Biol. Eng. Comput.* 645-655 (2017)
- [41] Pielsticker Lucas, Schögl Robert, Greiner Mark.: Montecarlo calculations for simulating electron scattering in gas phase. *Max-Planck Institute of Chemical Energy Conversion*, Stiftstrasse 34-36, 45470, Mülheim an der Ruhr, Germany (2021)

-
- [42] Boyer, James., Mourant, Judith R., Bigio, Irving J. :Monte Carlo investigations of elastic scattering spectroscopy applied to latex spheres used as tissue phantoms. *Biomedical Optics*, ' **95** (1995)
- [43] Mourant, Judith R., Boyer, James., Hielscher, Andreas H., Bigio, Irving J.: Influence of the scattering phase function of light transport measurements in turbid media performed with small source-detector separations. *OPTICS LETTERS*, Vol **21**, No 7 (1996)
- [44] Boucher, Oliver.: On Aerosol Direct Shortwave Forcing and the Henyey-Greenstein Phase Function, *JOURNAL OF THE ATMOSPHERIC SCIENCES*, Vol **55** (1997)
- [45] Matthew R, Jones., Yukio, Yamada.: Determination of the Asymmetry Parameter and Scattering Coefficient of Turbid Media from Spatially Resolved Reflectance Measurements. *OPTICAL REVIEW*, Vol **5**, No 2 (1998)
- [46] Hammer, Martin., Yaroslavsky, Anna N., Schweitzer, Dietrich.: A scattering phase function for blood with physiological haematocrit, *Phys. Med. Biol.* **46** (2001)
- [47] Yongji, Fu., Steven L, Jacques.: Monte Carlo simulation study on phase function. Optical interactions with Tissue and Cells, Vol **6084** (2006)
- [48] T Bizoni., T S Leung., A H Gandjbakhche., D Rufenacht., D T Delpy.: The use of the Henyey_Greenstein function in Monte Carlo simulations in biomedical optics. *Physics in Medicine & Biology*, Vol 51, No **17** (2006)
- [49] L Bai., Z S Wu., H Y Li., T Li.: SCALAR RADIATIVE TRANSFER IN DISCRETE MEDIA WITH RANDOM ORIENTED PROLATE SPHERIODS PARTICLES, *Progress In Electromagnetics Research*, Vol **33**, 21-44 (2011)
- [50] Colombi, Joshua., Loudec, Karim.: Monte Carlo simulation of light scattering in the atmosphere and effect of atmospheric aerosols on the point spread function. [dx.doi.org/10.1364/XX.99.099999](https://doi.org/10.1364/XX.99.099999) (2013)
- [51] Foschum, Floiran., Kienle.: Optimized goniometer for determination of the scattering phase function of suspended particles: simulation and measurements. *Journal of Biomedical Optics*, **18** (8) (2013)
- [52] A. N. Rapsomanikis., A. Eleftheriou., M. Mikeli., Ch. Pafilis., M. Zioga., E. Stiliaris.: A Monte Carlo simulator dedicated to a time-resolved optical tomographic modality based on the Henyey phase function. *IEEE Nuclear Sciences* 16356874 (2015)
- [52] Milanic , Matija., Majaron, Boris.: Influence of the scattering phase function in numerical modeling of hyperspectral imaging. *Proceedings of the SPIE*, Vol **9706**, 97060Z (2016)
- [53] Feng Zhang., Jiangnan Li.: A note on double Henyey-Greenstein phase function. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer* **184**, 40-43 (2016)
- [55] Robert A. Stiliwell.: Monte Carlo method for the analysis of laser safety for a high-powered lidar system under different atmospheric conditions. *Journal of Laser Applications*, **29**, 022002 (2017)

-
- [56] Min Bu1., Yawei Wuang1.: Numerical Calculation and Analysis of Mie Scattering Phase Function of Nucleated Cells. *Chinesse Journal of Lasers*, Vol 44,issue 8, 807003 (2017)
- [57] Simon Kallweit., Thomas Müller., Brian Mcwilliams., Markus Gross, Jan Novak.: Deep Scattering: Rendering Atmospheric Coluds with Radiance-Predicting Neural Networks. *ACM Transactions on Graphics*, Vol **37**, No. 4, 231 (2017)
- [58] Guillem Carles., Paul Zammit., Andrew R. Harvey.: Holistic Monte Carlo optical modeling of biological imaging. *SCIENTIFIC REPORTS*, **9**, 15832 (2019)
- [59] Jianing Zhang.: ON SAMPLING OF SCATTERING PHASE FUNCTIONS. *Physics.comp-ph* (2019)
- [60] Lamine Aszkoura, Mohamed., Vaudelle, Fabrice., L’Huillier, Jean Pierre.: Multispectral measurement of scattering angular-light distribution in apple skin and flesh samples. *HAL*, hal-**02333709** (2019)
- [61] Vaudelle, Fabrice., L’Huillier, Jean Pierre., Lamine Aszkoura, Mohamed.: Light source distribution and scattering phase function influence light transport in diffuse multi-layered media. *HAL*, hal-**02333763** (2019)
- [62] Chen Peng., Zhao Jigunag., Du Xiaoping., Song Yishuo.: Approximate scattering phase function fitting method based on particle swarm optimization. *Infrared and Laser Engineering*, Vol **48** No.12 (2019)
- [63] Zhouyi Liao., Mengying Li., Carlos F. M. Coingra.: Anisotropic corrections for the downwelling radiative heat transfer flux from various types of aerosols. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **136**, 1006-1016 (2019)
- [64] Pei Qinqi, Lee Tungyang, Pang Liaojun.: The Role of Anisotropy Ratio in Backscattering of Spherically Anisotropic Particles: An Analytical Electromagnetic Characterization, *J Infrared Milli Therahz Waves*. **31**, 1091-1099 (2010)
- [65] Hayt William H, Jr., Buck Jhon A. Teoría electromagnética, séptima edición. Ed Mc Graw Hill 2006.
- [66] Badrinath Roysan, Andrew R. Cohen, P.H. Getto, Peter R. Boyce, A Numerical Approach to the Computation of Light Propagation through Turbid Media: Application to the Evaluation of Lighted Exit Signs, *IEEE Transactionson industry applications*, 29 (1993) 3.
- [67] E Reynoso Lara, J Davila Pintle, Y Elinor Garcia, Numerical results of Monte Carlo code in Lidar returns considering polarization of light and different phase functions. *Opt. Pura Apl*. **47** (3) 177-181 (2014).
- [68] Barker, H.W., J.-J. Morcrette and G.D. Alexander . Broadband solar fluxes and heating rates for atmospheres with 3D broken clouds. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **124**, 1245-1271 (1998).
- [69] Cahalan, R.F., W. Ridgway, W.J. Wiscombe, S. Gollmer and Harshvardhan. Independent pixel and Monte Carlo estimates of stratocumulus albedo. *J. Atmos. Sci.*, **51**, 3776-3790 (1994).

-
- [70] Davies, R. The effect of finite geometry on the three-dimensional transfer of solar irradiance in clouds. *J. Atmos. Sci.*, **35**, 1712-1725 (1974).
- [71] McKee, T.B., and S.K. Cox. Scattering of visible radiation by finite clouds. *J. Atmos. Sci.*, **31**, 1885-1892 (1974).
- [72] O' Brien, D.M. Accelerated quasi-Monte Carlo integration of the radiative transfer equation. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, **48**, 41-59 (1992).
- [73] Marchuk, G., G. Mikhailov, M. Nazaraliev, R. Darbinjan, B. Kargin and B. Elepov. *The Monte Carlo Methods in Atmospheric Optics*. 208 pp., Springer-Verlag, New-York (NY).
- [74] Vladimir A Kovalev, William E Eichinger. *Elastic Lidar Theory, Practice, and Analysis Methods*. Ed A Jhon Wiley & Sons, Inc. 2004.
- [75] F. Fabregat-Santiago, N.S.Fierrols, G. Garcia-Belmonte, J. Bisquert e I. Morell, Estudio de los diferentes estados energéticos del agua del suelo en función de los fenómenos de relajación dieléctrica. *Estudios de la Zona No Saturada del Suelo*. Eds. R. Muñoz-Carpena, A. Ritter, C. Tascón. ICIA: Tenerife. 1999 ISBN 84-699-1258-5
- [76] Vaxasoftware, "Tablas de propiedades Físicas",
https://www.vaxasoftware.com/doc_edu/fis/inrefraccion.pdf
- [77] Perez Gracia María de la Vega, Radar de subsuelo *Evaluación para aplicaciones en arqueología y en patrimonio histórico-artístico*. ISBN: 846996884X (Tesis Doctoral) pag.206.
- [78] Takashi Y. Nakajima, Kentaroh Suzuki, Graeme L. Stephens, Droplet Growth in Warm Water Clouds Observed by the A-Train. Part I: Sensitivity Analysis of the MODIS-Derived Cloud Droplet Sizes, *Journal of the Atmospheric Sciences*, **67** (2009)
- [79] Claus Weitkamp, Lidar Range-Resolved Optical Remote Sensing of the Atmosphere. Ed Springer Science in Optical Science 2005.
- [80] Yellapragada Bhavani Kumar, Portable lidar systems for atmospheric boundary layer measurements, *Optical Engineering*. **45**(7) (2006).
- [81] Landulfo E., Matos C.A., Torres A.S., Sawuamura P., Uehara S.T. Air quality assessment using a multi-instrument approach and air quality indexing in a urban area. *Atmospheric Research* **85**, 98-111 (2007).
- [82] E.d. Hinkley, Laser monitoring of the atmosphere. , Ed. Springer-Verleg Berling Heidelberg New York 1976.
- [83] Measures Raymond M. , Laser Remote Sensing Fundamentals and Applications, Jhon Wiley & Sons, Inc. USA 1984.

[84] Francesc Rocadenbosch, LIDAR Sensing of the Atmosphere: Receiver Design and Inversion Algorithms for an Elastic System, Doctor-Engineer Thesis, Universidad Politécnic de Cataluña, 1996.

[85] Chin Lin, Marcia Baker, Robert J. Charlson, Absortion Coefficient of Atmospheric Aerosol: A Method for Measurement, Applied Optics, Vol 12 No.6, 1973.

[86] H.C. Van de Hulst, Light Scattering by Small Particles., Ed. Dover Publications Inc. 1981.

[87] Mantilla Elena, Determinación de las Propiedades de Absorción de los Aerosoles Atmosfericos: Aplicación en la zona Sub-Ártica de Noruega, Tesis Doctoral, Universidad de Valladolid, 2010.

[88] <https://meteolab.fis.ucm.es/clima/efecto-invernadero>.

3d Monte Carlo analysis on photons step through turbid medium by Mie scattering

E. E. Pérez Mayesffer

*Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla,
Av. San Claudio s/n Col. San Manuel 72570 Puebla Puebla.
e-mail: emayesffer@gmail.com*

E. Reynoso Lara

*Facultad de Ciencias de la Electrónica, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla,
Av. San Claudio s/n Col. San Manuel 72570 Puebla Puebla.*

W. F. Guerrero Sánchez

*Facultad de Ciencias Físico Matemáticas Benemérita Universidad Autónoma de Puebla,
Av. San Claudio s/n Col. San Manuel 72570 Puebla Puebla.*

G. Rodríguez Zurita QPD

*Facultad de Ciencias Físico Matemáticas Benemérita Universidad Autónoma de Puebla,
Av. San Claudio s/n Col. San Manuel 72570 Puebla Puebla.*

J. Dávila Pintle

*Facultad de Ciencias de la Electrónica, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla,
Av. San Claudio s/n Col. San Manuel 72570 Puebla Puebla.*

Y. E. Bravo-García

*Facultad de Ciencias de la Electrónica, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla,
Av. San Claudio s/n Col. San Manuel 72570 Puebla Puebla.*

Received 8 September 2020; accepted 1 December 2020

Photon scattering profiles in a turbid media were investigated through numerical simulation based on the Monte Carlo-Mie method at this present work, using Wolfram Mathematics in the program algorithm. Photon scattering was treated using electromagnetic spherical harmonics waves in three-dimensional scattering. The proposal, as an alternative to the Henyey-Greenstein phase approximation, was defining a unit vector that represents a phase distribution, as an equivalent function with three vector components, within the turbid media. Associating the step component, as projection using Legendre polynomials and for the transverse plane components were defining as vector bases in terms of Legendre-Hankel functions, according to Gustav Mie's theory. This composite vector was defined as a step function and was evaluated within the Monte Carlo algorithm, obtaining simulations of light scattering. Backscatter profiles were compared for different geometric dimensions of the spherical particles within the turbid media, including validation of the model with an experimental Lidar signal from low clouds, obtaining physical properties of the turbid media by the proposed theoretical model.

Keywords: Photon scattering; turbid media; Monte Carlo-Mie method; spherical harmonics.

PACS: 02.05.Ng; 42.25.Fx; 42.68.Mj

DOI: <https://doi.org/10.31349/RevMexFis.67.292>

1. Introduction

A scientist community that involves in scattering light studies, today they offer to present many scattering light models, increasingly developed in order to obtain and identify, through the study of properties, some different atmospheric elements of our planet and outer space. This is an important contribution of these scattering light models about climate change and environmental sustainability to the planet. Nowadays in Mexico, there are not many registers of scattering light works by research groups; that is why this work presents the development and testing of one combined Monte Carlo-

Mie model, being careful with the focus on special functions of scatterer unit vector from the proposed work. This work was successful thanks to the actual current computer tools.

Some works reported by researchers as L.R. Bissonnette, *et al.*, Wu Zhensen *et al.*, P. F. Liaparinos, and Yuzaho Ma *et al.* use within their modeling an approximate simplified phase function called the Henyey-Greenstein function. It is applied to scatterer particles with spherical symmetry, [1-4]. In this work, the authors have developed a physical model in one simplified algorithm considering a completely analytical dominium and testings to get theoretical results according to spherical harmonics and Lidar theory.

2. Development of the Monte Carlo Mie model

This section is a review of spherical harmonics for scattered waves. Emphasis was being placed on handling special functions that make up the electromagnetic fields with spherical symmetry.

In the second part, the principal concepts are analyzed about handling the statistic-numerical Monte Carlo method. Finally, the purpose of fuse both of them in one combined model is exposed.

2.1. Amplitude of scattering waves

The outer/inner relation of the electromagnetic fields, from the interaction of electromagnetic radiation with a spherical scatterer of radius a , is defined as

$$(\mathbf{E}_{in} + \mathbf{E}_{sc} - \mathbf{E}_i) \times \hat{e}_r = (\mathbf{H}_{in} + \mathbf{H}_{sc} - \mathbf{H}_i) \times \hat{e}_r = 0, \quad (1)$$

Defining as: \mathbf{E}_{in} incident electric field, \mathbf{H}_{in} incident magnetic field, \mathbf{E}_i inner electric field, \mathbf{H}_i inner magnetic field, \mathbf{E}_{sc} scattering electric field, and \mathbf{H}_{sc} scattering magnetic field. These fields were proposed by Mie [5]. For this work the most important fields are the scattered fields, these are written as Hankel special functions, which convergence at infinity.

A set of equations resulting from boundary conditions of Eq. (1), solving these equations for the scattered fields and finish getting the Mie Coefficients (a_n, b_n), which are related with the amplitude of scattering waves as:

$$a_n = \frac{m\psi_n(mx)\psi'_n(x) - \psi_n(x)\psi'_n(mx)}{m\psi_n(mx)\xi_{n'}(x) - \xi_n(x)\psi'_n(mx)}, \quad (2)$$

$$b_n = \frac{\psi_n(mx)\psi'_n(x) - m\psi_n(x)\psi'_n(mx)}{\psi_n(mx)\xi_{n'}(x) - m\xi_n(x)\psi'_n(mx)}. \quad (3)$$

As Mie's theory establishes, the scattering electric field can be possible to define by two orthogonal vector components ($E_{sc_\theta}, E_{sc_\phi}$) to produce a transverse plane, which is perpendicular to the scattering direction. From the definition of scalar scattering electric field, it is obtained [5]

$$E_{sc_\theta} = E_{sc_\theta} + E_{sc_\phi} \quad (4)$$

and

$$E_{sc_\theta} = \frac{\cos \phi}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} E_n (ia_n \xi_n' \tau_n - b_n \xi_n \pi_n), \quad (5)$$

$$E_{sc_\phi} = \frac{\cos \phi}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} E_n (b_n \xi_n \tau_n - ia_n \xi_n' \pi_n) \cdot \Delta \quad (6)$$

Noting that $\rho = kr$, k is the wavenumber and r is the distance of the scattering wave from the scatterer.

Applying the optical theorem that defines one transversal section of extinction (σ) as the relation between the extinct total energy W_{total} (sum of absorption and scattering energies) and the incident irradiance [5]. It is possible to get one

transversal scattering section as,

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \mathbf{Re}\{S(0^0)\} = \frac{2\pi}{k^2} \times \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \mathbf{Re}(a_n + b_n) \right\}, \quad (7)$$

normalizing Eq. (7) to one geometric area, then

$$\frac{\sigma}{\pi(a)^2} = \frac{2}{(ka)^2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \mathbf{Re}(a_n + b_n) \right\}. \quad (8)$$

To get the scattering transversal section σ_s , it is necessarily integrated the total scattering power over a solid angle 4π , as [6]

$$\sigma_s = \frac{2\pi}{k^2} \int_0^\pi \sin \theta d\theta (|S_1(\theta)|^2 + |S_2(\theta)|^2), \quad (9)$$

normalizing Eq. (9) with one geometric area, then

$$\frac{\sigma_s}{\pi(a)^2} = \frac{2}{(ka)^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (|a_n|^2 + |b_n|^2) \quad (10)$$

Finally, by energy conservation, it is possible to get,

$$\sigma = \sigma_s + \sigma_c. \quad (11)$$

In other words, the transversal section of extinction from one scatterer particle, it is conforming by the sum of the transversal section of scattering σ_s and the transversal section of absorption σ_c .

The volumetric coefficient of extinction in the turbid media is defined by,

$$\beta = N(z)\sigma, \quad (12)$$

Noting that, $N(z)$ is the normalized concentration of particles, from turbid media, in one illuminated unit volume by one incident pulse of light.

2.2. Monte Carlo Method

One synthesized explanation of the terms involved in the simulation in relation to a distribution of particles inside of turbid medium, by Monte Carlo then is given.

Suppose a representation of one turbid medium with a hypothetical homogeneous thick h ($0 < x < h$) and walls of infinite areas where ω_k photons from a gaussian pulse of energy are impacted.

Considering Eqs. (8), (10) and (11), there is the probability (σ_s/σ), that an average of photons is in scattering process and the weightening them being defined by [7],

$$\omega_k(\sigma_s/\sigma), \quad (13)$$

there is also the probability (σ_c/σ) that an average of photons is in absorption process and the weightening them being defined by,

$$\omega_k(\sigma_c/\sigma). \quad (14)$$

The free path (λ), between the present and the next photon train scattering event, is proposed with an exponential distribution density (γ), and is defined by the equation,

$$\lambda = -\frac{1}{\sigma} \ln(\gamma). \tag{15}$$

Calculating the abscissa at the next collision point, results

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k \mu_k, \tag{16}$$

with $\mu_k = \cos \theta$. It represents the new direction of the rest of the train, once it has already collided.

2.3. Monte Carlo-Mie model

Noting explanation from Secs. 2.1 and 2.2. Based on those observations, the following is proposed:

- 1.- Associate vector bases of the Mie model with the step function of the classic Monte Carlo model (Eq. (16)), generating a new unit vector of spatial advance and projected as spherical harmonics. Where the radial component has been projected from one polar axis, inside of turbid media, in this case it is not used the projection function $\mu_k = \cos \theta$. Instead can be proposed one spherical harmonic function as Legendre spatial functions, choosing one order $m = 1$ to ensure azimuthal symmetry [5,8] as

$$\mu_{k1} = P_n^1(\cos \theta_k). \tag{17}$$

Now for the second and third components from unit vector, they are proposed as vector components from Mie scattering electric field: parallel component $E_{\parallel s}[\mathbf{N}_{P1n}^{(3)}]$ and perpendicular component $E_{\perp s}[\mathbf{M}_{I1n}^{(3)}]$.

Where the parallel component $E_{\parallel s}$ is linked with the unit vector \hat{e}_θ , taking the scalar component as

$$\mu_{k2} = \{i\tau\xi'_n - \pi_n\xi_n\} \frac{\cos \psi}{\rho}, \tag{18}$$

the perpendicular component $E_{\perp s}$ is linked with \hat{e}_φ , taking the scalar component as

$$\mu_{k3} = \{i\pi_n\xi'_n - \tau_n\xi_n\} \frac{\sin \psi}{\rho}. \tag{19}$$

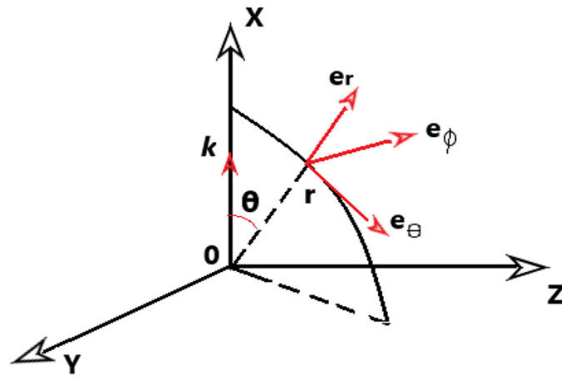


FIGURE 1. Reference system of \mathbf{r} vector to \mathbf{k} vector, expanding in spherical harmonics.

The complete expression of one unit vector, expanded on spherical harmonics, is

$$v = \hat{e}_r r_{k+1} + \hat{e}_\theta \theta_{k+1} + \hat{e}_\varphi \varphi_{k+1} = \hat{e}_r (r_k + \lambda_k \mu_{k1}) + \hat{e}_\theta (\theta_k + \lambda_{krad} \mu_{k2}) + \hat{e}_\varphi (\psi_k + \lambda_{krad} \mu_{k3}). \tag{20}$$

With the distribution function of free path between different scattering events, inside the medium, as

$$\lambda_k = -\frac{1}{\sigma_k} \ln(\gamma). \tag{21}$$

And the distribution function of free angular directions, as

$$\lambda_{krad} = -\frac{1}{\sigma_{krad}} \ln(\gamma_{rad}). \tag{22}$$

One graphic representation in the space, is shown in the Fig. 1.

The vector proposed at Eq. (20) is similar to the proposed by Badrinath *et al.*, [9]. The difference in this work was that the authors have proposed a projection in spherical harmonics.

- 2.- The amplitudes of scattering waves, associated to Mie coefficients (Eqs. (2) and (3)) are linked to the scattering and absorption probabilities inside turbid media.
- 3.- The incident theoretical light pulse proposed must have a gaussian shape to be closer a real light pulse.

3. Algorithm flow chart

Algorithm flow chart is composed by three blocks, which are:

Block 1. It is declared: turbid medium thickness, the coefficients of: scattering, absorption and extinction; the probabilities of: scattering, absorption and extinction; the numbers of: scattering events and photons.

This block generate:

- a) The probability distribution function, is the list of values resulting from convolution between the probability of total energy and the gaussian probability function of the incident pulse.
- b) The position photonic function, that identifies the position of photons train, while it goes through the turbid medium. The position photonic function chooses the average probability photon values from the scattering profile distribution list $[wCC(R, \lambda)]$ generated, according to the position photon train.
- c) The scattering photonic function, that identifies the photons train leaving the turbid medium in the forward direction. The scattering photonic function chooses the average probability photon values from the scattering profile distribution list $[wCC(R, \lambda)]$ generated, according to the scattering position photon train.

- d) The backscattering photonic function, that identifies the photons train leaving the turbid medium in the backward direction. The backscattering photonic function chooses the average probability photon values from the scattering profile distribution list $[wCC(R, \lambda)]$ generated, according to the backscattering position photon train.
- e) A 3D step function v , which it is composed by: λ_k value, it means a exponential distribution function of free paths between scattering events, λ_{krad} value, it means a exponential distribution function of free directions between scattering events, μ value, it means all random data with polar angles, ψ value, it means all random data in relation to azimuthal angles.

Block 2. Execution of photon step function, which is defined as a state vector:

$$v = \begin{cases} \{(\lambda_k, \theta_k, \varphi_k)\}, & \text{if } \mu_{k1} = 1, \psi = 0 \\ \{Re[(r_k + \lambda_k \mu_{k1})], \{Arg[(\theta_k + \lambda_{krad} \mu_{k2})], Arg[(\psi_k + \lambda_{krad} \mu_{k3})]\}, & \text{if } \mu_{k1} \neq 1, \psi \neq 0 \end{cases} \quad (23)$$

This block generate a list of all random trajectories in function of the number of scattering events and the photons number declared [7,10]. It results in a list of three elements; first for position and two for directions (θ_k, ψ_k) . From the list $[wCC(R, \lambda)]$ generated, can be obtain another new list $[wCC(R, \lambda)_{FOV}]$ that includes the average probability photon values that are trapped inside the Field Of View (FOV) of a virtual photodetector, located at $(-R, 0, 0)$ position, as is shown in Fig. 2.

The list $wCC(R, \lambda)_{FOV}$ is the photon backscattering average probability located within the field of view of the telescope (FOV) whose value variation depends on the wavelength and also depends of the convergent exponential distribution function.

The algorithm of photon step through turbid media is shown in Fig. 3,

Block 3. Photons are counted and averaged in the photodetector. Besides they are shown in the screen editor as position profiles graphic.

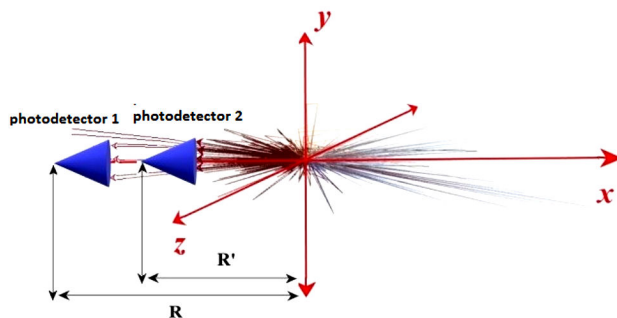


FIGURE 2. Backscattering detection at $(-R, 0, 0)$ direction.

The calculus of the average probability photon values inside the photodetector was possible because of the complex vector components definition of the transverse plane, that is generated by the photon step function. The complex definition of parallel component, is

$$\frac{\cos \phi}{\rho} \{i\tau_n \xi'_n + \pi_n \xi_n\} \hat{e}_\theta, \quad (24)$$

and perpendicular component, is

$$\frac{\sin \phi}{\rho} \{i\pi_n \xi'_n + \tau_n \xi_n\} \hat{e}_\varphi. \quad (25)$$

As a result of this, the authors propose associate a couple of orthogonal semicomplex planes, and from that it could be possible to get measures of angular values in relation to the polar and azimuthal directions, at the moment of photons backscattering. The average probability photon values caught is depending of a solid angle from photodetector (FOV), which has semiangle of

$$\beta = \tan^{-1} \frac{y}{R}. \quad (26)$$

Equation (26) has a direct relation with the photodetector light acceptance cone (aperture of telescope). The numerator y , represent one aperture radius of telescope and the denominator R , represent the distance of photodetector to the turbid medium border. Another perspective is shown in the Fig. 4.

4. Results of simulations

It is made simulations, considering a turbid media not absorbent, with the following parameters: an incident light

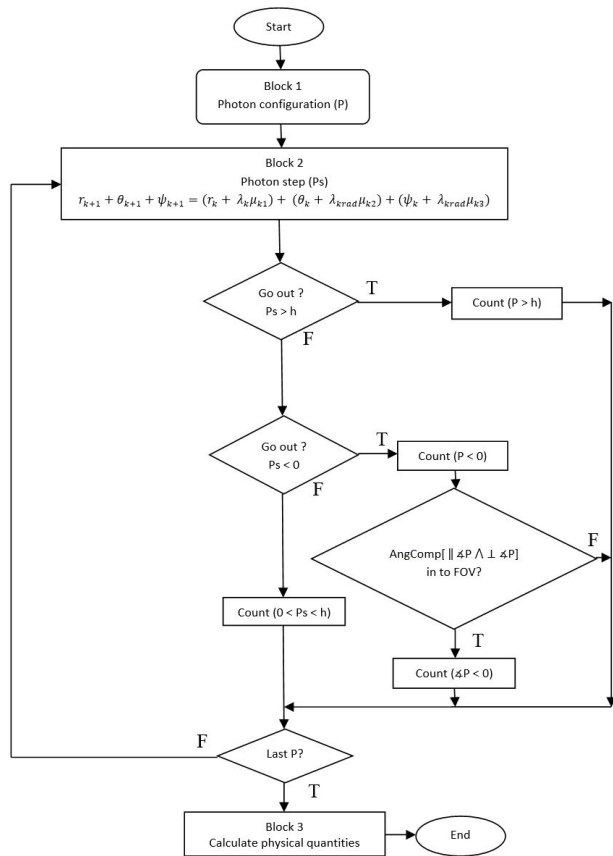


FIGURE 3. Flow chart.

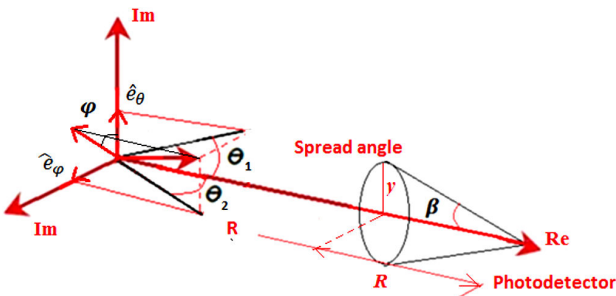


FIGURE 4. Backscattering inside of field of view (FOV).

pulse composed by population of 5.5×10^5 photons, 100 scattering events, 532 nm of wavelength, $h = 2$ m thickness of turbid media, $r = 8.65 \mu\text{m}$, $r = 10 \mu\text{m}$ y $r = 12.5 \mu\text{m}$ radius dimension of scatterers and one refractive index of 1.33.

4.1. Comparing average result and space distributions

Tables I, II, III shown the average of: backscattered photons probability, transmitted photons probability and caught photon probability through out one turbid media composed by spherical scatterers. Plotting their spatial profiles of each of them.

Noting that when the physical parameters as: scatterer radius and refractive index are used into the scattering coefficient and absorption coefficient and considering the Mie

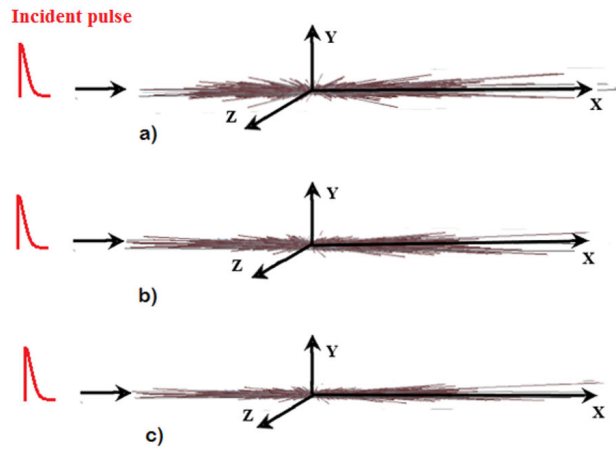


FIGURE 5. Spatial distribution profiles, from droplets water turbid media of 2 m of thickness, with relative refractive index of $n = 1.33$ and radius of: a) $r = 8.65 \mu\text{m}$, b) $r = 10 \mu\text{m}$ and c) $r = 12.5 \mu\text{m}$.

vector bases into state function. Scattering light is observed with an increasingly forward direction (toward direction of incident pulse) and less in backward direction, it happens every time that scatterers size is increasing. The last concept is checked with the results of the photon concentrations in forward, backward and trapped cases, given by the program in relation to turbid media as it is shown in Tables I, II and III. Also, the scattering spatial distribution is similar to the frontal lobe of radiation from the Mie phase function [5].

4.2. Comparison of backscattered photons as a functions of distance

The profile of distance distributions of backscattered photons probability is calculated from 5 to 50 m, by steps of 5 m. Figure 6, shows the profile of average probability photon values versus distance. For $r = 8.65, 10$ and $12.5 \mu\text{m}$ of scatterer.

Comparing 5.5×10^5 of photons hitting the turbid media (Fig. 6), from each distance, the exponential distribution profiles again shows a strong dependence of the size of the scatterer in relation with backscattering photons probability.

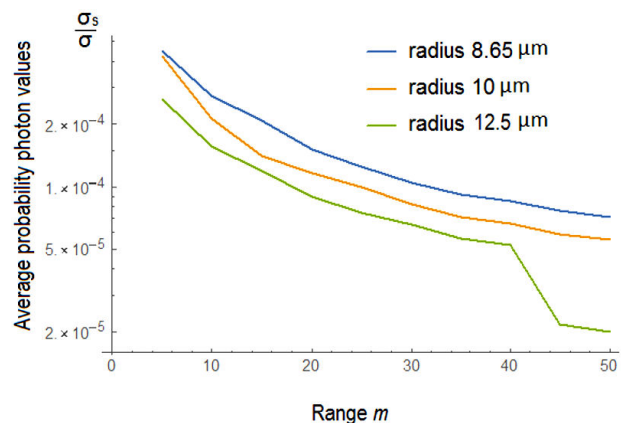


FIGURE 6. Profiles in the FOV.

TABLE I. Scatterer radius ($r = 8.65 \mu\text{m}$)

Incident Photons	wavelength	Caught Photons	Transmitted Photons	Backscattering Photons
average	(nm)	average	average	average
5.5×10^5	532	4.430×10^{-16}	0.9710	0.00957

TABLE II. Scatterer radius ($r = 10 \mu\text{m}$)

Incident Photons	wavelength	Caught Photons	Transmitted Photons	Backscattering Photons
average	(nm)	average	average	average
5.5×10^5	532	3.383×10^{-18}	0.9713	0.00925

TABLE III. Scatterer radius ($r = 12.5 \mu\text{m}$)

Incident Photons	wavelength	Caught Photons	Transmitted Photons	Backscattering Photons
average	(nm)	average	average	average
5.5×10^5	532	3.439×10^{-18}	0.9742	0.00637

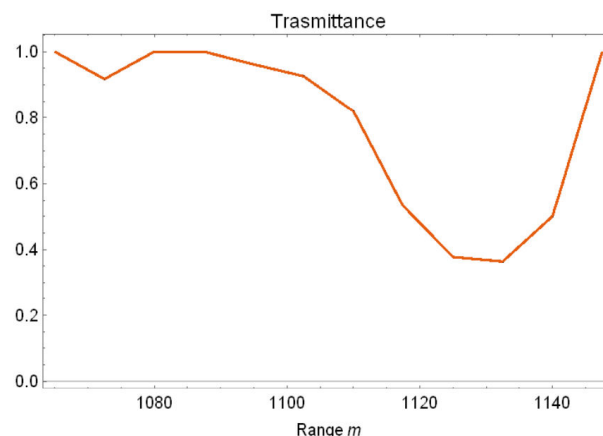
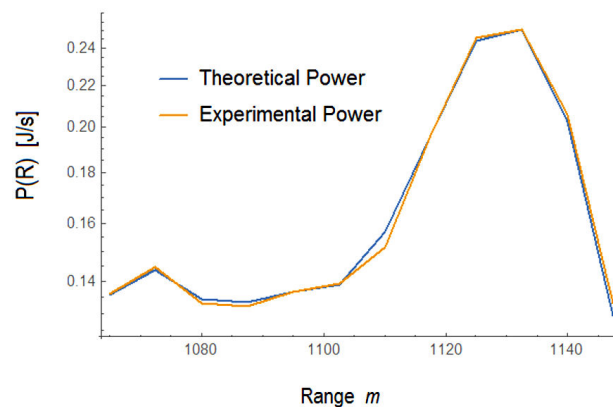
5. Validation of the model with an experimental lidar signal

The Monte Carlo-Mie model was performed to represent a distance profile of experimental data, provided by courtesy of THE FRENCH AEROSPACE LAB (ONERA). Referring to a backscattered Lidar signal from turbid media in clouds located at a minimum height of one thousands sixty meters with a thickness of one hundred meters.

For that testing, the Monte Carlo-Mie algorithm used the following parameters, to fit the experimental profile: one thickness of turbid medium $h = 100$ m, an energy laser pulse of 50 mJ, assuming just 5.5×10^5 incident photons. Number of scattering events 100. A wavelength of 355 nm. A photodetection gain of eight times, this gain is assigned due to the limitations in the computer equipment used in this work, the 5.5×10^5 photons is a minimal energy fraction equivalent in order to femtojoules. Because of this, the authors assigned that gain compensation. One aperture radius of telescope of 0.1 m which it is located for each corresponding variation distance at (-R 0 0). A relative refractive index $n_r = 1.9996$ from turbid media [5,11,12,13]. And a radius of the droplets water from low ionization $r = 10 \mu\text{m}$ [14].

The algorithm started, while varying the distance of photodetector from 10650 to 1147.5 m by steps of 7.5 m. Simulating the light pulse step through turbid media and for each step was necessary to make a numerical fit (factor fit). The factor fit applied to the total backscatterig list was proposed as Transmittance factor [15]. As it is shown in Fig. 7.

Considering that factor fit, the authors getting successfully modeling the experimental profile from backscattering power. Figure 8 shows theoretical and experimental power backscattering.

FIGURE 7. Transmittance profile $T(R)$.FIGURE 8. Theoretical and experimental backscattering power $P(R)$, profiles.

6. Conclusions

In scattering and quantification simulations of expanding spherical harmonics waves, the authors are concluded:

Referring to Fig. 7, one factor fit is proposed, it was associate to this disturbance as a physical relation of the transmittance factor $T(R)$, that relates to the extinction coefficient at distance R . And it is applied at photodetector measurements, specific for each height over an interval from 1065 to 1147.5 m. As a result of this, an experimental and theoretical signals lidar are closely fitted, as it is shown in Fig. 8. The success of this modeling is due to the turbid medium is being composed of spherical scatterers (water drops), with an average radius size of $10 \mu\text{m}$ and the Monte Carlo-Mie model is based on vector bases that represents scattering spherical

harmonic and consequently the authors proposed an empirical equation that represents the backscattering power as a function of the height. It is defined as [15].

$$P(R, \lambda) = P_0 \langle wCC(R, \lambda)_{\text{FOV}} \rangle T(R). \quad (27)$$

With P_0 , is the power value of incident pulse [J/s]. $wCC(R, \lambda)_{\text{FOV}}$, is the photon backscattering average [dimensionless].

$$T(R) = \exp \left(-2 \int_0^R \alpha_{t,\lambda}(x) dx \right),$$

is the transmittance factor [dimensionless].

1. L.R. Bissonnette *et al.*, LIDAR multiple scattering from clouds, *Appl. Phys. B* **60** (1995) 355. <https://doi.org/10.1007/BF01082271>
2. W. Zhensen, Y. Yi, and C. Lihong, Monte Carlo simulation for millimeter wave propagation and scattering in rain medium, *International J. Infrared and Millimeter Waves* **13** (1992) 7. <https://doi.org/10.1007/BF01009622>
3. P. F. Liaparinos, Light wavelength effects in submicrometer phosphor materials using Mie scattering and Monte Carlo simulation, *Med. Phys.* **40** (2013) 10, <http://dx.doi.org/10.1118/1.4821089>
4. Y. Ma, W. Liu, Y. Cui, and X. Xiong, Multiple-scattering effects of atmosphere aerosols on light-transmission measurements, *Opt. Rev.* **24** (2017) 590. DOI: 10.1007/s10043-017-0352-9
5. C. F. Bohren and D. R. Huffman, *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*, (John Wiley & Sons, 1983), pp. 57-63, 82-103, 111-112. ISBN 0-471-29340-7.
6. L. Tsang, J. Au Kong, K.-Hau Ding, *Scattering of Electromagnetic Waves*, (John Wiley & Sons, 2000), pp. 32-41. ISBNs: 0-471-38799-1.
7. I. M. Sóbol, *Método de Montecarlo*, 2nd ed. (MIR Moscú, 1983), pp. 55-62.
8. S. Julius Adams, *Electromagnetic Theory*, (McGraw Hill, 1941), pp. 392-420.
9. B. Roysan, A. R. Cohen, P. H. Getto and P. R. Boyce, A Numerical Approach to the Computation of Light Propagation through Turbid Media: Application to the Evaluation of Lighted Exit Signs, *IEEE Transactions on industry applications*, **29** (1993) 3.
10. E. Reynoso Lara, J. Davila Pintle, Y. E. Bravo-Garcia, A. Balbuena-Ortega, Numerical results of Monte Carlo code in lidar returns considering polarization of light and different phase functions, *Opt. Pura Apl.* **47** (2014) 177. <http://dx.doi.org/10.7149/OPA.47.3.177>
11. F. Fabregat-Santiago, N. S. Fierrols, G. García-Belmonte, J. Bisquert, and E. I. Morell, Estudio de los diferentes estados energéticos del agua del suelo en función de los fenómenos de relajación dieléctrica, *Estudios de la Zona No Saturada del Suelo*, (1999) 39-44. ISBN 84-699-1258-5.
12. Vaxasoftware, *Tablas de propiedades Físicas*, https://www.vaxasoftware.com/doc_edu/fis/inrefraccion.pdf
13. M. de la Vega Perez Gracia, Radar de subsuelo. *Evaluación para aplicaciones en arqueología y en patrimonio histórico-artístico*, (2001), p. 206. ISBN: 846996884X.
14. T. Y. Nakajima, K. Suzuki, G. L. Stephens, Droplet Growth in Warm Water Clouds Observed by the A-Train. Part I: Sensitivity Analysis of the MODIS-Derived Cloud Droplet Sizes, *Journal of the Atmospheric Sciences*, **67** (2009) 1884-1896, DOI: 10.1175/2009JAS3280.1
15. C. Weitkamp, *Lidar Range-Resolved Optical Remote Sensing of the Atmosphere*, (Springer series in Optical Science, 2005), pp. 6-11. ISBN 0-387-40075-3.