



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE
PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

ESTUDIO ANALÍTICO DE LA PROPAGACIÓN
EN ESPACIO LIBRE DE DISTRIBUCIONES DE
INTENSIDAD DE TIPO HIPOCICLOIDE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN FÍSICA

P R E S E N T A :

MARCO ANTONIO TAPIA VALERDI

ASESOR

DRA. MARCELA MARIBEL MÉNDEZ OTERO



PUEBLA. PUE. OCTUBRE, 2021

Dedicatoria ...

ESTUDIO ANALÍTICO DE LA PROPAGACIÓN EN ESPACIO LIBRE DE DISTRIBUCIONES DE INTENSIDAD DE TIPO HIPOCICLOIDE

C. Marco Antonio Tapia Valerdi

Tesis de grado presentada como requisito para optar al título de:
Licenciado en Física

Asesor:

Dra. Marcela Maribel Méndez Otero (BUAP, FCFM)

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Puebla, México
Octubre 2021

Resumen

Con la invención del láser se han desarrollado muchas investigaciones y aplicaciones con la luz, las cuales han generado grandes avances científicos y tecnológicos. Se han podido generar distribuciones de luz de diferentes formas, una de ellas es iluminando aberturas o rendijas con ondas planas, lo cual genera patrones de difracción cuya forma depende de la geometría de la abertura o rendija y de la distancia a la cual se detecta la distribución de la luz. Estos estudios han sido analíticos y numéricos. En el presente trabajo de tesis se estudia la propagación analítica de patrones de difracción generados por funciones de tipo hipocicloide, principalmente un Astroide (figura con 4 picos). La primera propuesta fue obtener el estudio analítico de la propagación de intensidades de tipo hipocicloide, partiendo de la definición de la difracción de Fraunhofer, empleando la transformada de Fourier, que por medio de la cual es fácil obtener una expresión analítica para la distribución del campo en un plano de observación. Sin embargo, en este trabajo dado que se propuso emplear distribuciones de intensidad de tipo hipocicloides, no fue posible obtener una expresión analítica general para el campo en el plano de observación. Así, se trabajó, con estas expresiones analíticas y se obtuvo la solución únicamente de una de las dos integrales que aparecen, lo cual no es un resultado completo. Después, se trabajó con una segunda propuesta la cual fue, resolver este problema para casos particulares, por tal motivo se decidió trabajar con un Astroide (hipocicloide de 4 cúspides) por su sencillez y se consideró una aproximación más. En este caso se propone la aproximación de aberturas rectangulares, es decir, que este método consiste en dividir al Astroide en múltiples aberturas rectangulares con un ancho constante y una altura variable. Cabe señalar que esta propuesta es válida para cualquier tipo de hipocicloide. De

esta manera, se obtiene una expresión analítica para el campo de salida en el plano de observación para un caso particular (Astroide). De esta manera, la propuesta final fue, separar las integrales de la expresión original, obteniendo tres integrales, encontrando nuevamente que la solución analítica general para cualquier hipocicloide es muy complicada.

Los perfiles de intensidad generados por las hipocicloides, son derivados de la ecuación analítica obtenida. Estos perfiles son comparados con resultados numéricos dados en otro trabajo de tesis, de nuestro mismo grupo de investigación. Dando así la veracidad de nuestra ecuación obtenida analíticamente.

Índice general

Resumen	v
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. objetivo y estructura de la tesis	3
1.2.1. Contenido	3
2. Teoría	4
2.1. La ecuación de onda en el espacio libre	4
2.2. Propagación de la Luz en el Espacio Libre	5
2.3. Difracción de la luz	6
2.3.1. Teoría fundamental	7
2.4. Difracción de Fraunhofer y Fresnel	9
2.5. Ecuaciones paramétricas de las hipocicloides	10
3. Difracción en hipocicloides	14
3.1. Funciones hipocicloides	14
3.2. Astroide	15
3.3. Aproximación mediante aberturas rectangulares	17
3.4. caso general	20
3.4.1. Otro camino	22
4. Resultados y comparaciones	25

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	VIII
5. Conclusiones	29
Bibliografía	30

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes

Desde un inicio el hombre se ha visto maravillado por todos los fenómenos generados por la luz, de ahí que las primeras grandes civilizaciones del mundo antiguo buscaran explicar la naturaleza de esta misma. Gracias al trabajo de mucha gente a lo largo de la historia se han desarrollado teorías para explicar el comportamiento y las propiedades de la luz, así como la construcción de instrumentos que se sirven de ella o la detectan, todo ello forma la rama de la física que hoy en día conocemos como óptica, la cual se subdivide en varias áreas como son la óptica cuántica, óptica física, óptica no lineal, etc.

Clásicamente la luz es considerada como una onda de campos eléctrico y magnético, los cuales son perpendiculares entre sí y oscilan perpendicularmente a su dirección de propagación, que puede ser a través de medios como el aire, el agua o el vacío; y a través de algunos otros medios como las fibras ópticas [1]. Matemáticamente, la luz se describe mediante una función de onda la cual debe satisfacer una ecuación diferencial parcial de segundo grado llamada ecuación de onda, que depende de tres variables espaciales x, y, z y de una variable temporal t [2]. Cualquier función que satisfaga dicha ecuación es definida como una onda, por ejemplo las ondas de radio, de sonido, en el agua, ondas electromagnéticas, etc. Cuando en la ecuación de onda se desprecia la parte temporal, ésta se transforma en una ecuación diferencial, que solo depende de

la parte espacial la cual es llamada ecuación de Helmholtz [3].

La luz durante su propagación puede interactuar con diferentes objetos o medios, lo que hace que ocurran ciertos fenómenos como son la reflexión, la refracción, la interferencia y la difracción entre otros. La refracción y la reflexión se pueden explicar claramente mediante la óptica geométrica, mientras que los fenómenos de interferencia y difracción requieren de un tratamiento ondulatorio[4].

La difracción se produce cuando la luz se desvía al pasar a través de una abertura o de un objeto opaco, estas ondas desviadas interfieren entre si en algún punto generando una cierta distribución de intensidad llamada patrón de difracción, Para que se produzca difracción de la luz, la abertura debe estar colocada delante de la fuente de tal manera que la luz incida directamente en ella y para “observar” el patrón generado por la abertura se coloca una pantalla sobre la cual se proyecta la distribución de éste o un sistema de captura de imagen. Dependiendo de las condiciones en las que se produce la difracción de la luz, ésta se puede dividir en dos clases: cuando el objeto que desvía la luz (abertura) se encuentra a una distancia muy pequeña (unos cuantos centímetros) tanto de la fuente de luz como del detector ocurre la llamada difracción de Fresnel o de campo cercano; en el caso contrario, cuando la rendija esta a una distancia muy grande se observa difracción de Fraunhofer o de campo lejano.

Generalmente cuando se estudia la difracción se usan aberturas difractoras con geometrías simples como lo son los círculos, anillos y algunos polígonos, no obstante, recientemente se ha estudiado el caso de aberturas un poco más complicadas como las hipocicloides, las cuales fueron introducidas por G. Martínez Niconoff en 2012. Este tipo de aberturas generan distribuciones de intensidad con la característica de que concentran la mayor energía alrededor de zonas conocidas como cáusticas. Los trabajos que han sido publicados hasta la fecha han sido trabajos numéricos, debido a que el tratamiento analítico no es sencillo de realizar. Por tal motivo en este trabajo de tesis se propuso realizar un estudio analítico de la propagación de distribuciones de intensidad de tipo hipocicloide, sabiendo de antemano que no sería tan fácil pero que se buscarían nuevos métodos o formas para lograrlo. De esta manera, en este trabajo se presenta una expresión matemática de la intensidad producida por la difracción

a través de aberturas tipo hipocicloide. También se presenta una comparación entre estos resultados obtenidos con resultados numéricos reportados en otro trabajo de tesis, desarrollado de igual manera en nuestro grupo de investigación. La finalidad de la comparación es dar veracidad a los resultados que se obtienen en este trabajo de tesis.

1.2. objetivo y estructura de la tesis

El objetivo de este trabajo de tesis fue realizar un estudio analítico de la generación y propagación en espacio libre de distribuciones de intensidad generados por funciones hipocicloides.

1.2.1. Contenido

La estructura de la tesis es de la siguiente forma: En el capítulo 1, se da una introducción al tema de este trabajo, en el cual se muestran los antecedentes y se menciona el objetivo general de la tesis, así como la estructura de la redacción del mismo.

En el segundo capítulo se da una revisión teórica de los conceptos básicos de la óptica. Siendo estos la ecuación de onda en espacio libre, así como su propagación. Se incluye también la revisión de fenómenos ópticos como la difracción de Fraunhofer y Fresnel, incluyendo las ecuaciones paramétricas de las hipocicloides.

En el tercer capítulo se da la teoría de difracción en hipocicloides, revisando las funciones hipocicloides para el caso general y un camino diferente que nosotros proponemos. También se muestra la difracción de Astroides y la difracción de aberturas rectangulares.

En el cuarto capítulo se muestran los resultados obtenidos, así como una comparación entre estos resultados y resultados numéricos presentados en otro trabajo de tesis.

Finalmente, en el capítulo 5 se dan las conclusiones generales del trabajo.

Capítulo 2

Teoría

2.1. La ecuación de onda en el espacio libre

Gracias a los trabajos realizados por Oersted, Ampere, Faraday, Coulomb, Gauss, entre otros, durante la primera mitad del siglo XIX se logro consolidar el modelo ondulatorio de la luz, sabiendo que la luz es una onda compuesta por un campo eléctrico \vec{E} y un campo magnético \vec{H} , los cuales son periódicos y perpendiculares entre sí. Mas tarde Maxwell retomo estas ideas y los tradujo a un lenguaje matemático, desarrollando lo que hoy en día conocemos como las ecuaciones de Maxwell. A partir de ellas encontró la ecuación de onda para campos eléctricos y magnéticos en espacio libre [2], las ecuaciones de Maxwell para el espacio libre son:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{D} &= 0, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, \\ \nabla \times \vec{E} &= \frac{-\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde: \vec{D} y \vec{B} son conocidos como vector de desplazamiento eléctrico y vector de inducción magnética, respectivamente y están relacionados con el campo eléctrico y

magnético mediante las relaciones:

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E}. \\ \vec{B} &= \mu_0 \vec{H}.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Donde ϵ_0 es el coeficiente de permitividad en el vacío y μ_0 el coeficiente de permeabilidad en el vacío. Empezamos la deducción de la ecuación de onda tomando el rotacional del rotacional del campo eléctrico.

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{H}).\tag{2.3}$$

Empleando identidades vectoriales y realizando las debidas operaciones, obtenemos:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.\tag{2.4}$$

La cual la podemos escribir como:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0.\tag{2.5}$$

Donde $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ es la velocidad de la luz en el vacío y (2.5) es la ecuación de onda en el vacío, con lo que se concluye que la luz es una onda electromagnética que viaja en el espacio con una velocidad finita c_0 .

2.2. Propagación de la Luz en el Espacio Libre

En la sección anterior tomamos como función de onda el campo eléctrico \vec{E} y se expreso la forma matemática de la ecuación de onda para el espacio libre, ahora haremos un cambio de nombre de la función de onda la cual llamaremos $u(\vec{r}, t)$, de modo que (2.5) la podemos escribir de la manera siguiente:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (2.6)$$

Donde el operador Laplaciano en coordenadas rectangulares está dado por $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, generalmente se expresa a la función de onda $u(\vec{r}, t)$ en términos de una función compleja $U(\vec{r}, t)$ que satisfaga la ecuación de onda y que cumpla la siguiente relación:

$$u(\vec{r}, t) = \text{Re}\{U(\vec{r}, t)\}. \quad (2.7)$$

La función $U(r, t)$ puede ser separada en una parte espacial y una parte temporal de la siguiente forma:

$$U(\vec{r}, t) = U(\vec{r}) \exp i\omega t. \quad (2.8)$$

Donde $U(r)$ es llamada amplitud compleja de la onda, su magnitud $|U(r)| = a(r)$ que corresponde a la amplitud de la onda y el argumento $\arg\{U(\vec{r}, t)\} = \varphi(r)$ representa la fase.

2.3. Difracción de la luz

La difracción y la interferencia es un fenómeno ondulatorio provocado por la desviación de las ondas al encontrar un obstáculo o al atravesar una rendija cuyas dimensiones son comparables a la longitud de onda.

De acuerdo con el Principio de Huygens-Fresnel, cuando la onda incide sobre una rendija todos los puntos de su plano se convierten en fuentes secundarias de ondas, emitiendo nuevas ondas, denominadas ondas difractadas, las cuales producen una distribución de intensidad, llamada patrón de difracción, que no es más que el patrón de interferencia entre las ondas secundarias procedentes de un gran número de fuentes puntuales. Es en este sentido, que no existe físicamente ninguna diferencia entre difracción e interferencia [5].

Cuando la longitud de onda es más grande que el tamaño de la abertura por donde

pasa el haz de luz, se puede emplear la teoría escalar de difracción, esta teoría consiste en la conversión de la ecuación de onda, que es una ecuación diferencial parcial, en una ecuación integral.

2.3.1. Teoría fundamental

Para pasar de la ecuación diferencial de onda a la ecuación integral haremos uso del teorema de Green [6], el cual involucra dos funciones complejas U y V que satisfacen las condiciones de continuidad y integrabilidad, para las cuales se cumple:

$$\iint (V \text{grad}_n U - U \text{grad}_n V) dA = \iiint (V \nabla^2 U - U \nabla^2 V) dV. \quad (2.9)$$

El lado izquierdo de la integral ocurre en cualquier superficie cerrada A , y el lado derecho incluye el volumen V dentro de la superficie. Donde grad_n es la componente normal del gradiente en superficie de integración.

En particular, si U y V son funciones de onda; esto es, si satisfacen la ecuación de onda

$$\nabla^2 U = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 V = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2},$$

y si ambas tienen dependencia temporal de la forma $e^{\pm i\omega t}$, entonces se puede probar que el volumen en la integral del teorema de Green es igual a cero. Entonces (2.9) se reduce a

$$\iint (V \text{grad}_n U - U \text{grad}_n V) dA = 0. \quad (2.10)$$

Ahora supongamos que V es de la forma

$$\vec{V} = V_0 \frac{e^{i(k\vec{r} + \omega t)}}{\vec{r}}.$$

Esta función en particular representa ondas esféricas convergiendo a un punto $P(r = 0)$. Donde dejamos el volumen encerrado por una superficie de integración que incluye a P . Mientras v tiende a infinito en P , debemos excluir este punto de la integración. Esto se ve en el método estándar de sustraer una integral sobre una

esfera pequeña de radio ρ centrada en P como se muestra en la figura (2.1), sobre esta esfera pequeña, $r = \rho$ y $grad_n = -\frac{\partial}{\partial r}$. Entonces podemos escribir que:

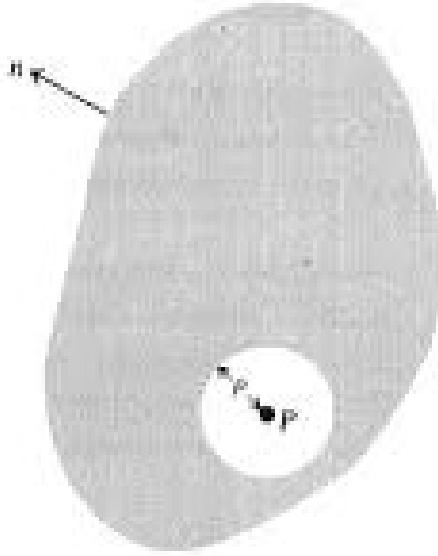


Figura 2.1: superficie de integración para probar la integral de Kirchhoff

$$\iint \left(\frac{e^{ikr}}{r} grad_n U - U grad_n \frac{e^{ikr}}{r} \right) dA - \iint_{r=\rho} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial U}{\partial R} - U \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikr}}{r} \right) \rho^2 d\Omega = 0, \quad (2.11)$$

donde $d\Omega$ es el ángulo sólido de la esfera centrada en P , $\rho^2 d\Omega$ es el correspondiente elemento de área.

En el limite cuando ρ se aproxima a cero el integrando de la segunda integral se aproxima al valor de U en el punto P , llamado U_p . En consecuencia la segunda integral se aproxima a:

$$\iint U_p d\Omega = 4\pi U_p. \quad (2.12)$$

La ecuación (2.11) se puede escribir como:

$$U_p = -\frac{1}{4\pi} \iint \left(U grad_n \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} grad_n U \right) dA. \quad (2.13)$$

Esta ecuación es conocida como integral de Kirchhoff, que relaciona el valor de cualquier función de onda escalar a cualquier punto P dentro de una superficie cerrada arbitraria a el valor de una función de onda en la superficie.

2.4. Difracción de Fraunhofer y Fresnel

El fenómeno de difracción es usualmente clasificado y analizado en dos diferentes maneras. Si ambos, la fuente de luz y la pantalla de observación, están a una distancia infinita de la abertura de manera que las ondas que llegan a la abertura y a la pantalla pueden ser consideradas como ondas planas, entonces este fenómeno de difracción es conocido como difracción de clase Fraunhofer o de campo lejano. Experimentalmente tal situación puede ser realizada colocando la fuente de luz en el plano focal de una lente convexa y la pantalla de observación en el plano focal de otra lente convexa como se observa en la Figura (2.2 a). El otro caso ocurre si la fuente de luz y/o la pantalla están colocadas a distancias finitas de la abertura, a este fenómeno se le llama difracción de clase Fresnel o de campo cercano, Figura (2.2 b)

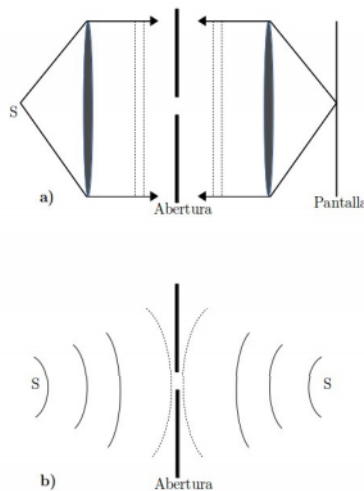


Figura 2.2: Condiciones en para generar difracción de clases Fraunhofer y Fresnel.

2.5. Ecuaciones paramétricas de las hipocicloides

Una hipocicloide es el lugar geométrico de un punto fijo cualquiera de una circunferencia que rueda interiormente, sin resbalar, sobre otra circunferencia fija [7].

A continuación se deducen las ecuaciones paramétricas de una hipocicloide en el caso en que la circunferencia fija tiene su centro en el origen, y la posición del punto que describe la curva está sobre la parte positiva del eje X y sobre la circunferencia fija, como se ve en la figura 2.3.

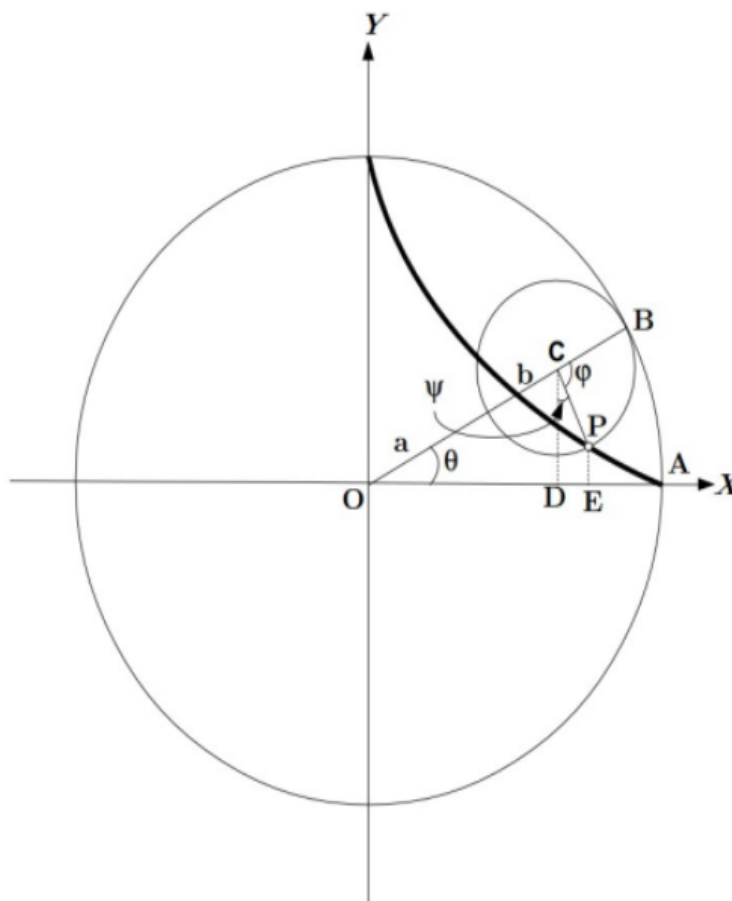


Figura 2.3: Geometría auxiliar en la deducción de las ecuaciones de una hipocicloide

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera del lugar geométrico; sean a y b , respectivamente, los radios de las circunferencias fija y rodante, y sea C el centro de la circunferencia rodante o generatriz. Se considera como parámetro el ángulo θ que forma la recta de los centros OC con la parte positiva del eje X . Sea A el punto sobre el eje X

que representa la posición inicial del punto P que describe la curva hipocicloide, y sea B el punto de tangencia de las dos circunferencias. Desde C y P bajemos las perpendiculares CD y PE, respectivamente, al eje X. Llamemos φ al ángulo BCP y Ψ al ángulo PCD. Consideraremos ambos ángulos medidos en radianes.

Como la circunferencia generatriz rueda, sin resbalar, de A a B, tenemos:

$$\text{arco}AB = \text{arco}PB, \quad (2.14)$$

en otras palabras,

$$a\theta = b\varphi. \quad (2.15)$$

Entonces, $\varphi = \frac{a}{b}\theta$. Además se tiene también que:

$$\Psi = \pi - \varphi - \angle OCD = \pi - \frac{\pi}{2} + \theta - \varphi = \frac{\pi}{2} + \theta - \varphi. \quad (2.16)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \sin \Psi &= \sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta - \varphi \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \cos(\theta - \varphi) + \sin(\theta - \varphi) \cos \left(\frac{\pi}{2} \right), \\ &\rightarrow \sin \Psi = \cos(\theta - \varphi) = \cos \left(\theta - \frac{a}{b}\theta \right), \\ &\rightarrow \sin \Psi = \cos \left(\frac{b-a}{b}\theta \right), \end{aligned} \quad (2.17)$$

y

$$\begin{aligned} \cos \Psi &= \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta - \varphi \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) \cos(\theta - \varphi) - \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \sin(\theta - \varphi), \\ &\rightarrow \cos \Psi = \sin(\theta - \varphi), \\ &\rightarrow \cos \Psi = \sin \left(\frac{b-a}{b}\theta \right). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Para las coordenadas (x, y) del punto P, tenemos:

$$\begin{aligned} x &= \overline{OE} = \overline{DE} = \overline{OC} \cos \theta + \overline{CP} \sin \Psi, \\ y &= \overline{EP} = \overline{CD} - \overline{CP} \cos \Psi = \overline{OC} \sin \theta - \overline{CP} \cos \Psi. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Notemos que $\overline{OC} = a - b$, $\overline{CP} = b$ y sustituyendo las expresiones encontradas para el seno y el coseno de Ψ obtenemos:

$$\begin{aligned} x &= (a - b) \cos \theta + b \cos \left(\frac{b - a}{b} \theta \right). \\ y &= (a - b) \sin \theta + b \sin \left(\frac{b - a}{b} \theta \right). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Si ahora consideramos que el seno es una función impar y el coseno es una función par, es decir: $\sin(x) = -\sin(-x)$ y $\cos(x) = \cos(-x)$ obtendremos, finalmente las ecuaciones paramétricas para una hipocicloide:

$$\begin{aligned} x &= (a - b) \cos \theta + b \cos \left(\frac{a - b}{b} \theta \right). \\ y &= (a - b) \sin \theta - b \sin \left(\frac{a - b}{b} \theta \right). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Sea k la razón de a a b , de modo que $a = kb$. Si k es un número entero, tendremos una hipocicloide de k picos. Por ejemplo, si tenemos que $k = 3$ obtendremos la hipocicloide llamada Deltoide (su forma es parecida a la letra griega delta mayúscula) o Tricúspide, figura (2.4 a), la cual fue concebida primero por Leonhard Euler, matemático suizo (1707-1783), en 1745 en relación con un estudio de curvas caústicas y posteriormente investigada en 1856 por otro matemático suizo: Jakob Steiner (1796-1863); por lo que a veces es llamada también hipocicloide de Steiner[8].

Si $k = 4$, bajo esta condición la curva descrita por las ecuaciones (2.21) es la llamada Astroide, Figura (2.4 b). Esta curva fue descubierta por el astrónomo danés Olaf Roemer en su búsqueda por mejorar los dientes de los engranes [9]. Naturalmente aumentando el valor de k aumenta el número de picos que tiene la hipocicloide, así por ejemplo la figura (2.4 c) muestra la hipocicloide obtenida para un valor de $k=6$.

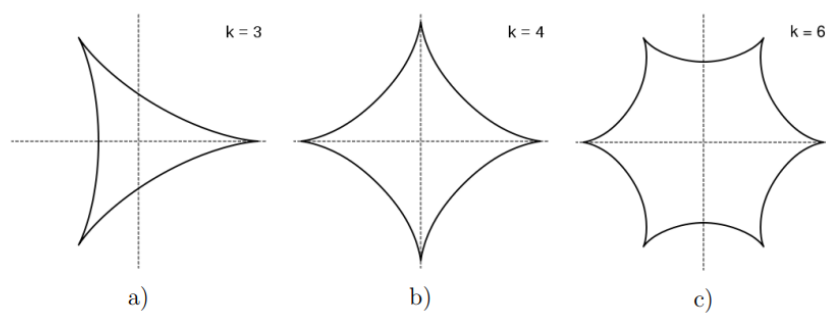


Figura 2.4: curvas hipocicloides para valores de a) $k=3$ (deltoide), b) $k=4$ (astroide) y c) $k=6$

Capítulo 3

Difracción en hipocicloides

3.1. Funciones hipocicloides

Partiremos de las ecuaciones paramétricas de una hipocicloide obtenidas en el capítulo anterior (2.21), reescritas como:

$$\begin{aligned}x &= A \cos \theta + B \cos \{(k - 1)\theta\}. \\y &= A \sin \theta - B \sin \{(k - 1)\theta\}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Donde $A = (a - b)$, $B = b$, $k = \frac{a}{b}$, y para simplificar aun mas las ecuaciones tomemos $n = (k - 1)$, de tal manera que obtenemos:

$$\begin{aligned}x &= A \cos \theta + B \cos(n\theta). \\y &= A \sin \theta - B \sin(n\theta).\end{aligned}\tag{3.2}$$

Ahora nos interesa calcular la distancia entre el origen y un punto cualquiera $P(x, y)$ en la superficie de cualquier hipocicloide, la cual calculamos de $R^2 = x^2 + y^2$ y obtenemos que:

$$R^2 = (A \cos \theta + (B \cos(n\theta)))^2 + (A \sin \theta - B \sin(n\theta))^2.\tag{3.3}$$

Desarrollando los paréntesis

$$R^2 = A^2 \cos^2 \theta + 2AB \cos \theta \cos(n\theta) + B^2 \cos^2(n\theta) \\ + A^2 \sin^2 \theta - 2AB \sin \theta \sin(n\theta) + B^2 \sin^2(n\theta). \quad (3.4)$$

Agrupando términos semejantes y usando identidades trigonométricas obtenemos:

$$R^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos(\theta + n\theta). \quad (3.5)$$

Finalmente llegamos a que:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos(k\theta)}. \quad (3.6)$$

Donde R es la distancia del origen a un punto de la hipocicloide y k es la razón de a y b .

3.2. Astroide

Dado que resolver las ecuaciones de manera general para cualquier hipocicloide resulta muy complicado centraremos nuestro análisis en la astroide (hipocicloide de cuatro cúspides), la cual podemos describir de una manera mas sencilla. Partiendo de las ecuaciones paramétricas de una hipocicloide descritas en (2.21) si tomamos $b = a/4$ y $a = 1$ obtenemos:

$$x = \cos^3 \theta. \\ y = \sin^3 \theta. \quad (3.7)$$

Donde (3.7) son las nuevas ecuaciones paramétricas que describen a una astroide con radio máximo igual a 1, en las cuales podemos eliminar el parámetro θ con facilidad. Para ello sacamos raíz cubica y elevamos al cuadrado ambas ecuaciones obteniendo que:

$$\begin{aligned}x^{\frac{2}{3}} &= \cos^2 \theta, \\y^{\frac{2}{3}} &= \sin^2 \theta,\end{aligned}\tag{3.8}$$

y sumando ambas ecuaciones tenemos:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1.\tag{3.9}$$

Despejando y

$$y = \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.\tag{3.10}$$

En la ecuación (3.10) hemos logrado eliminar el parámetro θ y poner y en términos de x .

Para obtener el campo eléctrico generado por una astroide en el plano de observación calculamos la transformada de Fourier en coordenadas rectangulares [4] que es definida como:

$$E(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i(k_x x + k_y y)\} dy dx.\tag{3.11}$$

Con k_x y k_y son las frecuencias espaciales en el plano de observación y nuestra función de abertura vale 1 si se encuentra dentro de la astroide y 0 en cualquier otro punto.

Ahora colocando los limites de integración tenemos:

$$E(k_x, k_y) = \int_0^1 \int_0^{(1-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}} \exp\{i(k_x x + k_y y)\} dy dx.\tag{3.12}$$

Integrando con respecto a y tenemos que:

$$E(k_x, k_y) = - \int_0^1 \frac{i \exp(i k_x x) \left(-1 + \exp\{i(1-x^{\frac{2}{3}})^{3/2} k_y\} \right)}{k_y} dx.\tag{3.13}$$

Agrupando términos y realizando algunas operaciones obtenemos:

$$E(k_x, k_y) = -\frac{1}{k_y} \left[\int_0^1 -i \exp^{ik_x x} dx + \int_0^1 i \exp\{i[(1-x^{\frac{2}{3}})^{3/2} k_y + k_x x]\} dx \right]. \quad (3.14)$$

A pesar de las simplificaciones que nos brinda la astroide en las ecuaciones paramétricas, la ecuación (3.14) continua siendo muy difícil de resolver. Lo cual nos obliga a buscar otros métodos para encontrar una expresión analítica para el campo eléctrico.

3.3. Aproximación mediante aberturas rectangulares

Como hemos visto a lo largo de este capítulo resolver las ecuaciones que describen el campo eléctrico en el plano de observación no es una tarea sencilla, incluso tratándose de la hipocicloide mas sencilla (astroide). por tal motivo se opto por aproximar el resultado dividiendo la hipocicloide en múltiples aberturas rectangulares de largo b y ancho a , tal como se puede ver en la figura (3.1). Por simplicidad continuaremos trabajando únicamente con la astroide a pesar de que esté método en principio puede usarse para cualquier hipocicloide.

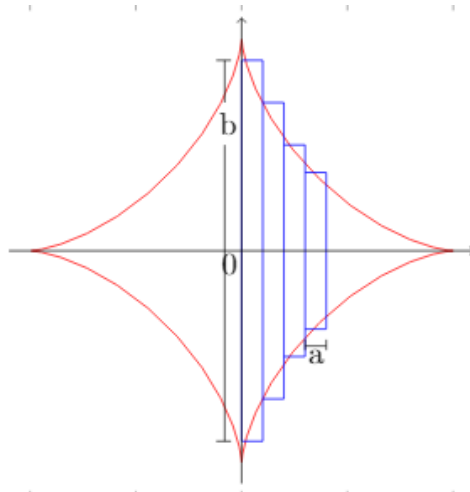


Figura 3.1: Astroide dividida en múltiples aberturas rectangulares.

Antes de escribir de manera matemática debemos aclarar que el ancho a , que usaremos sera el mismo para cada abertura sin embargo el largo b sera diferente para cada abertura ya que nuestro objetivo es aproximarnos lo mas que sea posible a la curva de la hipocicloide y las aberturas estarán puestas una después de la otra, es decir la separación entre ellas sera de 0 , no obstante por fines prácticos definimos l como la distancia que existe entre centro y centro de dos aberturas como se muestra en la figura (3.2).

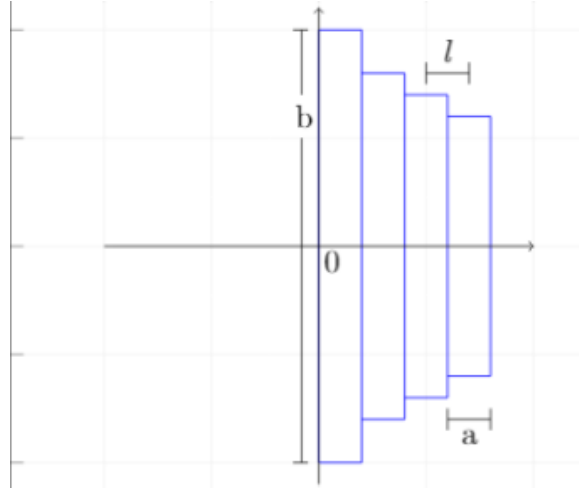


Figura 3.2: aberturas rectangulares consecutivas.

El procedimiento para calcular el campo eléctrico por muchas aberturas rectangulares consiste en manipular los limites de integración adecuadamente considerando N aberturas rectangulares. Con el origen del sistema coordenado en la orilla izquierda de la primera rendija, de tal manera que tenemos:

$$\vec{E} = \frac{\epsilon_A e^{i(\omega t - kR)}}{R} \int_{-b/2}^{b/2} e^{\frac{ikYy}{R}} dy \int_{c-a/2}^{c+a/2} e^{\frac{ikXx}{R}} dx. \quad (3.15)$$

En la ecuación (3.15) c toma los valores de $0, l, 2l, 3l, \dots, (N-1)l$. Para obtener una solución haremos de manera separada las integrales con respecto a x y a y , así tenemos que integrando con respecto a y :

$$\int_{-b/2}^{b/2} e^{\frac{ikYy}{R}} dy = -\frac{ie^{\frac{ikYy}{R}} R}{kY} \Big|_{-b/2}^{b/2}. \quad (3.16)$$

Haciendo el cambio de variable $\beta = kbY/2R \implies kY = \beta 2R/b$ y realizando las operaciones pertinentes obtenemos:

$$\int_{-b/2}^{b/2} e^{\frac{\imath k Y y}{R}} dy = b \left(\frac{e^{\imath\beta} - e^{-\imath\beta}}{2\imath\beta} \right) = b \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right). \quad (3.17)$$

Ahora integrando con respecto a x tenemos que:

$$\int_{c-a/2}^{c+a/2} e^{\frac{\imath k X x}{R}} dx = \left(e^{\frac{\imath k X c}{R}} \right) \left[\frac{\imath e^{-\frac{\imath k X a/2}{R}}}{kX} - \frac{\imath e^{\frac{\imath k X a/2}{R}}}{kX} \right]. \quad (3.18)$$

Haciendo el cambio de variable $\alpha = kaY/2R \implies kY = \alpha 2R/a$ y realizando las operaciones pertinentes obtenemos:

$$\int_{c-a/2}^{c+a/2} e^{\frac{\imath k X x}{R}} dx = \left(e^{\frac{\imath k X c}{R}} \right) a \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) = a \left(e^{\frac{\imath 2\alpha c}{a}} \right) \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right). \quad (3.19)$$

Finalmente sustituyendo los resultados de (3.18) y (3.19) en (3.15) obtenemos:

$$\vec{E} = \frac{\epsilon_A e^{\imath(\omega t - kR)}}{R} e^{\frac{\imath 2\alpha c}{a}} ab \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right). \quad (3.20)$$

La ecuación (3.20) la podemos reescribir como:

$$\vec{E} = \frac{\epsilon_A e^{\imath(\omega t - kR)}}{R} ab \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) \left[\cos \left(\frac{2\alpha c}{a} \right) + \imath \sin \left(\frac{2\alpha c}{a} \right) \right]. \quad (3.21)$$

Donde la contribución de la j -ésima rendija (con la primera rendija numerada en cero) es:

$$E_j = \frac{\epsilon_A e^{\imath(\omega t - kR)}}{R} ab_j \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) \left(\frac{\sin \beta_j}{\beta_j} \right) \left[\cos \left(\frac{2\alpha c_j}{a} \right) + \imath \sin \left(\frac{2\alpha c_j}{a} \right) \right]. \quad (3.22)$$

La perturbación óptica total proporcionada por (3.20) es simplemente la suma de las contribuciones de cada una de las aberturas, es decir $\vec{E} = \sum_{j=0}^{N-1} E_j$.

3.4. caso general

En la teoría clásica escalar de la difracción la aproximación de Fraunhofer, o condición de campo lejano, impuesta a la integral de Kirchhoff reduce la integral a una transformada de Fourier aplicada a una función de abertura, de tal manera que si definimos nuestra función de abertura como:

$$f(r, \theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \in [0, R], \theta \in [0, 2\pi] \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases} \quad (3.23)$$

Donde r y θ son coordenadas polares utilizadas para describir la extensión espacial de una abertura con geometría hipocicloide en el plano de abertura y R es la misma que calculamos en (3.6) ; similarmente, en el plano de observación ρ y φ representan las coordenadas polares de frecuencia para el patrón de difracción correspondiente.

De tal manera que la transformada de Fourier en coordenadas polares[10] para la función (3.23) es definida por:

$$\mathcal{F}\{f(r, \theta)\} = F(\rho, \varphi) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r, \theta) \exp[-i2\pi r \rho \cos(\theta - \varphi)] r dr d\theta. \quad (3.24)$$

Si en la ecuación (3.24) tomamos R como el limite superior en la primera integral tenemos:

$$F(\rho, \varphi) = \int_0^R \int_0^{2\pi} f(r, \theta) \exp[-i2\pi r \rho \cos(\theta - \varphi)] r dr d\theta. \quad (3.25)$$

Para obtener una solución partiremos de la definición de las funciones Bessel a primer orden usando la función generadora introducida por Schlomilch[11], dada por:

$$\exp [x(t - t^{-1})/2] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x). \quad (3.26)$$

Usando un cambio de variable $t = i \exp(i\theta)$ y sustituyendo en la ecuación (3.26) obtenemos que:

$$\exp(ix \cos \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \exp(in\theta) J_n(x). \quad (3.27)$$

Usando el cambio de índices $m = -n$, que $i^{-1} = -i$ y que la identidad $J_{-n}(x) =$

$(-1)^n J_n(x)$, podemos escribir la suma en la ecuación (3.27) como:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \exp(in\theta) J_n(x) = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} i^n [\exp(in\theta) + \exp(-in\theta)] J_n(x). \quad (3.28)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \exp(ix \cos \theta) &= J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n J_n(x) \cos n\theta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (-i)^n J_n(x) \cos n\theta. \end{aligned} \quad (3.29)$$

La ecuación (3.29) es la identidad de Jacobi conjugada que usaremos en el exponencial complejo de la integral de la ecuación (3.25) y definiendo la variable $\xi = 2\pi\rho$ tenemos que:

$$\begin{aligned} F(\rho, \varphi) &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (-i)^n J_n(\xi r) \cos[n(\theta - \varphi)] r dr d\theta, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (-i)^n \int_0^R J_n(\xi r) r dr \int_0^{2\pi} \cos[n(\theta - \varphi)] d\theta. \end{aligned} \quad (3.30)$$

La ecuación (3.30) es la transformada de Fourier escrita como una suma infinita, donde el n esimo termino puede ser expresado como el producto de una función radial $\mathbb{E}_n(\rho)$ y una función angular $\Phi_n(\varphi)$. Para cada $n \geq 0$, estos coeficientes están dados como:

$$\mathbb{E}_n(\rho) = \int_0^R J_n(\xi r) r dr, \quad (3.31)$$

$$\Phi_n(\varphi) = \int_0^{2\pi} \cos[n(\theta - \varphi)] d\theta. \quad (3.32)$$

Donde la ecuación (3.32) la podemos resolver sin muchas dificultades obteniendo:

$$\Phi_n(\varphi) = \int_0^{2\pi} \cos[n(\theta - \varphi)] d\theta = \frac{\sin[n(2\pi - \varphi)] + \sin(n\varphi)}{n}. \quad (3.33)$$

Ahora sustituyendo el resultado obtenido en (3.33) en (3.30) obtenemos que:

$$F(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (-i)^n \int_0^R J_n(\xi r) r dr \left(\frac{\sin[n(2\pi - \varphi)] + \sin(n\varphi)}{n} \right). \quad (3.34)$$

La ecuación (3.34) describe el campo eléctrico para cualquier hipocicloide, sin embargo no se ha resuelto la función radial expuesta en (3.31) debido a que requiere un tratamiento especial. Además de que de ella no obtenemos una solución completa dado el argumento de J_n .

3.4.1. Otro camino

Retomando la ecuación (3.25) y cambiando el orden de integración obtenemos:

$$F(\rho, \varphi) = \int_0^{2\pi} \int_0^R f(r, \theta) \exp[-i2\pi r \rho \cos(\theta - \varphi)] r dr d\theta. \quad (3.35)$$

Integrando con respecto a r,

$$F(\rho, \varphi) = \int_0^{2\pi} \frac{\exp[-2i\pi \rho r \cos(\theta - \varphi)] \sec(\theta - \varphi) [2i\pi \rho r + \sec(\theta - \varphi)]}{4\rho^2 \pi^2} \Big|_0^R d\theta. \quad (3.36)$$

Evaluando los límites de integración obtenemos:

$$\frac{1}{4\rho^2 \pi^2} \int_0^{2\pi} \exp[-2i\pi \rho R \cos(\theta - \varphi)] \sec(\theta - \varphi) [2i\pi \rho R + \sec(\theta - \varphi)] - \sec^2(\theta - \varphi). \quad (3.37)$$

La ecuación (3.37) la podemos descomponer en tres integrales dadas como:

$$\frac{i}{2\rho\pi} \int_0^{2\pi} \exp[-2i\pi \rho R \cos(\theta - \varphi)] \sec(\theta - \varphi) R d\theta, \quad (3.38)$$

$$\frac{1}{4\rho^2 \pi^2} \int_0^{2\pi} \exp[-2i\pi \rho R \cos(\theta - \varphi)] \sec^2(\theta - \varphi) d\theta, \quad (3.39)$$

$$\frac{1}{4\rho^2 \pi^2} \int_0^{2\pi} -\sec^2(\theta - \varphi) d\theta. \quad (3.40)$$

Que al expandir en serie (3.38) obtenemos:

$$\frac{\iota}{2\rho\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{c+d} e^{-2i\pi\rho\sqrt{c+d}\cos(\varphi)} \sec(\varphi) + \theta \left(-2i\pi\rho(c+d) \tan(\varphi) e^{-2i\pi\rho\sqrt{c+d}\cos(\varphi)} - \sqrt{c+d} \tan(\varphi) \sec(\varphi) e^{-2i\pi\rho\sqrt{c+d}\cos(\varphi)} \right) + \dots \right) d\theta. \quad (3.41)$$

De manera similar expandiendo en serie (3.39) obtenemos:

$$\frac{1}{4\rho^2\pi^2} \int_0^{2\pi} \left(e^{-2i\pi\rho\sqrt{c+d}\cos(\varphi)} \sec^2(\varphi) + \theta \left(-2i\sqrt{(c+d)} e^{-2i\pi\rho\sqrt{c+d}\cos(\varphi)} \pi\rho \sec(\varphi) \tan(\varphi) - 2e^{-2i\pi\rho\sqrt{c+d}\cos(\varphi)} \sec^2(\varphi) \tan(\varphi) \right) + \dots \right) d\theta. \quad (3.42)$$

Finalmente al expandir en serie (3.40)

$$\frac{1}{4\rho^2\pi^2} \int_0^{2\pi} \left(\sec^2(\varphi) - 2\theta \left(\tan(\varphi) \sec^2(\varphi) \right) + \dots \right) d\theta. \quad (3.43)$$

Que al integrar y tomando únicamente los tres primeros términos obtenemos:

$$E(\rho, \varphi) = \frac{1}{f\pi\rho^2\sqrt{c+d}} e^{-i\pi\rho(e^{-i\varphi}+e^{i\varphi})\sqrt{c+d}} \left(\frac{g\pi^2\sqrt{c+d}}{(e^{-i\varphi}+e^{i\varphi})^5} \left(3(e^{-i\varphi}+e^{i\varphi}) - e^{-3i\varphi} - e^{3i\varphi} + \pi \left(\frac{1}{2}(-11)i(e^{-i\varphi}-e^{i\varphi}) + \frac{1}{2}i(e^{-3i\varphi}-e^{3i\varphi}) \right) \right) - \frac{g\pi^4\rho(e^{-i\varphi}-e^{i\varphi}) \left(\frac{1}{2}(e^{-2i\varphi}+e^{2i\varphi})(2c+d(3k^2+2)) - 22c+d(3k^2-22) \right)}{(e^{-i\varphi}+e^{i\varphi})^4} \right). \quad (3.44)$$

La expresión de arriba nos brinda una solución aproximada del campo dada cualquier hipocicloide donde $c = A^2 + B^2$ y $d = 2AB$ son ambas variables auxiliares para el radio obtenido en (3.6) y f, g son constantes. Cabe mencionar que se toman los primeros tres términos de la expansión en serie debido a las limitaciones que se presentamos a la hora de graficar sin embargo podemos tomar en cuenta un mayor

numero de términos si trabajáramos con equipos mas potentes.

Capítulo 4

Resultados y comparaciones

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos a través de la ecuación (3.44) para cuatro, ocho y diez cúspides. Al mismo tiempo se muestra la comparación de estos resultados con los obtenidos en [8]. Los resultados mostrados en las figuras (4.1) y (4.3) fueron reportados en otro trabajo de tesis y son totalmente numéricos. Como ya ha sido mencionado anteriormente, esta comparación es necesaria para demostrar que la ecuación analítica que se ha obtenido en este trabajo de tesis es correcta (ecuación 3.44), su comportamiento es similar a los reportados en [8]. Los resultados que se muestran son únicamente perfiles de intensidad de aberturas de tipo hipocicloides de cuatro, ocho y diez cúspides.

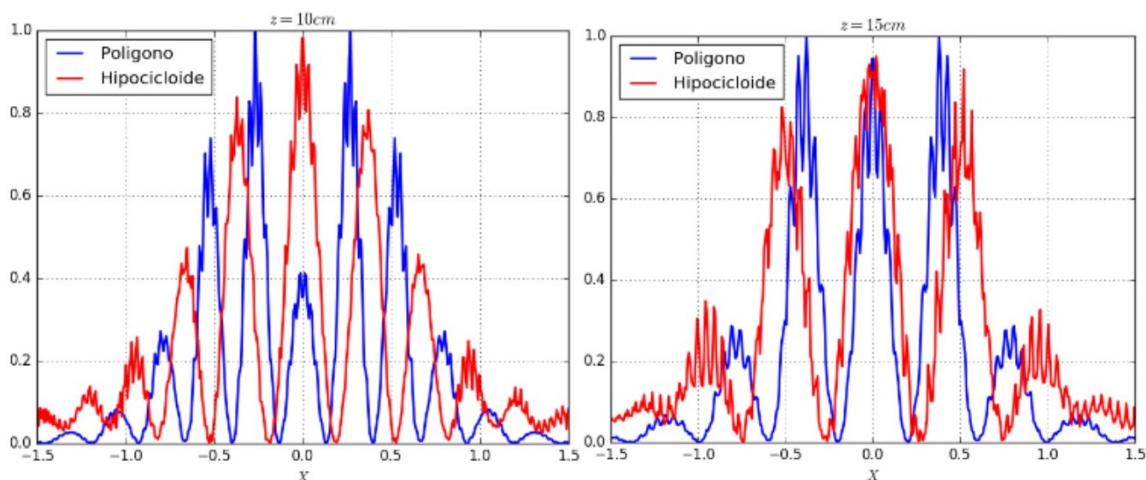


Figura 4.1: Perfiles de intensidad generados por una hipocicloide de cuatro cúspides y un polígono de cuatro lados.

En la figura (4.1) se muestran perfiles de intensidad de polígonos e hipocicloides a dos distancias diferentes de propagación (resultados numéricos obtenidos por otro autor). Este comportamiento es similar al reportado en la figura (4.2), dado por la ecuación (3.44) para cuatro cúspides, observando los mismos tres picos. Como resultado de esta comparación deducimos que la ecuación (3.44) es correcta, ya que muestra una intensidad máxima en el centro y dos intensidades menores a su alrededor, tal como se observa en la figura (4.1). Desafortunadamente no fue posible presentar imágenes bidimensionales de las distribuciones de intensidad producidos por aberturas de tipo hipocicloide. Esta limitación es de tipo computacional, es decir, en el momento de meter esta ecuación al Matemáticas (programa para graficar funciones) la computadora no fue capaz de arrojar la gráfica, a cambio se queda colgada. Una posible solución a este problema sería trabajar en un centro computacional avanzado, sin embargo, no nos fue posible trabajar en uno de estos centros.

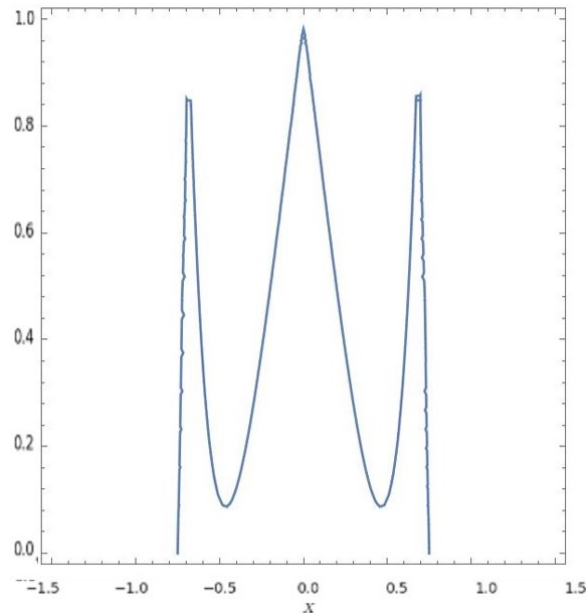


Figura 4.2: Perfil de intensidad generado por una hipocicloide de cuatro cúspides obtenido con la ecuación (3.44).

Ahora, en la figura (4.3) se muestran los perfiles de intensidad obtenidos numéricamente por una abertura de tipo hipocicloide de ocho cúspides y un polígono de ocho lados. De igual manera este comportamiento es reproducido por la figura (4.4),

comportamiento analítico arrojado por la ecuación (3.44).

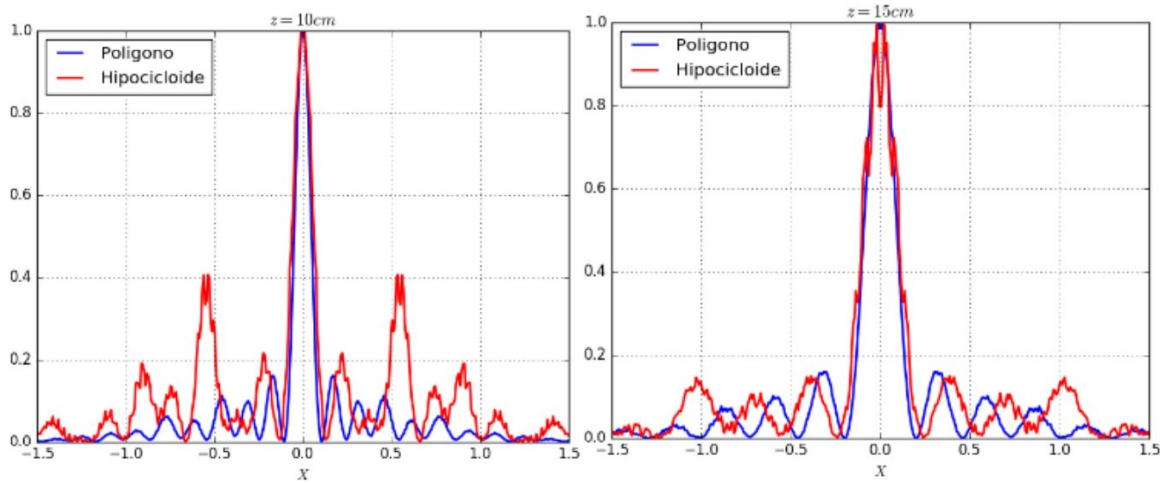


Figura 4.3: Comparación de los perfiles de intensidad generados por una hipocicloide de ocho cúspides y un polígono de ocho lados.

Como se observa en la siguiente figura, el perfil de intensidad tiene nuevamente un máximo en el centro, pero los máximos secundarios a su alrededor son de menor intensidad, comportamiento descrito también en la figura (4.3), esto nuevamente da veracidad a nuestra ecuación obtenida.

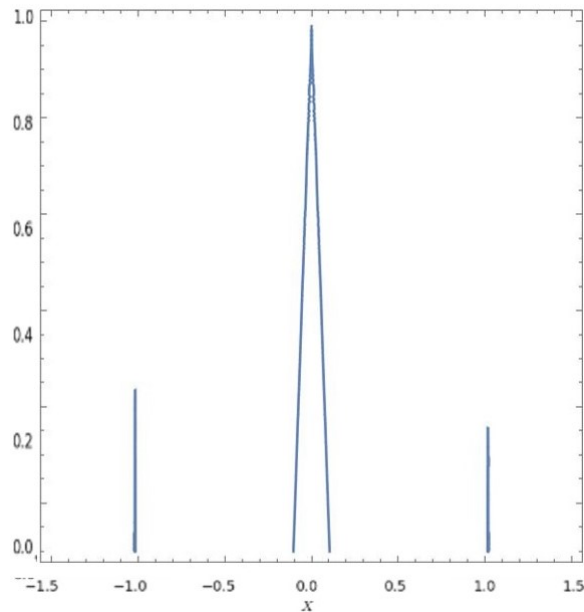


Figura 4.4: Perfil de intensidad generado por una hipocicloide de ocho cúspides.

A continuación, se muestran otros resultados obtenidos de la ecuación (3.44). En la

primera imagen de la figura (4.5) se muestra el perfil de intensidad generado por una hipocicloide de tres cúspides y en la segunda imagen el perfil de intensidad generado por una hipocicloide de 10 cúspides. Cabe mencionar que a pesar de la generalidad obtenida por la ecuación (3.44) tenemos otras limitantes y es que dada su complejidad no nos fue posible obtener gráficas en 3D así como sus cortes transversales ya que el tiempo de procesamiento es muy grande, además de que perdemos una gran parte de la información, con lo cual solo nos es posible tener una idea con los perfiles de intensidad.

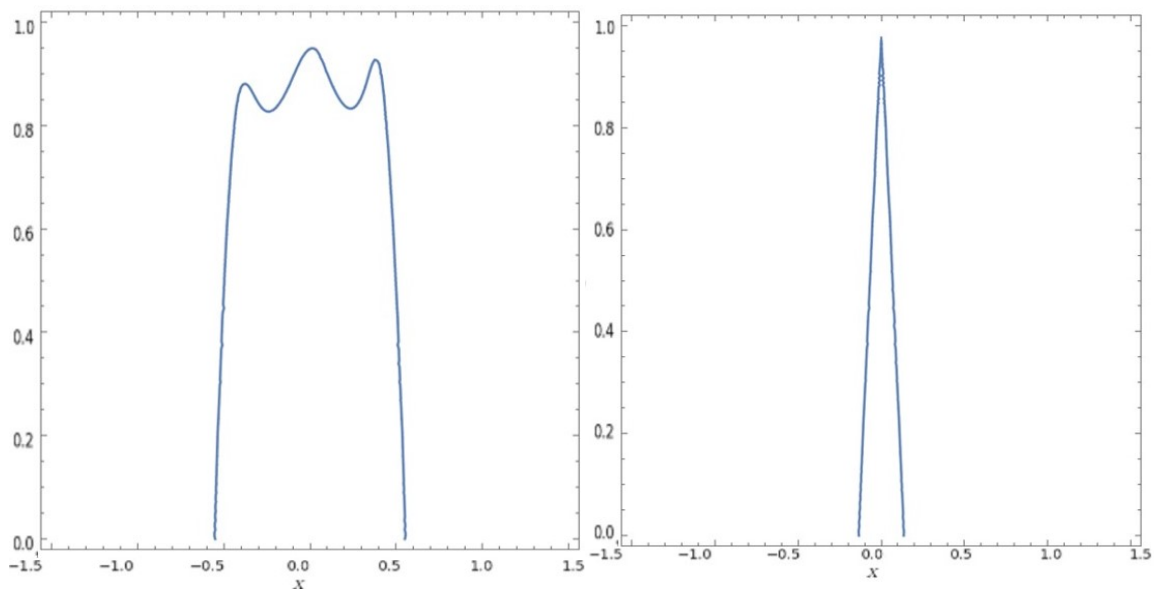


Figura 4.5: Perfiles de intensidad generados por una hipocicloide de tres y diez cúspides.

Una deducción importante que deseamos mencionar como resultado de estas gráficas, es que a medida que aumenta el número de cúspides la intensidad central crece y las intensidades vecinas decrecen, esto se debe a que a mayor número de cúspides de la hipocicloide tiende a ser un círculo y bajo estas condiciones la intensidad es mas grande que las intensidades vecinas.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se obtuvo una solución analítica de las distribuciones de intensidad generadas por aberturas de tipo hipocicloide, de manera aproximada, específicamente para la hipocicloide de cuatro y ocho cúspides. Se ha mostrado que los resultados obtenidos se asemejan a los resultados obtenidos numéricamente en trabajos anteriores, lo cual da veracidad a nuestra ecuación obtenida. Una desventaja a la que nos enfrentamos fue a la pérdida de información de los patrones de intensidad debido a que consideramos aproximaciones a la hora de resolver las ecuaciones analíticas, aproximaciones necesarias en este estudio. Específicamente, estas pérdidas aparecen al resolver las integrales, las cuales se expandieron en serie y además que solo tomamos los primeros términos para hacer las gráficas. Sin embargo, obtuvimos una gran ventaja, una forma general para el campo que al variar algunos parámetros nos da los valores particulares de cada hipocicloide.

En cuanto a la forma de los perfiles de intensidad, se observó que a mayor distancia de propagación de las distribuciones de intensidad, nuestros resultados obtenidos se asemejan a los resultados numéricos dados en la referencia [8]. Recordemos que en este estudio se partió de la integral de difracción de Fraunhofer, la cual ya toma en cuenta las condiciones de campo lejano.

En general notamos que en cuanto aumentamos el número de picos de las hipocicloides, la mayor intensidad se concentra en el centro de la distribución.

Bibliografía

- [1] Okan K Ersoy. *Diffraction, fourier optics and imaging*, volume 30. John Wiley & Sons, 2006.
- [2] R Milford and Robert W Christy. Fundamentos de la teoría electromagnética. *Editor Addison-Wesley Iberoamericana*, 1982.
- [3] Joseph W Goodman. *Introduction to Fourier optics*. Roberts and Company Publishers, 2005.
- [4] E. Hecht. *Optica*. Pearson-Addison Wesley, 2000.
- [5] RD Guenther. Modern optics john wiley & sons. *Inc., New York*, 1990.
- [6] Grant R Fowles. *Introduction to modern optics*. Courier Corporation, 1989.
- [7] C. H. Lehmann. *Geometría Analítica*. Editorial Limusa, 1999.
- [8] Colegio de Física. *Generación y Comparación de Patrones de Difracción de Aberturas Poligonales e Hipocicloides*. PhD thesis, Benemérita Universidad Autónoma De Puebla, 2014.
- [9] Cesar de Gante Gonzalez. *Evolución espacial de distribuciones de intensidad de tipo Poligonal e Hipocicloide*. PhD thesis, Benemérita Universidad Autónoma De Puebla, 2017.
- [10] George E Andrews, Richard Askey, and Ranjan Roy. *Special functions*, volume 71. Cambridge university press, 2000.

- [11] George Neville Watson. *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge university press, 1995.