



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO
MATEMÁTICAS

RETÍCULAS ORTOMODULARES COMO
ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS PARA LA
MECÁNICA CUÁNTICA

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN FÍSICA

P R E S E N T A :

LAURA ESTHELA HERNÁNDEZ MORALES



ASESOR Y DIRECTOR :

IVÁN MARTÍNEZ RUÍZ
PUEBLA, PUEBLA. FEBRERO, 2019

Agradecimientos

Al WiFi de la facultad por ser tan horrible. ♡ :c

Resumen

Con el descubrimiento de la mecánica cuántica y su formalismo llegaron muchas incógnitas, pues parecía que su misma naturaleza contradecía muchos principios básicos que se daban por hecho hasta ese entonces. Una de las consecuencias del formalismo fue la relación de incertidumbre que viene de la interpretación probabilística de las observables físicas, pues esto se traduce como una restricción sobre la combinación de proposiciones lógicas que podemos formar, más adelante veremos que como resultado, la propiedad distributiva de la lógica proposicional no se satisface, lo que llevó a la necesidad de encontrar una lógica que fuera consistente en el formalismo que describe la mecánica cuántica. Fue en 1936 cuando Garret Birkhoff y John Von Neumann propusieron una lógica consistente con algunos de los postulados de la mecánica cuántica. Esta consiste en una retícula de proyectores ortogonales en un espacio de Hilbert.

En esta tesis hacemos un repaso sobre una estructura algebraica que describe una lógica que subyace del formalismo de la mecánica cuántica. Vemos que esta estructura es una retícula ortocomplementada, justo como lo es el álgebra que subyace a la lógica proposicional, salvo que ésta no es una retícula distributiva.

Por último, se aplica esta estructura algebraica sobre los espacios de Hilbert, pues es el espacio que utilizamos en el formalismo de la mecánica cuántica. Solo que a diferencia de usar proyectores como elementos

de nuestra retícula podemos utilizar subespacios cerrados de Hilbert, y según “*Svozil*” [8] es una forma equivalente de definir esta estructura algebraica.

Palabras clave: *observables, retícula ortomodular, espacios de Hilbert, representación algebraica de una lógica.*

Introducción

La física es la ciencia que nos ayuda a entender nuestro universo, aprendemos de él realizando experimentos, anotando los resultados y sacando conclusiones acerca de estos. Utilizamos las matemáticas como una herramienta que nos permite construir modelos para explicar fenómenos y hacer predicciones sobre ellos, es a lo que se le conoce como una teoría física. Hacia finales del siglo XIX se podían explicar casi todos los fenómenos observados pero había uno que aún desconcertaba, la radiación de cuerpo negro.

Un cuerpo negro es un sistema físico ideal que absorbe toda la radiación electromagnética incidente. Todos los objetos al estar a cierta temperatura emiten radiación en todas las longitudes de onda, pero es más intensa en una cierta longitud de onda que puede ser calculada conociendo la temperatura del objeto. La radiación que emite un cuerpo negro se llama radiación de cuerpo negro.

En la figura 1 podemos ver las gráficas de diferentes cuerpos negros a distintas temperaturas. Observemos que a medida que baja su temperatura hallamos que el pico de su intensidad también baja y se encuentra en las longitudes de onda más largas. Según las predicciones de la física clásica deberíamos de obtener la gráfica que está en color negro, la cual es inconsistente con las aproximaciones experimentales. A este problema se le dió el nombre de catástrofe ultravioleta.

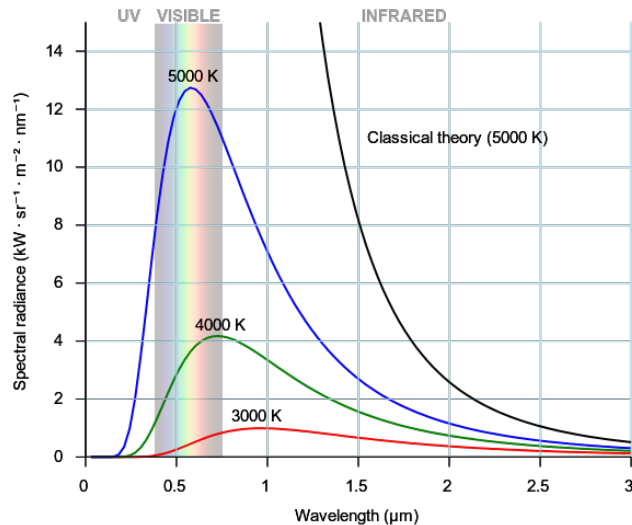


Figura 1: Gráfica de la radiación de un cuerpo negro a diferentes temperaturas. La gráfica de color negro es la predicción según las leyes de la física clásica. Imagen de Wikipedia.

Se podría decir que la mecánica cuántica nació el 14 de Diciembre de 1900, el día que Max Planck expuso su solución a la catástrofe ultravioleta. En ella utilizó la hipótesis que la energía no se radía de manera continua, sino en múltiplos de una nueva constante universal, conocida ahora como *constante de Planck*. Esta solución trajo más interrogantes que soluciones y destapó toda una nueva área de la física.

Ahora bien, por otro lado la lógica es la parte de las matemáticas encargada de estudiar la estructura y validez de los enunciados de un lenguaje, con independencia de su contenido. Cuando hablamos de la *lógica de una teoría física* nos referimos a una sistema compuesto por proposiciones, símbolos y reglas que nos ayudan a hallar todos los posibles enunciados permitidos por esa teoría física acerca de las propiedades o de los resultados de los experimentos que se pueden realizar sobre un sistema físico [9].

Desde que John von Neumann y Garret Birkhoff publicaron un artículo con título “*The logic of Quantum Mechanics*”[1] en 1936, se impulsó todo un programa de investigación. Una de las motivaciones para estudiar la lógica que rige los sistemas cuánticos se puede ver como un esfuerzo por lograr definir la estructura algebraica de la mecánica cuántica, esto nos puede ayudar a darle interpretación, poder estudiar su relación con la estructura algebraica de la mecánica clásica, y ver si existen alguna estructura más general, entre otras cosas que si bien podrían no ser útiles en términos prácticos serán muy interesantes.

Actualmente la lógica cuántica aún es una formulación incompleta de la mecánica cuántica. El modelo más utilizado hoy en día para estudiar la lógica cuántica emplea el uso de categorías, pero en este trabajo haremos un repaso del trabajo de Neumann y Birkhoff por interés histórico.

En el primer capítulo damos un pequeño repaso a conceptos que utilizaremos más adelante y exponemos dos de las consecuencias más importantes de la teoría cuántica que no son consistentes con los métodos de razonamiento clásico: la relación de incertidumbre y la interpretación probabilística de la mecánica cuántica. En el segundo capítulo empezamos en la construcción de un modelo consistente con la relación de incertidumbre. En el tercero vemos cómo es que podemos asociar subespacios cerrados del espacio de Hilbert con los elementos de una retícula y estos se corresponden con las proposiciones de la lógica.

Índice General

Resumen	v
Introducción	vii
1 Preliminares	1
1.1 Espacios de Hilbert	1
1.2 Lógica clásica proposicional y álgebras booleanas	6
1.3 Postulados de la mecánica cuántica	11
1.4 Implicaciones de la mecánica cuántica en la lógica proposicional	18
2 Estructura algebraica de la lógica cuántica	21
2.1 Manuales de Experimentos	21
2.2 Construyendo una estructura algebraica	26
3 Retículas ortomodulares en un espacio de Hilbert	45
4 Conclusiones	55
Bibliografía	58

CAPÍTULO 1

Preliminares

1.1. Espacios de Hilbert

El formalismo de la mecánica cuántica se basa en el uso de los espacios de Hilbert, de aquí la importancia para hacer un apartado especial de este tema. Repasaremos algunas definiciones y conceptos importantes que nos servirán más adelante, cuando veamos cómo se ve la estructura algebraica de la mecánica cuántica en un espacio de Hilbert.

Para comenzar a hablar de espacios de Hilbert, debemos hablar de espacios mucho más amplios, para poder ver cuáles son todas las propiedades que un espacio de Hilbert tiene. Todas las demostraciones de los teoremas en esta sección pueden hallarse en cualquier libro de un curso básico de espacios métricos.

Definición 1.1. Espacios Métricos

Un espacio métrico (X, d) , consiste en un conjunto X junto con una función métrica $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades:

1. Definido positivo: $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$
2. No degenerado: $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$
3. Simétrico: $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$
4. Desigualdad del triángulo: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in X$

Definición 1.2. Espacio normado

Un espacio normado $(L, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial L sobre \mathbb{C} , que junto con una operación $\|\cdot\| : L \rightarrow \mathbb{R}$ llamada norma, satisface las siguientes propiedades:

1. Definido positivo: $\|v\| \geq 0, \forall v \in L$
2. No degenerado: $\|v\| = 0$ si y sólo si $v = 0$
3. Multiplicativo: $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|, \forall v \in L$ y $\lambda \in \mathbb{C}$
4. Desigualdad del triángulo: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|, \forall v, w \in L$

Definición 1.3. Espacio con producto Interior

Definimos $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ a un espacio vectorial V sobre \mathbb{C} junto con un producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ que tiene las siguientes propiedades:

1. Positivo: $\langle v, v \rangle \geq 0, \forall v \in V$.
2. No degenerado: $\langle v, v \rangle = 0$ si y sólo $v = 0$.
3. Multiplicativo: $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle, \forall u, v \in V$ y $\lambda \in \mathbb{C}$
4. Simétrico: $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle^*, \forall u, v \in V$
5. Distributiva: $\langle u + w, v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle, \forall u, w, v \in V$

Se puede ver que un espacio con producto interior, induce una norma y ésta a su vez una métrica; es decir, si tenemos un espacio con producto interno entonces este espacio es también normado y métrico, pero no viceversa.

Definición 1.4. Una sucesión $\{x_k\}$ en un espacio V se dice que converge en norma a un vector $v \in V$ si y solo si $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - v\| = 0$.

En particular nos van a interesar aquellos espacios que sean completos, pero recordemos que no todos los espacios normados o con producto interno son completos, por esta razón, queremos ser capaces de distinguir entre los espacios normados o con producto interno que sean completos de los que no lo son. Que un espacio sea completo significa que toda sucesión de Cauchy converge. A continuación daremos las definiciones:

Definición 1.5. Sucesión de Cauchy

Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión. Diremos que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy, si para todo número real $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo N tal que para todos los números naturales $m, n > N$ se cumple que $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

De la definición podemos ver que una sucesión de Cauchy es una sucesión tal que para cualquier distancia dada, siempre podemos encontrar un término de la sucesión tal que para dos términos cualesquiera posteriores la distancia entre ellos es menor que la dada. Si estuviéramos en el campo de los números reales podríamos asegurar que toda sucesión es convergente si y sólo si es de Cauchy, pero en adelante siempre que hablemos de un espacio este estará definido, en general, sobre el campo de los números complejos. En adelante todas las sucesiones que consideremos serán sucesiones de Cauchy, a menos que se diga lo contrario.

Teorema 1.6. Toda sucesión en V que converja en norma a un vector de V es de Cauchy

Definición 1.7. Espacio métrico completo

Un espacio métrico M se dice que es completo si toda sucesión de Cauchy converge en norma a un vector $m \in M$.

Ahora, ya podemos definir lo que es un espacio de Banach, que es un espacio donde están contenidos los espacios de Hilbert.

Definición 1.8. Espacio de Banach

Un espacio de Banach es un espacio vectorial normado y completo en la métrica definida por su norma.

Esto quiere decir que un espacio de Banach es un espacio vectorial V sobre los complejos con una norma $\|\cdot\|$ tal que toda sucesión de Cauchy, con respecto a la métrica $d(x, y) = \|x - y\|$ en V tiene un límite en V .

Definición 1.9. Espacio de Hilbert

Un espacio de Hilbert H es un espacio vectorial con producto interno que es también un espacio completo con respecto a la métrica inducida por el producto interno.

De estas definiciones podemos notar que cada espacio de Hilbert es un espacio de Banach porque, por definición, un espacio de Hilbert es completo con respecto a la norma inducida por su producto interior. Pero no todos los espacios de Banach son espacios de Hilbert. Una condición necesaria y suficiente para que un espacio de Banach sea también un espacio de Hilbert es que se satisfaga la identidad del paralelogramo entre los elementos del espacio:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

para todo u y v en nuestro espacio de Banach V , y donde $\|\cdot\|$ es la norma sobre V .

En la figura 1.1 podemos ver gráficamente el lugar que los espacios de Hilbert ocupan dentro de una de las grandes clasificaciones que podemos hacer dentro de los espacios métricos.

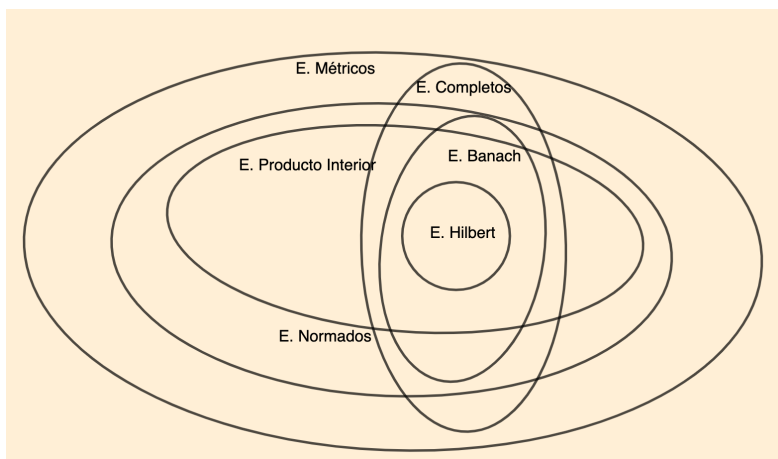


Figura 1.1: Clasificación de espacios

Hasta aquí tenemos lo necesario para comenzar el capítulo 3, pero daremos unos teoremas que nos servirán en la demostraciones de los lemas y teoremas que enunciemos en dicho capítulo.

Teorema 1.10. Todo conjunto finito ortonormal en H es linealmente independiente en H .

Demostración. Sea $A = \{x_1, x_2, \dots\}$ un conjunto finito ortonormal. Para demostrar que es linealmente independiente tomemos $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k = 0$, pero podemos escribir $\lambda_k = \langle 0, x_k \rangle = 0$, esto es $\lambda_k = 0$, por lo que A es un conjunto linealmente independiente. ■

Teorema 1.11.

- Si $\{x_k\}$ es una sucesión en H que converge en norma a $x \in H$, entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = \|x\|$
- Si $\{x_k\}$ y $\{y_k\}$ son sucesiones en H que convergen en norma a x y y respectivamente, entonces
 1. $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle x_k, y_k \rangle = \langle x, y \rangle$
 2. $\lim_{k \rightarrow \infty} \{x_k + y_k\} = x + y$
 3. $\forall \lambda \in \mathfrak{C}, \lim_{k \rightarrow \infty} \{\lambda x_k\} = \lambda x$

- Si $\{x_k\}$ es una sucesión sumable en H y si $y \in H$, entonces

$$\left\langle \sum_{k=1}^{\infty} x_k, y \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_k, y \rangle$$

- Si $S = \{x_1, x_2, \dots\}$ es un conjunto ortonormal numerable en H y $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$, entonces
 1. $\forall k \in \mathbb{N}, \lambda_k = \langle x, x_k \rangle$,
 2. $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda|^2$

1.2. Lógica clásica proposicional y álgebras booleanas

La lógica es un modelo matemático que se encarga del análisis de los métodos de razonamiento. La principal tarea de los lógicos es dar una sistemática formalización y clasificación de los métodos válidos de razonamiento.

En la lógica proposicional, como cualquier otro modelo matemático, comienzas interesándote en ciertos elementos de la realidad, en nuestro

caso es el lenguaje, y seleccionamos características específicas de éste, a nosotros solo nos importan aquellos enunciados a los que podamos asignarles un carácter de verdad, como “los árboles son amarillos”, “está lloviendo”; es cierto que ignoramos muchas otras cosas que están dentro del lenguaje como las siguientes: “¿Tienes 6 dedos?”, “¿Mañana va a llover?”, “Haz tu tarea”, porque a todas estas no podemos asignarles valores de verdad. Más aún, la única forma en la que los elementos de esta lógica no sean verdaderos es que sean falsos, es decir, ignoramos las muchas otras formas en la que un enunciado puede no ser verdadero.

Una lógica es un lenguaje y como todo lenguaje tiene una sintáxis y una semántica; la sintáxis nos ayuda a saber cómo unir y relacionar nuestros elementos para que los elementos de nuestra lógica tengan coherencia, en este sentido la sintáxis establece un orden en nuestra lógica y la semántica nos ayuda a atribuir significado a estas expresiones; la sintaxis y la semántica son independientes pero se complementan entre sí. Existen muchos tipos de lógica dependiendo de la realidad que se quiera estudiar y el nivel de abstracción que se necesite. En este caso nos va a interesar la lógica clásica, en particular la lógica proposicional, la que todos en esta facultad hemos conocido desde el curso de matemáticas básicas.

“Se puede entender por lógica clásica a la estructura algebraica característica del conjunto de las proposiciones clásicas asociadas a un sistema físico clásico” [9].

El objetivo de estudiar la lógica aplicada a una teoría física es encontrar la estructura algebraica que describe lo esencial de la teoría. Veamos un ejemplo[9] de la lógica de un sistema clásico.

Consideremos un sistema sencillo formado por un circuito con dos focos conectados en paralelo, los llamaremos “foco A ” y “foco B ”, cada uno puede estar encendido o apagado. Una proposición clásica es un enunciado acerca de las propiedades del sistema que puede ser verdadero o falso. Ejemplos de proposiciones son: «el foco A está apagado», «el foco A está apagado y el B encendido», «ambos focos están encendidos», etc.

Además, estas proposiciones están ligadas por los símbolos, \neg , \wedge y \vee , que representan negación, conjunción y disyunción, respectivamente, como se puede ver en el siguiente cuadro 1.1.

A	<<el foco A está encendido>>
B	<<el foco B está encendido>>
$\neg A$	<<el foco A está apagado>>
$A \vee B$	<<el foco A está encendido o el foco B está encendido>>
$A \wedge B$	<<ambos focos están encendidos>>

Cuadro 1.1: Functores lógico-proposicionales.

Hay 16 diferentes combinaciones de proposiciones posibles que se pueden formar con los enunciados A , B y los símbolos \vee , \wedge y \neg . Cada proposición se puede asociar a un “estado del sistema”, el cual se puede representar como un subconjunto del *espacio de configuraciones*, S , del sistema. En nuestro ejemplo, el espacio de configuraciones puede ser representado mediante un plano con ejes cartesianos, como en la figura 1.2, donde representamos la proposición A como S_A (la región positiva del eje y), y simbolizaremos la proposición $\neg A$ como el subconjunto \bar{S}_A (la región negativa del eje y). Así mismo, la región positiva del eje x , denotada como S_B representa la proposición B y la región negativa de x , \bar{S}_B , la proposición $\neg B$.

Viendo las proposiciones como subconjuntos de S es más sencillo ver las 16 combinaciones diferentes de proposiciones que podemos formar, ya que podemos asociar a cada proposición un subconjunto y viceversa.

Veamos cuáles son:

1. La proposición que representa el espacio de configuraciones S :

$$A \vee \neg A \longrightarrow S_A \cup \bar{S}_A \quad \text{o bien,} \quad B \vee \neg B \longrightarrow S_B \cup \bar{S}_B$$

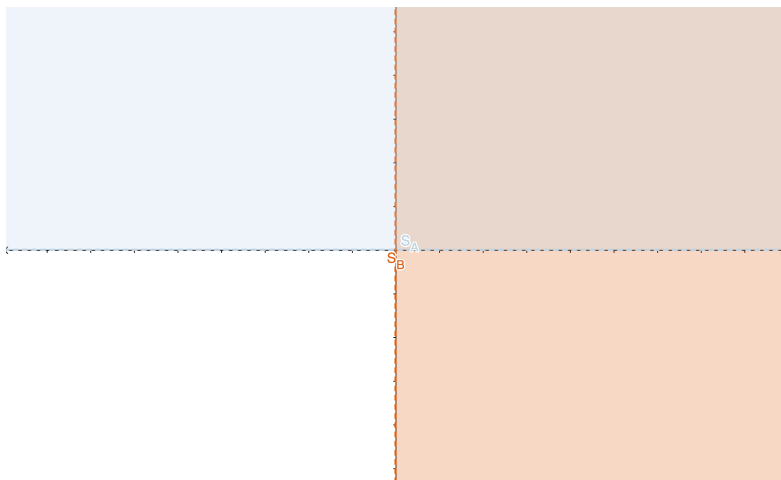


Figura 1.2: Espacio de configuraciones del sistema formado por dos focos conectados en paralelo S .

2. Las 4 proposiciones que representan dos cuadrantes contiguos de S :

$$A \longrightarrow S_A, \neg A \longrightarrow \bar{S}_A, B \longrightarrow S_B, \neg B \longrightarrow \bar{S}_B$$

3. Las 4 proposiciones que representan un solo cuadrante de S :

$$\begin{aligned} A \wedge B &\longrightarrow S_A \cap S_B, & A \wedge \neg B &\longrightarrow S_A \cap \bar{S}_B \\ \neg A \wedge B &\longrightarrow \bar{S}_A \cap S_B, & \neg A \wedge \neg B &\longrightarrow \bar{S}_A \cap \bar{S}_B \end{aligned}$$

4. Las 4 proposiciones representadas por 3 cuadrantes de S :

$$\begin{aligned} A \vee \neg B &\longrightarrow S_A \cup \bar{S}_B, & A \vee B &\longrightarrow S_A \cup S_B \\ \neg A \vee B &\longrightarrow \bar{S}_A \cup S_B, & \neg A \vee \neg B &\longrightarrow \bar{S}_A \cup \bar{S}_B \end{aligned}$$

5. Las 2 proposiciones formadas por dos cuadrantes opuestos de S :

$$\begin{aligned} (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B) &\longrightarrow (S_A \cup S_B) \cap (\bar{S}_A \cup \bar{S}_B) \\ (A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B) &\longrightarrow (S_A \cup \bar{S}_B) \cap (\bar{S}_A \cup S_B) \end{aligned}$$

6. La proposición representada por el conjunto vacío \emptyset :

$$A \wedge \neg A \longrightarrow S_A \cup \bar{S}_A$$

o bien,

$$B \wedge \neg B \longrightarrow S_B \cup \bar{S}_B$$

Podemos definir una implicación lógica a partir de una relación de inclusión en el espacio de configuraciones. Un ejemplo es que si tenemos que el foco A esta encendido un caso particular de esto es que ambos focos esten encendidos, esto es, $(S_A \cap S_B) \subset S_A$, lo cual es puede traducir como que $A \wedge B \implies A$. Con todo esto se puede ver que la lógica proposicional tiene la estructura de un álgebra booleana.

Definición 1.12. Álgebra booleana

Diremos que $\mathfrak{B} = \{S, \wedge, \vee, \neg\}$ (donde S es un conjunto que contiene al menos dos elementos S y \emptyset , \wedge y \vee son dos operaciones binarias en elementos de S , y \neg es una operación que actúa sobre un único elemento de S) es un álgebra booleana si para todo $A, B, C \in S$ se satisface:

- $A \vee B = B \vee A$
- $A \wedge B = B \wedge A$
- $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$
- $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$
- $A \vee (A \wedge B) = A$
- $A \wedge (A \vee B) = A$
- $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- $A \vee (B \wedge C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

- $A \vee (B \wedge \neg B) = A$
- $A \wedge (B \vee \neg B) = A$

Más aún, a partir de esta álgebra se puede definir una función $f : S \rightarrow \{0, 1\}$ tal que para todo $A, B \in S$,

$$f(A \vee B) = f(A) \vee f(B)$$

$$f(A \wedge B) = f(A) \wedge f(B)$$

$$f(\neg A) = \neg f(A)$$

De esta forma, si definimos al 0 como «falso», y a 1 como «verdadero» podemos pensar en esta función como una forma de asignar valores de verdad a nuestras variables, pero en este trabajo no vamos a tratar con estas funciones.

Con todo lo anterior queremos notar que tanto el espacio de configuraciones de un sistema clásico y la lógica proposicional comparten una estructura algebraica común, y este es el propósito de este trabajo; hallar una lógica que sea compatible con el formalismo de la mecánica cuántica y hallar la estructura algebraica subyacente.

1.3. Postulados de la mecánica cuántica

El propósito principal en física clásica es determinar la posición $\vec{r}(t)$ de una partícula de masa m en cualquier instante de tiempo t dado, ya que a partir de ahí se pueden hallar muchas otras cantidades de interés como son la velocidad $\vec{v}(t) = d\vec{r}(t)/dt$, momento $\vec{p} = m\vec{v}(t)$, entre otras. A lo anterior se le conoce como estudiar la dinámica de los sistemas físicos, es decir, su comportamiento a través del tiempo, y para ello existen diferentes formalismos; por ejemplo el formalismo Newtoniano, Lagrangiano y el de Hamilton, todos ellos son equivalentes y tienen sus propias ventajas y desventajas dependiendo del sistema físico a tratar.

Tradicionalmente en Mecánica Cuántica se utiliza el formalismo Hamiltoniano porque es el que utiliza Schrödinger para establecer la ecuación que lleva su nombre y ha resultado ser muy conveniente y fructífero.

Los orígenes de la teoría cuántica se remontan a inicios del siglo XX, las principales ideas surgieron al tratar de dar explicaciones a ciertos fenómenos cuya solución no era satisfactoria utilizando la teoría clásica. En el capítulo 1 del libro “*Quantum Mechanics, Concepts and Applications*” [11] viene un desarrollo histórico bastante completo, donde se exponen los experimentos cuyas implicaciones cimentaron las bases para esta teoría.

En un inicio, se trataron de implementar las mismas ideas clásicas para poder dar justificación a todos estos nuevos fenómenos que suscitaban sospechas, lo cual no fue posible porque en ese entonces aún no era tan claro, pero la naturaleza de la mecánica cuántica es muy distinta a la que estamos acostumbrados. Para empezar, ahora utilizamos un objeto matemático llamado “*función de onda*” Ψ , que nos ayuda a estudiar la dinámica del sistema, tristemente esta no nos ayuda a predecir la posición de una partícula a cualquier instante de tiempo dado, más aún en ningún instante, todo lo que esta función nos puede dar es una interpretación estadística del sistema, es decir, nos podrá dar información sobre dónde es *posible* encontrarla pero no sabremos la posición exacta, básicamente esto es la dinámica de la probabilidad de los estados del sistema. Más adelante hablaremos con más detalle sobre esta función.

El formalismo de la mecánica cuántica se basa en cinco postulados, los cuales están basados en un amplio número de observaciones experimentales, esto es, no se pueden deducir de otros principios. Estos postulados representan el mínimo conjunto de hipótesis necesarias para desarrollar la teoría cuántica. Aquí solo mencionaremos tres de ellos, que son los que nos interesan para los propósitos de esta tesis. Éstos fueron tomados del libro “*Quantum Mechanics*” [6].

Postulado 1: Estado de un Sistema

Todo sistema cuántico está representado por una función normalizada, llamada “función de onda, Ψ ” o “ket de estado” que pertenece a un espacio de Hilbert \mathcal{H} .

Fijada una base del espacio de Hilbert normalizada $\{|u_n\rangle\}_{n=1}^N$ tal que,

$$\left\{ |u_n\rangle \in \mathcal{H} \ ; \ \langle u_n, u_m \rangle = \delta_{nm} \ ; \ \forall \Psi \in \mathcal{H} \rightarrow \Psi = \sum_{i=1}^N c_i u_i \right\} \quad (1.1)$$

Las funciones de onda son una de las representaciones posibles de los estados sobre el espacio $L^2(\mathbb{R}^3)$, cuya definición rigurosa requiere el uso de espacios de Hilbert equipados.

Como podemos ver de la definición 1.1 la función de onda es una combinación lineal de posibles estados donde es posible hallar a la partícula, y el módulo al cuadrado de los coeficientes, $|c_i|^2$, representan la probabilidad de hallar a la partícula en el estado $|u_i\rangle$.

Postulado 2: Observables y Mediciones

Definición 1.13. Una observable es una variable dinámica (una magnitud física asociada a un sistema físico, como la posición, la energía y momento) que puede ser medida.

Las observables se representan matemáticamente mediante operadores hermitianos, ya que convenientemente sus eigenvalores son números reales y sus eigenestados forman una base ortogonal. El conjunto de valores propios de la observable \mathcal{O} recibe el nombre de espectro y sus vectores propios, definen una base ortogonal en el espacio de Hilbert.

Veamos que estos resultados son verdaderos. Podemos hallar una prueba de este resultado en el libro “*Quantum Mechanics*” [6].

Cuando hablamos de mediciones, en términos matemáticos nos referimos a hacer actuar la observable sobre la estado $|\Psi\rangle$ del sistema, de tal forma que provoca que esta función colapse a alguno de sus eigenestados $|u_n\rangle$.

Para cualquier lector que necesite una justificación completa de por qué se usan operadores hermitianos en Mecánica Cuántica sírvase de leer los capítulos 5 y 6 del libro “*Introduction to Hilbert Space and Quantum Logic*” [5].

Postulado 3: Interpretación probabilística

Cuando un sistema está en un estado normalizado Ψ , la medida de una observable A (con espectro puntual) dará como resultado el valor propio a , con una probabilidad $P_{A|\psi} = |\langle a|\psi\rangle|^2$, donde $|a\rangle$ es el eigenvector asociado al autovalor a (en notación del espacio de Hilbert esto se expresa como $A|a\rangle = a|a\rangle$).

Como consecuencia de este postulado, el valor esperado será:

$$\langle A \rangle_{|\psi\rangle} = \sum_i \lambda_i |\langle a_i|\psi\rangle|^2 = \langle \psi|A|\psi\rangle$$

Como consecuencia de la interpretación probabilística de las observables, para cualesquiera dos operadores (que no conmuten) definidos sobre el espacio de Hilbert existe una *relación de incertidumbre*. A continuación vamos a ver en que consiste esta relación, el desarrollo fue tomado del libro “*Introduction to Quantum Mechanics*” [10].

Para cualquiera observable \hat{A} , su varianza se puede expresar como:

$$\sigma_A^2 = \langle (\hat{A} - \langle A \rangle)\Psi | (\hat{A} - \langle A \rangle)\Psi \rangle = \langle f|f \rangle$$

donde $f \equiv (\hat{A} - \langle A \rangle)\Psi$. Así mismo, para cualquier observable \hat{B} ,

$$\sigma_B^2 = \langle g|g \rangle, \quad \text{donde } g \equiv (\hat{B} - \langle B \rangle)\Psi$$

Utilizando la desigualdad de Schwarz tenemos que

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 = \langle f|f \rangle \langle g|g \rangle \geq |\langle f|g \rangle|^2$$

Por otro lado, sabemos que para cualquier número complejo se cumple que

$$|z|^2 = [\text{Re}(z)]^2 + [\text{Im}(z)]^2 \geq [\text{Im}(z)]^2 = \left[\frac{1}{2i} (z - z^*) \right]^2$$

Ahora, tomemos $z = \langle f|g \rangle$

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i} [\langle f|g \rangle - \langle g|f \rangle] \right)^2 \quad (1.2)$$

Ahora calculemos $\langle f|g \rangle$ y $\langle g|f \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle f|g \rangle &= \langle (\hat{A} - \langle A \rangle)\Psi | (\hat{B} - \langle B \rangle)\Psi \rangle = \langle \Psi | (\hat{A} - \langle A \rangle)(\hat{B} - \langle B \rangle)\Psi \rangle \\ &= \langle \Psi | (\hat{A}\hat{B} - \hat{A}\langle B \rangle - \hat{B}\langle A \rangle + \langle A \rangle\langle B \rangle)\Psi \rangle \\ &= \langle \Psi | \hat{A}\hat{B}\Psi \rangle - \langle B \rangle \langle \Psi | \hat{A}\Psi \rangle - \langle A \rangle \langle \Psi | \hat{B}\Psi \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle \langle \Psi | \Psi \rangle \\ &= \langle \hat{A}\hat{B} \rangle - \langle B \rangle \langle A \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle \\ &= \langle \hat{A}\hat{B} \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle \end{aligned}$$

Similarmente, obtenemos

$$\langle g|f \rangle = \langle \hat{B}\hat{A} \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle$$

Por lo tanto

$$\langle f|g \rangle - \langle g|f \rangle = \langle \hat{A}\hat{B} \rangle - \langle \hat{B}\hat{A} \rangle = \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \quad (1.3)$$

en donde

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

Ahora, sustituyendo el resultado 1.3 en la ecuación 1.2 obtenemos que

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right)^2 \quad (1.4)$$

La desigualdad anterior se conoce como la relación de incertidumbre. Ahora veamos un ejemplo para ilustrar cómo esta relación nos dice que la exactitud de nuestras mediciones es limitada.

Supongamos que en un experimento queremos medir la posición en un solo eje (representado por el observable $\hat{x} = x$), y el momento lineal en el mismo eje ($\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$). Esto es,

$$\sigma_x^2 \sigma_p^2 \geq \left(\frac{1}{2i} \langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle \right)^2 \quad (1.5)$$

para esto debemos hallar el conmutador de \hat{x} y \hat{p} , es decir, $\hat{x} = x$ y $\hat{p} = (\hbar/i)d/dx$, debemos de tomar en cuenta que al ser operadores, estos actúan sobre una función de prueba $f(x)$, así hagamos actuar $[\hat{x}, \hat{p}]$ sobre $f(x)$, de tal forma que

$$[\hat{x}, \hat{p}]f(x) = \left[x \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}(f) - \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}(xf) \right] = \frac{\hbar}{i} \left(x \frac{df}{dx} - x \frac{df}{dx} - f \right) = i\hbar f(x)$$

Así, al deshacernos de la función de prueba $f(x)$ obtenemos

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

sustituyendo este último resultado en la ecuación 1.5, obtenemos

$$\sigma_x^2 \sigma_p^2 \geq \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2$$

ahora elijamos un sistema de unidades donde $\hbar = 1$, de tal forma que

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{1}{2} \quad (1.6)$$

así, es fácil ver que esto equivale a

$$\sigma_x \geq \frac{1}{2\sigma_p}$$

Ahora, supongamos un sistema físico donde tenemos un valor bien definido de la observable \hat{p} , esto es,

$$\sigma_p \rightarrow 0$$

lo cual implica

$$\frac{1}{2\sigma_p} \rightarrow \infty$$

Esto nos indica que la incertidumbre sobre la observable \hat{x} es máxima pues $\sigma_x \rightarrow \infty$.

Como podemos ver esto es un resultado que se deriva de la naturaleza estadística de las mediciones en la mecánica cuántica y no de la precisión de los aparatos de medición. Hasta ahora no se ha observado prueba de que no se cumpla esta relación.

1.4. Implicaciones de la mecánica cuántica en la lógica proposicional

Probablemente hasta este punto aún no se tenga muy claro cuáles son las razones por las que la mecánica cuántica discrepa con la lógica proposicional, es por esto que haré un pequeño resumen de dos de las implicaciones más evidentes, y de ninguna forma quiero aseverar que únicas, que surgen de la teoría cuántica.

- En el postulado 1 de la sección anterior dijimos que la función de onda es una combinación lineal de los estados donde es posible hallar a la partícula antes de ser medida, además en el postulado 3 dejamos claro la interpretación probabilística de la función de onda, con esto ya podemos concluir que cualquiera que sea el modelo que represente este sistema no puede ser una lógica bivaluada como lo es la lógica proposicional.
- En el postulado 2 definimos lo que era una observable, dijimos que las podemos representar mediante operadores hermitianos, algo que solo hacemos en mecánica cuántica, y cualesquiera dos observables cumplen la relación de incertidumbre expresada en la relación de incertidumbre. Esto es muy importante, porque nos restringe la combinación de proposiciones que podemos formar en nuestra lógica o en otras palabras la combinación de subespacios en los que una partícula podría estar.

para dejar esto más claro analicemos el siguiente ejemplo donde vemos que la ley distributiva no se cumple.[7]

Ejemplo 1:

Tomemos en cuenta las siguientes proposiciones. En la Figura 1.3 podemos ver estos intervalos ilustrados en un plano.

1.4. Implicaciones de la mecánica cuántica en la lógica proposicional 119

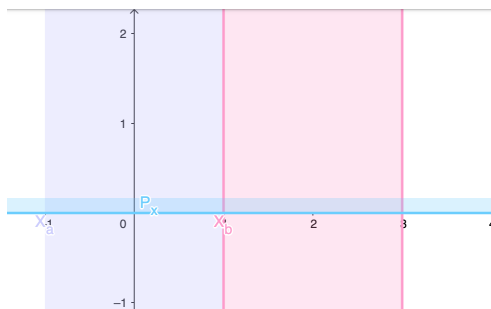


Figura 1.3: Intervalos del Ejemplo 1.

1. p = El momento p_x de la partícula toma valores en $[0, \frac{1}{6}]$.
2. q = La partícula tiene una posición x en el intervalo $[-1, 1]$.
3. r = La partícula tiene una posición x en el intervalo $(1, 3]$.

Queremos ver que la ley distributiva, que teníamos en la lógica clásica no se cumple. La ley distributiva de la lógica proposicional nos dice que

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad (1.7)$$

Si tomamos la longitud del intervalo como la desviación estándar es sencillo ver que el lado de izquierdo de la igualdad (1.7) se satisface de acuerdo a la desigualdad (1.6). Pero si ahora queremos repetir este proceso con el lado derecho vemos que la relación de incertidumbre no se satisface, por lo que podemos concluir que la ley de distributiva (1.7) no es válida en el modelo que describe la mecánica cuántica.

CAPÍTULO 2

Estructura algebraica de la lógica cuántica

En este capítulo vamos a revisar cómo podemos construir una estructura algebraica para la mecánica cuántica que nos permita definir la semántica de una lógica que sea consistente con los postulados de ésta. Esta aproximación fue propuesta por Cohen, en el capítulo 3 del libro “*An introduccion to hilbert space and quantum logic*” [6]. Primero comenzaremos con un famoso ejemplo propuesto por el mismo autor, después comenzaremos a construir la estructura algebraica que nos llevará a la definición de una lógica cuántica. Sería interesante saber si la estructura algebraica de la teoría cuántica se corresponde o no con la de la teoría clásica.

2.1. Manuales de Experimentos

Comenzaremos definiendo algunos conceptos para poder aplicarlos en un ejemplo que nos ayudará a darnos una idea intuitiva de lo que queremos probar. Otros ejemplos de este tipo pueden ser hallados en el capítulo 10 del libro “*Quantum Logic*” [8]. ce1em

Definición 2.1. Cuasimanual

Un *cuasimanual* Ω es una colección no vacía de conjuntos no vacíos llamados *experimentos*.

Definición 2.2. Resultados

Los elementos de un experimento son llamados *resultados*. El conjunto de todos los posibles resultados en un cuasimanual Ω se denotan como X_Ω .

Definición 2.3. Evento

Un *evento* en un cuasimanual Ω es un subconjunto de un experimento en Ω .

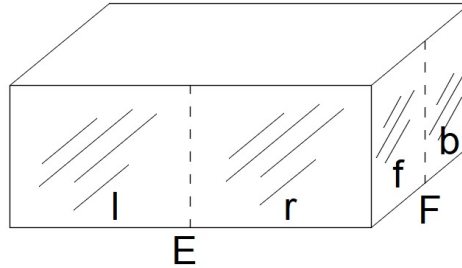
Ejemplo 2: Luciérnaga dentro de una caja

Figura 2.1: Una caja con dos ventanas y una luciérnaga dentro.

Nuestro sistema físico consiste en una caja con una cara lateral y la frontal translúcidas, a las cuales llamaremos ventanas. Ahora dibujemos en cada ventana una línea vertical que divida la caja a la mitad, coloquemos una luciérnaga dentro de la caja (aunque no la dibujamos), tal como se representa en la Figura 2.1. Recordemos que un sistema físico es todo aquel sistema donde podemos llevar a cabo experimentos.

Para que podamos representar este sistema físico como un *cuasimanual* debemos de tener experimentos cuyos elementos llamados *resultados* son los resultados de una medición, de ahí el nombre.

Vamos a considerar dos experimentos que consisten en ver a través de cualquiera de los dos lados visibles de la caja, para ello imaginemos que situamos a un observador (alguien o algo que puede registrar mediciones en el sistema físico) en alguna de estas dos ventanas. Llamaremos E al experimento que consiste en ver a través de la ventana frontal, cuyos resultados posibles son los siguientes:

l = ver luz en la mitad izquierda de la caja

r = ver luz en la mitad derecha de la caja

n = no ver luz

Así, el experimento E queda denotado por $E = \{l, r, n\}$. Nuestro segundo experimento F consiste en ver a través de la ventana lateral. Los resultados de F serán:

f = ver luz en la mitad izquierda de la caja

b = ver luz en la mitad derecha de la caja

n = no ver luz

De igual forma, el experimento F queda definido por $F = \{f, b, n\}$.

En el diagrama de la Figura 2.2 nuevamente se representa el experimento de la luciérnaga en la caja pero esta vez por un polígono; cada vértice representa un resultado, podemos ver que un polígono cerrado dentro del polígono principal nos indica la existencia de un experimento en los que es posible obtener alguno de los resultados que éste contiene en sus vértices.

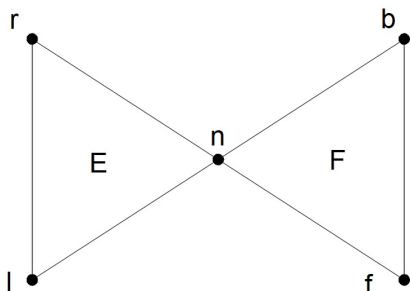


Figura 2.2: Diagrama que representa la relación entre los experimentos de la Figura 2.1

Estas definiciones están inspiradas en la idea que tenemos sobre los experimentos realizados en laboratorios, donde construimos manuales de experimentos y anotamos los resultados.

Quizá alguien se pregunte por qué estamos tomando un sistema clásico para representar un sistema cuántico, ¿cómo podemos asegurar que estamos haciendo una analogía correcta sobre lo que es un sistema cuántico?. En mi opinión lo que propone Cohen[6] es que tomemos el ejemplo de la luciérnaga en la caja para ilustrar lo que un manual puede ser, de ninguna forma decimos que este es un sistema cuántico, la definición de cuasimanual es una definición mucho más general de lo que es un sistema cuántico.

La interpretación relacionada con sistemas físicos que yo encuentro para las definiciones que Cohen da es que al igual que utilizamos el espacio fase para representar los posibles estados en los que podemos hallar a un sistema físico, podemos asociar un conjunto donde se encuentran todos esos posibles resultados, este conjunto son los cuasimanuales.

- Espacio fase \rightarrow Cuasimanual
- Espectro de una observable \rightarrow Experimento
- Eigenvalor de una observable \rightarrow Resultado

Interpretando las definiciones de esta forma es sencillo ver que todo espacio de configuraciones (o espacio fase) de sistema físico se le puede dar la estructura de un cuasimanual.

Definición 2.4. Ortogonalidad

Dos eventos A, B en un cuasimanual \mathfrak{Q} se dice que son ortogonales, los cuales denotaremos por $A \perp B$, si son conjuntos disjuntos de un solo experimento en \mathfrak{Q} .

En el propuesto anteriormente podemos hallar $A, B \subset E$, tal que $A = \{l, r\}$ y $B = \{n\}$, pero A y B no tienen ningún elemento en común, por eso podemos decir que son ortogonales.

Definición 2.5. Complemento Ortogonal

Si A, B son eventos ortogonales en \mathfrak{Q} , $A \perp B$, y también se cumple que $A \cup B \in \mathfrak{Q}$, entonces se dice que A es complemento ortogonal de B y viceversa. Denotamos esto como $A \text{ oc } B$.

Según las definiciones que dimos de A y B , también podemos decir que A es complemento ortogonal de B y viceversa.

En la figura 2.3 se puede ver que los eventos unidos por líneas son ortogonales, aunque solo aquellos unidos por líneas continuas se complementan ortogonalmente.

Definición 2.6. Manual

Un *Manual* es un cuasimanual \mathfrak{Q} que satisface lo siguiente:

1. Si A, B, C, D son eventos en \mathfrak{Q} , con $A \text{ oc } B, B \text{ oc } C, C \text{ oc } D$, entonces $A \perp B$
2. Si $E, F \in \mathfrak{Q}$ y $E \subseteq F$, then $E = F$

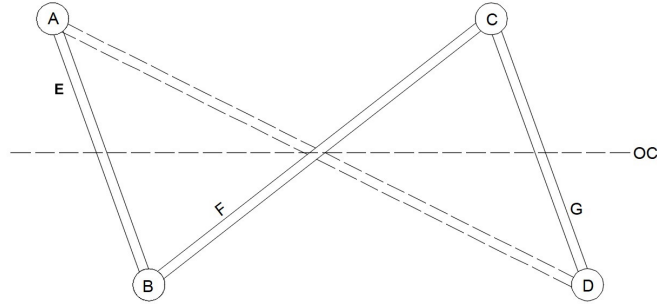


Figura 2.3: En esta figura podemos ver que a partir de las relaciones de ortogonalidad de 4 eventos podemos hallar un nuevo experimento.

Es fácilmente verificable que en el sistema físico representado en la Figura 2.1 estas propiedades se cumplen.

La propiedad (ii) nos asegura que ningún experimento que definamos dentro de un manual puede estar contenido dentro de otro, en cuanto a la propiedad (i) debemos apoyarnos nuevamente en la Figura 2.3: supongamos que al realizar el experimento E , obtenemos A , entonces B no se cumple; de haberse realizado simultáneamente el experimento F hubiésemos obtenido C , por lo que si hubiésemos realizado el experimento G de la misma forma (simultáneamente), D no hubiera ocurrido. Lo anterior nos dice que cuando A ocurre, D no ocurre y viceversa. Esto nos invita a pensar que existe una clase de relación entre ambos eventos, por lo que se propone un experimento que los contenga a ambos, así estos dos puedan ser ortogonales, esto es, $A \perp B$.

2.2. Construyendo una estructura algebraica

Ahora vamos a construir un sistema lógico, para ello necesitamos entender las relaciones de complementariedad ortogonal entre los eventos de un manual.

La siguiente definición será útil en todos aquellos casos en los que deseemos agregar un nuevo experimento a nuestro manual, nos ayuda a hacerlo de forma adecuada para que al refinar nuestro manual aseguremos que los viejos experimentos en \mathfrak{M}_1 son al menos eventos en este nuevo manual \mathfrak{M}_2 .

Definición 2.7. Morfismo de refinamiento

Un manual \mathfrak{M}_2 es un refinamiento del manual \mathfrak{M}_1 , si existe una inyección $\varphi = X_{\mathfrak{M}_1} \rightarrow X_{\mathfrak{M}_2}$ tal que para cada experimento $E \in \mathfrak{M}_1$, $\varphi(E) = \{\varphi(x) | x \in E\}$ es un evento en \mathfrak{M}_2 . Llamamos a φ un morfismo de refinamiento de \mathfrak{M}_1 a \mathfrak{M}_2 . Denotamos $\mathfrak{M}_1 < \varphi\mathfrak{M}_2$ para decir que \mathfrak{M}_2 es un refinamiento de \mathfrak{M}_1 bajo el morfismo φ .

Definición 2.8. Operacionalmente perspectivo

Si \mathfrak{M} es un manual, A , B , y C son eventos en \mathfrak{M} , y A oc B , B oc C , entonces decimos que A y C son operacionalmente perspectivos, lo cual denotamos por A op C .

De nueva cuenta podemos usar la figura 2.3 para ver que si dos eventos son operacionalmente perspectivos lo que ocurra con uno afecta al otro, en este caso si A ocurre entonces B no, por lo que C ocurre; A y C , ambos ocurren.

Definición 2.9.

- Una colección E de eventos en un manual \mathfrak{M} es compatible si $\cup E$ es un evento en \mathfrak{M} .
- Una colección O de resultados es compatible si O es un evento.

Definición 2.10. Un manual es llamado *clásico* si cada par de eventos es compatible. Equivalentemente, un manual es clásico si cada colección de resultados es un evento.

Ahora quizá nos preguntemos si el manual del ejemplo 2 es clásico o no, claramente este no lo es porque no existe un experimento que contenga una unión de los eventos $\{f, b\}$ y $\{l, r\}$, pues solo definimos dos experimentos: $E = \{l, r, n\}$ y $F = \{b, f, n\}$, pero podemos usar la definición 2.7 para crear un nuevo manual que sí sea clásico, esto es, hallar algún morfismo φ tal que \mathfrak{M}_2 sea un refinamiento del manual \mathfrak{M}_1 .

Tomemos:

$$\varphi(E) = \varphi(F) = \{r, l, f, b, n\}$$

Así aseguramos que \mathfrak{M}_2 es un manual clásico pues cualquier unión de eventos en él es evidentemente un evento.

Veamos que en este nuevo manual \mathfrak{M}_2 tenemos un solo experimento $G = \{r, l, f, b, n\}$, también podemos ver esto como que ahora podemos realizar mediciones simultáneas sobre E y F , algo que en el manual \mathfrak{M}_1 estaba restringido. Esto nos recuerda un poco a la relación de incertidumbre, donde existe una restricción sobre mediciones simultáneas en sistemas cuánticos, en nuestro caso en el \mathfrak{M}_1 no clásico.

Hasta aquí parece ser que ya tenemos un primer paso para construir un modelo para describir la estructura lógica de la Mecánica Cuántica. A continuación vamos a definir nuevos conceptos para hacer más rigurosa esta lógica, con la finalidad de obtener propiedades que nos ayuden a entender su estructura.

Definición 2.11. Implicación

Si \mathfrak{M} es un manual y A, B son eventos en \mathfrak{M} , entonces decimos que A implica B , denotado por $A \leq B$, si y solo si, existe un evento C con $C \perp A$ y $(C \cup A) \text{ op } B$.

Definición 2.12. Relación de orden parcial

Una relación de orden parcial es una relación binaria R sobre un con-

junto \mathbf{X} , tal que para cualesquiera $a, b, c \in X$ cumple las siguientes propiedades:

1. aRa . (Simetría)
2. Si aRb y bRa entonces $a = b$. (Reflexiva)
3. Si aRb y bRc entonces aRc . (Transitividad)

Lema 2.13.

Sea \mathfrak{M} un manual entonces la implicación cumple con las propiedades *i*) y *iii*) de una relación de orden parcial en la colección de eventos en \mathfrak{M} .

Demostración.

1. Queremos ver que \leq es simétrica, esto es $A \leq A$, para ello debemos de hallar un evento C tal que $A \perp C$ y $C \cup A$ *op* A . Esto se satisface trivialmente tomando $C = \emptyset$.
2. Para ver que \leq es reflexiva, debemos hallar un evento F tal que $A \perp F$ y $A \cup F$ *oc* F' *oc* C , sabiendo que $A \cup D$ *oc* D' *oc* B , y $B \cup E$ *oc* E' *oc* C .

Podemos reescribir parte de nuestra hipótesis de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} A \cup D & \text{ oc } D' \\ D' & \text{ oc } B \\ B & \text{ oc } E' \cup E \end{aligned}$$

Como estamos dentro de un manual, podemos concluir que

$$(A \cup D) \perp (E' \cup E)$$

en otras palabras, existe un evento G tal que

$$(A \cup D \cup G \cup E' \cup E)$$

es un experimento en \mathfrak{M} . Podemos reescribir lo anterior de la siguiente forma:

$$(A \cup D \cup G \cup E) \text{ oc } E'$$

además por hipótesis sabíamos que $E' \text{ oc } C$, así

$$A \cup (D \cup G \cup E) \text{ oc } E' \text{ oc } C$$

Veamos que si tomamos $F = (D \cup G \cup E)$ y $F' = E'$, tenemos:

$$A \cup F \text{ oc } F' \text{ oc } C,$$

que equivale a

$$A \leq C.$$

■

Ahora veamos que la propiedad *ii*) de una relación de orden parcial no se satisface para \leq , para verlo utilicemos de nuevo el ejemplo 2.

Demostración. Sea $A \leq B$, esto es, existe C tal que:

$$A \perp C \text{ y } A \cup C \text{ oc } D \text{ oc } B$$

con $A = \{b, f\}$, $B = \{l, r\}$, $C = \{\emptyset\}$ $D = \{n\}$.

Por otro lado, si $B \leq A$ esto nos dice que existe E tal que

$$B \perp E \text{ y } B \cup E \text{ oc } F \text{ oc } A$$

con

$$A = \{b, f\}, B = \{l, r\}, E = \{\emptyset\}, F = \{n\}.$$

■

Si la propiedad *ii* de la definición 2.12 fuese cierta, lo anterior implicaría que $A = B$ o sea $\{l, r\} = \{b, f\}$ y esto claramente no es así.

Definición 2.14. Relación de Equivalencia

Una relación de equivalencia es una relación R sobre un conjunto \mathbf{K} , tal que para todo $x, y, z \in \mathbf{K}$

1. xRx . (Reflexividad)
2. xRy entonces yRx . (Simetría)
3. xRy y yRz , entonces xRz . (Transitividad)

Lema 2.15. Equivalencia lógica

Si \mathfrak{M} es un manual, A, B son eventos en \mathfrak{M} , entonces decimos que A es *logicamente equivalente* a B , denotado por $A \leftrightarrow B$, si y solo si $A \leq B$ y $B \leq A$.

Demostración.

Es evidente que la *equivalencia lógica* es una relación de equivalencia en la colección de eventos en \mathfrak{M} usando las dos propiedades antes mencionadas que cumple \leq . ■

Lema 2.16. Sea \mathfrak{M} es un manual.

- A. Si A, B son eventos en \mathfrak{M} , entonces $A \text{ op } B$ si y solo si $A \leftrightarrow B$.
- B. Si $E, F \in \mathfrak{M}$, entonces $E \leftrightarrow F$.

Demostración.

- A. Si $A \text{ op } B$ y queremos verificar que $A \cup D \text{ op } B$ y $B \cup E \text{ op } A$ basta con tomar $D = E = \emptyset$, así $A \text{ op } B$ y $B \text{ op } A$, o sea, $A \leftrightarrow B$.
- B. Si ahora queremos ver que $A \leftrightarrow B$ implica que $A \text{ op } B$, hablamos de hallar F tal que $A \text{ oc } F \text{ oc } B$.

Por hipótesis sabemos que:

$$\begin{aligned} A \cup D \text{ oc } D' \text{ oc } B \\ B \cup E \text{ oc } E' \cup A \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} A \cup D \text{ oc } D' \\ D' \text{ oc } B \\ B \text{ oc } E' \cup E \end{aligned}$$

nuevamente estamos dentro de un manual, podemos concluir que

$$(A \cup D) \perp (E' \cup E) \text{ y } E' \text{ oc } A$$

en otras palabras, existe un evento F tal que

$$(A \cup D \cup F \cup E' \cup E)$$

es un experimento en \mathfrak{M} . Pero también sabíamos que $E' \text{ oc } A$, por lo que

$$D \cup E \cup F = \emptyset, \text{ o sea, } D = E = F = \emptyset.$$

Así, volviendo a nuestra hipótesis vemos que esta se transforma en

$$A \cup \emptyset \text{ op } B \text{ y } B \cup \emptyset \text{ op } A$$

entonces

$$A \text{ op } B.$$

B. Es muy sencillo ver que ya sea que $E \cap F = \emptyset$ o $E \cap F = G$ podemos tomar el conjunto vacío para ver que $E \text{ oc } \emptyset \text{ oc } F$. ■

Definición 2.17. Sea \mathfrak{M} un manual.

- Si A es un evento en \mathfrak{M} , entonces definimos

$$[A] = \{B \mid B \text{ es un evento en } \mathfrak{M} \text{ y } A \leftrightarrow B\}$$

así $[A]$ es la *proposición lógica* determinada por A . Entonces cuando decimos que medimos A medimos cualquier evento dentro de $[A]$.

- Definimos $\Pi(\mathfrak{M}) = \{[A] \mid A \text{ es un evento en } \mathfrak{M}\}$
- Definimos una relación de orden parcial en $\Pi(\mathfrak{M})$ por $[A] \leq [B]$ si y solo si $A \leq B$ en \mathfrak{M} .
- Sea $[A] \in \Pi(\mathfrak{M})$, definimos al ortocomplemento de $[A]$ de la siguiente forma:

$$[A]' = [E/A]$$

donde E es cualquier experimento en \mathfrak{M} con $A \subseteq B$.

- Si $[A], [B] \in \Pi(\mathfrak{M})$, decimos que son ortogonales ($[A] \perp [B]$), si y solo si $[A] \leq [B]'$.

Lema 2.18. La relación de orden parcial \leq está bien definida en el conjunto $\Pi(\mathfrak{M})$.

Usando el Lema 2.16 se puede probar que la relación de orden parcial \leq sí están bien definidas en $\Pi(\mathfrak{M})$.

Ahora ya estamos listos para definir lo que es una retícula, una estructura algebraica que nos es fundamental en la construcción de nuestra semántica.

Definición 2.19. Retícula

Sea P un conjunto con una relación de orden parcial \leq . Entonces (P, \leq) es llamada una retícula si para todo $p, q \in P$, el conjunto $\{p, q\}$ tiene la mayor de las cotas inferiores y la menor de las cotas superiores en P .

Llamamos $\text{inf}\{p, q\}$, la conjunción de p y q , y lo denotamos por $p \wedge q$.

Llamamos $\text{sup}\{p, q\}$, la disyunción de p y q , y lo denotamos por $p \vee q$.

Ejemplos de retículas hay por todos lados, uno es el campo de los números naturales con la relación de orden parcial dada por el cociente, donde el ínfimo es el máximo común divisor y el supremo es el mínimo común múltiplo.

Una retícula cumple las siguientes propiedades:

1. Ley conmutativa:

$$\text{a) } a \wedge b = b \wedge a$$

$$\text{b) } a \vee b = b \vee a$$

2. Ley asociativa:

$$\text{a) } (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$

$$\text{b) } (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$$

3. Ley de absorción:

$$\text{a) } a \wedge (a \vee b) = a$$

$$\text{b) } a \vee (a \wedge b) = a$$

Pero le vamos a pedir una condición más a esta retícula, queremos que sea una retícula acotada, de tal forma que podamos tener un elemento máximo y mínimo. Más adelante veremos que este elemento máximo se corresponde con el evento que incluye todas las posibilidades de experimentos y el evento mínimo aquel donde no ocurre nada, es decir, el conjunto vacío.

Definición 2.20. Retícula acotada

Si (L, \leq) es una retícula, decimos que es una retícula acotada si cumple:

1. $p \leq 1_L, \forall p \in L$. Llamamos a 1_L *unidad* de la retícula, con $1_L \in L$.

2. $0_L \leq p, \forall p \in L$. Llamamos a 0_L *cero* de la retícula, con $0_L \in L$.

El manual no clásico del ejemplo 2 tiene la estructura de una retícula acotada. Para verlo notemos todas las combinaciones de eventos que podemos formar con los experimentos $E = \{l, r, n\}$ y $F = \{b, f, n\}$, estas son:

$$\begin{aligned} & \{l, r, n\}, \{b, f, n\} \\ & \{l, n\}, \{l, r\}, \{r, n\}, \{f, n\}, \{b, n\}, \{b, f\} \\ & \{l\}, \{r\}, \{n\}, \{b\}, \{f\}, \emptyset \end{aligned}$$

Podemos ver que

$$\emptyset \in \{l\}, \{r\}, \{n\}, \{f\}, \{b\}$$

y además,

$$\{l\} \leftrightarrow \{r\} \leftrightarrow \{n\} \leftrightarrow \{b\} \leftrightarrow \{f\}$$

Así $[l], [r], [n], [b], [f]$ forman clases de equivalencia, y definimos $\emptyset = 0_{\Pi(\mathfrak{M})}$ tal que

$$0_{\Pi(\mathfrak{M})} \leq [l], [r], [n], [b], [f]. \quad (2.1)$$

Ahora tomemos la clase $[l]$ y notemos que $l \in \{l, n\}, \{l, r\}$, además $\{l, n\} \leftrightarrow \{l, r\}$, por lo que cada uno de ellos forma una clase de equivalencia.

Como $[l, n] = [E/r] = [r]'$ y $[l, r] = [E/n] = [n]'$, podemos concluir que:

$$[l] \leq [r]', [n]' \quad (2.2)$$

El mismo procedimiento podemos usar con las clases de equivalencia $[r], [b], [f], [n]$ y se obtiene:

$$[r] \leq [l]', [n]', \quad [b] \leq [n]', [f]', \quad [f] \leq [n]', [b]', \quad [n] \leq [l]', [r]', [b]', [f]' \quad (2.3)$$

Para los conjuntos $\{l, r, n\}$ y $\{b, f, n\}$, notemos que $\{l, r, n\}$ *op* $\{b, f, n\}$, y por el Lema 2.16 sabemos que estas dos eventos son lógicamente equivalentes. Denotemos la clase de equivalencia donde ambos están contenidos por $1_{\Pi(\mathfrak{M})}$. Entonces

$$[l]', [r]', [n]', [b]', [f]' \leq 1_{\Pi(\mathfrak{M})}. \quad (2.4)$$

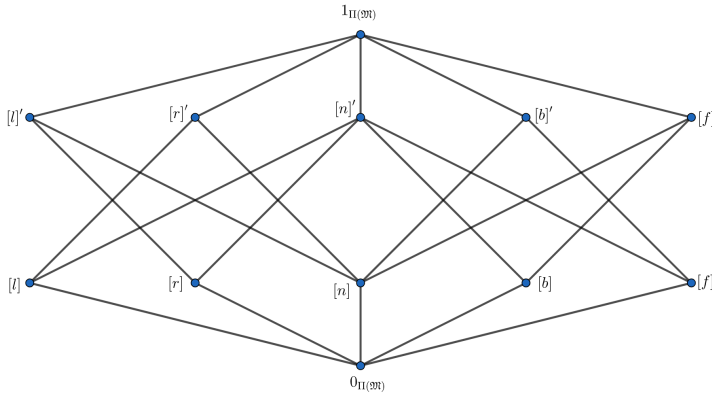


Figura 2.4: Retícula del ejemplo 2

Con las relaciones (2.1), (2.2), (2.3) y (2.4) podemos formar la retícula acotada del ejemplo 2, tal como la vemos en la figura 2.4. Notemos que la forma en que elegimos las clases de equivalencia no es única.

Definición 2.21.

- Una lógica $(L, \leq, ')$ es una retícula acotada (L, \leq) con una unidad y un cero, junto con una operación $' : L \rightarrow L$, llamada ortocomplementación, que satisface:
 1. para todo $p \in L$, $p'' = p$ y $p \wedge p' = 0_L$;
 2. para todo $p, q \in L$, si $p \leq q$, entonces $q' \leq p'$;
 3. para todo $p, q \in L$, si $p \leq q$, entonces $q = p \vee (p' \wedge q)$

Una lógica $(L, \leq, ')$ es a menudo denotada por L si no hay ambigüedad. Los elementos de una lógica se llaman proposiciones.

- Si L es una lógica y $p, q \in L$, decimos que p es ortogonal a q , denotado por $p \perp q$, si y sólo si $p \leq q'$.

Teorema 2.22.

Si L es una lógica y $p, q \in L$, entonces

$$(p \vee q)' = p' \wedge q' \quad \text{y} \quad (p \wedge q)' = p' \vee q'$$

estas propiedades se conocen como las leyes de De Morgan.

Demostración.

Primero veamos que $(p \vee q)' = p' \wedge q'$.

Por definición

$$p \leq p \vee q \quad \text{y} \quad q \leq p \vee q,$$

como $p, q \in L$ se cumple que

$$(p \vee q)' \leq p' \quad \text{y} \quad (p \vee q)' \leq q',$$

entonces

$$(p \vee q)' \leq p' \wedge q'.$$

Por otro lado

$$p' \wedge q' \leq p' \quad \text{y} \quad p' \wedge q' \leq q',$$

así

$$p'' \leq (p' \wedge q')' \quad \text{y} \quad q'' \leq (p' \wedge q')',$$

por lo que

$$p \vee q \leq (p' \wedge q')',$$

así vemos que

$$(p \vee q)' \geq p' \wedge q'.$$

De esta forma concluimos que

$$(p \vee q)' = p' \wedge q'.$$

De forma similar se puede verificar la otra igualdad. ■

Definición 2.23. Proposiciones Compatibles

Dos proposiciones p y q en una lógica L se dice que son compatibles si existe $u, v, w \in L$ tal que si $\{u, v, w\}$ es un conjunto ortogonal dos a dos en L , entonces

1. $u \vee v = p$
2. $v \vee w = q$

Definición 2.24. Lógica Clásica

Una lógica clásica es una lógica en la cual cada par de proposiciones es compatible dos a dos.

Definición 2.25. Logica Cuántica

Una lógica cuántica es una lógica con al menos dos proposiciones que no son compatibles.

Teorema 2.26.

Si p, q son proposiciones compatibles, entonces podemos escribir al conjunto $\{u, v, w\}$ en términos de éstos de la siguiente forma:

1. $u = p \wedge q'$;
2. $w = p' \wedge q$;
3. $v = p \wedge q = (p' \vee q) \wedge p = (p \vee q') \wedge q$.

Demostración.

1. Para ver que $u = p \wedge q'$ tenemos que ver que $u \leq p \wedge q'$ y $u \geq p \wedge q'$.

Como $\{u, v, w\}$ es un conjunto ortogonal entonces:

$$u \leq w' \text{ y } u \leq v'$$

esto es,

$$u \leq v' \wedge w' = (v \vee w)' = q'.$$

Por otro lado,

$$u \vee v = p$$

entonces

$$u \leq p$$

Así tenemos que

$$u = p \wedge q'.$$

2. Para ver que $w = p' \wedge q$ se puede hacer una demostración casi idéntica a la anterior.
3. En el tercer punto solo vamos a probar que $v = (p' \vee q) \wedge p$.

Sabemos que $v \leq u'$, así podemos usar la propiedad ortomodular que nos dice

$$v = u' \wedge (u \vee v).$$

De las igualdades anteriores tenemos que

$$u' = p' \vee q \quad u \vee v = (p \wedge q') \vee (p \wedge q) = p.$$

Utilizando los resultados anteriores podemos concluir que

$$v = (p' \vee q) \wedge p.$$

■

Teorema 2.27.

Si p y q son proposiciones en una lógica L , entonces p y q son compatibles si y solo si

1. $p = (p \wedge q) \vee (p \wedge q')$,
2. $q = (q \wedge p) \vee (q \wedge p')$

Demostración.

Vamos a demostrar que $p = (p \wedge q) \vee (p \wedge q')$. Como $p \wedge q \leq p$ y $p \wedge q' \leq p$, es sencillo ver que $(p \wedge q) \vee (p \wedge q') \leq p$. Ahora para ver que $(p \wedge q) \vee (p \wedge q') \geq p$ también se satisface, usemos el teorema 2.27 para reescribir las proposiciones del lado izquierdo como

$$(p \wedge q) = v \quad \text{y} \quad (p \wedge q') = u,$$

así obtendríamos que

$$v \vee u \geq p$$

lo cual es cierto pues $p = v \vee u$ por definición.

Así que la desigualdad se satisface de ambos lados, por lo que podemos concluir que

$$p = (p \wedge q) \vee (p \wedge q').$$

■

Teorema 2.28.

Si A y B son eventos compatibles en un manual \mathfrak{M} , entonces $[A]$ y $[B]$ son compatibles en $\Pi(\mathfrak{M})$.

Demostración.

Para ver que $[A]$ y $[B]$ son compatibles en $\Pi(\mathfrak{M})$ solo necesitamos hallar $\{u, v, w\}$ que satisfagan:

1. $u \vee v = [A]$
2. $v \vee w = [B]$

Si tomamos $u = [A/B]$, $v = [A \cap B]$, $w = [B/A]$.

Es fácil ver que cumplen las propiedades requeridas por u, v, w , como se ve en la figura 2.5.

■

Hemos identificado la estructura algebraica característica de una lógica cuántica. Vimos que se puede definir mediante una retícula acotada $\mathcal{A} = \{S, \leq\}$ con una operación de ortocomplementación. En particular satisface la propiedad ortomodular, esto es, $\forall A, B \in S$

$$A \leq B \implies B = A \vee (B \wedge A').$$

Cualquier retículo A satisface las propiedades conmutativas, asociativas y de absorción de un álgebra booleana, pero no necesariamente

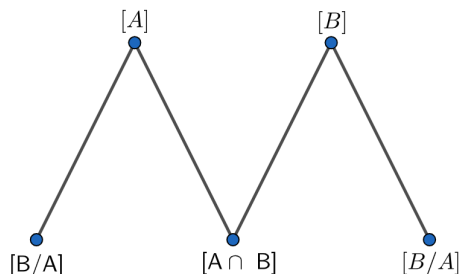


Figura 2.5: Figura del teorema 2.5

las propiedades distributivas. Si una retícula satisface las propiedades distributivas entonces se conoce como retícula distributiva y puede ser identificada como un álgebra booleana.

Como la caracterización de una lógica no es única, podemos hallar otra estructura algebraica para nuestra lógica. Una de ellas, que proponen autores como Specker [2], es utilizar álgebras parcialmente booleanas como sigue:

Sea $\mathcal{M} = \{\mathcal{B}_i : i \in \mathbb{N}\}$ una familia numerable de álgebras booleanas: $\mathcal{B}_i = \{S, \vee, \wedge, \neg\}$. \mathcal{M} es una variedad booleana si

$$i, j \in \mathbb{N} \implies \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } S_i \cap S_j = S_k;$$

$$\forall i, j \in \mathbb{N},$$

$$0_i = 0_j, y$$

$$1_i = 1_j$$

si $A, B \in S_i \cap S_j$ entonces

$$A \vee_i B = A \vee_j B$$

$$A \wedge_i B = A \wedge_j B$$

$$\neg_i A = \neg_j B$$

\mathcal{M} es un álgebra parcialmente booleana si es una variedad booleana y $\forall A, B, C \in \cup\{S_i\}$, si $\exists i, j, k \in \mathbb{N}$ tal que $A, B \in S_i$; $B, C \in S_j$; $C, A \in S_k \implies \exists m \in \mathbb{N}$ tal que $A, B, C \in S_m$.

Es decir, un álgebra parcialmente booleana es un conjunto de álgebras booleanas pegadas juntas de una forma consistente, de forma que cuando se superponen dos o más de ellas, sus operaciones están en concordancia entre sí. Los subconjuntos del espacio fase (eventos de un manual) también definen un álgebra booleana.

Podemos hallar más ejemplos de semánticas de una lógica cuántica, en el artículo “*Semantic Alternatives in Partial Boolean Quantum Logic*” [4].

CAPÍTULO 3

Retículas ortomodulares en un espacio de Hilbert

Hemos mencionado los conceptos *espacio de configuraciones* y *espacio fase* muchas veces durante esta tesis, pero hasta ahora no los hemos definido; estos son construcciones matemáticas que nos permiten representar variables dinámicas, que nos ayudan estudiar la evolución temporal de sistemas físicos, en un espacio vectorial.

En el capítulo 1 vimos un ejemplo donde asociamos subconjuntos de un espacio de configuraciones con proposiciones dentro de una lógica, de la misma forma en el capítulo anterior identificaremos los eventos de un manual con las proposiciones dentro de una lógica, solo que ahora nuestro manual serán los espacios de Hilbert de dimensión infinita y los eventos serán los subespacios cerrados de éste. El formalismo de la mecánica cuántica asocia al espacio fase de un sistema cuántico con el espacio de Hilbert, he aquí su importancia.

Recordemos que todas las sucesiones de las que hablemos en este capítulo serán sucesiones de Cauchy. En este capítulo vamos a retomar las retículas acotadas que definimos en el capítulo anterior.

Definición 3.1. Un conjunto $S \subseteq H$ es cerrado si toda sucesión de Cauchy converge en norma a un vector en S .

Esta definición de conjunto cerrado coincide con la de un espacio métrico si definimos la métrica como una norma.

Teorema 3.2. Si S es una colección de subconjuntos cerrados de H , entonces $\cap S$ es un conjunto cerrado en H .

Demostración. Para demostrar lo anterior tenemos dos casos:

- $\cap S = \emptyset$; por vacuidad se tiene que cualquier sucesión de Cauchy contenida dentro el vacío nos dirá que x_n converge en el vacío, esto es: $x_n \rightarrow x \in \emptyset$, por lo que queda demostrado.
- $\cap S \neq \emptyset$; tomemos una sucesión de Cauchy $\{x_n\}$ tal que $\{x_n\} \subset \cap S$, esto es $\{x_n\} \subset S_i$, así $x_n \rightarrow x_i \in S_i$, esto es, $x_n \rightarrow x_i \in \cap S$.

■

Debido a que la intersección infinita de subconjuntos cerrados es cerrada podemos decir que al igual que definimos el ínfimo de dos eventos en una retícula ortomodular, podemos utilizar la intersección usual para definir el ínfimo de dos subespacios cerrados y así darle al espacio de Hilbert la estructura de una retícula ortomodular. Pero este no es el caso de la unión, no podemos garantizar que la unión infinita de subespacios cerrados sea cerrada, por ello necesitaremos definir una operación alternativa a la unión de subespacios que nos garantice que el supremo de dos eventos seguirá siendo cerrado. Llamaremos *retícula de Hilbert* a la retícula ortomodular asociada a espacios de Hilbert.

En el libro de Svozil [8] podemos encontrar una introducción que resume todo lo que queremos exponer en este capítulo. Es la siguiente:

1. Todo subespacio lineal cerrado de un espacio de Hilbert (equivalente, cualquier operador de proyección) se puede asociar a una proposición dentro de una lógica.

2. La operación lógica “ \wedge ” es identificada con la intersección de dos subespacios lineales cerrados. Así para dos proposiciones dentro la lógica p y q , el subespacio lineal cerrado que representa la proposición “ $p \wedge q$ ” se puede escribir de la forma:

$$S_{p \wedge q} = \{x | x \in S_p, x \in S_q\}$$

donde S_p y S_q son los subespacios lineales cerrados que corresponden a p y q respectivamente.

3. La operación lógica “ \vee ” es identificada por la cerradura del generado de los subespacios correspondientes a dos proposiciones dentro de la lógica, se denota por “ \vee ” o “ \oplus ”. Así, para dos proposiciones p , q y sus subespacios asociados S_p y S_q

$$S_{p \vee q} = S_p \oplus S_q = S_p \vee S_q = \{x | x = \alpha y + \beta z, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, y \in S_p, z \in S_q\}$$

4. La implicación lógica “ \implies ” es identificada con la contención de conjuntos.

$$p \implies q \iff S_p \subseteq S_q$$

5. La operación ortocomplementación “ $'$ ” la identificamos con la ortogonalidad de dos subespacios “ \perp ”

$$S_p^\perp = \{x | \langle x, y \rangle = 0, y \in S_p\}$$

6. Una proposición trivial, la cual es siempre cierta la denotamos como 1_L , y representa el espacio de Hilbert entero. De esta forma,

$$1_L = H$$

7. Una proposición absurda, la cual es siempre falsa, denotada por 0_L representa el *subespacio nulo* generado por el vector $\hat{0}$. Así

$$0_L = 0$$

En el cuadro 3.1 se puede ver como se transforman las operaciones definidas en una retícula ortomodular cuando tomamos al conjunto de subespacios cerrados como elementos de ésta.

Retícula ortomodular	\leq	\wedge	\vee	'
Retícula de Hilbert	\subset	\cap	\oplus, \vee	\perp

Cuadro 3.1: Comparación de las operaciones definidas en una retícula ortomodular y una de Hilbert.

Los siguientes teoremas nos ayudan a ver que la operación “ \vee ” la podemos identificar con la cerradura del generado de los subespacios correspondientes a dos proposiciones dentro de la lógica. Éstos fueron tomados del libro de Cohen [6], pero pueden ser hallados en cualquier texto de espacios métricos y espacios normados.

Definición 3.3.

Si $S \subseteq H$, definimos la cerradura de S por

$$clos(S) = \cap \{ C \mid S \subseteq C, \text{ y } C \text{ es cerrado} \}$$

Una definición alternativa es la siguiente:

$$clos(S) = \{ x \mid \text{existe una sucesión } \{x_k\} \text{ en } S \text{ que converge en norma a } x \}$$

Se puede ver que $clos(M)$ es el menor conjunto cerrado en H que contiene a S .

Teorema 3.4.

Si M es un subespacio lineal en H , entonces $clos(M)$ es un subespacio en H y además es cerrado.

Demostración. Es sencillo ver que $\text{clos}(M)$ es un conjunto cerrado porque por el teorema 3.2 esto se cumple.

Ahora queremos ver que $\text{clos}(M)$ es un subespacio lineal. Esto es, $\alpha x \in \text{clos}(M)$, con $x \in \text{clos}(M)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ y $x + y \in \text{clos}(M)$, con $x, y \in \text{clos}(M)$:

- Como $x \in \text{clos}(M)$, existe $\{x_n\}$ tal que $x_n \rightarrow x \in \text{clos}(M)$, así sea $\{\alpha x_n\} \in M$ tal que $\alpha x_n \rightarrow \alpha x \in \text{clos}(M)$. Así $\{\alpha x_n\} \in \text{clos}(M)$.
- Sean $x \in \text{clos}(M)$ y $y \in \text{clos}(M)$, entonces existen $x_n \rightarrow x \in \text{clos}(M)$, y $y_n \rightarrow y \in \text{clos}(M)$, como M es un subespacio, entonces si $z_k = x_k + y_k$ sucesión tal que $z_k \rightarrow z = x + y \in \text{clos}(M)$.

■

Definición 3.5.

Si $S \subseteq H$, definimos el generado de S por

$$\vee S = \bigcap \{ K \mid K \text{ es un subespacio cerrado en } H, \text{ con } S \subseteq K \}$$

Teorema 3.6.

Si $S \subseteq H$, entonces

- $\vee S$ es un subespacio cerrado en H ;
- $S \subseteq \vee S$;
- para todos los subespacios cerrados K en H , si $S \subseteq K$, entonces $\vee S \subseteq K$.

Demostración. Para ver que $\vee S$ es un subespacio cerrado solo falta ver que es un subespacio porque por el teorema 3.1 éste es cerrado. Tomemos

$x, y \in \vee S$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, como $x, y \in \vee S$, $x, y \in \cap K$ pero K es un conjunto de subespacios entonces es evidente que $x + y \in \vee S$ y $\alpha x \in \vee S$.

Ahora, para ver que $S \subseteq \vee S$ solo hace falta ver que por definición si $S \subseteq K$ entonces $\vee S = \cap K$, además si K es el conjunto de subespacios cerrados que contienen a S entonces se cumple que $S \subseteq \cap K$ por lo que $S \subseteq \cap K = \vee S$, así $S \subseteq \vee S$.

Si $S \subseteq K$ entonces $\vee S = \cap K$ además $\cap K \subset K$, por lo que es sencillo concluir que $\vee S \subseteq K$. ■

Teorema 3.7.

Suponga que $S \subseteq H$ y $M = \{ \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \mid n \in \mathbb{N}, \lambda_k \in \mathbb{C}, x_k \in S \}$. Entonces:

- M es un subespacio lineal en H ;
- $\vee S = \text{clos}(M)$.

Demostración. Es evidente que M es un subespacio lineal.

Para ver que $\vee S = \text{clos}(M)$ debemos probar la doble contención. Veamos primero que $\vee S \subseteq \text{clos}(M)$. Sabemos que $\text{clos}(M)$ es un subespacio cerrado de H . $S \subseteq M \subseteq \text{clos}(M)$, ya que $\text{clos}(M)$ es el subespacio más pequeño que contiene a M , además por el teorema anterior sabemos que si $S \subseteq \text{clos}(M)$ entonces $\vee S \subseteq \text{clos}(M)$. Ahora, para ver que $\text{clos}(M) \subseteq \vee S$, notemos que $S \subseteq M$, luego si $S \subseteq K$ entonces $\vee S = \cap K$ donde K son todos aquellos subespacios cerrados que contienen a S , en el teorema 3.3 vimos que $\text{clos}(M)$ es cerrado, entonces $\text{clos}(M)$ es uno de esos K , así $\vee S \subseteq \cap K \subseteq \text{clos}(M)$. ■

Definición 3.8.

- Si $S \subseteq H$, definimos $S^\perp = \{x \in H \mid \text{para todo } s \in S, x \perp s\}$. Llamamos S^\perp el complemento ortogonal de S .

- Si \mathbb{S} es una colección de subespacios de H , escribimos

$$\bigvee_{S \in \mathbb{S}} S \text{ por } \vee (\cup \mathbb{S}).$$

Teorema 3.9.

Si $S \subseteq H$, entonces

- (i) $S^\perp \cap S = \{0\}$;
- (ii) S^\perp es un subespacio cerrado en H (incluso si S no lo es);
- (iii) si $S \subseteq T \subseteq H$, entonces $T^\perp \subseteq S^\perp$;
- (iv) $S \subseteq (S^\perp)^\perp$;
- (v) si S es un subespacio en H , entonces $(S^\perp)^\perp = S$;
- (vi) si \mathbb{S} es una colección de subespacios en H , entonces

$$(\bigvee_{S \in \mathbb{S}} S)^\perp = \bigcap_{S \in \mathbb{S}} S^\perp \text{ y } \bigvee_{S \in \mathbb{S}} S^\perp = (\bigcap_{S \in \mathbb{S}} S)^\perp;$$

- (vii) si S es un conjunto ortonormal numerable, entonces

$$S^\perp \cap \bigvee S = \{0\}.$$

Demostración.

- (i) Supongamos $x \in S^\perp \cap S = \{0\}$, entonces $x \perp x$ pero esto solo pasa si $x = \{0\}$.
- (ii) Es sencillo ver que S^\perp es un subespacio. Para ver que este es cerrado tomemos una sucesión $\{x_k\}$ en S^\perp y que converga a $x \in H$. Si tomamos $y \in H$, veamos que $\langle x, z \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle x_k, z \rangle = 0$, ya que $x_k \perp z$, por lo que $x \in S^\perp$.

- (iii) Sea $s \in S$, y $s \in T$. Ahora tomemos $x \in T^\perp$, esto es $x \perp s$, como $s \in S$ entonces $x \in S^\perp$.
- (iv) Sea $s \in S$ y $t \in S^\perp$, tal que $s \perp t$, así $s \in (S^\perp)^\perp$, entonces $S \subseteq (S^\perp)^\perp$.

La demostración de los últimos tres incisos quedan como ejercicio al lector.

■

Teorema 3.10.

Si H es un espacio de Hilbert y \mathbb{L} es la colección de subespacios cerrados en H , entonces $\mathbb{L}(H) = (\mathbb{L}, \subseteq, \perp)$ es una lógica con $0_L = 0$ y $1_L = H$

Demostración. Para ver que $\mathbb{L}(H)$ es una lógica debemos de ver que es un retícula acotada y que se cumplen las siguientes propiedades:

1. para todo $S \in \mathbb{L}(H)$, $S^{\perp\perp} = S$ y $S \cap S^\perp = \{0\}$;
2. para todo $S, T \in \mathbb{L}(H)$, si $S \subseteq T$, entonces $T^\perp \subseteq S^\perp$;
3. para todo $S, T \in \mathbb{L}(H)$, si $S \subseteq T$, entonces $T = S \vee (S^\perp \cap T)$.

Para ver que $\mathbb{L}(H)$ es una retícula basta tomar $S, L \in \mathbb{L}(H)$, y ver que su supremo puede ser escrito por $S \vee L$ y el ínfimo por $S \cap L$. Es evidente que 0 es el ínfimo de cualquier par de elementos de la retícula y H el supremo.

Ahora, veamos si se cumplen las propiedades de una lógica. Es evidente que $\mathbb{L}(H)$ cumple las dos propiedades de una lógica si usamos el teorema 3.8. Resta ver si se cumple la tercera propiedad de una lógica (propiedad ortomodular), para ello tomemos $S \subseteq L$, queremos ver que $L \subseteq S \vee (S^\perp \cap L)$ y $S \vee (S^\perp \cap L) \subseteq L$.

■

Un manual para un sistema físico cuántico es un conjunto que tiene como único elemento un conjunto (*experimento*) cuyos elementos (*resultados*) son los eigenvectores de una observable \hat{A} . Entonces a partir de los subespacios que forman los eigenvectores construimos una retícula, como lo hicimos con el ejemplo 2 en el capítulo anterior, solo que en este caso es mucho más sencillo porque cada subespacio formado por dicho conjunto de eigenvectores de la observable \hat{A} no es lógicamente equivalente a otro que no sea el mismo subespacio, esto es sencillo de ver ya que los eigenvectores de la observable \hat{A} son ortogonales.

Lema 3.11.

(i) A oc C si y solo si $C^\perp = \vee A$

(ii) A op B si y solo si $\vee A = \vee B$

Demostración. Sea A oc B , entonces $A \cup C$ es una base de H . Ahora tomemos $C^\perp = ((A \cup C)^\perp)^\perp$ ■

En otras palabras esto nos dice que si A es complemento ortogonal de B , entonces $A \cup B$ es una base para H .

El siguiente teorema expresa la conexión entre los espacios de Hilbert y la estructura de manual que vimos en el capítulo anterior.

Teorema 3.12.

1. lo siguiente es equivalente:

(a) A op B ,

(b) $\vee A = \vee B$,

(c) $A \leftrightarrow B$ (A es lógicamente equivalente a B en un manual $\mathcal{F}(H)$),

2. $A \perp B$ si y solo si $[A] \perp [B]$

Demostración.

1. Es evidente que (a) y (b) son equivalentes por el lema 3.11(ii), y por el teorema 2.16(A) vemos que (a) es equivalente a (c).
2. Sea $B \subseteq E \in \mathcal{F}(H)$. Si $[A] \perp [B]$ si y solo si existe un evento C tal que $\vee(A \cup C) = \vee(E)$, que es equivalente a $A \perp B$.

■

De aquí podemos ver que dos eventos son operacionalmente perspectivos (lógicamente equivalentes) si y solo si generan el mismo subespacio, esto es, $\vee A = \vee B$.

Teorema 3.13.

Los subespacios cerrados K, L se dice que son compatibles en una lógica del espacio de Hilbert $\mathbb{L}(H)$ si y solo si

1. $K = (K \wedge L) \vee (K \wedge L^\perp)$,
2. $L = (L \wedge K) \vee (L \wedge K^\perp)$.

Demostración. Este teorema es consecuencia del teorema 2.27

■

En este capítulo aplicamos la estructura algebraica que vimos en el capítulo anterior a los espacios de Hilbert, para ellos, como eventos tomamos los subespacios cerrados del espacio de Hilbert, dado que son los que nos interesan para conservar propiedades de cerradura que garantizan propiedades de mediciones. De esta forma una lógica cuántica en un espacio de Hilbert puede ser definida mediante una retícula ortomodular con una relación de orden parcial, donde sus elementos son subespacios cerrados de éste y que para cada pareja de subespacios existe un subespacio mayor, respecto a la relación de orden parcial, que es común a ambos y un subespacio menor que los contiene a los dos.

CAPÍTULO 4

Conclusiones

En esta tesis solo revisamos una solución para dos de las inconsistencias que expuestas de la mecánica cuántica con la lógica proposicional clásica, no podemos estar seguros que son las únicas inconsistencias, además de nuestro criterio depende del formalismo que hemos empleado en la mecánica cuántica, porque a pesar de que el formalismo aquí expuesto ha demostrado ser correcto en los experimentos nunca tendremos la certeza de tener una teoría correcta. Aún si tuvieremos la teoría correcta ésta lógica no es única, pues depende de qué se tomen como proposiciones, pero independientemente del formalismo siempre tendríamos una *relación de incertidumbre*. Entonces sea cual sea la estructura algebraica de la mecánica cuántica ésta tiene que ser una no distributiva.

También podríamos preguntarnos si el hecho de conocer la estructura algebraica subyacente nos podría ayudar a la interpretación de la mecánica cuántica, pero no parece ser el caso.

Esta tesis me ha dejado más dudas que respuestas. Una es que aún no sé si se puede pasar de una retícula ortomodular a una retícula boo-

leana, esto me haría pensar que de alguna forma podríamos “pasar del formalismo de la mecánica cuántica al de la mecánica clásica”. Una de las soluciones que revisé fue considerar la estructura algebraica de la mecánica cuántica como un álgebra parcialmente booleana de tal manera que se puedan “pegar” de manera consistente de tal forma que pueda llegar a ser un algebra booleana.

Creo que la lógica es el «dual» (por llamarla de alguna forma) de muchas teorías físicas, porque para construir una nos fijamos en elementos de la realidad y a partir de ellos creamos las matemáticas, a diferencia de los que pasa en muchas teorías físicas, que por el contrario se basan en lo que dicen las matemáticas para hacer predicciones sobre fenómenos físicos. Como dice *Putman*: “De la misma forma que la teoría general de la relatividad nos lleva a adoptar una geometría no-euclideana, nuestra mejor interpretación de la mecánica cuántica nos lleva a adoptar una lógica no clásica” [3].

Bibliografía

- [1] BIRKHOFF G. Y VON NEUMANN J., *The logic of Quantum Mechanics*, ANN. MATH. 37, 823-843 (1936).
- [2] SPECKER, E.P., *The logic of propositions which are not simultaneously decidable*, DIALECTICA 14, 239-246, (1960).
- [3] PUTMAN, H., *Is logic empirical?*, BOSTON STUDIES IN THE PHILOSOPHY OF SCIENCE, VOL. 5, PP. 216-241 (1969).
- [4] HUGHES, R. I. G., *Semantic Alternatives in Partial Boolean Quantum Logic*, JOURNAL OF PHILOSOPHICAL LOGIC VOL. 14, No. 4 (Nov., 1985), PP. 411-446
- [5] COHEN DAVID W., *An introduction to Hilbert Space and Quantum Logic*, SPRINGER-VERLAG. (1989).
- [6] COHEN-TANNOUJJI, C., DIU, B., LALOË F., *Quantum Mechanics*, A WILEY-INTERSCIENCE PUBLICATION, VOL. 1, HERMANN, (1997).
- [7] FORREST, P., *Routledge Encyclopedia of Philosophy Vol. 7*, ROUTLEDGE, P. 882FF, (1998).

- [8] SVOZIL, K., *Quantum Logic*, SPRINGER, (1998)
- [9] CABELLO, A., *Introducción a la lógica cuántica*, ARBOR CLXVII, 489-507 PP., (2000).
- [10] GRIFFITHS, DAVID, *Introduction to Quantum Mechanics*, PEARSON, PRENTICE HALL, (2005).
- [11] NOUREDINE, ZETILI, *Quantum Mechanics, Concepts and Applications*, WILEY, MÉXICO, (2009).