BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
POSTGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

"ESTUDIO DE LA MEJOR APROXIMACIÓN POLINOMIAL EN BANDAS NO UNIFORMES"

T E S I S

Presentada para obtener el título de:

MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

p r e s e n t a :
L.M.A. Ivonne Lilian Martínez Cortés

Asesor de Tesis:
Dr., Dr. Sc. Prof. Miguel Antonio Jiménez Pozo

Puebla, Pue., Septiembre de 2006.

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS DE POSTGRADO

"Año de la Autonomía Universitaria"

DRA. ESPERANZA GUZMAN OVANDO
SECRETARIA DE INVESTIGACION Y
ESTUDIOS DE POSTGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que la C:

IVONNE LILIAN MARTINEZ CORTES

estudiante de la Maestría en Ciencias Matemáticas, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 10 de agosto de 2006, con la tesis titulada:

"ESTUDIO DE LA MEJOR APROXIMACION POLINOMIAL EN BANDAS NO UNIFORMES"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 04 de septiembre de 2006.

DR. RAUL ESCOBEDO CONDE
COORDINADOR
POSTGRADO EN MATEMATICAS FCFM-BUAP.

Ccp.Archivo.
Ccp.Minutario.
DR.FJAV/ahe

"2006. AÑO DEL BICENTENARIO DEL NATALICIO DEL BENEMÉRITO DE LAS AMÉRICAS DON BENITO JUÁREZ GARCÍA"

Av. San Claudio y 18 Sur, Col. San Manuel, Ciudad Universitaria, Puebla, Pue., C.P. 72570
Tels.: (01 222) 229 55 00 Ext.: 7550, 229 56 37, Fax: 229 56 36 http://www.fcfm.buap.mx direccion@fcfm.buap.mx

A Lalito, mi pedacito de cielo,
por ser el motor que me impulsa a ser mejor día a día

Agradecimientos

A Dios por permitirme llegar hasta aquí.

Al CONACyT, por su apoyo, sin el cual
hubiera sido imposible la continuación de mis estudios.

A VIEP-SEP por apoyar proyectos
en los que he participado.

A la FCFM, a sus profesores y en especial
al cuerpo académico de Análisis Matemático

A mi asesor, el Dr. Miguel Antonio Jiménez Pozo,
por su paciencia, tiempo y dedicación a esta tesis.

A mis compañeros y amigos de generación.

A mi mamá y hermanos por estar conmigo siempre,
en las buenas y en las malas.

Índice general

Introducción

Un problema dimanante de la práctica viene dado en los términos siguientes:

Tenemos dos conjuntos no vacíos y disjuntos X y Ω de $\mathbb{R}^m$, sobre los cuales está definida una función real f, se conoce que sobre X esta función toma valores en el rango

$$g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x),$$

donde g_1 y g_2 son funciones conocidas. Mientras que sobre Ω, tenemos valores estadísticos de f. Se dispone de otra clase de funciones $\mathcal{P}$; usualmente polinomios hasta un grado determinado (con cualquier definición prefijada sobre el grado e identificado por sus coeficientes como un elemento de un espacio euclidiano) y se desea ajustar la función f sobre $X \cup \Omega$, mediante alguna norma conveniente, con funciones p de la clase, que satisfagan la desigualdad

$$g_1(x) \leq p(x) \leq g_2(x),$$

sobre X. Surge, de manera natural, la necesidad de tener información sobre las funciones de $\mathcal{P}$ que satisfacen la desigualdad anterior.

Con el objetivo de modelar las superficies de estratos de petróleo en el área caribeña, este problema fue estudiado por M. A. Jiménez hacia 1986, lo que condujo al logro de diversos softwares para la industria cubana de prospección y extracción del petróleo.

En esta tesis, analizamos el caso en que $X = [a, b]$ y $\mathcal{P}$ es la clase de los polinomios algebraicos. Consideramos funciones $h_1, h_2 \in C\,[a, b]\,, h_1, h_2 \geq 0$, tales que $g_1 = f - h_1$ y $g_2 = f + h_2$. Por tal motivo, llamaremos "*funciones de error*" a h_1 y h_2. Por esta vía surge el problema de estudiar el conjunto factible

$$\{p \in \mathcal{P} : f - h_1 \leq p \leq f + h_2\}\,,$$

el cual conduce a interesantes problemas simultáneos de aproximación y de optimización estudiados por Guerra y Jiménez desde el punto de vista de la programación seminfinita, [7], y posteriormente por otros matemáticos, por ejemplo, [9], [10], [11].

Esta tesis está inspirada en esos trabajos de aproximación y optimización y en la generalización del teorema de alternancia de Chebyshev, de Guerra-Jiménez. En realidad, existen muchas variaciones y extensiones de este famoso teorema de Chebyshev constituyente de los fundamentos de la Teoría de la Aproximación (vea, en nuestro contexto, el artículo relativamente reciente de Tijomirov, [14], y la teoría de Kolmogorov en [6]); pero en cada problema concreto se deben comprobar hipótesis y precisar los resultados.

El teorema de Chebyshev clásico caracteriza los polinomios de la mejor aproximación y determina su unicidad. En el contexto de nuestro estudio, debemos precisar previamente lo que entenderemos como mejor aproximación y proceder al análisis de las diferentes preguntas que usualmente se formulan en ese tópico de la aproximación. Este estudio, que es nuestra contribución científica, lo desarrollaremos satisfactoriamente en el Capítulo 2, para h_1 y h_2 estrictamente positivas. En el Capítulo 3 presentamos una colección de ejemplos que muestran la riqueza, pero a la vez la limitación y dificultades, del caso en el que h_1 y h_2 tengan ceros. Este último caso continúa siendo objeto de estudio por nuestra parte y confiamos en presentarlo en forma más o menos completa en una próxima publicación.

Los resultados de Teoría de la Aproximación que aquí utilizamos son clásicos y pueden encontrarse en la mayoría de los textos sobre el tema (por ejemplo, en los textos clásicos [5], [13], o más reciente [6]). De todas formas, el Capítulo 1 contiene un resumen de esos resultados, con lo que el lector dispondrá de una lectura fluida y de una notación establecida.

Debemos señalar que durante el periodo de tiempo en que nos ocupábamos de este estudio, se publicó un artículo en el cual se estudian problemas abstractos de la mejor aproximación, [2], que sin duda tiene puntos de conexión con nuestros resultados del Capítulo 2. No parece, sin embargo, que tenga conexión directa con el caso en que las funciones de error tienen ceros comunes, que es el objetivo final de nuestra investigación.

Capítulo 1

Problema de la mejor aproximación uniforme de Chebyshev

En este primer capítulo, recopilaremos algunos resultados obtenidos en la teoría de aproximación polinomial sobre la existencia del polinomio de mejor aproximación a una función continua en un intervalo cerrado, así como la caracterización y unicidad de dicho polinomio. Empecemos con las definiciones siguientes.

Sean (X, d) un espacio métrico y $Y \subset X$, $Y \neq \phi$, dado $x \in X$, el problema que se plantea es encontrar un elemento $y^* \in Y$ tal que $d(y^*, x) \leq d(y, x)$ para todo $y \in Y$.

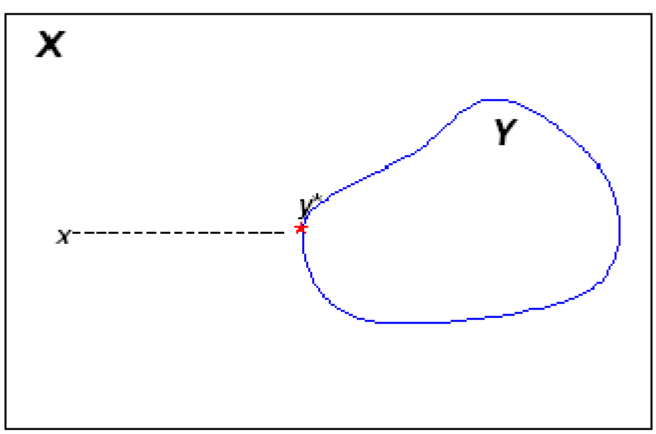

Fig. 1.1 $y^* \in Y$ es elemento de mejor aproximación para $x \in X$.

No siempre es posible encontrar tales elementos; pero cuando existen se les denomina como *mejor aproximación* de Y a x. Sin embargo, aún teniendo demostrada la existencia, no siempre se puede garantizar la unicidad de estos elementos.

En este capítulo $X := C[a,b]$ y $Y := P_n(x)$, el conjunto de los polinomios de grado a lo más n y la norma que utilizaremos será la uniforme, definida por

$$\|f\| = \underset{x\in[a,b]}{máx} |f(x)| .$$

Bajo estas condiciones, en este primer capítulo estudiaremos la existencia de la mejor aproximación, la unicidad y un teorema que caracteriza a este elemento.

1.1. Existencia de la mejor aproximación

Para demostrar la existencia de la mejor aproximación a una función, por polinomios de grado a lo más n, con $n \in \mathbb{N}$ fijo, utilizaremos un resultado bien conocido dentro de la teoría de aproximación, enunciado en el teorema siguiente.

Teorema 1.1.1 *Si X es un espacio normado y $Y \subset X$ un subespacio de X de dimensión finita, entonces dado $x \in X$ existe $y^* \in Y$ tal que*

$$\|x - y^*\| \leq \|x - y\| \quad \textit{para todo} \;\; y \in Y.$$

En nuestro caso, $X := C[a,b]$ y $Y := P_n(x)$, satisfacen las hipótesis del teorema y por tanto se desprende de manera inmediata la existencia de mejor aproximación.

La demostración del teorema precedente es muy sencilla ([5],[13]), pues se reduce al hecho de que una función real continua sobre un compacto, no vacío, alcanza sus valores extremos.

1.2. Caracterización de los polinomios de mejor aproximación

Dada una función continua f sobre un intervalo $[a,b]$ y $n \in \mathbb{N}$, sí p_n^* es un polinomio de mejor aproximación de P_n a f y

$$E_n = E_n(f;[a,b]) := d(f, P_n),$$

entonces $E_n = d(f, p_n^*)$.

Definición 1.2.1 *Un conjunto de $k+1$ puntos $x_0, \ldots, x_k \in [a,b]$, tales que $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_k \leq b$, es llamado conjunto alternante para la función $h \in C[a,b]$, si*

$$|h(x_j)| = \|h\|, \qquad j = 0, ..., k$$

y

$$h(x_j) = -h(x_{j+1}), \qquad j = 0, ..., k-1.$$

Teorema 1.2.2 ***(de Alternancia de Chebyshev, [3], [4])*** *Dados $n \in \mathbb{N}$ y $f \in C[a,b]$; p_n^* es un polinomio de mejor aproximación de P_n a f, si y sólo si, existe un conjunto alternante de $n+2$ puntos para la función $f - p_n^*$.*

Demostraciones contemporáneas de este teorema pueden encontrarse en diversos textos, aunque para nosotros es más cómodo tenerlo como un caso particular de [8] y de nuestro resultado del Capítulo 2. Gracias al mismo tenemos que los polinomios de mejor aproximación, de grado a lo más n, de una función continua f, se caracterizan por tocar en $n+2$ puntos y de manera alternada a las funciones $f \pm E_n$ y debido a esta caracterización es que se puede demostrar la unicidad de la mejor aproximación de P_n a f, como veremos en el próximo epígrafe. Una visión geométrica idealizada del contenido del Teorema 1.2.1 se muestra en la figura 1.2.1.

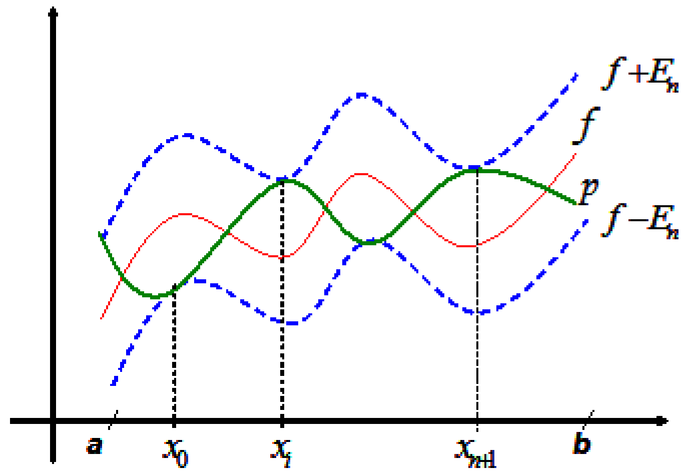

Fig. 1.2.1.

1.3. Unicidad de la mejor aproximación

Antes de demostrar la unicidad de la mejor aproximación demostraremos el lema siguiente.

Lema 1.3.1 *Sea X un espacio normado, $x \in X$ y Y un subespacio de X, entonces el conjunto de mejores aproximaciones de x a Y es un conjunto convexo.*

Demostración: Sea Y^* el conjunto de mejores aproximaciones de x a Y. Si Y^* es vacío o se reduce a un solo elemento, terminamos.

En otro caso, si y_1, $y_2 \in Y^*$, $y_1 \neq y_2$, resulta

$$\|x - y_1\| = \|x - y_2\| \leq \|x - y\| \quad \text{para todo} \quad y \in Y.$$

Sean $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, es así que

$$\begin{aligned} \|x - (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)\| &\leq \|\lambda_1(x - y_1) + \lambda_2(x - y_2)\| \\ &\leq \lambda_1 \|x - y_1\| + \lambda_2 \|x - y_2\| \\ &\leq \|x - y\| \end{aligned}$$

para todo $y \in Y$. Por tanto Y^* es convexo ■

Teorema 1.3.2 *Dados $f \in C[a, b]$ y $n \in \mathbb{N}$, el polinomio p_n^* de mejor aproximación de P_n a f es único.*

Demostración: Supongamos que $p, p_n^* \in P_n$ son mejores aproximaciones de $f \in C[a,b]$. Por el lema anterior $q = (p + p_n^*)/2 \in P_n$ es de mejor aproximación de f.

Sea $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1} \in [a,b]$ un conjunto alternante para $f - q$, entonces para algún $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{f(x_j) - p(x_j)}{2} + \frac{f(x_j) - p_n^*(x_j)}{2} = (-1)^{k+j} E_n(f), \qquad j = 0, ..., n+1.$$

Por otro lado

$$\frac{|f(x_j) - p(x_j)|}{2} \leq \frac{E_n(f)}{2} \qquad \text{y} \qquad \frac{|f(x_j) - p_n^*(x_j)|}{2} \leq \frac{E_n(f)}{2}.$$

Es así que

$$\frac{f(x_j) - p(x_j)}{2} + \frac{f(x_j) - p_n^*(x_j)}{2} = (-1)^{k+j} E_n(f),$$

sólo se cumple cuando

$$f(x_j) - p(x_j) = f(x_j) - p_n^*(x_j) = (-1)^{k+j} E_n(f)$$

De aquí

$$p(x_j) = p_n^*(x_j), \qquad j = 0, ..., n+1;$$

por lo tanto

$$p = p_n^* \blacksquare$$

1.4. Convergencia uniforme

Dada una función continua f, consideremos la sucesión de polinomios algebraicos que a cada n le hace corresponder el polinomio de mejor aproximación p_n, a f. Esta sucesión tiene la propiedad siguiente, si $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$, entonces

$$\|f - p_m\| \leq \|f - p_n\|.$$

Por otro lado, dentro de la teoría de aproximación se tiene el teorema de Weiesstras, el cual dice que el conjunto de polinomios algebraicos sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ forman un conjunto denso en $C[a, b]$. En otras palabras, dado $\varepsilon > 0$, existe un polinomio p tal que

$$\|f - p\| < \varepsilon.$$

Sea $N = grad(p)$, entonces para cada $n \geq N$

$$\|f - p_n\| \leq \|f - p\| < \varepsilon.$$

Luego la sucesión (p_n) converge uniformemente a f sobre $[a, b]$.

1.5. Ejemplos

Ejemplo 1.5.1 Sean $f(x) = |x|/2$, $[a, b] = [-1, 1]$ y $E_2 = d(f, P_2)$, entonces el polinomio de grado a lo más 2, $p \in P_2$, que mejor aproxima a f sobre $[-1, 1]$, se caracteriza por hacer alternar los valores máximo y mínimo de la función $p - f$ en $n + 2$ puntos consecutivos del intervalo. Calculemos dicho polinomio y el valor de E_2.

Supongamos que $p(x) = ax^2 + bx + c$. Por ser f una función par, debemos tener que $b = 0$. Con igual razonamiento sobre la paridad, el polinomio de mejor aproximación de grado a lo sumo $2n$, también es el de mejor aproximación entre los de grado a lo sumo $2n + 1$. De aquí deducimos no sólo que $E_2 = E_3$ sino que hay un número impar de puntos de contacto del polinomio de mejor aproximación con los bordes de la banda. Ahora, dado que la función $p - f$ es par y p debe tocar, alternadamente, a las funciones $f \pm E_2$ en 5 puntos consecutivos al menos, pero siempre impar, entonces un punto de contacto debe ser $x = 0$, y más aún debe alcanzar este contacto en la banda de arriba, pues no es posible tener

$$f(x) - E_2 \leq p_2(x), \quad \text{con } p_2(0) = -E_2$$

en una vecindad de cero; por lo que

$$p(0) = f(0) + E_2.$$

Esto es $c = E_2$.

Ahora, también por la geometría del problema, $p - f$ alcanza su norma en los puntos -1 y 1, es decir

$$\begin{aligned} E_2 &= (p-f)(-1) \\ &= (p-f)(1). \end{aligned}$$

Por lo tanto $a = 1/2$, es así que el polinomio de mejor aproximación es $p(x) = x^2/2 + E_2$.

Calculemos ahora el valor E_2, para esto, observemos que existen al menos dos puntos t y $-t$, $0 < t < 1$, en los que $p - f$ alcanza el valor $-E_2$, es decir, p toca a la función $f - E_2$ en los puntos $-t$ y t. Como estos puntos son interiores a $[-1, 0)$ y $(0, 1]$, respectivamente, y $p - f$ es de clase C^1 en estos intervalos, la derivada debe anularse en estos puntos. De aquí deducimos que $t = \pm 1/2$ y de $(p-f)\left(\frac{1}{2}\right) = E_2$, que $E_2 = 1/16$ y el polinomio de mejor aproximación es $p(x) = 1/2x^2 + 1/16$.

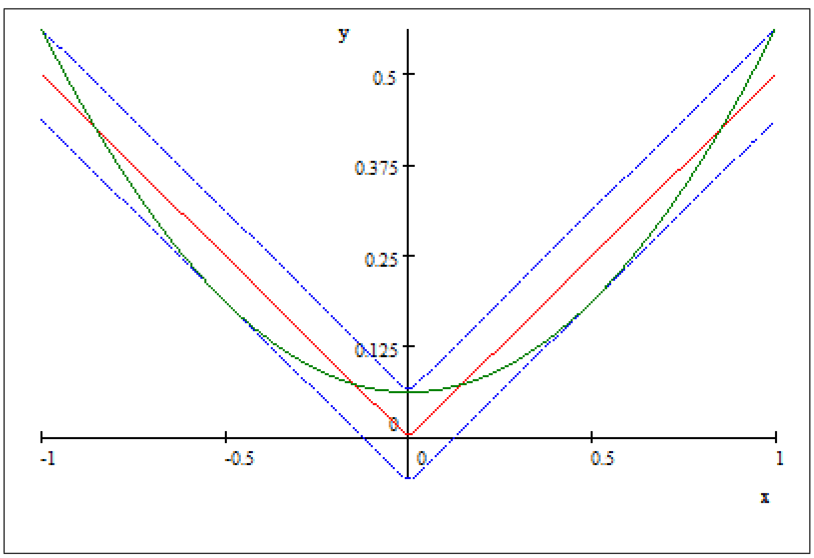

Fig. 1.5.1 Gráfica de las funciones $f, f \pm E_n$ y p,
el polinomio de mejor aproximación.

El ejemplo siguiente también resulta interesante.

Ejemplo 1.5.2: En el intervalo $[-a, a]$, consideramos la función $f(x) = sen(nx)$. El que el número de ceros de f en $[-a, a]$ depende naturalmente de a y n, y la cantidad de ceros determina, según se aprecia en la figura 1.5.2. Mientras el número de contactos de los bordes de la banda con el eje sea mayor o igual a $m+2$, el polinomio p_m^* de grado a lo más m que mejor aproxima uniformemente a f en $[-a,a]$ es $p_m^* \equiv 0$.

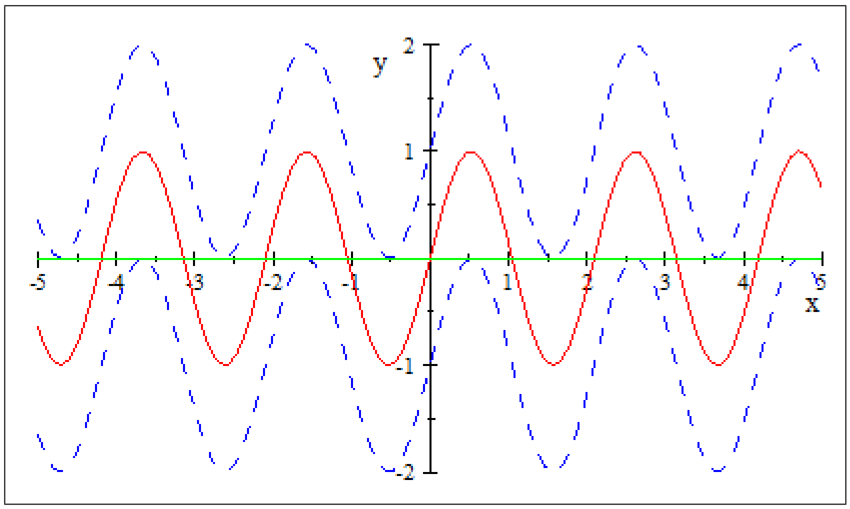

Fig. 1.5.2 Gráfica para $a=5$ y $n=7$, en este caso $m=8$.

En general, parece que no existe una regla para la distribución de los puntos alternantes (ver [12])

1.6. Resumen de capítulo

En este capítulo se ha demostrado que si tenemos una función continua f sobre un intervalo $[a,b]$ y consideramos la banda o región cerrada del plano que denominaremos uniforme y que está limitada por los grafos de las funciones $f \pm E_n$,que llamaremos bordes de la banda, entonces dentro de esta región se encuentra el grafo de uno y sólo un polinomio de grado a lo más n y este se caracteriza por tomar valores coincidentes arriba y abajo, en $n+2$ puntos de $[a,b]$ de manera alternada, con los bordes de la banda. Con un lenguaje más sencillo y aunque sea menos exacto diremos que la banda limitada por $f \pm E_n$, contiene uno y sólo un polinomio de grado a lo más n y que este toca arriba y abajo los bordes de la banda, de manera alternada, en $n+2$ puntos del intervalo.

Si la propia función f no es ella misma un polinomio de grado a lo más n, entonces $E_n > 0$. Luego si cerramos la banda, o sea, si la definimos por las funciones $f \pm \rho$ con $0 < \rho < E_n$; la banda no contiene polinomios de grado a lo sumo n. Si por el contrario tomamos $\rho > E_n$, la banda contendría infinitos polinomios.

En el capítulo siguiente se estudia el caso en el que la banda no es uniforme, es decir, sus bordes se definen mediante los grafos de funciones $f - \lambda h_1$ y $f + \lambda h_2$, $\lambda > 0$; $f, h_1, h_2 \in C[a, b]$, $h_1, h_2 > 0$.

Veremos que se obtienen resultados similares a los mostrados en esta primera parte. Ello constituye nuestra contribución científica en esta tesis.

Capítulo 2

Aproximación polinomial para banda no uniforme

En este capítulo estudiaremos el problema de aproximación polinomial en el caso en el que la banda antes formada por la funciones f más menos la función constante E_n, se forme ahora al sumar y restar funciones estrictamente positivas. Antes daremos una definición generalizada a este nuevo contexto, del elemento de mejor aproximación y estudiaremos también aquí el problema de existencia, caracterización y unicidad de la mejor aproximación.

Como continuación de los trabajos aplicados de Jiménez en 1986, a la industria del petróleo, los doctores Guerra y Jiménez publican un artículo, [7], en 1997, el cual motiva a la profundización en el estudio de la aproximación en bandas no uniformes. En [8] ellos consideran la banda delimitada por las funciones $f - h_1$ y $f + h_2$, donde $h_1 > 0$, $h_2 > 0$ y f son continuas y f no es ella misma un polinomio de grado a lo sumo n. Demuestran entonces que dado un número natural n, el conjunto de polinomios de grado a lo más n que se encuentra dentro de esta banda satisface una de las condiciones siguientes:

i) Es vacío.

ii) Es infinito.

iii) Es un monoelemento.

En realidad, esto es una consecuencia inmediata de lo que demuestran realmente, que el conjunto de soluciones factibles es un monoelemento si y sólo si los elementos de este conjunto tocan a la banda arriba y abajo, alternadamente, en $n+2$ puntos del intervalo $[a,b]$, ver *Fig.* 2.1, lo cual es una cierta extensión del Teorema de Alternancia de Chebyshev 1.2.1. Notemos, sin embargo, que no se menciona aún la idea de mejor aproximación.

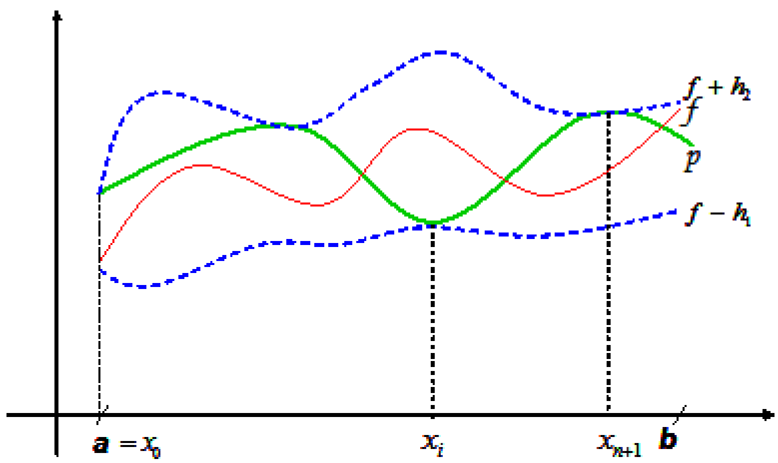

Fig. 2.1

Introduzcamos un parámetro $\lambda > 0$, que multiplique a las funciones h_1 y h_2, y que haga el efecto de expandir o contraer la banda (*Fig.* 2.2).

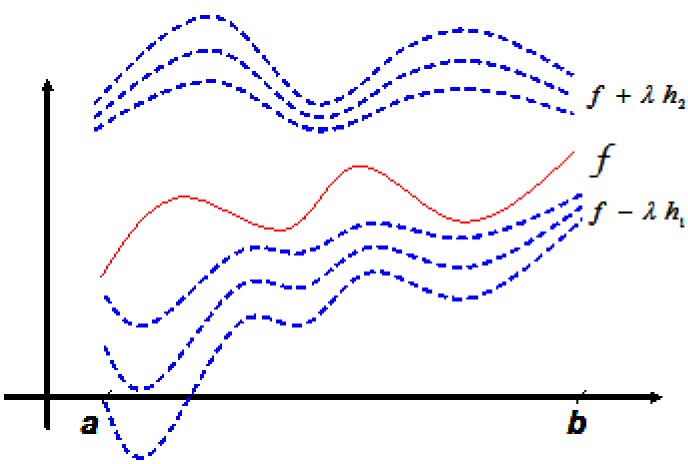

Fig. 2.2 El parámetro λ hace el efecto de abrir o cerrar la banda tanto como se necesite.

Planteemos ahora el problema de optimizar este parámetro de manera de generalizar la idea de la mejor aproximación uniforme.

2.1. Definición de mejor aproximación y polinomio de mejor aproximación en el contexto de bandas no uniformes

Sean $f,\ h_1, h_2 \in C\,[a,b]$, tales que $h_1, h_2 > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ dado. Para un escalar $\lambda > 0$ definimos el conjunto $M_\lambda = M_\lambda(n, f, h_1, h_2) \subset P_n$ como sigue:

$$M_\lambda := \{p \in P_n : f - \lambda h_1 \leq p \leq f + \lambda h_2\} \quad \text{sobre } \ [a,b]\,.$$

La idea de introducir el parámetro λ es para poder expandir la banda tanto como sea necesario para permitir la entrada de polinomios y contraerla lo suficiente como para sólo dejar pasar uno, en caso de que esto sea posible. Aquí, al igual que en el caso tradicional, tiene poco interés si f es un polinomio de grado a lo más n.

Observemos que si $\lambda_1 < \lambda_2$, entonces $M_{\lambda_1} \subset M_{\lambda_2}$, es decir $(M_\lambda)_{\lambda>0}$ es una familia creciente de conjuntos. Por otro lado, para cada $\lambda > 0$ podemos identificar M_λ con un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, el cual resulta ser cerrado y acotado, por tanto compacto, con lo que tendríamos que M_λ también lo es.

Afirmamos que $M_\lambda \neq \phi$ para un valor de λ suficientemente grande. En efecto, sea $p \in P_n$. Consideremos la función $p - f$, la cual es continua y por tanto alcanza su valor máximo y mínimo en $[a,b]$; es decir, para todo $x \in [a,b]$,

$$m \leq (p - f)(x) \leq M,$$

en donde $m = \underset{x\in[a,b]}{mín}(p - f)(x)$ y $M = \underset{x\in[a,b]}{máx}(p - f)(x)$. Por ser $h_1, h_2 > 0$ y continuas, existe $\lambda^* > 0$, tal que

$$-\lambda^* h_1 < m \quad \text{y} \quad M < \lambda^* h_2;$$

por tanto

$$f - \lambda^* h_1 \leq p \leq f + \lambda^* h_2.$$

Así $M_{\lambda^*} \neq \phi$.

Habiendo definido estos conjuntos y presentado algunas de sus propiedades, estamos listos para dar la definición de mejor aproximación y polinomio de mejor aproximación.

Definición 2.1.1 *Sean $f, h_1, h_2 \in C[a,b]$, con $h_1, h_2 > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ dados. Definimos la mejor aproximación de P_n a f, relativo a h_1 y h_2, como*

$$\lambda_n := inf\{\lambda > 0 : M_\lambda \neq \phi\}.$$

Supongamos ahora que $\lambda' > 0$ es un valor suficientemente grande para el cual $M_{\lambda'} \neq \phi$. Entonces, es de suponer que el valor de λ_n debe estar asociado al conjunto

$$M_{\lambda_n} := \bigcap_{\substack{\lambda<\lambda', \\ M_\lambda \neq \phi}} M_\lambda.$$

Cuando este conjunto sea no vacío, se denominará a sus elementos como polinomios de mejor aproximación de P_n a f relativo a h_1 y h_2.

En el caso de la aproximación polinomial uniforme se tiene que, $\lambda_n = E_n(f)$ y que el conjunto M_{λ_n} es no vacío, más aún, consta de un único elemento.

2.2. Existencia de polinomios de mejor aproximación.

Para n fijo, demostrar la existencia de polinomios de mejor aproximación a f relativo a h_1 y h_2, es una consecuencia de las propiedades de los conjuntos M_λ antes mencionadas.

Teorema 2.2.1 *Dados $f, h_1, h_2 \in C[a,b]$, $h_1, h_2 > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces el conjunto $M_{\lambda_n} \neq \phi$.*

Demostración: Como habíamos visto, para cada $\lambda > 0$, M_λ es compacto y la familia $(M_\lambda)_{\lambda<\lambda'}$ es decreciente, cuando λ decrece.

Entonces tenemos una familia decreciente de conjuntos compactos no vacíos contenidos en un compacto $M_{\lambda'}$, por lo que su intersección es no vacía, [1]■

2.3. Caracterización y unicidad de los polinomios de mejor aproximación.

Dados $f, h_1, h_2 \in C[a,b]$, $h_1, h_2 > 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Observemos que si $p^* \in P_n$ es un polinomio de mejor aproximación a f relativo a h_1 y h_2 , entonces existen al menos dos puntos $x_0, x_1 \in [a,b]$ tales que

$$(p^* - f)(x_0) = \lambda_n h_2(x_0), \quad \text{y} \quad (p^* - f)(x_1) = -\lambda_n h_1(x_1).$$

En efecto. Como $[a,b]$ es compacto y p^*, f, h_1 y h_2 son continuas; aplicaremos la existencia de extremos para demostrar que la hipótesis

$$\forall x \in [a,b], \quad -\lambda_n h_1(x) < (q - f)(x) < \lambda_n h_2(x),$$

sería contradictoria con la hipótesis de que λ_n es la mejor aproximación. Así que $p^* - f$ toca al menos un borde de la banda. Debemos probar que, de hecho, toca a los dos. Sin pérdida de generalidad, supóngase que toca al borde superior; pero para cada $x \in [a,b]$,

$$-\lambda_n h_1(x) < (p^* - f)(x).$$

Sea

$$m = \underset{x\in[a,b]}{mín} (p^* - f + \lambda_n h_1)(x),$$

luego $m > 0$.

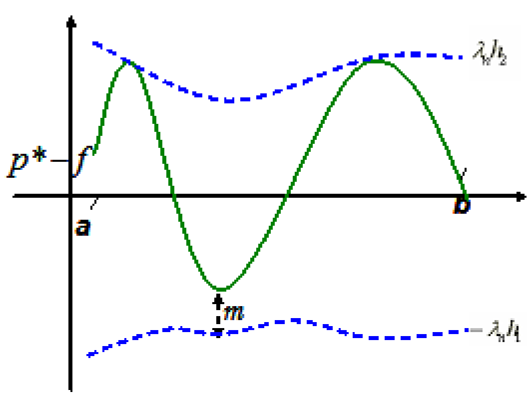

Fig. 2.3.1 La función p^*-f no toca el borde inferior de la banda.

Considerando el polinomio $q(x) = p^*(x) - m/2$, tendríamos que $q \in P_n$ y además

$$-\lambda_n h_1 < q - f$$

y

$$q - f \leq \lambda_n h_2 - \frac{m}{2} < \lambda_n h_2,$$

es decir

$$-\lambda_n h_1 < q - f < \lambda_n h_2$$

sobre $[a, b]$ y por tanto q también sería un polinomio de mejor aproximación que no toca ninguno de los bordes, contradictoriamente a lo ya demostrado.

Estamos listos para enunciar el resultado siguiente.

Teorema 2.3.1 *Sean $f, h_1, h_2 \in C[a, b]$, $h_1, h_2 > 0$ y $n \in \mathbb{N}$. El polinomio de grado a lo más n, p_n^*, es de mejor aproximación a f relativo a h_1 y h_2, si y sólo si, la función $f - p_n^*$ toca alternadamente arriba y abajo en $n+2$ puntos consecutivos de $[a, b]$, a las funciones $-\lambda_n h_1$ y $\lambda_n h_2$.*

Demostración: $\Rightarrow$) Dado n, sean $\lambda_n > 0$ la mejor aproximación de P_n a f relativo a h_1 y h_2, y p_n^* un polinomio de mejor aproximación.

Sea $\mathcal{C}$ la clase de todos los conjuntos $\{x_0, ..., x_k\} \subset [a, b]$, tales que la función $p_n^* - f$ toca alternadamente en estos puntos a las funciones $-\lambda_n h_1$ y $\lambda_n h_2$. Es decir

$$(p_n^* - f)(x_j) = \lambda_n h_2(x_j)$$

y

$$(p_n^* - f)(x_{j+1}) = -\lambda_n h_1(x_{j+1}),$$

$j = 0, 2, ...$; o bien

$$(p_n^* - f)(x_j) = -\lambda_n h_1(x_j)$$

y

$$(p_n^* - f)(x_{j+1}) = \lambda_n h_2(x_{j+1}),$$

$j = 0, 2, ...$ Afirmamos que alguno de los conjuntos en la clase $\mathcal{C}$, que por abuso de lenguaje continuamos llamando alternantes, tiene $n+2$ o más elementos. En efecto, si no fuere así, consideremos un conjunto alternante cualquiera de los que tienen el máximo de elementos posibles $\{x_0, ..., x_k\}$, $1 \leq k \leq n$.

Sin pérdida de generalidad supondremos que

$$(p_n^* - f)(x_0) = \lambda_n h_2(x_0).$$

Los conjuntos $A := [p_n^* - f = \lambda_n h_2]$ y $B := [p_n^* - f = -\lambda_n h_1]$ son compactos, dada la continuidad de las funciones involucradas, así que $A \cap [a, x_0]$ es compacto y por tanto este conjunto de números reales tiene un mínimo x_0' y un máximo x_0'', observemos que no existe $z \in B$, tal que $x_0' < z < x_0''$ pues entonces el conjunto $\{z, x_0, ..., x_k\}$ sería un conjunto alternante con más de $k+1$ elementos.

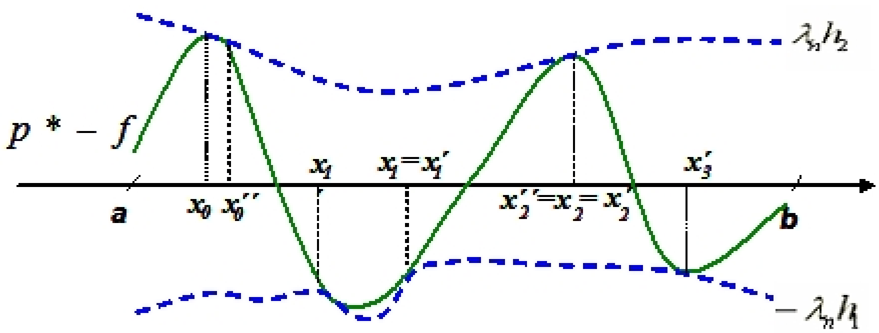

Fig. 2.3.2

Igualmente, $B \cap [x_0'', x_2]$ tiene un mínimo en x_1' y un máximo x_1'' y no existe $x_1' < z < x_1''$, $z \in A$. Por inducción tenemos una sucesión de puntos

$$a \leq x_0' \leq x_0'' < x_1' \leq x_1'' < \cdots < x_k' \leq x_k'' \leq b,$$

vea figura 2.3.2.

Además si $I_j = \left[x_j', x_j''\right]$, $0 \leq j \leq k$, tenemos que $A \subset I_0 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_r$ y $B \subset I_1 \cup I_3 \cup \cdots \cup I_s$, r par y s impar; $max(r, s) = k$ y

$$(I_0 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_r) \cap (I_1 \cup I_3 \cup \cdots \cup I_s) = \phi.$$

Tomemos z_j tal que $x_{j-1}'' < z_j < x_j'$, $1 \leq j \leq k$ y consideremos el polinomio $q \in P_n$,

$$q(x) := (z_1 - x) \cdots (z_k - x),$$

es claro que $p_n^* - f$ y q tienen el mismo signo sobre cada I_j.En cada intervalo $[z_i, z_{i+1}]$, $i = 0, 1, ..., k$, donde $z_0 = a$ y $z_{k+1} = b$ se tiene que

$$min\left\{(\lambda_n h_2 - p_n^* + f)(x) : x \in [z_i, z_{i+1}]\right\} = \alpha_i > 0$$

o

$$min\left\{(\lambda_n h_1 + p_n^* - f)(x) : x \in [z_i, z_{i+1}]\right\} = \alpha_i > 0.$$

Tomemos ahora

$$M := \max_{a \leq x \leq b} |q(x)|,$$

y elegimos $\mu > 0$ tal que

$$\mu M < min\left(\alpha_i : i = 1, ..., k\right).$$

Consideremos $p(x) = p_n^*(x) - \mu q(x)$, polinomio de grado a lo más n y observemos que p está en la banda generada por $-\lambda_n h_1$ y $\lambda_n h_2$, es decir es polinomio de mejor aproximación. Pero no toca a los bordes, por una observación anterior, esto no es posible.

$\Leftarrow$) Para n fijo, sean $p \in P_n$ y $\lambda > 0$, con $p \in M_\lambda$ y para el cual existen $n + 2$ puntos distintos, $x_0, ..., x_{n+1} \in [a, b]$ tales que

$$(p - f)(x_i) = -\lambda h_1(x_i)$$

y

$$(p - f)(x_{i+1}) = \lambda h_2(x_{i+1}),$$

o bien

$$(p - f)(x_i) = \lambda h_2(x_i)$$

y

$$(p - f)(x_{i+1}) = -\lambda h_1(x_{i+1}),$$

para $i = 0, 2, 4, ...$; supongamos que ocurre que $(p - f)(x_0) = -\lambda h_1(x_0)$.

Sean $\lambda_n > 0$ la mejor aproximación de P_n a f relativo a h_1 y h_2 y $p^* \in P_n$ un polinomio de mejor aproximación. Si p no es un polinomio de mejor aproximación, entonces $\lambda_n < \lambda$ y $p \neq p^*$.

Luego

$$(p - f)(x_i) < (p^* - f)(x_i)$$

y

$$(p^* - f)(x_{i+1}) < (p - f)(x_{i+1}),$$

para $i = 0, 2, 4, ...$; esto implica que la función continua

$$((p^* - f) - (p - f)) = p^* - p,$$

cambia de signo en al menos $n + 2$ puntos distintos de $[a, b]$, pero $p^* - p \in P_n$, luego tiene $n + 1$ ceros en $[a, b]$ entonces debe ser $p^* - p \equiv 0$, contradictoriamente a lo supuesto■

Dadas $f, h_1, h_2 \in C[a, b]$, $h_1, h_2 > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, acabamos de demostrar que los polinomios de grado a lo más n de mejor aproximación a f, relativos a h_1 y h_2, se caracterizan por tocar a los bordes de la banda en $n+2$ puntos de $[a, b]$ de manera alternada. Esto último y el resultado obtenido por los doctores Guerra y Jiménez, [8], nos dan la unicidad del polinomio de mejor aproximación que formalizaremos en el teorema siguiente.

Teorema 2.3.2 *Sean $f, h_1, h_2 \in C[a, b]$, $h_1, h_2 > 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces el polinomio de mejor aproximación de grado a lo más n a f relativo a h_1 y h_2 es único.*

Demostración: Sean $p \in P_n$ y $\lambda > 0$, con $p \in M_\lambda$ y tales que $p - f$ toca en $n+2$ puntos distintos de $[a, b]$ y de manera alternada a las funciones $-\lambda_n h_1$ y $\lambda_n h_2$. Por el resultado Guerra-Jiménez, [8], $M_\lambda = \{p\}$.

Por otro lado si p^* es un polinomio de mejor aproximación $p^* \in M_{\lambda'}$ para todo $M_{\lambda'} \neq \phi$, luego $p^* \in M_\lambda$. Por tanto $p = p^*$, es decir p es un polinomio de mejor aproximación ■

2.4. Estimado de la velocidad de aproximación

Sean $h_1, h_2 \in C[a, b]$, $h_1, h_2 > 0$, fijas. Dada una función $f \in C[a, b]$, nos interesamos en comparar la sucesión (λ_n^*) de la mejor aproximación relativa a f, h_1, h_2; con la sucesión (E_n) de la mejor aproximación uniforme tradicional. El trabajo desarrollado previamente en este capítulo, nos permite dar una rápida respuesta a este reto.

Definamos

$$M = \underset{i=1,2}{max} \left\{ \underset{x \in [a,b]}{max} h_i(x) \right\}$$

y

$$m = \underset{i=1,2}{min} \left\{ \underset{x \in [a,b]}{min} h_i(x) \right\}.$$

Se tiene $0 < m \leq M < \infty$.

Teorema 2.4.1 *Para toda $f \in C[a,b]$, se tiene*

$$\frac{E_n(f)}{M} \leq \lambda_n^*(f) \leq \frac{E_n(f)}{m}$$

o equivalentemente

$$m\lambda_n^*(f) \leq E_n(f) \leq M\lambda_n^*(f).$$

Demostración: Fijemos n. No perdemos generalidad si suponemos que f no es ella misma un polinomio de grado a lo más n, en cuyo caso $E_n(f) = \lambda_n^*(f) = 0$. Sean p_n^* y q_n^*, los polinomios de mejor aproximación a f, de grado a lo sumo n, relativos a h_1 y h_2 y a la aproximación uniforme; respectivamente. Tenemos

$$-\lambda_n^* M \leq -\lambda_n^* h_1(x) \leq (p_n^* - f)(x) \leq \lambda_n^* h_2(x) \leq \lambda_n^* M$$

luego

$$E_n(f) \leq M\lambda_n^*(f)$$

por otro lado

$$-\frac{E_n(f)}{m} h_1(x) \leq -E_n(f) \leq (q_n^* - f)(x) \leq E_n(f) \leq \frac{E_n(f)}{m} h_2(x)$$

de aquí

$$\lambda_n^*(f) \leq \frac{E_n(f)}{m} \blacksquare$$

2.5. Resumen de capítulo

Hemos demostrado en este capítulo teoremas de existencia y unicidad del polinomio de mejor aproximación, en este nuevo contexto; así como un teorema que caracteriza a dicho polinomio.

En el Capítulo 3 presentaremos el caso en que las funciones h_1 y h_2 pueden tener ceros. Veremos, mediante algunos ejemplos, las cosas tan raras que pueden ocurrir.

Capítulo 3

Condiciones de interpolación.

En este capítulo introduciremos el caso en que h_1 y h_2 pueden tener ceros en el intervalo de estudio. La idea es que al permitirle esta cualidad a dichas funciones y estas tengan un número finito de ceros coincidentes, los polinomios incluidos en la banda tengan que interpolar a la función f que se aproxima, en cada cero común de h_1 y h_2.

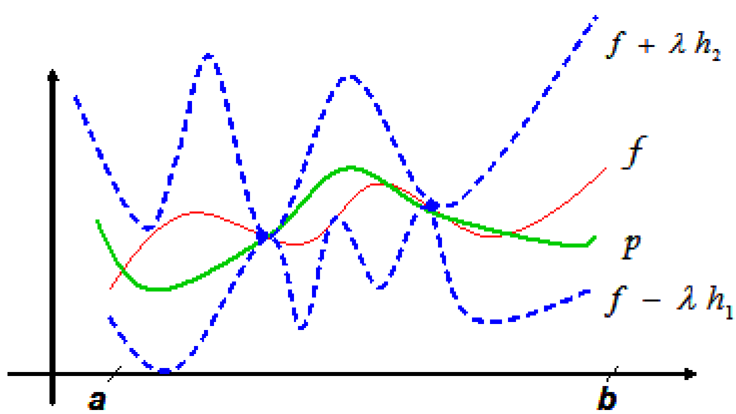

Fig. 3.1 P interpola a f en los puntos donde h_1 y h_2 tienen ceros comunes.

Bajo condiciones adicionales, podría lograrse interpolar con una suavidad predeterminada, buscando generalizar la interpolación de Hermite. Por otra parte, también estudiar la aproximación unilateral.

A diferencia del caso en el cual h_1 y h_2 son estrictamente positivas, el nuevo problema que enfrentaremos encierra un alto grado de complejidad y dificultad, según podremos observar en la colección de ejemplos que citaremos.

No se trata pues de presentar en esta ocasión un estudio completo del nuevo caso sobre los problemas de existencia, caracterización, unicidad, etc., como logramos en el capítulo precedente. Ese será el material de una segunda tesis, la de doctorado. Pero la colección anunciada de ejemplos tiene por sí, nos parece, interés propio.

Ocupémonos del planteamiento del problema. Se tienen $h_1, h_2, f \in C[a,b]$, $h_1, h_2 \geq 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Nos preguntamos si existen un escalar $\lambda > 0$ y un polinomio $p \in P_n$ tales que

$$f - \lambda h_1 \leq p \leq f + \lambda h_2. \tag{1}$$

En tales casos pasaríamos a estudiar los otros problemas típicos de la mejor aproximación relativa a este contexto.

3.1. Funciones de error con infinitos ceros.

Si una de las funciones h_i, $i = 1, 2$, es idénticamente nula y la otra no tiene ceros, estaríamos generalizando la aproximación lateral (superior si $h_1 \equiv 0$ e inferior si $h_2 \equiv 0$). Obviamente siempre existe una solución para todo n y $f \in C[a,b]$ dados. Anunciamos que también aquí se tienen resultados de existencia, unicidad y caracterización de la mejor aproximación polinomial.

Más complejo es el caso en el cual la función de error no idénticamente nula tiene ceros. Para su estudio se hace conveniente clasificar previamente lo que ocurre cuando las funciones h_1 y h_2 tienen sólo un número finito de ceros.

La interpolación en un conjunto numerable de puntos, tiene interés, por ejemplo, en la teoría de variable compleja. Para el caso de la aproximación polinomial, no tiene, a nuestro parecer, mayor interés.

En efecto, si las funciones de error h_i, $i = 1, 2$, se anulan simultáneamente en un conjunto infinito de puntos, el problema 1 sólo podría tener solución si la función objeto de estudio, f, coincidiese sobre ese conjunto con un polinomio p, de grado N exactamente. En tal caso, podría existir $\lambda^* > 0$ que fuese solución de 1 con $n \geq N$. Si así fuere, p sería la única solución para todo $\lambda \geq \lambda^*$ y todo $n \geq N$ y no habría solución si $n < N$.

3.2. Funciones de error con finitos ceros.

Si el número de ceros comunes de h_1 y de h_2 es finito, puede existir o no, una solución al problema 1.

El ejemplo siguiente muestra la no existencia de solución.

Ejemplo 3.2.1: Sea $[a, b] = [-1, 1]$, supongamos que deseamos encontrar un polinomio p, tal que

$$f - \lambda h_1 \leq p \leq f + \lambda h_2,$$

en donde $f = h_2 = |x|/2$ y $h_1 \equiv 0$.

O sea, tal que

$$\frac{|x|}{2} \leq p(x) \leq (1 + \lambda)\frac{|x|}{2}.$$

En este caso la gráfica del problema es la siguiente:

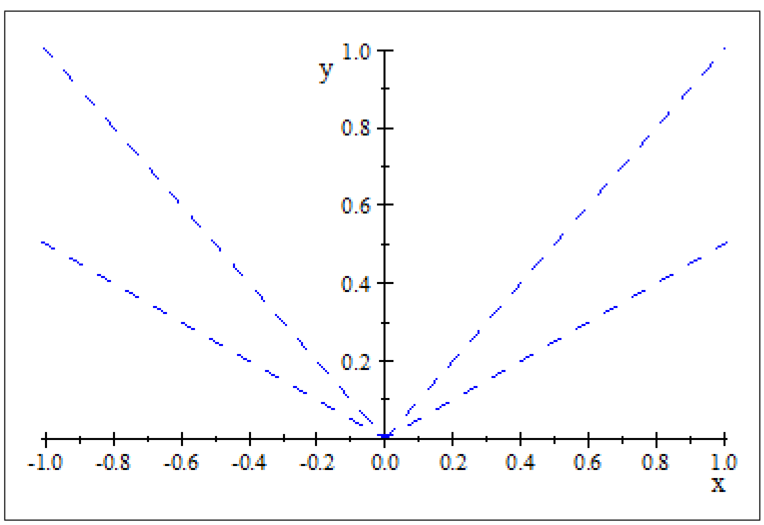

Fig. 3.2.1 La forma de la banda en este problema determina su no solubilidad.

De la gráfica podemos predecir que no existe solución. Analíticamente, se debe a que cualquier polinomio dentro de la banda deberá ser de grado mayor o igual a 2 y tener un cero múltiple en 0, lo cual es incompatible con la desigualdad $|x|/2 \leq p(x)$ en una vecindad del cero.

El ejemplo precedente conduce a pensar, que la existencia de solución del problema está relacionada directamente con la suavidad de las funciones f, h_1 y h_2. Sin embargo, el ejemplo siguiente demuestra que con funciones suaves, puede no haber solución.

Ejemplo 3.2.2: Sean

$$\begin{aligned} [a.b] &= [-1,1], h_1 = h_2 = x^2 \text{ y} \\ f(x) &= \begin{cases} |x|^{3/2}\, sen\frac{1}{|x|^{1/4}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

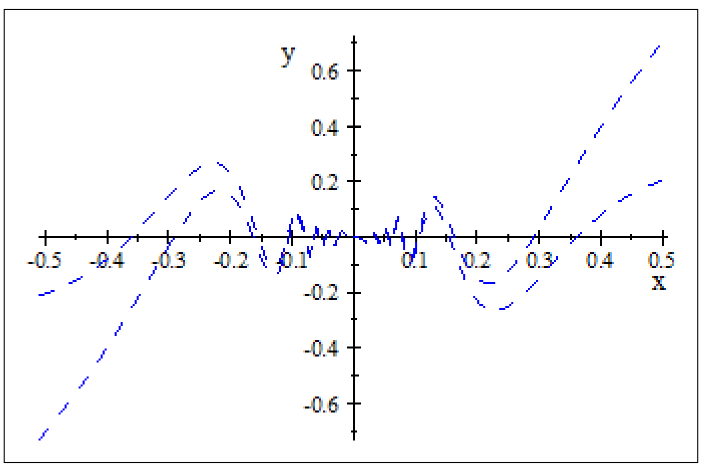

Fig. 3.2.2 Gráfica de los bordes de la banda en una vecindad de cero.

Notemos que $f, h_1, h_2 \in C^1[-1,1]$, que h_1 y h_2 tienen un único cero y sin embargo no existe polinomio alguno que satisfaga

$$f - \lambda h_1 \leq p \leq f + \lambda h_2,$$

independientemente del valor de λ y del grado del polinomio.

En efecto, sean (x_n) y (y_n) definidas por

$$\frac{1}{|x_n|^{1/4}} = \frac{4n+3}{2}\pi \quad \text{y} \quad \frac{1}{|y_n|^{1/4}} = \frac{4n+1}{2}\pi$$

tanto $x_n \to 0$ como $y_n \to 0$ y las sucesiones están intercaladas de manera que

$$sen\left(\frac{1}{|x_n|^{1/4}}\right) = -1 \text{ y } sen\left(\frac{1}{|y_n|^{1/4}}\right) = 1.$$

Dado $\lambda > 0$ tendríamos que buscar $p \in P_n$, tal que, en particular, se tenga

$$p(x_n) \leq \lambda x_n^2 - x_n^{3/2}$$

y

$$p(y_n) \geq -\lambda y_n^2 + y_n^{3/2}.$$

Pero, para n suficientemente grande se tendrá

$$\lambda x_n^2 - x_n^{3/2} \leq \frac{-x_n^{3/2}}{2}$$

y

$$-\lambda y_n^2 + y_n^{3/2} \geq \frac{y_n^{3/2}}{2}.$$

Es decir, en cualquier vecindad de cero, p tendría infinitos máximos y mínimos y no es constante. Luego p no puede ser un polinomio.

En este caso el comportamiento oscilante de f afectó el problema de existencia.

3.3. Pérdida de la unicidad.

Se tienen ejemplos en los cuales, dado n, aún cuando existe un polinomio de grado a lo más n y la mejor aproximación, $\lambda > 0$, para el cual

$$f - \lambda h_1 \leq p \leq f + \lambda h_2,$$

no se tenga unicidad. El ejemplo siguiente lo ilustra.

Ejemplo 3.3.1: Para $[a,b]=[-1,1]$. Analicemos la desigualdad

$$f-\lambda h_1\leq p\leq f+\lambda h_2,$$

para $f=|x|/2, h_1=3|x|/2$ y $h_2\equiv 0$.

Tenemos

$$(1-3\lambda)|x|/2\leq p(x)\leq |x|/2.$$

Notemos que si $0<\lambda<1/3$, nos encontramos en un caso similar al Ejemplo 3.1.1, por lo tanto, para esos valores de λ, no hay solución para ningún $n\in\mathbb{N}$.

A partir del valor de $\lambda=1/3$ empezamos a tener polinomios dentro de la banda, es decir la mejor aproximación es $\lambda=1/3$ para todo n. Si $n=0$ o $n=1$, el polinomio de mejor aproximación es la constante cero. Si $n>1$, ya se pierde la unicidad. A manera de ilustración para $n=2$, $p(x)=x^2/4$ y $p(x)=x^2/2$.

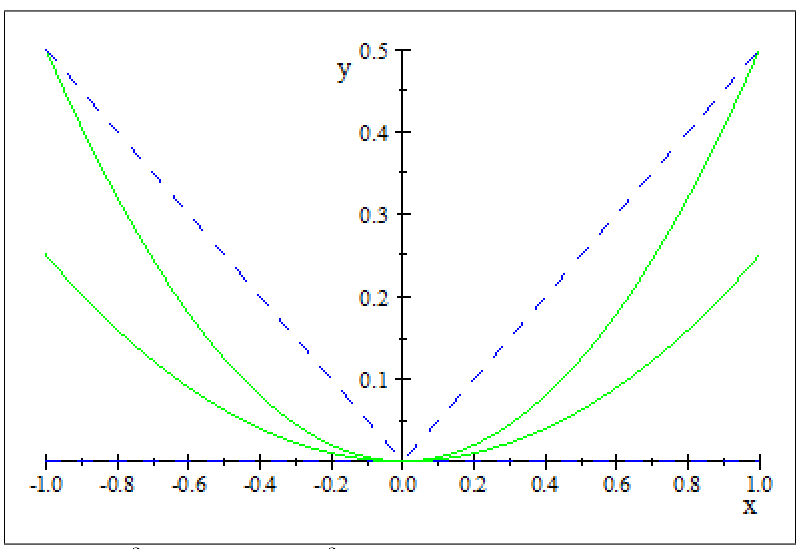

Fig. 3.3.1 $p(x)=x^2/2$ y $p(x)=x^2/4$ son soluciones del problema con $\lambda_2=1/3$.

3.4. Resumen del capítulo.

Considerar funciones de error con ceros, enriquece ampliamente las posibilidades de generalizar varios conceptos de la teoría de la aproximación, como pueden ser la aproximación con interpolación pero se necesitará de hipótesis complementarias para evitar las situaciones desagradables que se han ejemplificado en este capítulo.

Conclusiones

Sean $f, h_1, h_2 \in C[a,b]$ y $n \in \mathbb{N}$ dados.

Para funciones de error $h_1, h_2 \geq 0$, se puede definir, en caso de que existan, los valores de la mejor aproximación de orden n y los polinomios de grado a lo más n, de mejor aproximación a la función f dada.

Si $h_1, h_2 > 0$, el problema considerado tiene solución, es única y el polinomio de mejor aproximación se caracteriza a través de un teorema de alternancia de Chebyshev.

El caso $h_1, h_2 \geq 0$ presenta diferentes facetas y necesita de hipótesis complementarias para tener resultados satisfactorios. Este problema será objeto de estudio en nuestro doctorado.

Bibliografía

[1] Apostol T. M., *Mathematical Analysis.* Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts. 1974.

[2] Bustamante J., Moreno S. G., Quesada J. M., *Best approximation and wrappings*, Topology Proceedings. Vol. 29, 1, 1-22, 2005.

[3] Chebyshev P. L., *Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fontions.* Mém. Prés. Acad. Imp. Sci. Pétersb. (6), Sci. Math. Phys. VII, 1859, pp. 199-291.

[4] Chebyshev P. L., *Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes.* Mém. Prés. Acad. Imp. Sci. Pétersb. Divers Savants, 1854, VII, pp. 539-568.

[5] Cheney, E. W., *Introducction to Approximation Theory*, McGraw-Hill, New York, 1966.

[6] DeVore R. A., Lorentz G. G., *"Constructive Approximation"*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[7] Guerra F., Jiménez M. A., *A semi-infinite programming approach to a mixed approximation problem*, Parametric Optimization and Related Topics IV, J.Guddat et al, series *Approximation and Optimization*, Peter Lang Verlag, Frankfurt, 1997, pp. 135-143.

[8] Guerra F., Jiménez M. A., *On feasibles sets defined through Chebyshev approximation,* Mathematical Methods of Operations Research, Vol. 47, Issue 2, 1998, pp. 255-264.

[9] Hassouni A., Oettli W., *On regularity and optimality in nonlinear semi-infinite programing.* Recent advances, Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. Nonconvex Optim. Appl. 57 (2001), pp. 59-74.

[10] Jiménez M. A., Juárez E. L, Guerra F., *Transformation of some mixed approximation problems by optimization methods*, Vol 5, 1, 2002, pp. 175-190.

[11] Jiménez M. A., Todorov M. I., *Unicity of the solutions of infinite linear inequality systems.* Comptes Rendus de l'Académie bulgare des Sciences Tome 54, Nr. 6, 2001, pp. 17-20.

[12] Lorentz G. G., *Distribution of alternation points in uniform polynomial approximation,* Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 92, 3, 1984, pp. 401-403.

[13] Rivlin T. J., *An introduction to the approximation of functions,* Blaisdell Publishing Company, Massachusetts, 1969.

[14] Tikhomirov V. M. Commentary. *Journal of Approximation Theory*, 106, 2000, pp. 58-65.