



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

UN ESTUDIO DE LA DINÁMICA DE LA FAMILIA

$$\mathcal{T}_\lambda(z) = \lambda \tan(z)$$

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

LICENCIADA EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:

JEANETE PÉREZ ROJAS

DIRECTORA DE TESIS:

DRA. PATRICIA DOMÍNGUEZ SOTO

PUEBLA, PUEBLA. Noviembre 2016

Índice general

1. Introducción	1
2. Conceptos básicos	7
2.1. Espacios métricos	7
2.1.1. Sucesiones	9
2.1.2. Conjuntos compactos	11
2.1.3. Conjuntos conexos	11
2.2. El campo de los números complejos	13
2.2.1. El plano complejo	14
2.3. La esfera de Riemann y el plano complejo extendido	18
2.3.1. Métrica esférica	19
2.4. Funciones de variable compleja	20
2.4.1. Función exponencial y funciones trigonométricas	21
2.4.2. Límites y continuidad de funciones	22
2.5. Funciones holomorfas	24
2.5.1. Ecuaciones de Cauchy-Riemann	25
2.6. Funciones analíticas	28
2.7. Derivada Schwarziana	30
2.8. Funciones conformes	33
2.9. Conjugación analítica	37
2.10. Singularidades y valores singulares	38
2.11. Integración compleja	39
3. Familias normales	45
3.1. Sucesión de funciones	45

3.2. Teoremas de Arzelà-Ascoli y Montel	48
4. Funciones de la clase \mathcal{M}	53
4.1. Puntos fijos y su clasificación	54
4.2. Conjuntos de Fatou y Julia	56
4.3. Clasificación de las componentes de Fatou	57
4.3.1. Clasificación de componentes periódicas	58
5. La familia $\mathcal{T}_\lambda(z) = \lambda \tan(z)$	59
5.1. La función $f(z) = \tan(z)$	59
5.2. La familia $\mathcal{T}_\lambda = \lambda \tan(z)$	66
Bibliografía	71
Índice	76

Capítulo 1

Introducción

Los orígenes de la dinámica compleja se remontan a los años 1870 y 1871, cuando el matemático alemán Ernst Schröder escribió dos artículos sobre algoritmos iterativos para la solución de ecuaciones, su estudio fue inspirado por el algoritmo del método de Newton empleado para encontrar aproximaciones a los ceros o raíces de una función real.

El interés de Schröder por el método de Newton tuvo como fruto un breve pero intenso estudio de la iteración en el plano complejo donde descubrió el comportamiento de puntos fijos atractores.

Considerando el método de Newton como una función compleja $N_f(z)$, Schröder descubrió que una posible raíz compleja p de f es también un punto fijo súper atractor de N_f , hecho que lo llevó a una generalización del método de Newton y la creación de una familia de algoritmos para hallar raíces.

El aporte más significativo de Schröder fue el uso de la conjugación para el estudio de iteradas. Esto es, $f(z)$ es analíticamente conjugada a $g(\zeta)$ si existe una función analítica $\psi(\zeta)$ tal que $f(\psi(\zeta)) = \psi(g(\zeta))$. En términos de la inversa, $\varphi(z)$ de $\phi(\zeta)$, tenemos $\varphi(f(z)) = g(\varphi(z))$.

Sin embargo, la idea de conjugación analítica no era del todo nueva ya que es posible encontrar una idea similar en un manuscrito inconcluso de Niels Henrik Abel dado a conocer en 1837, el cual no contó con mucha difusión hasta 1881, año en el cual es publicada una colección de los trabajos de Abel.

En 1883 el matemático francés Gabriel Xavier Paul Koenigs escribió una serie de artículos desarrollando la teoría local de iteración de una función analítica compleja. Koenigs demostró resultados fundamentales, entre ellos la existencia de puntos fijos atractores y repulsores, posteriormente, desarrolló una sorprendente teoría local describiendo la dinámica de iteración en la vecindad de un punto fijo atractor .

Matemáticos franceses de la época mostraron gran interés por la conjugación analítica en la vecindad de un punto fijo, influenciados en gran medida por el trabajo del británico Arthur Cayley publicado en 1890 que lleva por título *Sur les racines d'une équation algébrique*.

Suponga que z_0 es un punto fijo de $f(z)$, dicho de otra forma, $f(z_0) = z_0$. Sea $\lambda = f'(z_0)$, llamado multiplicador de $f(z)$ en z_0 . La idea intuitiva es que la función $z \rightarrow f(z)$ se comporta de manera similar a $z \rightarrow z_0 + \lambda(z - z_0)$ cerca de z_0 . El problema consiste en determinar cuándo $f(z)$ puede ser conjugada a una multiplicación por λ en alguna vecindad de un punto fijo con multiplicador λ .

Si tenemos un punto fijo atractor z_0 , es decir, si $0 < |\lambda| < 1$, Gabriel Koenigs demostró en 1884 que la conjugación analítica existe. El caso de un punto fijo repulsor, $|\lambda| > 1$ puede reducirse al caso de un punto fijo atractor considerando la inversa de $f(z)$. Lucjan Emil Böttcher se encarga del estudio del caso súper atractor, $\lambda = 0$ en 1904, mostrando que existe la conjugación de $f(z)$ a la función $\zeta \rightarrow \zeta^m$ donde $m \geq 2$ es el orden de $f(z)$ en z_0 .

Si $|\lambda| = 1$ tenemos un punto fijo neutral y su comportamiento dependerá de que λ sea o no raíz de la unidad cuyos dominios son conocidos como pétalos, los cuales atrajeron la atención de Léopold Leau y posteriormente la de Pierre Joseph Louis Fatou y Gaston Maurice Julia para su estudio.

El despertar del siglo XX trajo consigo gran actividad. En el área del análisis complejo por los trabajos de Paul Koebe y Edmund Georg Hermann Landau. Maurice René Fréchet y Frigyes Riesz construyeron las bases de análisis funcional moderno. Henri Léon Lebesgue que en su disertación *Intégrale, longueur, aire* presentada en la Universidad de Nancy, definió la integral de Lebesgue, la cual generaliza la noción de la integral de Riemann. Por su parte, Paul Antoine Aristide Montel da a conocer la noción de *fami-*

lias normales para funciones analíticas.

Es gracias a la idea de compacidad en el espacio de funciones y a las herramientas matemáticas asociadas a su desarrollo que la teoría de iteración adquiere fuerza nuevamente, de modo que la Academia de Ciencias de Francia anuncia en 1918 el Gran Premio en Matemáticas se dedicaría al estudio de la iteración de funciones complejas.

Se cree que fue gracias al anuncio del Gran Premio que Pierre Fatou y Gaston Julia trabajaron y crearon fuertes cimientos para el estudio de los sistemas dinámicos complejos que se desarrolla hasta el día de hoy.

Fatou y Julia trabajaron por separado y sin ejercer influencia en el otro, lo que resulta sorprendente ya que muchos de sus hallazgos coincidieron.

Pierre Fatou ya contaba con diez años de experiencia en el estudio de la teoría de iteración, de hecho, en 1906 publicó una nota en la que afirma que el complemento de la cuenca de atracción de un punto fijo atractor puede ser reducido a un conjunto de Cantor.

Ambos mostraron gran interés en el estudio del objeto matemático que hoy se conoce como el conjunto de Julia. Pierre Fatou definió a este conjunto como el complemento del conjunto abierto más grande en el cual las iteradas de $f(z)$ forman una familia normal. Julia por otra parte, lo definió como la clausura de todos los puntos periódicos repulsores de $f(z)$. De manera independiente demostraron un teorema según el cual las definiciones coinciden.

Una de las ideas más interesantes de estos matemáticos es el uso del concepto de familia normal como herramienta para la división del plano complejo en dos conjuntos, donde en uno de ellos la sucesión de iteradas presenta un comportamiento estable y en el otro conjunto se presenta un comportamiento caótico.

Destacaron la observación de propiedades de autosimilitud en el conjunto de Julia, es decir, formas localizadas en el conjunto de Julia aparecían en diferentes escalas por todo el conjunto de Julia. En palabras de Fatou, “L’ensemble F a même structure dans toutes ses parties”, o bien en palabras de Julia “La structure de F' est la même dans toutes ses parties”.

Tres artículos fueron sometidos a consideración de la Academia de Ciencias de Francia. El premio fue otorgado a Gaston Julia [24] y fue concedida una mención de honor a Samuel Lattès, quien falleciera meses antes de la premiación. La Academia no hizo pública la identidad del tercer participante, sin embargo, en [3] se sugiere que puede tratarse del matemático italiano Salvatore Pincherle. Pierre Fatou decidió no enviar su trabajo y el por qué de esta decisión sigue sin conocerse.

Fatou y Julia continuaron explorando y enriqueciendo la dinámica compleja en la década de 1920 pero mientras las preguntas que permanecían abiertas se resolvían, los avances disminuyeron.

Después de la segunda guerra mundial, de no ser por el trabajo de Irvine Noel Baker que comenzó en la década de 1950 con el estudio de la iteración de funciones enteras y algunos artículos aislados, como los escritos por Hans Brolin y Sir Thomas MacFarland Cherry a mediados de la década de 1960, el interés en el área decayó y a los ojos de cualquier observador parecía un campo de estudio inactivo.

Esto cambió dramáticamente alrededor de 1980 con el descubrimiento del Conjunto de Mandelbrot y la disponibilidad de computadoras, las cuales revelaron los hermosos objetos que sólo Julia y Fatou podían imaginar.

Otra contribución importante en la década de 1980 fue el artículo *Itération des polynomes quadratiques* de Adrien Douady y su alumno John Hamal Hubbard.

En 1985, es publicado el artículo de Dennis Parnell Sullivan *Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I. Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains*, el cual resultó ser un punto de partida para las investigaciones que se desarrollan actualmente.

Gracias a la madurez de esta área numerosos recursos para el estudio y la investigación fueron elaborados por Alan Frank Beardon, Lennart Axel Edvard Carleson, Theodore William Gamelin y Robert Luke Devaney, por mencionar algunos.

Las propiedades dinámicas de la familia $\lambda \tan(z)$ fueron estudiadas por primera vez por Robert Devaney y Linda Keen en [16] y [17], posteriormente Irvine Noel Baker, Janina Maria Kotus y Y. Lü iniciaron el estudio de la teoría de iteración de funciones meromorfas en 1990-1991 con cuatro artículos [6], [7], [8] y [9].

En esta tesis se estudian algunas propiedades de la función $\tan(z)$, así como algunos aspectos dinámicos de la familia $\lambda \tan(z)$. Los principales resultados de este trabajo de tesis son:

Teorema A. Sea $\mathcal{T}_\lambda(z) = \lambda \tan(z)$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\lambda > 1$, entonces el conjunto de Julia $\mathcal{J}(\mathcal{T}_\lambda)$ es la recta real y todos los demás puntos tienden bajo iteración a uno de los dos puntos fijos ubicados en el eje imaginario.

Teorema B. Sea $\mathcal{T}_\lambda = \lambda \tan(z)$. La familia $\mathcal{T}_\lambda(z)$ tiene un único punto fijo si, y sólo si este punto es cero y $0 < |\lambda| < 1$.

Teorema C. Sea $\mathcal{T}_\lambda(z) = \lambda \tan(z)$. Si $0 < |\lambda| < 1$, entonces el conjunto de Fatou $\mathcal{F}(\mathcal{T}_\lambda)$ es una componente completamente invariante donde $\mathcal{T}_\lambda^{\circ n}(z) \rightarrow 0$.

Corolario D. Con las hipótesis del **Teorema C**, el conjunto de Julia de $\mathcal{T}_\lambda(z)$ es totalmente desconexo.

Capítulo 2

Conceptos básicos

En este capítulo enunciaremos algunos conceptos necesarios para el desarrollo de esta tesis y pueden ser consultados en [1], [5], [15], [23], [26], [27], [28], [31], [34], [35], [37].

2.1. Espacios métricos

Definición 2.1. Una *métrica* en X es una función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades:

- (a) $\forall x, y \in X : d(x, y) \geq 0$.
- (b) Sean $x, y \in X : d(x, y) = 0 \iff x = y$.
- (c) $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$.
- (d) $\forall x, y, z \in X : d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.

La expresión $d(x, y)$ es la *distancia* o *métrica* entre dos puntos x y y .

El par (X, d) formado por el conjunto X y la métrica d definida sobre X , se denomina *espacio métrico*.

Observación 2.1. De este punto en adelante se denotará únicamente con X al espacio métrico X respecto de la métrica d .

Definición 2.2. Sea X un espacio métrico y sea $A \subseteq X$ tal que $A \neq \emptyset$. Se define el *diámetro de A* , en caso de existir, denotado como $diam(A)$ como sigue

$$diam(A) = \sup \{d(a, b) : a, b \in A\}.$$

Decimos que el conjunto A es *acotado* si $diam(A) < \infty$.

Definición 2.3. Sean X un espacio métrico, $x \in X$ y $r > 0$. Se definen los siguientes subconjuntos en X

1. La *bola abierta* centrada en x y radio r

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

2. La *bola cerrada* centrada en x y radio r

$$\overline{B(x, r)} = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}.$$

Definición 2.4. Sean X un espacio métrico, $A \subseteq X$ y $x_0 \in A$ diremos que x_0 es un *punto interior* de A , si

$$\exists r > 0 : B(x_0, r) \subseteq A.$$

Denotaremos por $int(A)$ al conjunto de puntos interiores de A

$$int(A) = \{x \in X : \exists r > 0 : B(x, r) \subseteq A\}.$$

Definición 2.5. Sea A un subconjunto no vacío del espacio métrico X . Diremos que A es un *conjunto abierto* si $A = int(A)$.

Observación 2.2. En general, $int(A) \subseteq A$, por lo tanto A es un conjunto abierto si $A \subseteq int(A)$.

Definición 2.6. Sea X un espacio métrico y $x \in X$, se llama *entorno* del punto x a todo conjunto abierto que lo contenga.

Definición 2.7. Sea A un subconjunto no vacío del espacio métrico X y $x \in X$. Decimos que x es un *punto de acumulación* del conjunto A si todo entorno de x contiene puntos de A distintos de x , es decir, para todo entorno V de x se cumple

$$(V - \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

El conjunto de todos los puntos de acumulación de A , es llamado *conjunto derivado* de A y se denota por A' .

Teorema 2.1. Sea x un punto de acumulación de un conjunto A . Si V es un entorno cualquiera de x , el conjunto $(V - \{x\}) \cap A$ tiene infinitos puntos.

Definición 2.8. Sea X un espacio métrico y A un subconjunto de X si A contiene todos sus puntos de acumulación, decimos que A es *cerrado*.

Definición 2.9. Sea X un espacio métrico y A un subconjunto de X , al conjunto

$$\bar{A} = A \cup A',$$

es decir, la unión de A con todos sus puntos de acumulación, se le llama *clausura* de A y sus elementos reciben el nombre de *puntos de adherencia* de A .

Observación 2.3. Un conjunto es cerrado si y sólo si coincide con su clausura.

2.1.1. Sucesiones

Sea X un espacio métrico. Una *sucesión* en X es una función

$$f : \mathbb{N} \rightarrow X.$$

Si $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ es una sucesión y para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos por x_n a $f(n)$, la sucesión f se puede representar por $\{x_n\}$.

Definición 2.10. Sean X un espacio métrico, $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ y una sucesión en X donde para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = x_n$. Si consideramos la sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, una *subsucesión* de la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se define como la composición $f \circ g : \mathbb{N} \rightarrow X$, donde $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es una función inyectiva.

Definición 2.11. Sea X un espacio métrico. Diremos que la sucesión $\{x_n\}$ es una *sucesión convergente* en X si existe $x_0 \in X$ tal que para cada vecindad U de x_0 , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0 : x_n \in U$. En este caso diremos que la sucesión $\{x_n\}$ converge a x_0 .

Definición 2.12. Sea X un espacio métrico. Una sucesión $\{x_n\}$ se denominará *sucesión de Cauchy* si cumple la siguiente propiedad:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \quad (n, m \geq N \implies d(x_m, x_n) < \varepsilon).$$

Definición 2.13. Un espacio métrico X es *completo* si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Definición 2.14. Se dice que un espacio métrico posee la *propiedad de Cantor* si toda familia numerable de conjuntos $\{A_0, A_1, \dots\}$ cerrados, no vacíos, decrecientes ($\forall n \in \mathbb{N} : A_{n+1} \subset A_n$) y tal que $\inf(\text{diam}(A_n)) = 0$, tiene intersección no vacía.

Observemos que de $A_{n+1} \subset A_n$ deducimos $\text{diam}(A_{n+1}) \leq \text{diam}(A_n)$, o sea que la sucesión real $\{\text{diam}(A_0), \text{diam}(A_1), \dots, \text{diam}(A_n), \dots\}$ es decreciente, lo cual implica que $\text{diam}(A_n) \rightarrow \inf\{\text{diam}(A_n)\} = 0$. Por otra parte, si designamos por $A = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$, se tiene que $A \subset A_n, \forall n \in \mathbb{N}$, de donde $\text{diam}(A) \leq \text{diam}(A_n)$, implicando $\text{diam}(A) \leq \inf\{\text{diam}(A_n)\} = 0$; pero como el diámetro no puede ser negativo, resulta $\text{diam}(A) = 0$. Luego, como $A \neq \emptyset$, A está constituido por un solo punto.

Teorema 2.2. *Un espacio métrico es completo si y sólo si posee la propiedad de Cantor.*

2.1.2. Conjuntos compactos

Sea X un espacio métrico y $A \subseteq X$. Una familia C de conjuntos de X tal que

$$A \subseteq \bigcup_{B \in C} B$$

se llama *cubierta* de A .

Una *subcubierta* de C es una subfamilia de C que también cubre a A .

Decimos que C es una *cubierta abierta* de A , si C cubre a A y todos los conjuntos de C son abiertos.

Definición 2.15. Sea A subconjunto de un espacio métrico X , decimos que A es *compacto* si para cada cubierta abierta C de A existe una subcubierta finita C' .

Proposición 2.1. *Todo espacio métrico compacto es completo.*

Definición 2.16. Decimos que A posee la *propiedad de Bolzano-Weierstrass* si todo subconjunto infinito T de A admite un punto de acumulación en A .

Proposición 2.2. *Un conjunto A de un espacio métrico X es relativamente compacto si y solo si toda sucesión de elementos de A admite una subsucesión parcial convergente (no necesariamente en A).*

2.1.3. Conjuntos conexos

Definición 2.17. Sea X un espacio métrico y $A \subseteq X$. Una *disconexión* de A consiste de conjuntos abiertos $S, T \subseteq X$ que satisfacen las siguientes propiedades:

1. $A \subseteq S \cup T$,
2. $A \cap S \neq \emptyset$ y $A \cap T \neq \emptyset$,

$$3. (A \cap S) \cap (A \cap T) = \emptyset.$$

Si A admite una desconexión en X , diremos que A es *disconexo*.

Definición 2.18. Sea X un espacio métrico y $A \subseteq X$. Diremos que A es *conexo* si no es desconexo.

Teorema 2.3. Sea X un espacio métrico y $A \subseteq X$. El conjunto A es *disconexo* si y solo si existe $S \in A$ tal que $\emptyset \neq S \neq A$, el conjunto S es cerrado y abierto en A .

Sea A un conjunto no vacío de un espacio métrico X . Tomemos un $x \in A$ y consideremos la familia de todos los conjuntos conexos contenidos en A y que también contienen a x . Es evidente que esta familia no es vacía, ya que $\{x\}$ pertenece a ella. Por otra parte, la intersección de todos sus miembros contiene a x y por lo tanto es no vacía. La unión de todos los miembros de esta familia es un conjunto conexo que denotaremos por $C(x)$ y lo llamaremos *componente de A* . Como consecuencia de su construcción, $C(x)$ es el máximo conjunto conexo contenido en A y que a su vez contiene a x . Es decir, si B es conexo y $x \in B$ y $B \subset A$, entonces B es miembro de la familia cuya unión es $C(x)$, luego $B \subset C(x)$.

Puede suceder que $C(x) = \{x\}$. Por ejemplo, el conjunto \mathbb{Q} de los números racionales como subconjunto de la recta real es tal que $C(x) = \{x\}$, para todo $x \in \mathbb{Q}$.

Definición 2.19. Sea A un conjunto no vacío de un espacio métrico X . Decimos que A es *totalmente desconexo* si los únicos subconjuntos conexos están formados por conjuntos unitarios. Es decir, todas las componentes conexas son conjuntos unitarios.

Definición 2.20. Sea X un espacio métrico y $A \subseteq X$ no vacío. Decimos que A es un *dominio* si A es abierto y conexo.

Definición 2.21. Sea X un espacio métrico. Decimos que X es *conexo por trayectorias* o *arcoconexo* si para todo $x, y \in X$, existe $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ continua tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$.

Definición 2.22. Sea X un espacio métrico. Decimos que X es *localmente conexo* si para cada punto $x \in X$ y todo entorno S de x , existe un entorno T de x tal que $T \subset S$ y T conexo.

2.2. El campo de los números complejos

El *campo de los números complejos* es el conjunto de pares ordenados de números reales (a, b) con las operaciones de suma y multiplicación definidas por

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d), \\ (a, b)(c, d) &= (ac - bd, ad + bc).\end{aligned}$$

Las leyes asociativas y conmutativas para la adición y multiplicación así como la ley distributiva se deducen fácilmente de las propiedades de los números reales.

El *neutro aditivo* o *cero* es $(0, 0)$, el *inverso aditivo* de (a, b) es $(-a, -b)$. El *neutro multiplicativo* es $(1, 0)$ y el *inverso multiplicativo* para todo $(a, b) \neq (0, 0)$ es $(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$.

Los números complejos forman un *campo*.

Ahora supongamos que podemos asociar los números complejos de la forma $(a, 0)$ con el número real a , entonces

$$(a_1, 0) + (a_2, 0) = (a_1 + a_2, 0) \text{ que corresponde a } a_1 + a_2,$$

además

$$(a_1, 0)(a_2, 0) = (a_1a_2, 0) \text{ que corresponde a } a_1a_2.$$

La correspondencia entre $(a, 0)$ y a se preserva en las propiedades aritméticas. Podemos afirmar que el conjunto de números complejos de la forma $(a, 0)$ es *isomorfo al conjunto de los números reales* y puede ser escrito como a sin dar lugar a confusiones.

De la misma forma, decimos que $(0, 1)$ es la raíz cuadrada de -1 ya que $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$, de aquí en adelante $(0, 1)$ se denotará por i .

Una propiedad de los números reales que no se cumple para los números complejos es la noción de *orden* ya que el número i no puede ser designado como positivo o negativo sin llevar a una contradicción.

2.2.1. El plano complejo

Los números complejos definidos como pares ordenados de números reales de la forma (a, b) se encuentra estrechamente vinculada con la interpretación geométrica de campo complejo descubierto por John Wallis y posteriormente desarrollado por Jean Robert Argand y Johann Carl Friedrich Gauss.

Cada número complejo $a + ib$ se asocia el punto (a, b) del plano cartesiano. Los números reales son aquellos que se encuentran sobre el eje x que es conocido como *eje real* mientras que los *números imaginarios puros* ib corresponden a los puntos en el eje y llamado también *eje imaginario*.

Definición 2.23. Sea $z = a + ib$, las *partes imaginarias y reales* son usualmente denotadas $Im(z)$ y $Re(z)$ respectivamente.

Definición 2.24. El *complejo conjugado* de $z = a + ib$ es $\bar{z} = a - ib$, geométricamente, \bar{z} es el punto simétrico de z respecto al eje x .

Proposición 2.3. Las siguientes propiedades se cumplen para $z, w \in \mathbb{C}$.

1. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$.
2. $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$.
3. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$, para todo $w \neq 0$.
4. $z\bar{z} = |z|^2$, de aquí que si $z \neq 0$, $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.
5. $z = \bar{z}$ si y solo si z es número real.

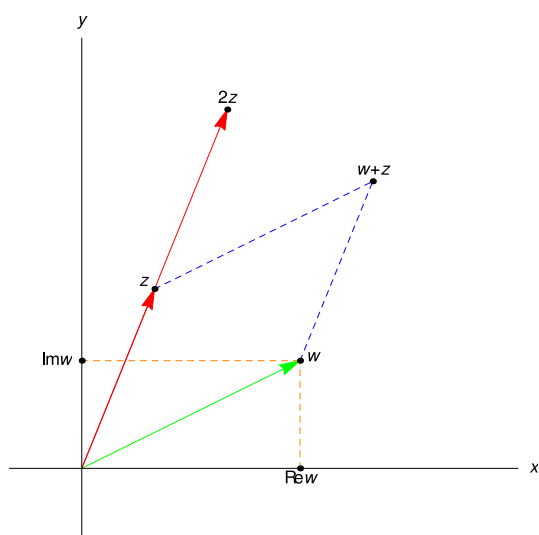


Figura 2.1: Geometría de los números complejos

$$6. \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}.$$

$$7. \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2}.$$

$$8. \overline{\bar{z}} = z.$$

Definición 2.25. El *módulo* o *valor absoluto* de z es igual a $\sqrt{a^2 + b^2}$, es decir, la longitud del vector z , denotado $|z|$.

Proposición 2.4. Sean $z, w \in \mathbb{C}$

$$1. |zw| = |z| |w|.$$

$$2. \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|} \text{ para } w \neq 0.$$

$$3. -|z| \leq \operatorname{Re}(z) \leq |z| \quad \text{y} \quad -|z| \leq \operatorname{Im}(z) \leq |z|.$$

$$4. |\bar{z}| = |z|.$$

$$5. |z + w| \leq |z| + |w| \text{ (desigualdad triangular).}$$

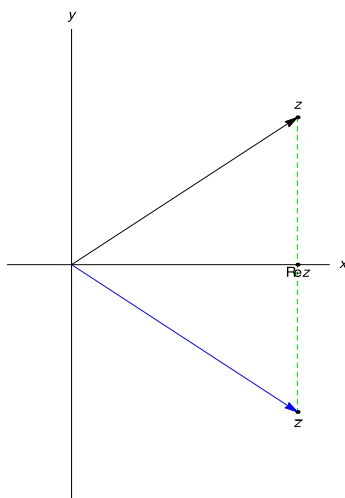


Figura 2.2: Complejo conjugado

$$6. |z_1 w_1 + z_2 w_2 + \dots + z_n w_n| \leq \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2} \sqrt{|w_1|^2 + \dots + |w_n|^2}$$

(desigualdad de Cauchy-Schwarz).

Definición 2.26. El *argumento* de z está definido para todo $z \neq 0$ y es el ángulo de inclinación z , denotado por $Arg(z)$. El valor de $Arg(z)$ que satisface $-\pi \leq Arg(z) < \pi$ se conoce como *argumento principal*. Así, el $Arg(z)$ se define como el número θ tal que

$$\cos \theta = \frac{Re(z)}{|z|} \quad \text{y} \quad \text{sen } \theta = \frac{Im(z)}{|z|}.$$

Un número complejo distinto de cero puede ser descrito en términos de su módulo y argumento. Sea $z = a + ib$, $|z| = r$ y $Arg(z) = \theta$, de lo anterior podemos deducir que $a = r \cos \theta$ y $b = r \text{sen } \theta$, así

$$z = r (\cos \theta + i \text{sen } \theta).$$

Esta forma es llamada *representación polar* de un número complejo z .

La multiplicación de números complejos z y w tienen interpretaciones geométricas muy interesantes que son más evidentes al ser escritas en su forma polar.

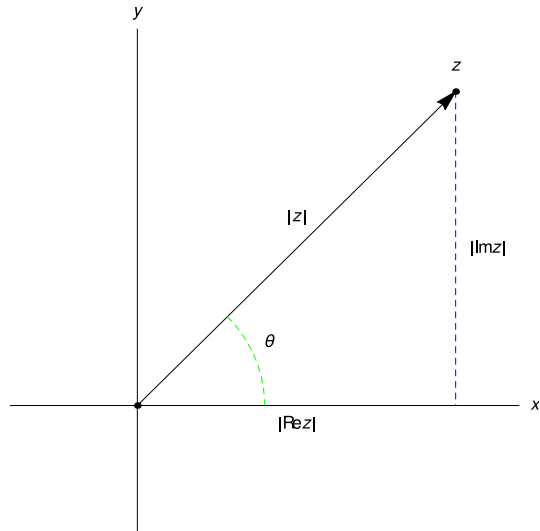


Figura 2.3: Módulo y argumento de un número complejo

Sean

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \quad \text{y} \quad w = t(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta).$$

Entonces,

$$zw = rt[\cos(\theta + \beta) + i \operatorname{sen}(\theta + \beta)].$$

Desde un punto de vista geométrico, la longitud del vector zw es el producto de las longitudes de los vectores z y w , mientras el que argumento del producto es la suma de los argumentos de los vectores.

La división de números complejos se reduce a la siguiente ecuación

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{t}[\cos(\theta - \beta) + i \operatorname{sen}(\theta - \beta)].$$

A partir de la multiplicación de números complejos escritos en su representación polar puede deducirse la fórmula para encontrar las n -ésimas raíces de cualquier número complejo.

Proposición 2.5. Sea $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ y sea n un entero positivo, entonces

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta).$$

La expresión anterior es conocida como *Fórmula de De Moivre*.

Corolario 2.1. Sea w un número complejo diferente de cero con representación polar $w = r^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$. Las n -ésimas raíces de w están dadas por los n números complejos

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

2.3. La esfera de Riemann y el plano complejo extendido

Sea $S : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ la esfera unitaria en el espacio euclidiano \mathbb{R}^3 y $N = (0, 0, 1)$ el polo norte de la esfera. Sea también el x_1x_2 -plano el plano complejo que intersecta a S en el ecuador.

Elegimos un punto z en \mathbb{C} . La línea que conecta a z con N intersecta a S en un único punto P , donde $P \neq N$ y viceversa. Observe que $|z| < 1 \Leftrightarrow P$ se encuentra en el hemisferio inferior, $|z| > 1 \Leftrightarrow P$ se encuentra en el hemisferio superior y $|z| = 1 \Leftrightarrow P$ se encuentra en el ecuador.

Lo anterior establece una correspondencia biyectiva y sobreyectiva

$$\Phi : P \in S \setminus \{N\} \longleftrightarrow \Phi(Q) = z \in \mathbb{C} \quad (2.1)$$

entre S y \mathbb{C} , la cual es conocida como *proyección estereográfica* de S sobre \mathbb{C} con N como centro y z es llamado *punto proyectivo* de P en \mathbb{C} y P es la *imagen esférica* o representación de z en S , la esfera S se conoce como *esfera de Riemann*.

Ningún punto en \mathbb{C} corresponde al polo norte N de la esfera de Riemann.

Observe que:

$$|z| \rightarrow +\infty \iff P \in S \rightarrow N \text{ es decir, la distancia } |P - N| \rightarrow 0.$$

Así, es natural imaginar que existe un único punto, denotado por ∞ fuera de cualquier disco $|z| < R$ sin importar qué tan grande sea R que corresponde al polo norte N . Llamamos a ∞ el *punto al infinito* del plano complejo \mathbb{C} y $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ al plano complejo extendido. Así, los puntos en $\widehat{\mathbb{C}}$ tienen una correspondencia inyectiva y sobreyectiva con los puntos en S .

Sea $P = (x_1, x_2, x_3) \in S$ y $z = (x, y, 0) = x + iy$, recordemos también que $N = (0, 0, 1)$. Entonces, z, P y N son colineales

$$\begin{aligned} \iff \frac{x_1 - 0}{x - 0} &= \frac{x_2 - 0}{y - 0} = \frac{x_3 - 1}{0 - 1} \\ \iff x_1 &= \lambda x, \quad x_2 = \lambda y \quad \text{y} \quad x_3 = 1 - \lambda \quad \text{para } \lambda \in \mathbb{R} \\ \implies x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= \lambda^2 (x^2 + y^2) + (1 - \lambda)^2 = 1 \\ \implies \lambda &= \frac{2}{1 + |z|^2}. \end{aligned}$$

En resumen, tenemos:

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} & (x_1, x_2, x_3) \in S \setminus \{N\} \text{ es decir, } x_3 \neq 1 \\ \infty & (x_1, x_2, x_3) \in S \text{ y } x_3 = 1, \text{ es decir, } (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1) \end{cases}$$

y

$$\Phi^{-1}(z) = \begin{cases} \left(\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right), & z \in \mathbb{C} \\ (0, 0, 1), & z = \infty. \end{cases}$$

Observe que $\Phi^{-1} : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow S$ es la inversa de $\Phi : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$.

2.3.1. Métrica esférica

Dados dos puntos $z_1, z_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$ es posible definir la métrica en $\widehat{\mathbb{C}}$, a la que llamaremos *métrica esférica* o *métrica cordal*, de la siguiente forma

$$d_{\chi}(z_1, z_2) := \begin{cases} \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}} & \text{si } z_1 \neq \infty, z_2 \neq \infty, \\ \frac{2}{\sqrt{1+|z_1|^2}} & \text{si } z_2 = \infty, \\ 0 & \text{si } z_1 = z_2 = \infty. \end{cases}$$

Sean $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$, se satisfacen las siguientes propiedades

1. $d_{\chi}(z_1, z_2) \geq 0$.
2. $d_{\chi}(z_1, z_2) = 0 \iff z_1 = z_2$.
3. $d_{\chi}(z_1, z_2) = d_{\chi}(z_2, z_1)$.
4. $d_{\chi}(z_1, z_3) \leq d_{\chi}(z_1, z_2) + d_{\chi}(z_2, z_3)$.

Proposición 2.6. *La métrica esférica y la métrica euclidiana inducen la misma topología en \mathbb{C} .*

2.4. Funciones de variable compleja

Definición 2.27. Sea $A \subset \mathbb{C}$ y A es un conjunto no vacío. Si para cada número z en A corresponde un único número complejo w , denotado $f(z)$, entonces llamamos a

$$f : A \rightarrow \mathbb{C}, w = f(z) : A \rightarrow \mathbb{C}, f(z) \text{ o simplemente } f$$

función de variable compleja z , A es llamado *dominio de definición* y $f(A)$ es la *imagen* de A .

Ahora bien, para algún $z \in A$ es posible que correspondan dos o más números complejos w . En este caso, f será llamada *función múltiplemente valuada de z en A* .

Las funciones f y g tienen el mismo dominio A y bajo esta consideración, las expresiones que se presentan enseguida son también funciones en A .

1. Adición. $f + g : (f + g)(z) = f(z) + g(z), \quad z \in A.$
2. Sustracción. $f - g : (f - g)(z) = f(z) - g(z), \quad z \in A.$
3. Multiplicación. $fg : (fg)(z) = f(z)g(z), \quad z \in A.$
4. División. $\frac{f}{g} : \left(\frac{f}{g}\right)(z) = \frac{f(z)}{g(z)}, \quad z \in A \text{ y } g(z) \neq 0.$

Las funciones más sencillas son: la *función constante* $f(z) = c$ con $c \in \mathbb{C}$ y la *función identidad* $f(z) = z$.

Mediante la multiplicación sucesiva, podemos obtener la *función potencia*, z^2, z^3, \dots, z^n ($n \in \mathbb{N}$) y claro, la *función polinomial*

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 z + a_0,$$

donde $a_j \in \mathbb{C}$ para $0 \leq j \leq n$ y $a_n \neq 0$

La división de dos polinomios $p(z)$ y $q(z)$, a saber

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 z + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0 z + b_0}, \quad a_n \neq 0, b_m \neq 0$$

es la *función racional*. Su dominio contiene los puntos en que $g(z) \neq 0$ y su rango es el plano extendido $\widehat{\mathbb{C}}$ si los ceros de $g(z)$ son admitidos.

2.4.1. Función exponencial y funciones trigonométricas

Si $z = x + iy$, entonces e^z se define como $e^x (\cos(y) + i \operatorname{sen}(y))$.

Si $w = iy$, tenemos $e^w = e^{iy} = \cos(y) + i \operatorname{sen}(y)$, ya para este caso, $x = 0$ y $e^0 = 1$.

Proposición 2.7. *A continuación se enlistan las propiedades de e^z .*

1. e^z nunca es cero.

2. $e^{z+w} = e^z e^w$ para todo $z, w \in \mathbb{C}$.
3. Si x es real, entonces $e^x > 1$ cuando $x > 0$ y $0 < e^x < 1$ cuando $x < 0$.
4. $|e^{x+iy}| = e^x$.
5. $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{\frac{3i\pi}{2}} = -i$, $e^{2i\pi} = 1$.
6. e^z es periódica, cada periodo de e^z es de la forma $2in\pi$ para todo entero n .
7. $e^z = 1$ si, y solo si $z = 2in\pi$ para todo entero n .

Definición 2.28. Las funciones complejas seno y coseno se definen de la siguiente manera para todo número complejo z

$$\operatorname{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{y} \quad \operatorname{cos}(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Proposición 2.8. Las funciones seno y coseno definidas en \mathbb{C} cumplen las propiedades siguientes

1. $\operatorname{sen}^2(z) + \operatorname{cos}^2(z) = 1$,
2. $\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen}(z)\operatorname{cos}(w) + \operatorname{cos}(z)\operatorname{sen}(w)$,
3. $\operatorname{cos}(z+w) = \operatorname{cos}(z)\operatorname{cos}(w) - \operatorname{sen}(z)\operatorname{sen}(w)$.

Además de las funciones $\operatorname{sen}(z)$ y $\operatorname{cos}(z)$, podemos definir la función tangente $\tan(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{\operatorname{cos}(z)}$ cuando $\operatorname{cos}(z) \neq 0$ y de manera similar obtener otras funciones trigonométricas.

2.4.2. Límites y continuidad de funciones

Sea $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una función y z_0 un punto límite de A , sea también $a \in \mathbb{C}$. Si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(z_0, \epsilon) > 0$ tal que para todo $z \in A$ se satisface $0 < |z - z_0| < \delta$, entonces decimos que el *límite de f cuando z tiende a z_0* es igual a a y se denota de la siguiente forma

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a.$$

Proposición 2.9. *Si el límite de una función existe, es único.*

Proposición 2.10. *Sean $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a$ y $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = b$, entonces*

1. $\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) + g(z)] = a + b$.
2. $\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z)g(z)] = ab$.
3. $\lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{f(z)}{g(z)} \right] = \frac{a}{b}$ si $b \neq 0$.

Definición 2.29. Sea $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y sea $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una función. Decimos que f es *continua en $z_0 \in A$* si y solo si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

y decimos que f es *continua en A* si f es continua en cada punto z_0 en A .

Proposición 2.11. *Las propiedades operacionales de las funciones continuas son las siguientes:*

Operadores algebraicos. *Si suponemos que las funciones f y g son continuas en un conjunto A , entonces $f + g$, $f - g$, fg y $\frac{f}{g}$ (siempre que $g \neq 0$) son también funciones continuas.*

Operador composición *Sea $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua en a y $g : B \rightarrow \mathbb{C}$ es continua en $f(a) \in f(A) \subseteq B$. Entonces, $f \circ g : A \rightarrow \mathbb{C}$ es continua en a .*

Definición 2.30. Suponga que F es una función múltiplemente valuada en el conjunto A . Sea $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una función que satisface las siguientes condiciones

1. f es univaluada en A .
2. f es continua en A .
3. Para cada $z \in A$, $f(z)$ es uno de los muchos valores de F en z .

Así, f es llamada *rama univaluada de F en A* . El punto a es llamado *punto singular* de la rama f de una función múltiplemente valuada F tal que f no es continua en a pero es continua en algún punto de cada vecindad de a .

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. Decimos que una función $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ es *uniformemente continua* en A si para cualquier $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(z) - f(w)| < \epsilon$, siempre que z, w estén en A y $|z - w| < \delta$.

Proposición 2.12. *Una función continua en un conjunto compacto es uniformemente continua.*

2.5. Funciones holomorfas

La palabra “holomorfa” fue dada a conocer por dos alumnos de Augustin-Louis Cauchy, Charles Auguste Briot y Jean-Claude Bouquet, dicha palabra se deriva del griego *holos* que significa “todo” o “entero” y *morphe* que significa “forma” o “apariencia”.

Definición 2.31. Sean D un dominio en \mathbb{C} y f una función en D . Decimos que la función f es *holomorfa en un punto* $z_0 \in D$ si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \quad (2.2)$$

existe. Note que $h \in \mathbb{C}$ y $h \neq 0$, además $z_0 + h \in D$, de modo que el cociente está bien definido.

Definición 2.32. El límite del cociente, cuando existe, es denotado por $f'(z_0)$ y es conocido como la derivada de f en z_0

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Definición 2.33. La función f es holomorfa en D si f es holomorfa en cada punto de D .

Ejemplo 2.1. La función $\frac{1}{z}$ es holomorfa en cualquier conjunto abierto en \mathbb{C} que no contenga el origen y $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$.

Ejemplo 2.2. La función $f(z) = \bar{z}$ no es holomorfa. Note que

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{\bar{h}}{h}$$

no tiene límite cuando $h \rightarrow 0$, lo cual es posible verificar si primero consideramos h como un número real y posteriormente a h como un número imaginario puro.

Proposición 2.13. Si f y g son funciones holomorfas en D , entonces

1. $f + g$ es holomorfa en D y $(f + g)' = f' + g'$.
2. fg es holomorfa en D y $(fg)' = f'g + fg'$.
3. Si $g(z_0) \neq 0$, entonces $\frac{f}{g}$ es holomorfa en z_0 y $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

2.5.1. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Comenzaremos por explicar la relación que existe entre las derivadas complejas y las derivadas reales.

Observe que en términos de variables reales, la función $f(z) = \bar{z}$ (que no es una función holomorfa vea ejemplo 2.2) corresponde a la aplicación $F : (x, y) \mapsto (x, -y)$, la cual es diferenciable en un sentido real, su derivada en un punto está dada por una matriz de 2×2 formada por las derivadas parciales de la función. En este caso, F es lineal y por lo tanto es igual a su derivada en cualquier punto. De modo que la existencia de la derivada real no garantiza que la función f sea holomorfa.

Asociemos, de manera más general, a una función de valores complejos con $f = u + iv$ con la aplicación $F = (x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^2 .

Cabe recordar que la función $F = (x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ se dice diferenciable en un punto $Q_0 = (x_0, y_0)$ si existe una transformación lineal $J : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$\frac{|F(Q_0 + H) - F(Q_0) - J(H)|}{|H|} \rightarrow 0 \quad \text{mientras} \quad |H| \rightarrow 0, \quad H \in \mathbb{R}^2. \quad (2.3)$$

O bien, de forma equivalente

$$F(Q_0 + H) - F(Q_0) = J(H) + |H| \Psi(H),$$

donde $|\Psi(H)| \rightarrow 0$ mientras $|H| \rightarrow 0$.

La transformación J es única y es conocida como la derivada de F en Q_0 . Ahora, si F es diferenciable, las derivadas parciales de u y v existen y así, J es precisamente la matriz jacobiana de F .

$$J = J_F(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Para el caso de la diferenciación compleja la derivada es el número complejo $f'(z_0)$, mientras que para el caso real es una matriz.

A pesar de este hecho, es posible establecer una relación entre estas nociones, la cual está dada en términos de relaciones particulares que se satisfacen por las entradas de la matriz jacobiana, es decir, las derivadas parciales de u y v .

Con la finalidad de encontrar dichas relaciones considere en primera instancia el límite en la Ecuación 2.2 cuando h es un número real, esto es, $h = h_1 + ih_2$ con $h_2 = 0$. Tomando en cuenta que $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, obtenemos

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h_1, y_0) - f(x_0, y_0)}{h_1} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(z_0), \end{aligned}$$

donde $\frac{\partial}{\partial x}$ denota la derivada parcial usual de la variable x .

Ahora, consideremos el caso para el cual h es un número imaginario puro, es decir, $h = ih_2$ y sustituimos en 2.2 para obtener

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0)}{ih_2} \\ &= \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0), \end{aligned}$$

donde $\frac{\partial}{\partial y}$ denota la derivada parcial en la variable y .

Por lo tanto, si f es una función holomorfa, hemos probado que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Si escribimos $f = u + iv$, al separar la parte real, la parte imaginaria y recordando que $\frac{1}{i} = -i$, observamos que las derivadas parciales de u y v existen y satisfacen las relaciones

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

conocidas como las *ecuaciones de Cauchy-Riemann* y que nos proporcionan el vínculo entre el análisis real y el análisis complejo.

Ahora definamos los operadores diferenciales

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Teorema 2.4. *Suponga que $f = u + iv$ es una función de valores complejos definida en un conjunto abierto A . Si u y v son continuamente diferenciables y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en A , entonces f es holomorfa en A y $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}$.*

Demostración. Escribimos

$$u(x + h_1, y + h_2) - u(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} h_1 + \frac{\partial u}{\partial y} h_2 + |h| \psi_1(h)$$

y

$$v(x + h_1, y + h_2) - v(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x} h_1 + \frac{\partial v}{\partial y} h_2 + |h| \psi_2(h),$$

donde $\psi_k(h) \rightarrow 0$ (para $k = 1, 2$) cuando $|h|$ tiende a 0 y $h = h_1 + ih_2$. Utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann, tenemos que

$$f(z + h) - f(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right) (h_1 + ih_2) + |h| \psi(h),$$

donde $\psi(h) = \psi_1(h) + \psi_2(h) \rightarrow 0$. Por lo tanto f es holomorfa y

$$f'(z) = 2 \frac{\partial u}{\partial z} = 2 \frac{\partial f}{\partial z}.$$

■

2.6. Funciones analíticas

Una función $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica en G si para todo $z_0 \in G$ existen $r_0 > 0$ y una serie de potencias centrada en z_0 ,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} z_n (z - z_0)^n$$

tal que $B(z_0, r_0) \subset G$ y

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} z_n (z - z_0)^n$$

para todo $z \in B(z_0, r_0)$.

Teorema 2.5. *Una función f es analítica si, y sólo si es holomorfa.*

Teorema 2.6 (Teorema de Riemann). *Sea A un conjunto abierto simplemente conexo que no sea todo el plano. Sea z_0 elemento de A y $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, el disco unitario. Entonces existe una única función analítica $h : A \rightarrow D$, que cumple las siguientes propiedades:*

1. $h(z_0) = 0$ y $h'(z_0) > 0$.

2. $h(A) = D$.

3. h es inyectiva en A .

De hecho, h es biholomorfa, o sea, es holomorfa y su inversa también. A h se le conoce como la *uniformización* de A en el disco unitario.

Teorema 2.7 (Lema de Schwartz). *Sea D el disco unitario y f una función analítica definida en D que cumple:*

1. $f(D) \subseteq D$.

2. $f(0) = 0$.

Entonces $|f'(0)| \leq 1$ y $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in D$. Además si $|f'(0)| = 1$, o bien si $|f(z_0)| = |z_0|$ para algún z_0 distinto de cero, entonces existe una constante c , $|c| = 1$, tal que $f(z) = cz$ para todo z en D .

De 2.6 y 2.7 se desprende el siguiente Corolario que de hecho es una variante del Lema de Schwartz.

Definición 2.34. Sean X y Y espacios métricos y sean $f : X \rightarrow X$ y $g : Y \rightarrow Y$. Decimos que f y g son *topológicamente conjugadas* si y sólo si existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ tal que $f = h^{-1} \circ g \circ h$. En tal caso h es una *conjugación topológica* entre f y g . Cuando adicionalmente h es analítica, decimos que f y g son analíticamente conjugadas.

Corolario 2.2. *Sea G una región simple conexa que no sea todo el plano. Sea $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ con $f(G) \subseteq G$ analítica. Suponga que $f(z_0) = z_0$ para algún punto en G . Entonces una de las dos condiciones siguientes se cumple:*

1. $|f'(z_0)| < 1$ y en este caso $f^n(z) \rightarrow z_0$ para todo punto z_0 en G , o

2. $f'(z_0) = e^{i\theta}$ y en tal caso, f es analíticamente conjugada en G a una rotación $R : D \rightarrow D$ del disco unitario dada por $R(z) = e^{i\theta}z$.

2.7. Derivada Schwarziana

La propiedad más importante de las funciones con derivada Schwarziana polinomial que hace tan especial a esta clase de funciones fue estudiada por primera vez por Nevanlinna en su artículo *Über Riemannsche Flächen mit endlich vielen Windungspunkten* [1932]. Estas funciones son precisamente aquellas que tienen valores asintóticos finitos y no tienen valores críticos. Como es sabido, el papel que juegan dichos valores es crucial para determinar la dinámica. E. Hille en su artículo *On the Zeroes of the Functions of the Parabolic Cylinder* [1924] demuestra que es posible descomponer el plano en exactamente p sectores de igual ángulo (cuando la derivada Schwarziana tiene grado $p - 2$) tal que cada uno de ellos es asociado a uno de los valores asintóticos. Gracias a la formulación de dicho teorema, es posible hacer una descripción del conjunto de Julia de estas funciones.

Definición 2.35. Si $F(z)$ es una función meromorfa, su *derivada Schwarziana* está definida por

$$\{F, z\} = \frac{F''(z)}{F'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{F''(z)}{F'(z)} \right)^2. \quad (2.4)$$

La Ecuación 2.4 es asociada a la ecuación diferencial Schwarziana

$$\{F, z\} = Q(z) \quad (2.5)$$

misma que se obtiene al establecer que

$$g(z) = (F'(z))^{-\frac{1}{2}}.$$

De modo que resulta la ecuación

$$g'' + \frac{1}{2}Q(z)g = 0. \quad (2.6)$$

Si g_1 y g_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación 2.6, su Wronskiano es una constante k diferente de cero. Ya que

$$\left(\frac{g_1}{g_2} \right)' = \frac{k}{g_2^2}$$

tenemos $F(z) = \frac{g_1(z)}{g_2(z)}$ es una solución de la Ecuación 2.5. De hecho, cada solución de la Ecuación 2.5 puede escribirse localmente como el cociente de las soluciones independientes de la Ecuación 2.6.

Los resultados obtenidos por Nevanlinna y Hille nos permiten describir las propiedades asintóticas de las soluciones de la Ecuación 2.6 cuando Q es un polinomio de grado $p - 2$. Esto es, existen exactamente p soluciones especiales G_0, \dots, G_{p-1} llamadas *soluciones truncas*, cuya propiedad consiste en que para cualquier sector de la forma

$$\left| \text{Arg } z - \frac{2\pi\nu}{p} \right| < \frac{3\pi}{p} - \varepsilon$$

con $\varepsilon > 0$, $G_\nu(z)$ tiene el desarrollo

$$\log G_\nu(z) \sim (-1)^{\nu+1} z^{\frac{p}{2}}.$$

Toda función G_ν es una función entera de orden $\frac{p}{2}$. De aquí que cada $G_\nu \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow \infty$ a lo largo de cada rayo en un sector W_ν de la forma

$$\left| \text{Arg } z - \frac{2\pi\nu}{p} \right| < \frac{\pi}{p}.$$

Más aún, $G_\nu \rightarrow \infty$ en los sectores adyacentes $W_{\nu+1}$ y $W_{\nu-1}$. Note que G_ν y $G_{\nu+1}$ deben ser linealmente independientes.

Por lo tanto, cualquier solución a la ecuación Schwartziana asociada debe ser escrita en el sector apropiado de la forma

$$\frac{AG_\nu(z) + BG_{\nu+1}(z)}{CG_\nu(z) + DG_{\nu+1}(z)} = F(z) \quad (2.7)$$

con $AD - BC \neq 0$. Note que $F(z)$ tiende a $\frac{A}{C}$ a lo largo de cada rayo al interior de $W_{\nu+1}$ y tiende a $\frac{B}{D}$ en W_ν . Los valores $\frac{A}{C}$ y $\frac{B}{D}$ son llamados *valores asintóticos*.

Recordemos que un *camino asintótico* para una función $f(z)$ es una curva $\gamma : [0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow 1} \gamma(t) = \infty$$

y

$$\lim_{t \rightarrow 1} F(\gamma(t)) = \omega.$$

El punto ω se conoce como *valor asintótico* de F .

Los resultados obtenidos por Nevanlinna muestran que si Q es un polinomio, esto implica que F tiene valores asintóticos finitos.

Considere las componentes de $F^{-1}(B - \omega)$. Los únicos puntos en los cuales F no es una cubierta para su imagen son los valores asintóticos, F es una aplicación cubriente en estas componentes. Así, dichas componentes son entornos V o bien son entornos reducidos V_r . Si alguna componente es un entorno, entonces ω es llamado *singularidad logarítmica*.

Ejemplo 2.3. Sea $F(z) = \tan z$, i y $-i$ son singularidades logarítmicas. F aplica el semiplano $Im z > y_0 > 0$ a un entorno reducido de i . La imagen de cualquier trayectoria $\gamma(t)$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow 1} Im(\gamma(t)) = \infty$$

es una trayectoria $\beta(t)$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow 1} \beta(t) = i.$$

Análogamente, la imagen del semiplano inferior $Im(z) < v_1 < 0$ es aplicada a una vecindad reducida de $-i$, ∞ es un punto de acumulación de los polos, no es un valor asintótico.

Ya que la función con derivada Schwartziana polinomial se escribe de la forma que describe la ecuación 2.7 en cada sector W_ν , se sigue que tal función tiene exactamente p valores asintóticos. Dos o más de ellos pueden coincidir pero en este caso, sectores no adyacentes de trayectorias asintóticas

corresponden a este valor. Note también que F no tiene puntos críticos ya que

$$F'(z) = \frac{k}{g_2^2(z)},$$

donde k es una constante y g_2 un entero.

Lo anterior se escribe formalmente en el siguiente teorema demostrado por Nevanlinna.

Teorema 2.8. *Las funciones con derivada Schwartziana polinomial de grado $p - 2$ son exactamente aquellas funciones que tienen p singularidades logarítmicas, a saber, a_0, \dots, a_{p-1} , donde cada a_i no precisa ser diferente de a_j . Existen exactamente p sectores disjuntos W_0, \dots, W_{p-1} , en ∞ , cada uno con ángulo $\frac{2\pi}{p}$ en los cuales F presenta el siguiente comportamiento: existe una colección de discos B_i , uno alrededor de cada a_i tales que $F^{-1}(B_i - a_i)$ contiene una única componente no acotada $U_i \subset W_i$ y $F : U_i \rightarrow B_i - a_i$ es un cubriente universal.*

2.8. Funciones conformes

Una función holomorfa biyectiva $f : U \rightarrow V$ es llamada *aplicación conforme* o *biholomorfismo*.

Dada dicha función f decimos que U y V son biholomorfos. Cabe destacar que entonces, la inversa de f es automáticamente holomorfa.

Proposición 2.14. *Si $f : U \rightarrow V$ es holomorfa e inyectiva, entonces $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in U$. En particular, la inversa de f definida en su rango es holomorfa, y por lo tanto, la inversa de una aplicación conforme es también holomorfa.*

De esta proposición podemos concluir que dos conjuntos abiertos U y V conformemente equivalentes o biholomorfos si, y sólo si existen las funciones holomorfas $f : U \rightarrow V$ y $g : V \rightarrow U$ tales que $g(f(z)) = z$ y $f(g(w)) = w$ para todo $z \in U$ y $w \in V$.

Observación 2.4. Algunos autores llaman a una función holomorfa $f : U \rightarrow V$ conforme si $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in U$, esta definición es frecuentemente utilizada debido a que es menos restrictiva. La condición $f'(z) \neq 0$ tiene una consecuencia geométrica ya que una función holomorfa que la satisface preserva ángulos.

Si dos curvas γ_1 y γ_2 se intersectan en el punto z_0 y α es el ángulo orientado entre los vectores tangentes de estas curvas, entonces las curvas imagen $f \circ \gamma_1$ y $f \circ \gamma_2$ se intersectan en $f(z_0)$ y sus vectores tangente forman el mismo ángulo α .

Ahora tomamos el semiplano superior

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}.$$

El conjunto no acotado \mathbb{H} es conformemente equivalente al disco unitario \mathbb{D} , además existe una fórmula que da cuenta de dicha equivalencia

$$F(z) = \frac{i-z}{i+z} \quad \text{y} \quad G(w) = i \frac{1-w}{1+w}.$$

Teorema 2.9. La función $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$ es una función conforme con inversa $G : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}$.

Demostración. Antes de comenzar, observemos que ambas funciones son holomorfas en sus dominios respectivos. Ahora, observe que cualquier punto en \mathbb{H} es más cercano a i que a menos i , así $|F(z)| < 1$ y F aplica a \mathbb{H} en \mathbb{D} . Para probar que G se aplica en el semiplano superior, debemos calcular $\text{Im}(G(w))$ para $w \in \mathbb{D}$, para lo cual, sea $w = u + iv$, observemos que:

$$\begin{aligned} \text{Im}(G(w)) &= \text{Re} \left(\frac{1-u-iv}{1+u+iv} \right) \\ &= \text{Re} \left(\frac{(1-u-iv)(1+u-iv)}{(1+u)^2+v^2} \right) \\ &= \frac{1-u^2-v^2}{(1+u)^2+v^2} > 0, \end{aligned}$$

porque $|w| < 1$, por tanto G se aplica en el semiplano superior. Finalmente,

$$F(G(w)) = \frac{i - i\frac{1-w}{1+w}}{i + i\frac{1-w}{1+w}} = \frac{1+w - 1+w}{1+w + 1-w} = w.$$

Análogamente para $G(F(z)) = z$. ■

Otro aspecto muy interesante de estas funciones es su comportamiento en la frontera de los conjuntos abiertos. Observe que F es holomorfa en todo \mathbb{C} excepto en $z = -i$ y es continua en la frontera de \mathbb{H} , es decir, la recta real. Sea $z = x \in \mathbb{R}$, entonces la distancia de a a i es la misma distancia que de x a $-i$, por tanto, $|F(x)| = 1$. Así, F aplica a \mathbb{R} en la frontera de \mathbb{D} .

Ahora bien, consideremos

$$F(x) = \frac{i - x}{i + x} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} + i \frac{2x}{1 + x^2}$$

y parametrizando la recta real, $x = \tan(t)$ tal que $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Ya que

$$\sin(2a) = \frac{2 \tan(a)}{1 + \tan^2(a)} \quad \text{y} \quad \cos(2a) = \frac{1 - \tan^2(a)}{1 + \tan^2(a)},$$

tenemos $F(x) = \cos(2t) + i \sin(2t) = e^{i2t}$. Por lo tanto, la imagen de la línea real es el círculo sin el punto -1 . El punto -1 en el círculo corresponde al punto al infinito del semiplano superior.

Las aplicaciones de la forma

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d},$$

donde a, b, c y d son números complejos y el denominador no es múltiplo del numerador, se conocen como *transformaciones de Möbius*.

Enseguida se describen brevemente algunas de las funciones conformes más importantes.

Traslaciones y dilataciones. Si $h \in \mathbb{C}$, la *traslación* $z \mapsto z + h$ es la aplicación conforme de \mathbb{C} a \mathbb{C} cuya inversa es $w \mapsto w - h$. Si h es un número real, entonces esta traslación es una aplicación del semiplano superior a él mismo.

Para un número $p \neq 0$ en \mathbb{C} , la aplicación $f : z \mapsto pz$ es conforme del plano complejo en sí mismo y cuya inversa es $g : w \mapsto p^{-1}z$. Si el módulo de p es igual a 1, tenemos que $p = e^{i\varphi}$ con $\varphi \in \mathbb{R}$, entonces f es una *rotación* por φ . Si $p > 0$, entonces f es una *dilatación*. Si $p < 0$, la función f consiste de una dilatación por $|p|$ seguido de una rotación por π .

Función exponencial. La función $f(z) = e^{iz}$ toma la franja

$$\left\{ z = x + iy : -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \quad y > 0 \right\}$$

y la aplica al semidisco $\{w = u + iv : |w| < 1, u > 0\}$. Así,

$$e^{iz} = e^{-y} e^{ix}.$$

Si x toma valores de $\frac{\pi}{2} + i\infty$, entonces $f(x)$ va de 0 a i y si x toma valores de $\frac{\pi}{2}$ a $-\frac{\pi}{2}$, entonces $f(x)$ toma valores de i a $-i$ en el semicírculo. Finalmente, si x toma valores de $-\frac{\pi}{2}$ a $-\frac{\pi}{2} + i\infty$ f toma valores de $-i$ a 0.

Función seno. La función $f = \text{sen}(z)$ toma el semiplano superior y lo aplica a la franja $\{w = x + iy : -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, y > 0\}$, Observe que si $\zeta = e^{iz}$, entonces

$$\text{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\frac{1}{2} \left(i\zeta + \frac{1}{1\zeta} \right).$$

Si x toma valores de $-\frac{\pi}{2} + i\infty$ a $-\frac{\pi}{2}$, f toma valores de $-\infty$ a -1 . Cuando x es real y se encuentra entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$, entonces $f(x)$ también es un número real entre -1 y 1 . Si x toma valores $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2} + i\infty$, f toma valores de -1 a ∞ en el eje real.

2.9. Conjugación analítica

A continuación se presentará un concepto que es muy importante para la dinámica holomorfa.

Definición 2.36. Sean $U, V \in \mathbb{C}$, decimos que la función $f : U \rightarrow U$ es *conformemente conjugada* a una función $g : V \rightarrow V$ si

$$(\phi \circ f)(z) = (g \circ \phi)(z) \quad (2.8)$$

es decir, que el siguiente diagrama conmute.

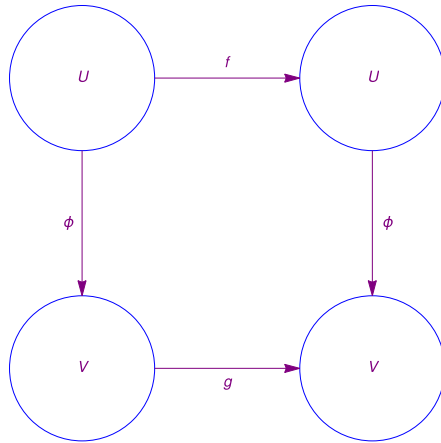


Figura 2.4: Diagrama de conjugación

El estudio entorno a la Ecuación 2.8 se atribuye a Ernst Schröder.

Ejemplo 2.4. Para cada polinomio cuadrático $P(z) = a_2z^2 + a_1z + a_0$ existe $c \in \mathbb{C}$, tal que P y $P_c(z) = z^2 + c$ son analíticamente conjugados.

Sean $P(z) = a_2z^2 + a_1z + a_0$, $P_c(z) = z^2 + c$ y $\phi(z) = az + b$ con $a_0, a_1, a_2, a, b, c \in \mathbb{C}$ y tales que $aa_2 \neq 0$. Entonces, de acuerdo a la queremos probar

$$\begin{aligned}\phi \circ P(z) &= P_c \circ \phi(z) \\ \phi(a_2z^2 + a_1z + a_0) &= [\phi(z)]^2 + c \\ a(a_2z^2 + a_1z + a_0) + b &= [az + b]^2 + c \\ aa_2z^2 + aa_1z + aa_0b &= a^2z^2 + 2abz + b^2 + c\end{aligned}$$

de lo anterior, obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}aa_0 + b &= b^2 + c \\ aa_1 &= 2ab \\ aa_2 &= a^2.\end{aligned}$$

Resolviendo, obtenemos

$$a = a_2, \quad b = \frac{a_1}{2} \quad \text{y} \quad c = a_0a_2 + \frac{a_1}{2} - \frac{a_1^2}{2}.$$

2.10. Singularidades y valores singulares

Sea $A \subset \mathbb{C}$ abierto y $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una función de variable compleja, un punto $z_0 \in A$ en el cual la función f no es analítica es una *singularidad de f* o *punto singular*.

Recordemos que el punto z_0 es un *punto singular aislado* o *singularidad aislada* de una función f si existe una vecindad de z_0 en la cual $f(z)$ es analítica excepto en el punto z_0 . Si z_0 un punto singular aislado, este puede ser clasificado de la siguiente manera:

1. El punto z_0 es una *singularidad evitable* o *removible* de la función $f(z)$ si $\lim_{z \rightarrow z_0}$ existe.
2. El punto z_0 es llamado *polo* si $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$.

3. El punto z_0 es llamado *singularidad esencial* si este no es polo ni singularidad removible.

Definición 2.37. Una función f que es analítica excepto en sus polos es llamada *función meromorfa*.

Definición 2.38. Un punto $z_0 \in A \subset \mathbb{C}$ es un valor omitido o valor excepcional de Picard de una función $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ si $f(z) \neq z_0$ para todo $z \in A$.

Definición 2.39. Un punto $w \in \widehat{\mathbb{C}}$ es un valor crítico o singularidad algebraica de f si es imagen de un punto crítico c , esto es, $f'(c) = 0$ y $f(c) = w$.

Definición 2.40. Un punto $w \in \widehat{\mathbb{C}}$ es un valor asintótico o singularidad trascendental de f si existe una curva $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^*$ tal que $\gamma(t) \rightarrow 0$ ó ∞ cuando $t \rightarrow \infty$ y $f(\gamma(t)) \rightarrow w$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Definición 2.41. El *conjunto de valores singulares* de una función compleja f es el conjunto cerrado

$$V_s(f) := \overline{\{\text{valores críticos y valores asintóticos}\}}.$$

Definición 2.42. Cuando el conjunto de valores singulares es finito para una función de variable compleja f , decimos que la función pertenece a la clase \mathcal{S} .

2.11. Integración compleja

Una *curva parametrizada* es una función $z(t)$ que asigna un intervalo cerrado $[a, b] \in \mathbb{R}$ al plano complejo. Decimos que una curva parametrizada es *suave* si $z'(t)$ existe y es continua en $[a, b]$ y $z'(t) \neq 0$ para $t \in [a, b]$. En los puntos $t = a$ y $t = b$, las cantidades $z'(a)$ y $z'(b)$ se interpretan como los límites

$$z'(a) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{z(a+h) - z(a)}{h} \quad \text{y} \quad z'(b) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{z(b+h) - z(b)}{h}.$$

De manera similar, decimos que la curva parametrizada *suave a trozos* si z es continua en $[a, b]$ y existen puntos tales que

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b,$$

donde $z(t)$ es suave en los intervalos $[a_k, a_{k+1}]$.

Definición 2.43. Decimos que dos parametrizaciones

$$z : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{y} \quad \tilde{z} : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$$

son *equivalentes* si existe una biyección continuamente diferenciable $s \mapsto t(s)$ de $[c, d]$ a $[a, b]$ tal que $t'(s) > 0$ y $\tilde{z}(s) = z(t(s))$. La condición $t'(s) > 0$ garantiza que la orientación se preserve.

La familia de todas las parametrizaciones equivalentes a $z(t)$ determinan una *curva suave* $\gamma \in \mathbb{C}$, a saber, la imagen de $[a, b]$ bajo z junto con su misma orientación mientras t va de a a b .

Definición 2.44. Una curva γ^- , se define a partir de una curva γ invirtiendo su dirección, de tal modo que γ y γ^- se componen de los mismos puntos. Una parametrización para γ^- , consideramos $z^- : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $z^t = z(b + a - t)$.

Definición 2.45. Los puntos z_a y z_b son llamados *puntos finales* de la curva y estos son definidos independientemente de la parametrización.

Una curva suave o suave a trozos es *cerrada* si $z_a = z_b$ para cualquiera de sus parametrizaciones. Ya que γ posee orientación, podemos decir que γ *comienza* en z_a y *termina* en z_b .

Definición 2.46. Una curva suave o suave a trozos es *simple* si esta no se interseca consigo misma, es decir $z(t) \neq z(s)$ a menos que $s = t$. Si la curva es cerrada, decimos que es simple cuando $z(t) \neq z(s)$ a menos que $s = t$ o $s = a$ y $t = b$.

Ejemplo 2.5. Sea el círculo $C(r, z_0)$ con centro en z_0 y radio r que es definido por el conjunto

$$C(r, z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}.$$

La *orientación positiva* de $C(r, z_0)$ está dada por su parametrización usual

$$z(t) = z_0 + re^{it}, \quad \text{donde } t \in [0, 2\pi].$$

La *orientación negativa* está dada por:

$$z(t) = z_0 + re^{-it}, \quad \text{donde } t \in [0, 2\pi].$$

Una herramienta de suma importancia en el estudio de funciones holomorfas es la integración a lo largo de curvas. A continuación se presentan definiciones elementales y propiedades de la integral.

Definición 2.47. Sean γ una curva suave en \mathbb{C} parametrizada por $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, una función continua f en γ , definimos la *integral de f a lo largo de γ* por

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt.$$

Si γ es suave a trozos, la integral de f sobre γ es la suma de las integrales de f sobre los trozos de γ , así, si $z(t)$ es una parametrización suave a trozos, entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(z(t)) z'(t) dt.$$

Definición 2.48. La longitud de una curva suave γ es

$$l(\gamma) = \int_a^b |z'(t)| dt.$$

Proposición 2.15. La integral de funciones continuas sobre curvas satisface las siguientes propiedades

1. Es lineal. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, entonces

$$\int_{\gamma} (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_{\gamma} f(z) dz + \beta \int_{\gamma} g(z) dz.$$

2. Si γ^- es γ con dirección opuesta, entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma^-} f(z) dz.$$

3. Se cumple la desigualdad

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \sup_{z \in \gamma} |f(z)| \cdot l(\gamma).$$

Definición 2.49. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva cerrada, en índice de γ está definido por

$$\eta(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}.$$

Definición 2.50. Sea Ω un conjunto abierto de \mathbb{C} , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa y $a \in \Omega$, definimos

$$M(f, a, r) := \max \{|f(z)| : z \in C(a, r)\} \quad \text{donde } C(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\}.$$

Definición 2.51. Dos curvas cerradas γ_1 y $\gamma_2 : [a, b] \rightarrow B$, $B \subset \mathbb{C}$ son *homotópicas* (como curvas cerradas) en B si existe una función continua

$$H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow G$$

tal que para cada $s \in [0, 1]$, $t \rightarrow H(t, s)$ es una curva cerrada. Para $s = 0$ esta curva es igual a γ_1 y para $s = 1$, es igual a γ_2 .

Definición 2.52. Una primitiva de f en un conjunto abierto Ω es la función F holomorfa en Ω , tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$.

Teorema 2.10. Si una función continua f tiene primitiva F en Ω y γ es una curva en Ω que inicia en p_1 y termina en p_2 , entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(p_2) - F(p_1).$$

Demostración. La demostración se realizará teniendo en cuenta dos casos

1. Sea $z(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una parametrización para γ , entonces $z(a) = p_1$ y $z(b) = p_2$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \\ &= \int_a^b F(z(t)) z'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} F(z(t)) dt \\ &= F(z(b)) - F(z(a)). \end{aligned}$$

2. Si γ es suave a trozos, análogamente al caso anterior, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \sum_{k=0}^{n-1} F(z(a_{k+1})) - F(z(a_k)) \\ &= F(z(a_n)) - F(z(a_0)) \\ &= F(z(b)) - F(z(a)) \end{aligned}$$

■

Corolario 2.3. Si γ es una curva cerrada en un conjunto abierto Ω , f una función continua con primitiva en Ω , entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Demostración. Basta con observar que los puntos finales en una curva cerrada son iguales. ■

Corolario 2.4. Si f es holomorfa en una región Ω y $f' = 0$, entonces f es constante.

Teorema 2.11. Si f es holomorfa en Ω con f' continua sobre y dentro de la curva cerrada simple γ , entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Teorema 2.12 (Fórmula integral de Cauchy). Sean $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en Ω y $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ una curva cerrada homotópica a un punto en Ω con $z_0 \notin \gamma$, entonces

$$\eta(\gamma, z_0) f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{dz - z_0} dz.$$

Capítulo 3

Familias normales

En este capítulo se revisarán algunos resultados de familias normales los cuales serán utilizados posteriormente para la definición de los conjuntos de Fatou y Julia. Los temas aquí abordados pueden consultarse en [1], [10], [11], [12], [13], [15], [32], [35] y [36].

3.1. Sucesión de funciones

Sea \mathbb{F} el espacio de funciones complejas de $D \subset \mathbb{C}$ en \mathbb{C} . Una *sucesión de funciones* complejas es una aplicación $f : n \in \mathbb{N} \rightarrow f_n \in \mathbb{F}$, que suele representarse por $\{f_n\}$.

Definición 3.1. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones. Definimos *subsucesión* de $\{f_n\}$ a una sucesión $\{f_{n_j}\}$ tal que $n_j < n_{j+1}$.

Definición 3.2. Decimos que la sucesión $\{f_n\}$ *converge puntualmente* si, y sólo si para todo $z \in D$ la sucesión $\{f_n(z)\}$ converge.

La función $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$ con $z \in D$ es conocida como *función límite*.

Definición 3.3. Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ *converge uniformemente* a f en $A \subset \mathbb{C}$ si para cualquier $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ y $n > N$, se cumple que $|f(z) - f_n(z)| < \epsilon$ para todo $z \in A$.

Definición 3.4. Una sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a infinito si dado $\epsilon > 0$ existe un número $n_0 \in \mathbb{N}$, $|f_{n_j}(z)| \geq \epsilon$ para $j \geq j_0 \in \mathbb{N}$ y toda $z \in A$.

Definición 3.5. Una sucesión $\{f_n\}$ es *acotada uniformemente* en $A \subset \mathbb{C}$ si existe $M > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $z \in A$, $|f_n(z)| \leq M$.

Definición 3.6. Una familia de funciones \mathbb{F} es *localmente acotada* en un dominio Ω , si para cada $z_0 \in \Omega$ existe un número positivo $M = M(z_0)$ y una vecindad $D(z_0, r) \in \Omega$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in D(z_0, r)$ y toda $f \in \mathbb{F}$.

Ahora, definiremos una métrica en el conjunto de las funciones analíticas sobre un conjunto abierto G en \mathbb{C} . El par (Ω, d) denotará un espacio métrico completo.

Definición 3.7. Sean G un conjunto abierto en \mathbb{C} y (Ω, d) un espacio métrico, definimos

- $C(G, \Omega)$ es el *espacio de funciones continuas*.
- $H(G)$ es el conjunto de funciones holomorfas en G . Observe que $H(G) \subset C(G, \mathbb{C})$ que es el espacio de funciones continuas que van de G a \mathbb{C} .
- $M(G)$ es el conjunto de funciones meromorfas en G . Observe que $M(G) \subset C(G, \hat{\mathbb{C}})$ que es el espacio de funciones continuas que van de G a la esfera.

Proposición 3.1. Si G es un conjunto abierto en \mathbb{C} , entonces existe una sucesión $\{\kappa_n\}$ de subconjuntos compactos de G tal que

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \kappa_n.$$

Además, los conjuntos κ_n pueden elegirse de tal forma que

1. $\kappa_n \subset \text{int}(\kappa_{n+1})$.
2. Si $\kappa \subset G$ es compacto, entonces $\kappa \subset \kappa_n$ para algún n .

Ahora bien, si $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \kappa_n$ donde κ_n es compacto y $\kappa_n \subset \text{int}(\kappa_{n+1})$, es posible definir

$$\rho_n(f, g) = \sup \{d(f(z), g(z)) : z \in \kappa_n\}$$

para las funciones f y g en $C(G, \Omega)$ Además, definimos

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\rho_n(f, g)}{1 + \rho_n(f, g)}. \quad (3.1)$$

Observe que $t(1+t)^{-1} \leq 1$ para todo $t \geq 0$, la serie en la Ecuación 3.1 se encuentra dominada por el término

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

y por lo tanto, converge.

Proposición 3.2. *El espacio $(C(G, \Omega), \rho)$ es un espacio métrico completo.*

Definición 3.8. Una familia $\mathbb{F} \in C(G, \Omega)$ es *normal* en G si cada sucesión de funciones $\{f_n\} \in \mathbb{F}$ tiene una subsucesión convergente $\{f_{n_j}\} \in C(G, \Omega)$.

Proposición 3.3. *Una familia de funciones $\mathbb{F} \subset C(G, \Omega)$ es normal si, y solo si su clausura es compacta ($\overline{\mathbb{F}}$ es compacto).*

Teorema 3.1. *Una familia \mathbb{F} de funciones analíticas es normal en un dominio G si, y solo si \mathbb{F} es normal en cada punto $z_0 \in G$.*

Teorema 3.2 (Convergencia de Weierstrass). *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones analíticas en conjunto abierto $G \in \mathbb{C}$ que converge uniformemente a subconjuntos compactos de G a una función f tal que $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces f es analítica en G y la sucesión de derivadas $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$ (derivada de orden k) converge uniformemente en subconjuntos compactos de G .*

Lema 3.1. Sea $\{x_n\}$ una sucesión no convergente en un espacio métrico compacto X . Entonces existen subsucesiones $\{x_{\sigma(n)}\}$, $\{x_{\tau(n)}\}$ y $w, t \in X$ con $w \neq t$ tales que:

$$x_{\sigma(n)} \rightarrow w \quad y \quad x_{\tau(n)} \rightarrow t.$$

3.2. Teoremas de Arzelà-Ascoli y Montel

Otro concepto importante para el desarrollo del estudio de familias normales es equicontinuidad el cual fue formulado originalmente por Giulio Ascoli en 1883.

Recordemos que por definición, f es continua en z_0 si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(f(z), f(z_0)) < \epsilon$ mientras $|z - z_0| < \delta$. Decimos que f es uniformemente continua si podemos elegir δ tal que no dependa de z_0 .

En el caso de las familias de funciones es posible encontrar otro tipo de uniformidad, es decir, es posible elegir δ independiente de f , lo que nos lleva a la siguiente definición.

Definición 3.9. Una familia de funciones \mathbb{F} definida en un dominio Ω es *equicontinua* (esféricamente equicontinua) en un punto $z_0 \in \Omega$ si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon, z_0)$ tal que

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon \quad (\chi(f(z) - f(z_0)) < \epsilon)$$

cuando $|z - z_0| < \delta$ para cada $f \in \mathbb{F}$.

Definición 3.10. Decimos que \mathbb{F} es *equicontinua* (esféricamente equicontinua) en un subconjunto $D \subseteq \Omega$ si es equicontinua (esféricamente equicontinua) en cada punto de D .

Observación 3.1. Ya que

$$\chi(f(z), f(z_0)) < |f(z) - f(z_0)|$$

tenemos que equicontinuidad implica equicontinuidad esférica.

Definición 3.11. Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de un dominio Ω hacia una función $f(z)$ si para cada subconjunto compacto $\Omega \subset \widehat{\mathbb{C}}$ y $\varepsilon > 0$, existe un número $N(\Omega, \varepsilon)$ tal que $n \geq N$, entonces $\chi(f_n(z), f(z)) < \varepsilon$ para cada $z \in \Omega$.

Teorema 3.3 (Hurwitz). Sea $D \in \mathbb{C}$ un dominio y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas en D . Suponga que $f_n \rightarrow f$ uniformemente sobre los subconjuntos compactos de D . Si $f_n(z_0) \neq 0$ para todo $z_0 \in D$ y todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $f(z_0) \neq 0$ o bien $f \equiv 0$.

Proposición 3.4. Sea \mathbb{F} una familia normal de funciones continuas sobre un conjunto abierto G en \mathbb{C} , las funciones de dicha familia están puntualmente acotadas, esto es, para todo $z \in G$, el conjunto $\{f(z) : f \in \mathbb{F}\}$ es acotado.

Proposición 3.5. Sea \mathbb{F} una familia normal de funciones continuas sobre un conjunto abierto G en \mathbb{C} es puntualmente equicontinua, es decir, para toda $a \in G$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|z - a| < \delta$, implica que $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$ para toda $f \in \mathbb{F}$.

Lema 3.2. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones en un conjunto abierto $G \in \mathbb{C}$. Suponga que la familia $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es puntualmente equicontinua y $\{f_n\}$ converge puntualmente en un conjunto denso $A \subset G$, entonces $\{f_n\}$ es uniformemente convergente sobre los subconjuntos compactos de G .

Lema 3.3. Sea \mathbb{F} una familia de funciones continuas sobre un abierto G puntualmente acotado. Sea A un conjunto (infinito) numerable de G y $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{F}$, entonces existe una subsucesión parcial $\{f_{\rho(n)}\}$ convergente en cada punto de A .

Teorema 3.4 (Arzelà-Ascoli). Una familia $\mathbb{F} \in C(G, \Omega)$ es normal si y solo si se satisfacen las siguientes condiciones:

- (i) Para cada $z \in G$, $\{f(z) : f \in \mathbb{F}\}$ tiene cerradura compacta,
- (ii) \mathbb{F} es equicontinua en cada punto de G .

Demostración. Supongamos que \mathbb{F} es normal, por Proposición 3.4 y Proposición 3.5 se sigue que para cada $z \in G$, $\{f(z) : f \in \mathbb{F}\}$ está puntualmente acotado y además \mathbb{F} es equicontinua en cada punto de G .

Ahora bien, sea A un conjunto denso y numerable en G . Considere una sucesión $\{f_n\}$ de elementos de \mathbb{F} , por Lema 3.3 tenemos que existe una sub-sucesión $\{f_{\varphi(n)}\}$ convergente en cada punto de A . Ya que la equicontinuidad se hereda a subfamilias y por el Lema 3.2, tenemos que $\{f_{\varphi(n)}\}$ converge uniformemente sobre compactos de G . Finalmente, por Proposición 3.1, tenemos que $\{f_{\varphi(n)}\}$ converge a una función f de $C(G, \Omega)$. ■

Teorema 3.5 (Montel). *Una familia $\mathbb{F} \in H(G)$ es normal si, y sólo si está uniformemente acotada en cada compacto de G .*

Demostración. Suponga que \mathbb{F} es normal, entonces por Proposición 3.3 tenemos que $\overline{\mathbb{F}}$ es compacto. Sea K un subconjunto de G , la familia $\{U(f, K, 1) : f \in \overline{\mathbb{F}}\}$ es una cubierta abierta del conjunto compacto $\overline{\mathbb{F}}$ de la cual es posible extraer una subcubierta finita, es decir

$$\exists f_1, f_2, \dots, f_n \in \overline{\mathbb{F}} : \overline{\mathbb{F}} \subset \bigcup_{k=1}^n U(f_k, K, 1).$$

Por continuidad tenemos que para todo $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, existe $M_k > 0$ tal que $|f_k(z)| \leq M_k$ para todo $z \in K$. Para $f \in \overline{\mathbb{F}}$ y $z \in K$, existe $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $f \in U(f_k, K, 1)$ y

$$|f(z)| \leq |f(z) - f_k(z)| + |f_k(z)| < 1 + M_k < M$$

con $M = 1 + \max\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$. Por lo tanto, \mathbb{F} está uniformemente acotada en K .

Sea $K \subset G$ un conjunto compacto, por hipótesis, existe $M_k > 0$ tal que $|f(z)| < M_k$ para todo $z \in K$ y para toda $f \in \mathbb{F}$.

Note que \mathbb{F} está puntualmente acotada en G . Sean $a \in G$ y $\epsilon > 0$ por hipótesis (uniformemente acotado sobre compactos), existen $\overline{B}(a, R) \subset G$ y $M > 0$ tal que $|f(w)| \leq M$ para todo $w \in \overline{B}(a, R)$ y para toda $f \in \mathbb{F}$.

Por la fórmula integral de Cauchy, si $z \in B(a, R)$ tenemos

$$\begin{aligned} |f(z) - f(a)| &= \left| \frac{1}{i2\pi} \int_{C(a,R)} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{i2\pi} \int_{C(a,R)} \frac{f(w)}{w-a} dw \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C(a,R)} \frac{f(w)(z-a)}{(w-z)(w-a)} dw \right| \\ &\leq \frac{2\pi RM}{2\pi} \frac{|z-a|}{\frac{R}{2}} = \frac{2M}{R} |z-a|. \end{aligned}$$

Si elegimos $\delta = \min \left\{ \frac{\epsilon R}{2M}, \frac{R}{2} \right\}$, entonces

$$|z-a| < \delta \implies |z-a| < \delta \implies |f(z) - f(a)| < \epsilon \text{ para todo } f \in \mathbb{F}.$$

Por lo tanto, la familia \mathbb{F} es puntualmente equicontinua en G y por Teorema 3.4, tenemos que \mathbb{F} es normal. ■

Teorema 3.6 (Vitali). *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas uniformemente acotadas en cada compacto de un dominio D de \mathbb{C} . Si $\{f_n\}$ converge puntualmente en un conjunto G tal que $G' \cap D \neq \emptyset$, entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre compactos de D .*

Teorema 3.7 (Weierstrass). *Sea $\{f_n\}$ una sucesión en $M(G)$ y supongamos que $f_n \rightarrow f$ en $C(G, \widehat{\mathbb{C}})$. Entonces f es meromorfa o $f \equiv \infty$. Si cada f_n es analítica, entonces f es analítica o $f \equiv \infty$.*

Teorema 3.8 (Marty). *Una familia $\mathbb{F} \subset M(G)$ es normal en $C(G, \widehat{\mathbb{C}})$ si, y sólo si la familia de derivadas esféricas*

$$\left\{ \rho(f) = \frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} : f \in \mathbb{F} \right\}$$

es localmente acotada en G .

Teorema 3.9 (Montel). *Sea \mathbb{F} una familia de funciones meromorfas definidas en un dominio común $\Omega \subset \widehat{\mathbb{C}}$ y a, b y c en $\widehat{\mathbb{C}}$ diferentes dos a dos. Si $f(z) \neq a, b, c$ para toda $z \in \Omega$ y toda $f \in \mathbb{F}$, entonces la familia \mathbb{F} es una familia normal en Ω .*

Definición 3.12. Un punto $z_0 \in A$ es un *valor omitido* o *valor excepcional de Picard* de una función $f : A \rightarrow A$ si, $f(z) \neq z_0$ para todo $z \in A$. Al conjunto de valores excepcionales de Picard se le denota por $PV(f)$.

Teorema 3.10 (Pequeño de Picard). *El número de valores omitidos de una función entera no constante f es a lo más dos.*

Teorema 3.11 (Grande de Picard). *Si una función meromorfa f en $A - \{z_0\}$ tiene una singularidad esencial en z_0 , entonces f toma todos los puntos de $\widehat{\mathbb{C}}$ un número infinito de veces en una vecindad arbitraria de z_0 , excepto a lo más para dos puntos de $\widehat{\mathbb{C}}$.*

Funciones de la clase \mathcal{M}

En este capítulo se define la clase de funciones trascendentes meromorfas \mathcal{M} , se exponen conceptos básicos para la iteración la clase de funciones \mathcal{M} . Además, se definen los conjuntos de Fatou y Julia y se describen brevemente sus propiedades. Los temas aquí abordados pueden consultarse en [6], [7], [8], [9], [10] y [18].

El conjunto de funciones de la clase \mathcal{M} se define como sigue:

$$\mathcal{M} := \left\{ f : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \mid f \text{ es trascendente meromorfa, con al menos un polo que no es un valor omitido} \right\}.$$

En esta definición, la función f no es constante y un valor omitido de la función f meromorfa es el número complejo z_0 tal que $f(z) \neq z_0$. Para esta clase de funciones la única singularidad esencial aislada es ∞ .

El comportamiento de una función alrededor de esta singularidad es descrito por el Teorema 3.7 y el Teorema Grande de Picard 3.11.

Algunos ejemplos de funciones de la clase \mathcal{M} son:

1. $f_\lambda(z) = \lambda \tan(z)$,
2. $g_{\lambda,\mu}(z) = \lambda e^z + \frac{\mu}{z}$,
3. $h_{\lambda,\mu}(z) = \lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{\mu}{z-z_0}$.

Sea f una función que pertenece a la clase \mathcal{M} . Definimos la n -ésima iterada de f denotada por $f^{\circ n}$ como la composición de f con ella misma n veces, esto es

$$f^{\circ n} = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ veces}}.$$

Por convención, se establece que $f^{\circ 0} = Id$. Una observación muy importante es que la iteración de funciones de la clase \mathcal{M} no es cerrada. Considere el siguiente ejemplo,

$$f_\lambda \circ f_\lambda = \lambda \tan(\lambda \tan z) = \lambda \left(\frac{\operatorname{sen} \left(\lambda \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{cos} z} \right)}{\operatorname{cos} \left(\lambda \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{cos} z} \right)} \right).$$

Observe que $f_\lambda^{\circ 2}(z) = f_\lambda \circ f_\lambda$ está definida en $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{z : \operatorname{cos} z = 0\}$, es decir, $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{2\pi k + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$ el cual es un conjunto contable de singularidades esenciales. De modo que el dominio de la segunda iterada debe ser $f(\mathbb{C}) \setminus \{z : f^{\circ 2}(z) = \infty\}$.

De manera más general, sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ una **función meromorfa**, donde \mathbb{C} es el plano complejo y $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Entonces, $f^{\circ n}(z)$ está definida para todo $z \in \mathbb{C}$ excepto por un conjunto numerable que consiste de los polos de $f, f^{\circ 2}, \dots, f^{\circ n-1}$.

4.1. Puntos fijos y su clasificación

Sea f una función en la clase \mathcal{M} y $z_0 \in \operatorname{Dom} f$. Si $f^{\circ n}(z_0) = z_0$ y $f^{\circ k}(z_0) \neq f^{\circ n}(z_0)$ para $k = \overline{1, n-1}$, entonces z_0 es un *punto periódico de período n* . Decimos que z_0 es un *punto fijo*, si es un punto periódico de período 1.

Observación 4.1. 1. Si z_0 es un punto fijo de f , entonces z_0 es un punto fijo de $f^{\circ n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} z_0 &= f(z_0) \\ f^{\circ n}(z_0) &= f^{\circ(n-1)}(f(z_0)) = f^{\circ(n-1)}(z_0) \\ z_0 &= f^{\circ 2}(z_0) = f(f(z_0)) = f(z_0). \end{aligned}$$

2. Existen funciones que no tienen puntos fijos, por ejemplo

$$a) f(z) = e^z + z$$

$$f(z) = z \Leftrightarrow e^z + z = z \Leftrightarrow e^z = 0 !$$

$$b) g(z) = \frac{1}{z} + z$$

$$f(z) = z \Leftrightarrow \frac{1}{z} + z = z \Leftrightarrow \frac{1}{z} = 0 !$$

3. Determinar los puntos fijos no es una tarea sencilla.

Definición 4.1. Sea $w \in \widehat{\mathbb{C}}$ y f una función en la clase \mathcal{M} tal que la n -ésima iterada está bien definida. Definimos la *cuenca de atracción* de w bajo la función f al siguiente conjunto

$$A_f = \{z \in \text{Dom} f : f^{\circ n}(z) \rightarrow w\}.$$

Proposición 4.1. Sea f una función analítica tal que la n -ésima iterada está bien definida y $\text{Dom} f \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$. Si a y $w \in \text{Dom} f$ y $f^{\circ n}(a) \rightarrow w$, entonces $f(w) = w$.

Demostración.

$$\begin{aligned} f(w) &= f\left(\lim_n f^{\circ n}(a)\right) = \lim_n f(f^{\circ n}(a)) \\ &= \lim_n f^{\circ(n+1)}(a) = w. \end{aligned}$$

■

Definición 4.2. Sea f una función de la clase \mathcal{M} , definimos los siguientes conceptos

- El conjunto $\mathcal{O}^+(z) := \{z : f^{\circ n}(z) = z, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ es llamado *órbita hacia adelante* de z bajo f . Si el punto z_0 es un punto periódico de período n , entonces $\mathcal{O}^+(z_0)$ es conocido como n -ciclo.
- El conjunto $\mathcal{O}^-(z) := \{z : f^{\circ n}(z) = z, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ es llamado *órbita hacia atrás* de z bajo f .

- El conjunto $\mathcal{O}(z) = \mathcal{O}^+(z) \cup \mathcal{O}^-(z)$ es llamado *órbita* de z .

Definición 4.3. Sea z_0 un punto periódico de período n . Definimos el *multiplicador* de z_0 como $\eta = (f^{\circ n})'(z_0)$.

Considere las siguientes observaciones a las que da lugar la definición anterior.

- Si $z_0 = \infty$, η se define como el multiplicador del punto fijo de la siguiente forma

$$z \rightarrow \frac{1}{f^{\circ n} \frac{1}{z}}.$$

- El multiplicador η puede calcularse empleando la regla de la cadena, esto es

$$\eta = (f^{\circ n})'(z_0) = \prod_{k=0}^{n-1} f'(f^{\circ k}(z_0)).$$

Gracias a la Definición 4.3 obtenemos la siguiente clasificación de los n -ciclos de una función f . Un n -ciclo de una función en la clase \mathcal{M} es:

1. súper atractor si $\eta = 0$.
2. atractor si $0 < |\eta| < 1$.
3. repulsor si $|\eta| > 1$.
4. indiferente si $|\eta| = 1$ y este se puede dividir en:
 - a) racional indiferente si $\eta^m = 1$ para algún $m \in \mathbb{N}$.
 - b) irracional indiferente si $\eta = e^{2\pi i\theta}$, donde $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

4.2. Conjuntos de Fatou y Julia

En esta sección se definen los conjuntos de Fatou y Julia para funciones de la clase \mathcal{M} y se enuncian propiedades básicas de dichos conjuntos.

Definición 4.4. El conjunto de Fatou de una función f que pertenece a la clase \mathcal{M} , denotado por $\mathcal{F}(f)$, se define como el conjunto de puntos $z \in \mathbb{C}$ tal que la sucesión de iteradas está definida, es meromorfa y forma una familia normal en alguna vecindad de z .

Definición 4.5. El conjunto de Julia de $f \in \mathcal{M}$, denotado por $\mathcal{J}(f)$, se define como el complemento del conjunto de Fatou, esto es, $\mathcal{J}(f) = \mathbb{C} \setminus \mathcal{F}(f)$.

Las propiedades de estos conjuntos fueron demostradas por Pierre Fatou y Gaston Julia para funciones racionales alrededor de 1920. Posteriormente, Noel I. Baker, Janina Kotus y Yinian Lü demostraron las mismas propiedades para la clase \mathcal{M} en [6]. A continuación enunciamos las propiedades:

1. El conjunto $\mathcal{F}(f)$ es abierto y el conjunto $\mathcal{J}(f)$ es cerrado.
2. El conjunto $\mathcal{J}(f)$ es no vacío y es perfecto.
3. Los conjuntos $\mathcal{F}(f)$ y $\mathcal{J}(f)$ son completamente invariantes bajo f .
4. El conjunto $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(f^{on})$ y $\mathcal{J}(f) = \mathcal{J}(f^{on})$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
5. El conjunto $\mathcal{J}(f)$ es la clausura del conjunto de puntos periódicos repulsores de f .

4.3. Clasificación de las componentes de Fatou

Recordemos que si X es un espacio topológico y E un subespacio de X , decimos que E es una componente conexa si, y solo si

- (a) E es conexo y
- (b) Si D es un subespacio conexo de X que contiene a E , entonces $D = E$, es decir, las componentes son subespacios conexo maximales.

Observación 4.2. Una componente de Fatou de f es un subconjunto de $\mathcal{F}(f)$ conexo maximal.

Definición 4.6. Sea $f \in \mathcal{M}$. Sea K una componente de $\mathcal{F}(f)$ de período p , entonces es posible clasificar a la componente K de la siguiente forma

1. Una componente de Fatou K es *periódica*, si $f^{\circ p}(K) \subset K$. El entero p más pequeño que satisface $f^{\circ p}(K) \subset K$ se llama *período*.
2. Si $f^{\circ m}(K)$ es una componente de Fatou periódica para $m > 0$, entonces K es una componente de Fatou *preperiódica*.
3. Una componente de Fatou es *errante* si no es periódica ni preperiódica.

4.3.1. Clasificación de componentes periódicas

Sea K una componente periódica del conjunto de Fatou de período p para una función $f \in \mathcal{M}$, dicha componente se puede clasificar como sigue:

1. La componente K es llamada *cuenca inmediata de atracción* o *dominio de Böttcher* si contiene un punto periódico z_0 de período p tal que $f^{\circ(np)}(z) \rightarrow z_0$ para cada $z \in K$, cuando $n \rightarrow \infty$.
2. La componente K se llama *dominio parabólico* o *dominio de Leau* si la frontera de la componente ∂K contiene un punto periódico z_0 de período p distinto de infinito y $(f^{\circ p})'(z_0) = 1$ tal que $f^{\circ(np)}(z) \rightarrow z_0$, para cada $z \in K$, cuando $n \rightarrow \infty$.
3. La componente K se llama *disco de Siegel*, si existe un homeomorfismo analítico $\varphi : K \rightarrow D$, donde D es el disco unitario, tal que $\varphi(f^{\circ p}(\varphi^{-1}(z))) = e^{2i\pi\alpha}$ para algún $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
4. La componente K se llama *anillo de Herman*, si existe un homeomorfismo $\varphi : K \rightarrow R$, donde R es el anillo $R = \{z : 1 < |z| < r\}$ con $r > 1$ tal que $\varphi(f^{\circ p}(\varphi^{-1}(z))) = e^{2i\pi\alpha}$ para algún $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
5. La componente K se llama *dominio de Baker* si existe $z_0 \in \partial K$ tal que $f^{\circ(np)} \rightarrow z_0$ para cada $z \in K$, cuando $n \rightarrow \infty$ pero $f^{\circ p}$ no está definida.

Capítulo 5

La familia $\mathcal{T}_\lambda(z) = \lambda \tan(z)$

En este capítulo definimos la función $\tan(z)$, exponemos algunas de sus propiedades y su comportamiento como aplicación conforme. Posteriormente, investigamos la familia de funciones $\lambda \tan(z)$ para algunos valores de λ y describimos su comportamiento dinámico. Los temas aquí abordados pueden consultarse en [6], [16], [17], [25], [27] y [30].

5.1. La función $f(z) = \tan(z)$

Definimos a la función tangente compleja como:

$$w = \tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{cos} z} = \frac{(e^{iz} - e^{-iz})}{i(e^{iz} + e^{-iz})} = \frac{(e^{2iz} - 1)}{(e^{2iz} + 1)} = \frac{1}{i} \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}.$$

Si $Z = e^{2iz}$ y $\frac{1}{i} = -i$, tenemos:

$$w = \tan z = -iW, \quad W = \frac{Z - 1}{Z + 1}. \quad (5.1)$$

De modo que $w = \tan z$ es una transformación de Möbius precedida de una aplicación exponencial, seguido de un movimiento dextrorrotatorio de $\frac{\pi}{2}$.

La franja $S : -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ se aplica en el disco unitario del plano w .

Ya que $Z = e^{2iz} = e^{-2y+2ix}$, entonces $|Z| = e^{-2y}$, $\operatorname{Arg} Z = 2x$.

Por lo tanto, las líneas verticales $x = -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}$ son aplicadas en los rayos $\text{Arg } z = -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}$, respectivamente. Así, S es transformado en el medio plano derecho Z .

También, $|Z| = e^{-2y} < 1$ si $y > 0$ y $|Z| > 1$ si $y < 0$, de modo que la mitad superior de S se aplica dentro del círculo unitario $|Z| = 1$ y la mitad inferior de S fuera de $|Z| = 1$.

Ahora consideremos la transformación de Möbius en (5.1), que denotamos por $g(Z)$:

$$W = g(Z) = \frac{Z - 1}{Z + 1}. \quad (5.2)$$

El eje real en Z es aplicado al eje real en W , más aún, el eje imaginario en Z es aplicado al círculo unitario $|W| = 1$ porque para imaginarios puros $Z = iY$, por (5.2), tenemos

$$|W| = |g(iY)| = \left| \frac{iY - 1}{iY + 1} \right| = 1.$$

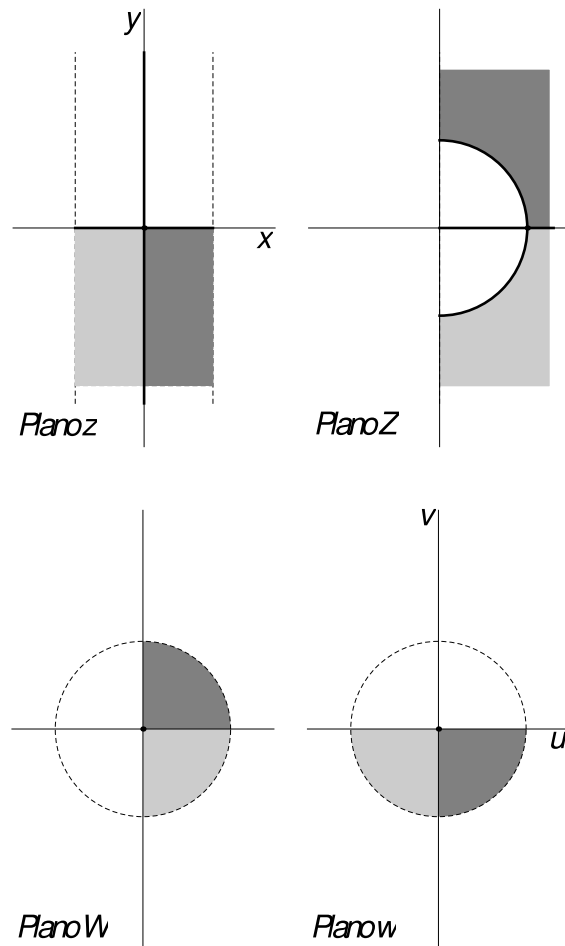
El semiplano derecho en Z se aplica al interior del círculo unitario $|W| = 1$, no fuera de él porque $Z = 1$ tiene su imagen $g(1) = 0$ dentro del círculo.

Finalmente, el círculo unitario $|Z| = 1$ se aplica al eje imaginario en W , ya que este círculo es $Z = e^{i\phi}$, así de (5.2) se obtiene una expresión imaginaria pura

$$g(e^{i\phi}) = \frac{e^{i\phi} - 1}{e^{i\phi} + 1} = \frac{e^{i\frac{\phi}{2}} - e^{-i\frac{\phi}{2}}}{e^{i\frac{\phi}{2}} + e^{-i\frac{\phi}{2}}} = \frac{i \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)}.$$

Del plano W pasamos al plano w por medio de un movimiento dextro-rotatorio de $\frac{\pi}{2}$.

En conjunto, se ha mostrado que $w = \tan z$ aplica $S : -\frac{\pi}{4} < \text{Re } z < \frac{\pi}{4}$ en el disco unitario $|w| = 1$ como se muestra en la Figura 5.1. Esta aplicación es conforme y es inyectiva.

Figura 5.1: $w = \tan(z)$

La función $w = \tan(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{\operatorname{cos}(z)}$ está definida para todo $z \in \mathbb{C}$ excepto en los ceros $\zeta_n = \frac{1}{2}(2n+1)\pi$ de la función $\operatorname{cos}(z)$. Los puntos ζ_n son polos de la función $\tan(z)$, son polos simples ya que los ceros de $\operatorname{cos}(z)$ son simples.

Observe que $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(2n+1)\pi\right) = (-1)^n$. En estos puntos tenemos:

$$\lim_{z \rightarrow \zeta_n} \tan(z) = \infty.$$

Los ceros de la función $\tan(z)$ son iguales a los ceros de la función $\operatorname{sen}(z)$, esto es, $\zeta_n = n\pi$ (para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Proposición 5.1. *La función $f(z) = \tan(z)$ es periódica y tiene período fundamental $\omega = \pi$.*

Demostración. Por definición, sabemos:

$$\tan(z) = \frac{1}{i} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}. \quad (5.3)$$

Sustituyendo z por $z + n\pi$ en la fórmula anterior, tenemos:

$$\begin{aligned} \tan(z + n\pi) &= \frac{e^{i(z+n\pi)} - e^{-i(z+n\pi)}}{i [e^{i(z+n\pi)} + e^{-i(z+n\pi)}]} \\ &= \frac{e^{iz} e^{in\pi} - e^{-iz} e^{-in\pi}}{i [e^{iz} e^{in\pi} + e^{-iz} e^{-in\pi}]} \\ &= \frac{e^{iz} e^{2n\pi i} - e^{-iz}}{i [e^{iz} e^{2n\pi i} + e^{-iz}]} \\ &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i [e^{iz} + e^{-iz}]} = \tan(z). \end{aligned}$$

Lo anterior muestra que $\tan(z)$ no cambia cuando z se incrementa en múltiplos de π , por lo tanto, $\tan(z)$ es una función periódica con período π . ■

Observe que cada franja

$$S_n = \left\{ z : \frac{1}{2} (2n - 1) \pi < \operatorname{Re}(z) \leq \frac{1}{2} (2n + 1) \pi, -\infty < \operatorname{Im}(z) < \infty \right\}$$

es conocida como la franja periódica para $w = \tan(z)$. En particular,

$$S_0 = \left\{ z : -\frac{1}{2} \pi < \operatorname{Re}(z) \leq \frac{1}{2} \pi, -\infty < \operatorname{Im}(z) < \infty \right\}$$

es la franja periódica fundamental para la función $\tan(z)$.

Recordemos que:

$$\tan(z_1 + z_2) = \frac{\tan(z_1) + \tan(z_2)}{1 - \tan(z_1) \tan(z_2)}, \quad (5.4)$$

para $z_1, z_2, z_1 + z_2 \neq \frac{1}{2}(2n+1)\pi$.

Ahora bien, para $z \neq \frac{1}{2}(2n+1)\pi$, tenemos:

$$\begin{aligned}\tan(z) &= \tan(x+iy) = \frac{\tan(x) + i \tanh(y)}{1 - i \tan(x) \tanh(y)} \\ &= \frac{\tan(x)(1 - \tanh^2(y))}{1 + \tan^2(x) \tanh^2(y)} + i \frac{(1 + \tan^2(x)) \tanh(y)}{1 + \tan^2(x) \tanh^2(y)}.\end{aligned}\quad (5.5)$$

Así, $\tan(z)$ es real si, y sólo si $y = 0$ y $\tan(z)$ es imaginario puro en las líneas verticales $z = n\pi + iy$, $-\infty < y < \infty$ y $z_1 = \frac{1}{2}(2n+1)\pi + iy$, $y \neq 0$. Para hacer evidente este hecho, recordemos que la función $\tan(z)$ puede ser definida en términos de la función exponencial, esto es:

$$\tan(z) = -i \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} \quad (5.6)$$

para $z = \frac{1}{2}(2n+1)\pi + iy$, tenemos que $e^{2iz} = e^{-2y+(2n+1)\pi i} = -e^{-2y}$ y así obtenemos:

$$\tan\left(\frac{1}{2}(2n+1)\pi + iy\right) = i \frac{1 + e^{-2y}}{1 - e^{-2y}} \quad (5.7)$$

el cual es un número imaginario puro si $y \neq 0$. Observe que de la Ecuación 5.7 se obtiene

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \tan\left(\frac{1}{2}(2n+1)\pi + iy\right) = i$$

y

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \tan\left(\frac{1}{2}(2n+1)\pi + iy\right) = -i.$$

Esta propiedad se cumple cuando $y \rightarrow \infty$ o $y \rightarrow -\infty$ a lo largo de cualquier otra línea vertical $z = x_0 + iy$ como puede observarse de la Ecuación 5.1, ya que $\tanh(y) \rightarrow 1$ cuando $y \rightarrow \infty$ y $\tanh(y) \rightarrow -1$ cuando $y \rightarrow -\infty$. Los valores $w = \pm i$ en realidad no los toma la función $\tan(z)$ para algún $z \in \mathbb{C}$. De hecho, al desarrollar

$$\tan(z) = -i \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} = \pm 1 \quad (5.8)$$

llegamos a una contradicción.

Ahora bien, para encontrar las imágenes de los segmentos horizontales $z = x + im$, $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$, considere $\tanh(m) = a$, $\tan(x) = t$, $w = \tan(z) = u + iv$. Así, por la Ecuación 5.1, tenemos:

$$C_a : u = \frac{(1 - a^2)t}{1 + a^2t^2}, \quad v = \frac{a(1 + t^2)}{1 + a^2t^2},$$

que son ecuaciones paramétricas de un círculo sin el punto $u = 0$, $v = \frac{1}{a}$. Es posible aproximarse a este punto cuando $x \rightarrow \frac{1}{2}\pi$ o cuando $t \rightarrow \infty$.

Eliminando el parámetro t , obtenemos:

$$u^2 + \left[v - \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) \right]^2 = \frac{1}{4} \left(a - \frac{1}{a} \right)^2,$$

lo cual muestra que el círculo tiene centro en $(0, \frac{1}{2}(a + a^{-1}))$ y radio $r = \frac{1}{2}|a - a^{-1}|$. Para $a = 0$, el círculo se degenera y obtenemos el eje real $u = t, v = 0$.

Ahora, para determinar las imágenes de las líneas verticales $z = c + iy$, $0 < |c| < \frac{1}{2}\pi$, $-\infty < y < \infty$, sean $\tan(c) = b$, $\tanh(y) = t$. Entonces, por la Ecuación 5.1, tenemos:

$$C_b : u = \frac{b(1 - t^2)}{1 + b^2t^2}, \quad v = \frac{(1 + b^2)t}{1 + b^2t^2}, \quad -1 < t < 1$$

que son las ecuaciones paramétricas del arco de un círculo. El arco intersecta al eje u en $(b, 0)$, se aproxima a $w = -i$ cuando $t \rightarrow -1$ y a $w = i$ cuando $t \rightarrow 1$.

Al eliminar el parámetro t , tenemos:

$$\left[u - \frac{1}{2} \left(b - \frac{1}{b} \right) \right]^2 + v^2 = \frac{1}{4} \left(b + \frac{1}{b} \right)^2,$$

así, el arco tiene centro en $(\frac{1}{2}(b - b^{-1}), 0)$ y radio $r = \frac{1}{2}|b - b^{-1}|$.

Para $b = 0$ el arco se degenera en $u = 0$, $v = t$ ($-1 < t < 1$), esto es el intervalo $(-i, i)$ que se encuentra sobre el eje imaginario.

Los arcos C_a y C_b se intersectan en el punto $w = \tan(c + im)$ ya que i o $-i$ se encuentran en C_a . Análogamente, cualquier $w \notin (-i\infty, -i] \cup [i, i\infty)$ pertenece a la intersección de ciertos arcos C_a y C_b .

Regresando a la Ecuación 5.7, observe que esta puede ser escrita como

$$\tan \left[\frac{1}{2} (2n + 1) \pi + iy \right] = i \left(1 + \frac{2}{e^{2y} - 1} \right) = -i \left(1 + \frac{2e^{2y}}{1 - e^{2y}} \right)$$

la imagen de cada semirecta $z = \frac{1}{2} (2n + 1) \pi + iy$, $y > 0$ es el intervalo abierto $(i, i\infty)$ a lo largo del eje v descrito desde $i\infty$ a ∞ cuando y se incrementa de 0 a ∞ . La imagen de la otra semirecta $z = \frac{1}{2} (2n + 1) \pi + iy$, $y < 0$ es el intervalo abierto $(-i\infty, -i)$ descrito de $-i$ a $-i\infty$ y toma valores de $-\infty$ a 0.

De este modo hemos probado que cada $w \in \widehat{\mathbb{C}} - \{i, -i\}$ es la imagen de un punto $z \in S_0 = \{z : -\frac{1}{2}\pi < \operatorname{Re}(z) \leq \frac{1}{2}\pi, -\infty < \operatorname{Im}(z) < \infty\}$.

Por la periodicidad de la función $\tan(z)$, cualquier w es también la imagen de los puntos $z_n = z + n\pi$. Por lo tanto, la función $f(z) = \tan(z)$ aplica el plano complejo \mathbb{C} en la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ menos dos puntos $\{-i, +i\}$.

La derivada $f'(z) = \sec^2(z)$, para $z \neq 0$ es siempre diferente de cero para cualquier $z \in \mathbb{C}$ de modo que no hay puntos críticos y en consecuencia, tampoco valores críticos.

La función $f(z) = \tan(z)$ aplica todo el eje imaginario a un segmento que tiene por extremos a i y $-i$.

Sea $\gamma_1(t) = it$ donde $t \in [0, \infty)$ y hacemos tender t a infinito, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tan(\gamma_1(t)) = i.$$

Análogamente para $\gamma_2(t) = -it$ donde $t \in [0, \infty)$, obtenemos que $-i$ es

otro valor asintótico. Por lo tanto, el conjunto de valores asintóticos es el conjunto $\{i, -i\}$.

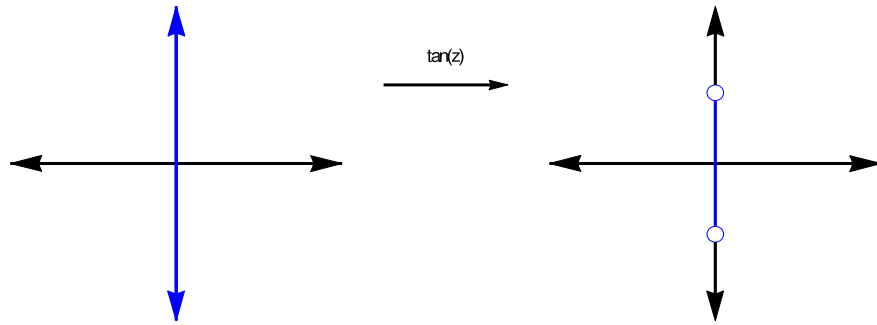


Figura 5.2: Valores asintóticos de la función $\tan(z)$

Observe que $f(z) = \tan(z)$ pertenece a la clase \mathcal{S} .

5.2. La familia $\mathcal{T}_\lambda = \lambda \tan(z)$

En esta sección estudiaremos la familia $\lambda \tan(z)$ y algunas de sus propiedades dinámicas.

Sea $\mathcal{T}_\lambda = \lambda \tan(z) = \frac{\lambda}{i} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$, $\lambda \neq 0$. Para obtener las propiedades de aplicación de \mathcal{T}_λ basta con multiplicar la imagen del plano por λ ; así, los valores asintóticos son λi y $-\lambda i$.

Existe simetría tanto en la variable como en el parámetro, esto es:

$$\mathcal{T}_\lambda(-z) = -\mathcal{T}_\lambda(z) \quad \text{y} \quad \mathcal{T}_{-\lambda}(z) = -\mathcal{T}_\lambda(z),$$

de lo anterior se sigue que si z_0 es un punto periódico de período p , $\mathcal{T}_\lambda^p(z_0) = z_0$ y $-z_0$ también es un punto periódico de período p . Así, para la órbita periódica z_0, z_1, \dots, z_{p-1} existe una órbita simétrica $-z_0, -z_1, \dots, -z_{p-1}$ o bien p es par y los puntos simétricos se encuentran contenidos en la órbita, $z_{\frac{p}{2}+j} = -z_j$ para $j = 0, \dots, \frac{p}{2} - 1$.

Denotamos a $\mathcal{T}_\lambda^{\circ n}(z)$ como la n -ésima iterada de $\mathcal{T}_\lambda(z)$.

Algunas propiedades de simetría que tiene la familia $\mathcal{T}_\lambda(z) = \lambda \tan(z)$ bajo iteración se dan en la siguiente proposición.

Proposición 5.2. (i) $\mathcal{T}_\lambda^{\circ n}(-z) = -\mathcal{T}_\lambda^{\circ n}(z)$ para $n \geq 1$.

(ii) $\mathcal{T}_{\bar{\lambda}}^{\circ n} = \overline{\mathcal{T}_\lambda^{\circ n}(z)}$ para $n \geq 1$.

(iii) $\mathcal{T}_{-\lambda}^{\circ n}(z) = (-1)^n \mathcal{T}_\lambda^{\circ n}(z)$.

Demostración. (i) Para $n = 1$, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\lambda(-z) &= -\mathcal{T}_\lambda(z) \\ \lambda \tan(-z) &= \frac{\lambda}{i} \left(\frac{\operatorname{sen}(-z)}{\cos(-z)} \right) \\ &= \frac{\lambda}{i} \left(\frac{e^{-iz} - e^{iz}}{e^{-iz} + e^{iz}} \right) \\ &= -\frac{\lambda}{i} \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} \right) \\ &= -\lambda \tan(z) \\ &= -\mathcal{T}_\lambda(z). \end{aligned}$$

Ahora, supongamos que es válido para n , esto es, $\mathcal{T}_\lambda^{\circ n}(-z) = -\mathcal{T}_\lambda^{\circ n}(z)$.
Resta probar que es válido para $n + 1$:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\lambda^{\circ n+1}(z) &= -\mathcal{T}_\lambda^{\circ n+1}(z) \\ \mathcal{T}_\lambda^{\circ n+1}(z) &= \mathcal{T}_\lambda^{\circ n}(-z) \circ \mathcal{T}_\lambda(-z) \\ &= \mathcal{T}_\lambda^{\circ n}(-(-\mathcal{T}_\lambda(z))) \\ &= -\mathcal{T}_\lambda^{\circ n}(-\mathcal{T}_\lambda(z)) \\ &= -\mathcal{T}_\lambda^{\circ n+1}(z). \end{aligned}$$

(ii) Como $\mathcal{T}_{\bar{\lambda}}^{\circ n}(\bar{z}) = \bar{\lambda} \tan(\bar{z}) = \overline{\lambda \tan(z)} = \overline{\mathcal{T}_\lambda(z)}$. Para la segunda iteración, tenemos:

$$\mathcal{T}_{\bar{\lambda}}^{\circ 2}(\bar{z}) = \mathcal{T}_{\bar{\lambda}}(\mathcal{T}_{\bar{\lambda}}(\bar{z})) = \mathcal{T}_{\bar{\lambda}}(\overline{\mathcal{T}_\lambda(z)}) = \overline{\mathcal{T}_\lambda(\mathcal{T}_\lambda(z))} = \overline{\mathcal{T}_\lambda^{\circ 2}(z)}.$$

Continuando con este proceso para la n -ésima iterada, encontramos la expresión deseada.

- (iii) Como $\mathcal{T}_{-\lambda}^{\circ n}(z) = -\lambda \tan(z) = -\mathcal{T}_\lambda(z)$. Para la segunda iteración, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{-\lambda}^{\circ 2}(z) &= \mathcal{T}_{-\lambda}(\mathcal{T}_{-\lambda}(z)) \\ &= \mathcal{T}_{-\lambda}(-\mathcal{T}_\lambda(z)) \\ &= -\mathcal{T}_\lambda(-\mathcal{T}_\lambda(z)) \\ &= (-1)^2 \mathcal{T}_\lambda^{\circ 2}(z). \end{aligned}$$

Continuando con este proceso para la n -ésima iterada, encontramos la expresión deseada. ■

Proposición 5.3. *La derivada de las iteradas tiene las siguientes propiedades:*

(a) $(\mathcal{T}_\lambda^{\circ n})'(-z) = (\mathcal{T}_\lambda^{\circ n})'(z)$.

Por la parte (i) de la Proposición 5.2, tenemos que la derivada de una función impar es par.

(b) $(\mathcal{T}_{\bar{\lambda}}^{\circ n})'(\bar{z}) = \overline{(\mathcal{T}_\lambda^{\circ n})'(z)}$.

Por la parte (ii) de la Proposición 5.2, tenemos:

$$\overline{\mathcal{T}_{\bar{\lambda}}^{\circ n}(\bar{z})} = \mathcal{T}_\lambda^{\circ n}(z). \text{ Ya que } \overline{(g(\bar{z}))'} = g'(\bar{z}) \text{ para una función analítica } g.$$

$$\text{Así, tenemos que } \overline{(\mathcal{T}_{\bar{\lambda}}^{\circ n})'(\bar{z})} = (\mathcal{T}_\lambda^{\circ n})'(z).$$

(c) $(\mathcal{T}_{-\lambda}^{\circ n})'(z) = (-1)^n (\mathcal{T}_\lambda^{\circ n})'(z)$.

Ahora bien, sea $\lambda > 0$, sabemos que

$$\mathcal{T}_\lambda(z) = \lambda \tan(z) = -\lambda i \left(\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} \right) = W(e^{2iz}),$$

y sea $W(t) = -\lambda i \left(\frac{t-1}{t+1} \right)$. La función e^{2iz} no tiene puntos críticos, sólo asíntotas y son $W(0) = \lambda i$ y $W(\infty) = -\lambda i$, donde $0, \infty$ son valores de Picard.

Teorema A. Sea $\mathcal{T}_\lambda(z) = \lambda \tan(z)$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\lambda > 1$, entonces el conjunto de Julia $\mathcal{J}(\mathcal{T}_\lambda)$ es la recta real y todos los demás puntos tienden bajo iteración a uno de los dos puntos fijos ubicados en el eje imaginario.

Demostración. Escribimos $\mathcal{T}_\lambda(z) = L_\lambda \circ E(z)$, donde

$$E(z) = e^{2iz} \quad \text{y} \quad L_\lambda(z) = -\lambda i \left(\frac{z-1}{z+1} \right),$$

E aplica al semiplano superior al disco unitario menos el cero y L_λ aplica el disco al semiplano superior al que denotaremos como \mathbb{H}^+ . Tanto E como L_λ preservan fronteras, así, \mathcal{T}_λ aplica el interior del semiplano superior a él mismo. Observe que \mathcal{T}_λ preserva el eje imaginario

$$\mathcal{T}_\lambda(iy) = i\lambda \tanh(y).$$

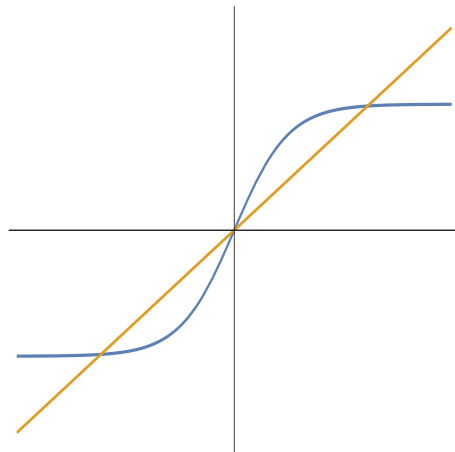


Figura 5.3: Gráfica de $\lambda \tanh y$ cuando $\lambda > 1$

La gráfica de $\lambda \tanh y$ muestra que \mathcal{T}_λ tiene dos puntos fijos atractores x_1 y x_2 ubicados simétricamente respecto a 0 cuando $\lambda > 1$. Por el Lema de Schwartz sabemos que todos los puntos en el semiplano superior (e inferior \mathbb{H}^-) tienden bajo iteración a uno de estos puntos que se encuentran en $\mathcal{F}(\mathcal{T}_\lambda)$.

Así, el semiplano superior \mathbb{H}^+ y el semiplano inferior \mathbb{H}^- no están en $\mathcal{J}(\mathcal{T}_\lambda)$.

La línea real está en $\mathcal{J}(\mathcal{T}_\lambda)$, tal afirmación se sigue del hecho de que la línea real satisface $\mathcal{T}_\lambda^{-1}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ y $\mathcal{T}_\lambda(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y que $\mathcal{T}'_\lambda(x) > 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ si $\lambda > 1$ y $\mathcal{T}'_\lambda(x) \geq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ si $\lambda = 1$.

Cada intervalo de la forma $(\frac{2k-1}{2}\pi, \frac{2k+1}{2}\pi)$ se expande en todo \mathbb{R} . Si V es un intervalo abierto en \mathbb{R} , entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathcal{T}_\lambda^k(V)$ cubre uno de estos intervalos de longitud π . Por lo tanto, $\mathcal{T}_\lambda^{k+1}(V)$ cubre a V . Así, existen puntos fijos repulsivos y polos de $\mathcal{T}_\lambda^{k+1}$ en (V) . ■

Observación 5.1. 1. Si $\lambda = 1$, $\mathcal{J}(\mathcal{T}_\lambda) = \mathbb{R}$ y todos los puntos con parte imaginaria diferente de cero tienden asintóticamente al punto fijo neutral en 0.

2. Cuando $\lambda < -1$ la dinámica de \mathcal{T}_λ es similar a cuando $\lambda > 1$, excepto que \mathcal{T}_λ tiene un punto periódico atractor de periodo 2 que salta del semiplano superior al inferior. Ya que $|\mathcal{T}'_\lambda(x)|$ para $x \in \mathbb{R}$, se sigue como en las líneas anteriores que $\mathcal{J}(\mathcal{T}_\lambda) = \mathbb{R}$ para $\lambda < -1$.

Teorema B. Sea $\mathcal{T}_\lambda = \lambda \tan(z)$. La familia $\mathcal{T}_\lambda(z)$ tiene un único punto fijo si, y sólo si este punto es cero y $0 < |\lambda| < 1$.

Demostración. (Necesidad) Sabemos que si z es punto fijo, entonces $\mathcal{T}_\lambda(z) = z$ pero también $\mathcal{T}_\lambda(-z) = -z$ y además $\mathcal{T}'_\lambda(z) = \mathcal{T}'_\lambda(-z)$ por (a) de la Proposición 5.3. Así tenemos que, si z es punto fijo atractor, entonces $-z$ es punto fijo atractor. Por hipótesis $\mathcal{T}_\lambda(z)$ tiene un único punto fijo, así la única forma de que $\mathcal{T}'_\lambda(z) = \mathcal{T}'_\lambda(-z)$ es para $z = 0$ y como es punto fijo atractor tenemos $0 < |\lambda| < 1$.

(Suficiencia) Es fácil ver, ya que si $0 < |\lambda| < 1$, entonces 0 es punto fijo atractor. ■

Teorema C. Sea $\mathcal{T}_\lambda(z) = \lambda \tan(z)$. Si $0 < |\lambda| < 1$, entonces el conjunto de Fatou $\mathcal{F}(\mathcal{T}_\lambda)$ es una componente completamente invariante donde $\mathcal{T}_\lambda^{on}(z) \rightarrow 0$.

Demostración. Si $0 < |\lambda| < 1$, entonces 0 es punto fijo atractor por Teorema B. Así sea G la componente de Fatou que contiene a 0 tal que $\mathcal{T}_\lambda^{on} \rightarrow 0$. La componente G contiene un valor singular de $\mathcal{T}_\lambda(z)$, digamos λi (también puede ser $-\lambda i$).

La componente G es simétrica bajo $z \rightarrow -z$, así G contiene a los dos valores singulares $\pm \lambda i$.

Así, no es posible tener otro punto fijo atractor. Como la componente G contiene todos los valores singulares de \mathcal{T}_λ , entonces G es completamente invariante. ■

Teorema 5.1. [19] Sea $f \in \mathcal{M} \cap \mathcal{S}$, si existe un punto fijo atractor cuya componente contiene todos los valores singulares de f , entonces $\mathcal{J}(f)$ es totalmente desconexo.

Corolario D. Con las hipótesis del **Teorema C**, el conjunto de Julia de $\mathcal{T}_\lambda(z)$ es totalmente desconexo.

La demostración es una consecuencia del Teorema 5.1.

Un resultado importante que no se abordará en esta tesis pero que puede ser demostrado utilizando la topología de Moser y otras herramientas expuestas en [30] es el siguiente:

Resultado. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $0 < |\lambda| < 1$. El conjunto $\mathcal{J}(\mathcal{T}_\lambda)$ es un conjunto de Cantor en $\widehat{\mathbb{C}}$ y $\mathcal{T}_\lambda|_{\mathcal{J}(\mathcal{T}_\lambda)}$ es topológicamente conjugado a $\sigma|_\Gamma$.

Bibliografía

- [1] L. V. Ahlfors. *Complex analysis: An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*. 1979.
- [2] D. S. Alexander. A history of complex dynamics. *Vieweg-Verlag Braunschweig*, 1994.
- [3] D. S. Alexander. A history of complex dynamics from Schröder to Fatou and Julia. *Aspects of Mathematics, Braunschweig/Wiesbaden: Friedr. Vieweg*, 1994.
- [4] D. S. Alexander, F. Iavernaro, and A. Rosa. *Early days in complex dynamics: A history of complex dynamics in one variable during 1906-1942*, volume 38. American Mathematical Soc., 2012.
- [5] J. Bak and D. J. Newman. *Complex analysis*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [6] I. N. Baker, J. Kotus, and L. Yinian. Iterates of meromorphic functions I. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 11(02):241–248, 1990.
- [7] I. N. Baker, J. Kotus, and L. Yinian. Iterates of meromorphic functions II: Examples of wandering domains. *Journal of the London Mathematical Society*, 2(2):267–278, 1991.
- [8] I. N. Baker, J. Kotus, and L. Yinian. Iterates of meromorphic functions III: Preperiodic domains. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 11(04):603–618, 1991.

-
- [9] I. N. Baker, J. Kotus, and L. Yinian. Iterates of meromorphic functions IV: Critically finite functions. *Results in Mathematics*, 22(3-4):651–656, 1992.
- [10] A. F. Beardon. *Iteration of rational functions: Complex analytic dynamical systems*, volume 132. Springer Science & Business Media, 2000.
- [11] W. Bergweiler. *An introduction to complex dynamics*, volume 6. Departamento de Matemática da Universidad de Coimbra, 1995.
- [12] L. Carleson and T. Gamelin. *Complex dynamics*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [13] J. B. Conway. *Functions of one complex variable*, volume I. Springer-Verlag, 1978.
- [14] J. B. Conway. *Functions of one complex variable*, volume II. Springer Science & Business Media, 2012.
- [15] E. De Amo. *Introducción al curso de análisis complejo*. Facultad de Ciencias Experimentales, Universidad de Almería, 2009.
- [16] R. L. Devaney and L. Keen. Dynamics of tangent. In *Dynamical systems*, pages 105–111. Springer, 1988.
- [17] R. L. Devaney and L. Keen. Dynamics of meromorphic maps: maps with polynomial Schwarzian derivative. In *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, volume 22, pages 55–79, 1989.
- [18] P. Domínguez. Dynamics of transcendental meromorphic functions. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math*, 23(1):225–250, 1998.
- [19] P. Dominguez, A. Hernández, and G. Sienra. Totally disconnected julia set for different classes of meromorphic functions. *Conformal Geometry and Dynamics of the American Mathematical Society*, 18(1):1–7, 2014.
- [20] A. Eremenko. Geometric theory of meromorphic functions. *Contemporary Mathematics*, 355:221–230, 2004.
- [21] P. Fatou. Sur les équations fonctionnelles. *Bulletin de la société mathématique de France*, 48:33–94, 1920.

-
- [22] É. Ghys. Les systèmes dynamiques holomorphes. *Dynamique et géométrie complexes (Lyon, 1997)*, 8:1–10, 1999.
- [23] I. L. Iribarren. *Topología de espacios métricos*. Limusa-Wiley, 1973.
- [24] G. Julia. Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, pages 47–246, 1918.
- [25] L. Keen and J. Kotus. Dynamics of the family $\lambda \tan z$. *arXiv preprint math/9507225*, 1995.
- [26] S. Lang. *Complex analysis*, volume 103. Springer Science & Business Media, 2013.
- [27] I.-H. Lin. *Classical complex analysis a geometric approach*, volume 1. World Scientific, 2010.
- [28] J. E. Marsden and M. J. Hoffman. *Basic complex analysis*. W. H. Freeman and Company, 1987.
- [29] S. Morosawa. *Holomorphic dynamics*, volume 66. Cambridge University Press, 2000.
- [30] J. Moser. *Stable and random motions in dynamical systems: With special emphasis on celestial mechanics*, volume 1. Princeton University Press, 2001.
- [31] T. Needham. *Visual complex analysis*. Oxford University Press, 1998.
- [32] J. Noguchi. *Introduction to complex analysis*, volume 168. American Mathematical Soc., 2008.
- [33] P. J. Olver. *Complex analysis and conformal mapping*, 2015.
- [34] M. O'Searcoid. *Metric spaces*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [35] B. P. Palka. *An introduction to complex function theory*. Springer, 1990.
- [36] J. L. Schiff. *Normal families*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [37] E. M. Stein and R. Shakarchi. *Complex analysis*, volume 2. Princeton University Press, 2010.

- [38] N. Steinmetz. *Rational iteration: Complex analytic dynamical systems*, volume 16. Walter de Gruyter, 1993.
- [39] S.-T. Yau. Complex geometry: Its brief history and its future. *Science in China Series A: Mathematics*, 48:47–60, 2005.

Índice

- Abel, Niels Henrick (1802–1829), 1
Argand, Jean Robert (1768–1822),
14
- Böttcher, Lucjan Emil
(1872–1937), 2
- Baker, Irvine Noel (1932–2001), 4
Beardon, Alan Frank (1940–), 4
- bola
abierta, 8
cerrada, 8
- Briot, Charles Auguste
(1817–1882), 24
- Brolin, Hans (1933–), 4
- Buquet, Jean-Claude (1819–1895),
24
- Carleson, Lennart Axel Edvard
(1928 –), 4
- Cauchy, Augustin-Louis
(1789–1857), 24
- Cayley, Arthur (1821–1895), 2
- Cherry, Thomas MacFarland
(1898–1966), 4
- conjunto
abierto, 8
- acotado, 8
cerrado, 9
clausura de, 9
compacto, 11
componente, 12
conexo, 12
localmente, 13
por trayectorias, 12
cubierta abierta de, 11
cubierta de, 11
de Julia, 3
de Mandelbrot, 4
derivado, 9
diámetro de, 8
disconexo, 12
dominio, 12
subcubierta de, 11
totalmente disconexo, 12
- curva
parametrizada, 39
índice, 42
dirección, 40
homotópica, 43
longitud, 42
suave, 39

- Derivada Schwarziana, 30
 desigualdad de Cauchy-Schwarz,
 16
 Devaney, Robert Luke (1948–), 4
 Douady, Adrien (1935–2006), 4

 ecuaciones de Cauchy-Riemann,
 27
 esfera de Riemann, 18
 espacio métrico, 7
 completo, 10
 propiedad de Cantor, 10

 fórmula integral de Cauchy, 44
 familias normales, 3
 Fatou, Pierre Joseph Louis
 (1878–1929), 2
 Fréchet, Maurice René
 (1878–1973), 2
 Función
 holomorfa, 24
 holomorfa en un punto, 24
 función, 20
 constante, 21
 continua, 23
 coseno, 22
 propiedades, 22
 dominio, 20
 exponencial, 21
 propiedades, 21
 identidad, 21
 imagen, 20
 integral, 41
 límite, 22, 45
 polinomial, 21
 potencia, 21
 racional, 21
 seno, 22
 propiedades, 22
 uniformemente continua, 24
 función analíticamente conjugada,
 1

 Gamelin, Theodore William
 (1938–), 4
 Gauss, Johann Carl Friedrich
 (1777–1855), 14

 Hubbard, John Hamal (1945–), 4

 imagen esférica, 18

 Julia, Gaston Maurice
 (1893–1978), 2

 Koebe, Paul (1882–1945), 2
 Koenigs, Gabriel Xavier Paul
 (1858–1931), 2
 Kotus, Janina Maria, (1954–), 5

 Landau, Edmund Georg Hermann
 (1877–1938), 2
 Lattès, Samuel (1873–1918), 4
 Leau, Léopold (1868–1943), 2
 Lebesgue, Henri Léon
 (1875–1941), 2

 métrica, 7
 métrica esférica, 19
 Montel, Paul Antoine Aristide
 (1876–1975), 2
 multiplicador, 2

 número complejo, 13
 adición, 13
 argumento, 16
 conjugado, 14
 módulo, 15

- multiplicación, 13
- parte imaginaria, 14
- parte real, 14
- representación polar, 16
- Pincherle, Salvatore (1853–1936),
4
- plano complejo, 14
- plano complejo extendido, 19
- primitiva de una función, 43
- propiedad de Bolzano-Weierstrass,
11
- proyección estereográfica, 18
- punto
 - de acumulación, 9
 - de adherencia, 9
 - entorno de, 8
 - interior, 8
- punto al infinito, 19
- punto fijo, 2
 - atractor, 2
 - repulsor, 2
 - súper atractor, 1
- punto proyectivo, 18
- Riesz, Frigyes (1880–1956), 2
- Schröder, Ernst (1841–1902), 1
- subsucesión, 10
- sucesión, 9
 - convergente, 10
 - de Cauchy, 10
- sucesión de funciones
 - acotada uniformemente, 46
 - convergencia puntual, 45
 - convergencia uniforme, 45
 - subsucesión, 45
- Sullivan, Dennis Parnell (1941–),
4
- unidad imaginaria i , 14
- Wallis, John (1616–1703), 14
- Weierstrass, teorema de
 - convergencia, 47

