



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE PUEBLA

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Posgrado en Ciencias Matemáticas

DEL TEOREMA DE GRAFOS MENORES A LAS DESCOMPOSICIONES ARBÓREAS

Tesis

presentada para obtener el grado de
Maestría en Ciencias (Matemáticas)

Presenta

Joel Vázquez Nájera

Director de tesis

Dr. Carlos Guillén Galván

Puebla, Puebla

Marzo 2022



DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el C:

JOEL VÁZQUEZ NÁJERA

estudiante de la Maestría en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 29 de marzo de 2022, con la tesis titulada:

Del Teorema de Grafos menores a las descomposiciones arbóreas

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 23 de marzo de 2022

DRA. PATRICIA DOMÍNGUEZ SOTO
COORDINADORA DEL POSGRADO
EN MATEMÁTICAS.



A mi esposa e hija: Janel y Cami.

A mi mamá: Caro.

A mis hermanos: Vianney, Josué y Montse.

En especial a ti, papi: Joel.

Agradecimientos

Quisiera empezar agradeciendo al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por el apoyo económico brindado, durante los dos años que duró el estudio de la maestría, y gracias a lo cual fue posible la elaboración de este trabajo de tesis.

A mi familia, mami, Vianney, Josué y Montse. Gracias por estar ahí en todo momento, por brindarme todo su apoyo, cariño y comprensión, en momentos difíciles como los que hemos pasado. Los quiero mucho.

A mi nueva familia, Janel y Cami. Gracias por soportarme, en dos de sus acepciones: por aguantarme y ser la fuerza para seguir adelante. Gracias por quererme, las amo.

Gracias a ti, papi, por todas las enseñanzas y sacrificios que hiciste por mi. No queda más que seguir tu ejemplo, y así siempre estarás a mi lado. Hasta donde quiera estés, te quiero y por siempre agradecido.

Quisiera agradecer a mi director de tesis. Al Dr. Carlos Guillén Gálvan le agradezco por darme la oportunidad de trabajar nuevamente bajo su supervisión; siempre hubo entera disposición de su parte para resolver cualquier duda, y apoyo para poder culminar este trabajo.

A mis sinodales: Dr. Carlos Alberto López Andrade, Dr. David Villa Hernández, Dr. César Bautista Ramos y Dr. José de Jesús Lavalle Martínez. Gracias, por su tiempo, por sus correcciones y observaciones hechas al trabajo.

A mis amigos, que siempre me impulsaron a seguir adelante y no claudicar.

Introducción

El *Teorema de Grafos Menores* es uno de los resultados más importantes dentro de la Teoría de Grafos. Este teorema fue enunciado inicialmente como una conjetura por el matemático alemán Klaus Wagner en 1937. En esta conjetura se establecía la existencia, dentro de una sucesión contable de grafos finitos, de un par de grafos comparables bajo la relación menor. Por muchos años dicho planteamiento fue conocido como la *Conjetura de Wagner*, hasta su demostración, realizada por Neil Robertson y Paul D. Seymour, la cual les llevó alrededor 20 artículos [21, 22, 23, 25, 24, 26], desarrollados en más de 20 años.

El extenso trabajo de Robertson y Seymour en grafos menores trajo consigo repercusiones en otras ramas como: Teoría de grafos menores [20, 23, 25, 26], teoría estructural de grafos [6, 11, 19, 23, 27] y aplicaciones algorítmicas [2, 3, 13].

Dentro de las aplicaciones algorítmicas sobresalen numerosas herramientas y métodos, como la descomposición arbórea, ancho arbóreo y otros más [4, 9, 21]. También las clases de grafos que cumplen con la propiedad de ser menor cerrada pueden proporcionar una buena descripción de ciertas propiedades y proporcionar algoritmos eficientes para probar si un elemento dado satisface una propiedad determinada [14, 3].

Las métricas arbóreas tienen una muy marcada injerencia en la eficiencia algorítmica, ya que muchos problemas de grafos que son NP-completos en general pueden resolverse en tiempo polinomial si los grafos están limitados a tener una métrica arbórea acotada y una estructura que puede ser expresable como un enunciado en la lógica monádica de segundo orden [3, 9, 21].

Otra de las implicaciones de los trabajos de Robertson y Seymour en su prueba del Teorema de Grafos Menores son las técnicas y herramientas sustanciales desarrolladas con la combinación del ancho arbóreo y los “enredos” (tangles), que fueron base y motivación para establecer nuevas conjeturas y resultados en el área. Así mismo, se estableció una relación estrecha entre grafos menores y superficies [1, 31].

El presente trabajo está enfocado principalmente en el desarrollo y presentación de los conceptos y resultados principales, en el contexto de la Teoría de los Grafos Menores, que condujeron a la necesidad de los conceptos de árbol de descomposición y ancho arbóreo de un grafo. En especial, resaltar el impacto que tuvieron estos

conceptos en la prueba del Teorema de Grafos Menores.

El primer capítulo presenta un panorama general y básico de la teoría de grafos.

El segundo capítulo se centra en la Teoría de Grafos Menores, como se ha mencionado, a raíz de su estudio se origina el concepto de descomposición arbórea.

El tercer capítulo está dedicado al Teorema de Kuratowski que puede ser expresado en términos de grafos menores y el conjunto de obstrucciones de un familia de grafos.

Finalmente, el cuarto capítulo, el más extenso de todos, se enfocará en introducir el concepto de descomposición arbórea y establecer su injerencia dentro de la prueba del Teorema de Grafos Menores, para finalmente presentar un esbozo de una parte de la prueba donde se utilizan los conceptos de descomposición y ancho arbóreo.

Índice general

Introducción

Tabla de símbolos

Índice de figuras

1. Preliminares	1
1.1. Conceptos básicos en grafos	1
1.2. Algunas familias especiales	6
2. Menores y menores topológicos	11
2.1. Menores topológicos y menores	11
2.2. Buen cuasi-orden	17
2.3. Teorema de grafo menor para árboles	18
3. Teorema de Kuratowski	21
3.1. Grafos planos e incrustaciones	21
3.2. El teorema de Kuratowski y grafos prohibidos	23
3.3. Menores prohibidos	25
4. Descomposición arbórea	29
4.1. Ancho arbóreo	32
4.2. Otras métricas arbóreas	38
4.3. Teorema de grafos menores	40
4.4. Formulaciones de Teorema de Grafos Menores	42
4.5. Implicaciones del Teorema	43
Conclusiones y trabajo futuro	47
Bibliografía	49

Tabla de símbolos

$[V]^k$	conjunto de todos los subconjuntos de k -elementos de V
$G = (V, E)$	grafo G con vértices V y aristas E
$V(G)$	vértices del grafo G
$E(G)$	aristas del grafo G
$ini(e)$	vértice inicial de la arista e
$ter(e)$	vértice final de la arista e
$G[V]$	grafo inducido
K_n	grafo completo
T	árbol
TG	clase de los grafos que son subdivisión de G
IG	clase de los grafos que son inflados de G
\preccurlyeq	relación menor
\preceq	relación pre-orden
\subseteq	subgrafo
\subset	subgrafo propio
\sqsubseteq	subgrafo inducido
$[X]^\omega$	conjunto de todos los subconjuntos finitos de X
$\mathcal{P}(X)$	conjunto potencia de X
T_x	bolsas del árbol de descomposición
xPy	camino que inicia en x y termina en y
t_w	ancho arboreo
$w(G)$	cardinalidad del máximo clique de G
P_w	ancho de camino
Ch_w	ancho de cuerda
c_w	ancho de corte
b_w	ancho de banda

Índice de figuras

1.1.	El grafo con conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ y aristas $E = \{\{v_1, v_3\}, \{v_1, v_5\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_6\}, \{v_3, v_5\}\}$	1
1.2.	Tipos de grafos.	2
1.3.	El grafo G tiene como subgrafos a G' y G'' , G' es subgrafo inducido y G'' es abarcador.	3
1.4.	Componentes del grafo G	5
1.5.	G es un grafo bipartito y K_5 es un grafo completo.	6
1.6.	Árbol.	7
1.7.	Grafo $L(10, 6)$	8
1.8.	Los grafos G y G' son isomorfos, tomando $\varphi(v_i) = w_i$, para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$	9
2.1.	X es un TG , una <i>subdivisión</i> de G . Como $X \subseteq H$, entonces G es un <i>menor topológico</i> de H . En X , los vértices rojos son los <i>vértices rama</i> , mientras que los azules son los <i>vértices subdivididos</i> de X	12
2.2.	El grafo X es un <i>modelo</i> de G en H , por lo tanto $G \preceq H$. G es una <i>contracción menor</i> de X . V_x, V_y, V_z y V_x son los conjuntos ramas de X	13
2.3.	Contracción de la arista e	15
2.4.	18
3.1.	El grafo K_4 es plano, mientras que los grafos K_5 y $K_{3,3}$ no lo son.	22
3.2.	Grafo G con caras interiores F_1, F_2, F_3 y cara exterior F_0	22
3.3.	Incrustación del grafo G en la esfera.	23
4.1.	Grafo G con árbol de descomposición $\mathcal{T}(G)$	30
4.2.	Un bramble del grafo 4×4 -rejilla.	37
4.3.	Camino de descomposición $\mathcal{C}(G)$ del grafo G de la Figura 4.1.	39
4.4.	G y G' son, respectivamente, 3-suma y 3-enlace de G_1 y G_2 , mediante la identificación de v_i con w_i	45
4.5.	La 2-suma de V_8 y K_4 , es un grafo que no tiene a K_5 como menor.	45

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo estará dirigido a establecer algunos conceptos básicos de la teoría de grafos, los cuales nos ayudarán a entender análisis futuros establecidos en este trabajo. Principalmente, este capítulo se basa en [11], pero también se hace uso de conceptos abordados en [7, 28].

1.1. Conceptos básicos en grafos

Dado un conjunto V , denotamos con $[V]^k$, el conjunto de todos los subconjuntos de k -elementos de V . La siguiente definición en otros textos corresponde a la de grafo simple.

Definición 1.1 ([11]). Un *grafo* G es un par de conjuntos (V, E) , donde V es el conjunto de vértices y $E \subseteq [V]^2$ es el conjunto de aristas del grafo.

En la Figura 1.1 se muestra una representación básica de un grafo.

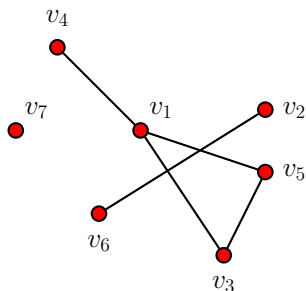


Figura 1.1: El grafo con conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ y aristas $E = \{\{v_1, v_3\}, \{v_1, v_5\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_6\}, \{v_3, v_5\}\}$.

Si existe alguna ambigüedad entre dos o más grafos, denotaremos como $V(G)$ y $E(G)$ al conjunto de vértices y aristas de G , respectivamente. Si $V(G) = \emptyset$, el grafo G es llamado *grafo vacío*.

Si G es un grafo sin aristas y con 0 ó 1 vértice, diremos que G es un *grafo trivial*. De varias formas nos podemos referir a las aristas de un grafo $G = (V, E)$, esto es, considerando $x, y \in V$, se puede denotar por $\{x, y\}$ o bien en su forma reducida xy , a la arista que contiene a los vértices x y y ; en cambio si expresamos que z es una arista de G , basta con denotar $z \in G$.

De igual manera con los vértices, si se externa que x ya es un vértice, es suficiente denotar que $x \in G$. Dos vértices $x, y \in G$ se dicen adyacentes si $xy \in E(G)$. Si A y B son subconjuntos de aristas de G , una A - B arista, es una arista entre los conjuntos de vértices A y B ; en caso de que A o B sean conjuntos unitarios se eliminarán paréntesis de ellos. El conjunto de todas las A - B aristas en un conjunto E se denota por $E(A, B)$. Un vértice x es incidente con una arista e , si $x \in e$.

Definición 1.2 ([11]). Un multigrafo es un par (V, E) de conjuntos disjuntos con una función $\mu : E \rightarrow V \cup [V]^2$ que asigna a toda arista uno o dos vértices.

A las conexiones (aristas) dadas entre los vértices se les puede asignar un sentido, es decir, si $u, v \in V$ entonces uv y vu son dos aristas distintas entre los vértices u y v . Podemos establecer lo anterior en la siguiente definición.

Definición 1.3 ([11]). Un grafo dirigido es un par (V, E) de conjuntos disjuntos, junto con dos mapeos $ini : E \rightarrow V$ y $ter : E \rightarrow V$. Esto es, a cada arista $e \in E$ se le asigna un vértice inicial y uno final.

Un grafo dirigido también se le suele llamar *digrafo*. La arista $e \in E$ se dice estar dirigida de $ini(e)$ a $ter(e)$. Dos aristas en los mismos vértices x y y son llamadas *aristas múltiples*, si tienen la misma dirección son *aristas paralelas*. Si $ini(e) = ter(e)$, la arista e es un *lazo* o *bucle*.

Definición 1.4 ([11]). Un grafo $G = (V, E)$ es un grafo simple si no tiene lazos ni aristas múltiples.

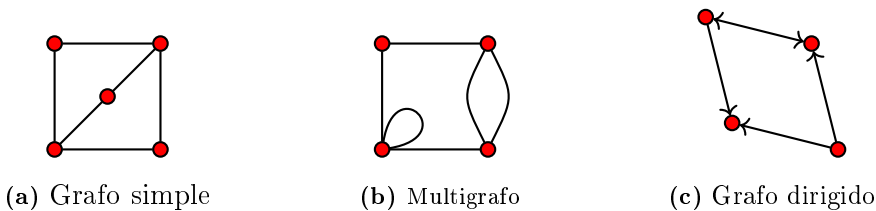


Figura 1.2: Tipos de grafos.

A partir de aquí al decir grafo, será como en la Definición 1.2, la de multigrafo. Es decir con posibles aristas múltiples y bucles. Ver (b) de Figura 1.2.

Como en muchas categorías es necesario conocer las subestructuras y las estructuras que se pueden generar a partir de cierto objeto, no es la excepción con los grafos, es por eso que se definen a continuación algunos conceptos derivados de ellos.

Definición 1.5 ([11]). Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ dos grafos, se define la igualdad de grafos como sigue, $G = G'$ si y solo si $V' = V$ y $E' = E$.

Definición 1.6 ([11]). Se dice que $G' = (V', E')$ es *subgrafo* de $G = (V, E)$ si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$ y se denota por $G' \subseteq G$.

Si $G' \subseteq G$ pero $G' \neq G$ entonces G' es *subgrafo propio* de G y se escribe $G' \subset G$.

Definición 1.7 ([11]). Sean $G = (V, E)$ un grafo, si $G' \subseteq G$ y G' contiene todas las aristas $xy \in E$, con $x, y \in V'$ entonces G' es un subgrafo inducido de G , denotado por $G[V']$.

Para denotar que un grafo G' es un subgrafo de G , pero inducido, se denota como $G' \sqsubseteq G$. Se dice que G'' es un *subgrafo abarcador* de G si $V(G'') = V(G)$; puede o no ser inducido, si lo es entonces se tiene la igualdad $G'' = G$. La Figura 1.3 muestra dos ejemplos de subgrafos de un grafo dado, uno de ellos inducido y el otro abarcador.

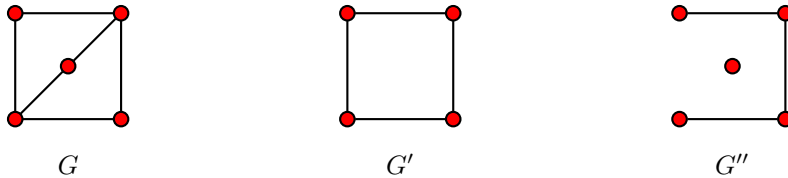


Figura 1.3: El grafo G tiene como subgrafos a G' y G'' , G' es subgrafo inducido y G'' es abarcador.

Sea $G = (V, E)$ un grafo. Si U es un subconjunto (generalmente) de V , entonces $G - U := G[V \setminus U]$, es decir, es la operación de eliminar los vértices en G de $V \cap U$ y todas sus aristas incidentes. Si $U = \{v\}$, denotamos $G - v$. Si $U = V(G')$, para algún grafo G' , entonces la notación es $G - G'$. Para subconjuntos F de $[V]^2$ escribimos $G - F := (V, E \setminus F)$ y $G + F := (V, E \cup F)$. Las operaciones $G - \{e\}$ y $G + \{e\}$ son denotadas por $G - e$ y $G + e$, respectivamente.

Definición 1.8 ([11]). Sea un vértice $x \in G$, el *grado* o *valencia* de x , denotado por $d(x)$, es el número de aristas que inciden con x . El grado mínimo de G es el número $\delta(G) := \min\{d(x) \mid x \in G\}$, mientras que $\Delta(G) := \max\{d(x) \mid x \in G\}$ es el grado máximo de G .

Ejemplo 1.9. Sea G un grafo como en la Figura 1.1. Tenemos que $\delta(G) = \min\{d(x) \mid x \in G\} = 0$, mientras que $\Delta(G) := \max\{d(x) \mid x \in G\} = 3$.

Algunos grafos tienen características comunes que nos permiten clasificarlos en tipos específicos; describiremos algunos de estos, ya que el hecho de que tengan estas características nos permite realizar un análisis más detallado enfocado a su tipo.

Definición 1.10 ([11]). Un camino P es un grafo no vacío $P = (V, E)$ en el cual $V = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ y $E = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k\}$ donde cada $x_i \neq x_j$, si $i \neq j$. Los vértices x_0 y x_k son los vértices *finales* de P , mientras que el resto serán sus vértices *interiores* .

A menudo nos referimos a un camino por la sucesión natural de sus vértices, es decir $P = x_0x_1 \cdots x_k$ y llamamos a P un camino de x_0 a x_k , también denotado por x_0Px_k . El número de aristas de un camino es su *longitud* . Un camino que inicia y termina en el mismo vértice es llamado *ciclo* , el cual denotamos por $C = (x_1, \dots, x_n)$. En la figura 1.3, G es un ciclo; y si omitimos de G'' su vértice aislado, tendríamos un camino de longitud 3.

Definición 1.11 ([11]). Un grafo no vacío G es llamado conectado si cualquier par de vértices $x, y \in G$ están unidos por un camino en G . Llamamos desconectado a un grafo que es no conectado.

Indistintamente a un grafo conectado también suele llamarse *grafo conexo* . La siguiente definición es muy útil, ya que nos ayuda a descomponer un grafo en subgrafos conexos.

Definición 1.12 ([11]). Un subgrafo C_1 de G conexo máximo es una componente de G .

Por *subgrafo conexo máximo* entenderemos, claramente un subgrafo conexo, con la propiedad de que para todo vértice u que no sea parte del subgrafo, no existe $u-v$ arista, para toda v arista del subgrafo. La Figura 1.4 divide al grafo G en sus 3 componentes.

Observación 1.13. Si C_1 es una componente de G , no existe un subgrafo conexo C_2 de G tal que C_1 es subgrafo propio de C_2 .

Definición 1.14 ([28]). Sea G un grafo, $S \subseteq V(G)$ es un *conjunto separador* de G si $G - S$ tiene más de una componente. La *conectividad* de G , escrita $\kappa(G)$, es el mínimo tamaño de un conjunto de vértices S tal que $G - S$ es desconectado o tiene un solo vértice. Un grafo G es k -conectado si su conectividad es a lo más k .

Definición 1.15 ([11]). Sea G un grafo simple. G es un *grafo completo* si cada par de vértices en G son adyacentes.

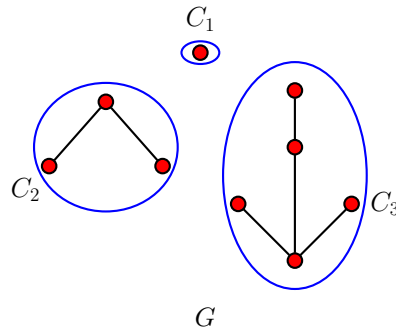


Figura 1.4: Componentes del grafo G .

Denotamos al grafo completo de n vértices por K_n , y además tiene $n(n-1)/2$ aristas. Claramente, un grafo completo es conexo.

Definición 1.16 ([11]). Sea un entero $r \geq 2$, un grafo $G = (V, E)$ es llamado r -partito si V admite una partición en r distintas clases tal que cada arista tiene sus extremos en diferentes clases.

Como condición adicional, vértices en la misma clase no son adyacentes. En los casos particulares, de 2-partito y 3-partito, les llamaremos *bipartito* y *tripartito* respectivamente.

Proposición 1.17 ([11]). Un grafo es bipartito si y solo si no contiene un ciclo de longitud impar.

Demostración. Supongamos que G es bipartito, entonces existen X y Y , tales que $V(G) = X \cup Y$, con $X \cap Y = \emptyset$, y además para cada $xy \in E(G)$, $x \in X$ y $y \in Y$, o viceversa. Supongamos que G contiene un ciclo $C_n = (x_1, \dots, x_n)$ de longitud impar. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x_1 \in X$, entonces $x_2 \in Y$, que a su vez implica que $x_3 \in X$. En general

$$x_i \in \begin{cases} X & \text{si } i \text{ es impar,} \\ Y & \text{si } i \text{ es par.} \end{cases}$$

Se sigue que $x_n \in X$, contradicción, ya que $x_1 \in X$ y G es bipartito.

Ahora, supongamos que todo ciclo en G es de longitud par. Notemos que G no tiene vértices aislados, pues tal es un ciclo de longitud 1. Supongamos que G es conexo y sea $v \in V(G)$, consideremos los conjuntos

$$X = \{x \mid vPx \text{ tiene longitud par}\} \text{ y } Y = \{y \mid vPy \text{ tiene longitud impar}\}.$$

Claramente X y Y están bien definidos, pues G es conexo y así, existe un camino entre cualquier par de vértices. No es complicado ver que $V(G) = X \cup Y$ y $X \cap Y = \emptyset$.

Sea $xy \in E(G)$, sin pérdida de generalidad supongamos que $x \in X$, y que además es tal que vPx tiene longitud n , se sigue vPy tiene longitud $n + 1$ o $n - 1$, entonces $y \in Y$. Por lo tanto G es bipartito.

Si G no es conexo, se puede hacer un análisis análogo a cada una de sus componentes, ya que no existen ciclos entre componentes distintas. \square

Definición 1.18 ([11]). Un grafo r -partito en el cual cada par vértices de diferentes clases de particiones son adyacentes es llamado r -partito completo, y se denotará por K_{n_1, \dots, n_r} .

Cada n_i es un número natural que indica el número de vértices para su respectiva clase. La Figura 1.5 muestra dos representantes de familias de grafos importantes, a saber, un grafo bipartito y un grafo completo K_6 .

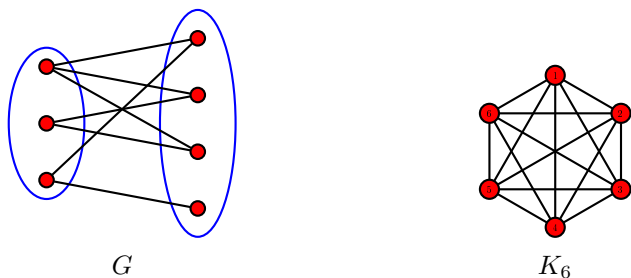


Figura 1.5: G es un grafo bipartito y K_5 es un grafo completo.

Ejemplo 1.19 (Conectividad de K_n y $K_{m,n}$). Ya que en K_n todos los vértices son adyacentes, no existen conjuntos separadores, pero siguiendo el proceso de $n - 1$ eliminaciones de vértices, se puede llegar a tener solo un vértice aislado, por lo tanto $\kappa(K_n) = n - 1$; aunado a esto, si G no es completo, siempre $\kappa(G) \leq |G| - 2$.

Por otro lado, consideremos una partición X y Y de $K_{m,n}$. Cada subgrafo inducido tiene al menos un vértice de X y Y que es conexo. Entonces cada conjunto separación de $K_{m,n}$ contiene X o Y . Como X y Y son conjuntos separación de $K_{m,n}$, se tiene que $\kappa(K_{m,n}) = \min\{m, n\}$. Así, la conectividad de $K_{4,3}$ es 3, además el grafo es 1-conectado, 2-conectado y 3-conectado, pero no 4-conectado.

1.2. Algunas familias especiales

A continuación se definirán algunas familias de grafos que cobrarán relevancia en secciones posteriores, ya sea como ejemplos clásicos o bien como concepto fundamental.

Definición 1.20 ([11]). Un grafo que no contiene ningún ciclo es llamado un bosque.

Una familia particular que resulta de fijar aquellos grafos que son conexos, son los árboles.

Definición 1.21 ([11]). Un grafo conexo que no contiene ciclos es un árbol.

En la Figura 1.6 se ilustra un árbol, observe también que en general la conectividad de un árbol es 1.

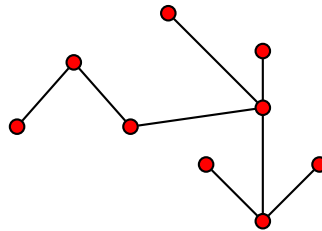


Figura 1.6: Árbol.

Más adelante los árboles jugarán un papel relevante dentro de este trabajo, es por eso que es importante poder identificarlos y caracterizarlos de distintas maneras. La siguiente proposición formaliza lo dicho.

Proposición 1.22 ([11]). Para un grafo \mathcal{T} , los siguientes enunciados son equivalentes:

- 1) \mathcal{T} es un árbol.
- 2) Cualquier par de vértices de \mathcal{T} están conectados por un único camino.
- 3) \mathcal{T} es minimamente conectado, es decir, \mathcal{T} es conexo pero $\mathcal{T} - e$ no es conexo para cada arista $e \in \mathcal{T}$.
- 4) \mathcal{T} es maximamente acíclico, es decir, \mathcal{T} no contiene ningún ciclo pero $\mathcal{T} + xy$ sí, para cualquier par de vértices no adyacentes $x, y \in \mathcal{T}$.

Demostración.

- 1) \Rightarrow 2) Es claro, pues si en \mathcal{T} existieran a lo menos dos caminos entre dos vértices, entonces existe un ciclo en \mathcal{T} , lo cual sería una contradicción.
- 2) \Rightarrow 3) Sea $xy \in E(\mathcal{T})$, luego x y y están conectados por un único camino, a saber, por la arista que los une, se concluye que $\mathcal{T} - xy$ no es conexo, pues se desconectan x y y .

- 3) \Rightarrow 4) Sean v3rtices no adyacentes $x, y \in \mathcal{T}$, ya que \mathcal{T} es conexo, existe xPy camino, luego $xPy + xy$ es un ciclo, se sigue que $\mathcal{T} + xy$ contiene al ciclo $xPy + xy$.
- 4) \Rightarrow 1) Sea \mathcal{T} un grafo sin ciclos. Consideremos dos v3rtices no adyacentes $x, y \in \mathcal{T}$, luego $\mathcal{T} + xy$ contiene un ciclo C , de hecho, la arista xy , debe ser parte de 3l. Entonces existe un camino tal que $xPy = C - xy$, por lo tanto \mathcal{T} es conexo.

□

Denotamos por $x\mathcal{T}y$ al 3nico camino dentro del 3rbol \mathcal{T} entre los v3rtices x y y . A veces conviene fijar alg3n v3rtice en el 3rbol, al cual llamaremos *ra3z* del 3rbol. Un 3rbol \mathcal{T} con un v3rtice fijo r es un *3rbol enraizado*. Diremos que $x \leq y$ si x se encuentra en el camino $r\mathcal{T}y$, lo cual define un orden parcial en $V(\mathcal{T})$, asociado a \mathcal{T} y r . Le llamaremos *el orden arb3reo* asociado a \mathcal{T} y r .

Definici3n 1.23 ([28]). Un *grafo rejilla*, es el grafo contenido en el plano derivado del producto cartesiano $P_m \times P_n$, donde P_m y P_n son caminos. Se denota por $(m \times n)$ -*rejilla* o $L(m, n)$.

En la Figura 1.7 se ilustra el grafo rejilla $L(10, 6)$.

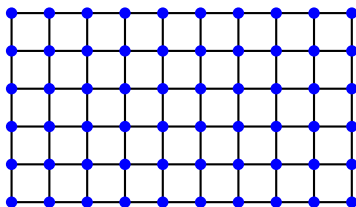
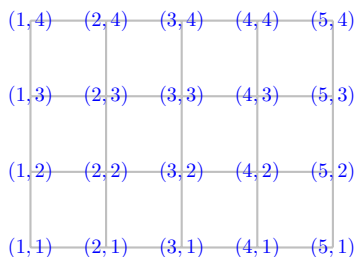


Figura 1.7: Grafo $L(10, 6)$.

Todo *grafo rejilla* es un grafo bipartito. Para notar esto, tomemos como ejemplo el grafo $L(5, 4)$; etiquetemos cada v3rtice con un elemento del plano cartesiano, de la siguiente forma:



Definimos los conjuntos $V_p = \{(x, y) \in L(5, 4) \mid x + y \text{ es par}\}$ y $V_i = \{(x, y) \in L(5, 4) \mid x + y \text{ es impar}\}$, lo cual es una partición de los vértices de $L(5, 4)$. Los vértices en V_p y V_i son adyacentes dos a dos, respectivamente, pero existen V_p - V_i aristas, así que $L(5, 4)$ es bipartito. Una demostración más general para $L(m, n)$, se procede por inducción sobre m y n .

Dados $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ grafos, una función $\varphi : V \rightarrow V'$ es un *homomorfismo* de G en G' si preserva adyacencia entre vértices. Si φ es biyectiva y su inversa φ^{-1} es también un homomorfismo, llamaremos a φ un *isomorfismo*, y diremos que G y G' son *isomorfos*; se denotará por $G \simeq G'$. Un isomorfismo de G en sí mismo es un *automorfismo*. A menos que se diga, no habrá distinción entre grafos isomorfos, así que si $G \simeq H$, lo podremos denotar por $G = H$.

En la Figura 1.8 se muestran dos grafos isomorfos, pero con distinta representación.

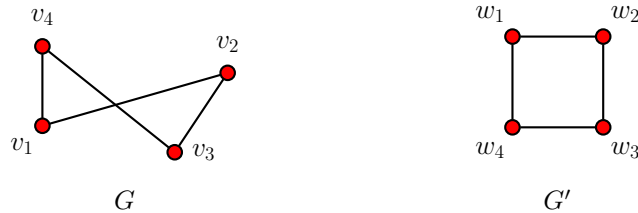


Figura 1.8: Los grafos G y G' son isomorfos, tomando $\varphi(v_i) = w_i$, para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Una clase de grafos que es cerrada bajo isomorfismos, es decir, si $G \in \mathcal{C}$ y $G \simeq H$, entonces $H \in \mathcal{C}$, es llamada *propiedad gráfica* o simplemente *propiedad*.

Ejemplo 1.24. Las siguientes clases de grafos son propiedades gráficas:

1. La clase de los grafos con a lo más n vértices.
2. La clase de los grafos que son árboles.
3. La clase de los grafos conexos.
4. La clase de todos los subgrafos.

En contraparte, “la clase de todos los subgrafos de un grafo G fijo”, no es una propiedad gráfica, bajo la estricta definición de isomorfismo; por ejemplo, en la Figura 1.8 claramente, $G \subseteq G'$ y $G \simeq G'$, pero G' no es subgrafo de G .

Definición 1.25 ([11]). Un grafo $G = (V, E)$ se denomina *arista-máxima* con una propiedad dada si G tiene la propiedad pero ningún grafo (V, F) la tiene, para $F \supsetneq E$.

Por ejemplo, los árboles son arista-máxima con la propiedad de no contener ningún ciclo. De la misma manera, el grafo que consta de dos componentes tales que ambos son completos es arista-máxima con respecto a la propiedad de ser desconectado.

Un ciclo de longitud 3 es un *triángulo*. Una arista es una *cuerda* de un ciclo si sus extremos son interiores del ciclo. Con la siguiente definición se concluye la sección.

Definición 1.26 ([11]). Un grafo G es *cordal* (también llamado *triangulado*) si cada uno de sus ciclos de longitud a lo más 4 tiene una cuerda, es decir, si no contiene ciclos inducidos más que los triángulos.

Con esto concluimos la sección, que tuvo como finalidad exponer conceptos introductorios dentro de la teoría de grafos, los cuales sostendrán los temas de los siguientes capítulos.

Capítulo 2

Menores y menores topológicos

Uno de los resultados más importante de la teoría de grafos es el *Teorema de Grafos Menores*. Para poder dar un acercamiento a lo que es dicho teorema, abordaremos algunos conceptos tempranos de la teoría de menores.

En esta sección se introducen los conceptos de: menores topológicos, menores, buen cuasi-orden, y centralmente, el caso particular del teorema de grafos menores, para árboles enraizados.

2.1. Menores topológicos y menores

Ya se habló de relaciones entre grafos, como lo son la *relación subgrafo* y la *relación grafo inducido*. Siguiendo la misma tónica se hablará de otras relaciones de suma importancia dentro de la teoría de grafos. A saber, nos referimos a la *relación menor* y la *relación menor topológico*. Para este análisis fijemos un grafo G .

Informalmente, una *subdivisión* de G es el grafo obtenido de G por “subdividir” alguna o todas sus aristas por un “dibujo” de nuevos vértices dentro de esta arista. Más formalmente, se remplazan algunas aristas de G por un camino entre los extremos de esa arista; de esa manera ninguna arista interior de este camino contiene algún vértice de G .

Definición 2.1 ([11]). Sea G un grafo, llamaremos TG a la clase de todos los grafos tales que son subdivisión de G .¹

Si $H \in TG$ diremos que H es un TG . Los vértices originales del grafo G son llamados *vértices rama* de TG , mientras que los nuevos vértices son llamados *vértices subdivididos*. Rápidamente se puede notar que los vértices subdivididos tienen grado 2, y por su parte los vértices rama conservan el mismo grado que en G .

¹La T es de topológico.

Definición 2.2 ([11]). Sean G y H grafos tales que H tiene como subgrafo un TG , entonces G es un *menor topológico* de H , denotado por $G \leq_t H$.

Para procesar mejor la definición anterior, observe la Figura 2.1, la cual ilustra los conceptos definidos.

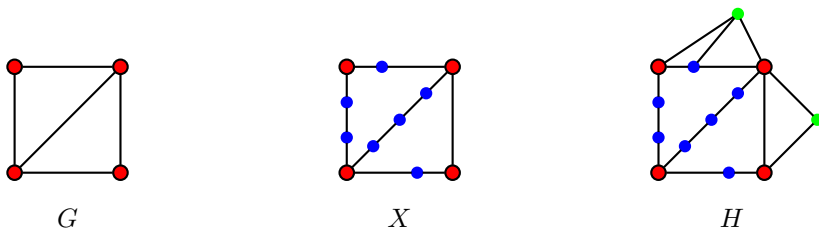


Figura 2.1: X es un TG , una *subdivisión* de G . Como $X \subseteq H$, entonces G es un *menor topológico* de H . En X , los vértices rojos son los *vértices rama*, mientras que los azules son los *vértices subdivididos* de X .

Una construcción similar, pero ahora reemplazando los vértices x de G por grafos conectados V_x , y las aristas xy de G por conjuntos no vacíos de aristas entre V_x y V_y , de tal manera, se produce un grafo, al cual llamaremos un IG , un “inflado” de G . Al igual que TG , todos los IG forman una clase.

Definición 2.3 ([11]). Sea G un grafo, decimos que un grafo H es un IG si su conjunto de vértices admite una partición $\{V_x : x \in V(G)\}$ en subconjuntos conectados V_x tal que distintos vértices $x, y \in G$ son adyacentes en G si y solo si H contiene una V_x - V_y arista.

Los conjuntos V_x son los *conjuntos ramas* de los IG . Por otro lado, diremos que G surge de H por *contracción* de los subgrafos V_x y le llamaremos una *contracción menor* de H .

Definición 2.4 ([11]). Sea H un grafo que contiene un IG como subgrafo, entonces G es un menor de H , y escribiremos $G \preceq H$; también diremos que IG es un *modelo* de G en H .² Ver Figura 2.2.

Observación 2.5. G es un menor de H si y solo si existe una función φ de un subconjunto de $V(H)$ a $V(G)$ de tal manera que la imagen inversa $\varphi^{-1}(x)$ de cada vértice $x \in G$ es conexo en H y para cada arista $xx' \in G$ existe una arista en H entre los conjuntos rama $\varphi^{-1}(x)$ y $\varphi^{-1}(x')$. Si el dominio de φ es todo $V(H)$, $xx' \in G$ con $x \neq x'$ y además H tiene una arista entre $\varphi^{-1}(x)$ y $\varphi^{-1}(x')$, es decir H es un IG , llamaremos a φ una *contracción* de H en G .

²La I es de inflado.

Ya que los conjuntos ramas pueden ser conjuntos unitarios, cada subgrafo de un grafo dado es también un menor de sí mismo.

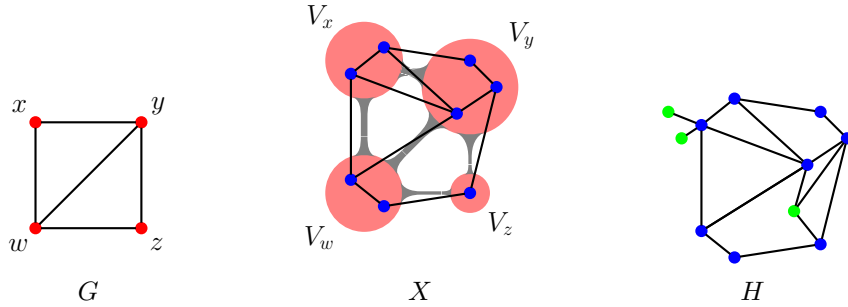


Figura 2.2: El grafo X es un *modelo* de G en H , por lo tanto $G \preceq H$. G es una *contracción menor* de X . V_x, V_y, V_z y V_x son los conjuntos ramas de X .

Observación 2.6. Si $\varphi : V(Y) \rightarrow V(X)$ es una contracción, entonces $|X| \leq |Y|$.

Demostración. Se tiene de

$$V(Y) = \bigcup_{x \in X} \varphi^{-1}(x)$$

que

$$|Y| = \left| \bigcup_{x \in X} \varphi^{-1}(x) \right| = \sum_{x \in X} |\varphi^{-1}(x)| \geq \sum_{x \in X} 1 = |X|.$$

□

Observación 2.7. Si $X \preceq Y$, entonces $|X| \leq |Y|$.

Demostración. Existen H un IX y una contracción

$$\varphi : V(H) \rightarrow V(X).$$

Se tiene de la Observación 2.6 que

$$|X| \leq |H|.$$

Además, dado que $H \subseteq Y$, $|H| \leq |Y|$. Finalmente,

$$|X| \leq |Y|.$$

□

Proposición 2.8 ([11]). Las relaciones \preceq y \leq_t son un orden parcial en la clase de grafos finitos.

Demostración. Solo mostraremos que \preceq es un orden parcial. Sea X un grafo finito. Como X es subgrafo de sí mismo, $X \in IX$ así

$$X \preceq X.$$

Para la antisimetría supongamos que X y Y son grafos finitos tales que

$$X \preceq Y \text{ y } Y \preceq X.$$

De la observación 2.7, tenemos que

$$|X| \leq |Y| \text{ y } |Y| \leq |X|,$$

de donde

$$|X| = |Y|.$$

Ya que $X \preceq Y$, existe $G \in IX$ tal que $G \subseteq Y$. Como $|X| = |Y|$ entonces $|X| = |G| = |Y|$, se sigue que $X \simeq G$, es decir, $X = G$, por lo tanto $X \subseteq Y$. Análogamente $Y \subseteq X$. Se concluye que, $X = Y$.

Para la transitividad, supongamos que

$$X \preceq Y \text{ y } Y \preceq Z.$$

Entonces existe funciones

$$\varphi : D_1 \rightarrow V(X) \text{ y } \psi : D_2 \rightarrow V(Y)$$

con la mismas propiedades de la Observación 2.5, con $D_1 \subseteq V(Y)$ y $D_2 \subseteq V(Z)$. Ya que $D_1 \subseteq V(Y)$ entonces $\psi^{-1}(D_1) \subseteq V(Z)$ y además sabemos que $\psi(\psi^{-1}(D_1)) \subseteq D_1$. Definimos λ como la función restricción de ψ al conjunto $\psi^{-1}(D_1)$. Esto es, la función

$$\lambda : \psi^{-1}(D_1) \rightarrow D_1$$

tal que $\lambda(z) = \psi(z)$, para cada $z \in \psi^{-1}(D_1)$. Luego, consideremos la función

$$\varphi \circ \lambda : \psi^{-1}(D_1) \rightarrow V(X).$$

Si $x \in V(X)$, entonces $\varphi^{-1}(x)$ es un conexo en Y , luego $\lambda^{-1}(\varphi^{-1}(x)) = \psi^{-1}(\varphi^{-1}(x))$ es conexo en Z , por cómo está definido ψ . Por lo tanto $(\lambda \circ \varphi)^{-1}$ asocia vértices de X en grafos conexos de Z . Ahora, si xx' es una arista en X , existe una $\varphi^{-1}(x)$ - $\varphi^{-1}(x')$ arista. Sea yy' la arista que conecta $\varphi^{-1}(x)$ con $\varphi^{-1}(x')$, luego, existe una $\psi^{-1}(y)$ - $\psi^{-1}(y')$ arista. Por lo tanto, existe $(\lambda \circ \varphi)^{-1}(x)$ - $(\lambda \circ \varphi)^{-1}(x')$ arista en Z . Se concluye, por la Observación 2.5, que $X \preceq Z$.

□

Si X es un IG , entonces $P = \{V_x : x \in G\}$ es una partición de $V(X)$, así pues denotaremos $G =: X/P$ para describir esta contracción menor de X . Si $U = V_x$ es un conjunto rama distinto de un conjunto unitario, escribiremos $G =: X/U$; denotaremos por v_U al vértice $x \in G$ que surge de contraer U y pensamos al resto de G como un subgrafo inducido de H . Ahora, si U contiene exactamente dos vértices formando una arista e , así $U = e$, luego diremos que $G = H/e$ surge de H por *contracción* de la arista e . Ver figura 2.3.

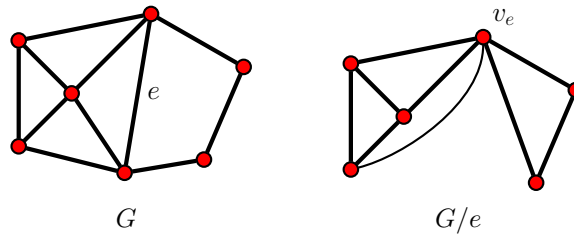


Figura 2.3: Contracción de la arista e .

Como la relación menor es transitiva, cada sucesión de conjuntos de vértices unitarios, de eliminación aristas o contracciones producen un menor. Por otro lado, cada menor de un grafo finito puede ser obtenido de la siguiente forma.

Corolario 2.9 ([11]). Sean X y Y grafos finitos. X es un menor de Y si y solo si existen grafos G_0, \dots, G_n tal que $G_0 = Y$ y $G_n = X$ y cada G_{i+1} resulta de G_i por eliminar una arista, contraer una arista o eliminar un vértice aislado.

Demostración. Supongamos que $X \preceq Y$ y hagamos inducción fuerte sobre $|Y| + ||Y||$. Si $|Y| + ||Y|| = 1$, entonces Y tiene solo un vértice y ninguna arista, así, X es el grafo trivial. Basta tomar $Y = G_0$ y $X = G_1$: si $X = \emptyset$, hay que notar que X surge de Y por eliminar su único vértice; si $X = Y$, se tiene por vacuidad que Y surge X . Supongamos que la hipótesis es verdadera para cada $m = |Y| + ||Y|| \leq n$, mostremos entonces que se cumple para $|Y| + ||Y|| = n + 1$. Dado que $X \preceq Y$, existe G , un IX , tal que $G \subseteq Y$. Ahora, supongamos que G es subgrafo propio de Y , entonces $|G| + ||G|| \leq n$, luego por hipótesis inductiva, existen $G = G_k, \dots, G_s = X$ con las propiedades descritas. Adicionalmente, como $G \subseteq Y$ se tiene que $V(G) \subseteq V(Y)$ y $E(G) \subseteq E(Y)$, entonces luego de un número finito, digamos k , eliminaciones de vértices y/o aristas de Y podemos obtener G ; así, existen G_0, \dots, G_k grafos con las características buscadas, con $G_0 = Y$ y $G_k = X$. Finalmente, existen $Y = G_0, \dots, G_s = X$, grafos tales que cada G_{i+1} surge de G_i por eliminación de arista o vértice, o contracción de arista.

Ahora, supongamos que existen grafos G_0, \dots, G_n tal que $G_0 = Y$, $G_n = X$ y cada G_{i+1} resulta de G_i por eliminar una arista, contraer una arista o eliminar

un vértice aislado. Notemos que para cada i , $G_{i+1} \preceq G_i$, entonces como la relación menor es transitiva, se sigue que $X \preceq Y$. \square

Proposición 2.10. Sea H y G grafos, donde $V(H) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Entonces $H \preceq G$ si y solo si existen distintos subconjuntos de $V(G)$, no vacíos, digamos V_1, \dots, V_h tales que $G[V_i]$ es conexo para cada i y $|E(V_i, V_j)| > 0$, siempre que $v_i v_j \in E(H)$.

El siguiente resultado establece una relación entre menor y menor topológico.

Proposición 2.11 ([11]). Sea G un grafo, entonces todo TG es también un IG . Se sigue que cada menor topológico de un grafo es también un menor (ordinario).

Demostración. Supongamos que $G \leq_t H$. Entonces existe G' , un TG , tal que $G' \subseteq H$. Definiremos la función $\varphi : V(G') \rightarrow V(G)$ por partes. Si g es un vértice rama de G' , entonces simplemente definimos $\varphi(g) = g$. Sea X el conjunto de todos los caminos en G' cuyos extremos son vértices rama, pero ningún otro vértice rama es vértice interior. Para g_1 y g_2 vértices rama de G' , definimos $I_{g_1 g_2}$ el conjunto de todos los puntos interiores de $g_1 P g_2 \in X$. Definimos $\varphi(I_{g_1 g_2}) = \{g_1\}$, o bien, $\varphi(I_{g_1 g_2}) = \{g_2\}$.

Si $g \in V(G)$ entonces $\varphi^{-1}(g) = g P g_2 - g$, $\varphi^{-1}(g) = g P g_2 - g_2$ o $\varphi^{-1}(g) = g$, entonces $\varphi^{-1}(g)$ es un camino o un vértice aislado, cualquiera sea el caso, es conexo.

Si $g_1 g_2 \in G$ es una arista, entonces existe $g_1 P g_2 \in X$ o es también una $g_1 g_2$ arista en G' , por lo tanto existe una arista entre $\varphi^{-1}(g_1)$ y $\varphi^{-1}(g_2)$. Dada la definición de φ y que $V(G') \subseteq V(H)$, se concluye por la Observación 2.5 que $G \preceq H$. \square

Ya que hemos definido algunas relaciones entre grafos, daremos un acercamiento a lo que significa incrustar un grafo en otro. Vagamente, una incrustación de G en H es una función inyectiva $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$ que conserva el tipo de estructura del que estemos interesados. Por ejemplo: φ incrusta a G en H como “subgrafo” si éste preserva la adyacencia de vértices; lo incrusta como un “subgrafo inducido” si se preserva la adyacencia y la no adyacencia.

Si ahora definimos φ en $E(G)$ de tal manera que manda la arista $xy \in G$ en caminos independientes en H entre $\varphi(x)$ y $\varphi(y)$, de esta forma G se incrusta en H como “menor topológico”. De manera similar, una incrustación φ de G en H como “menor”, podría ser una función inyectiva de $V(G)$ a conjuntos disjuntos conexos de vértices en H , así que H tiene una arista entre los conjuntos $\varphi(x)$ y $\varphi(y)$, para xy arista de G .

Ejemplo 2.12. En la Figura 2.1, G se puede incrustar en H como menor topológico, a su vez G en X lo puede hacer como subgrafo. Por otro lado, la Figura 2.2 es un ejemplo de la incrustación de G en X como menor, tomando $\varphi(x) = V_x$, $\varphi(y) = V_y$, $\varphi(z) = V_z$ y $\varphi(w) = V_w$, pero nótese que análogamente G se puede incrustar en H como menor. Naturalmente, X puede ser incrustado en H como subgrafo inducido.

Más adelante se abordarán incrustaciones sobre superficies.

2.2. Buen cuasi-orden

Una relación reflexiva y transitiva, definidas sobre un conjunto, es un *cuasi-orden*.

Definición 2.13 ([11]). Dado un orden sobre X , una sucesión en X es una *anticadena* de (X, \leq) si sus elementos no son comparables entre sí con respecto a \leq .

Definición 2.14 ([11]). Un cuasi-orden \leq sobre X es un buen cuasi-orden si para toda sucesión infinita x_0, x_1, \dots en X existen índices $i < j$ tales que $x_i \leq x_j$. En tal caso decimos que X es bien cuasi-ordenado por \leq , y (x_i, x_j) es un buen par de la sucesión.

Una sucesión que contiene un buen par es una *buena sucesión*, de lo contrario es una *mala sucesión*. Entonces, un cuasi-orden en X es llamado un buen cuasi-orden si y solo si cada sucesión infinita en X es una buena sucesión. De forma equivalente, un buen cuasi-orden en X es un buen cuasi-orden si toda anticadena es finita.

Ejemplo 2.15. Consideremos el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y definamos la relación \leq_p como $(a_1, b_1) \leq_p (a_2, b_2)$ si y solo si $a_1 \leq a_2$ y $b_1 \leq b_2$. No es difícil notar que la relación es reflexiva, y además por la transitividad usual en los números naturales, tenemos la transitividad de la relación \leq_p , por lo cual \leq_p es un cuasi-orden en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Supongamos existe A , una anticadena infinita en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Si $(a, b) \in A$, ningún otro elemento de ella se encuentran en el cuadrante que tiene como vértices a (a, b) y $(0, 0)$. Sean $A_1 = \{(x, y) : x < a \text{ y } y > b\}$ y $A_2 = \{(x, y) : x > a \text{ y } y < b\}$.

Luego $A_1 \cap A$ ó $A_2 \cap A$ es infinito. Sin pérdida de generalidad supongamos que $A_2 \cap A$ es infinito. Se sigue que $A'_1 = \{(x, y) : x > a \text{ y } y < b - 1\}$ contiene infinitos elemento de A , siguiendo un proceso recursivo, se tiene que $A'_{b-1} = \{(x, y) : x > a \text{ y } y < 1\}$ tiene infinitos elementos de A , pero los elementos de A'_{b-1} son de la forma $(x, 0)$, por lo tanto son comparables, contradicción. Por lo tanto \leq_p es un buen cuasi-orden en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Ver Figura 2.4.

Sea \leq un cuasi-orden en un conjunto X . Consideremos $A, B \subseteq X$, escribiremos $A \leq B$ si existe una función inyectiva $f : A \rightarrow B$ tal que $a \leq f(a)$ para todo $a \in A$. Así, podemos extender \leq a un cuasi-orden en $[X]^{<\omega}$, el conjunto de todos los subconjuntos finitos de X .

Lema 2.16 ([11]). Si X está bien cuasi-ordenado por \leq entonces $[X]^{<\omega}$ también lo está.

Demostración. Supongamos que X es bien cuasi-ordenado por \leq , pero $[X]^{<\omega}$ no lo es. Sea $n \in \mathbb{N}$, supongamos inductivamente que A_i ha sido definido para cada $i < n$,

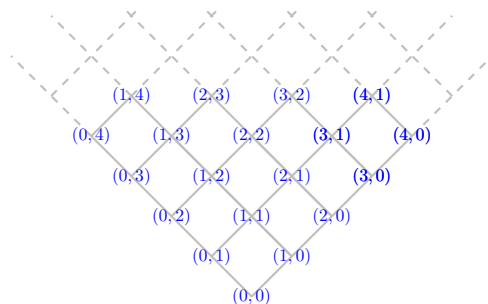


Figura 2.4

y que existe una mala sucesión en $[X]^{<\omega}$, con primeros términos A_0, \dots, A_{n-1} . Sea $A_n \in [X]^{<\omega}$ de tal manera que alguna mala sucesión en $[X]^{<\omega}$ tiene por primeros términos a A_0, \dots, A_n y $|A_n|$ es tan pequeño como sea posible. Por la construcción hecha, $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una mala sucesión en $[X]^{<\omega}$. En particular, $A_n \neq \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada n tomemos $a_n \in A_n$ y definamos $B_n := A_n \setminus \{a_n\}$. La sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión decreciente, digamos $\{a_{n_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$. Por la mínima elección de A_{n_0} , la sucesión

$$A_0, \dots, A_{n_0}, B_{n_0}, B_{n_1}, B_{n_2}, \dots$$

es buena, es decir contiene un buen par. Ya que $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es mala, el par no puede tener la forma (A_i, A_j) o (A_i, B_j) , con $B_j \leq A_j$; entonces debe tener la forma (B_i, B_j) . Extendiendo la función inyectiva $B_i \rightarrow B_j$, dada por $a_i \rightarrow a_j$, se deduce otra vez que (A_i, A_j) es un buen par, lo cual es una contradicción. \square

2.3. Teorema de grafo menor para árboles

Antes de abarcar el caso general del teorema de grafos menores, primero se enunciará el caso particular para árboles.

Definición 2.17 ([11]). Sean T y T' árboles enraizados en r y r' , respectivamente. Diremos que $T \leq T'$ si existe un isomorfismo φ , de alguna subdivisión de T a un subgrafo T'' de T' , el cual preserva el orden del grafo en $V(T)$ asociado con T y r . Esto es si $x < y$ en T entonces $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ en T' .

Con lo anterior no es difícil darse cuenta que se puede definir un *cuasi-orden* sobre la clase de los árboles enraizados.

Teorema 2.18 (Kruskal, 1960, [11]). Los árboles finitos son *bien cuasi-ordenados* por la relación menor topológico.

Demostración. Basta mostrar que los árboles enraizados son bien cuasi-ordenados por la relación \leq de la Definición 2.17. Supongamos que no son bien cuasi-ordenados.

Sea $n \in \mathbb{N}$, supongamos que existe una mala sucesión T_0, \dots, T_{n-1} de árboles enraizados tales que alguna mala sucesión de árboles enraizados comienza con esta sucesión. Escojamos T_n como el árbol enraizado de menor orden tal que alguna mala sucesión tiene por primero términos a T_0, \dots, T_n . Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos la raíz de T_n por r_n .

Claramente, $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una mala sucesión. Para cada n , sea A_n el conjunto de las componentes resultantes de $T_n - r_n$, convertido en árboles enraizados por elección de los vecinos de r_n como sus raíces. Note que el orden del árbol de estos árboles son introducidos por T_n . Se probará que el conjunto $A := \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ de todos estos árboles es bien cuasi-ordenado.

Sea $\{T^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de árboles en A . Para cada $k \in \mathbb{N}$ escojamos un $n = n(k)$ tal que $T^k \in A_n$. Tomemos k de tal manera que $n(k)$ es el más pequeño. Entonces

$$T_0, \dots, T_{n(k)-1}, T^k, T^{k+1}, \dots$$

es una buena sucesión, por la mínima elección de $T^{n(k)}$ y $T^k \subsetneq T_{n(k)}$. Sea (T, T') un buen par de la sucesión. Como $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es mala, T no puede estar entre los primeros miembros de $T_0, \dots, T_{n(k)-1}$ de la sucesión, entonces T' debería ser algún T^i con $i \geq k$, es decir,

$$T \leq T' = T^i \leq T_{n(i)}.$$

Como $n(k) \leq n(i)$ por la elección de k , lo cual debería hacer a $(T, T_{n(i)})$ un buen par en la mala sucesión $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Así también (T, T') es un buen par en $\{T^k\}_{k \in \mathbb{N}}$, terminado la demostración de que A es bien cuasi-ordenado.

Por el lema 2.16, la sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $[A]^{<\omega}$ tiene un buen par (A_i, A_j) . Sea $f : A_i \rightarrow A_j$ una función inyectiva con $T \leq f(T)$ para todo $T \in A_i$. Ahora, extendiendo la unión de las incrustaciones $T \rightarrow f(T)$ para todo $T \in A_i$ a una función φ de $V(T_i)$ a $V(T_j)$ dada por $\varphi(r_i) := r_j$.

Esta función φ preserva el orden del árbol de T_i , y a su vez define una incrustación para mostrar que $T_i \leq T_j$, ya que las aristas $r_i r \in T_i$ bajo φ es $r_j T_j \varphi(r)$. Entonces (T_i, T_j) es un buen par en nuestra mala sucesión original de árboles enraizados, lo cual es una contradicción. \square

El teorema anterior es un caso particular de la *Conjetura de Wagner* aplicada únicamente a los árboles enraizados. Existen muchas otras generalizaciones de este resultado, como lo son para, infinitos árboles, árboles incrustados en el plano, et-cétera. Y claro, su caso general, en el que estamos enfocandos, *Teorema de Grafos Menores*.

Capítulo 3

Teorema de Kuratowski

En este capítulo se analizan los teoremas de menores prohibidos: resultados en esencia de los teoremas de Kuratowski y de Wagner, que describen la estructura de los grafos que no contienen un subgrafo o grafos específicos como menores.

El Teorema de Kuratowski caracteriza a la familia de los grafos planos, a través de dos grafos, el grafo completo K_5 y el grafo bipartito completo $K_{3,3}$, y por ende nos dice cuándo un grafo G puede ser incrustado en la esfera. Naturalmente podemos preguntarnos si existe resultados similares para cualquier superficie S , de ser así, ¿la lista de los grafos que caracterizan a ciertas familias son finitas? Se tratará de dar respuesta a estas interrogantes en este capítulo.

3.1. Grafos planos e incrustaciones

Las aristas de un grafo G pueden ser vistas como curvas con extremos en los vértices de G , formalmente se tienen las siguientes definiciones.

Definición 3.1 ([32]). Una *curva* es la imagen de una función continua de $[0, 1]$ a \mathbb{R}^2 . Diremos que una curva es (u, v) -*curva* cuando esta comienza en u y finaliza en v .

Definición 3.2 ([32]). Un *dibujo* o *representación* de un grafo G es una función f definida en $V(G) \cup E(G)$ tal que asigna a cada vértice $v \in G$ un punto $f(v)$ en el plano y asigna a cada arista con extremos u y v una (u, v) -*curva*. Las imágenes de vértices son distintas. Un punto en $f(e) \cap f(e')$ que no es un extremo, es un *cruce* o *intersección*.

Definición 3.3. Un grafo es *plano* si tiene un representación sin cruces o intersecciones de aristas. Si eso pasa, diremos que tal representación es una *incrustación plana* de G .

La Figura 3.1 muestra un grafo plano y dos que no lo son, aunque estos jugarán un papel clave en la caracterización de todos los grafos planos. Si un grafo G es plano, todos sus menores son también grafos planos, pero en general, si todos sus menores son planos, no implica que G sea plano, como se verá en la Sección 3.3.

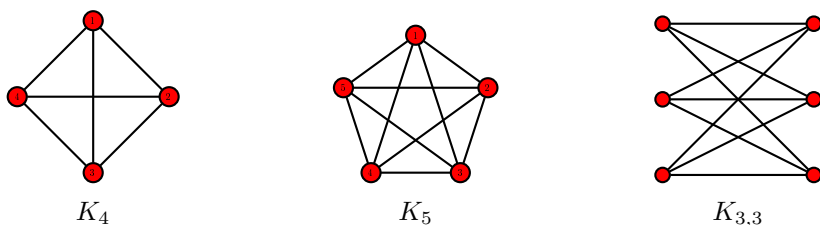


Figura 3.1: El grafo K_4 es plano, mientras que los grafos K_5 y $K_{3,3}$ no lo son.

Ejemplo 3.4. La Figura 1.8 muestra dos representaciones del mismo grafo, una sin cruces y otra con ellos.

Nótese que un grafo plano acepta una representación sin cruces, pero eso no excluye que pueda representarse con cruces de aristas. Por otro lado, una incrustación plana exige que el grafo sea plano.

Decimos que $U \subseteq \mathbb{R}^2$ es un *conjunto abierto* en el plano si es tal que, para cualquier $p \in U$, existe un $r \in \mathbb{R}$ tal que la bola $B_r(p) \subseteq U$.

Definición 3.5 ([32]). Una *región* es un conjunto abierto U que contiene una (u, v) -curva para cualquier par $u, v \in U$. Las *caras* de un grafo plano son regiones máximas del plano que no contienen ningún punto usado en la incrustación.

Definición 3.6 ([32]). Una cara de una representación gráfica diremos que es una *cara interior* si es acotada. La única cara no acotada, es una *cara exterior*.

En la Figura 3.2 se muestra un ejemplo de un grafo con sus caras respectivas.

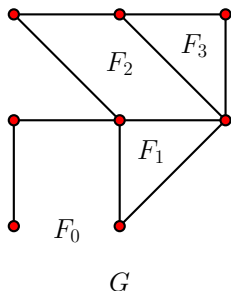


Figura 3.2: Grafo G con caras interiores F_1, F_2, F_3 y cara exterior F_0 .

En general, una *superficie* S es un espacio topológico de Hausdorff que es compacto y conexo.

Definición 3.7 ([32]). Una *incrustación* $G \hookrightarrow S$ de un grafo G en una superficie S es una función σ que asigna los vértices de G a distintos puntos en S y las arista uv a (u, v) -curvas en S , de modo que ningún punto interno de dicha curva es la imagen de algún vértice, ni existen intersecciones entre curvas.

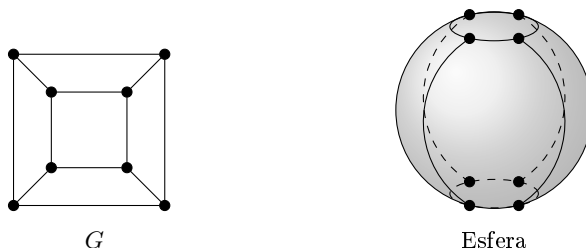


Figura 3.3: Incrustación del grafo G en la esfera.

La Figura 3.3 es un ejemplo de un grafo incrustado en una superficie, en este caso, un esfera. Para finalizar, veamos qué pasa con los menores de un grafo G que puede ser incrustado en un superficie S .

Teorema 3.8. ([24]) Si G puede ser incrustado en un superficie S , y G contiene a H como menor, entonces H puede ser incrustado en S .

El teorema anterior nos dice que, la propiedad de ser incrustado en una superficie es menor-cerrada, lo cual es intuitivo, al ver la caracterización de menor dada en el Corolario 2.9. Este resultado fue probado por Robertson y Seymour en [24].

3.2. El teorema de Kuratowski y grafos prohibidos

Recordemos que un grafo se dice plano si puede ser dibujado en el plano sin que se intersecten sus aristas. Los Teoremas de Kuratowski y Wagner establecen una caracterización (equivalentes entre ellas) para los grafos planos, a través de subdivisiones y menores, de K_5 y $K_{3,3}$.

Proposición 3.9. Sean G y H grafos, donde $V(H) = \{v_1, \dots, v_h\}$. Sean distintos subconjuntos de $V(G)$, no vacíos, digamos V_1, \dots, V_h tales que $G[V_i]$ es conexo para cada i y $|E(V_i, V_j)| > 0$, siempre que $v_i v_j \in E(H)$. Adicionalmente supongamos que ningún subgrafo propio de G contiene a H como subgrafo. Entonces:

1. Cada $G[V_i]$ es conexo mínimo, es decir, un árbol.

2. Si $v_i v_j \in E(H)$, se tiene que $|E(V_i, V_j)| = 1$.
3. Si $v_i v_j \notin E(H)$ entonces $|E(V_i, V_j)| = 0$.
4. Para cada hoja del árbol $G[V_i]$ con orden mayor que 1, existe $j \neq i$ tal que $|E(\{w\}, V_j)| > 0$.
5. $G[V_i]$ tiene a los más $d(v_i)$ hojas.
6. V_1, \dots, V_h cubre $V(G)$.

Demostración. Mostremos 1, 2 y 3.

1. Supongamos lo contrario. Entonces existe $G[V_i]$ tal que no es conexo mínimo, luego, si eliminamos una arista de $G[V_i]$ se obtiene un subgrafo propio G_1 de G , tal que $G_1[V_i]$ es todavía conexo. Haciendo la misma elección de: V_1, \dots, V_h , se tiene que G_1 es un subgrafo propio de G que tiene como menor a H , contradicción.
2. De nuevo por contradicción. Supongamos que $|E(V_i, V_j)| > 1$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $|E(V_i, V_j)| = 2$, es decir existen dos V_i - V_j aristas. Si se elimina una de esas aristas, obtenemos $G_2 \subset G$ tal que $G[V_i] = G_2[V_i]$, para cada i . Consideremos los mismos V_1, \dots, V_h , notemos que como solo se eliminó una de las dos aristas, existe una V_i - V_j aristas, siempre que $v_i v_j \in E(H)$, luego por Proposición 2.10, $H \preceq G_2$, contradicción.
3. Sea $v_i v_j \notin E(H)$, y supongamos que $|E(V_i, V_j)| > 0$, entonces existe e una V_i - V_j arista. Se procede análogamente a 1 y 2, eliminando e , para obtener el resultado.

□

Las pruebas detalladas de los siguientes resultados puedes ser consultadas en ...

Proposición 3.10 ([11]). Supongamos que $H \preceq G$ y $\Delta(H) \leq 3$. Entonces G contiene una subdivisión de H .

Demostración. Hagamos inducción sobre $n = |G| + ||G||$. Si $n = 1$, entonces $|G| = 1$ si y solo si $H \preceq G$, si y solo si $H \leq_t G$, si y solo si $H = G$. Sea $n = |G| + ||G|| > 1$, y supongamos que el resultado es cierto para $1 < m < n$. Notemos que si G' es subgrafo propio de G entonces $|G'| + ||G'|| \leq m$, entonces se satisface la condición. De tal modo que es suficiente mostrar que: Si G es tal que $H \preceq G$, pero ninguno de sus subgrafos propios tiene como menor a H , donde $\Delta(H) \leq 3$, entonces $H \leq_t G$. La última afirmación se sigue gracias a la Proposición 3.9.

□

Lema 3.11. Si K_5 es un menor de G , entonces G contiene una subdivisión de $K_{3,3}$ o K_5 .

Ahora enunciaremos el Teorema de Kuratowski, que en su momento, fue un hito dentro de la teoría de grafos. Este resultado, caracteriza a toda una familia mediante solo dos grafos, K_5 y $K_{3,3}$, a través del concepto de menor topológico.

Teorema 3.12 (Teorema de Kuratowski, [15, 30]). Un grafo G es plano si y solo si G no contiene ninguna subdivisión de K_5 ni de $K_{3,3}$.

El Teorema de Wagner es análogo al Teorema de Kuratowski en la versión de menor.

Teorema 3.13 (Teorema de Wagner, [29]). Un grafo G es plano si y solo si G no tiene a K_5 ni a $K_{3,3}$ como menor.

Los Teoremas 3.12 y 3.13 son de hecho equivalentes [29] y caracterizan a los grafos planos. Más adelante veremos el rol que juegan ciertos grafos, en este caso K_5 y $K_{3,3}$, para específicas propiedades gráficas.

3.3. Menores prohibidos

En el Teorema de Kuratowski (3.12) se establece que la familia de los grafos planos se puede caracterizar mediante los grafos K_5 y $K_{3,3}$. En esta sección veremos que esos grafos son *obstrucciones o menores prohibidos* dentro de la familia de los grafos planos.

Es muy importante, tener en cuenta la siguiente cadena de implicaciones:

Observación 3.14. Sean H y G grafos, se cumplen las siguientes implicaciones:

$$H \sqsubseteq G \Rightarrow H \subseteq G \Rightarrow H \leq_t G \Rightarrow H \preceq G.$$

Definición 3.15 ([11]). Sea \leq un orden parcial. Decimos que una clase de grafos \mathcal{C} es \leq -cerrada, si para cada H y G grafos, tales que $H \leq G$ y $G \in \mathcal{C}$, entonces $H \in \mathcal{C}$.

Las relaciones de: subgrafo inducido, subgrafo, menor topológico y menor, son \sqsubseteq -cerrada, \subseteq -cerrada, \leq_t -cerrada y \preceq -cerrada, respectivamente. En la práctica para referirnos a una clase \mathcal{C} \preceq -cerrada, se suele enunciar como *menor-cerrada*, o bien, que es *cerrada bajo la toma de menores*. El Teorema 3.8 nos dice que la propiedad gráfica de “ser incrustado en una superficie”, es menor-cerrada.

Ejemplo 3.16.

1. La clase de todos los **grafos planos** es \preceq -cerrada (y por ende: \leq_t -cerrada, \subseteq -cerrada, \leq_t -cerrada).

2. La clase de todos los **grafos bipartitos** es \subseteq -cerrada, pero no \leq_t -cerrada.
3. La clase de todos los grafos tales que sus componentes son cliques es \leq_t -cerrada, pero no \subseteq -cerrada.

Definición 3.17 ([11]). Sea \mathcal{C} un conjunto o una clase de grafos y \leq un orden parcial en \mathcal{C} . Se define

$$Forb_{\leq}(\mathcal{C}) := \{G \mid H \not\leq G, \text{ para todo } H \in \mathcal{C}\},$$

que denota la clase de todos los grafos que no “contienen” ningún elemento de \mathcal{C} , en el sentido de \leq .

Llamaremos a los grafos $G \in \mathcal{C}$ los *prohibidos* ó *excluidos* de $Forb_{\leq}(\mathcal{C})$, sin perder de vista la relación \leq sobre la que se actúa. Ya hemos tratado varios órdenes parciales, por lo que se aborda la definición con algunos ejemplos.

Ejemplo 3.18. Denotemos a las clases de los grafos planos, grafos bipartitos y grafos conexos cuyas componentes son cliques, por \mathcal{PL} , \mathcal{B} y \mathcal{C} , respectivamente. Entonces:

1. $Forb_{\leq_t}(\{K_5, K_{3,3}\}) = \mathcal{PL}$.
2. $Forb_{\subseteq}(\{C_3, C_5, C_7, \dots\}) = \mathcal{B}$, donde C_i indica el camino de longitud i .
3. $Forb_{\sqsubseteq}(\{K_{1,2}\}) = \mathcal{C}$.

Destaca, principalmente para el objetivo del trabajo, el inciso 1. del Ejemplo 3.18, pues como se ha mencionado, se caracterizan los grafos planos.

Definición 3.19 ([12]). Sea \leq un orden parcial. Un grafo F es una \leq -obstrucción para una clase de grafos \mathcal{C} , si $F \notin \mathcal{C}$, pero $F' \in \mathcal{C}$, para cada $F' \leq F$.

Denotaremos por $Obts_{\leq}(\mathcal{C})$ al conjunto de todas las obstrucciones de \mathcal{C} bajo \leq .

Ejemplo 3.20.

1. K_5 es \leq_t -obstrucción para los grafos planos, ya que K_5 no es plano, pero todo menor topológico propio es plano.
2. K_6 no es \leq_t -obstrucción para los grafos planos, pues $K_5 \preceq K_6$, y K_5 no es plano.

Como sucedió con los menores prohibidos, las obstrucciones también pueden caracterizar una clase y, se puede establecer una relación entre ellas. A continuación estableceremos la relación que se guardada entre los menores prohibidos y las obstrucciones.

Lema 3.21 ([12]). Sea \mathcal{C} una clase de grafos, y sea \leq un orden parcial. Las siguientes enunciados son equivalentes:

- a) \mathcal{C} es \leq -cerrada,
- b) $\mathcal{C} = \text{Forb}_{\leq}(\mathcal{D})$, para alguna clase de grafos \mathcal{D} .
- c) $\mathcal{C} = \text{Forb}_{\leq}(\text{Obst}_{\leq}(\mathcal{C}))$.

Demostración.

a) \Rightarrow c) Supongamos que $G \in \mathcal{C}$ y $G \notin \text{Forb}_{\leq}(\text{Obst}_{\leq}(\mathcal{C}))$. Dado que $G \notin \text{Forb}_{\leq}(\text{Obst}_{\leq}(\mathcal{C}))$, existe $H \in \text{Obst}_{\leq}(\mathcal{C})$ tal que $H \leq G$. Luego $H \notin \mathcal{C}$, contradicción, pues $G \in \mathcal{C}$ y \mathcal{C} es \leq -cerrado. Por lo tanto, $\mathcal{C} \subseteq \text{Forb}_{\leq}(\text{Obst}_{\leq}(\mathcal{C}))$.

Supongamos que $G \notin \text{Forb}_{\leq}(\text{Obst}_{\leq}(\mathcal{C}))$, entonces existe $H \in \text{Obst}_{\leq}(\mathcal{C})$ tal que $H \leq G$, por lo cual $H \notin \mathcal{C}$. Si $G \in \mathcal{C}$, entonces dado que \mathcal{C} es \leq -cerrada, $H \in \mathcal{C}$, una contradicción, así que $G \notin \mathcal{C}$. Por lo tanto $\text{Forb}_{\leq}(\text{Obst}_{\leq}(\mathcal{C})) \subseteq \mathcal{C}$.

c) \Rightarrow b) Es claro.

b) \Rightarrow a) Sea $G \in \mathcal{C}$. Ya que $\mathcal{C} = \text{Forb}_{\leq}(\mathcal{C})$, se tiene que $H \not\leq G$, para cada $H \in \mathcal{C}$. En consecuencia, si $H' \leq G$, entonces también $H \not\leq H'$, para cada $H \in \mathcal{C}$. Entonces, $H' \in \text{Forb}_{\leq}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$. Como esto se satisface para cada $G \in \mathcal{C}$ y cada $H' \leq G$, entonces \mathcal{C} es \leq -cerrada.

□

En esta sección hemos hablado en general de ordenes parciales, pero a partir de ahora centraremos principalmente nuestra atención en la relación menor \preceq . Por la Proposición 2.8, esta relación induce un orden parcial, aún más, para una clase \mathcal{C} , la clase $\text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{C})$ es *menor cerrada*.

Proposición 3.22 ([11]). Dada una clase de grafos \mathcal{C} , la clase $\text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{C})$ es menor cerrada.

Demostración. Sea $G \in \text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{C})$, entonces $H \not\preceq G$ para cada $H \in \mathcal{C}$. Sea $G_1 \preceq G$, ya que \preceq es transitiva, se tiene que cada menor de G_1 es también menor de G , luego $H_1 \not\preceq G_1$ para cada $H_1 \in \mathcal{C}$. Por lo tanto $G_1 \in \text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{C})$. □

En este sentido la Proposición 3.21 nos dice que cada propiedad menor cerrada puede ser caracterizada en términos de menores prohibidos.

Corolario 3.23. Una propiedad \mathcal{C} puede ser expresada mediante menores prohibidos si y solo si es menor cerrada.

Demostración.

\Rightarrow] Ver $b) \Rightarrow a)$ en Proposición 3.21.

\Leftarrow] Afirmamos que $\mathcal{C} = \text{Forb}_{\preceq}(\overline{\mathcal{C}})$, donde $\overline{\mathcal{C}}$ es el complemento de \mathcal{C} . Supongamos que $G \in \mathcal{C}$ pero $G \notin \text{Forb}_{\preceq}(\overline{\mathcal{C}})$, entonces existe $H \preceq G$ tal que $H \in \overline{\mathcal{C}}$, contradicción, pues \mathcal{C} es \preceq -cerrada, y todos sus menores están en \mathcal{C} . Así, $\mathcal{C} \subseteq \text{Forb}_{\preceq}(\overline{\mathcal{C}})$.

Supongamos que $G \in \text{Forb}_{\preceq}(\overline{\mathcal{C}})$, entonces $H \not\preceq G$, para todo $H \in \overline{\mathcal{C}}$. En consecuencia, $H \in \mathcal{C}$ para todo $H \preceq G$. Dado que G es menor de sí mismo, se tiene que $G \in \mathcal{C}$. Por lo tanto $\text{Forb}_{\preceq}(\overline{\mathcal{C}}) \subseteq \mathcal{C}$.

□

El Corolario 3.23 es una gran herramienta, pues es una forma de caracterizar propiedades gráficas, o bien familias completas, a través de sus menores prohibidos.

Dentro del terreno computacional, podemos encontrar algoritmos de tiempo $O(n^3)$, que deciden si un grafo es menor de otro y si un grafo pertenece a una clase menor-cerrada. Ver [14, 3].

Teorema 3.24 ([21]). Si \mathcal{C} es una clase de grafos menor-cerrada, entonces existe un algoritmo que decide si un grafo está en \mathcal{C} en tiempo $O(n^3)$.

Teorema 3.25 ([24]). Para cualquier grafo fijo G , existe un algoritmo de tiempo $O(n^3)$ que decide si un grafo de orden n tiene a H como menor.

Capítulo 4

Descomposición arbórea

Dentro de la serie de trabajos de Robertson y Seymour se introdujeron numerosos conceptos, entre los cuales destacan la *descomposición arbórea* y *ancho arbóreo*. Los cuales han tenido injerencia en aplicaciones algorítmicas, principalmente cuando nos restringimos a grafos con ancho arbóreo acotado [3].

Este capítulo se iniciará estudiando la descomposición arbórea y principalmente el ancho arbóreo y su relación con otras métricas. Finalmente, se profundizará un poco más en la teoría de grafos menores, para llegar al teorema que lleva el mismo nombre y la implicación que tuvo el ancho arbóreo dentro del teorema.

Definición 4.1 ([9]). Un árbol de descomposición de un grafo G es un par $(\mathcal{T}, \mathcal{X})$ formado por árbol \mathcal{T} junto con una colección $\mathcal{X} = \{X_t\}_{t \in V(\mathcal{T})} \subseteq \mathcal{P}(V(G))$, tales que cumplen:

- (1) $\bigcup_{t \in \mathcal{T}} X_t = V(G)$,
- (2) Para cada $xx' \in E(G)$, existe $t \in V(\mathcal{T})$ tal que $x, x' \in X_t$,
- (3) Si $t_3 \in t_1Pt_2$, y P es un camino en \mathcal{T} entonces $X_{t_1} \cap X_{t_2} \subseteq X_{t_3}$.

Las condiciones (1) y (2) juntas, de la definición anterior, nos dicen que G es unión de los subgrafos $G[X_t]$, esto es:

$$G = \bigcup_{t \in \mathcal{T}} G[X_t].$$

Llamaremos a $G[X_t]$ las *partes* de $(\mathcal{T}, \mathcal{X})$ y en ocasiones si solo hablamos de X_t nos referiremos a ellas como las *bolsas* del árbol de descomposición. Así, se dirá que $(\mathcal{T}, \mathcal{X})$ es un árbol de descomposición de G sobre sus partes. La condición (3), a la cual llamaremos la *propiedad de interpolación*, implica que las partes de $(\mathcal{T}, \mathcal{X})$ están

organizadas como un árbol. Abusando un poco de la notación, nos podemos referir al árbol de descomposición $(\mathcal{T}, \mathcal{X})$ simplemente por \mathcal{T} .

La descomposición arbórea fue “descubierta” originalmente por Rudolf Halin en 1976 [11] (p. 388), y retomada por Robertson y Seymour en 1984, como una básica y útil herramienta en su serie de trabajos.

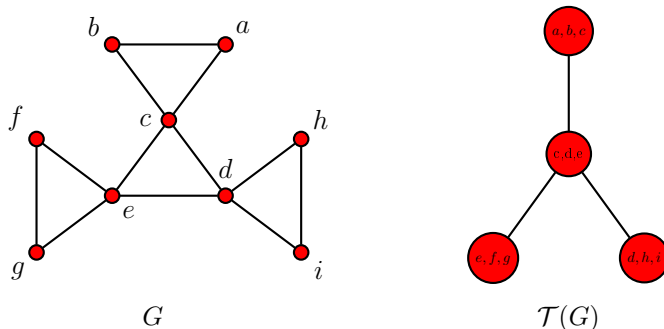


Figura 4.1: Grafo G con árbol de descomposición $\mathcal{T}(G)$.

Tal vez la característica más importante de la descomposición arbórea es que transfiere las propiedades de separación de su árbol al grafo descompuesto en sus componentes. Ver Figura 4.1.

Lema 4.2 ([9]). Sea t_1t_2 arista de \mathcal{T} y sean $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ las componentes de $\mathcal{T} - t_1t_2$, con $t_1 \in \mathcal{T}_1$ y $t_2 \in \mathcal{T}_2$. Entonces $X_{t_1} \cap X_{t_2}$ separa

$$U_1 := \bigcup_{t \in \mathcal{T}_1} X_t \text{ de } U_2 := \bigcup_{t \in \mathcal{T}_2} X_t$$

en G .

Demostración. Tanto t_1 como t_2 se encuentran en el camino t_1Pt_2 en \mathcal{T} con $t_1 \in \mathcal{T}_1$ y $t_2 \in \mathcal{T}_2$. Por lo tanto $U_1 \cap U_2 \subseteq X_{t_1} \cap X_{t_2}$ por (3) de la definición 4.1, así que todo lo que se debe mostrar es que G no tiene una arista u_1u_2 con $u_1 \in U_1 \setminus U_2$ y $u_2 \in U_2 \setminus U_1$. Si u_1u_2 es una arista, entonces por (2) en 4.1 existe $t \in \mathcal{T}$ con $u_1, u_2 \in X_t$. Por la elección de u_1 y u_2 , ni $t \in \mathcal{T}_1$ ni $t \in \mathcal{T}_2$, lo cual es una contradicción. \square

Diremos que la separación $\{U_1, U_2\}$ de G en el Lema 4.2 es *inducida* por la arista t_1t_2 de \mathcal{T} , o más generalmente inducida por $(\mathcal{T}, \mathcal{X})$. Su separador $U_1 \cap U_2 = X_{t_1} \cap X_{t_2}$ es el *conjunto de adhesión* de X_{t_1} y X_{t_2} . La *adherencia* de un árbol de descomposición es el tamaño máximo de su conjunto de adherencia, si \mathcal{T} es trivial, la adherencia es cero.

Lema 4.3 ([11]). Para cada subgrafo H de G , el par $(\mathcal{T}, \{X_t \cap V(H)\}_{t \in \mathcal{T}})$ es un árbol de descomposición de H .

Demostración. Mostremos que $(\mathcal{T}, \{X_t \cap V(H)\}_{t \in \mathcal{T}})$ cumple las 3 propiedades de la definición de árbol de descomposición.

1. $\bigcup_{t \in \mathcal{T}} V(H) \cap X_t = V(H) \cap \bigcup_{t \in \mathcal{T}} X_t = V(H) \cap V(G) = V(H)$.
2. Si $xx' \in E(H) \subseteq E(G)$, entonces existe $t \in \mathcal{T}$, tal que $x, x' \in X_t$ y además como $x, x' \in V(H)$ se sigue que $x, x' \in V(H) \cap X_t$.
3. Si $t_3 \in t_1 P t_2$, con P un camino en \mathcal{T} , entonces $X_{t_1} \cap X_{t_2} \subseteq X_{t_3}$, luego $V(H) \cap X_{t_1} \cap X_{t_2} \subseteq V(H) \cap X_{t_3}$, esto es $(V(H) \cap X_{t_1}) \cap (V(H) \cap X_{t_2}) \subseteq V(H) \cap X_{t_3}$.

□

El siguiente lema establece cómo podemos construir un árbol de descomposición de un menor de un grafo a partir de un árbol de descomposición de dicho grafo.

Lema 4.4 ([11]). Supongamos que G es un IH con conjuntos rama U_h , con $h \in V(H)$. Sea $f : V(G) \rightarrow V(H)$ una función que asigna a cada vértice de G el índice del conjunto rama que lo contiene. Para cada $t \in \mathcal{T}$, sea $W_t := \{f(v) : v \in X_t\}$, y definamos $\mathcal{W} := \{W_t\}_{t \in \mathcal{T}}$. Entonces $(\mathcal{T}, \mathcal{W})$ es un árbol de descomposición de H .

Demostración. Mostremos (1), (2) y (3) de la definición 4.1. Para (1), notemos que $\bigcup_{t \in \mathcal{T}} W_t = \bigcup_{t \in \mathcal{T}} f(X_t) = f(\bigcup_{t \in \mathcal{T}} X_t) = f(V(G)) = V(H)$. Para (2), sea $xx' \in E(H)$, entonces por la observación 2.5 existe una contracción $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que existe una $\varphi^{-1}(x) - \varphi^{-1}(x')$ arista en G , luego, si $uv \in \varphi^{-1}(x) - \varphi^{-1}(x') \subseteq E(G)$ entonces existe $t \in \mathcal{T}$ tal que $u, v \in X_t$, de donde $f(u), f(v) \in f(X_t) = W_t$ pero $f(u) = x$ y $f(v) = x'$ ya que $x \in U_x$, $x' \in U_{x'}$, $\varphi(U_x) = x$ y $\varphi(U_{x'}) = x'$. Sean $t_1, t_2, t_3 \in \mathcal{T}$, como en (3) de la definición 4.1, considere un vértice $h \in W_{t_1} \cap W_{t_3}$ de H , con esto $h \in W_{t_2}$. Por definición de W_{t_1} y W_{t_3} , el conjunto U_h satisface tanto X_{t_1} como X_{t_3} . Como U_h es conectado en G , esto implica por el lema 4.2 que U_h cumple X_{t_2} . Entonces $h \in W_{t_2}$, por definición. □

Lema 4.5 ([11]). Cualquier conjunto de vértices no contenido en una parte de $(\mathcal{T}, \mathcal{X})$ contiene 2 vértices que son separados por un conjunto de adhesión de $(\mathcal{T}, \mathcal{X})$.

Demostración. Sea $(\mathcal{T}, \mathcal{X})$ un árbol de descomposición de G . Consideremos $A \subseteq V(G)$, tal que $A \not\subseteq X_t$ para todo $t \in \mathcal{T}$, entonces existen $v_1, v_2 \in A$ y $t_1, t_2 \in \mathcal{T}$ tales que $v_1 \in X_{t_1}$, $v_2 \in X_{t_2}$ y $v_1, v_2 \notin X_{t_1} \cap X_{t_2}$, se sigue que $X_{t_1} \cap X_{t_2}$ es el conjunto de adherencia de X_{t_1} y X_{t_2} . □

Corolario 4.6 ([11]). Cada subgrafo completo de un grafo G está contenido en alguna parte de $(\mathcal{T}, \mathcal{X})$ (Ver triángulos de la Figura 4.1).

Demostración. Sea H un subgrafo completo de G . Supongamos que $V(H) \not\subseteq X_t$, para todo $t \in \mathcal{T}$, entonces por el Lema 4.5 existen $v_1, v_2 \in V(H)$ que son separados por un conjunto de adhesión $X_{t_1} \cap X_{t_2}$, donde $v_1 \in X_{t_1}$ y $v_2 \in X_{t_2}$. Si $v \in X_{t_1} \cap X_{t_2}$, $v, v_2 \in X_{t_1}$ y $v, v_2 \in X_{t_2}$ entonces los extremos de las aristas v, v_2 no están separados, contradicción. \square

La descomposición arbórea $(\mathcal{T}, \mathcal{X})$ de G se llama *simple* si todos los separadores $X_{t_1} \cap X_{t_2}$ inducen subgrafos completos en G . Esta suposición puede permitirnos hacer afirmaciones sobre las partes de la descomposición para G en sí.

Por tanto, las descomposiciones arbóreas pueden conducir a caracterizaciones estructurales intuitivas de las propiedades de los grafos. Un ejemplo particularmente simple es la siguiente caracterización de grafos cordales.

Proposición 4.7 ([11]). G es un grafo cordal si y solo si G tiene un árbol de descomposición tal que sus partes son grafos completos.

Demostración. Supongamos que $(\mathcal{T}, \{X_t\}_{t \in \mathcal{T}})$ es un árbol de descomposición tal que $G[X_t]$ es un grafo completo para todo $t \in \mathcal{T}$. Sea C un ciclo de G de tamaño mayor a 3 y supongamos que no tiene cuerdas, entonces para todo $t \in \mathcal{T}$ X_t no contiene un ciclo con vértices de C de tamaño 3.

Por el lema 4.5, dos vértices de C pueden ser separados por un conjunto de adherencia $X_{t_1} \cap X_{t_2}$, entonces $X_{t_1} \cap X_{t_2}$ tiene al menos dos vértices de C , digamos $v_1, v_2 \in X_{t_1} \cap X_{t_2}$, ya que $\kappa(C) = 2$, pero como $X_{t_1} \neq X_{t_2}$, entonces hay un $v \in C$ tal que $v \in X_{t_1} \triangleleft X_{t_2}$, si $v \in X_{t_1}$, entonces X_{t_1} contiene el ciclo con vértices v, v_1 y v_2 , contradicción; análogamente se llega a una contradicción si $v \in X_{t_2}$.

Ahora supongamos, sin pérdida de generalidad, que G es conexo, sea $\{X_1, \dots, X_n\}$ la colección de todos los subgrafos completos máximos de G , y T el grafo tal que $V(T) = \{1, 2, \dots, n\}$ y $ij \in E(T)$ si y solo si $|X_i \cap X_j| = 1$, donde la cardinalidad de $X_i \cap X_j$ es a lo más 1 por el hecho de que X_i y X_j son completos maximales. Se sigue que $(T, \{X_i\}_{i \in T})$ es un árbol de descomposición de G con las características deseadas. \square

4.1. Ancho arbóreo

En las siguientes definiciones se introduce el concepto de ancho arbóreo de un grafo. En términos informales, el ancho de un grafo es una medida que determina que tan parecido a un árbol es un grafo.

Definición 4.8 ([11]). El *ancho* de un árbol de descomposición $(\mathcal{T}, \{X_t\}_{t \in \mathcal{T}})$ es definido como:

$$w(\mathcal{T}) = \max\{|X_t| - 1 : t \in \mathcal{T}\}.$$

El *ancho arboreo* de un grafo G se define como

$$t_w(G) = \min\{w(\mathcal{T}) : \mathcal{T} \text{ es un árbol de descomposición de } G\}.$$

Diremos G que tiene ancho arboreo acotado, si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $t_w(G) < k$. Estaremos interesados en las familias de grafos que tengan ancho arboreo acotado [4, 5]. La propiedad de tener ancho arboreo acotado es cerrada bajo isomorfismos, es decir, es una propiedad gráfica. Aún más la propiedad gráfica de tener ancho arboreo acotado es \preceq -cerrada, esto, por siguiente proposición.

Proposición 4.9 ([11]). Si $H \preceq G$, entonces $t_w(H) \leq t_w(G)$.

Demostración. Por el Corolario 2.9, existen grafos, H_1, \dots, H_k tales que $H = H_1 \preceq \dots \preceq H_k = G$, donde cada H_i , con $i \in \{1, \dots, k-1\}$, resulta de eliminar un vértice, eliminar una arista o contraer una arista.

Analicemos los tres casos posibles. Si G' surge de G por la eliminación de un vértice $v \in G$, entonces $G' = G - v$, se sigue que $t_w(G') \leq t_w(G)$, pues basta tomar un árbol de descomposición de G y borrar el vértice v de toda bolsa, lo cual es un árbol de descomposición para G' por Lema 4.3.

De igual forma, si G' surge de G por eliminar una arista $e \in G$, se tiene que para cada árbol $(\mathcal{T}, \mathcal{X})$, este también es un árbol para G' , por lo tanto, $t_w(G') \leq t_w(G)$. Ahora, si uv una arista de G y G' surge de G , por contracción de la arista uv , es decir $G' = G/uv$, con w el nuevo vértice de la contracción.

Notemos que G es un IG' y si $(\mathcal{T}, \mathcal{X})$ es un árbol de descomposición de G , entonces por el Lema 4.4 existe un árbol para G' , $(\mathcal{T}, \mathcal{W})$, formado por reemplazar w por cada u y v en cada bolsa del árbol de descomposición $(\mathcal{T}, \mathcal{X})$. Se sigue que $t_w(G') \leq t_w(G)$. Finalmente, $t_w(H) \leq t_w(H_2) \leq \dots \leq t_w(H_{k-1}) \leq t_w(G)$. Se sigue el resultado. \square

Proposición 4.10 ([11]). Sea $(\mathcal{T}, \mathcal{X})$ un árbol de descomposición de un grafo G , donde $\mathcal{X} = \{X_t\}_{t \in \mathcal{T}}$. Si $t_1, t_2 \in V(\mathcal{T})$ son adyacentes en \mathcal{T} entonces $X_{t_1} - X_{t_2} \neq \emptyset$.

Demostración. Supongamos que $X_{t_1} - X_{t_2} = \emptyset$, para algún par de vértices adyacentes $t_1, t_2 \in V(\mathcal{T})$. Definamos otro árbol de descomposición de la siguiente manera, sea t_0 el vértice obtenido por contracción de la arista $t_1 t_2$ en \mathcal{T} y sea \mathcal{T}' el árbol obtenido por esta contracción. Notemos que $X_{t_0} = X_{t_2}$ y $\mathcal{X}' = \{X_t\}_{t \in V(\mathcal{T}'})$. Así, el árbol de descomposición $(\mathcal{T}', \mathcal{X}')$ de G tiene ancho $t_w(G)$ que es menor que el número de vértices de \mathcal{T} , lo cual es una contradicción. \square

Definición 4.11 ([11]). Sea $(\mathcal{T}, \mathcal{X})$ un árbol de descomposición de un grafo G , donde $\mathcal{X} = \{X_t\}_{t \in \mathcal{T}}$. Para cada $t \in \mathcal{T}$ las componentes conectadas de $\mathcal{T} - t$ son llamadas *ramas* de \mathcal{T} en t .

Observación 4.12. Para cualquier vértice $t \in \mathcal{T}$ y cualquier vértice v de G para el cual $v \notin X_t$, existe una única rama de \mathcal{T} en t que contiene todo $t' \in \mathcal{T}$, con $v \in X_{t'}$. Se denotará esta rama por $\mathcal{T}_t(v)$.

Definición 4.13 ([11]). Sean $X, Y, Y' \subseteq V(G)$. Se dice que los conjuntos Y e Y' son separados en G por el conjunto X si todo camino de Y a Y' en G contiene un vértice de X .

Lema 4.14 ([11]). Sea \mathcal{T} un árbol de descomposición de un grafo G , con $\mathcal{X} = \{X_t\}_{t \in \mathcal{T}}$. Se cumplen lo siguiente:

- (i) Si $v, v' \notin X_t$, v y v' no están separados en G por X_t entonces $\mathcal{T}_t(v) = \mathcal{T}_t(v')$.
- (ii) Sea $e \in E(\mathcal{T})$, $e = \{t, t'\}$ y sean N, N' los conjuntos de vértices de las dos componentes de $\mathcal{T} - e$. Entonces $X_t \cap X_{t'}$ separa a $\bigcup_{n \in N} X_n$ y $\bigcup_{n \in N'} X_n$ en G .
- (iii) Sea $|V(\mathcal{T})| \geq 2$ y para cada $t \in V(\mathcal{T})$ sea G_t un subgrafo conectado de G con $V(G_t) \cap X_t = \emptyset$. Entonces existen $t, t' \in V(\mathcal{T})$ adyacentes en \mathcal{T} tal que $X_t \cap X_{t'}$ separa $V(G_t)$ y $V(G_{t'})$ en G .

Demostración. Mostremos (i) – (iii) del lema.

- (i) Sea v_1, v_2, \dots, v_k una sucesión de vértices de G que no están en la bolsa X_t , donde cada v_i es adyacente con v_{i+1} , y además $v_1 = v$ y $v_k = v'$. Entonces por (4.10),

$$\mathcal{T}_t(v_1) = \mathcal{T}_t(v_2) = \dots = \mathcal{T}_t(v_k),$$

se sigue,

$$\mathcal{T}_t(v) = \mathcal{T}_t(v').$$

- (ii) Supongamos lo contrario. Entonces existe $v, v' \in V(G) - (X_t \cap X_{t'})$, con $v \in X_n$ y $v' \in X_{n'}$, donde $n \in N$ y $n' \in N'$, tales que cada $v = v'$ o v, v' son adyacentes en G . Por (2) y (3) de la definición 4.1, existen $t'' \in V(\mathcal{T})$ tal que $v, v' \in X_{t''}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $t'' \in N'$, entonces t, t' están en el camino de \mathcal{T} entre n y t'' , así $X_n \cap X_{t''}$ está contenido en X_t y $X_{t'}$. Pero $v \in X_t \cap X_{t'}$ es una contradicción.
- (iii) Se sigue de (ii) tomando $e = \{t, t'\} \in E(\mathcal{T})$.

□

Lema 4.15 ([9]). Sea $(\mathcal{T}, \mathcal{X})$ un árbol de descomposición de un grafo G donde $\mathcal{X} = \{X_t\}_{t \in \mathcal{T}}$. Para cualquier clique $H \subseteq G$, existe un vértice $t_0 \in V(\mathcal{T})$ tal que $V(H) \subseteq X_{t_0}$.

En particular $t_w(G) \geq w(G) - 1$, donde $w(G)$ es la cardinalidad del máximo clique de G . A continuación se enuncian algunos anchos arbóreos de familias conocidas de grafos.

Teorema 4.16 ([9]).

- (i) $t_w(G) = 0$ si y solo si G es un grafo trivial.
- (ii) $t_w(C) = 2$ para todo C ciclo.
- (iii) $t_w(G) \leq 1$ si y solo si G es un bosque.
- (iv) $t_w(K_n) = n - 1$, K_n grafo completo.

Demostración. El inciso (i) es claro.

- (ii) Sea C un ciclo, tal que $C = v_1 v_2 \dots v_n v_1$ y $n \geq 3$. Para mostrar $t_w(C) \leq 2$, definimos el árbol \mathcal{T} , tal que $V(\mathcal{T}) = \{1, \dots, n - 2\}$ y $E(\mathcal{T}) = \{\{i, i + 1\} : 1 \leq i \leq n - 3\}$ y la familia $\mathcal{X} = \{X_t\}_{t \in \mathcal{T}}$, donde $X_t = \{v_1, v_{t+1}, v_{t+2}\}$ para cualquier vértice $t \in V(\mathcal{T})$. Entonces $(\mathcal{T}, \mathcal{X})$ es un árbol de descomposición fundamental de C con ancho 2.

Para probar que $t_w(C) \geq 2$, supongamos lo contrario. Entonces existen vértices $t_1, t_0 \in V(\mathcal{T})$ tal que $X_{t_1} = \{v_1, v_2\}$ y $X_{t_0} = \{v_1, v_n\}$. Sea $t_2 \in V(\mathcal{T})$ el primer vértice diferente de t_1 en el camino $t_1 \dots t_0$ en \mathcal{T} . Entonces $v_2 \notin X_{t_2}$ y así $X_{t_1} \cap X_{t_2} = \{v_1\}$.

Eliminando de \mathcal{T} la arista e que une a t_1 y t_2 , sea N_i para $i = 1$ y $i = 2$, que denotará el conjunto de vértices de la componente de $\mathcal{T} - e$ que contiene a t_i . Por el lema 4.14 los conjuntos $M_1 = \bigcup\{X_t\}_{t \in N_1}$ y $M_2 = \bigcup\{X_t\}_{t \in N_2}$ son separados en C por $\{v_1\}$. Pero los vértices $v_2 \in M_1$ y $v_n \in M_2$ no son separado por $\{v_1\}$ en C . Contradicción.

- (iii) Si G es un bosque es fácil encontrar un árbol de descomposición de G con ancho de a los más 1. Si G no es un bosque, entonces $t_w(G) \geq 2$ por (ii).
- (iv) Sea \mathcal{T} un árbol de descomposición de K_n . Por le Corolario 4.6, $V(K_n)$ está contenido en la única una parte \mathcal{T} , se sigue que $w(\mathcal{T}) = n - 1 = t_w(K_n)$.

□

Los grafos de ancho arbóreo acotado son suficientemente “parecidos” a los árboles, que es posible adaptar la prueba del Teorema 2.18 (Kruskal) a la clase de este tipo de grafos. Esto nos acerca un paso más hacia el Teorema de Grafos Menores.

El siguiente resultado también fue enunciado y probado por Robertson y Seymour.

Teorema 4.17 ([11]). Para cada entero $k > 0$, los grafos con ancho arbóreo menor que k son bien cuasi-ordenados por la relación menor.

En el trabajo de Robertson y Seymour, se hace uso del Teorema 4.17 para la demostración del Teorema de Grafos Menores, esto se hace a través del análisis de los grafos que no cubren el Teorema 4.17, esto es, se deduce alguna información sobre un grafo a partir de la suposición de que su ancho arbóreo es grande.

En este punto se tiene uno de nuestros objetivos del presente trabajo, que es identificar el papel que tuvo el concepto de ancho arbóreo en la demostración del teorema de grafos menores de Robertson y Seymour.

Para el análisis de los grafos que no cubren el Teorema 4.17, Robertson y Seymour, proponen un resultado al que denominan Teorema de dualidad del ancho arbóreo donde identifican una obstrucción canónica a anchos arbóreos pequeños, este fenómeno estructural, ocurre en un grafo si y solo si el ancho arbóreo es grande.

Antes de presentar el Teorema de dualidad, se introducen los siguientes conceptos.

Definición 4.18 ([11]). Sea $G = (V, E)$ un grafo.

- Decimos que dos subconjuntos de $V(G)$ se *tocan* si tiene en un vértice en común o G tiene una arista entre ellos.
- Una colección de subconjuntos de $V(G)$, conexos en G , que se tocan dos a dos es un *bramble* (una zarza).
- Un conjunto de $S \subseteq V(G)$ *cubre* (o es una cubierta de) un bramble \mathcal{B} si $S \cap B \neq \emptyset$, para todo $B \in \mathcal{B}$.
- El *orden* de un bramble es el menor número de vértices que lo cubren. Un bramble de orden k es un k -bramble.

Definición 4.19 ([11]). Consideremos una $k \times k$ -rejilla sobre $\{1, 2, \dots, k\}^2$. Los *cruces* de esta rejilla son los k^2 conjuntos:

$$C_{i,j} = \{(i, l) : l = 1, 2, \dots, k\} \cup \{(l, j) : l = 1, 2, \dots, k\}.$$

Los cruces de $C_{i,j}$ es la unión de la i -ésima fila con la j -ésima columna de la rejilla. Claramente, los cruces del grafo $k \times k$ -rejilla forma un k -bramble, pero no el único, la Figura 4.2 muestra otro ejemplo de un bramble del grafo 4×4 -rejilla que no está formado por sus cruces.

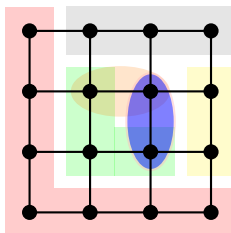


Figura 4.2: Un bramble del grafo 4×4 -rejilla.

Los grafos rejillas juegan un papel crucial dentro de pruebas de grafos con ancho arbóreo acotado y ejemplo de estructuras que se relacionan con ellas.

El *número de bramble* de un grafo, es el mayor orden de un bramble contenido en el grafo. El *Teorema de Dualidad* puede ser expresado en términos del número de bramble. Entonces este teorema establece que el ancho arbóreo de un grafo es exactamente uno menos que su número de bramble:

Teorema 4.20 ([11]). Para cualquier grafo G , se cumple que el *número de bramble* de G es igual a $t_w(G) - 1$.

Teorema 4.21 ([11]). Sea $k \geq 0$ un número entero. Un grafo G tiene $t_w(G) < k$ si y solo si no contiene brambls de orden mayor que k .

Se puede visualizar la demotracion del teorema anterior en las pp. 356-358 de [11]. El Teorema 4.20 establece una estrecha relación entre el ancho arbóreo y los brambls. Por su parte, el Teorema 4.21 ayuda a caracterizar grafos cuyo ancho abóreo es acotado.

Definición 4.22 ([11]). El entero más grande r tal que $K_r \subseteq G$ es el *número de cliqué* del grafo G y es denotado por $\omega(G)$.

A continuación presentamos una lista de las propiedades más destacadas del ancho arbóreo de un grafo.

Teorema 4.23 ([11, 18]).

1. $t_w(G) = \text{mín}\{\omega(H) \mid G \subseteq H, \text{ con } H \text{ cordal}\}$.
2. Un grafo G tiene $t_w(G) < 3$ si y solo si no tiene a K_4 como menor.
3. Para cada entero r existe un entero k tal que cada grafo G de $t_w(G) \leq k$ tiene una $r \times r$ -rejilla como menor.
4. Dado un grafo G , los grafos que no tiene a G como menor tienen ancho arbóreo acotado si y solo si G es plano.

Demostración. A continuación se dan las demostraciones de 1,2 y 4 de teorema.

1. Por el Corolario 4.6 y la Proposición 4.7, cada uno de los grafos H , considerando el mínimo, tiene un árbol de descomposición de ancho arbóreo $\omega(H) - 1$. Cada descomposición arbórea induce una de G por el Lema 4.5, por lo que $t_w(G) \leq \omega(H) - 1$, para cada H .

Por el contrario, construyamos un grafo H como el anterior con $\omega(H) - 1 \leq t_w(G)$. Sea $(\mathcal{T}, \mathcal{X})$ una descomposición arbórea de G con ancho $t_w(G)$. Para cada $t \in \mathcal{T}$ sea K_t el grafo completo sobre la bolsa X_t , y sea $H := \cup_{t \in \mathcal{T}} K_t$.

Claramente, $(\mathcal{T}, \mathcal{X})$ es también una descomposición arbórea de H . Por la Proposición 4.7, H es cordal, y por el Corolario 4.6, $\omega(H) - 1$ es como máximo el ancho de $(\mathcal{T}, \mathcal{X})$, es decir, $t_w(G)$.

2. Por Corolario 4.6, se tiene que $t_w(K_4) \geq 3$. Por el Lema 4.9, se tiene que un grafo G con $t_w < 3$ no puede contener a K_4 como menor. Por otro lado, sea G un grafo que no contiene a K_4 como menor y asumamos que $|G| \geq 3$. Agregando una aristas a G hasta obtener un G' que es arista-máxima con la propiedad de no tener a K_4 como menor.
4. Dado que todos los grafos rejilla y sus menores son planos, entonces cada clase $Forb_{\preceq}(G)$, con G no plano, contiene a todos los grafos rejilla, entonces los elementos de $Forb_{\preceq}(G)$ tienen ancho arbóreo no acotado. Por otro lado, todo grafo plano G es un menor de algún grafo rejilla.

□

Aunque el resultado anterior parezca algo técnico, tiene implicaciones profundas como muestra el siguiente resultado.

4.2. Otras métricas arbóreas

Se presentan ahora algunas métricas parecidas al ancho arbóreo, que nos sirven como auxiliares para determinar qué clases de grafos tienen ancho arbóreo acotado.

Definición 4.24 ([16]). Un *camino de descomposición* de un grafo $G = (V, E)$ es una secuencia de subconjuntos de vértices $\mathcal{C}(G) = (X_1, X_2, \dots, X_r)$ tal que

$$(i) \quad V = \bigcup_{i \in I} X_i$$

(ii) Para todo $\{v, w\} \in E$, existe $i \in \{1, \dots, r\}$ con $v, w \in X_i$.

(iii) Para toda terna $i, j, k \in I$ tal que si $i \leq j \leq k$, entonces $X_i \cap X_k \subseteq X_j$.

Definición 4.25 ([16]). Sea $G = (V, E)$ un grafo, el ancho de un camino de descomposición (X_1, \dots, X_r) es $\max_{1 \leq i \leq r} \{|X_i| - 1\}$. El ancho de camino $P_w(G)$ de un grafo G es el mínimo ancho de camino sobre todos los posibles caminos de descomposición de G .

Observación 4.26. Claramente de las definiciones se sigue directamente que un ancho de camino de un grafo es al menos su ancho arbóreo. Es decir,

$$P_w(G) \geq t_w(G).$$

Las figuras 4.1 y 4.3 ejemplifican el hecho de la desigualdad estricta. En este caso, $t_w(G) = 2 < 3 = P_w(G)$.

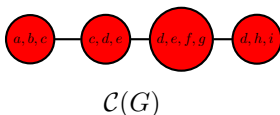


Figura 4.3: Camino de descomposición $\mathcal{C}(G)$ del grafo G de la Figura 4.1.

Definición 4.27 ([11]). Un grafo G se dice ser cordal, si todo ciclo en G de al menos 4 vértices tiene una cuerda.

Definición 4.28. Un grafo G tiene ancho de cuerda k , $Ch_w(G) = k$ si k es el más pequeño entero no negativo tal que G es un subgrafo de algún grafo cordal H el cual no contiene un $(k + 2)$ -clique como un subgrafo.

Sea $G = (V, E)$ un grafo, $|V| = n$, una *numeración* de G es una función inyectiva $L_G : V \rightarrow \{1, \dots, n\}$. El *ancho de corte* de una numeración de L_G es

$$\max_{1 \leq p < r} |\{uv \in E(G) : L_G(u) \leq p < L_G(v)\}|.$$

Definición 4.29 ([16]). El *ancho de corte* $c_w(G)$ de G es el mínimo ancho de corte sobre todas las numeraciones.

El *corte* de un grafo en p , con $1 \leq p < n$, sobre una numeración L_G es el conjunto de aristas $\{uv \in E : L_G(u) \leq p < L_G(v)\}$. Encontrar el ancho de corte de un grafo es un problema **NP**-difícil, mientras de el correspondiente problema de decisión es **NP**-completo.

El *ancho de banda* de una numeración L_G es

$$\max_{1 \leq p \leq n} \{|L_G(u) - L_G(v)| : uv \in E(G)\}.$$

Definición 4.30 ([9]). El *ancho de banda* $b_w(G)$ de G es el mínimo ancho de banda de todas las numeraciones.

Ahora se definirá la descomposición de clique, un tipo especial de descomposición arbórea en grafos cordales. Esta descomposición será de gran utilidad para establecer relaciones entre diferentes parámetros.

Definición 4.31. Sea G un grafo cordal tal que Q_1, Q_2, \dots, Q_m son todos los cliques máximos en G , entonces un árbol \mathcal{T} con conjuntos de vértices $V(\mathcal{T}) = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ es una descomposición de clique si

1. Para todo clique Q_i en G , $X_i = V(Q_i)$.
2. Para todo vértice en G , el subgrafo de \mathcal{T} inducido por las bolsas que contienen a v_i es conexo.

Mientras el árbol de descomposición, en cierto sentido se define a través de los vértices, la descomposición de rama se hace mediante las aristas.

Definición 4.32. Sea G un grafo entonces una rama de descomposición de G es un par (T, δ) , donde T es un árbol de grado máximo 3 y δ es una biyección $\delta : E(G) \rightarrow L(T)$ de las arista de G a las hojas en T .

Definición 4.33. Sea G un grafo y una rama de descomposición (T, δ) de G , el ancho de (T, δ) es igual al tamaño del más grande conjunto medio sobre todas las arista de T . El ancho de rama de G es igual a el ancho de menor tamaño de las ramas de descomposición.

El ancho de rama del grafo vacío y del grafo trivial es igual a 0, mientras que el grafo que tiene solo una arista tiene ancho de rama 1.

4.3. Teorema de grafos menores

En esta sección, se esbozará la demostración del teorema de grafos menores. Como ocurre con la mayoría de los resultados fundamentales, la prueba ha desencadenado el desarrollo de métodos de interés y potencial bastante independientes. Esto es particularmente cierto para el uso de descomposiciones arbórea, un concepto que no solo es fundamental para la teoría de grafos menores, sino que ha encontrado aplicaciones en otras áreas.

A lo largo de este trabajo hemos visto caracterizaciones de familia de grafos a través de menores prohibidos como en el Ejemplo 3.18 y el Teorema 3.13, pero es en el Corolario 3.23 que se hace una caracterización para cualquier familia de grafos que

tenga la propiedad de ser menor cerrada. Ahí, se muestra que: $\mathcal{C} = \text{Forb}_{\preceq}(\overline{\mathcal{C}})$, donde $\overline{\mathcal{C}}$ es el complemento de alguna propiedad \mathcal{C} .

Naturalmente se busca hacer el conjunto de menores prohibidos lo más pequeño posible, para dicha acotación se define el conjunto

$$\mathcal{K}_{\mathcal{C}} := \{H \mid H \text{ es mínimo en } \overline{\mathcal{C}}, \text{ respecto a } \preceq\},$$

el cual satisface que $\mathcal{C} = \text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{K}_{\mathcal{C}})$, y además está contenido en cada \mathcal{H} tal que $\mathcal{C} = \text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{H})$. Llamaremos a $\mathcal{K}_{\mathcal{C}}$ el *conjunto de Kuratowski* para \mathcal{C} . Por la construcción de $\mathcal{K}_{\mathcal{C}}$, sus elementos son incomparables y el Teorema de Robertson-Seymour establece que todo conjunto de grafos \preceq -incomparables es finito.

La Definición 3.19 establece que el conjunto de obstrucciones, definida respecto a la relación de menor \preceq , nos da una equivalencia del conjunto de Kuratowski para cualquier propiedad \mathcal{C} .

Proposición 4.34 ([11]). Sea \mathcal{C} un propiedad gráfica. El conjunto de Kuratowski para \mathcal{C} es igual al conjunto de obstrucciones de \mathcal{C} .

Demostración. Mostremos la doble contención conjuntista.

\Rightarrow] Sea $G \in \mathcal{K}_{\mathcal{C}}$, entonces $G \in \overline{\mathcal{C}}$ y $H \not\preceq G$, para cada $H \in \overline{\mathcal{C}}$. Dicho de otra forma, $G \in \overline{\mathcal{C}}$ y si $X \preceq G$, entonces $X \in \mathcal{C}$. Por lo tanto $G \in \text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{C})$.

\Leftarrow] Sea $G \in \text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{C})$, entonces $G \notin \mathcal{C}$, pero $H \in \mathcal{C}$, para cada $H \preceq G$. Es decir, $G \in \overline{\mathcal{C}}$ y $H \not\preceq G$, para cada $H \in \overline{\mathcal{C}}$. Por lo cual $G \in \mathcal{K}_{\mathcal{C}}$.

□

En la literatura con respecto al tema del Teorema de grafos menores, es común encontrar referencia respecto al conjunto de obstrucciones, mientras que el conjunto de Kuratowski viene dado en [11]. La intención de incluir tanto el conjunto de Kuratowski, el conjunto de obstrucciones y los menores prohibidos es simplemente resaltarlos como conceptos equivalentes.

Ejemplo 4.35.

- Los árboles infinitos admiten un buen cuasi-orden.
- Los grafos infinitos no admiten un buen cuasi-orden.

En particular, toda clase (que puede ser infinito) de grafos menor-cerrada puede ser caracterizada por un conjunto finito de grafos, a saber, por su conjunto de obstrucciones, como se verá e las implicaciones del Teorema de Grafos Menores.

4.4. Formulaciones de Teorema de Grafos Menores

El Teorema fue enunciado por el matemático alemán Klaus Wagner en 1937. El cual se enunciaría de la siguiente forma: Sea G_1, G_2, \dots una sucesión contable de grafos finitos, entonces existen i, j con $j > i \geq 1$ tal que G_i es isomorfo a un menor de G_j .

Se mantuvo varios años como la *Conjetura de Wagner*. La prueba del teorema concluyó en el año 2004, pero fue un trabajo que inició en 1983, y que llevó alrededor de 20 artículos, con más de 500 páginas.

Teorema 4.36 (Teorema de Grafos Menores). Para todo conjunto infinito de grafos finitos, existen dos grafos H y G , tales que $H \preceq G$.

Existen varias formas de enunciar el *Teorema de Grafos Menores*. A continuación se enuncian otras formulaciones [11, 14, 18].

Proposición 4.37. Los siguientes enunciados son equivalentes al Teorema de Grafos Menores:

- a) Todo conjunto de grafos cerrado bajo la toma de menores tiene un conjunto finito de obstrucciones.
- b) La relación \preceq sobre los grafos finitos es un buen cuasi-orden.

Demostración. Denotemos al Teorema de Grafos Menores por *TGM*.

TGM \Rightarrow b) Sea \mathcal{C} una clase \preceq -cerrada. Consideremos $Obst_{\preceq}(\mathcal{C})$ y supongamos que es infinito. Luego por a) existen $G_1, G_2 \in Obst_{\preceq}(\mathcal{C})$ tales que $G_1 \preceq G_2$, entonces $G_1 \in \mathcal{C}$, contradicción.

- b) \Rightarrow c) Por la Proposición 2.8, la relación \preceq es reflexiva y transitiva, con respecto a los grafos finitos, por lo cual induce un cuasi-orden. Por Corolario 2.9, toda sucesión decreciente de grafos con respecto a \preceq es finita. Resta mostrar que toda anticadena es finita.

Sea A una anticadena de grafos finitos, por Proposición 3.22, $Forb_{\preceq}(A)$ es \preceq -cerrada, entonces por b) $Obst_{\preceq}(Forb_{\preceq}(A))$ es finito. Afirmamos que $A \subseteq Obst_{\preceq}(Forb_{\preceq}(A))$.

Sea $G \in A$, y supongamos que $G \notin Obst_{\preceq}(Forb_{\preceq}(A))$, entonces $G \notin Forb_{\preceq}(A)$, pero $H \in Forb_{\preceq}(A)$, para cada $H \preceq G$. Luego existe $H_1 \in A$ tal que $H_1 \preceq G$, contradicción, dado que A es una anticadena. Se sigue que A es finito.

c) \Rightarrow TGM Sea \mathcal{G} un conjunto infinito de grafos finitos. Supongamos que para todo $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$, $G_1 \not\preceq G_2$ ni $G_2 \not\preceq G_1$, entonces \mathcal{G} es una anticadena infinita, por c) toda anticadena es finita, contradicción, por lo tanto existen $G_1, G_2 \in \mathcal{C}$ que son comparables bajo \preceq .

□

Ejemplo 4.38.

- El conjunto de obstrucciones para el conjunto de todos los bosques es el conjunto que contiene como único elemento al ciclo con tres vértices. Esto significa que un grafo es un bosque si y solo si ninguno de sus menores es el ciclo con tres vértices.
- El conjunto de obstrucciones para todos los caminos es aquel que contiene el árbol de cuatro vértices.
- El conjunto de obstrucciones de la clase de todos los grafos que son planos, es el conjunto $\{K_5, K_{3,3}\}$.

4.5. Implicaciones del Teorema

El trabajo hecho por Robertson y Seymour en su prueba del Teorema de Grafos Menores trajo consigo técnicas y herramientas sustanciales, como fue el caso de ancho arbóreo y “tangles”, que fueron base y motivación para establecer nuevas conjeturas y resultados en el área. Así mismo, se estableció una relación estrecha entre en grafos menores y superficies [1, 31].

Corolario 4.39 ([11]). El conjunto de Kuratowski para cualquier propiedad menor cerrada \mathcal{C} es finito.

Demostración. Sea \mathcal{C} un propiedad gráfica menor cerrada. Por la Proposición 4.34 $\mathcal{K}_{\mathcal{C}} = \text{Obst}_{\preceq}(\mathcal{C})$. Ya que \mathcal{C} es menor-cerrada, por a) de la Proposición 4.37, $\mathcal{K}_{\mathcal{C}}$ es finito. □

El teorema anterior puede ser enunciado, en término de su conjunto de obstrucciones [18].

Corolario 4.40 ([1]). Para cualquier superficie S existe un conjunto finito de grafos H_1, \dots, H_n , tal que, el grafo G es incrustado en S si y solo si G no contiene a ningún grafo de H_1, \dots, H_n como menor.

Demostración. Sea P_s la propiedad gráfica de ser incrustado en la superficie S . Por Teorema 3.8. P_s es cerrada bajo la toma de menores, entonces por el Teorema de Grafos Menores, $Obts_{\preceq}(P_s)$ es finito. Digamos que $Obts_{\preceq}(P_s) = \{H_1, \dots, H_k\}$, entonces por definición, $H_i \notin P_s$, pero cada menor H'_i de H_i , $H'_i \in P_s$, esto, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Sea $G \in P_s$, afirmamos que $H_i \not\preceq G$, pues de lo contrario, $H_i \preceq G$ y por ende H_i podría ser incrustado en S , pero H_i es una obstrucción de P_s . \square

Dentro de las implicaciones que tuvo *Teorema de Grafos Menores*, entran algunas caracterizaciones constructivas.

Para un grafo fijo G , consideremos la clase K_G de todos los grafos que no contienen a G como menor. Esta clase está en **NP**, pues para verificar que cierto grafo H no está en K_G , basta exhibir la forma en que G sea producido de H como menor. Se sigue de la Teoría de Grafos Menores que esta clase está en **P**. Es decir, existe un algoritmo de tiempo polinomial el cual verifica si un grafo es menor que otro.

A continuación se definirá un tipo de “pegado” entre grafos, que nos ayudará a crear familias de grafos que no contienen a cierto grafo como menor.

Definición 4.41 ([9]). Sean G_1 y G_2 grafos disjuntos. Para los cuales existen cliques (sin aristas múltiples ni lazos) para G_1 y G_2 de tamaño k y una biyección entre ellos. Identifiquemos cada vértice del primer clique con su vértice asociado del segundo clique:

1. Si se borra la aristas de ambos cliques, a ese resultado le llamaremos la k -suma de G_1 y G_2 .
2. Si se borra la arista de solo un clique, el resultado es llamado el k -enlace de G_1 y G_2 .

La 0-suma y el 0-enlace corresponden a la unión disjunta de grafos, mientras que la 1-suma y el 1-enlace significan lo mismo. En la Figura 4.4 se muestra un ejemplo de una 3-suma y un 3-enlace.

En otras fuentes suele referirse a estos conceptos como la *clique suma* de orden k , el cual depende de cuáles y cuántas aristas de cada clique sean eliminadas; sin tener aún unificación en el concepto.

Los siguientes teoremas son constructivos, pues nos dan los elementos para construir familias completas de grafos que no tienen como menor a grafos específicos.

Teorema 4.42 ([18]). Un grafo G no contiene a K_5 como menor si y solo si se puede obtener por 0, 1, 2, 3-suma de grafos planos y V_8 .

La Figura 4.5 ilustra el proceso que se lleva al realizar un 2-suma entre V_8 y K_4 , para obtener un nuevo grafo que no tiene a K_5 como menor.

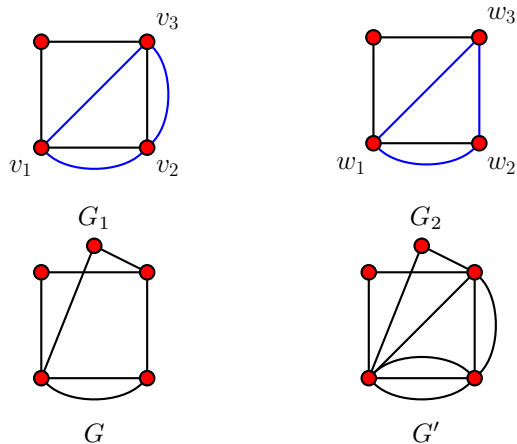


Figura 4.4: G y G' son, respectivamente, 3–suma y 3–enlace de G_1 y G_2 , mediante la identificación de v_i con w_i .

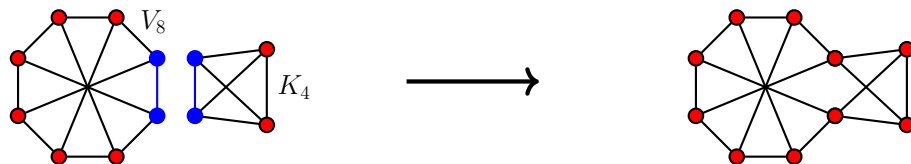


Figura 4.5: La 2–suma de V_8 y K_4 , es un grafo que no tiene a K_5 como menor.

Teorema 4.43 ([18]). Un grafo G no contiene a $K_{3,3}$ como menor si y solo si se puede obtener por 0, 1, 2, 3–suma de grafos planos y K_5 .

Los últimos dos teoremas nos dan familias que no contienen a K_5 y $K_{3,3}$ como menores, cada una. El problema puede ser si la familia es demasiado grande, aunque la ventaja que tenemos en la actualidad es que esos cálculos se los podemos dejar a una computadora [3, 14].

Por último daremos un esbozo, de cómo se culminó la prueba del *Teorema de Grafos Menores*.

Esbozo de la demostración del Teorema de Grafos Menores. Se quiere demostrar que cada sucesión infinita G_0, G_2, \dots de grafos finitos contiene un buen par, es decir, dos grafos $G_i \preceq G_j$ con $i < j$. Supongamos que $G_0 \not\preceq G_i$ para cada $i \geq 1$, entonces todos los grafos de la sucesión G_1, G_2, \dots , son elementos de $Forb_{\preceq}(G_0)$. Si G_0 es plano, por el inciso 4 del Teorema 4.23, cada G_i para $i \geq 1$, tiene ancho arbóreo acotado y entonces son bien cuasi-ordenados, esto, por el Teorema 4.17.

Ahora, se supone que G_0 no es plano. En general, solo se necesita considerar el caso cuando $G_0 = K_n$, pues ya que $G_0 \preceq K_n$ para $n := |G_0|$, se puede asumir que $K_n \not\preceq G_i$, para cada $i \geq 1$. La prueba continua de la misma forma que arriba, los grafos en $Forb_{\preceq}(K_n)$ pueden ser caracterizados por sus árboles de descomposición y nuevamente su estructura de árbol ayuda, como en el Teorema de Kruskal.

En este caso tenemos que usar un difícil y complicado teorema estructural, que compara 2 clases de grafos, la clase K_G de grafos que no contiene a cierto grafo G como menor y la clase L_k de grafos que se pueden incrustar una superficie S y con cantidad de caras k .

Esto nos da dos casos, en el primero, se tiene una estructura similar a un árbol (que puede ser manejada por los métodos de la sección 4.1, Ancho Abóreo); por otro lado, se puede tener grafos que están (aproximadamente) incrustados en la superficie dada S .

Así, mientras que la noción de una clase menor-cerrada es sustancialmente más general que la noción de grafos incrustados en una superficie, el teorema estructural al que se hace referencia reduce el Teorema 4.42 a un caso especial, a saber, lo dicho en el Corolario 4.40.

Para ser más precisos, se da solo una incrustación aproximada en una superficie, Robertson y Seymour introdujeron el concepto de adicional de “fringes” (“franja”) en un hipergrafo y luego extienden el Corolario 4.40 a hipergrafos incrustados en una superficie, para así finalizar la demostración. \square

Conclusiones y trabajo futuro

La dirección principal del trabajo desarrollado en el presente documento, se enfoca principalmente en la presentación de los conceptos y resultados principales que dan origen a los conceptos de descomposición y ancho arbóreo en el contexto de la Teoría de Grafos Menores.

También se han señalado las repercusiones que estos conceptos tienen en otras áreas del conocimiento, entre estas las que están relacionadas con el diseño y construcción de algoritmos eficientes. En esta dirección hay que resaltar que los trabajos de Robertson y Seymour sobre estos conceptos introducidos en su prueba del Teorema de Grafos Menores originaron y motivaron el interés en el desarrollo de otros tipos de descomposiciones y métricas arbóreas.

A la fecha este interés sigue vigente y con una considerable producción de trabajos relacionados. Existen varias líneas de investigación a seguir en el contexto de la Teoría de Grafos Menores como la obtención de resultados análogos al Teorema de Kuratowski que nos permitan caracterizar clases que son menores cerradas en términos de sus menores prohibidos, que ahora sabemos que ese conjunto es finito, y ésto nos abre grandes oportunidades para caracterizar, familias enteras de grafos, en términos de una cantidad finita.

Siguiendo por este camino, se pueden caracterizar familias concretas de grafos (que sean menores cerradas), en términos de sus obstrucciones. También se puede optar por atacar alguna conjetura como las que se presentan en las referencias [14, 18].

Otra dirección es la identificación de clases tratables de problemas a través de nuevas descomposiciones y métricas arbóreas. También es muy interesante plantear la posibilidad de extender la Teoría de Grafos Menores a una Teoría de Hipergrafos Menores, aquí cabe mencionar que aunque existen análogos con respecto a las descomposiciones y métricas arbóreas se conoce muy poco sobre una Teoría de Hipergrafos Menores.

Bibliografía

- [1] Allen, Peter (2001). *Graphs on Surfaces*. Johns Hopkins University Press.
- [2] Arnborg S. y Proskurowski A. (1989). *Linear time algorithms for NP-hard problems restricted to partial k-trees*. Discrete Appl. Math. 23, pp. 11-24.
- [3] Bodlaender, Hans (1996). *A linear-time algorithm for finding tree-decomposition of small treewidth*. SIAM J. Comput. 25, pp. 1305-1317.
- [4] Bodlaender H.L. (2005). *Discovering Treewidth*. Lecture Notes in Computer Science, vol 3381. Springer, Berlin, Heidelberg.
- [5] Bodlaender, Hans (1988). *Some Classes of Graphs with Bounded Treewidth*. Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science (EATCS), vol. 36.
- [6] Böhme T., Maharry J. y Mohar B. (2002). *$K_{a,k}$ minors in graphs of bounded tree-width*. J. Combin. Theory, Ser. B 86 , 133-147.
- [7] Bollobás, Béla (1979). *Graph Theory: An Introductory Course*. Springer-Verlag New York Inc.
- [8] Bovet, Daniel y Crescenzi, Pierluigi (1994). *Introduction to the Theory of Complexity*. Hemel Hempstead: Prentice Hall International.
- [9] Chlebikova, Janka (1992). *On the tree-width of a graph*. Acta Mathematica Universitatis Comenianae, vol. 61, no. 2, pp. 225-236.
- [10] Diestel R., Gorbunov K. Yu., Jensen T. R. y Thomassen C. (1999). *Highly connected sets and the excluded grid theorem*. Journal of Combinatorial Theory, Series B 75, pp. 61-73.
- [11] Diestel, Reinhard (2005). *Graph Theory*. Estados Unidos: Springer-Verlag Heidelberg.

- [12] Dvořák, Zdeněk. (2015). *Characterizations of graph classes by forbidden configurations*. Computer Science Institute of Charles University.
- [13] Fellows, Michael (1987). *The Robertson-Seymour Theorems: A Survey of Applications*. Comtemporary Mathematics, vol. 89, pp. 1-18.
- [14] Kawarabayashi, Ken-ichi y Mohar, Bojan (2006). *Some Recent Progress and Applications in Graph Minor Theory*. Graph and Combinations.
- [15] Klotz, Walter (1989). *A constructive proof of Kuratowski's theorem*. Ars Combinatoria, Vol. 12, pp. 51-54.
- [16] Korach Ephraim y Solel Nir (1990). *Tree-width, path-width and cut-width*. Discrete Applied Mathematics, vol. 43, pp. 97-101.
- [17] Kuratowski, Kazimierz (1930). *Sur le problème des courbes gauches en topologie*. Graph and Combinations.
- [18] Lovász, László (2005). *Graph Minor Theory..* Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, Volume 43, Number 1, pp. 75-86.
- [19] Oporowski B., Oxley J. y Thomas R. (1993). *Typical subgraphs of 3- and 4-connected graphs*. Journal of Combinatorial Theory, Series B 57, pp. 239-257.
- [20] Reed R. (1997). *Tree width and tangles: a new connectivity measure and some applications*. London Math. Soc. Lecture Note Ser. 241, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, pp. 87-162.
- [21] Robertson N. y Seymour P. D. (1986). *Graph Minors. II. Algorithmic aspects of tree-width*. Journal of Algorithms, vol. 7, pp. 309-322.
- [22] Robertson N., y Seymour P. D. (1989). *Graph Minors. IV. Tree-Width and Well-Quasi-Ordering*. Journal of Combinatorial Theory, Series B 48, pp. 227-254.
- [23] Robertson N. y Seymour P. D. (1986). *Graph Minors. V. Excluding a planar graph*. Journal of Combinatorial Theory, Series B 41, pp. 92-114.
- [24] Robertson N. y Seymour P. D. (1990). *Graph Minors. VIII. A Kuratowski theorem for general surfaces*. Journal of Combinatorial Theory, Series B 48, pp. 255-288.
- [25] Robertson N. y Seymour P. D. (1995). *Graph minors. XIII. The disjoint paths problem*. Journal of Combinatorial Theory, Series B 63, pp. 65-110.

- [26] Robertson N. y Seymour P. D. (2003). *Graph minors. XVI. Excluding a non-planar graph*. Journal of Combinatorial Theory, Series B 89, pp. 43-76.
- [27] Robertson N., Seymour P. y Thomas R. (1994). *Quickly excluding a planar graph*. Journal of Combinatorial Theory, Series B 62, pp. 323-348.
- [28] Saha Ray, Santanu (2013). *Graph Theory with Algorithms and its Applications*. Springer India.
- [29] Tamar-Mattis, Squid (2015). *Planar Graphs and Wagner's and Kuratowski Theorems*. University of Chicago Math REU.
- [30] Thomassen, Carsten. *Kuratowski's Theorem*. The Technical University of Denmark.
- [31] Thomassen, Carsten. (1995). *Embedding and minors*. Handbook of Combinatorics, Vol. 1, Elsevier, Amsterdam, pp. 301-349.
- [32] West, Douglas B. (2001). *Introduction to Graph Theory (Second Edition)*. Pearson Education Inc.