



# **BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA**

---

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS  
POSTGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**

## **APROXIMACIÓN POLINOMIAL Y RACIONAL ASIMÉTRICA**

**TESIS  
PRESENTADA PARA OBTENER EL GRADO DE  
DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**

**P R E S E N T A  
M.C. JOSÉ NOBEL MÉNDEZ ALCOCER**

**DIRECTOR DE TESIS  
DR., DR. SC., PROF. MIGUEL ANTONIO JIMÉNEZ POZO**

**DICIEMBRE 2017**



**BUAP**

**DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR**  
**SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y**  
**ESTUDIOS DE POSTGRADO, FCFM-BUAP**  
**P R E S E N T E:**

Por este medio le informo que el(la) C:

**JOSÉ NOBEL MÉNDEZ ALCOCER**

estudiante del Doctorado en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 17 de noviembre de 2017, con la tesis titulada:

***“APROXIMACIÓN POLINOMIAL Y RACIONAL ASIMÉTRICA”***

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

**A T E N T A M E N T E.**

H. Puebla de Z, a 22 de noviembre de 2017

**DR. FERNANDO MACÍAS ROMERO**  
**COORDINADOR DEL POSTGRADO**  
**EN MATEMÁTICAS.**



DR.FMR/mtrv

# Dedicatoria

Dedico esta tesis a mis Padres y a mi hermano.

Papá: Tú me apoyaste durante toda mi vida y confiaste en mi para la realización de mis estudios, no tengo palabras para agradecerte lo que me has dado.

Mamá: Tú siempre me has entregado tu dedicación y tu cariño, y has sabido trasmitirme tus valores, siempre estaré en deuda contigo.

Gerardo: Siempre te estaré agradecido, por el ánimo que me infundiste para sortear todos los obstáculos que se presentaron en el desarrollo del presente trabajo y por la admiración que te generé al concluirlo exitosamente.

# Agradecimientos

Ante todo, agradezco a Dios, sin cuya Providencia nada podemos hacer.

A mis padres por darme la vida y formarme como persona, todo lo que haga será reflejo de lo que me inculcaron, y a mi hermano quien ha sido desde siempre mi mejor amigo.

De manera muy especial, a mi director de tesis, el Dr., Dr. Sc. Prof. Miguel Antonio Jiménez Pozo por su invaluable guía para la realización del presente trabajo. Ha sabido ser un excelente educador y fomentar en mi la esperanza de llegar a serlo yo.

A todos los profesores, que me impartieron clase, en especial a los miembros del Cuerpo Académico de Análisis Matemático de la FCFM BUAP, por su esmero y por su aprecio.

A mis compañeros, a quienes conocí en esta institución, por la calidez con que fui acogido.

A mis sinodales, por sus atinadas sugerencias para mejorar la presente.

A la VIEP-BUAP por apoyar el proyecto que me ayudó en la realización de este trabajo.

Al Consejo Nacional de Ciencias y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico con el cual me sostuve estos años.

# Introducción.

La teoría de la aproximación tiene una larga historia, aunque aparece como una rama independiente de la matemática en el inicio del siglo pasado. A grosso modo, se desarrolla en dos vertientes, cualitativa y cuantitativa. El aspecto cuantitativo consiste en dar estimaciones de los errores de aproximación, tanto directos como inversos. El aspecto cualitativo trata de dar teoremas de aproximación sin ocuparse de la velocidad de convergencia. Cuando uno se enfoca en este aspecto, como haremos en esta tesis, desea exhibir resultados que garanticen de ser posible, tanto la existencia como la unicidad de las aproximaciones, así como también algún teorema que caracterice la función de *mejor aproximación*.

El presente trabajo tiene como uno de sus objetivos establecer conexiones entre diferentes criterios para garantizar la unicidad en los problemas de mejor aproximación uniforme con pesos sensibles al signo, en los casos de aproximación con funciones en espacios de Haar. Establecer también, un criterio del tipo Teorema de Alternancia de Chebyshev que caracterice la función racional de mejor aproximación en el sentido de bandas de amplitudes variantes (concepto que aunque conocido aquí también se presenta), a una función continua sobre un intervalo cerrado, y condiciones para garantizar la existencia de ella, y su unicidad. Lo anterior con el fin de establecer un algoritmo de tipo Remez que bajo ciertas hipótesis conduzca a la mencionada función racional de mejor aproximación.

Se puede establecer una semejanza entre la definición de mejor aproximación asimétrica con pesos sensible al signo, y la mejor aproximación mediante bandas de amplitudes variantes, a su vez ambas son casos particulares de la definición de mejor aproximación uniforme pesada con pesos de Moursund.

En trabajos conocidos, véase [23], [16], [17], se muestra un análisis de la mejor aproximación polinomial algebraica mediante bandas de amplitudes variantes a una función continua, con resultados que nos garantizan la existencia, la unicidad y un teorema de alternancia que caracteriza dicho polinomio algebraico de mejor aproximación. Por lo que surge la idea de un estudio en parte semejante, cuando la clase aproximante es ahora un espacio de Haar de dimensión finita. Pues, el conjunto  $\mathcal{P}_n$  de los polinomios algebraicos de grado a lo más  $n \in \mathbb{N}$  sobre el intervalo  $[a, b]$ , con las operaciones usuales, es un subespacio de Haar de  $C[a, b]$  de dimensión  $n + 1$ . También el conjunto  $\mathcal{T}_n$  de los polinomios trigonométricos de grado a lo más  $n \in \mathbb{N}$  sobre el intervalo  $[0, 2\pi]$  es un espacio de Haar en el espacio de las funciones continuas  $2\pi$  periódicas  $C_{2\pi}$  de dimensión  $2n + 1$ .

Por otra parte el estudio de la mejor aproximación racional tanto algebraica como por funciones racionales generalizadas, a una función continua, presenta varias dificultades en el caso de la aproximación uniforme no pesada, (véase [32], [7], entre otros), mismas que también surgirían en la teoría de la aproximación mediante bandas de amplitudes variantes al comprender esta, a aquella.

En el primer capítulo serán esbozados tres desarrollos de investigación que condujeron a sendas teorías de aproximación, -que en nuestro contexto son equivalentes-, con las cuales se trabajará en los siguientes capítulos. Estos son la aproximación pesada con funciones de peso de Moursund, la aproximación con normas asimétricas de Krein y Nudel'man, en particular la aproximación con pesos sensibles al signo de Sevast'anov y Dolzhenko, y la aproximación mediante bandas de amplitudes variantes, introducida por Jiménez *et al.*

En el segundo capítulo de esta tesis, después de garantizar la existencia de elementos de mejor aproximación mediante bandas de amplitudes variantes de un espacio de Haar a una función continua dada, demostramos un teorema que caracterice dicho elemento. Este teorema es una generalización del criterio de Kolmogorov [3], de las dos formas del criterio de Chebotarev [28], -una de ellas se conoce como condición del cero en la envoltura convexa- y del antes mencionado teorema de alternancia de Chebyshev (vea [7]). También siguiendo algunos aspectos desarrollados

en [23] y [25] para aproximación polinomial algebraica, ejemplificaremos algunos resultados para la aproximación polinomial trigonométrica.

En el tercer capítulo abordamos la aproximación mediante bandas de amplitudes variantes a una función continua dada, considerando ahora como clase aproximante el conjunto de las funciones racionales generalizadas. Para ello recurrimos a una norma asimétrica *adecuada* de forma que el elemento de mejor aproximación *asimétrico* a una función continua dada, coincida con el de mejor aproximación mediante bandas de amplitudes variantes. Al igual que en el caso de la aproximación uniforme, logramos probar la existencia de la función racional algebraica de mejor aproximación, así como la unicidad bajo ciertas condiciones de la función racional generalizada de mejor aproximación asimétrica. También exhibimos una caracterización de la primera con un teorema de tipo Chebyshev y criterios de suficiencia y necesidad de la segunda. Todo lo anterior en la medida de lo posible, pues como es sabido, es imposible garantizar de una manera general la existencia de una función racional de mejor aproximación uniforme. Además adaptamos el concepto de normalidad a esta nueva aproximación y con ello el de hipernormalidad, para después ofrecer una caracterización de las funciones hipernormales y generar uno de los teoremas importantes de este trabajo (teorema 3.7). Asimismo logramos caracterizar el dominio de continuidad del operador que a cada función continua sobre un intervalo cerrado le asigna su función racional algebraica de mejor aproximación asimétrica. Lo anterior constituye el resultado más importante de este trabajo (teorema 3.15), el cual forma parte de un artículo que ha sido aprobado para su publicación [18]

En el último capítulo concentramos nuestros esfuerzos en analizar un algoritmo de tipo Rémez (ver [29], [30], [31]) para hallar la mejor aproximación racional algebraica asimétrica a una función continua dada. Se sabe que no se puede garantizar la convergencia del algoritmo de tipo Rémez cuando se busca la función racional algebraica de mejor aproximación a una función continua definida sobre un intervalo cerrado. Al ser nuestra aproximación de estudio un caso más general que aquella, es de prever, como en efecto ocurre, que se deba solicitar que la función a aproximar satisfaga ciertas condiciones para garantizar la convergencia. Más aún los puntos de partida seleccionados del dominio de definición para arrancar el algoritmo, no pueden ser arbitrarios. En este capítulo muestra-

mos un teorema que nos asegura la convergencia de dicho algoritmo, así como también ejemplificamos su aplicación.



# Índice general

<b>1. Problemas de aproximación asimétrica.</b>	<b>9</b>
1.1. Aproximación mediante bandas de amplitudes variantes. . .	11
1.2. Funciones de peso tipo Moursund. . . . .	13
1.3. Normas asimétricas de Krein. . . . .	16
<b>2. Aproximación asimétrica mediante los sistemas de Chebyshev, con bandas de amplitudes variantes.</b>	<b>20</b>
2.1. Introducción. . . . .	20
2.2. Definición de mejor aproximación mediante los sistemas de Chebyshev, con bandas de amplitudes variantes. . . . .	23
2.3. Existencia de polinomios generalizados de mejor aproximación . . . . .	25
2.4. Caracterización y unicidad de los polinomios generalizados de mejor aproximación. . . . .	26
2.5. El caso trigonométrico. . . . .	37
<b>3. Caracterización de la mejor aproximación asimétrica racional.</b>	<b>43</b>
3.1. Introducción. . . . .	43
3.2. Definición de una norma asimétrica adecuada . . . . .	44
3.3. Existencia de la mejor aproximación racional algebraica asimétrica. . . . .	47
3.4. Caracterización de la mejor aproximación racional. . . . .	51
3.5. Unicidad de la mejor aproximación racional. . . . .	57
3.6. Normalidad de las funciones continuas. . . . .	59
3.7. Continuidad del operador $T_{n,m}^{h_1,h_2}$ . . . . .	69

<b>4. Algoritmo de Rémez para la aproximación asimétrica por funciones racionales.</b>	<b>86</b>
4.1. Algoritmo del tipo Rémez. . . . .	87
4.2. Ejemplo. . . . .	97
<b>Bibliografía.</b>	<b>105</b>

# Capítulo 1

## Problemas de aproximación asimétrica.

Los problemas de aproximación están relacionados usualmente con alguna distancia capaz de medir precisamente esta aproximación. Lo dicho no excluye, por supuesto, generalizaciones más abstractas, como pudiera ser el uso de vecindades topológicas.

Los problemas más frecuentes de aproximación se plantean en espacios de funciones continuas o de funciones integrables. Por ejemplo, si se modela un problema de corriente eléctrica en el cual se requiere minimizar picos, la norma infinito ( $d_\infty$ ) es usualmente la más utilizada. Pero si en este mismo problema, queremos modelar el transporte de la energía, se debería utilizar la norma de  $L^1$ . Sin embargo, dadas las dificultades de cálculo en  $L^1$  es típico cambiar la norma por la de  $L^2$ , que en los problemas de aplicaciones arrojan resultados suficientemente cercanos al buscado.

Como se conoce, una función objetivo se aproxima con la distancia deseada mediante otras funciones de propiedades conocidas y de más fácil manejo para el cálculo, v. gr. polinomios algebraicos, trigonométricos, funciones racionales, splines, funciones radiales, wavelets, etc.

Lo que resulta un poco menos conocido es que en algunos problemas la aproximación tiene un carácter asimétrico. Esto tiene un origen, a veces matemático, a veces físico, por ejemplo, en determinadas mediciones, las condiciones físicas nos permiten medir mejor el error por exceso que

por defecto o inversamente. Obviamente, nos interesaría en tal situación aproximar las funciones que ajusten estos errores de la manera más aproximada y no tomando el error absoluto, (véase [12]). Este es un problema de origen físico que conduce a un tipo de aproximación asimétrica. Una aproximación asimétrica de origen propiamente matemático, puede venir dada al obtener acotaciones superiores e inferiores. En un momento dado el estudio teórico nos puede conducir a lograr aproximaciones más precisas por encima o por debajo, del valor exacto.

El desarrollo del concepto de distancia nos conduce al estudio de distancias y normas asimétricas. Estudio que, por otra parte, también tiene un origen totalmente teórico y abstracto. En la definición axiomática de distancia, la desigualdad triangular es razonablemente intuitiva y necesaria en muchos de los resultados de los espacios métricos. La simetría, sin embargo, puede ser y de hecho es objetada, lo más razonable desde el punto de vista práctico en muchos problemas, es que la distancia de  $A$  a  $B$  sea diferente de la distancia de  $B$  a  $A$ , como lo ilustra el recorrido en auto para transportarse entre dos puntos de una ciudad.

Por tanto, es de esperar que a partir del concepto de distancia, se haya intentado desde épocas tempranas desarrollar una teoría de métricas sin la hipótesis de simetría. Algunos resultados tempranos en esta dirección pueden encontrarse en [20].

Lo que parece mucho menos intuitivo es la violación del requerimiento de la no anulación de la distancia entre dos puntos diferentes. Y sin embargo, no solamente se ha escrito una teoría general sobre distancias asimétricas incluyendo esta posibilidad sino que, incluso, ha sido motivada por problemas prácticos de la teoría que estudia la comparación entre algoritmos computacionales, (vea [2], [10], [11], [33], [34], y otras no citadas por no extender las referencias).

Desde el punto de vista de la teoría de la aproximación, citaremos tres puntos de partida, todos con enfoque iniciales diferentes, pero conducentes finalmente a resultados similares. Un esbozo de los mismos se desarrolla en los epígrafes que siguen.

## 1.1. Aproximación mediante bandas de amplitudes variantes.

En [12], Guerra y Jiménez consideran un problema *mixto* de aproximación a una función en la norma  $L^2$ , por polinomios algebraicos, sujeto a un conjunto de restricciones definidas con la norma del supremo, desde el punto de vista de la programación semi-infinita. De acuerdo al teorema de norma mínima para espacios de Hilbert, dicho problema tiene una única solución. Con el fin de demostrar la existencia de una medida de Borel positiva con la cual establecer un problema de optimización sin restricciones cuya única solución sea exactamente la misma que la del problema anterior, Guerra y Jiménez aplican a dicho problema de aproximación, tras comprobar que verifica las hipótesis necesarias, una versión del teorema de Karush-Khun-Tucker.

Para poder aplicar dicho teorema las hipótesis del problema mixto de aproximación deben cumplir con una cierta *cualificación de la restricción*. Como consecuencia del Lema de Caratheodory, y del hecho que el conjunto de los gradientes de las funciones restricciones evaluados en todos los puntos donde cada una de dichas funciones es respectivamente activa, es un conjunto linealmente independiente, se deduce que el vector nulo no se encuentra en la frontera de la envoltura convexa del mencionado conjunto de gradientes. Luego tenemos dos posibilidades. Por un lado, si el vector nulo se encuentra en el complemento de la envoltura convexa, i.e. en el exterior de ella, debido a un caso clásico del teorema de Hahn-Banach se verifica otra condición en la cual Guerra-Jiménez se apoyan para justificar la aplicación del teorema de Karush-Khun-Tucker. Por otro lado, si el vector nulo se encuentra en el interior de la mencionada envoltura convexa, entonces la cualificación de la restricción se verifica por vacuidad, al no existir un vector no nulo que satisfaga la hipótesis en que se apoya la cualificación utilizada.

Debido a que el conjunto de puntos factibles del problema está definido únicamente con restricciones con desigualdades, entonces la hipótesis de que el vector nulo se encuentre en la envoltura convexa antes dicha, es una violación de una cualificación de la restricción para problemas semi-infinitos, conocida como cualificación extendida de la restricción de

Mangasarian-Fromowitz. Es decir, el teorema de Karush-Khun-Tucker es aplicable al problema dado, aún cuando la antes mencionada cualificación extendida se viole en algún punto del conjunto factible.

Con el fin de arrojar luz sobre el uso de la hipótesis por vacuidad, en [13] se exhibe y demuestra un resultado que afirma que el vector nulo pertenece a la envoltura convexa del conjunto de gradientes si y sólo si el conjunto factible del problema contiene un solo elemento. En este caso, dicho elemento se puede caracterizar con una forma extendida del teorema de alternancia de Chebyshev.

Como se puede ver en [15], cuando se desea aplicar el teorema de Karush-Khun-Tucker para optimización semi-infinita, a un problema mixto de aproximación por elementos de un espacio de Haar, se debe cumplir con alguna cualificación de la restricción. Al igual que en la aproximación por polinomios algebraicos, esa cualificación se cumple, aunque el vector nulo se encuentre en la envoltura convexa del conjunto de los gradientes de las restricciones en los puntos donde estas son activas. Esto último se verifica si y sólo si el conjunto factible tiene un solo elemento. Lo que nos conduce a una caracterización del polinomio generalizado correspondiente a dicho elemento, con una versión extendida del teorema de alternancia de Chebyshev.

El resultado precedente, fue una de las motivaciones principales para el estudio del método nombrado como aproximación mediante bandas variantes, que fue llevado a cabo por Jiménez y Martínez (cfr.[17] y [23]), como una generalización de la mejor aproximación de Chebyshev, cuando se quiere que las bandas formadas por la función más/menos el error se formen ahora al sumar y restar funciones continuas no negativas multiplicadas por un parámetro  $\lambda \geq 0$ . Se definen así los conjuntos que podemos denotar  $M_\lambda$ , y la mejor aproximación se mide como el ínfimo de estos  $\lambda$ , para los cuales  $M_\lambda \neq \emptyset$ . En este contexto se formula un teorema de alternancia de Chebyshev generalizado para caracterizar al polinomio algebraico de mejor aproximación a una función continua; pues como se sabe el teorema de alternancia de Chebyshev es la base para el estudio de la unicidad. En el siguiente capítulo un análisis de la aproximación mediante bandas variantes para funciones continuas por polinomios generalizados se llevará a cabo.

## 1.2. Funciones de peso tipo Moursund.

En los años sesenta Moursund, que según sus propias palabras deseaba investigar una aproximación asimétrica, así como otros matemáticos que se interesaron en lo mismo, llevan a cabo un amplio estudio sobre un tipo de *mejor aproximación pesada* a una función continua sobre un conjunto compacto  $X$ , de una clase aproximante dada (v. gr. polinomios generalizados, funciones racionales, polinomios generalizados interpolantes, etc.). En 1966, Moursund [26] introduce una función peso generalizada con ciertas características, mismas que podrían aumentar en número según necesite el problema de estudio. Originalmente una función  $W$  definida sobre  $X \times (-\infty, \infty)$  con valores en los reales extendidos  $[-\infty, \infty]$ , para considerarse una función peso generalizada, debía cumplir las características siguientes:

1. Para cualquier  $x \in X$  fijo, la función  $W(x, \cdot)$  es una función monótona no decreciente en  $(-\infty, \infty)$ , i.e., si  $x \in X, y, z \in \mathbb{R}$  son tales que  $y \leq z$  entonces  $W(x, y) \leq W(x, z)$ .
2.  $\forall x \in X \forall y \in \mathbb{R}, \operatorname{sgn} W(x, y) = \operatorname{sgn} y$ .
3.  $\forall x \in X, \lim_{|y| \rightarrow \infty} |W(x, y)| = \infty$ .

Con ayuda de tales pesos, en [26] Moursund define el polinomio generalizado de mejor aproximación a una función  $f$  definida sobre  $X$ , de la manera siguiente: si  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  son funciones de valores reales definidas sobre  $X$  y linealmente independientes, entonces una función

$$P(x; \alpha) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x), \quad \alpha = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$$

se considerará una aproximación a  $f$  si

$$\sup_{x \in X} |W(x, P(x; \alpha) - f(x))| < \infty.$$

Si además cumple que

$$\forall \beta \in \mathbb{R}^n, \sup_{x \in X} |W(x, P(x; \alpha) - f(x))| \leq \sup_{x \in X} |W(x, P(x; \beta) - f(x))|, \quad (1.1)$$

se dice que el polinomio  $P(x; \alpha)$  es una *mejor aproximación* a  $f$ .

Posteriormente fue conveniente adaptar los requerimientos que una función debía cumplir para ser considerada una función peso generalizada. Las características que la función  $W$  debía ahora poseer son:

**a**  $\forall x \in X \forall y \in \mathbb{R}, \operatorname{sgn} W(x, y) = \operatorname{sgn} y$

**b** Para cada  $x \in X$  fija,  $\lim_{|y| \rightarrow \infty} |W(x, y)| = \infty$ ,

**c**  $\forall t \neq 0 \forall x \in X, \lim_{\substack{y \rightarrow t \\ |y| < |t|}} W(x, y) = W(x, t)$ ,

**d** Si  $g(x)$  es una función de valores reales definida sobre  $X$  tal que

$$\sup_{x \in X} |W(x, g(x))| < \infty,$$

entonces para cada subconjunto compacto  $Y \subseteq X$  y para cada  $\epsilon > 0$ ,

$$\sup_{x \in Y} |W(x, g(x))| < \max \left\{ \sup_{x \in Y} |W(x, g(x) + \epsilon)|, \sup_{x \in Y} |W(x, g(x) - \epsilon)| \right\}.$$

Con el fin de evitar que aún habiendo una aproximación a  $f$  definida sobre  $X$ , no exista un polinomio generalizado de mejor aproximación a dicha función, fue que se agregó la condición **c**, y para asegurar que el funcional

$$M[g] := \sup_{x \in X} |W(x, g(x))|$$

fuera sensible a pequeños cambios uniformes en las funciones a aproximar, se añadió la condición **d**. Es de observar que las condiciones **a**, **c** y **d** implican la propiedad de monotonicidad en la anterior definición.

Si  $X$  es un espacio métrico compacto que contiene al menos  $n \in \mathbb{N}$  elementos, y las funciones  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  definidas sobre  $X$  que constituyen la base de un subespacio vectorial desde el cual deseamos aproximar, son continuas de valores reales y forman un sistema de Chebyshev de orden



$n$ . Moursund exhibe un teorema que nos garantiza que la mejor aproximación a una función  $f$  definida sobre  $X$  es única, bajo ciertas condiciones. Entendiendo desde luego que en la definición 1.1, el peso  $W$  cumple las condiciones **a-d**.

En sucesivos artículos, Moursund realiza un amplio estudio acerca de la *mejor aproximación pesada* de una clase aproximante a una función  $f$  continua de valores reales, definida en un espacio métrico compacto  $X$ . Las clases aproximantes pueden ser conformadas por diferentes familias de funciones de  $C(X)$ , v. gr. polinomios algebraicos de grado a lo más  $n \in \mathbb{N}$ , polinomios generalizados de Chebyshev, funciones racionales sin polos en  $X$ , etc. El objetivo es hallar un elemento  $p$  de la clase aproximante  $K$  que minimice de ser posible

$$\sup_{x \in X} |W(x, f(x) - p(x))| = \|W(x, f(x) - p(x))\|$$

sobre todo  $K$ . La definición de la función *peso generalizado* como ya se ha mencionado, no es la misma en cada caso.

En [27], como su título lo indica, se estudia la mejor aproximación racional uniforme usando una función peso generalizada  $W$ , entendida esta como una función de valores reales definida sobre  $X \times (-\infty, \infty)$  que cumple

- $W(x, y)$  es continua sobre  $X \times (-\infty, \infty)$ ;
- $\forall x \in X, \text{sgn } W(x, y) = \text{sgn } y$ ;
- Para cualquier  $x \in X$  fijo, la función  $W(x, \cdot)$  es una función monótona estrictamente creciente en  $(-\infty, \infty)$ , i.e. si  $x \in X, y, z \in \mathbb{R}$  tales que  $y < z$  entonces  $W(x, y) < W(x, z)$ .
- $\forall x \in X, \lim_{|y| \rightarrow \infty} |W(x, y)| = \infty$

En el caso de la mejor aproximación racional pesada *con rangos restringidos* a una función  $f \in C(X)$ , donde  $X$  es un espacio topológico compacto, Moursund, (véase [21]) propone con la ayuda de dos funciones reales positivas y continuas sobre el mismo espacio  $l$  y  $u$ , que la función peso  $W$  definida sobre  $X \times \mathbb{R}$  cumpla las propiedades siguientes:

- $W$  es continua en  $D := \{(x, y) | x \in X \times \mathbb{R} : l(x) \leq y \leq u(x)\}$ ,
- si  $(x, y) \in D, (x, z) \in D$  y  $y < z$  entonces  $W(x, y) < W(x, z)$ ,
- si  $(x, y) \in D$  entonces  $\text{sgn } W(x, y) = \text{sgn } y$ ,
- si  $x \in X$  y  $y > u(x)$  entonces  $W(x, y) = \infty$ ,
- si  $x \in X$  y  $y < l(x)$  entonces  $W(x, y) = -\infty$ .

Dicho autor considera fundamental garantizar, siempre que sea posible, la existencia de un teorema que caracterice la mejor aproximación pesada a una función dada. Por ejemplo con un teorema de alternación tipo Chebyshev adecuado a ese peso y a esa familia. En [27], se exhibe un teorema de alternación que caracteriza la mejor aproximación racional generalizada pesada y de forma más particular la mejor aproximación racional ordinaria.

También se puede estudiar el caso en el que las funciones de la clase aproximante sean tales que no sólo aproximen a  $f$  sino también la interpolen en ciertos puntos, por ejemplo cuando deseamos analizar la aproximación polinomial algebraica pesada con interpolación, (véase [22]), la función  $W : X \times (-\infty, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$  será considerada una función peso generalizada si

- $\forall x \in X, \text{sgn } W(x, y) = \text{sgn } y$ ,
- las funciones  $W(x, y)$  y  $\partial W(x, y) / \partial y$  son continuas,
- para cada  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta(\epsilon) > 0$  tal que si  $x \in X$  y  $|y| \geq \epsilon$ , entonces

$$\partial W(x, y) / \partial y \geq \delta(\epsilon).$$

### 1.3. Normas asimétricas de Krein.

Hacia los años 1940 Krein consideró y bautizó con el nombre normas asimétricas a un funcional  $\Lambda$  sobre un espacio vectorial real  $E$ , que satisface las propiedades siguientes:

- $\forall f \in E \setminus \{0\}, \Lambda(f) > 0$

- $\forall f, g \in E, \Lambda(f + g) \leq \Lambda(f) + \Lambda(g)$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+ \forall f \in E, \Lambda(\alpha f) = \alpha \Lambda(f)$

Observe que para  $\alpha < 0$ ,  $\Lambda(\alpha f) = |\alpha| \Lambda(-f)$ , pero no necesariamente  $\Lambda(f) = \Lambda(-f)$ .

Para simbolizar el funcional  $\Lambda$ , Krein utiliza la sugestiva notación  $\Lambda = \|\cdot\|$ .

Un ejemplo típico desarrollado por Krein y empleado sistemáticamente en su libro con Nudel'man [19] es el siguiente. Sea  $E = C[0, 1]$ ,  $u, v > 0$ ,  $u, v \in C[0, 1]$  y definamos para toda  $f \in C[0, 1]$

$$\|f\|_{u,v} = \int (f^+ u + f^- v)(x) dx \quad (1.2)$$

donde  $f^+$  y  $f^-$  son las partes positivas y negativas de  $f \in E$  respectivamente, es decir

$$f^+ := \frac{|f| + f}{2} \text{ y } f^- := \frac{|f| - f}{2}.$$

El par de funciones  $u$  y  $v$  fueron denominadas posteriormente por Dolzhenko y Sevast'yanov [9] como un peso sensible al signo. A este funcional regresaremos más adelante.

Recordemos que existe una relación muy estrecha entre una norma y su bola unidad. Para simplificar, y como en esta tesis estudiaremos funciones reales consideramos sólo espacios lineales sobre  $\mathbb{R}$ . Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio normado real y  $B$  su bola unidad abierta, i.e. sea  $B = \{x \in E \mid \|x\| < 1\}$ ; denotamos por  $\bar{B}$  su clausura. Es decir  $\bar{B}$  es la bola unidad cerrada. Sea  $V$  cualquier conjunto convexo tal que  $B \subset V \subset \bar{B}$ , sea  $\Lambda_V$  el funcional de Minkowski asociado a  $V$ . El cual se define como es usual mediante

$$\Lambda_V(x) = \inf\{\lambda \geq 0 \mid x \in \lambda V\}.$$

Observemos que  $\Lambda_V$  está bien definido para todo  $x \in E$  y que además  $\Lambda_V = \Lambda_B = \Lambda_{\bar{B}}$ . El funcional de Minkowski nos sirve para caracterizar todas las normas sobre  $E$  (y en un contexto más general, las seminormas en los espacios vectoriales topológicos localmente convexos).

Para comprender lo que ocurre en el caso de las normas asimétricas debemos profundizar en este estudio.

Sea  $V$  un conjunto convexo, absorbente y simétrico con respecto al origen. Se puede probar que  $\Lambda_V$  es una norma y que si  $B$  es su bola unidad abierta se cumple la relación

$$B \subset V \subset \bar{B}.$$

El concepto se puede generalizar ligeramente en el sentido de que  $V$  no necesita ser convexo pero que la afectación de la convexidad sea relativa a algunos puntos de lo que será su frontera con respecto a la norma. No es menester incluir estos casos excepcionales.

Esta caracterización de las normas tiene implicaciones inmediatas. Pero hay diferencias entre los espacios lineales de dimensión finita e infinita. Por ejemplo en dimensión finita, si  $V$  no hubiese sido simétrico en puntos fuera de su frontera con respecto al origen, la simetría de  $\Lambda_V$  se pierde, pero todas las normas son equivalentes. En efecto, si  $E$  es de dimensión finita, y  $\|\cdot\|$  es cualquier norma en  $E$ , el hecho de que  $V$  sea absorbente implica que  $V$  contiene una bola centrada en cero con respecto a la topología de la norma  $\|\cdot\|$ . Por tanto, en términos topológicos si definimos una topología por una norma siguiendo los cánones usuales, todas las normas y todas las normas asimétricas son equivalentes en el sentido de que generan la misma topología.

La situación cambia radicalmente en el caso de espacios de dimensión infinitas. Consideremos el ejemplo siguiente, en el funcional de Krein ya definido en 1.2 con peso sensible al signo, sean  $u, v \in C[0, 1]$ ,  $u(x) = 1$ ,  $v(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$ , y sea la familia de funciones  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C[0, 1]$  definidas como  $f_n(x) = (n+1)x^n$  entonces

$$\|f_n|_{u,v} = \int_0^1 f_n(x) \cdot u(x) dx = 1$$

pero

$$\| -f_n|_{u,v} = \int_0^1 -(n+1)x^n e^{\frac{1}{x-1}} \rightarrow 0.$$

Por tal motivo, Jiménez ha sugerido incluir una condición que denominó de no degeneración y que establece lo siguiente:

$$\exists k > 0 \forall x \in E, \quad \|-x\| \leq k\|x\|.$$

En particular como  $\|x\| \leq k\|-x\| \leq k^2\|x\|$  luego  $k \geq 1$ . En el ejemplo anterior para la no degeneración se necesitan que existan constantes  $A, B > 0$  tales que  $Au \leq v \leq Bu$ . Esto fue utilizado por Margarito Hdez. en su tesis doctoral (ver [14]).

Como se menciona en los ya citados [9] y [19], el funcional referido en 1.2 puede ser considerado también bajo la norma del supremo de la forma siguiente

$$\|f\|_{u,v} := \sup_{x \in X} (f^+(x)u(x) + f^-(x)v(x)),$$

donde  $X$  es un subconjunto compacto real de un intervalo cerrado, las funciones  $u, v \in C(X)$  son continuas positivas sobre  $X$  y  $f$  una función continua dada.

Dada una clase no vacía de funciones  $H \subset C(X)$  y una función  $f \in C(X)$ , se define la *mejor aproximación asimétrica* a  $f$  de  $H$  relativa a  $\|\cdot\|_{u,v}$  como el valor

$$e(f) = \inf_{h \in H} \|h - f\|.$$

Si existe algún elemento  $g \in H$  tal que  $e(f) = \|g - f\|$ , entonces dicho elemento será nombrado como un elemento de mejor aproximación asimétrica.

## Capítulo 2

# Aproximación asimétrica mediante los sistemas de Chebyshev, con bandas de amplitudes variantes.

### 2.1. Introducción.

Revisaremos, a continuación, algunos conceptos básicos y de uso frecuente en la teoría de la aproximación, que retomaremos después en el contexto de aproximación asimétrica en la siguiente sección.

El material expuesto en este capítulo está básicamente contenido en [24]. En este se presenta al igual que aquí, de manera unificada, material interrelacionado de diversas fuentes, con contribuciones nuestras, de manera organizada.

Sea  $\{g_1, \dots, g_n\}$  un sistema de funciones reales continuas sobre el intervalo  $[a, b]$  que cumplen la condición de Haar, es decir, para todo conjunto de  $n$  puntos distintos  $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$  sobre el intervalo  $[a, b]$  se verifica que el determinante:

$$\begin{vmatrix} g_1(x_1) & \dots & g_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ g_1(x_n) & \dots & g_n(x_n) \end{vmatrix}$$

es distinto de cero. Dicho de otra manera que los  $n$  vectores  $(g_1(x_1), \dots, g_n(x_1)), \dots, (g_1(x_n), \dots, g_n(x_n))$  son linealmente independientes. A un sistema de funciones que cumplen la condición de Haar también se le nombra como sistema de Chebyshev.

Se define un Espacio de Haar, como un subespacio de  $C[a, b]$  de dimensión finita con una base que cumple la condición de Haar. Cualquier base de un Espacio de Haar, cumple la condición de Haar.

Se puede comprobar que el conjunto  $P_n$  de los polinomios algebraicos de grado a lo más  $n$  sobre el intervalo  $[a, b]$ , con las operaciones usuales es un subespacio de Haar de  $C[a, b]$  de dimensión  $n + 1$ , con base  $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ . También el conjunto  $\mathcal{T}_n$  de los polinomios trigonométricos de grado a lo más  $n$  sobre el intervalo  $[0, 2\pi]$  es un espacio de Haar en el espacio de las funciones continuas  $2\pi$  periódicas  $C_{2\pi}$  de dimensión  $2n + 1$ , con base

$$\{1, \sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx\},$$

donde como es habitual,  $0$  y  $2\pi$  se identifican.

Del teorema clásico de Alternancia de Chebyshev, se obtiene una caracterización de los polinomios algebraicos de mejor aproximación de grado a lo más  $n$ , a una función continua dada sobre un intervalo compacto. Podemos generalizar este teorema cuando el conjunto aproximante sea cualquier subespacio de Haar de  $C[a, b]$  de la manera siguiente.

### **Teorema 2.1**

*Sea  $\{g_1, \dots, g_n\}$  un sistema de elementos de  $C[a, b]$  que cumplen la condición de Haar. Para que el polinomio generalizado  $P = \sum c_i g_i$  sea una mejor aproximación a  $f \in C[a, b]$  dada, es necesario y suficiente que la función  $r = f - P$  tenga un conjunto alternante de  $n + 1$  puntos en  $[a, b]$ .*

Chebotarev exhibe en dos formas un criterio para caracterizar el elemento de mejor aproximación uniforme en  $P_n$  a una función continua dada, que no sea ella misma un polinomio (véanse [4] y [5]). Si queremos que el conjunto aproximante a la función  $f \in C[a, b]$  sea cualquier subespacio

de Haar de  $C[a, b]$ , entonces ambas formas del criterio se pueden generalizar. Quedarían concentradas de la manera siguiente.

Sea  $E(f - p) := \{x \in [a, b] \mid |(f - p)(x)| = \|f - p\|\}$  y para  $x \in [a, b]$  definimos  $v(f - p, x) := \text{sign}(f(x) - p(x))(g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x))$ .

### Teorema 2.1

Sea  $\{g_1, \dots, g_n\}$  un sistema de elementos de  $C[a, b]$  que cumplen la condición de Haar, y sea  $f \in C[a, b]$  tal que no es combinación lineal de  $\{g_1, \dots, g_n\}$ ; entonces los enunciados siguientes son equivalentes:

- a) el polinomio generalizado  $p = \sum c_i g_i$  es de mejor aproximación a  $f$ .
- b) para todo  $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  existen  $x_c, y_c \in E(f - p)$  tales que  $v(f - p, x_c) \cdot c > 0$  y  $v(f - p, y_c) \cdot c < 0$ .
- c) existen  $x_0 < x_1 < \dots < x_n \in E(f - p)$  tales que  $0 \in \text{int } \text{conv}\{v(f - p, x_0), \dots, v(f - p, x_n)\}$ .

Partiendo de este criterio, Kolmogorov llegó a desarrollar una caracterización del polinomio generalizado de mejor aproximación "[8]" que enunciamos a continuación.

### Teorema 2.2

Sea  $X_n$  un espacio de Haar en  $C[a, b]$  de dimensión  $n$ , entonces  $P \in X_n$  es una mejor aproximación de  $f \in C[a, b] \setminus X_n$  si y sólo si para cada  $Q \in X_n$

$$\min_{x \in E(f-P)} \{[f(x) - P(x)][Q(x) - P(x)]\} \leq 0.$$

En [16], se define la aproximación mediante bandas variantes, para aproximar una función continua sobre un intervalo cerrado  $[a, b]$  con polinomios algebraicos de grado a lo más  $n \in \mathbb{N}$ , de la manera siguiente.

Sean  $f, h_1, h_2 \in C[a, b]$  tales que  $h_1, h_2 > 0$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces para cada  $\lambda \geq 0$  definimos el conjunto:

$$M_\lambda := \{p \in P_n \mid f - \lambda h_1 \leq p \leq f + \lambda h_2\}.$$

Con ayuda de estos conjuntos podemos definir una mejor aproximación y con esta definir lo que entendemos por polinomio algebraico de mejor aproximación en un nuevo contexto.



**Definición 2.1**

Sean  $f, h_1, h_2 \in C[a, b]$  tales que  $h_1, h_2 > 0$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Definimos la mejor aproximación de  $P_n$  a  $f$ , relativo a  $h_1$  y  $h_2$  como

$$\lambda_n := \inf\{\lambda \geq 0 \mid M_\lambda \neq \emptyset\}.$$

**Definición 2.2**

Sean  $f, h_1, h_2 \in C[a, b]$  tales que  $h_1, h_2 > 0$  y  $\lambda_n$  la mejor aproximación de  $P_n$  a  $f$  relativo a  $h_1$  y  $h_2$ ; entonces si  $p \in M_{\lambda_n}$ , decimos que  $p$  es un **polinomio algebraico de mejor aproximación** a  $f$  de grado a lo más  $n$  relativo a  $h_1$  y  $h_2$ .

Como se afirma en [16], siempre es posible hallar un polinomio algebraico de mejor aproximación de  $P_n$  a una función dada y además este es único.

Se conoce además una forma de caracterizar dicho polinomio que es una generalización del teorema de Alternancia de Chebyshev.

**Teorema 2.3**

Sean  $f, h_1, h_2 \in C[a, b]$ ,  $h_1, h_2 > 0$  y  $n \in \mathbb{N}$ . El polinomio algebraico de grado a lo más  $n$ ,  $p_n^*$  es de mejor aproximación a  $f$  relativo a  $h_1$  y  $h_2$ , si y sólo si, la función  $p_n^* - f$  coincide alternadamente en  $n + 2$  puntos consecutivos de  $[a, b]$ , con las funciones  $-\lambda_n h_1$  y  $\lambda_n h_2$ .

En [28], donde se suman varios artículos de estos autores utilizando el funcional de Krein, se debilita la continuidad de  $h_1$  y  $h_2$  a una continuidad lateral. En realidad, todos los resultados que pueden obtenerse utilizando el funcional de Krein, pueden obtenerse utilizando bandas variantes y recíprocamente. La diferencia, mas que en las propias demostraciones se concentra en la interpretación geométrica.

## 2.2. Definición de mejor aproximación mediante los sistemas de Chebyshev, con bandas de amplitudes variantes.

Las definiciones de la sección anterior se basan en que el conjunto aproximante sea el de los polinomios algebraicos de grado a lo más  $n$  para un  $n \in \mathbb{N}$  dado. Nosotros ahora, generalizaremos estas definiciones cuando

el conjunto aproximante es un espacio de Haar cualquiera de dimensión  $n$ , con  $n \in \mathbb{N}$ .

Sean  $f, h_1, h_2 \in C[a, b]$  tales que  $h_1, h_2 > 0$  y  $g_1, \dots, g_n \in C[a, b]$  tales que cumplen la condición de Haar con  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces para cada  $\lambda \geq 0$  definimos el conjunto:

$$M_\lambda := \left\{ p = \sum_{i=1}^n c_i g_i \mid f - \lambda h_1 \leq p \leq f + \lambda h_2 \right\},$$

con ayuda de estos conjuntos damos una definición de mejor aproximación y a su vez definimos los polinomios generalizados de mejor aproximación.

**Definición 2.3**

Sean  $f, h_1, h_2 \in C[a, b]$ ,  $h_1, h_2 > 0$  y  $g_1, \dots, g_n \in C[a, b]$  tales que cumplen la condición de Haar con  $n \in \mathbb{N}$ . Definimos la mejor aproximación del espacio de Haar a  $f$ , relativo a  $h_1$  y  $h_2$  como sigue:

$$\lambda_n := \inf\{\lambda \geq 0 \mid M_\lambda \neq \emptyset\}.$$

Nota:  $\lambda_n$  es el ínfimo de un conjunto no vacío (lo que se probará más adelante) acotado inferiormente; por lo tanto está bien definida, su valor puede ser cero. Este caso se presenta cuando la función por aproximar es ella misma un polinomio generalizado de ese espacio de Haar.

**Definición 2.4**

Sean  $f, h_1, h_2 \in C[a, b]$ ,  $h_1, h_2 > 0$ ,  $g_1, \dots, g_n \in C[a, b]$  tales que cumplen la condición de Haar con  $n \in \mathbb{N}$  y  $\lambda_n$  la mejor aproximación del espacio de Haar a  $f$  relativo a  $h_1$  y  $h_2$ , entonces, si  $p \in M_{\lambda_n}$  decimos que  $p$  es un **polinomio generalizado de mejor aproximación** a  $f$  relativo a  $h_1$  y  $h_2$ .

Veamos ahora un par de propiedades de estos conjuntos:

1. Si  $\lambda_1 \leq \lambda_2$  entonces  $M_{\lambda_1} \subseteq M_{\lambda_2}$ . Luego la familia de los conjuntos  $\{M_\lambda\}_{\lambda \geq 0}$  es creciente con el orden definido por la inclusión cuando crece el parámetro no numérico  $\lambda$ .

2. Para un  $\lambda \geq 0$  dado;  $M_\lambda$  se puede identificar con un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  a partir de los coeficientes de los polinomios generalizados, el cual resulta ser cerrado y acotado, por ende compacto bajo la norma euclidiana (vea [24]), por tanto,  $M_\lambda$  también lo es.

### 2.3. Existencia de polinomios generalizados de mejor aproximación

En esta sección, nos proponemos garantizar la existencia, de al menos un polinomio generalizado de mejor aproximación para una función  $f \in C[a, b]$  dada, relativo a  $h_1$  y  $h_2$ , donde  $h_1, h_2 \in C[a, b]$  y  $h_1, h_2 > 0$ .

**Lema 2.1**

Sean  $f, h_1, h_2 \in C[a, b]$ ,  $h_1, h_2 > 0$ ,  $g_1, \dots, g_n \in C[a, b]$  tales que cumplen la condición de Haar con  $n \in \mathbb{N}$ , entonces existe  $\lambda > 0$  tal que  $M_\lambda \neq \emptyset$ .

**Demostración:** Tomemos un polinomio generalizado cualquiera  $p = \sum_{i=1}^n c_i g_i$ , y establezcamos los siguientes parámetros:

$$m = \min_{x \in [a, b]} (p - f)(x), \quad M = \max_{x \in [a, b]} (p - f)(x), \quad M_1 = \max_{x \in [a, b]} (-h_1)(x),$$

$$\text{y } m_2 = \min_{x \in [a, b]} (h_2)(x).$$

Observemos que  $M_1 < 0$  y  $m_2 > 0$ . Se puede asegurar que existen  $\mu_1, \mu_2 > 0$  tales que

$$m \geq \mu_1 M_1 \text{ y } M \leq \mu_2 m_2.$$

Tomando

$$\lambda = \max\{\mu_1, \mu_2\},$$

tenemos que

$$f - \lambda h_1 \leq f - \mu_1 h_1 \leq f + \mu_1 M_1 \leq f + m \leq p$$

y

$$p \leq f + M \leq f + \mu_2 m_2 \leq f + \lambda m_2 \leq f + \lambda h_2,$$

es decir,

$$p \in M_\lambda.$$

Por lo tanto, existe  $\lambda > 0$  tal que

$$M_\lambda \neq \emptyset.$$



Como consecuencia de este resultado, el conjunto  $\{\lambda \geq 0 \mid M_\lambda \neq \emptyset\}$  es no vacío.

**Teorema 2.4 (Existencia)**

Sean  $f, h_1, h_2 \in C[a, b]$ ,  $h_1, h_2 > 0$ ,  $g_1, \dots, g_n \in C[a, b]$  tales que cumplen la condición de Haar con  $n \in \mathbb{N}$  entonces  $M_{\lambda_n} \neq \emptyset$

**Demostración:** Para cada  $\lambda \geq 0$ ,  $M_\lambda$  es compacto. Podemos considerar la familia  $\{M_\lambda \mid \lambda \geq 0, M_\lambda \neq \emptyset\}$ . Debido al lema anterior esta familia es no vacía. Por otro lado también es monótona. Gracias a esto último, en cualquier subfamilia finita de ella, la intersección correspondería al elemento que posea menor  $\lambda$ . Este conjunto es no vacío. Debido a todo lo anterior se puede afirmar que:

$$\bigcap \{M_\lambda \mid \lambda \geq 0, M_\lambda \neq \emptyset\} \neq \emptyset.$$

Es fácil ver que  $M_{\lambda_n}$  coincide con el anterior conjunto. ■

## 2.4. Caracterización y unicidad de los polinomios generalizados de mejor aproximación.

En esta sección exhibimos caracterizaciones del polinomio generalizado de mejor aproximación relativo a bandas de amplitudes variantes, basadas en los criterios de Chebyshev [7], Chebotarev ([4], [5]) y Kolmogorov [3].

**Definición 2.5**

Sean  $f, h_1, h_2 \in C[a, b]$  tales que  $h_1, h_2 > 0$ ,  $g_1, \dots, g_n \in C[a, b]$  un conjunto de  $n$  funciones que cumplen la condición de Haar; con  $n \in \mathbb{N}$  y  $\lambda_n$  la mejor aproximación del espacio de Haar a  $f$  relativo a  $h_1$  y  $h_2$ .

(i) Para cada  $p = \sum c_i g_i$  - polinomio generalizado - definimos los conjuntos:

$$R(p, h_1) = R(p, h_1, f, \lambda_n, [a, b]) := \{x \in [a, b] \mid (p - f + \lambda_n h_1)(x) = 0\},$$

$$R(p, h_2) = R(p, h_2, f, \lambda_n, [a, b]) := \{x \in [a, b] \mid (p - f - \lambda_n h_2)(x) = 0\}$$

$$\text{y } R(p) = R(p, f, h_1, h_2, \lambda_n, [a, b]) := R(p, h_1) \cup R(p, h_2).$$

(ii) Sean  $h \in C[a, b]$  y  $x \in [a, b]$  definimos la función:

$$a(h, x) = a(h, x, g_1, \dots, g_n) := \text{sgn}(h(x))(g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)).$$

(iii) Sea  $A \subseteq [a, b]$  definimos el conjunto:

$$K(A) = K(A, f, p, g_1, \dots, g_n) := \{a(f - p, x) \in \mathbb{R}^n \mid x \in A\}$$

en particular denotaremos  $K_p := K(R(p))$ .

(iv) Sean  $a \leq x_1 < \dots < x_m \leq b$ , con  $m \in \mathbb{N}$ , entonces decimos que  $\{x_1, \dots, x_m\}$  es un conjunto alternante para un polinomio generalizado  $p$  dado si:

$$x_i \in R(p, h_1) \text{ y } x_{i+1} \in R(p, h_2) \text{ para } i = 1, 3, \dots$$

o

$$x_i \in R(p, h_2) \text{ y } x_{i+1} \in R(p, h_1) \text{ para } i = 1, 3, \dots$$

### Lema 2.2

Sean  $f, h_1, h_2 \in C[a, b]$ ,  $h_1, h_2 > 0$ ;  $g_1, \dots, g_n \in C[a, b]$  tales que cumplen la condición de Haar con  $n \in \mathbb{N}$ , y  $\lambda_n$  la mejor aproximación del espacio de Haar a  $f$  relativo a  $h_1$  y  $h_2$ . Si  $p \in M_{\lambda_n}$ , entonces existen dos puntos  $x_1, x_2 \in [a, b]$  tales que  $p(x_1) = (f - \lambda_n h_1)(x_1)$  y  $p(x_2) = (f + \lambda_n h_2)(x_2)$ .

**Demostración:** Supongamos que para toda  $x \in [a, b]$

$$p(x) < (f + \lambda_n h_2)(x).$$

Como  $f + \lambda_n h_2 - p$  es una función continua y  $[a, b]$  compacto, luego existe  $m > 0$  tal que

$$m = \min_{x \in [a, b]} \{(f + \lambda_n h_2 - p)(x)\}.$$

Por otro lado, sabemos que en todo espacio de Haar existe un polinomio generalizado, llamémosle  $q$ , que es estrictamente positivo sobre el intervalo  $[a, b]$  (vea [8], teorema 9.2). Dicho polinomio es continuo, por lo que existe

$$M = \max_{x \in [a, b]} (q(x)).$$

Tomemos

$$q^* := p + \frac{m}{2M} q,$$

entonces se verifica que para cada  $x \in [a, b]$

$$(f - \lambda_n h_1)(x) \leq p(x) < q^*(x) < p(x) + \frac{m}{2} < (f + \lambda_n h_2)(x).$$

De lo que surgen las desigualdades para cada  $x \in [a, b]$

$$\frac{(q^* - f)(x)}{-h_1(x)} < \lambda_n \text{ y } \frac{(q^* - f)(x)}{h_2(x)} < \lambda_n.$$

Por otro lado, como las funciones  $\frac{q^* - f}{-h_1}$  y  $\frac{q^* - f}{h_2}$  son continuas sobre el compacto  $[a, b]$ , alcanzan sus máximos. Denotémoslos por

$$\mu_1 := \max_{x \in [a, b]} \left\{ \frac{(q^* - f)(x)}{-h_1(x)} \right\} \text{ y } \mu_2 := \max_{x \in [a, b]} \left\{ \frac{(q^* - f)(x)}{h_2(x)} \right\}.$$

A continuación, designemos

$$\lambda^* := \max\{\mu_1, \mu_2\}.$$

Se puede ver por un lado que

$$\lambda^* < \lambda_n$$

y por otro que para toda  $x \in [a, b]$

$$(f - \lambda^* h_1)(x) \leq q^*(x) \leq (f + \lambda^* h_2)(x),$$

es decir,

$$M_{\lambda^*} \neq \emptyset.$$

Lo que contradice la definición de  $\lambda_n$ .

Por lo tanto, debe existir, por lo menos, un punto en  $[a, b]$  donde  $p$  y  $f + \lambda_n h_2$  coincidan.

Análogamente, se demuestra que  $p$  y  $f - \lambda_n h_1$  coinciden en por lo menos un punto de  $[a, b]$ . ■

**Lema 2.3**

Sean  $f, h_1, h_2 \in C[a, b]$ ,  $h_1, h_2 > 0$ ,  $g_1, \dots, g_n \in C[a, b]$  un conjunto de funciones que cumplen la condición de Haar, con  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_n$  la mejor aproximación del espacio de Haar a  $f$  relativo a  $h_1$  y  $h_2$  y  $p \in M_{\lambda_n}$  entonces

$$0 \in \text{conv}(K_p)$$

si y sólo si, existen  $n + 1$  puntos distintos de  $R(p)$ :  $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$  tales que

$$0 \in \text{int conv}\{a(f - p, x_1), \dots, a(f - p, x_{n+1})\}.$$

**Demostración:**

$\Leftarrow$ )

Desde luego, si

$$0 \in \text{int conv}\{a(f - p, x_1), \dots, a(f - p, x_{n+1})\}$$

entonces

$$0 \in \text{conv}(K_p).$$

$\Rightarrow$ )

Por otro lado, como  $0 \notin K_p$ , si  $0 \in \text{conv}(K_p)$ , entonces el teorema de Caratheodory nos garantiza que  $0$  puede representarse como una combinación lineal convexa de  $n + 1$  elementos de  $K_p$ .

Supongamos que el vector cero se encuentra en la frontera de la envoltura convexa de  $K_p$ . Por el mismo teorema de Caratheodory, este vector  $0$  puede representarse como una combinación lineal convexa de a lo sumo  $n$  vectores de  $K_p$ . Luego existirían  $y_1, y_2, \dots, y_n \in [a, b]$ , completando a  $n$  puntos si fuese necesario, de manera que

$$\det \begin{bmatrix} g_1(y_1) & \dots & g_n(y_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ g_1(y_n) & \dots & g_n(y_n) \end{bmatrix} = \frac{1}{\prod \text{sgn}(f - p)(y_i)} \cdot \det \begin{bmatrix} a(f - p, y_1) \\ \dots \\ a(f - p, y_n) \end{bmatrix} = 0.$$

Esto contradice la hipótesis de que las funciones  $g_1, \dots, g_n$  cumplen la condición de Haar. Luego el vector cero debe ser combinación lineal

convexa de exactamente  $n + 1$  elementos de  $K_p$ , es decir, estar en el interior de la envoltura convexa de ellos. Con ello queda demostrado el lema. ■

Junto con este par de lemas previos necesitaremos el resultado siguiente, que es una forma del teorema 2 de [15].

**Teorema 2.5**

Sean  $f, h_1, h_2 \in C[a, b]$   $h_1, h_2 > 0$ ;  $g_1, \dots, g_n \in C[a, b]$  tales que cumplen la condición de Haar, con  $n \in \mathbb{N}$  y  $\lambda_n$  la mejor aproximación del espacio de Haar a  $f$  relativo a  $h_1$  y  $h_2$ . Si  $p \in M_{\lambda_n}$ , entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes

- (i)  $M_{\lambda_n} = \{p\}$ , i.e. es un conjunto con un solo elemento.
- (ii) Hay  $n + 1$  puntos distintos en  $[a, b]$ :  $z_1 < \dots < z_{n+1}$  tales que  $p$  coincide con los valores  $f(z_i) + \lambda_n h_2(z_i)$  y  $f(z_i) - \lambda_n h_1(z_i)$  (o  $f(z_i) - \lambda_n h_1(z_i)$  y  $f(z_i) + \lambda_n h_2(z_i)$ ) alternadamente para  $i = 1, 2, \dots, n + 1$ .
- (iii)  $0 \in \text{conv}(K_p)$ .

Ahora estamos listos para enunciar y demostrar el que es el principal resultado de este capítulo, con el que después establecemos que la mejor aproximación es única en el contexto generalizado.

**Teorema 2.6**

*[Caracterizaciones del Polinomio Generalizado de Mejor Aproximación]*  
Sean  $g_1, \dots, g_n \in C[a, b]$  un conjunto de funciones que cumplen la condición de Haar, con  $n \in \mathbb{N}$ ;  $f, h_1, h_2 \in C[a, b]$ ,  $h_1, h_2 > 0$ ,  $f \notin \text{gen}\{g_1, \dots, g_n\}$  y  $\lambda_n$  la mejor aproximación del espacio de Haar a  $f$ . Los enunciados siguientes son equivalentes:

- a)  $p \in M_{\lambda_n}$ , i.e.  $p$  es un polinomio de mejor aproximación a  $f$  relativo a  $h_1$  y  $h_2$ .
- b) Hay  $n + 1$  puntos distintos en  $[a, b]$ ,  $z_1 < \dots < z_{n+1}$  tales que  $p$  coincide con los valores  $f(z_i) + \lambda_n h_2(z_i)$  y  $f(z_i) - \lambda_n h_1(z_i)$  (o  $f(z_i) - \lambda_n h_1(z_i)$  y  $f(z_i) + \lambda_n h_2(z_i)$ ) alternadamente para  $i = 1, 2, \dots, n + 1$ .
- c)  $R(p)$  contiene  $n + 1$  puntos,

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1},$$

tales que el vector cero de  $\mathbb{R}^n$  se encuentra en el interior de la envoltura convexa de

$$\{a(f - p, x_1), \dots, a(f - p, x_{n+1})\}.$$



d) Para todo  $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , existen  $x_c, y_c \in R(p)$  tales que

$$a(f - p, x_c) \cdot c > 0 \quad y \quad a(f - p, y_c) \cdot c < 0.$$

e) Para cada  $q$  polinomio generalizado del espacio de Haar,  $q \neq 0$

$$\max_{x \in R(p)} (f(x) - p(x))(q(x)) > 0.$$

**Demostración:**

$a \Rightarrow b$

Si  $n = 1$ , entonces esta implicación es cierta, debido al lema 2.2.

Si  $n > 1$ , entonces, según el mismo lema existe un conjunto de por lo menos dos puntos en  $[a, b]$  que cumple lo que se quiere probar.

Propongamos que cualquier conjunto posible de elementos en  $[a, b]$ , tal que  $p - f$  coincida alternadamente con las funciones  $-\lambda_n h_1$  y  $\lambda_n h_2$  en esos puntos, contiene a lo más  $n$  elementos.

Esto es, que existen  $a \leq x_1 < \dots < x_k \leq b$ , con  $1 < k \leq n$ ; tales que

$$(p - f)(x_i) = \lambda_n h_2(x_i) \quad y \quad (p - f)(x_{i+1}) = -\lambda_n h_1(x_{i+1}); \quad i = 1, 3, \dots$$

o

$$(p - f)(x_i) = -\lambda_n h_1(x_i) \quad y \quad (p - f)(x_{i+1}) = \lambda_n h_2(x_{i+1}); \quad i = 1, 3, \dots$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que en este caso se verifica la primera opción, con eso en mente formemos los conjuntos

$$A := \{x \in [a, b] \mid (p - f)(x) = \lambda_n h_2(x)\}$$

y

$$B := \{x \in [a, b] \mid (p - f)(x) = -\lambda_n h_1(x)\}.$$

Veamos entonces que como  $A \cap [a, x_2]$  es compacto, deben existir

$$x'_1 = \text{mín } A \cap [a, x_2] \quad y \quad x''_1 = \text{máx } A \cap [a, x_2].$$

De manera parecida definimos los puntos

$$x'_2 = \text{mín } B \cap [x''_1, x_3], \quad x''_2 = \text{máx } B \cap [x''_1, x_3];$$

$$x'_3 = \text{mín } A \cap [x''_2, x_4], \quad x''_3 = \text{máx } A \cap [x''_2, x_4];$$

y así sucesivamente.

Obtendríamos una sucesión de puntos:

$$a \leq x'_1 \leq x''_1 < x'_2 \leq x''_2 < \dots < x'_k \leq x''_k \leq b.$$

Ahora formemos los conjuntos

$$I_j = [x'_j, x''_j] \text{ con } j = 1, \dots, k.$$

Observemos que

i)  $I_j \cap A = \emptyset$  cuando  $j$  es par y  $I_j \cap B = \emptyset$  cuando  $j$  es impar.

ii)  $A \subseteq \bigcup_{j \text{ impar}} I_j$  y  $B \subseteq \bigcup_{j \text{ par}} I_j$ .

Escojamos ahora los puntos  $z_j$  de tal forma que cumplan

$$x''_{j-1} < z_j < x'_j,$$

donde  $j = 2, \dots, k$ .

Debe existir  $q$  un polinomio generalizado tal que

i)  $q(z_i) = 0$  para  $i = 2, \dots, k$ .

ii)  $\text{sgn } q(x) = \text{sgn}(p - f)(x)$  para toda  $x \in I_1 \cup \dots \cup I_k$  [8].

Fijemos los valores

$$c_i = \text{mín}\{(p - f + \lambda_n h_1)(x) | x \in [z_i, z_{i+1}]\} \text{ cuando } i \text{ es impar}$$

y

$$c_i = \text{mín}\{(\lambda_n h_2 - p + f)(x) | x \in [z_i, z_{i+1}]\} \text{ cuando } i \text{ es par}$$

tomando para ello  $z_1 = a$  y  $z_{k+1} = b$ .

Se puede verificar que para toda  $i$ ,

$$c_i > 0.$$

Tomemos ahora

$$M := \max_{x \in [a,b]} |q(x)|.$$

Y elijamos apropiadamente  $\mu > 0$ , tal que

$$\mu M < \min\{c_i | i = 1, \dots, k\}.$$

Con esto formemos el polinomio generalizado

$$p^* = p - \mu q,$$

el cual cumple que  $p^* \in M_{\lambda_n}$ , pero

$$f - \lambda_n h_1 < p^* < f + \lambda_n h_2,$$

lo cual contradice el lema anterior.

Por lo tanto, deben existir por lo menos  $n + 1$  puntos consecutivos en  $[a, b]$  tales que  $p - f$  coincide alternadamente con las funciones  $\lambda_n h_2$  y  $-\lambda_n h_1$  en dichos puntos.

$$b \Rightarrow a$$

Supongamos que  $p \notin M_{\lambda_n}$ .

Por hipótesis existen  $a \leq x_1 < \dots < x_{n+1} \leq b$  que sin pérdida de generalidad

$$(p - f)(x_i) = \lambda_n h_2(x_i)$$

y

$$(p - f)(x_{i+1}) = -\lambda_n h_1(x_{i+1})$$

donde  $i = 1, 3, \dots$

El teorema 2.4 nos dice que existe por lo menos un polinomio generalizado  $p^* \in M_{\lambda_n}$ , lo que implicaría:

$$(p^* - f)(x_i) \leq (p - f)(x_i)$$

y

$$(p^* - f)(x_{i+1}) \geq (p - f)(x_{i+1})$$

donde  $i = 1, 3, \dots$

Debido a lo anterior el polinomio generalizado  $p - p^*$  tendría por lo menos  $n$  raíces, contando dos veces lo ceros dobles,<sup>1</sup> lo que implicaría que  $p - p^* = 0$ , que es una contradicción con lo supuesto.

Por lo tanto  $p$  es un polinomio generalizado de mejor aproximación a  $f$  relativo a  $h_1$  y  $h_2$ .

$$b \Rightarrow c$$

Se deduce del teorema 2.5 que

$$0 \in \text{conv}(K_p)$$

y a continuación se obtiene del lema 2.3

$$0 \in \text{int conv}\{a(f - p, x_1), \dots, a(f - p, x_{n+1})\}, \text{ para algunos } x_1, \dots, x_{n+1} \in R(p)$$

que es lo que se buscaba.

$$c \Rightarrow b$$

Puesto que

$$0 \in \text{int conv}(a(f - p, x_1), \dots, a(f - p, x_{n+1})) \subset \text{conv}(K_p)$$

entonces debido al teorema 2.5 se verifica lo que se buscaba probar.

---

<sup>1</sup>Un punto  $x \in (a, b)$ , para un polinomio generalizado  $p$ , es un cero doble si  $p(x) = 0$  y si existe una vecindad de  $x$  en la que  $p$  no cambia de signo. Vea [8]

$c \Rightarrow d$

Tomemos un arbitrario  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $c \neq 0$ . Formemos el polinomio generalizado

$$q(x) = a(f - p, x) \cdot c = \operatorname{sgn}((f - p)(x)) \sum c_i g_i(x)$$

el cual es no trivial, por ende tiene a lo más  $n - 1$  ceros en el intervalo  $[a, b]$ , contando dos veces los ceros dobles. Esto nos informa que debe haber por lo menos una  $x_j$ , con  $1 \leq j \leq n + 1$ , que cumple

$$q(x_j) \neq 0.$$

Sin pérdida de generalidad supongamos que  $q(x_j) > 0$ .

Por otro lado, como el vector cero está en el interior de la envoltura convexa de los  $a(f - p, x_i)$ , entonces debe ser combinación lineal convexa de ellos, i. e.

$$0 = \sum \beta_i a(f - p, x_i); \quad \beta_i \in [0, 1], \quad \sum \beta_i = 1.$$

Luego multiplicando ambos lados por  $c$ :

$$0 = 0 \cdot c = \sum \beta_i a(f - p, x_i) \cdot c = \sum \beta_i q(x_i).$$

O sea, que el escalar cero es una combinación lineal convexa de los valores  $q(x_i)$ . Uno de los cuales es estrictamente positivo. Por ende otro debe ser estrictamente negativo.

Tomando  $y_c$  como este último valor y a  $x_c = x_j$ , se muestra lo que deseábamos.

$d \Rightarrow c$

Primero supongamos que

$$0 \notin \operatorname{conv}(K_p).$$

Según el teorema de separación de convexos debe existir  $z \in \mathbb{R}^n$ ,  $z \neq 0$  tal que

$$z \cdot y \geq 0 \text{ para toda } y \in \operatorname{conv}(K).$$

En particular,

$$z \cdot a(f - p, x) \geq 0$$

para toda  $x \in R(p)$ .

Esto último contradice la hipótesis. Lo que nos indica que

$$0 \in \text{conv}(K_p).$$

Aplicando el lema 2.3

$0 \in \text{int conv}\{a(f - p, x_1), \dots, a(f - p, x_{n+1})\}$  para algunos  $x_1, \dots, x_{n+1} \in R(p)$ .

$d \Rightarrow e$

Sea  $q = \sum q_i g_i$ , como  $c := (q_1, \dots, q_n) \neq 0$ , existe  $x \in R(p)$  tal que

$$0 < a(f - p, x) \cdot c = \text{sgn}((f - p)(x)) \sum q_i g_i(x) = \text{sgn}((f - p)(x)) q(x).$$

Luego

$$(f(x) - p(x))q(x) > 0.$$

Por lo que

$$\max_{x \in R(p)} (f(x) - p(x))q(x) > 0.$$

$e \Rightarrow d$

Sea  $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , formemos el polinomio generalizado

$$q = \sum c_i g_i.$$

Como  $q \neq 0$ , entonces existe  $x_c \in R(p)$  tal que

$$(f(x_c) - p(x_c))q(x_c) > 0,$$

con lo que se puede deducir que

$$\text{sgn}((f - p)(x_c))q(x_c) > 0,$$

y finalmente

$$a(f - p, x_c) \cdot c > 0.$$

Formemos ahora el polinomio generalizado

$$r = \sum (-c_i)g_i.$$

Este polinomio también es distinto de cero en el intervalo  $[a, b]$ , por hipótesis existe  $y_c \in R(p)$  tal que

$$(f(y_c) - p(y_c))r(y_c) > 0,$$

de donde se deduce

$$\text{sgn}((f - p)(y_c))r(y_c) > 0,$$

y por último

$$a(f - p, y_c) \cdot c < 0. \quad \blacksquare$$

El teorema anterior nos muestra varias caracterizaciones de los polinomios generalizados de mejor aproximación, aún queda por ver si son únicos para una triada específica de funciones  $f, h_1, h_2$ . Lo que demostramos a continuación.

**Teorema 2.7**

Sean  $f, h_1, h_2 \in C[a, b]$ ,  $h_1, h_2 > 0$ ;  $g_1, \dots, g_n \in C[a, b]$  tales que cumplen la condición de Haar con  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces el polinomio generalizado de mejor aproximación a  $f$  relativo a  $h_1$  y  $h_2$ , es único.

**Demostración:** Sea  $\lambda_n \geq 0$  la mejor aproximación del espacio de Haar a  $f$ , relativo a  $h_1$  y  $h_2$ , y sea  $p \in M_{\lambda_n}$ . Por el teorema anterior sabemos que existen  $n + 1$  puntos distintos consecutivos de  $[a, b]$  tales que  $p - f$  coincide alternadamente con las funciones  $\lambda_n h_2$  y  $-\lambda_n h_1$  y además que  $0 \in \text{conv}(K_p)$ , estos dos resultados coinciden con los incisos ii) y iii) del teorema 2.5 por lo que  $M_{\lambda_n} = \{p\}$ . ■

## 2.5. El caso trigonométrico.

Dos de los espacios de Haar más comunes son el conjunto de los polinomios algebraicos de grado a lo más  $n \in \mathbb{N}$  y el de los polinomios trigonométricos de grado a lo más  $n \in \mathbb{N}$ . El caso correspondiente a los

polinomios algebraicos fue ampliamente tratado en la tesis doctoral de Ivonne L. Martínez [23]. En esta sección veremos particularidades que se encuentran al estudiar la mejor aproximación mediante bandas variantes cuando el espacio aproximante corresponde a polinomios trigonométricos.

Como ya se mencionó el conjunto  $\mathcal{T}_n$  de los polinomios trigonométricos de grado a lo más  $n$  con las operaciones usuales, es un espacio de Haar de dimensión  $2n + 1$ . Una base de este espacio es

$$\{1, \text{sen}(x), \dots, \text{sen}(nx), \text{cos}(x), \dots, \text{cos}(nx)\}.$$

Consideramos los puntos  $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{2n+1} < 2\pi$ . Se verifica que los vectores

$$(1, \text{sen}(x_1), \dots, \text{sen}(nx_1), \text{cos}(x_1), \dots, \text{cos}(nx_1)),$$

$$(1, \text{sen}(x_2), \dots, \text{sen}(nx_2), \text{cos}(x_2), \dots, \text{cos}(nx_2)),$$

...

$$(1, \text{sen}(x_{2n+1}), \dots, \text{sen}(nx_{2n+1}), \text{cos}(x_{2n+1}), \dots, \text{cos}(nx_{2n+1})).$$

son linealmente independientes. Con esto se garantiza que esta base cumple la condición de Haar. Análogamente cualquier otra base de  $\mathcal{T}_n$  cumple la condición de Haar.

En este espacio se puede aplicar la teoría para el estudio del polinomio trigonométrico de mejor aproximación a una función continua mediante bandas variantes. Para hacer esto posible, dicha función además de continua deberá ser  $2\pi$  periódica, i. e.  $f \in C_{2\pi}$ . Asimismo las funciones  $h_1$  y  $h_2$  utilizadas de manera similar que en el capítulo anterior deberán ser, además de continuas y estrictamente positivas, también  $2\pi$  periódicas.

Con esto en cuenta son válidos nuestros resultados de las secciones anteriores, por ejemplo, debido a ser  $\mathcal{T}_n$  de dimensión  $2n + 1$ , habrá que considerar  $2n + 2$  puntos diferentes en el lema 2.3 y en los incisos (b) y (c) del teorema 2.5, así como en el teorema 2.6. Estos puntos deberán ser hallados en el intervalo  $[0, 2\pi)$  en lugar del intervalo  $[a, b]$  que se menciona. En efecto, como estamos considerando funciones periódicas, en realidad estamos



identificando el intervalo  $[0, 2\pi)$  con el conjunto compacto  $T \subset \mathbb{C}$ , es decir, con el círculo unidad mediante el homeomorfismo  $e^{it}$ , con  $t \in [0, 2\pi)$ . Por ejemplo, para la aproximación polinomial trigonométrica el teorema 2.6 toma la forma siguiente:

**Teorema 2.8**

Sean  $f, h_1, h_2 \in C_{2\pi}$ ,  $h_1, h_2 > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$  y  $\lambda_n$  la mejor aproximación de  $\mathcal{T}_n$  a  $f$ , relativo a  $h_1$  y  $h_2$ . Los enunciados siguientes son equivalentes:

- a)  $p \in M_{\lambda_n}$ . ( $p$  es el polinomio trigonométrico de mejor aproximación a  $f$ , relativo a  $h_1$  y  $h_2$ ).
- b) Hay  $2n + 2$  puntos distintos en  $[0, 2\pi)$ :  $z_1 < \dots < z_{2n+2}$  tales que  $p$  logra los valores  $f(z_i) + \lambda_n h_2(z_i)$  y  $f(z_{i+1}) - \lambda_n h_1(z_{i+1})$  (o  $f(z_i) - \lambda_n h_1(z_i)$  y  $f(z_{i+1}) + \lambda_n h_2(z_{i+1})$ ) alternadamente para  $i = 1, 3, \dots, 2n + 1$ .
- c)  $R(p)$  contiene  $2n + 2$  puntos de  $[0, 2\pi)$ ,

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{2n+2}$$

tales que el vector cero de  $\mathbb{R}^{2n+1}$  se encuentra en el interior de la envoltura convexa de

$$\{a(f - p, x_1), \dots, a(f - p, x_{2n+2})\}.$$

- d) Para todo  $c \in \mathbb{R}^{2n+1} \setminus \{0\}$  existen  $x_c, y_c \in R(p)$  tales que

$$a(f - p, x_c) \cdot c > 0 \quad \text{y} \quad a(f - p, y_c) \cdot c < 0.$$

**Ejemplo.**

Consideramos ahora dar un ejemplo de aproximación para una función  $f$  continua  $2\pi$  periódica específica. Exhibiremos los polinomios trigonométricos de diferentes grados que sean de mejor aproximación relativos a dos funciones  $h_1$  y  $h_2$  continuas,  $2\pi$  periódicas y estrictamente positivas. Como las funciones  $f, h_1, h_2$  son  $2\pi$  periódicas las definiremos sobre el intervalo  $[0, 2\pi]$  y sus gráficas, así como la del polinomio trigonométrico que fuese su mejor aproximación, se visualizarán sobre este intervalo también.

Sean  $f, h_1, h_2 \in C_{2\pi}$  definidas de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen}(x), & \text{si } 0 \leq x \leq \pi; \\ -\text{sen}(x), & \text{si } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

$$h_1 = h_2 = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]; \\ 1 + \sqrt{2\pi x - x^2 - \frac{3\pi^2}{4}}, & \text{si } x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]. \end{cases}$$

A continuación una lista de los polinomios trigonométricos de diversos grados que son de mejor aproximación obtenidos con un programa desarrollado por Víctor Méndez [25], y el valor respectivo de  $\lambda_n$ .

Grado 1:

$$p(x) = -0.2943 \cos(x) + 0.6684$$

$$\lambda_1 = 0.3741.$$

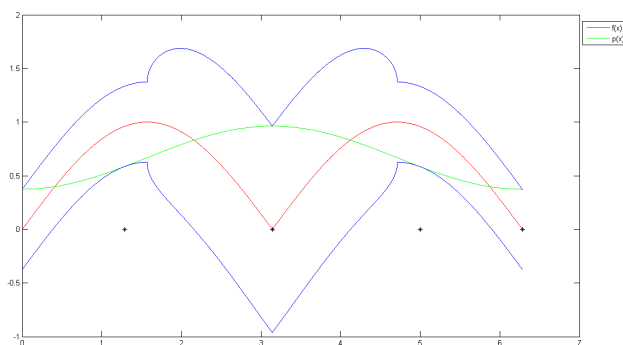


Figura 2.1: Polinomio trigonométrico de grado  $n=1$

Grado 3:

$$p(x) = -0.1139 \cos(3x) - 0.4263 \cos(2x) + 0.0388 \cos(x) + 0.5965$$

$$\lambda_3 = 0.0950.$$

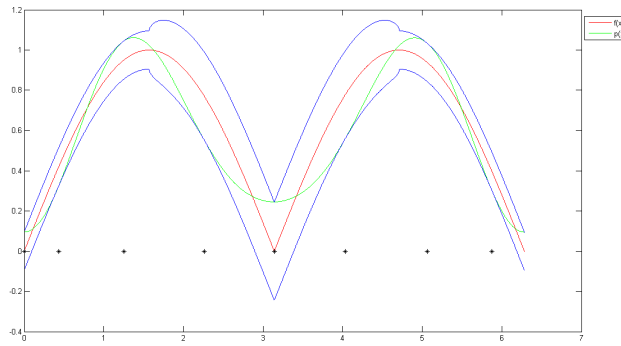


Figura 2.2: Polinomio trigonométrico de grado n=3

Grado 7:

$$p(x) = -0.0551 \cos(7x) - 0.0246 \cos(6x) + 0.0062 \cos(5x) - 0.1052 \cos(4x) \\ + 0.0121 \cos(3x) - 0.4314 \cos(2x) + 0.0056 \cos(x) + 0.6317$$

$$\lambda_7 = 0.0392.$$

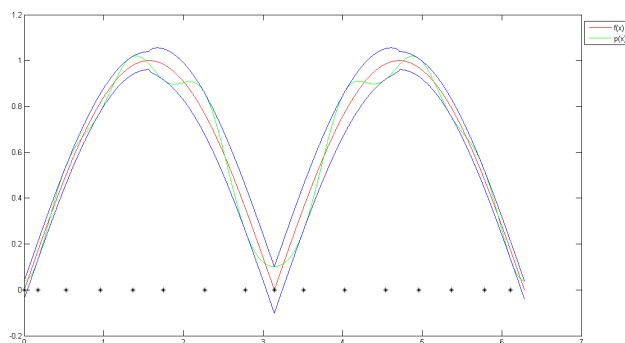


Figura 2.3: Polinomio trigonométrico de grado  $n=7$

Nota: La función  $f$  es par, por lo que podemos esperar que su polinomio de mejor aproximación contenga únicamente cosenos. Sin embargo estos no forman un sistema de Haar. Por ejemplo,  $\{1, \cos(x)\}$  no es un sistema de Haar en  $[0, 2\pi)$ . Por lo que hay que considerar también a los senos; así  $\{1, \sin(x), \cos(x)\}$  es un sistema de Haar. Luego, si se aproxima a una función par, de todas maneras, necesitamos considerar  $2n + 2$  puntos.

# Capítulo 3

## Caracterización de la mejor aproximación asimétrica racional.

### 3.1. Introducción.

En el capítulo anterior se analizó el problema de la unicidad de la mejor aproximación por polinomios generalizados mediante bandas de amplitudes variantes, sobre un intervalo cerrado. Como puede observarse, el conjunto de funciones racionales algebraicas

$$R_{nm} := \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathcal{P}_n, q \in \mathcal{P}_m, \forall x \in [a, b], q(x) > 0 \right\},$$

no es un subespacio de Haar. Surge ahora la necesidad de investigar separadamente la aproximación mediante bandas variantes en estos casos, lo cual haremos de manera generalizada.

Sea  $X$  un espacio métrico compacto. Sean  $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \subset C(X)$ , espacios vectoriales de dimensiones finitas  $n := \dim \mathcal{P}$  y  $m := \dim \mathcal{Q}$ . Se supone que el cono positivo de  $\mathcal{Q}$  tiene interior relativo no vacío en la norma uniforme. Lo que es equivalente a

$$\exists Q \in \mathcal{Q} \forall x \in X, Q(x) > 0.$$

Definimos el conjunto  $\mathcal{R}$  de funciones racionales generalizadas de la manera siguiente

$$\mathcal{R} = \left\{ \frac{P}{Q} : P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}, \forall x \in X, Q(x) > 0 \right\}$$

que salvo se especifique otra cosa será la clase aproximante en este capítulo, i.e, el conjunto en el que buscaremos hallar de ser posible un elemento de mejor aproximación asimétrica con respecto a una función  $f$  continua sobre  $X$  previamente dada.

### 3.2. Definición de una norma asimétrica adecuada

En un principio podríamos intentar extender la definición 2.1 de bandas variantes para la clase de funciones  $\mathcal{R}$ , es decir, dados  $\lambda \geq 0$ ,  $h_1, h_2 \in C(X)$  con  $h_1 > 0$  y  $h_2 > 0$ , y  $f \in C(X)$ , definimos los conjuntos

$$M_\lambda := \{R \in \mathcal{R} : \forall x \in X, (f - \lambda h_1)(x) \leq R(x) \leq (f + \lambda h_2)(x)\}$$

así como el valor

$$\Lambda := \inf\{\lambda \geq 0 : M_\lambda \neq \emptyset\}.$$

Por tanto una función racional  $R \in \mathcal{R}$  sería de mejor aproximación *mediante bandas variantes* a una función  $f \in C(X)$  relativa a  $h_1$  y  $h_2$  si es un elemento del conjunto  $M_\Lambda$ .

Una vez establecido lo anterior, se puede proceder a estudiar, de manera similar a lo realizado en el capítulo anterior, las condiciones para garantizar la existencia y unicidad de dicha mejor aproximación racional, así como establecer alguna caracterización de ella.

Desafortunadamente, al igual que en el caso de la mejor aproximación racional uniforme, es decir aquella en la que  $h_1 = h_2 = 1$ , no se puede usar el argumento de compacidad que se uso en la demostración del teorema 2.4 para garantizar la existencia de la función racional de mejor aproximación mediante bandas variantes a una función continua  $f \in C(X)$ .

Para estudiar esta situación nos resultará más fácil emplear normas asimétricas, las cuales se definirán a partir de las funciones de error  $h_1$  y  $h_2$

como se explica a continuación. Los resultados de aproximación por el método de las bandas variantes coincidirán con los que obtengamos a partir de la aproximación por estas normas asimétricas. Definiremos una norma asimétrica sobre el conjunto  $C(X)$ . Sean  $h_1, h_2 \in C(X)$  con la propiedad

$$\forall x \in X, h_1(x) > 0 \text{ y } h_2(x) > 0.$$

Definimos la función siguiente

$$\omega : C(X) \times X \rightarrow [0, \infty),$$

$$\omega(g, x) = \begin{cases} \frac{1}{h_1(x)}, & g(x) > 0; \\ 0, & g(x) = 0; \\ -\frac{1}{h_2(x)}, & g(x) < 0. \end{cases}$$

No es difícil darse cuenta que  $\omega$  cumple la proposición siguiente.

**Proposición 3.1**

Si  $f, g \in C(X)$ , entonces, para toda  $x \in X$

$$\omega(g, x)f(x) \leq \omega(f, x)f(x).$$

Definimos, ahora la función

$$\eta : C(X) \times X \rightarrow [0, \infty)$$

$$\eta(g, x) = \frac{g^+(x)}{h_1(x)} + \frac{g^-(x)}{h_2(x)}$$

donde  $g^+(x) = \max\{0, g(x)\}$  y  $g^-(x) = \max\{0, -g(x)\}$ .

Desde luego se puede ver que

**Proposición 3.2**

i. Para cada  $g \in C(X)$  y para toda  $x \in X$ , se cumple que  $\eta(g, x) = \omega(g, x)g(x)$ .

ii. Si  $f, g \in C(X)$  entonces

$$\forall x \in X, \eta(f + g, x) \leq \eta(f, x) + \eta(g, x).$$

Con la ayuda de la anterior definición, definamos la función siguiente sobre el espacio  $C(X)$  de las funciones continuas

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{h_1, h_2} &: C(X) \rightarrow [0, \infty) \\ \|f\|_{h_1, h_2} &= \sup_{x \in X} \eta(f, x) = \|\eta(f)\|_X. \end{aligned}$$

Como se podría observar, cuando  $h_1 = h_2 = 1$  sobre  $X$ , entonces  $\eta(g, x) = |g(x)|$  y  $\|g\|_{h_1, h_2} = \|g\|_X$ .

Observemos que esta función cumple lo siguiente, (véase [23])

**Proposición 3.3**

1. Para cada  $f \in C(X)$ ,  $\|f\|_{h_1, h_2} \geq 0$ .
2. Si  $f, g \in C(X)$ , entonces  $\|f + g\|_{h_1, h_2} \leq \|f\|_{h_1, h_2} + \|g\|_{h_1, h_2}$ .
3. Para cada  $f \in C(X)$  y para toda  $\alpha \geq 0$ ,  $\|\alpha f\|_{h_1, h_2} \leq \alpha \|f\|_{h_1, h_2}$ .

De lo anterior se deduce que  $\|\cdot\|_{h_1, h_2}$  es una norma asimétrica en el espacio  $C(X)$ , que cumple las propiedades siguientes

1.  $\exists \underline{c} > 0 \exists \bar{c} > 0 \forall f \in C(X), \underline{c} \|f\|_X \leq \|f\|_{h_1, h_2} \leq \bar{c} \|f\|_X$ .
2.  $\exists c^* > 0$

$$\forall f \in C(X), \|-f\|_{h_1, h_2} \leq c^* \|f\|_{h_1, h_2}.$$

La primer proposición se encuentra en [23]. La segunda es consecuencia de la primera, pues  $c^* = \frac{\bar{c}}{\underline{c}}$ .

De la proposición anterior se infiere que la convergencia de una sucesión en  $(C(X), \|\cdot\|_X)$  es equivalente y con igual límite, a la convergencia en  $(C(X), \|\cdot\|_{h_1, h_2})$ . Además ambos espacios contienen los mismos subconjuntos acotados.

Podemos ahora redefinir la definición de mejor aproximación de manera *adecuada* a este contexto.

<sup>1</sup>Nosotros utilizaremos la notación  $\|\cdot\|$  en lugar de  $\|\cdot\|_{h_1, h_2}$  siempre que quede claro cual es la pareja de funciones  $(h_1, h_2)$  a la que hace referencia



**Definición 3.1**

Sea  $f \in C(X)$  y  $R^* \in \mathcal{R}$ . Si

$$\|f - R^*\| = \inf_{R \in \mathcal{R}} \|f - R\|,$$

entonces decimos que  $R^*$  es una mejor aproximación racional asimétrica de  $\mathcal{R}$  a  $f$  relativa a  $h_1$  y  $h_2$ .

Observemos algunos casos particulares.

1. Si  $X = [a, b]$ ,  $\mathcal{P} \subset C[a, b]$  un espacio de Haar con  $\dim \mathcal{P} = n$  y  $\mathcal{Q} = \text{gen}\{r\}$ , con  $r \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$ . Sea  $M_{\lambda_n}$  como en el capítulo anterior. No es difícil observar que

$$g \in M_{\lambda_n} \Leftrightarrow \|f - g\| = \inf_{h \in \mathcal{P}} \|f - h\|.$$

2. Si  $X = [a, b]$ ,  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_n \subset C[a, b]$  y  $\mathcal{Q} = \mathcal{P}_m \subset C[a, b]$ , donde  $\mathcal{P}_n$  y  $\mathcal{P}_m$  son los conjuntos de los polinomios algebraicos de grado a lo más  $n \in \mathbb{N}$  y  $m \in \mathbb{N}$  respectivamente, entonces denotaremos la clase aproximante como

$$\mathcal{R} = R_{nm} := \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathcal{P}_n, q \in \mathcal{P}_m, \text{ y } \forall x \in [a, b], q(x) \neq 0 \right\}$$

y nombraremos a  $R \in R_{nm}$  que cumpla la definición 3.1 como la mejor aproximación racional algebraica asimétrica a  $f \in C[a, b]$  de  $R_{nm}$  relativo a  $h_1$  y  $h_2$ . En este caso  $h_1, h_2 \in C[a, b]$ .

### 3.3. Existencia de la mejor aproximación racional algebraica asimétrica.

Dadas una función continua  $f$  y dos funciones continuas y estrictamente positivas  $h_1$  y  $h_2$  sobre un espacio métrico compacto  $X$ , así como subespacios lineales de dimensiones finitas de  $C(X)$ , no siempre es posible hallar un elemento de mejor aproximación racional asimétrica a  $f$  relativa a  $h_1$  y  $h_2$ . Por ejemplo, sea

$$X = \{0, 1\} \cup \left\{ \frac{k}{k+1} \right\}_{k=1}^n,$$

con  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , que es un espacio métrico compacto, con la métrica heredada de  $[0, 1]$ . Sea  $f \in C(X)$  definida de la manera siguiente

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0; \\ 0, & x \in X \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Sean  $h_1$  y  $h_2 \in C(X)$  funciones estrictamente positivas en  $X$ , pero que  $h_1$  además cumpla

$$\forall x \in X, h_1\left(\frac{1}{2}\right) \leq h_1(x).$$

Sea  $r_k(x) := \frac{1}{kx+1}$  una sucesión de elementos del conjunto  $R_{0,m}$  donde  $m \in \mathbb{N}$ . Se puede observar que

$$\|f - r_k\| = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}k + 1\right)h_1(1/2)}$$

por lo que  $\|f - r_k\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ . De existir

$$R^* = \frac{a}{\sum_{j=0}^m b_j x^j} \in R_{0,m}$$

tal que  $\|f - R^*\| = \inf_{R \in R_{0,m}} \|f - R\|$  se cumpliría que  $\|f - R^*\| = 0$ , i.e.  $R^*$  debería interpolar a  $f$  sobre  $X$ . Esto implicaría que

$$1 = f(0) = R^*(0) = \frac{a}{b_0}$$

y

$$0 = f(1) = R^*(1) = \frac{a}{\sum_{j=0}^m b_j}.$$

Por lo que podemos afirmar que

$$\forall R \in R_{0,m} \exists R^* \in R_{0,m}, \|f - R^*\| < \|f - R\|.$$

El teorema siguiente nos garantiza, sin embargo, la existencia de la mejor aproximación racional algebraica asimétrica a una función continua sobre un intervalo cerrado.

**Teorema 3.1 (Existencia de la mejor Aproximación Racional Algebraica)**

Para cada  $f \in C[a, b]$  existe al menos una mejor aproximación racional relativa a  $h_1$  y  $h_2$ , de la clase  $R_{nm}$ .

**Demostración:** Si  $f \in R_{nm}$ , entonces  $f$  es una mejor aproximación racional algebraica a sí misma. Si  $f \notin R_{nm}$ , sea

$$E := \inf_{R \in R_{nm}} \|f - R\|.$$

Entonces  $E > 0$ , por lo que existe  $\{R_i\}_{i=1}^{\infty} \subset R_{nm}$  tal que

$$\|f - R_i\| \rightarrow E.$$

Sean  $p_i \in \mathcal{P}_n$  y  $q_i \in \mathcal{P}_m$ , tales que  $(p_i : q_i) = 1$ ,  $R_i = \frac{p_i}{q_i}$ ,  $\|q_i\|_{[a,b]} = 1$  y además cumplan

$$\forall x \in [a, b] \forall i \in \mathbb{N}, q_i(x) > 0.$$

Para  $i$  suficientemente grande

$$\|f - R_i\| \leq E + 1,$$

pero  $\|R_i - f\| \leq c^* \|f - R_i\|$ , luego

$$\|R_i - f\| \leq c^*(E + 1).$$

Además  $\|R_i\| = \|R_i f + f\| \leq \|R_i - f\| + \|f\|$ , así

$$\|R_i\| \leq c^*(E + 1) + \|f\|.$$

Pero  $\|R_i\|_{[a,b]} \leq \frac{1}{\underline{c}} \|R_i\|$ , luego

$$\|R_i\|_{[a,b]} \leq \frac{1}{\underline{c}} (c^*(E + 1) + \|f\|).$$

Si denotamos  $M := \frac{1}{\underline{c}} (c^*(E + 1) + \|f\|)$ , entonces

$$M \geq \|R_i\|_{[a,b]} = \left\| \frac{p_i}{q_i} \right\|_{[a,b]}.$$

Sean  $a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$ , luego

$$p_i(x) = \sum_{j=0}^n p_i(x_j) l_j(x),$$

donde

$$l_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \frac{(x - x_i)}{(x_i - x_j)}.$$

Como  $0 < q_i(x_j) \leq 1$ , podemos deducir que para toda  $i$  suficientemente grande

$$\forall j \in \{0, \dots, n\}, \quad M \geq |p_i(x_j)|.$$

Por lo tanto, la sucesión  $\{p_i(x_0)\}_{i=1}^{\infty}$  está acotada a partir de una  $I \in \mathbb{N}$ , por lo que  $p_i(x_0)$  tiene una subsucesión convergente

$$p_{i_0}(x_0) \rightarrow \bar{p}_0.$$

De manera análoga, podemos afirmar que la sucesión  $p_{i_0}(x_1)$  tiene una subsucesión convergente

$$p_{i_1}(x_1) \rightarrow \bar{p}_1.$$

Continuando con un análisis similar, tras una cantidad finita de pasos, obtenemos una sucesión infinita de índices  $\{i_n\}$  con la propiedad de

$$\forall j \in \{0, \dots, n\}, \quad p_{i_n}(x_j) \rightarrow \bar{p}_j.$$

Luego haciendo un cambio de índices  $\{i_n\}$  por  $\{i\}$ , tenemos que

$$p_i = \sum_{j=0}^n p_i(x_j) \cdot l_j \rightarrow \sum_{j=0}^n \bar{p}_j \cdot l_j.$$

Si

$$\bar{p} := \sum_{j=0}^n \bar{p}_j \cdot l_j \in \mathcal{P}_n,$$

entonces  $\|\bar{p}\|_{[a,b]} \leq M$ . De manera similar, debido a que  $\|q_i\|_{[a,b]} = 1$ , existe  $\bar{q} \in \mathcal{P}_m$  tal que  $q_i \rightarrow \bar{q}$ ,  $\|\bar{q}\|_{[a,b]} = 1$  y para cada  $x \in [a, b]$ ,  $\bar{q}(x) \geq 0$ .

Si  $x \in [a, b]$  tal que  $\bar{q}(x) > 0$ , entonces

$$\left| \frac{\bar{p}(x)}{\bar{q}(x)} \right| \leq M.$$

Como  $\bar{p}, \bar{q} \in C[a, b]$ , si  $x_0$  es un cero de  $\bar{q}$ , entonces

$$|\bar{p}(x_0)| \leq M \cdot |\bar{q}(x_0)| = 0,$$

por lo que  $x_0$  también sería un cero de  $\bar{p}$ .

Sean  $p \in \mathcal{P}_n$ ,  $q \in \mathcal{P}_m$  los respectivos polinomios que surjan tras cancelar en  $\bar{p}$  y  $\bar{q}$  los factores comunes. Si  $R := \frac{p}{q} \in R_{nm}$ , entonces  $R_i \rightarrow R$  por lo que

$$\| |f - R_i| - \|r - R\| \leq \|R - R_i\| \leq c^* \|R - R_i\| \rightarrow 0,$$

es decir,

$$\|f - R_i\| \rightarrow \|f - R\| = E = \inf_{\bar{R} \in R_{nm}} \|f - \bar{R}\|.$$

■

### 3.4. Caracterización de la mejor aproximación racional.

En esta sección exhibiremos dos teoremas que caracterizan la mejor aproximación racional asimétrica a una función continua relativa a dos funciones continuas estrictamente positivas sobre el mismo dominio. En particular el segundo de ellos se parece al teorema de alternancia de Chebyshev que caracteriza el polinomio de mejor aproximación a una función continua sobre un intervalo.

Primero debemos establecer que para cada  $R \in \mathcal{R}$  definimos los conjuntos

$$\mathcal{P} + R\mathcal{Q} = \{P + RQ : P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}\}.$$

Además, definimos para cada  $g \in C(X)$ , los conjuntos

$$\text{Crit}(g) := \{x \in X : \eta(g, x) = \|g|\}.$$

#### **Teorema 3.2 (Caracterización)**

La función  $R \in \mathcal{R}$  es de mejor aproximación a  $f \in C(X) \setminus \mathcal{R}$  relativa a  $h_1$  y  $h_2$ , si y sólo si

$$\forall \phi \in \mathcal{P} + R\mathcal{Q} \exists y \in \text{Crit}(f - R), \phi(y)(f - R)(y) \leq 0.$$

**Demostración:** Primero supongamos que  $R$  no es de mejor aproximación a  $f$ , por lo que existe  $R^* \in \mathcal{R}$  tal que

$$\|f - R^*\| < \|f - R\|.$$

Si  $y \in \text{Crit}(f - R)$ , entonces

$$\begin{aligned}\omega(f - R, y)(f - R^*)(y) &\leq \omega(f - R^*, y)(f - R^*)(y) \\ &= \eta(f - R^*, y) \\ &\leq \|f - R^*\| \\ &< \|f - R\| = \eta(f - R, y) \\ &= \omega(f - R, y)(f - R)(y).\end{aligned}$$

Por ende

$$\omega(f - R, y)(R^* - R)(y) > 0.$$

Sean  $P^* \in \mathcal{P}$ ,  $Q^* \in \mathcal{Q}$ , tales que  $R^* = \frac{P^*}{Q^*}$  y sea  $\phi = Q^*(R^* - R) \in \mathcal{P} + R\mathcal{Q}$  se cumple que

$$\omega(f - R, y)\phi(y) = \omega(f - R, y)Q^*(y)(R^*(y) - R(y)) > 0.$$

Luego

$$(f - R)(y)\phi(y) > 0.$$

Supongamos ahora que existe  $\phi \in \mathbb{P} + R\mathcal{Q}$  tal que

$$\forall y \in \text{Crit}(f - R), \phi(y)(f - R)(y) > 0.$$

Sean  $P_0 \in \mathcal{P}$ ,  $Q_0 \in \mathcal{Q}$  tales que  $\phi = P_0 + RQ_0$  y sean  $P \in \mathbb{P}$ ,  $Q \in \mathcal{Q}$  tales que  $R = \frac{P}{Q}$ .

Para cada  $s > 0$  definimos la función

$$R_s = \frac{P + sP_0}{Q - sQ_0} \in \mathcal{R}.$$

Definamos

$$m := \inf_{y \in \text{Crit}(f - R)} \omega(f - R, y)\phi(y).$$

Como  $\text{Crit}(f - R)$  es compacto (pues es cerrado y está contenido en un métrico compacto  $X$ ) y además  $\phi$  y  $\omega(f - R, \cdot)$  son continuas sobre  $\text{Crit}(f - R)$ , -pues para cada  $y \in \text{Crit}(f - R)$ ,  $\omega(f - R, y) = \frac{\eta(f - R, y)}{\|f - R\|}$ -, luego existe  $y^* \in \text{Crit}(f - R)$  tal que

$$m = \omega(f - R, y^*)\phi(y^*).$$

Por lo que

$$m > 0.$$

Definamos los conjuntos

$$X_1 := \{x \in X : \omega(f - R, x)\phi(x) > \frac{1}{2}m\} \cup \{x \in X : \eta(f - R, x) > \frac{1}{2}\|f - R|\}$$

y

$$X_2 := X \setminus X_1.$$

Se puede observar que

$$X_1 = \left[ \phi^{-1}(0, \infty) \cup (f - R)^{-1}(0, \infty) \cup \left(\frac{\phi}{h_1}\right)^{-1} \left(\frac{1}{2}m, \infty\right) \right] \sqcup \left[ \phi^{-1}(-\infty, 0) \cup (f - R)^{-1}(-\infty, 0) \cup \left(-\frac{\phi}{h_2}\right)^{-1} \left(\frac{1}{2}m, \infty\right) \right].$$

Como  $\phi, f - R, h_1, h_2 \in C(X)$ ,  $X_1$  es un conjunto abierto y por ello  $X_2$  es compacto.

Es fácil ver que  $\text{Crit}(f - R) \subset X_1$ , luego

$$\forall x \in X_2, \eta(f - R, x) < \|f - R|.$$

Debido a lo anterior y ya que  $\eta(f - R, \cdot) \in C(X)$ , existe  $\bar{x} \in X_2$  tal que

$$\sup_{x \in X_2} \eta(f - R, x) \leq \eta(f - R, \bar{x}) < \|f - R|.$$

Denotemos  $M := \eta(f - R, \bar{x})$ .

Si  $x \in X_2$ , entonces

$$\begin{aligned} \eta(f - R_s, x) &\leq \eta(f - R, x) + \eta(R - R_s, x) \\ &\leq M + \|R - R_s\| \\ &\leq M + \bar{c}\|R - R_s\|_X. \end{aligned}$$

Como  $\|R - R_s\|_X \rightarrow 0$  cuando  $s \rightarrow 0$ , se tiene que para  $s > 0$  suficientemente pequeña

$$\bar{c}\|R - R_s\|_X < \|f - R| - M,$$

por lo que

$$\forall x \in X_2, \eta(f - R, x) < \|f - R\|. \quad (3.1)$$

Por otro lado, como  $\|(f - R_s) - (f - R)\|_X \rightarrow 0$ , para  $s > 0$  suficientemente pequeña

$$\|(f - R_s) - (f - R)\|_X < \frac{1}{2}\|f - R\| \min\{m_{h_1}, m_{h_2}\},$$

donde  $m_{h_1} = \min_{x \in X} h_1(x)$  y  $m_{h_2} = \min_{x \in X} h_2(x)$ .

Por ello

$$\forall x \in X, (f - R)(x) - \frac{1}{2}\|f - R\|h_1(x) < (f - R_s)(x) < (f - R)(x) + \frac{1}{2}\|f - R\|h_2(x).$$

De lo cual se deduce

$$\forall x \in X_1, (f - R)(x)(f - R_s)(x) > 0.$$

Sea  $x \in X_1$ , debido a lo anterior podemos afirmar que

$$\omega(f - R, x) = \omega(f - R_s, x).$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \eta(f - R_s, x) &= \omega(f - R_s, x)(f - R_s)(x) \\ &= \omega(f - R, x)(f - R)(x) + \omega(f - R, x)(R - R_s)(x) \\ &= \eta(f - R, x) + \omega(f - R, x)(R - R_s)(x) \\ &\leq \|f - R\| - \frac{s\omega(f - R, x)\phi(x)}{(Q - sQ_0)(x)} \\ &\leq \|f - R\| - \frac{sm}{2\|Q - sQ_0\|_x}. \end{aligned}$$

Si  $s > 0$  es suficientemente pequeña tal que cumpla  $\|Q - sQ_0\|_X > 0$ , entonces

$$\forall x \in X_1, \eta(f - R_s, x) < \|f - R\|. \quad (3.2)$$

Por último, debido a 3.1 y 3.2, podemos deducir

$$\|f - R_s\| < \|f - R\|.$$

■



Nos gustaría que fuese posible caracterizar la mejor aproximación racional de manera similar a como el Teorema de Chebyshev caracteriza el polinomio de mejor aproximación. Esto es posible cuando  $X = [a, b]$ . Para ello debemos establecer ciertas definiciones que encuentran su equivalente en [7] y [27].

Para  $M$  subespacio de  $C[a, b]$ , definimos

1.  $mnc(M)$  como el máximo número de cambios de signo que pueda tener un elemento de  $M$  sobre el intervalo  $[a, b]$ , v. gr.  $mnc(\mathcal{P}_2) = 2$ .
2.  $v(M) := 1 + mnc(M)$ .
3.  $\mu(M) := \text{máx}\{\dim(H) : H \text{ es un subespacio de Haar de } M\}$ .

Si  $M$  es un subespacio de Haar de  $C[a, b]$ , entonces

$$v(M) = \mu(M) = \dim(M).$$

Además, diremos que una función  $g \in C[a, b]$  tiene  $k$  puntos alternantes en  $[a, b]$ , si existen  $a \leq x_1 < \dots < x_k \leq b$ , tales que

1.  $x_i \in \text{Crit}(g), i = 1, \dots, k$ .
2.  $g(x_i)g(x_{i+1}) < 0, i = 1, \dots, k - 1$ .

### Observación 3.1

La anterior definición coincide con la presentada en [7] cuando  $h_1 = h_2 = 1$ . En [27] se nos muestra una definición de puntos alternantes parecida más no equivalente a ésta, pues aquella se basa en la funciones peso de Moursund.

### Proposición 3.4 ([7])

Sean  $\mathcal{P} \subset C[a, b]$ ,  $\mathcal{Q} \subset C[a, b]$  y  $\mathcal{R}$  definidos como en la introducción de este capítulo, pero con  $X = [a, b]$ . Si  $R \in \mathcal{R}$  entonces  $\mathcal{P} + R\mathcal{Q}$  es un subespacio de  $C[a, b]$ .

### Teorema 3.3 (Alternación.)

Sea  $f \in C[a, b]$  y  $R \in \mathcal{R}$ . Si  $f - R$  tiene al menos  $1 + v(\mathcal{P} + R\mathcal{Q})$  puntos alternantes en  $[a, b]$ , entonces  $R$  es una mejor aproximación a  $f$  de  $\mathcal{R}$  relativo a  $h_1$  y  $h_2$ . Por otro lado, si  $R \in \mathcal{R}$  es una mejor aproximación a  $f \in C[a, b]$  relativo a  $h_1$  y  $h_2$ , entonces  $f - R$  tiene menos  $1 + \mu(\mathcal{P} - R\mathcal{Q})$  puntos alternantes en  $[a, b]$ .

**Demostración:** Primero supongamos que  $R$  no es una mejor aproximación a  $f$ , debido acuerdo al teorema anterior, existe  $\phi \in \mathcal{P} + R\mathcal{Q}$  tal que

$$\forall y \in \text{Crit}(f - R), \phi(y)(f - R)(y) > 0.$$

Si  $f - R$  tiene al menos  $k := 1 + v(\mathcal{P} + R\mathcal{Q})$  puntos alternantes en  $[a, b]$ , denotémoslos  $a \leq x_1 < \dots < x_k \leq b$ , estos puntos son también puntos críticos de  $f - R$ , entonces en dichos puntos se cumple que

$$\phi(x_i)(f - R)(x_i) > 0, i = 1, \dots, k.$$

Por lo que existen  $k - 1$  puntos en  $[a, b]$ , en los cuales debido a la continuidad de  $\phi$  ocurre un cambio de signo, esto no puede ser pues  $\phi \in \mathcal{P} + R\mathcal{Q}$  y  $v(\mathcal{P} + R\mathcal{Q}) = k - 2$ .

Consideremos ahora que  $R$  es de mejor aproximación a  $f$ . Sea  $M$  un subespacio de Haar de  $\mathcal{P} + R\mathcal{Q}$  tal que  $\mu(\mathcal{P} + R\mathcal{Q}) = \dim(M) =: l$ . Sea  $\{\phi_1, \dots, \phi_l\} \subset M$  una base de  $M$ , entonces para toda  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_l) \in \mathbb{R}^l$ ,

$$\sum_{i=1}^l c_i \phi_i \in M \subset \mathcal{P} + R\mathcal{Q}.$$

Para cada  $x \in \text{Crit}(f - R)$  denotemos

$$\hat{x} := (f - R)(x)(\phi_1(x), \dots, \phi_l(x)),$$

además definamos el conjunto

$$A := \{\hat{x} : x \in \text{Crit}(f - R)\}.$$

Como  $R$  es de mejor aproximación, debido al teorema anterior para cada  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_l)$ , existe  $y_c \in \text{Crit}(f - R)$  tal que

$$(f - R)(y_c) \sum_{i=1}^l c_i \phi_i(y_c) \leq 0,$$

es decir,

$$\mathbf{c} \cdot \hat{y}_c \leq 0.$$

Como consecuencia de esto, se puede afirmar que el origen de  $\mathbb{R}^l$  pertenece a la envoltura convexa del conjunto  $A$ . Debido al teorema de Caratheodory se concluye que el origen pertenece a la envoltura convexa de solo  $l + 1$  puntos de dicho conjunto, i.e. existen  $x_1 < \dots < x_{l+1} \in \text{Crit}(f - R)$  tales que

$$0 \in \text{conv}(\{(f - R)(x_i)(\phi_1(x_i), \dots, \phi_l(x_i)) : i = 1, \dots, l + 1\}).$$

Sabemos, [véase en [7] el lema del capítulo 3 sección 4], que debido a que  $M$  es un espacio de Haar, lo anterior implica que  $f - R$  alterna un signo en esos puntos, i. e.

$$(f - R)(x_i)(f - R)(x_{i+1}) < 0, \quad i = 1, \dots, l + 1.$$

Luego dichos puntos serían puntos alternantes de  $f - R$ . ■

Cuando se busca la mejor aproximación racional algebraica asimétrica a  $f \in C[a, b]$ , se sabe que  $\mathcal{P}_n + R\mathcal{P}_m$  es, para cualquier  $R \in R_{nm}$ , un subespacio de Haar de  $C[a, b]$ . Además si  $R = \frac{p}{q} \in R_{nm}$  y  $(p : q) = 1$  entonces  $\dim(\mathcal{P}_n + R\mathcal{P}_m) = 1 + \max\{n + \deg q, m + \deg p\}$ .

### Corolario 3.1

La función racional algebraica irreducible  $\frac{p}{q}$  es de mejor aproximación asimétrica a  $f \in C[a, b]$  de  $R_{nm}$  relativa a  $h_1$  y  $h_2$  si y sólo si la función  $f - \frac{p}{q}$  tiene  $2 + \max\{n + \deg q, m + \deg p\}$  puntos alternantes en  $[a, b]$ .

## 3.5. Unicidad de la mejor aproximación racional.

En esta sección nos proponemos demostrar que para una función continua  $f$  dada sobre un intervalo  $[a, b]$ , con unas funciones  $h_1, h_2$  estrictamente positivas, continuas fijas y dada una clase aproximante de funciones racionales  $\mathcal{R}$ , si existe un elemento de ese conjunto que es de mejor aproximación racional asimétrica a  $f$  relativo a  $h_1$  y  $h_2$ , este es único.

### Lema 3.1

Sea  $R$  una mejor aproximación en  $\mathcal{R}$  a  $f \in C[a, b] \setminus \mathcal{R}$ . Si  $\mathcal{P} + R\mathcal{Q}$  es un subespacio de Haar de  $C[a, b]$ , entonces

$$\forall \phi \in \mathcal{P} + R\mathcal{Q} \setminus \{0\} \exists y \in \text{Crit}(f - R), (f - R)(y)\phi(y) < 0.$$

**Demostración:** Sea  $d = \dim(\mathcal{P} + R\mathcal{Q})$  y sea  $\{\phi_1, \dots, \phi_d\}$  una base de  $\mathcal{P} + R\mathcal{Q}$ . Para cada  $x \in \text{Crit}(f - R)$  definimos

$$\hat{x} := (\phi_1(x), \dots, \phi_d(x)).$$

Siguiendo el razonamiento que usamos en la demostración del teorema anterior podemos concluir que el origen del espacio  $\mathbb{R}^d$  pertenece a la envoltura convexa del conjunto

$$\{(f - R)(x)\hat{x} : x \in \text{Crit}(f - R)\}.$$

Esto es,  $\mathbf{0}$  es una combinación lineal convexa de  $k$  elementos de dicho conjunto, i.e., existen  $x_i \in \text{Crit}(f - R)$  y  $\alpha_i > 0$ , donde  $i = 1, \dots, k$ , tales que  $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$  y

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^k \alpha_i (f - R)(x_i) \hat{x}_i.$$

Por lo que el conjunto  $\{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k\}$  es linealmente dependiente. Debido a que  $\mathcal{P} + R\mathcal{Q}$  es un espacio de Haar,  $k > d$ .

Sea  $\phi = \sum_{i=1}^d c_i \phi_i \in \mathcal{P} + R\mathcal{Q}$ ,  $\phi \neq 0$  luego

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \alpha_i (f - R)(x_i) \phi(x_i) &= \sum_{i=1}^k \alpha_i (f - R)(x_i) \sum_{j=1}^d c_j \phi_j(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^d c_j \alpha_i (f - R)(x_i) \phi_j(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^d c_j \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Por ser  $\mathcal{P} + R\mathcal{Q}$  un espacio de Haar, la función  $\phi$  tiene a lo más  $d - 1$  raíces, por lo que a lo más  $d - 1$  de los sumandos  $\alpha_i (f - R)(x_i) \phi(x_i)$  pueden ser cero, luego hay al menos uno tal que su valor es estrictamente negativo. Con esto se demuestra la existencia de un punto crítico  $y$  de  $f - R$  tal que  $\phi(y)(f - R)(y) < 0$ .  $\blacksquare$

Con ayuda de este lema podemos llegar a la demostración de la unicidad, que damos a continuación.

**Teorema 3.4 (Unicidad.)**

Sea la función racional  $R \in \mathcal{R}$  una mejor aproximación asimétrica a  $f \in C[a, b]$  relativa a  $h_1$  y  $h_2$ . Si  $\mathcal{P} + \mathcal{R}\mathcal{Q}$  es un espacio de Haar, entonces  $R$  es única.

**Demostración:** Supongamos que existe otra función racional  $R^* \in \mathcal{R}$  de mejor aproximación asimétrica a  $f \in C[a, b]$ . Sean  $P^* \in \mathcal{P}$  y  $Q^* \in \mathcal{Q}$ , tales que  $R^* = \frac{P^*}{Q^*}$ . Observemos, que la función

$$\varphi := Q^*(R^* - R) = Q^*[(f - R) - (f - R^*)]$$

pertenece al espacio  $\mathcal{P} + \mathcal{R}\mathcal{Q}$ . Tomemos un punto crítico  $y$  de la función  $f - R$ . Como  $R^*$  es de mejor aproximación racional asimétrica, se verifica que

$$\eta(f - R^*, y) \leq \|f - R^*\| \leq \|f - R\| = \eta(f - R, y).$$

Deducimos que

$$\forall y \in \text{Crit}(f - R), \varphi(y)(f - R)(y) \geq 0.$$

Usando el teorema anterior podemos afirmar que  $\varphi = 0$  y de esto que  $R^* = R$ . ■

Debido al resultado anterior podemos definir el siguiente operador no lineal sobre  $[a, b]$ .

**Definición 3.2**

Sean  $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Sean  $h_1$  y  $h_2$  funciones continuas y estrictamente positivas sobre el intervalo cerrado  $[a, b]$ . Definimos el operador no lineal

$$T_{n,m}^{h_1, h_2} : C[a, b] \rightarrow R_{n,m}[a, b]$$

que asigna a una función  $f$  continua sobre  $[a, b]$  su respectiva función racional algebraica de la clase  $R_{n,m}[a, b]$  de mejor aproximación relativa a  $h_1$  y  $h_2$ .

## 3.6. Normalidad de las funciones continuas.

En esta sección establecemos el concepto de función normal e hipernormal, que poseen algunas funciones continuas dependiendo de las características que presente su respectiva mejor aproximación racional algebraica asimétrica. Exhibimos una propiedad que tienen las funciones hipernormales, así como ciertas condiciones necesarias para que una función sea

hipernormal.

Dada  $R = \frac{p}{q} \in R_{nm}$ , donde  $p \in \mathcal{P}_n$ ,  $q \in \mathcal{P}_m$  y  $(p : q) = 1$ . Definimos el valor

$$d_{n,m}(R) = \min\{n - \deg p, m - \deg q\}.$$

Luego el corolario 3.1 puede ser reescrito de la forma siguiente.

**Corolario 3.2**

Sean  $f \in C[a, b]$ ,  $h_1, h_2 \in C[a, b]$ , con  $h_1 > 0$  y  $h_2 > 0$ . La función racional algebraica  $R \in R_{nm}$  es de mejor aproximación asimétrica a  $f$  relativa a  $h_1$  y  $h_2$  si y sólo si la función  $f - R$  tiene  $n + m + 2 - d_{n,m}(R)$  puntos alternantes en  $[a, b]$ .

Procederemos ahora a establecer los conceptos de función normal e hipernormal.

**Definición 3.3 (Normalidad)**

Sea  $f \in C[a, b]$  y  $R \in R_{nm}$  su mejor aproximación racional algebraica relativa a  $h_1$  y  $h_2$ . Si  $d_{n,m}(R) = 0$ , entonces decimos que  $f$  es  $n, m, h_1, h_2$ -normal. En otro caso diremos que  $f$  es deficiente con deficiencia  $d_{n,m}(R)$ .

**Definición 3.4 (Hipernormalidad)**

Sean  $h_1, h_2 \in C[a, b]$  estrictamente positivas y  $f \in C[a, b]$ . Si para cada  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $f$  es  $n, m, h_1, h_2$ -normal, entonces decimos que  $f$  es  $h_1, h_2$ -hipernormal.

Denotaremos como  $\mathcal{N} = \mathcal{N}(n, m, h_1, h_2, [a, b])$  al conjunto de todas las funciones normales, i. e.

$$\mathcal{N} := \{f \in C[a, b] : f \text{ es } n, m, h_1, h_2\text{-normal}\}.$$

**Ejemplo.**

Sea  $f(x) = x$  definida sobre el intervalo  $[-1, 1]$ . La función racional de mejor aproximación asimétrica a  $f$  de  $R_{0,1}[-1, 1]$  relativa a las funciones  $h_1 = h_2 = 1$  es  $r^*(x) = 0$ . Los puntos alternantes de la función  $f - r^*$  están en  $x_1 = -1$  y  $x_2 = 1$ . Como  $d_{0,1}(r^*) = 1$  entonces  $f$  no es una función  $(0, 1, 1, 1)$ -normal. Por otro lado usando 3.2 podemos verificar que la función racional de mejor aproximación asimétrica a  $f$  de  $R_{0,1}[-1, 1]$  relativa a las funciones  $h_1 = 1$  y  $h_2 = (\sqrt{1.01} - 0.2) / \sqrt{1.01}$  es  $t^*(x) =$

$(0.01)/(\sqrt{1.01} - x)$ . Puesto que los puntos alternantes de  $f - t^*$  están en  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = \sqrt{1.01} - 0.1$  y  $x_3 = 1$ . Como  $d_{0,1}(t^*) = 0$ , entonces  $f$  es  $(0, 1, 1, (\sqrt{1.01} - 0.2)/\sqrt{1.01})$ -normal.

**Observación 3.2**

*De estos ejemplos concluimos que la normalidad de una función fija con respecto al conjunto  $R_{n,m}[a, b]$  depende de las funciones  $h_1$  y  $h_2$ .*

El teorema siguiente muestra una propiedad importante de las funciones hipernormales.

**Teorema 3.5**

Sean  $h_1, h_2 \in C[a, b]$  estrictamente positivas,  $f \in C[a, b]$  una función  $h_1, h_2$ -hipernormal, y  $R = \frac{p}{q} \in R_{nm}$  su mejor aproximación racional algebraica de  $R_{nm}$ , relativa a  $h_1$  y  $h_2 \in C[a, b]$ , entonces  $\deg p = n$ ,  $\deg q = m$ . Además la cardinalidad máxima de un conjunto de puntos alternantes de la función  $f - R$  en  $[a, b]$  es  $n + m + 2$ .

**Demostración:** Sean  $h_1, h_2 \in C[a, b]$ ,  $h_1 > 0$ ,  $h_2 > 0$ . Sean  $n, m \in \mathbb{N}$ . Sea  $f \in C[a, b]$  una función  $h_1, h_2$ -hipernormal. Luego  $f$  es  $n, m, h_1, h_2$ -normal. Supongamos que  $\deg p \leq n - 1$  por lo que  $\deg q = m$ . Ello implica que  $f - R$  tendrá un conjunto de

$$2 + \max\{m + \deg p, n + \deg q\} = n + m + 2$$

puntos alternantes en  $[a, b]$ . Pero

$$n + m + 2 = 2 + \max\{m + 1 + \deg p, n + \deg q\}.$$

Por lo que  $R$  sería también la mejor aproximación asimétrica a  $f$  de  $R_{n,m+1}$ . En ese caso  $f$  no sería  $n, m + 1, h_1, h_2$ -normal, lo cual contradiría el hecho de que  $f$  es  $h_1, h_2$ -hipernormal. De manera análoga se demuestra que  $\deg q = m$ .

Supongamos ahora que  $f - R$  tiene  $n + m + 3$  o más puntos alternantes en  $[a, b]$ . Como ya se probó  $\deg p = n$  y  $\deg q = m$ , luego  $f - R$  tendría

$$2 + \max\{m + 1 + \deg p, n + 1 + \deg q\} = n + m + 3$$

puntos alternantes en  $[a, b]$ . Esto implicaría que  $R$  es la mejor aproximación asimétrica a  $f$  de  $R_{n+1,m+1}$ . Considerando a  $R$  como un elemento

de  $R_{n+1,m+1}$  tendríamos  $d_{n+1,m+1}(R) = 1$ . Por lo que  $f$  sería  $n + 1, m + 1, h_1, h_2$ -deficiente. Esto contradice la hipótesis de la  $h_1, h_2$ -hipernormalidad de  $f$ . Luego cualquier conjunto de puntos alternantes dado tiene cardinalidad máxima de  $n + m + 2$ . ■

Como consecuencia del teorema anterior podemos afirmar, que si  $f$  es  $h_1, h_2$ -hipernormal y si  $R \in R_{nm}[a, b]$  es la función racional mejor aproximación racional algebraica relativa a  $h_1$  y  $h_2$ , entonces existe al menos un conjunto de  $n + m + 2$  puntos alternantes, pues es  $n, m, h_1, h_2$ -normal, pero no existe conjunto de  $n + m + 3$  o más puntos alternantes. Esta característica que poseen las funciones hipernormales es útil para garantizar la convergencia de un algoritmo tipo Remez que se estudiará en el próximo capítulo, sin embargo no es necesario que una función sea hipernormal para poseer tal propiedad.

### Teorema 3.6

Sean  $h_1, h_2 \in C[a, b]$ ,  $h_1 > 0$ ,  $h_2 > 0$ . Si  $f \in C[a, b]$  cumple las tres condiciones siguientes

1.  $\forall n, m \in \mathbb{N}, f \notin R_{nm}$ .
2.  $\forall x \in [a, b], f(x) \neq 0$ .
3.  $\forall n, m \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n + f\mathcal{P}_m$  es un espacio de Haar de dimensión  $n + m + 2$ ,

entonces  $f$  es  $h_1, h_2$ -hipernormal.

**Demostración:** Supongamos que  $f$  cumple las tres condiciones previas más no es  $h_1, h_2$ -hipernormal. Esto es que  $f$  es  $n, m, h_1, h_2$ -deficiente, para algún par  $n, m$  de números naturales. Sea  $R \in R_{nm}$  la mejor aproximación asimétrica a  $f$  de  $R_{nm}[a, b]$  relativa a  $h_1$  y  $h_2$ , entonces  $d_{n,m}(R) \geq 1$ . Sean  $p \in \mathcal{P}_n$  y  $q \in \mathcal{P}_m$  tales que  $(p : q) = 1$  y  $R = \frac{p}{q}$ .

Sabemos del corolario 3.1 que  $f - R$  tiene un conjunto de

$$2 + \max\{n + \deg q, m + \deg p\}$$

puntos alternantes en  $[a, b]$ . Esto implica que  $f - R$  tiene al menos

$$1 + \max\{n + \deg q, m + \deg p\}$$

ceros distintos en  $[a, b]$ . Si  $p$  fuese el polinomio cero, entonces  $f$  tendría al menos un cero en  $[a, b]$ . Esto contradice la segunda condición del teorema.



Por lo anterior se deduce que  $p$  no es el polinomio cero.

Luego la función  $fq - p$  tendría

$$1 + \max\{n + \deg p, m + \deg q\} = \\ = n + m + 1 - d_{n,m}(R) = (n - \deg p) + (m - \deg q) - d_{n,m}(R) + \deg p + \deg q + 1$$

ceros distintos en  $[a, b]$ .

Si

$$d_{n,m}(R) = \min\{n - \deg p, m - \deg q\} \geq 1,$$

entonces la función  $fq - p$  tendría más de

$$\deg p + \deg q + 1$$

ceros en  $[a, b]$ .

Sean

$$k := \deg p$$

y

$$l := \deg q$$

se verifica que

$$fq - p \in \mathcal{P}_k + f\mathcal{P}_l,$$

por lo que de acuerdo a la tercer condición

$$fq - p = 0.$$

Como consecuencia de lo anterior se deduce

$$f = \frac{p}{q} \in R_{kl}.$$

Esto contradice la primer condición. ■

### Observación 3.3

Es interesante observar, que la demostración de los dos teoremas previos es la misma sin importar cuales sean las funciones  $h_1$  y  $h_2$ , que definen la respectiva norma asimétrica necesaria para el concepto de la mejor aproximación racional asimétrica. Esto nos indica que cualquier función que cumpla el teorema 3.6 será hipernormal para cualesquiera parejas de funciones  $h_1$  y  $h_2$ . Lo cual expresamos de manera formal en el siguiente teorema.

### Teorema 3.7

Si  $f \in C[a, b]$  es tal que cumple las hipótesis del teorema 3.6, entonces para cualesquiera  $h_1, h_2 \in C[a, b]$  estrictamente positivas y para cualesquiera  $n, m \in \mathbb{N}$ , la respectiva función racional algebraica de mejor aproximación de  $R_{nm}[a, b]$  a  $f$  relativa a  $h_1$  y  $h_2$ , denotémosla como  $R$ , es tal que

$$d_{n,m}(R) = 0.$$

Como consecuencia de lo anterior, si  $f$  cumple las hipótesis del teorema 3.6 y si  $R = \frac{p}{q} \in R_{nm}[a, b]$  es su función racional de mejor aproximación relativa a  $h_1$  y  $h_2$ , podemos garantizar la existencia de un conjunto alternante de  $n + m + 2$  elementos en  $[a, b]$  de la función  $f - R$  y que  $\deg p = n$  y  $\deg q = m$ . El ejemplo típico de lo anterior es la función exponencial. Véase [32].

En el siguiente teorema establecemos la unicidad fuerte de la mejor aproximación racional algebraica a una función dada. Este resultado será de utilidad más adelante para estudiar la continuidad del operador  $T_{n,m}^{h_1, h_2}$ .

### Teorema 3.8 (Teorema de la unicidad fuerte)

Sea  $f \in R_{n,m}[a, b]$  o bien una función  $n, m, h_1, h_2$ -normal. Sea  $r^* := T_{n,m}^{h_1, h_2}(f)$ . Existe  $\gamma > 0$  tal que para toda  $r \in R_{n,m}[a, b]$ ,

$$\|f - r\|_{h_1, h_2} = \|f - r^*\|_{h_1, h_2} + \gamma \|r - r^*\|.$$

### Demostración:

Caso i) Si  $f \in R_{n,m}[a, b]$  entonces  $r^* = f$ . Por lo que existe  $\gamma = 1/\underline{c} > 0$  tal que

$$\forall r \in R_{n,m}[a, b], \quad \|f - r\| \leq \gamma \|f - r\|.$$

Caso ii) Supongamos que  $f \notin R_{n,m}[a, b]$ . Para cada  $r \in R_{n,m}[a, b] \setminus \{r^*\}$  definamos

$$\gamma(r) := \frac{\|f - r\| - \|f - r^*\|}{\|r - r^*\|}.$$

Desde luego  $\gamma(r) > 0$ , pues  $\|f - r\| > \|f - r^*\|$ .

Sea  $c := \inf\{\gamma(r) : r \in R_{n,m}[a, b] \setminus \{r^*\}\}$ .

Afirmamos que  $c > 0$ . Supongamos que  $c = 0$ , luego existe  $\{r_t\}_{t=1}^{\infty} \subseteq R_{n,m}[a, b]$  tal que  $\gamma(r_t) \rightarrow 0$ .

Sean  $p_t \in \mathcal{P}_n$ ,  $q_t \in \mathcal{P}_m$ , tales que  $r_t := p_t/q_t$ ,  $q_t > 0$  sobre  $[a, b]$  y  $\|p_t\| + \|q_t\| = 1$ .

Como  $\{p_t\}$  y  $\{q_t\}$  están acotadas existen subsucesiones  $p_k \rightarrow \bar{p}$  y  $q_k \rightarrow \bar{q}$ .

Sabemos [23] existe  $c' > 0$  tal que para cada  $g \in C[a, b]$ ,  $c' \|g\| \leq \|g\|$ , como  $\gamma(r_k) \rightarrow 0$  entonces para  $k$  suficientemente grande

$$\frac{\|f - r_k\| - \|f - r^*\|}{\|r_k - r^*\|} \leq \frac{c'}{2}$$

entonces

$$\|f - r_k\| \leq \frac{c'}{2} \|r_k - r^*\| + \|f - r^*\| \leq \frac{c'}{2} \|r_k\| + \frac{c'}{2} \|r^*\| + \|r^* - f\|.$$

Por otro lado

$$\|f - r_k\| \geq c' \|f - r_k\| \geq c' (\|r_k\| - \|f\|) \geq c' \|r_k\| - c' \|f\|.$$

Luego

$$c' \|r_k\| - \frac{c'}{2} \|r_k\| \leq c' \|f\| + \frac{c'}{2} \|r^*\| + \|f - r^*\|.$$

Por lo que

$$\|r_k\| \leq 2 \|f\| + \|r^*\| + \frac{2}{c'} \|f - r^*\|$$

i.e.,  $\{r_k\}$  esta acotada, entonces como

$$\|r^* - r_k\| \leq \|r^*\| + \|r_k\|,$$

también la sucesión  $\{\|r^* - r_k\|\}$  esta acotada.

Sea  $y \in Y := \left\{ y \in [a, b] : \frac{(f-r^*)^+(y)}{h_1(y)} + \frac{(f-r^*)^-(y)}{h_2(y)} = \|f - r^*\| \right\}$ , entonces

$$\begin{aligned}
\gamma(r_k) \cdot \|r_k - r^*\| &= \|r_k - f\| - \|r^* - f\| \\
&= \|f - r_k\| - \omega(f - r^*, y) \cdot (f - r^*)(y) \\
&\geq \omega(f - r_k, y) \cdot (f - r_k)(y) - \omega(f - r^*, y) \cdot (f - r^*)(y) \\
&\geq \omega(f - r^*, y) \cdot (f - r_k)(y) - \omega(f - r^*, y) \cdot (f - r^*)(y) \\
&= \omega(f - r^*, y) \cdot (r_k - r^*)(y) \\
&= \frac{\omega(f - r^*, y)}{q_k(y)} \cdot (p_k - r^*q_k)(y),
\end{aligned}$$

como  $q_k > 0$  entonces

$$\gamma(r_k)q_k(y) \cdot \|r_k - r^*\| \geq \omega(f - r^*, y)(p_k - r^*q_k)(y). \quad (3.3)$$

Como  $\gamma(r_k) \rightarrow 0$ , y la sucesión  $\{q_k(y) \cdot \|r_k - r^*\|\}$  esta acotada entonces

$$\begin{aligned}
0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma(r_k)q_k(y) \cdot \|r_k - r^*\| &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \omega(f - r^*, y)(p_k - r^*q_k)(y) \\
&= \omega(f - r^*, y)(\bar{p} - r^*\bar{q})(y).
\end{aligned}$$

Como  $\mathbf{sign} \omega(f - r^*, y) = \mathbf{sign} (f - r^*)(y)$ , entonces

$$(f - r^*)(y) \cdot (\bar{p} - r^*\bar{q})(y) \leq 0.$$

Por lo tanto hemos demostrado que

$$\forall y \in Y, (f - r^*)(y) \cdot (\bar{p} - r^*\bar{q})(y) \leq 0.$$

Debido a que  $\bar{p} - r^*\bar{q} \in \mathcal{P}_n + r^*\mathcal{P}_m$  entonces de acuerdo con el lema 3.1

$$\bar{p} - r^*\bar{q} = 0.$$

De lo que se concluye que

$$\bar{p} = r^*\bar{q}. \quad (3.4)$$

Desde luego, existen  $p^* \in \mathcal{P}_n, q^* \in \mathcal{P}_m$ , tales que  $r^* = p^*/q^*, \|p^*\| + \|q^*\| = 1, q^* > 0$  sobre  $[a, b]$  y  $(p^* : q^*) = 1$ . Como  $f$  es  $n, m, h_1, h_2$ -normal entonces  $\deg p^* = n$  o  $\deg q^* = m$ . por lo que de acuerdo con [7]

$$\dim(\mathcal{P}_n + r^*\mathcal{P}_m) = n + m + 1.$$

Como  $\dim(\mathcal{P}_n) = n + 1$  y  $\dim(\mathcal{P}_m) = m + 1$ , entonces

$$\dim(\mathcal{P}_n + r^*\mathcal{P}_m) = \dim(\mathcal{P}_n) + \dim(\mathcal{P}_m) - 1. \quad (3.5)$$

Por otro lado, como para cualquier  $k \in \mathbb{N}$ ,  $q_k > 0$  sobre  $[a, b]$  y  $q_k \rightarrow \bar{q}$ , entonces

$$\bar{q} \geq 0 \text{ sobre } [a, b]. \quad (3.6)$$

Además, como se cumple que

$$\begin{aligned} 1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|p_k\| + \|q_k\| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|p_k\| + \lim_{k \rightarrow \infty} \|q_k\| \\ &= \|\lim_{k \rightarrow \infty} p_k\| + \|\lim_{k \rightarrow \infty} q_k\| \\ &= \|\bar{p}\| + \|\bar{q}\| \end{aligned}$$

entonces

$$\|\bar{p}\| + \|\bar{q}\| = \|p^*\| + \|q^*\|. \quad (3.7)$$

De acuerdo con [7] los resultados 3.4, 3.5, 3.6 y 3.7 implican que  $\bar{p} = p^*$  y  $\bar{q} = q^*$ .

Por otro lado, establezcamos el valor

$$e := \inf \left\{ \max_{y \in Y} \omega(f - r^*, y) \cdot \phi(y) : \phi \in \mathcal{P}_n + r^*\mathcal{P}_m, \text{ y } \|\phi\| = 1 \right\}.$$

Sea  $\|\phi\| = 1$  entonces  $\phi \neq 0$ . Si  $\phi \in \mathcal{P}_n + r^*\mathcal{P}_m$ , entonces debido al lema 3.1 existe  $y_\phi \in Y$  tal que  $(f - r^*)(y_\phi)\phi(y_\phi) > 0$ , por lo tanto

$$\max_{y \in Y} \omega(f - r^*, y) \cdot \phi(y) > 0.$$

Es decir,  $e$  existe y verifica que  $e \geq 0$ .

Supongamos que  $e = 0$ . Como  $\{\phi \in \mathcal{P}_n + r^*\mathcal{P}_m : \|\phi\| = 1\}$  es un conjunto compacto entonces existe  $\phi' \in \mathcal{P}_n + r^*\mathcal{P}_m$  tal que  $\|\phi'\| = 1$  y

$$\max_{y \in Y} \omega(f - r^*, y) \cdot \phi'(y) = e = 0.$$

Como  $\phi' \neq 0$ , de acuerdo con lema 3.1, existe  $y' \in Y$  tal que

$$0 < \omega(f - r^*, y') \cdot \phi'(y') \leq \max_{y \in Y} \omega(f - r^*, y) \cdot \phi'(y) = 0.$$

Por lo tanto  $e > 0$ .

Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , establecemos la función

$$\phi_k := \frac{r^* q_k - p_k}{\|r^* q_k - p_k\|}.$$

Desde luego  $\phi_k \in \mathcal{P}_n + r^* \mathcal{P}_m$ , y  $\|\phi_k\| = 1$ , por lo que

$$e \leq \max_{y \in Y} \omega(f - r^*, y) \cdot \phi_k(y).$$

Entonces existe  $y_k \in Y$ , tal que

$$e \leq \omega(f - r^*, y_k) \cdot \phi_k(y_k) = \omega(f - r^*, y_k) \frac{(r^* q_k - p_k)(y_k)}{\|r^* q_k - p_k\|}.$$

Luego

$$e \cdot \|r^* q_k - p_k\| \leq \omega(f - r^*, y_k) \cdot (r^* q_k - p_k)(y_k).$$

Debido a (3.3)

$$e \cdot \|r^* q_k - p_k\| \leq \gamma(r_k) q_k(y_k) \cdot \|r_k - r^*\|.$$

Como  $q_k(y_k) \leq \|q_k\| = 1$ , entonces

$$e \cdot \|r^* q_k - p_k\| \leq \gamma(r_k) \cdot \|r_k - r^*\|. \quad (3.8)$$

Como  $q^* > 0$  sobre  $[a, b]$  y  $q_k \rightarrow \bar{q} = q^*$  entonces existe  $\varepsilon > 0$  tal que para toda  $k$  suficientemente grande se cumple que

$$\forall x \in [a, b], q_k(x) \geq \varepsilon.$$

Sea  $k \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, entonces debido a lo anterior

$$\left\| \frac{1}{q_k} \right\| \leq \frac{1}{\varepsilon},$$

por lo que

$$\varepsilon \cdot \|r^* - r_k\| = \varepsilon \cdot \left\| \frac{r^* q_k - p_k}{q_k} \right\| \leq \varepsilon \cdot \left\| \frac{1}{q_k} \right\| \cdot \|r^* q_k - p_k\| \leq \|r^* q_k - p_k\|,$$

es decir

$$\varepsilon \cdot \|r^* - r_k\| \leq \|r^* q_k - p_k\|. \quad (3.9)$$

Debido a 3.8 y 3.9 se tiene

$$\varepsilon \cdot \|r^* - r_k\| \leq \gamma(r_k) \cdot \|r_k - r^*\|.$$

Como  $r^* \neq r_k$ ,

$$\gamma(r_k) \geq \varepsilon > 0.$$

Pero  $\gamma(r_k) \rightarrow 0$ . Por lo tanto  $c > 0$ .

Por último sea  $\gamma := c$ , se cumple que

$$\forall r \in R_{n,m}[a,b], c \cdot \|r - r^*\| \leq \|f - r^*\| - \|f - r\|.$$

■

### 3.7. Continuidad del operador $T_{n,m}^{h_1, h_2}$

Anteriormente se introdujo el operador  $T_{n,m}^{h_1, h_2}$  definido sobre  $C[a, b]$ . En esta sección se analizará la continuidad de dicho operador en el espacio  $C[a, b]$ .

#### Teorema 3.9

Si  $f \in C[a, b]$  es una función  $n, m, h_1, h_2$ -normal o  $f \in R_{n,m}[a, b]$ , entonces el operador  $T_{n,m}^{h_1, h_2}$  es continuo en  $f$ .

**Demostración:** Sea  $f \in R_{n,m}[a, b] \cup \mathcal{N}$ . Sea  $r^* = T_{n,m}^{h_1, h_2}(f)$ . Para abreviar denotemos como  $T$  a  $T_{n,m}^{h_1, h_2}$ . De acuerdo con el teorema 3.8 existe  $\gamma > 0$  tal que

$$\forall r \in R_{n,m}[a, b], \|f - r\| \geq \|f - r^*\| + \gamma \|r - r^*\|.$$

Luego para toda  $g \in C[a, b]$

$$\begin{aligned} \gamma \cdot \|T(g) - T(f)\| &\leq \|f - T(g)\| - \|f - T(f)\| \\ &\leq \|f - g\| + \|g - T(g)\| - \|f - T(f)\| \\ &\leq \|f - g\| + \|g - T(f)\| - \|f - T(f)\| \\ &\leq \|f - g\| + \|g - f\| + \|f - T(f)\| - \|f - T(f)\| \\ &= \|f - g\| + \|g - f\| \leq \bar{c}(1 + c^*) \|g - f\|. \end{aligned}$$

Por lo que si  $g_n \rightarrow f$  entonces

$$\|T(g_n) - T(f)\| \rightarrow 0.$$

Lo cual implica que

$$T(g_n) \rightarrow T(f).$$

■

Este resultado arroja luz sobre el conjunto  $\mathcal{N}$ . A continuación mostramos tres teoremas, con sus respectivas demostraciones, que prueban que  $\mathcal{N}$  es abierto, denso y de complemento perfecto en  $C[a, b]$ .

**Teorema 3.10**

$\mathcal{N}$  es abierto con la topología  $(C[a, b], \|\cdot\|)$

**Demostración:** Sea  $f \in \mathcal{N}$ . Sea  $r^* = T_{n,m}^{h_1, h_2}(f)$ . De acuerdo con [6] existe  $\varepsilon > 0$  tal que cualquier función racional  $p/q \in R_{n,m}[a, b]$  que cumpla que  $\|r^* - p/q\| < \varepsilon$  entonces  $(p : q) = 1$  y  $d_{n,m}(p/q) = 0$ .

Por otro lado de acuerdo al teorema anterior existe  $\delta > 0$  tal que para toda  $g \in C[a, b]$  que cumpla  $\|g - f\| < \delta$  entonces  $\|T_{n,m}^{h_1, h_2}(g) - T_{n,m}^{h_1, h_2}(f)\| < \varepsilon$ .

Por lo tanto si  $g \in B_\delta(f)$  entonces  $d_{n,m}(T_{n,m}^{h_1, h_2}(f)) = 0$ , por ello  $g \in \mathcal{N}$ . Es decir  $B_\delta(f) \subseteq \mathcal{N}$ . ■

**Teorema 3.11**

$\mathcal{N}$  es denso en  $C[a, b]$ , i.e.  $\overline{\mathcal{N}} = C[a, b]$ .

**Demostración:** Sean  $T := T_{n,m}^{h_1, h_2}$  y  $d := d_{n,m}$ . Para cada  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  definimos el conjunto  $S_k := \{f \in C[a, b] : d(Tf) \leq k\}$ , v. gr.  $S_0 = \mathcal{N}$ . Procederemos a demostrar que

$$\forall k \in \mathbb{N}, S_k \subseteq \overline{S_{k-1}}.$$

Sea  $k \in \mathbb{N}$ . Si  $f \in S_k$ , entonces  $d(Tf) \leq k$ .

---

<sup>1</sup>Un conjunto  $A$  contenido en un espacio topológico, es perfecto en dicho espacio si es cerrado y todos sus elementos son puntos de acumulación de si mismo, i.e.  $A \subset A'$ .



Si  $d(Tf) < k$  entonces  $f \in S_{k-1} \subseteq \overline{S_{k-1}}$ .

Si  $d(Tf) = k$ . Sea  $r = p/q = Tf$ , con  $(p : q) = 1$ . Entonces  $r \in R_{n-k, m-k}[a, b]$ . De acuerdo al Teorema de Alternación la función error  $f - r$  tiene al menos  $M := n + m + 2 - k$  puntos alternantes en  $[a, b]$ , i. e. existen  $a \leq x_1 < \dots < x_M \leq b$ , que cumplen que para cada  $i = 1, \dots, M$ ,

$$\eta(f - r, x_i) = \|f - r\|_{h_1, h_2}$$

y para cada  $i = 1, \dots, M - 1$ ,

$$(f - r)(x_i)(f - r)(x_{i+1}) \leq 0.$$

Sea  $N := n + m + 2 - 2k$ . Desde luego  $2 \leq N < M$ .

Queremos demostrar que para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $f_\varepsilon \in B_\varepsilon(f)$ , i. e.  $\|f - f_\varepsilon\| < \varepsilon$ , tal que la función  $f_\varepsilon - r$  tiene a lo más  $N$  puntos alternantes en  $[a, b]$ . Para ello es necesario analizar los dos casos siguientes.

**Caso I.** Si  $f \notin R_{n, m}[a, b]$  entonces  $\|f - r\|_{h_1, h_2} > 0$ . Debido a esto para cada  $i = 1, \dots, M$ , se verifica que  $|(f - r)(x_i)| > 0$ .

Para cada  $j = 2, \dots, N$ , definimos los valores

$$a_j := \text{máx}\{z \in [a, x_j] : (f - r)(z) = 0\}.$$

Si existe  $z \in [a, x_1]$  tal que  $(f - r)(z) = 0$  entonces establecemos el valor  $a_1 := \text{máx}\{z \in [a, x_1] : (f - r)(z) = 0\}$ . En caso contrario, i.e. si para todo punto  $z \in [a, x_1]$ , se cumple que  $|(f - r)(z)| > 0$ , entonces establecemos  $a_1 := a$ .

Por otro lado para cada  $j = 1, \dots, N$ , definimos los valores

$$b_j := \text{mín}\{z \in [a, x_j] : (f - r)(z) = 0\}.$$

Sea  $I := \bigsqcup_{j=1}^N (a_j, b_j) \cup \{z \in [a, b] : (f - r)(z) = 0\}$ .

Sea  $\varepsilon > 0$ . Definimos la función  $f_\varepsilon$  sobre  $[a, b]$ , de la manera siguiente

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in I; \\ f(x) + \text{mín}\{\varepsilon/2, \frac{1}{2}(f - r)(x)\}, & \text{si } x \notin I \text{ y } (f - r)(x) > 0; \\ f(x) + \text{máx}\{-\varepsilon/2, \frac{1}{2}(f - r)(x)\}, & \text{si } x \notin I \text{ y } (f - r)(x) < 0. \end{cases}$$

i) Demostremos que  $\|f - f_\varepsilon\| < \varepsilon$ .  
 Si  $x \in I$ , es obvio que  $|(f - f_\varepsilon)(x)| = 0$ .  
 Si  $x \notin I$  y se cumple que  $(f - r)(x) > 0$ , entonces  $|(f - f_\varepsilon)(x)| = \min\{\varepsilon/2, \frac{1}{2}(f - r)(x)\} < \varepsilon$ .  
 Si  $x \notin I$  y se cumple que  $(f - r)(x) < 0$ , entonces  $|(f - f_\varepsilon)(x)| = -\max\{-\varepsilon/2, \frac{1}{2}(f - r)(x)\} < \varepsilon$ .

ii) Demostremos que la función  $f_\varepsilon - r$  tiene a lo más  $N$  puntos alternantes en  $[a, b]$ .

Sea  $r^* := \|f - r\|_{h_1, h_2}$ . Sea  $X := \{x \in I : \eta(f - r, x) = r^*\}$ .

Desde luego si  $x \in X$ , entonces  $\eta(f_\varepsilon - r, x) = \eta(f - r, x) = r^*$ .

Si  $x \in I \setminus X$ , entonces  $\eta(f_\varepsilon - r, x) = \eta(f - r, x) < r^*$ .

Si  $x \notin I$  y se cumple que  $(f - r)(x) > 0$ , entonces

$$0 < (f_\varepsilon - r)(x) = (f - r)(x) - \min\{\varepsilon/2, \frac{1}{2}(f - r)(x)\} < (f - r)(x).$$

Por ende  $\eta(f_\varepsilon - r, x) < \eta(f - r, x) \leq r^*$ .

Análogamente, si  $x \notin I$  y se cumple que  $(f - r)(x) < 0$ , entonces

$$0 > (f_\varepsilon - r)(x) = (f - r)(x) - \max\{-\varepsilon/2, \frac{1}{2}(f - r)(x)\} > (f - r)(x).$$

Por ello  $\eta(r - f_\varepsilon, x) < \eta(r - f, x) \leq r^*$ .

Por lo tanto

$$\forall x \in [a, b] \setminus X, \eta(f_\varepsilon - r, x) < r^*.$$

Debido a todo lo anterior, hemos demostrado que

$$\|f_\varepsilon - r\|_{h_1, h_2} = r^*.$$

Por otro lado, como  $\{x_i : i = 1, \dots, N\} \subseteq X \subseteq I$ , entonces para cada  $i = 1, \dots, N$ , se cumple que  $\eta(f_\varepsilon - r, x_i) = \eta(f - r, x_i) = r^*$ , y también se cumple que

$$(f_\varepsilon - r)(x_i)(r - f_\varepsilon)(x_{i+1}) = (f - r)(x_i)(f - r)(x_{i+1}) < 0,$$

para los índices  $i = 1, \dots, N - 1$ . Es decir, el conjunto  $\{x_i : i = 1, \dots, N\}$  es un conjunto de  $N$  puntos alternantes de la función  $r - f_\varepsilon$ .

Debido al análisis previo cualesquier conjunto de puntos alternantes de la función  $f_\varepsilon - r$  debe estar contenido en  $X$ . Sin embargo, si bien  $\text{card}(X) \geq N$ , debido a la construcción de la función  $f_\varepsilon$ , un conjunto de puntos alternantes de la función  $f_\varepsilon - r$  sobre  $X$ , no puede tener más de  $N$  elementos.

**Caso II.**

Si  $f \in R_{n,m}[a, b]$ , entonces  $f = Tf$ .

Establecemos para cada  $i = 0, \dots, N$ ,

$$z_i := a + i \frac{b-a}{N}.$$

Desde luego

$$[a, b] = \bigcup_{i=1}^N [z_{i-1}, z_i].$$

Como las funciones  $h_1$  y  $h_2$  son continuas, ambas alcanzan un mínimo relativo en cada intervalo  $[z_{i-1}, z_i]$ .

Para cada  $i \in \{2n-1 \in [1, N] : n \in \mathbb{N}\}$  establecemos los puntos  $y_i$  de la manera siguiente:

i) Si existe  $y \in (z_{i-1}, z_i)$  tal que para toda  $x \in [z_{i-1}, z_i]$ , se cumple  $h_1(y) \leq h_1(x)$ , i.e.  $h_1$  alcanza un mínimo en el interior del intervalo  $[z_{i-1}, z_i]$ . Entonces sea  $y_i := y$ .

ii) Si para toda  $x \in [z_{i-1}, z_i]$  se cumple que  $h_1(z_i) < h_1(x)$ , i.e.  $h_1$  alcanza su mínimo únicamente en  $z_i$ , existe  $y \in (z_{i-1}, z_i)$ , tal que si  $x \in [z_{i-1}, y)$  entonces  $h_1(y) < h_1(x)$ , pero si  $x \in (y, z_i]$  entonces  $h_1(y) > h_1(x)$ . Sea  $y_i := y$ .

iii) Si para toda  $x \in (z_{i-1}, z_i]$  se cumple que  $h_1(z_{i-1}) < h_1(x)$ , i.e.  $h_1$  alcanza su mínimo únicamente en  $z_{i-1}$ , existe  $y \in (z_{i-1}, z_i)$  tal que si  $x \in [z_{i-1}, y)$  entonces  $h_1(y) > h_1(x)$  pero si  $x \in (y, z_i]$  entonces  $h_1(y) < h_1(x)$ . Sea  $y_i = y$ .

Para cada  $i \in \{2n-1 \in [1, N] : n \in \mathbb{N}\}$  definimos los valores

$$m_i := h_1(y_i).$$

Para cada  $i \in \{2n \in [1, N] : n \in \mathbb{N}\}$ , estableceremos de manera similar a lo anterior el valor de los puntos  $y_i$ .

iv) Si existe  $y \in (z_{i-1}, z_i)$  tal que para toda  $x \in [z_{i-1}, z_i]$ , se cumple  $h_2(y) \leq h_2(x)$ , i.e.  $h_2$  alcanza un mínimo en el interior del intervalo  $[z_{i-1}, z_i]$ . Entonces, sea  $y_i := y$ .

v) Si para toda  $x \in [z_{i-1}, z_i]$  se cumple que  $h_2(z_i) < h_2(x)$ , i.e.  $h_2$  alcanza su mínimo únicamente en  $z_i$ , existe  $y \in (z_{i-1}, z_i)$  tal que si  $x \in [z_{i-1}, y)$  entonces  $h_2(y) < h_2(x)$  pero si  $x \in (y, z_i]$  entonces  $h_2(y) > h_2(x)$ . Sea  $y_i := y$ .

vi) Si para toda  $x \in (z_{i-1}, z_i]$  se cumple que  $h_2(z_{i-1}) < h_2(x)$ , i.e.  $h_2$  alcanza su mínimo únicamente en  $z_{i-1}$ , existe  $y \in (z_{i-1}, z_i)$  tal que si  $x \in [z_{i-1}, y)$  entonces  $h_2(y) > h_2(x)$  pero si  $x \in (y, z_i]$  entonces  $h_2(y) < h_2(x)$ . Sea  $y_i := y$ .

Para cada  $i \in \{2n \in [1, \mathbb{N}] : n \in \mathbb{N}\}$ , definimos los valores

$$m_i := h_2(y_i).$$

Sea

$$m := \min \bigcup_{j=1,2} \{h_j(x) : x \in [a, b]\}.$$

Sea  $\varepsilon > 0$ . Para definir una función  $f_\varepsilon$  continua sobre  $[a, b]$  adecuada, primero establezcamos el valor  $K := \frac{\varepsilon m^{N-1}}{2\Pi}$ , donde  $\Pi = \prod_{i=1}^N m_i$ .

Definimos  $f_\varepsilon$  sobre el intervalo  $[z_{i-1}, z_i]$  con  $i \in \{2n - 1 \in [1, N] : n \in \mathbb{N}\}$ , dependiendo del comportamiento de la función  $h_1$  en el mismo (véase arriba los tres casos posibles).

$$\begin{aligned} \text{caso i)} f_\varepsilon(x) &= \begin{cases} f(x) + Km_i \frac{x-z_{i-1}}{y_i-z_{i-1}}, & \text{si } x \in [z_{i-1}, y_i]; \\ f(x) + Km_i \frac{x-z_i}{y_i-z_i}, & \text{si } x \in [y_i, z_i]. \end{cases} \\ \text{caso ii)} f_\varepsilon(x) &= \begin{cases} f(x) + Km_i \frac{x-z_{i-1}}{y_i-z_{i-1}}, & \text{si } x \in [z_{i-1}, y_i]; \\ f(x) + K \frac{x-z_i}{y_i-z_i} h_1(x), & \text{si } x \in [y_i, z_i]. \end{cases} \\ \text{caso iii)} f_\varepsilon(x) &= \begin{cases} f(x) + K \frac{x-z_{i-1}}{y_i-z_{i-1}} h_1(x), & \text{si } x \in [z_{i-1}, y_i]; \\ f(x) + Km_i \frac{x-z_i}{y_i-z_i}, & \text{si } x \in [y_i, z_i]. \end{cases} \end{aligned}$$

De manera análoga, definimos la función  $f_\varepsilon$  sobre el intervalo  $[z_{i-1}, z_i]$ , con  $i \in \{2n \in [1, N] : n \in \mathbb{N}\}$ , dependiendo del comportamiento de la función  $h_2$  en el mismo:

$$\begin{aligned}
\text{caso iv) } f_\varepsilon(x) &= \begin{cases} f(x) - Km_i \frac{x-z_{i-1}}{y_i-z_{i-1}}, & \text{si } x \in [z_{i-1}, y_i]; \\ f(x) - Km_i \frac{x-z_i}{y_i-z_i}, & \text{si } x \in [y_i, z_i]. \end{cases} \\
\text{caso v) } f_\varepsilon(x) &= \begin{cases} f(x) - Km_i \frac{x-z_{i-1}}{y_i-z_{i-1}}, & \text{si } x \in [z_{i-1}, y_i]; \\ f(x) - K \frac{x-z_i}{y_i-z_i} h_2(x), & \text{si } x \in [y_i, z_i]. \end{cases} \\
\text{caso vi) } f_\varepsilon(x) &= \begin{cases} f(x) - K \frac{x-z_{i-1}}{y_i-z_{i-1}} h_2(x), & \text{si } x \in [z_{i-1}, y_i]; \\ f(x) - Km_i \frac{x-z_i}{y_i-z_i}, & \text{si } x \in [y_i, z_i]. \end{cases}
\end{aligned}$$

Debido a la construcción de la función  $f_\varepsilon$  se verifica para cada  $x \in [a, b]$  que  $|(f - f_\varepsilon)(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ , por lo que

$$\|f - f_\varepsilon\| < \varepsilon.$$

Por otro lado, si  $x \in [a, b] \setminus \{y_i : i = 1, \dots, N\}$ , entonces se satisface que  $\eta(f_\varepsilon - r, x) < K$ . Pero si  $x \in \{y_i : i = 1, \dots, N\}$ , entonces  $\eta(f_\varepsilon - r, x) = K$ . Por lo tanto

$$\|f_\varepsilon - r\|_{h_1, h_2} = K.$$

Más aún, debido a la construcción de la función  $f_\varepsilon$ , se cumple que  $(f_\varepsilon - r)(y_i) < 0$  si  $i \in \{2n - 1 \in [1, N] : n \in \mathbb{N}\}$ . Pero  $(f_\varepsilon - r)(y_i) > 0$  si  $i \in \{2n \in [1, N] : n \in \mathbb{N}\}$ . Es decir, el conjunto  $\{y_i : i = 1, \dots, N\}$  es un conjunto de puntos alternantes de la función error  $f_\varepsilon - r$ , y es el único posible con cardinalidad mayor o igual a  $N$ .

*Resuméé:* Hasta aquí hemos probado que para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $f_\varepsilon \in B_\varepsilon(f)$ , tal que la función  $f_\varepsilon - r$  tiene a lo más  $N$  puntos alternantes en  $[a, b]$ .

Debido a que  $d(r) = k$ , entonces  $d_{n-k, m-k}(r) = \min\{n - k - \deg p, n - k - \deg q\} = 0$ . Debido a que la función  $f_\varepsilon - r$  tiene  $N = (m - k) + (n - k) + 2 - d_{n-k, m-k}(r)$  puntos alternantes en  $[a, b]$ , entonces el teorema de alternancia nos garantiza que

$$r = T_{n-k, m-k}^{h_1, h_2}(f_\varepsilon).$$

Pero  $r \neq T(f_\varepsilon)$ , pues la función  $f_\varepsilon - r$  tiene a lo más  $N$  puntos alternantes en  $[a, b]$  y  $N < M$ .

Sea  $\frac{p_\varepsilon}{q_\varepsilon} := T(f_\varepsilon)$ , donde  $(p_\varepsilon : q_\varepsilon) = 1$ . Debido a la unicidad de la mejor aproximación  $\frac{p_\varepsilon}{q_\varepsilon} \neq r$ . Entonces  $\frac{p_\varepsilon}{q_\varepsilon} \in R_{n, m}[a, b] \setminus R_{n-k, m-k}[a, b]$ . Por ello

$\deg p_\varepsilon > n - k$  o  $\deg q_\varepsilon > m - k$ . Así,  $d\left(\frac{p_\varepsilon}{q_\varepsilon}\right) < k$ , es decir  $d(Tf_\varepsilon) \leq k - 1$ .  
Por lo tanto  $f_\varepsilon \in S_{k-1}$ .

Como  $f_\varepsilon \rightarrow f$ , entonces  $f \in \overline{S_{k-1}}$ . ■

**Teorema 3.12**

$\mathcal{N}^C$  es perfecto en  $C[a, b]$ , i.e. el conjunto de funciones no normales es perfecto en  $C[a, b]$ .

**Demostración:** Debido al teorema anterior  $\mathcal{N}$  es un conjunto abierto en  $C[a, b]$ , por ello  $\mathcal{N}^C$  es cerrado.

Sea  $f \notin \mathcal{N}$ , es decir, sea  $f$  una función no-normal. Sea  $r = T_{n,m}^{h_1, h_2}(f)$ . Entonces  $k := d_{n,m}(r) > 0$ . De acuerdo con el Teorema de Alternación la función  $f - r$  tiene al menos  $N := n + m + 2 - k$  puntos alternantes en  $[a, b]$ .

Mostraremos que para todo  $\varepsilon > 0$ , existe una función  $f_\varepsilon$  no normal tal que  $0 < \|f_\varepsilon - f\| < \varepsilon$ .

**Caso I.** Si  $f \notin R_{n,m}[a, b]$ , entonces  $\|f - r\|_{h_1, h_2} > 0$ .

Sean  $a \leq x_1 < \dots < x_N \leq b$ , un conjunto de puntos alternantes de la función  $f - r$ , i.e. en estos se verifica que

$$\eta(f - r, x_i) = \|f - r\|_{h_1, h_2} \text{ para cada } i = 1, \dots, N \text{ y}$$

$$(r - f)(x_i)(f - r)(x_{i+1}) < 0 \text{ para } i = 1, \dots, N - 1.$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que  $(f - r)(x_1) > 0$ .

Sea  $z := \min\{z \in [x_1, b] : (f - r)(z) = 0\}$ .

Entonces existe  $y \in \left(\frac{1}{2}(x_1 + z), z\right)$  tal que

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}(x_1 + z), y\right), \left(\frac{f-r}{h_2}\right)(x) > \left(\frac{f-r}{h_2}\right)(y)$$

y

$$\forall x \in (y, z], \left(\frac{f-r}{h_2}\right)(x) < \left(\frac{f-r}{h_2}\right)(y).$$

Sea  $\varepsilon > 0$ .

Sea  $k := \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2 \cdot (r-f)(y)}\right\}$ .

Definimos la función  $f_\varepsilon$  sobre  $[a, b]$  de la manera siguiente.

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in [a, 2y - z] \cup [z, b]; \\ f(x) + k \cdot (f - r)(2y - x), & \text{si } x \in [2y - z, y]; \\ f(x) + k \cdot (f - r)(x), & \text{si } x \in [y, z]. \end{cases}$$

A continuación demostraremos que dicha función verifica  $0 < \|f - f_\varepsilon\| < \varepsilon$ .

i) Si  $x \in [a, 2y - z] \cup [z, b]$ , entonces  $|(f - f_\varepsilon)(x)| = 0$ .

ii) Si  $x \in [2y - z, y]$ , entonces  $2y - x \in [y, z]$ .

Por ello si  $x \in [2y - z, z]$  entonces

$$|(f_\varepsilon - f)(x)| = k \cdot (f - r)(2y - x) \leq k \cdot (f - r)(y) = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{(f - r)(y)}{(f - r)(y)} < \varepsilon.$$

iii) Si  $x \in [y, z]$ , entonces

$$|(f_\varepsilon - f)(x)| = k \cdot (f - r)(x) \leq k \cdot (f - r)(y) = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{(f - r)(y)}{(f - r)(y)} < \varepsilon.$$

iv) Además se cumple que  $\|f - f_\varepsilon\| \geq |(f_\varepsilon - f)(y)| = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ .

Debido a lo analizado en los incisos previos se garantiza que

$$0 < \|f_\varepsilon - f\| < \varepsilon.$$

Sea  $e := \|f - r\|_{h_1, h_2}$ .

A continuación demostraremos que  $\|f_\varepsilon - r\|_{h_1, h_2} = e$ .

i) Si  $x \in [a, 2y - z] \cup [z, b]$ , entonces  $\eta(f_\varepsilon - r, x) = \eta(f - r, x) \leq e$ .

ii) Si  $x \in [2y - z, y]$ , entonces  $2y - x \in [y, z]$ . Por ello

$$0 \leq (f - r)(2y - x) \leq (f - r)(y) \leq (f - r)(x).$$

Como  $(f_\varepsilon - r)(x) = (f - r)(x) - k \cdot (f - r)(2y - x)$ , entonces por un lado  $(f_\varepsilon - r)(x) \geq (1 - k) \cdot (f - r)(x) \geq 0$  y por otro  $(f_\varepsilon - r)(x) \leq (f - r)(x)$ .

Por ello

$$\eta(f_\varepsilon - r, x) = \frac{1}{h_2(x)} (f_\varepsilon - r)(x) \leq \frac{1}{h_2(x)} (f - r)(x) = \eta(f - r, x) \leq e.$$

iii) Si  $x \in [y, z]$ , entonces  $(f_\varepsilon - r)(x) = (1 - k) \cdot (f - r)(x)$ .

Como  $0 < k \leq 1$  entonces  $0 \leq (f_\varepsilon - r)(x) < (f - r)(x)$ .

Por ello

$$\eta(f_\varepsilon - r, x) = \frac{1}{h_2(x)} (f_\varepsilon - r)(x) < \frac{1}{h_2(x)} (f - r)(x) = \eta(f - r, x) \leq e.$$

Debido a los anteriores incisos se garantiza que

$$\|f_\varepsilon - r\|_{h_1, h_2} \leq e.$$

Pero además, como  $x \in [a, 2y - z]$ , entonces  $\eta(f_\varepsilon - r, x_1) = \eta(f - r, x_1) = e$ .

Por lo tanto

$$\|f_\varepsilon - r\|_{h_1, h_2} = e.$$

Debido a la construcción de  $f_\varepsilon$ , se cumple

$$\eta(f_\varepsilon - r, x_i) = \eta(f - r, x_i) = e \text{ para cada } i = 1, \dots, N$$

y

$$(f_\varepsilon - r)(x_i) \cdot (f_\varepsilon - r)(x_{i+1}) = (f - r)(x_i) \cdot (f - r)(x_{i+1}) < 0 \text{ para } i = 1, \dots, N - 1.$$

Esto es, la función  $f_\varepsilon - r$  tiene  $N = n + m + 2 - k$  puntos alternantes en  $[a, b]$ .

Como  $d_{n,m}(r) = k$  entonces debido al Teorema de Alternancia  $r = T_{n,m}^{h_1, h_2}(f_\varepsilon)$ .

Por lo tanto  $f_\varepsilon \notin \mathcal{N}$ .

**Caso II.** Si  $f \in R_{n,m}[a, b]$ , entonces  $r = f$ .

Para cada  $i = 1, \dots, N$  establecemos los valores

$$z_i := a + i \frac{b-a}{N}.$$

Para cada  $i \in \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\} \cap [1, N]$  establecemos los valores

$$m_i := \min_{x \in [z_{i-1}, z_1]} h_1(x).$$

y los puntos  $x_i \in [z_{i-1}, z_i]$  tales que  $h_1(x_i) = m_i$ .

De manera similar, para cada  $i \in \{2n : n \in \mathbb{N}\} \cap [1, N]$  establecemos los valores

$$m_i := \min_{x \in [z_{i-1}, z_1]} h_2(x).$$

y los puntos  $x_i \in [z_{i-1}, z_i]$  tales que  $h_2(x_i) = m_i$ .

Sea

$$m = \max\{m_i : i = 1, \dots, N\}.$$

Sea  $\varepsilon > 0$ .

Definimos la función  $f_\varepsilon$  sobre  $[a, b]$  de la manera siguiente.

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} r(x) + \frac{\varepsilon m_i}{2m} \frac{x - z_{i-1}}{x_i - z_{i-1}}, & \text{si } x \in [z_{i-1}, x_i] \text{ con } i \in \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\} \cap [1, N]; \\ r(x) + \frac{\varepsilon m_i}{2m} \frac{x - z_i}{x_i - z_i}, & \text{si } x \in [x_i, z_i] \text{ con } i \in \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\} \cap [1, N]; \\ r(x) - \frac{\varepsilon m_i}{2m} \frac{x - z_{i-1}}{x_i - z_{i-1}}, & \text{si } x \in [z_{i-1}, x_i] \text{ con } i \in \{2n : n \in \mathbb{N}\} \cap [1, N]; \\ r(x) - \frac{\varepsilon m_i}{2m} \frac{x - z_i}{x_i - z_i}, & \text{si } x \in [x_i, z_i] \text{ con } i \in \{2n : n \in \mathbb{N}\} \cap [1, N]. \end{cases}$$

Primero demostremos que  $0 < \|f_\varepsilon - f\| < \varepsilon$ .



Sea  $i = 1, \dots, N$ .

Si  $x \in [z_{i-1}, x_i]$ , entonces  $|(f - f_\varepsilon)(x)| = \frac{\varepsilon m_i}{2m} \left| \frac{x - z_{i-1}}{x_i - z_{i-1}} \right|$ .

Como  $\left| \frac{x - z_{i-1}}{x_i - z_{i-1}} \right| \leq 1$ , entonces  $|(f - f_\varepsilon)(x)| \leq \frac{\varepsilon m_i}{2m} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ .

Si  $x \in [x_i, z_i]$ , entonces  $|(f - f_\varepsilon)(x)| = \frac{\varepsilon m_i}{2m} \left| \frac{x - z_i}{x_i - z_i} \right|$ .

Como  $\left| \frac{x - z_i}{x_i - z_i} \right| \leq 1$ , entonces  $|(f - f_\varepsilon)(x)| \leq \frac{\varepsilon m_i}{2m} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ .

Por lo tanto

$$\|f_\varepsilon - f\| < \varepsilon.$$

Por otro lado

$$\|f_\varepsilon - f\| \geq |(f - f_\varepsilon)(x_1)| = \frac{\varepsilon m_i}{2m} \left| \frac{x_1 - z_1}{x_1 - z_1} \right| = \frac{\varepsilon m_i}{2m} > 0.$$

Demostremos a continuación que  $f_\varepsilon \notin \mathcal{N}$ .

i) Si  $x \in [z_{i-1}, x_i]$  con  $i \in \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\} \cap [1, N]$ , entonces

$$\eta(f_\varepsilon - r, x) = \frac{1}{h_1(x)} \frac{\varepsilon m_i}{2m} \frac{x - z_{i-1}}{x_i - z_{i-1}} \leq \frac{\varepsilon m_i}{2m m_i} \frac{x_i - z_{i-1}}{x_i - z_{i-1}} = \frac{\varepsilon}{2m}$$

ii) Si  $x \in [x_i, z_i]$  con  $i \in \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\} \cap [1, N]$  entonces

$$\eta(f_\varepsilon - r, x) = \frac{1}{h_1(x)} \frac{\varepsilon m_i}{2m} \frac{x - z_i}{x_i - z_i} \leq \frac{\varepsilon m_i}{2m m_i} \frac{x_i - z_i}{x_i - z_i} = \frac{\varepsilon}{2m}$$

iii) Si  $x \in [z_{i-1}, x_i]$  con  $i \in \{2n : n \in \mathbb{N}\} \cap [1, N]$  entonces

$$\eta(f_\varepsilon - r, x) = \frac{1}{h_2(x)} \frac{\varepsilon m_i}{2m} \frac{x - z_{i-1}}{x_i - z_{i-1}} \leq \frac{\varepsilon m_i}{2m m_i} \frac{x_i - z_{i-1}}{x_i - z_{i-1}} = \frac{\varepsilon}{2m}$$

iv) Si  $x \in [x_i, z_i]$  con  $i \in \{2n : n \in \mathbb{N}\} \cap [1, N]$  entonces

$$\eta(f_\varepsilon - r, x) = \frac{1}{h_2(x)} \frac{\varepsilon m_i}{2m} \frac{x - z_i}{x_i - z_i} \leq \frac{\varepsilon m_i}{2m m_i} \frac{x_i - z_i}{x_i - z_i} = \frac{\varepsilon}{2m}$$

Debido a los incisos previos

$$\|r - f_\varepsilon\|_{h_1, h_2} \leq \frac{\varepsilon}{2m}.$$

Pero además, como

$$\eta(f_\varepsilon - r, x_1) = \frac{1}{h_1(x_1)} \frac{\varepsilon m_i}{2m} \frac{x_1 - z_1}{x_1 - z_1} = \frac{\varepsilon m_i}{2m m_i} = \frac{\varepsilon}{2m}$$

entonces

$$\|f_\varepsilon - r\|_{h_1, h_2} = \frac{\varepsilon}{2m}.$$

El conjunto  $\{x_i : i = 1, \dots, N\}$  es un conjunto de puntos alternantes de la función  $r - f_\varepsilon$ . Pues

$$\eta(f_\varepsilon - r, x_i) = \frac{1}{h_1(x_i)} \frac{\varepsilon m_i}{2m} \frac{x_i - z_i}{x_i - z_i} = \frac{\varepsilon}{2m}$$

y

$$(f_\varepsilon - r)(x_i) = -\frac{\varepsilon m_i}{2m} \frac{x_i - z_i}{x_i - z_i} < 0$$

cuando  $i \in \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\} \cap [1, N]$ . Y también

$$\eta(r - f_\varepsilon, x_i) = \frac{1}{h_2(x_i)} \frac{\varepsilon m_i}{2m} \frac{x_i - z_i}{x_i - z_i} = \frac{\varepsilon}{2m}.$$

y

$$(r - f_\varepsilon)(x_i) = \frac{\varepsilon m_i}{2m} \frac{x_i - z_i}{x_i - z_i} > 0$$

cuando  $i \in \{2n : n \in \mathbb{N}\} \cap [1, N]$ .

Como  $d_{n,m}(r) = k$  y  $N = n + m + 2 - k$ , entonces debido al Teorema de Alternancia  $r = T_{n,m}^{h_1, h_2}(f_\varepsilon)$ . Por lo tanto  $f_\varepsilon \notin \mathcal{N}$ . ■

El hecho de que  $\mathcal{N}$  sea denso en  $C[a, b]$ , nos permite demostrar el siguiente teorema, que afirma la discontinuidad del operador  $T_{n,m}^{h_1, h_2}$  para ciertas funciones  $f$  del espacio  $C[a, b]$ .

### Teorema 3.13

Sea  $f \in C[a, b]$ . Sea  $r = T_{n,m}^{h_1, h_2}(f)$ . Si la función  $f - r$  tiene menos de  $n + m + 2$  puntos alternantes en  $[a, b]$  entonces el operador  $T_{n,m}^{h_1, h_2}$  es discontinuo en  $f$ .

**Demostración:** Sea  $T := T_{n,m}^{h_1, h_2}$ . Sea  $N := n + m + 2$ . Sean  $m_1 := \max_{x \in [a, b]} h_1(x)$  y  $m_2 := \max_{x \in [a, b]} h_2(x)$ .

Supongamos que  $T$  es continuo en  $f$ . Como  $\overline{\mathcal{N}} = C[a, b]$ , entonces existe  $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subseteq \mathcal{N}$  tal que  $f_k \rightarrow f$ .

Sean  $r_k := T(f_k)$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ . Debido a que  $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subseteq \mathcal{N}$ , entonces para toda  $k \in \mathbb{N}$  existen los puntos

$$a \leq x_{k,1} < x_{k,2} < \dots < x_{k,N} \leq b. \quad (3.10)$$

tales que

$$\eta(f_k - r_k, x_{k,i}) = \|f_k - r_k\| \text{ para cada } i = 1, \dots, N$$

y

$$(f_k - r_k)(x_{k,i}) \cdot (f_k - r_k)(x_{k,i+1}) \leq 0 \text{ para toda } i = 1, \dots, N - 1.$$

Desde luego, cada sucesión  $\{x_{k,i}\}_{k=1}^{\infty}$  esta acotada, por ello la sucesión  $\{x_{k,1}\}$  tiene una subsucesión convergente  $\{x_{k_1,1}\}$ . A su vez la sucesión  $\{x_{k_1,2}\}$  tiene una subsucesión convergente  $\{x_{k_2,2}\}$ . Siguiendo este razonamiento encontramos un conjunto infinito de índices  $\{k_N\}$  y un conjunto de puntos  $\{x_i : i = 1, \dots, N\}$  que cumplen

$$\forall i \in \{1, \dots, N\}, x_{k_N,i} \rightarrow x_i.$$

Renombramos  $\{k_N\}$  como  $\{k\}$ .

Como consecuencia de esto y de 3.10 obtenemos que

$$a \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N \leq b.$$

Como  $T$  es continuo en  $f$  entonces  $T(f_k) \rightarrow T(f)$ .

Por ello  $r_k - f_k \rightarrow r - f$ .

Más aún, para cada  $i = 1, \dots, N$ , se cumple

$$(f_k - r_k)(x_{k,i}) \rightarrow (f - r)(x_i).$$

Por hipótesis la función  $f - r$  tiene menos de  $N$  puntos alternantes en  $[a, b]$ .

Esto implica que  $\|f_k - r_k\| > 0$ .

Como para toda  $i = 1, \dots, N$ ,

$$\eta(f_k - r_k, x_{k,i}) = \|f_k - r_k\| \rightarrow \|f - r\|,$$

entonces existe  $\varepsilon > 0$  tal que para toda  $i = 1, \dots, N$  y para toda  $k$  suficientemente grande

$$\eta(f_k - r_k, x_{k,i}) > \varepsilon.$$

Esto implica que para  $i = 1, \dots, N - 1$  y  $k$  suficientemente grande

$$\eta(f_k - r_k, x_{k,i}) \cdot \eta(f_k - r_k, x_{k,i+1}) > \varepsilon^2.$$

Como  $(f_k - r_k)(x_{k,i}) \cdot (f_k - r_k)(x_{k,i+1}) \leq 0$  entonces se cumple

$$(f_k - r_k)(x_{k,i}) \cdot (f_k - r_k)(x_{k,i+1}) < -\varepsilon^2 \cdot h_1(x_{k,i})h_2(x_{k,i+1}) \leq -m_1m_2\varepsilon^2$$

o bien

$$(f_k - r_k)(x_{k,i}) \cdot (f_k - r_k)(x_{k,i+1}) < -\varepsilon^2 \cdot h_1(x_{k,i+1})h_2(x_{k,i}) \leq -m_1m_2\varepsilon^2.$$

En cualquier caso al encontrar el limite cuando  $k \rightarrow \infty$ , obtenemos que

$$(f - r)(x_i) \cdot (f - r)(x_{i+1}) \leq -m_1m_2\varepsilon^2 < 0.$$

Como consecuencia de lo anterior se puede afirmar que

$$x_1 < x_2 < \dots < x_N$$

y además que

$$|(f - r)(x_i)| > 0, \text{ para } i = 1, \dots, N.$$

Supongamos sin pérdida de generalidad  $(f - r)(x_1) > 0$ .

Entonces  $(f - r)(x_i) > 0$  cuando  $i \in \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\} \cap [1, N]$ . Como  $(f_k - r_k)(x_{k,i}) \rightarrow (f - r)(x_i)$ , entonces para  $k$  suficientemente grande  $(f_k - r_k)(x_{k,i}) > 0$ .

Podemos, por un lado, deducir que

$$\eta(f_k - r_k, x_{k,i}) = \frac{f_k - r_k}{h_2}(x_{k,i}) \rightarrow \frac{f - r}{h_2}(x_i) = \eta(f - r, x_i),$$

pero por otro lado, como  $f_k - r_k \rightarrow f - r$  entonces

$$\eta(f_k - r_k, x_{k,i}) = \|f_k - r_k\| \rightarrow \|f - r\|.$$

Debido a la unicidad de los límites tenemos que

$$\eta(f - r, x_i) = \|f - r\|.$$

De manera análoga cuando  $i \in \{2n : n \in \mathbb{N}\} \cap [1, N]$ , se determina que  $\eta(f - r, x_i) = \|f - r\|$ .

Por lo tanto, la función  $f - r$  tiene  $N$  puntos alternantes en  $[a, b]$ , lo que contradice la hipótesis.

Es decir,  $T$  es discontinuo en  $f$ . ■

### Lema 3.2

Sean  $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  y  $h_1, h_2$  funciones continuas y estrictamente positivas sobre  $[0, 1]$ . Si  $f \in C[0, 1] \setminus (\mathcal{N} \cup R_{n,m}[0, 1])$  es tal que la función  $T_{n,m}^{h_1, h_2}(f) - f$  tiene al menos  $n + m + 2$  puntos alternantes en  $[0, 1]$  entonces el operador no lineal  $T_{n,m}^{h_1, h_2}$  es discontinuo en  $f$ .

**Demostración:** Sea  $r := T_{n,m}^{h_1, h_2}(f)$ . Sean  $p \in \mathcal{P}_n, q \in \mathcal{P}_m$  que cumplan  $r = p/q$ ,  $(p : q) = 1$  y  $q > 0$  sobre  $[0, 1]$ . Sea  $\sigma := \|r - f\|_{h_1, h_2} > 0$ . Sean  $m_1 := \min_{x \in [0, 1]} h_1(x) > 0$  y  $m_2 := \min_{x \in [0, 1]} h_2(x) > 0$ . La prueba de este lema consiste en demostrar que existe un valor  $k > 0$  tal que para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe una función  $f_\varepsilon \in C[0, 1]$  tal que  $\|f - f_\varepsilon\| < \varepsilon$  pero  $\|r - T_{n,m}^{h_1, h_2}(f_\varepsilon)\| = k > 0$ .

**Caso I.** Si es posible exhibir un conjunto de  $n + m + 2$  puntos alternantes de la función  $f - r$  en  $[0, 1]$ , tal que el "primero" sea mayor que 0, i.e. si  $\{x_i\}_{i=1}^{n+m+2}$  es dicho conjunto de puntos alternantes entonces  $0 < x_1 < \dots < x_{n+m+2} \leq 1$ .

a) Si  $(f - r)(x_1) \geq 0$ , existe  $\delta \in (0, x_1)$  tal que  $\forall x \in [0, \delta], (f - r)(x) \geq 0$ .

Sea  $k = \sigma m_1 > 0$ . Sea  $\varepsilon > 0$ .

Definimos la función  $S$  sobre  $[0, 1]$  como  $S(x) = \frac{kq(0)}{q(x)(Ax+1)}$ , con  $A > 0$  suficientemente grande para que  $S$  sea decreciente en  $[0, 1]$  y  $S(\delta) < \varepsilon$ .

Definimos la función  $f_\varepsilon$  como  $f_\varepsilon(x) = f(x) - S(x)$  cuando  $x \in [\delta, 1]$  y  $f_\varepsilon(x) = f(x) - S(\delta)$  cuando  $x \in [0, \delta]$ .

Por lo que  $|f(x) - f_\varepsilon(x)| = S(x) \leq S(\delta) < \varepsilon$ , cuando  $x \in [0, 1]$ , i.e.  $\|f - f_\varepsilon\| < \varepsilon$ .

Definimos la función  $r_\varepsilon = r - S$  en  $[0, 1]$ . Entonces  $r_\varepsilon(x) = \frac{p(x)(Ax+1) - kq(0)}{q(x)(Ax+1)}$  cuando  $x \in [0, 1]$ . Como  $f \notin \mathcal{N}$  entonces  $\deg p < n$  y  $\deg q < m$ , por lo que  $r_\varepsilon \in R_{nm}[0, 1]$ .

Además se verifica que  $\|r - r_\varepsilon\| = S(0) = k > 0$ .

Por otro lado, como  $(f_\varepsilon - r_\varepsilon)(x) = (f - r)(x)$  cuando  $x \in [\delta, 1]$ , entonces  $\eta(f_\varepsilon - r_\varepsilon, x) = \eta(f - r, x) \leq \sigma$  en  $[\delta, 1]$ . Más aún, como  $\{x_i\}_{i=1}^{n+m+2} \subseteq [\delta, 1]$ , entonces  $\eta(f_\varepsilon - r_\varepsilon, x_i) = \eta(f - r, x_i) = \sigma$  para  $i = 1, \dots, n + m + 2$  y  $(f_\varepsilon - r_\varepsilon)(x_i)(f_\varepsilon - r_\varepsilon)(x_{i+1}) < 0$  para  $i = 1, \dots, n + m + 1$ .

Para demostrar que  $r_\varepsilon = T_{n,m}^{h_1, h_2}(f_\varepsilon)$ , necesario es probar que  $\eta(r_\varepsilon - f_\varepsilon, x) \leq \sigma$ , cuando  $x \in [0, \delta]$ .

Sea  $x \in [0, \delta]$ . Si se cumple que  $(f_\varepsilon - r_\varepsilon)(x) \geq 0$ , entonces  $\eta(f_\varepsilon - r_\varepsilon, x) = \eta(f - r, x) + \frac{S(\delta) - S(x)}{h_2(x)} \leq \eta(f - r, x) \leq \sigma$ ,

y si se cumple que  $(f_\varepsilon - r_\varepsilon)(x) \leq 0$ , entonces

$$\eta(f_\varepsilon - r_\varepsilon, x) = \eta(f - r, x) + \frac{S(x) - S(\delta)}{h_1(x)} \leq \frac{S(0)}{m_1} = \sigma.$$

b) Si  $(f - r)(x_1) \leq 0$ , existe  $\delta \in (0, x_1)$  tal que  $\forall x \in [0, \delta]$ ,  $(f - r)(x) \leq 0$ . Lo que nos permite realizar un proceso análogo al anterior con  $k = \sigma m_2 > 0$  y definiendo la función  $r_\varepsilon = r + S$  y la función  $f_\varepsilon$  como  $f_\varepsilon = f + S(\delta)$  sobre  $[0, \delta]$  y  $f_\varepsilon = f + S$  en  $[\delta, 1]$ .

**Caso II.** Si cualquier conjunto de  $n + m + 2$  puntos alternantes de la función  $f - r$  en  $[0, 1]$ , es tal que el "primero" de ellos es necesariamente igual a 0, i.e. sea  $\{x_i\}_{i=1}^{n+m+2}$  un conjunto de puntos alternantes de  $f - r$  en  $[0, 1]$ , entonces  $0 = x_1 < \dots < x_{n+m+2} \leq 1$ .

a) Si  $(f - r)(0) > 0$ , existe  $\delta \in (0, x_2)$  tal que sobre  $[0, \delta]$ , la función  $f - r$  es estrictamente positiva y la función  $r - f + \sigma h_2$  es estrictamente positiva y creciente.

Sea  $k = \sigma m_1 > 0$ . Sea  $\varepsilon > 0$ .

Demostraremos que existe  $f^* \in C[0, 1] \setminus (\mathcal{N} \cup R_{n,m}[0, 1])$  que satisface  $\|f - f^*\| < \varepsilon/2$ ,  $r = T_{n,m}^{h_1, h_2}(f^*)$ ,  $(f^* - r)(0) \geq 0$  y la función  $f^* - r$  tiene un conjunto de  $n + m + 2$  puntos alternantes en  $[0, 1]$ , con el "primero" de ellos mayor que 0. Por lo que, debido al caso anterior, existe  $f_{\varepsilon/2}^* \in C[0, 1]$ ,

tal que  $\|f^* - f_{\varepsilon/2}^*\| < \varepsilon/2$ , pero  $\|r - T_{n,m}^{h_1, h_2}(f_{\varepsilon/2}^*)\| = k$ .

Sea  $\xi \in (0, \delta)$  tal que  $\Delta := (r - f + \sigma h_2)(\xi) < \varepsilon/2$ . Sea  $\chi \in (0, \xi)$ .

Definimos la función  $L$  sobre  $[0, \delta]$  que cumpla:

i)  $0 < L(0) < \min\{\Delta, (f - r)(0)\}$ ,

ii)  $\forall x \in (0, \chi), L(x) > 0$ ,

iii)  $\forall x \in [0, \chi], L(x) \leq (f - r)(x)$ ,

iv)  $L$  es decreciente en  $[0, \chi]$ ,

v)  $\forall x \in [\chi, \delta], L(x) \leq 0$

vi)  $\forall x \in [\chi, \xi], L(x) \geq (f - r - \sigma h_2)(x)$ ,

vii)  $L$  es creciente en  $[\xi, \delta]$ ,

viii)  $L(\chi) = L(\delta) = 0, L(\xi) = -\Delta$ .

Definimos la función  $f^*$  como  $f^*(x) = f(x) + L(x)$  cuando  $x \in [0, \delta]$  y  $f^*(x) = f(x)$  cuando  $x \in [\delta, 1]$ .

Desde luego  $\|f - f^*\| < \varepsilon/2$ , pues si  $x \in [0, 1]$ , entonces  $|(f^* - f)(x)| = |L(x)| \leq \Delta < \varepsilon/2$ .

Por construcción de  $L$ , se verifica que  $\|f^* - r\|_{h_1, h_2} = \sigma$ , y que  $\xi < x_2 < \dots < x_{n+m+2}$  son puntos alternantes de la función  $f^* - r$  en  $[0, 1]$ , con  $\xi > 0$ . Por ende  $r = T_{n,m}^{h_1, h_2}(f^*)$ .

Como  $\sigma > 0$ , entonces  $f^* \notin R_{n,m}[0, 1]$ . Como  $f \notin \mathcal{N}$ , entonces  $d_{n,m}(r) > 0$ , por lo que  $f^* \notin \mathcal{N}$ . Por último  $(f^* - r)(0) = (f - r)(0) - L(0) > 0$ .

b) Si  $(f - r)(0) > 0$ , existe  $\delta \in (0, x_2)$  tal que sobre  $[0, \delta]$ , la función  $f - r$  es estrictamente negativa y la función  $f - r + \sigma h_1$  es estrictamente positiva y creciente.

Sea  $k = \sigma m_2 > 0$ . Sea  $\varepsilon > 0$ . Sea  $\xi \in (0, \delta)$  tal que  $\Delta := (f - r + \sigma h_1)(\xi) < \varepsilon/2$ . Sea  $\chi \in (0, \xi)$ . Definimos la función  $L$  sobre  $[0, \delta]$  que cumpla:

i)  $0 > L(0) > \max\{-\Delta, (f - r)(0)\}$ ,

ii)  $\forall x \in (0, \chi), L(x) < 0$ ,

iii)  $\forall x \in [0, \chi], L(x) \geq (f - r)(x)$ ,

iv)  $L$  es creciente en  $[0, \chi]$ ,

v)  $\forall x \in [\chi, \delta], L(x) \geq 0$

vi)  $\forall x \in [\chi, \xi], L(x) \leq (f - r + \sigma h_1)(x)$ ,

vii)  $L$  es decreciente en  $[\xi, \delta]$ ,

viii)  $L(\chi) = L(\delta) = 0, L(\xi) = \Delta$ .

Debido a un análisis similar al inciso a) se afirma que existe  $f_{\varepsilon/2}^* \in C[0, 1]$ ,

tal que  $\|f^* - f_{\varepsilon/2}^*\| < \varepsilon/2$ , pero  $\|r - T_{n,m}^{h_1, h_2}(f_{\varepsilon/2}^*)\| = k$ . ■

El siguiente teorema establece la discontinuidad del operador  $T_{n,m}^{h_1,h_2}$  en una clase de funciones continuas definidas sobre  $[a, b]$  y es una consecuencia casi inmediata del lema anterior.

**Teorema 3.14**

Sea  $f \in C[a, b]$ ,  $f \notin R_{nm}[a, b]$ ,  $f \notin \mathcal{N}$ . Sea  $r := T_{n,m}^{h_1,h_2}(f)$ . Si la función  $f - r$  tiene al menos  $n + m + 2$  puntos alternantes en  $[a, b]$  entonces el operador no lineal  $T_{n,m}^{h_1,h_2}$  es discontinuo en  $f$ .

**Demostración:** Suponer la continuidad del operador  $T_{n,m}^{h_1,h_2}$  en  $f$ , implicaría la continuidad del operador  $T_{n,m}^{h_1 \circ y, h_2 \circ y} : C[0, 1] \rightarrow R_{nm}[0, 1]$  en la función  $f \circ y$ , con  $y(x) = \frac{x-a}{b-a}$ . Como las funciones  $h_1 \circ y, h_2 \circ y \in C[0, 1]$  y  $f \circ y \in C[0, 1] \setminus (R_{n,m}[0, 1] \cup \mathcal{N})$ , verifican el lema anterior, dicha suposición conduciría a una contradicción. ■

A continuación unimos en un solo teorema los principales resultados de esta sección. Esto con el fin de tener en claro la relación entre la continuidad del operador  $T_{n,m}^{h_1,h_2}$  en una función  $f \in C[a, b]$  y la normalidad de esta. Este resultado forma parte de un artículo [18] realizado por el autor de este trabajo y que ha sido aprobado para su publicación.

**Teorema 3.15 (Continuidad del Operador  $T_{n,m}^{h_1,h_2}$ )**

Sean  $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Sean  $h_1, h_2$  funciones continuas y estrictamente positivas sobre el intervalo  $[a, b]$ . Sea  $T_{n,m}^{h_1,h_2} : C[a, b] \rightarrow R_{nm}[a, b]$  el operador no lineal que a cada función continua sobre  $[a, b]$  le asigna su función racional algebraica de mejor aproximación de la clase  $R_{n,m}[a, b]$  relativa a  $h_1$  y  $h_2$ . Entonces el operador  $T_{n,m}^{h_1,h_2}$  es continuo en  $f$  si y solo si  $f \in R_{nm}[a, b]$  o  $f$  es una función  $n, m, h_1, h_2$ -normal.

**Demostración:** Consecuencia inmediata de los teoremas 3.9, 3.13 y 3.14. ■

## Capítulo 4

# Algoritmo de Rémez para la aproximación asimétrica por funciones racionales.

Sea  $f \in C[a, b]$  y  $n, m \in \mathbb{N}$ . Sea  $R_{nm}$  como se definió previamente, i.e.  $R_{nm} := \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathcal{P}_n, q \in \mathcal{P}_m \text{ y } \forall x \in [a, b], q(x) \neq 0 \right\}$ . En el capítulo anterior se demostró que existe un único elemento  $R^* = \frac{p^*}{q^*} \in R_{nm}$  tal que:

$$r_{nm}^* := \|f - R^*\| = \inf_{R \in R_{nm}} \|f - R\|.$$

En este capítulo se exhibirá un algoritmo que en ocasiones nos conduce a encontrar dicha  $R^*$ . Esto depende de iniciar con unos puntos de  $[a, b]$ , *suficientemente buenos*.

En primer lugar recordemos que si  $R^*$  es de mejor aproximación racional algebraica asimétrica a  $f \in C[a, b]$  de  $R_{nm}$  relativa a  $h_1$  y  $h_2$ , con  $n, m \in \mathbb{N}$ . Entonces existen al menos  $n + m + 2 - d(R^*)$  puntos  $\{x_i^*\}$  en  $[a, b]$  tales que cumplen

$$\begin{aligned} (f - R^*)(x_i^*) &= h_1(x_i^*)r_{nm}^* \\ (f - R^*)(x_{i+1}^*) &= -h_2(x_{i+1}^*)r_{nm}^* \end{aligned} \tag{4.1}$$

con  $i = 1, 3, \dots$ , o bien que cumplen

$$\begin{aligned} (f - R^*)(x_i^*) &= -h_2(x_i^*)r_{nm}^* \\ (f - R^*)(x_{i+1}^*) &= h_1(x_{i+1}^*)r_{nm}^* \end{aligned} \tag{4.2}$$



con  $i = 1, 3, \dots$

Por otro lado, el teorema siguiente, que es un teorema tipo De la Vallée-Poussin [1] nos permite establecer una cota inferior para  $r_{nm}^*$  si se cuenta con una función racional como la de la hipótesis.

**Teorema 4.1**

Sea  $f \in C[a, b]$  y  $R^* \in R_{nm}$ . Si existen  $N \geq n + m + 2 - d(R^*)$  puntos distintos  $x_i$  en  $[a, b]$ , i.e.  $a \leq x_1 < \dots < x_N \leq b$ , en los cuales se cumple que

$$(f - R^*)(x_i)(f - R^*)(x_{i+1}) < 0$$

y también  $N$  valores estrictamente positivos  $\lambda_i$ , no necesariamente distintos que cumplen que

$$\eta(f - R^*, x_i) = \lambda_i$$

entonces cualquier  $R \in R_{nm}$  cumple que

$$\|f - R\| \geq \text{mín}\{\lambda_i : i = 1, \dots, N\}.$$

**Demostración:** Supongamos la existencia de  $R \in R_{nm}$  tal que

$$\|f - R\| < \text{mín}\{\lambda_i : i = 1, \dots, N\}.$$

Sean  $p, p^* \in \mathcal{P}_n$  y  $q, q^* \in \mathcal{P}_m$  tales que  $R = \frac{p}{q}$ ,  $R^* = \frac{p^*}{q^*}$ ,  $(p : q) = 1$  y  $(p^* : q^*) = 1$ . No es difícil observar que cuando  $(f - R^*)(x_i) < 0$  entonces  $(R - R^*)(x_i) > 0$  y análogamente cuando  $(f - R^*)(x_i) > 0$  entonces  $(R - R^*)(x_i) < 0$ . Luego la función  $R - R^*$  tiene al menos  $N - 1$  ceros en  $[a, b]$ . Por lo que el polinomio  $pq^* - p^*q$  tiene al menos  $1 + \text{máx}\{n + \text{deg } q^*, m + \text{deg } p^*\}$  ceros en  $[a, b]$ . Sin embargo dicho polinomio es de grado a lo más  $\text{máx}\{\text{deg } p + \text{deg } q^*, \text{deg } q + \text{deg } p^*\}$ , por lo tanto  $R = R^*$ . Pero esto implicaría que

$$\forall x_i, \eta(f - R^*, x_i) > \|f - R^*\|. \quad \blacksquare$$

## 4.1. Algoritmo del tipo Rémez.

En [23] se describe y demuestra la convergencia de un algoritmo tipo Rémez, para la aproximación polinomial asimétrica. En [24], hemos establecido y ampliado el poder de este algoritmo a otros casos, como los polinomios trigonométricos. Debe mencionarse que Moursund [22] utilizó el

algoritmo en algunos ejemplos, pero empíricamente, sin demostrar la convergencia. Aquí lo extenderemos al caso racional asimétrico, es decir, en esta sección describiremos rigurosamente un algoritmo tipo Remez para hallar la mejor aproximación racional algebraica asimétrica a una función continua con ciertas características y demostraremos que converge bajo ciertas condiciones.

Antes de enunciarlo observemos que, siempre que  $0 \in [a, b]$ , cualquier  $R \in R_{nm}$  queda unívocamente determinado por un conjunto  $A = \{a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m\} \in \mathbb{R}^{n+m+1}$ , pues

$$\forall x \in [a, b], R(x) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i x^i}{1 + \sum_{j=1}^m b_j x^j}.$$

### I. Algoritmo tipo Remez para hallar la mejor Aproximación Asimétrica Racional Algebraica a una función continua

- (i) Escogemos un conjunto inicial ordenado  $X_0 = \{x_i^{(0)}\}$  de  $N + 2$  puntos distintos en  $[a, b]$ , con  $N = m + n$ ,

$$a \leq x_1^{(0)} < x_2^{(0)} < \dots < x_{N+2}^{(0)} \leq b.$$

- (ii) Resolvemos, sustituyendo  $x_i$  por  $x_i^{(0)}$ , el sistema de ecuaciones no lineales siguiente.

$$\begin{aligned} f(x_i) - \frac{\sum_{j=0}^n a_j (x_i)^j}{1 + \sum_{j=1}^m b_j (x_i)^j} &= -Eh_2(x_i) \\ f(x_{i+1}) - \frac{\sum_{j=0}^n a_j (x_{i+1})^j}{1 + \sum_{j=1}^m b_j (x_{i+1})^j} &= Eh_1(x_{i+1}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

$i = 1, 3, \dots$  O bien

$$\begin{aligned} f(x_i) - \frac{\sum_{j=0}^n a_j (x_i)^j}{1 + \sum_{j=1}^m b_j (x_i)^j} &= Eh_1(x_i) \\ f(x_{i+1}) - \frac{\sum_{j=0}^n a_j (x_{i+1})^j}{1 + \sum_{j=1}^m b_j (x_{i+1})^j} &= -Eh_2(x_{i+1}) \end{aligned} \quad (4.4)$$

$i = 1, 3, \dots,$

En cualquier caso se encuentran  $m + 1$  conjuntos de  $N + 2$  valores cada uno. Estos valores son los coeficientes del polinomio numerador ( $a_j$ ), los del polinomio denominador ( $b_j$ ) así como el valor de  $E$ .

(iii) Escogemos los coeficientes de la solución anterior para formar una función racional  $R^{(1)} \in R_{nm}$ , de tal forma que el respectivo valor de  $E$  sea el menor de entre aquellas funciones racionales sin polos en  $[a, b]$ .

(iv) Sea  $\tau$  un punto en el cual la función:  $\eta(f - R^{(1)}, x)$  alcanza su máximo valor en  $[a, b]$ . Entonces reemplazamos alguno de los  $\{x_i^{(0)}\}$  por  $\tau$  de forma que  $f - R^{(1)}$  cambie de signo alternadamente, formando así el conjunto  $\{x_i^{(1)}\}$ . Esto siempre puede hacerse. Si por ejemplo  $\tau \in [x_i^{(0)}, x_{i+1}^{(0)}]$  entonces  $f - R^{(1)}$  tiene el mismo signo en  $\tau$  que en  $x_i^{(0)}$  o en  $x_{i+1}^{(0)}$ . Si  $\tau \in [a, x_1^{(0)}]$ , entonces si  $f - R^{(1)}$  tiene el mismo signo en  $\tau$  y  $x_1^{(0)}$ , cambiamos a  $x_1^{(0)}$  por  $\tau$  de lo contrario cambiamos a  $x_{N+2}^{(0)}$  por  $\tau$ . Análogamente cuando  $\tau \in [x_{N+2}^{(0)}, b]$ .

(v) Repetir los pasos (ii) al (iv). Usando en la  $k$ -ésima iteración los puntos  $X_k := \{x_i^{(k)}\}$ , para obtener así la función  $R^{(k+1)}$  y el valor  $E_{k+1}$ .

(vi) Detener el proceso cuando  $E_k$  sea suficientemente cercano a  $r_{nm}^*$ .

#### **Teorema 4.2**

Sea  $R^* \in R_{nm}$  la mejor aproximación racional algebraica asimétrica a  $f \in C[a, b]$  relativa a  $h_1$  y  $h_2$ , donde  $n, m \in \mathbb{N}$  y  $h_1, h_2 \in C[a, b]$ , tal que  $f - R^*$  tenga un único conjunto de  $N + 2$  puntos alternantes. Sea  $R^{(0)} \in R_{nm}$  una función racional tal que la función  $\eta(f - R^{(0)}, x)$  tiene exactamente  $n + m + 2$  puntos extremos tales que alternen de signo y en el de menor abscisa, el signo de dicha

función coincide con el de  $f - R^*$ . Denotemos

$$X_0 := \{x_i^{(0)}\}$$

las abscisas de los  $N + 2$  puntos extremos de  $\eta(f - R^{(0)}, x)$ . También denotemos

$$E_{min} := \text{mín } \eta(f - R^{(0)}, x_i^{(0)}).$$

Finalmente nombramos

$$X^* := \{x_i^*\}$$

las abscisas de los  $N + 2$  puntos alternantes de la función  $f - R^*$ . Existen  $\epsilon > 0$  y  $\delta > 0$  tal que si

$$\forall i = 1, \dots, N + 2, \quad |x_i^{(0)} - x_i^*| < \epsilon \quad (4.5)$$

$$r_{nm}^* - E_{min} < \delta \quad (4.6)$$

entonces usando la técnica adecuada para resolver 4.3 o 4.4, el algoritmo tipo Rémez descrito en (I), converge.

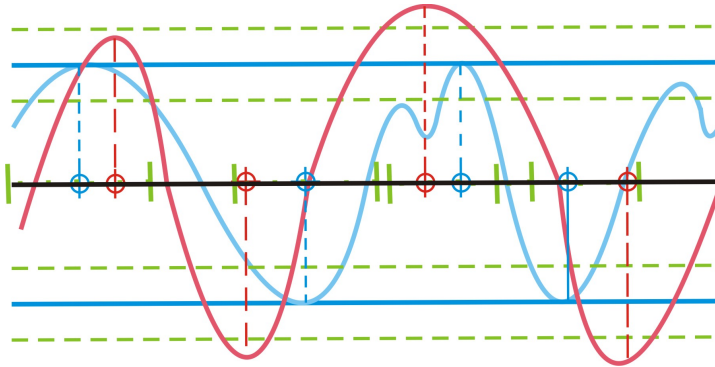


Figura 4.1: En rojo  $\eta(f - R^{(0)}, x)$  y en azul  $\eta(f - R^*, x)$ . Como se puede ver  $E_{min}$  esta suficientemente cerca de  $r_{nm}^*$  y cada uno de los cuatro puntos extremos de  $\eta(f - R^{(0)}, x)$  (puntos rojos) están "suficientemente cerca" de los cuatro puntos críticos de  $f - R^*$  (puntos azules), lo cual se indica en ambos casos con el color verde.

**Demostración:** Asumamos sin pérdida de generalidad que

$$\eta(f - R^*, x_1^*) = -r_{nm}^*.$$

Esto es que el primer extremo es negativo. Consideremos el sistema no lineal de ecuaciones 4.3, sustituyendo  $x_i$  por  $x_i^*$

$$f(x_i^*) - \frac{\sum_{j=0}^n a_j (x_i^*)^j}{1 + \sum_{j=1}^m b_j (x_i^*)^j} = -Eh_2(x_i^*)$$

$$f(x_{i+1}^*) - \frac{\sum_{j=0}^n a_j (x_{i+1}^*)^j}{1 + \sum_{j=1}^m b_j (x_{i+1}^*)^j} = Eh_1(x_{i+1}^*)$$

$i = 1, 3, \dots$

que reescribiremos de la forma

$$[f(x_i^*) + Eh_2(x_i^*)] \sum_{j=1}^m b_j (x_i^*)^j - \sum_{j=0}^n a_j (x_i^*)^j = -f(x_i^*) - Eh_2(x_i^*) \quad (4.7)$$

$$[f(x_{i+1}^*) - Eh_1(x_{i+1}^*)] \sum_{j=1}^m b_j (x_{i+1}^*)^j - \sum_{j=0}^n a_j (x_{i+1}^*)^j = -f(x_{i+1}^*) + Eh_1(x_{i+1}^*) \quad (4.8)$$

$i = 1, 3, \dots$

Si le damos a  $E$  el valor de  $r_{nm}^*$  entonces 4.7-4.8 se convierte en un sistema lineal de  $N + 2$  ecuaciones, al cual lo satisfacen los  $N + 1$  coeficientes de

$$R^*(x) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i^* x^i}{1 + \sum_{j=1}^m b_j^* x^j}.$$

Por lo tanto cualquier subconjunto de  $N + 1$  ecuaciones del sistema es satisfecho por  $A^* := \{a_0^*, \dots, a_n^*, b_1^*, \dots, b_m^*\}$ .

Afirmamos que el determinante de la matriz formada por los coeficientes de cualquier subconjunto de  $N + 1$  ecuaciones no debe ser cero, pues de lo contrario ya que el sistema es consistente, esto significaría que habría una familia de soluciones dependientes de al menos un parámetro. Ahora, consideremos dos soluciones  $A^*$  y  $A := \{a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m\}$ , donde

A esta suficientemente cerca de  $A^*$  de tal forma que la función racional  $R \in R_{nm}$  que le corresponde, cumpla que ninguno de sus polos este en  $[a, b]$ . Pero entonces  $R^*(x) - R(x)$  tendría  $N + 1$  ceros en los  $\{x_i^*\}$  y ya que la diferencia de dos funciones racionales continuas pertenecientes a  $R_{nm}$ , sólo puede tener a lo más  $m + n$  ceros. Esto es una contradicción.

Ahora formaremos el siguiente sistema de  $N + 2$  ecuaciones

$$[f(x_i) + Eh_2(x_i)] \sum_{j=1}^m b_j(x_i)^j - \sum_{j=0}^n a_j(x_i)^j = -f(x_i) - Eh_2(x_i) \quad (4.9)$$

$$[f(x_{i+1}) + Eh_1(x_{i+1})] \sum_{j=1}^m b_j(x_{i+1})^j - \sum_{j=0}^n a_j(x_{i+1})^j = -f(x_{i+1}) - Eh_1(x_{i+1}) \quad (4.10)$$

$i = 1, 3, \dots$

Por lo ya antes analizado se deduce que existe un  $\epsilon_1 > 0$  tal que si

$$|x_i - x_i^*| < \epsilon_1 \quad i = 1, \dots, N + 2, \quad (4.11)$$

y

$$|E - r_{nm}^*| < \epsilon_1 \quad (4.12)$$

entonces el determinante de la matriz formada por los coeficientes  $A$  en cualquier subconjunto de  $N + 1$  ecuaciones de 4.9-4.10 no puede ser cero. Más aún, escogiendo  $\epsilon_1$  suficientemente pequeño, podemos asegurar que cualquier función racional que resulte de una solución de  $N + 1$  ecuaciones de 4.9-4.10 es tal que su polinomio denominador no se anula en  $[a, b]$ :

Entonces para probar el teorema debemos probar que

- a) El sistema de ecuaciones 4.9-4.10 tiene siempre al menos una solución.
- b) Podemos escoger una solución tal que la sucesión resultante de funciones racionales converja a  $R^*$ .

**Lema 4.1**

Sean  $X_0 = \{x_i^{(0)}\}$  y  $E_{min}$  tales que satisfagan

$$|x_i^{(0)} - x_i^*| < \epsilon_1$$

$i = 1, \dots, N + 2,$

$$r_{nm}^* - E_{min} < \epsilon_1.$$

Entonces el sistema de ecuaciones 4.9-4.10, sustituyendo  $E = E_{min}$  y  $x_i = x_i^{(0)}$ ,  $i = 1, \dots, N + 2$ , tiene una solución  $A^*$ , la cual corresponde a una función racional en  $R_{nm}$ .

**Demostración:** Demostración: Sea  $I \in \{1, \dots, N + 2\}$  el índice en el cual se cumple la siguiente desigualdad para toda  $i = 1, \dots, N + 2$ :

$$\begin{aligned} E_{max} &:= \frac{(f - R^{(0)})^+(x_I^{(0)})}{h_1(x_I^{(0)})} + \frac{(f - R^{(0)})^-(x_I^{(0)})}{h_2(x_I^{(0)})} \\ &\geq \frac{(f - R^{(0)})^+(x_i^{(0)})}{h_1(x_i^{(0)})} + \frac{(f - R^{(0)})^-(x_i^{(0)})}{h_2(x_i^{(0)})}. \end{aligned}$$

Consideremos el sistema de  $N + 1$  ecuaciones que se forma de sustituir  $x_i = x_i^{(0)}$  en 4.9-4.10, y eliminar la  $I$ -ésima de esas ecuaciones.

Escojamos un  $E > 0$  que satisfaga

$$|E - r_{nm}^*| < \epsilon_1$$

y además sea tal que

$$E < E_{min}.$$

Entonces  $E$  cumple 4.11. Debido a esto último y a que por hipótesis  $X_0$  cumple 4.12 se sigue que el sistema anterior tiene una solución  $A$  que corresponde a una función  $R \in R_{nm}$ .

Afirmamos que

$$E_I := \frac{(f - R)^+(x_I^{(0)})}{h_1(x_I^{(0)})} + \frac{(f - R)^-(x_I^{(0)})}{h_2(x_I^{(0)})} \geq E_{max} \quad (4.13)$$

y que

$$(f - R)(x_I^{(0)}) (f - R^{(0)})(x_I^{(0)}) > 0. \quad (4.14)$$

Para mostrar esto usamos la diferencia

$$\Delta(x) := R^{(0)}(x) - R(x). \quad (4.15)$$

Debido a que  $E < E_{min}$ , entonces  $\Delta(x)$  debe tener al menos  $I - 2$  ceros en el intervalo  $(x_1^{(0)}, x_{I-1}^{(0)})$  y al menos  $N - I + 1$  ceros en  $(x_{I+1}^{(0)}, x_{N+2}^{(0)})$  para dar una suma de al menos  $N - 1$  ceros.

Si

$$E_I < E_{max}$$

o

$$(f - R)(x_I^{(0)}) \cdot (f - R^{(0)})(x_I^{(0)}) \leq 0$$

entonces habría un cero en el intervalo  $(x_{I-1}^{(0)}, x_I^{(0)})$  y otro en el intervalo  $(x_I^{(0)}, x_{I+1}^{(0)})$  para un total de  $N + 1$  ceros. Pero el total de ceros de  $\Delta(x)$  no puede exceder  $N$  con lo que se prueba la afirmación.

Consideremos ahora el mismo sistema de  $N + 1$  ecuaciones. Conforme  $E$  crece y se acerca a  $r_{nm}^*$ , la desigualdad 4.12 se sigue satisfaciendo, y por lo tanto, existe una solución para dicho sistema. Más aún, la función  $E_I = E_I(E)$  es continua.

Afirmamos que para algún valor de  $E$ , digamos  $E_1$  tal que

$$E_1 \leq r_{nm}^*$$

la solución  $A_1$  del sistema de  $N + 1$  ecuaciones es tal que también cumple la  $I$ -ésima ecuación de 4.9 - 4.10 con  $E = E_1$  y  $x_I = x_I^{(0)}$ , i.e.

$$E_I(E_1) = E_1.$$

Pues de lo contrario, conforme  $E$  crece, eventualmente llegaremos a una solución  $\hat{A}$  del sistema mencionado, correspondiente a un valor  $\hat{E} > r_{nm}^*$ , tal que  $E_I(\hat{E}) > \hat{E}$  y la función racional  $\hat{R}$  cuyos coeficientes sean los elementos de  $\hat{A}$  cumpla que

$$(f - \hat{R})(x_{I-1}^{(0)})(f - \hat{R})(x_I^{(0)}) < 0$$



y

$$(f - \hat{R})(x_I^{(0)})(f - \hat{R})(x_{I+1}^{(0)}) < 0.$$

Lo cual contradice el teorema 4.1, por lo que considerando a  $A^* = A_1$  queda demostrado el lema. ■

#### Observación 4.1

1. Para probar el anterior lema no es necesario que los puntos  $X_0$  sean los puntos extremos de la función  $\eta(f - R^{(0)}, x)$ , lo que si se requiere es que  $f - R^{(0)}$  alterne de signo en ellos y que el valor  $E_{min}$  cumpla 4.6.
2. En la prueba del lema anterior sólo se requiere que los puntos de  $X_0$  distintos de  $x_I^{(0)}$ , satisfagan

$$|x_i^{(0)} - x_i^*| < \epsilon_1$$

sin embargo como se verá más abajo, es necesario que  $x_I^{(0)}$  también satisfaga la desigualdad

$$|x_I^{(0)} - x_I^*| < \epsilon_1$$

3. En lo sucesivo asumiremos que la solución de 4.9-4.10 se construye como indica el lema anterior.
4. El valor  $E_1$  también satisface 4.6 y

$$E_1 = \text{mín } \eta(f - R^{(1)}, x_i^{(1)}) = \{E_1, \eta(f - R^{(1)}, \tau)\}$$

Podemos, por lo tanto, llevar a cabo el paso (ii) del algoritmo, en la primera etapa, para así obtener una nueva función racional  $R^{(1)} \in R_{nm}$  (paso (iii)). El paso (iv) siempre puede llevarse a cabo. Lo que debemos probar ahora es que el punto  $\tau$  que reemplaza a uno de los elementos del conjunto  $X_0$  para formar  $X_1$  es tal que el sistema de ecuaciones 4.9 - 4.10, cambiando  $x_i$  por  $x_i^{(1)}$ , puede ser resuelto en las posteriores etapas. De hecho, en la siguiente etapa, el sistema 4.9 - 4.10 puede resolverse (c.fr. la segunda observación tras el lema 4.1 obteniendo la función  $R^{(2)}$  y el valor  $E_2$ . Este último, debido a un análisis similar al que se muestra en la demostración del lema anterior, debe estar entre  $E_1$  y  $r_{nm}^*$ . Sin embargo, en la tercera etapa, no podemos garantizar que exista una función racional  $R^{(3)}$  en  $R_{nm}$

cuyos coeficientes satisfagan 4.9 -4.10 para algun valor de  $E$ , a menos que el valor de  $\tau$  obtenido en el paso (iv) de la primer etapa cumpla 4.5. Por ello, procederemos a demostrar que, si  $E_2$  se encuentra suficientemente cercano a  $r_{nm}^*$  entonces  $\tau$  debe estar suficientemente cercano a uno de los puntos  $x_i^*$ .

**Lema 4.2**

*Para cualquier  $\epsilon_1$  que cumpla 4.11 y 4.12 existe un  $\delta_1 > 0$  tal que si al menos uno de los puntos  $x_i^{(1)}$  de  $X_1$  no satisface 4.11, entonces, al sustituir  $x_i$  por estos puntos y  $E$  con cualquier valor que cumpla  $|E - r_{nm}^*| < \delta_1$  en el sistema de ecuaciones 4.9-4.10, se verifica que los coeficientes de ninguna función racional de  $R_{nm}$  resuelven dicho sistema.*

**Demostración:** Supóngase que no hay tal  $\delta_1$ . Entonces existiría una sucesión de funciones racionales  $\{R_{nm}^{(k)}(x)\}$  cuyos coeficientes son soluciones de 4.9-4.10 tomando como valor de  $E$  a  $E_k := r_{nm}^* - \frac{1}{k}$  y los conjuntos  $X_k$  de  $N + 2$  puntos distintos

$$\{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{N+2}^{(k)}\}$$

tales que en cada conjunto exista al menos un punto no cumpla 4.11. Notemos que  $E_k$  satisface 4.12 para todo  $k$  suficientemente grande. Debido a que los anteriormente mencionados conjuntos de puntos son todos acotados, existe una subsucesión convergente de la sucesión  $\{X_k\}$  que denotaremos por  $\{X_{k_i}\}$ . Sea la correspondiente sucesión de funciones racionales denotada por  $\{R_{nm}^{(k_i)}(x)\}$ . Denotemos al punto límite de la sucesión  $\{X_{k_i}\}$  por  $X_\infty$ . Se puede observar que la sucesión de funciones  $\{R_{nm}^{(k_i)}(x)\}$  cumple el criterio de Cauchy por lo que converge a una función continua en  $[a, b]$  y acotada  $R_{nm}^\infty$ . Por hipótesis al menos un punto de  $X_\infty$  no satisface 4.11, además por como construimos la sucesión  $\{R_{nm}^{(k_i)}\}$ , los coeficientes de la función  $R_{nm}^\infty$  deben cumplir el sistema 4.9 - 4.10 en los puntos  $X_\infty$  y el valor  $r_{nm}^*$ , es decir, se verifica que

$$(f - R_{nm}^\infty)(x_i^\infty) = -r_{nm}^* h_2(x_i^\infty) \tag{4.16}$$

$$(f - R_{nm}^\infty)(x_{i+1}^\infty) = r_{nm}^* h_1(x_{i+1}^\infty) \tag{4.17}$$

con  $i = 1, 3, \dots$

Entonces por un lado de acuerdo al capítulo anterior la única función racional que puede cumplir 4.16-4.17 en una cantidad de  $N+2$  puntos debe ser  $R^*$ , la cual tiene un único conjunto de puntos alternantes  $X^*$ , pero por otro lado al menos uno de los puntos  $x_i^\infty$  debe ser diferente del respectivo  $x_i^*$ , hemos llegado a una contradicción que comprueba el lema. ■

Si como  $\epsilon$  del teorema 4.2 se escoge a  $\epsilon_1$  del lema 4.1 y como  $\delta$  al mínimo de  $\epsilon_1$  y  $\delta_1$  del lema 4.2, entonces los dos lemas anteriores nos garantizan que la primera etapa del algoritmo puede llevarse a cabo y después  $X_1$  y  $E_2$  verifican 4.11 y 4.12 respectivamente. Para terminar de probar el teorema debemos mostrar que el algoritmo converge a  $R^*$ . Primero observemos que en cada etapa se va generando una función racional perteneciente a  $R_{nm}$ , correspondiente a la solución de 4.9-4.10 pero con un particular valor de  $E$  y un conjunto puntos  $X_k$  en  $[a, b]$ . Los valores de  $E$ , si los generamos como en el lema 4.1, resultan ser crecientes y acotados por  $r_{nm}^*$ , luego esa sucesión de valores debe converger. Supongamos que el algoritmo converge un valor  $\bar{E} < r_{nm}^*$ . Sea  $\bar{R}_{nm}(x)$  la función racional que se obtiene de  $\bar{E}$  y el conjunto de puntos  $\bar{X}$ . Entonces el máximo de la función  $\eta(f - \bar{R}_{nm}, (x))$  se obtiene en algún  $\tau \in [a, b]$  que no pertenece a  $\bar{X}$  pues de lo contrario  $R^*$  no sería la de mejor aproximación. Pero esto significa que el algoritmo puede proseguir lo cual contradice la afirmación de que convergía a  $\bar{E}$ . Por lo tanto el algoritmo converge a una función racional cuyos coeficientes cumplen 4.9-4.10 con  $E = r_{nm}^*$ . Como se ve en el capítulo anterior dicha función es  $R_{nm}^*$ .

## 4.2. Ejemplo.

Realmente es difícil desarrollar buenos ejemplos ilustrativos para la aplicación. Consideremos la función  $f(x) = \exp(x)$  definida sobre el intervalo cerrado  $[-1, 1]$ . Como es sabido esta función es continua y estrictamente positiva sobre el mencionado intervalo. Más aún  $f$  cumple las tres condiciones del teorema 3.7 por lo que  $f$  es hipernormal para cualesquiera  $h_1, h_2 \in C([-1, 1])$  estrictamente positivas. Debido al teorema 4.2 la mejor aproximación racional asimétrica de  $R_{nm}$  a  $f$ , denotémosla como  $R^*$ , es tal que  $f - R^*$  tiene  $n + m + 2$  puntos alternantes. Luego  $f$  es una buena función, según el teorema anterior, para aplicar el algoritmo de Remez.

Nosotros nos proponemos hallar a manera de ejemplo la mejor aproximación racional asimétrica de  $R_{1,1}$  a  $f$  relativa a las funciones

$$h_1 = 1.1 + \cos(2\pi x) \text{ y } h_2 = 1.1 + \text{sen}(2\pi x),$$

que desde luego son continuas y estrictamente positivas sobre cualquier intervalo  $[a, b]$ . Nosotros trabajaremos sobre el intervalo cerrado  $[-1, 1]$ .

Primero se debe exhibir una función racional de  $R_{1,1}$  que cumpla las condiciones del teorema 4.2 una posible función para este caso sería

$$R^{(0)} = \frac{1 + ax}{1 - ax}; \text{ con } a = 0.4709$$

Se puede ver que esta función es tal que  $\eta(f - R^{(0)}, x)$  tiene sólo 4 extremos en  $[-1, 1]$  dichos puntos extremos son:

$x_i^{(0)}$	$\omega(x_i^{(0)})(f - R^{(0)}, x_i^{(0)})$	
$x_1^{(0)} = -1$	0.0074	$> 0$
$x_2^{(0)} = -0.5$	-0.1229	$< 0$
$x_3^{(0)} = 0.74$	0.2566	$> 0$
$x_4^{(0)} = 1$	-0.0295	$< 0$

Entonces  $\|f - R^{(0)}\| = 0.2566$  y  $E_{min} = 0.0074$ .

Empezamos nuestro algoritmo en los puntos  $\{x_i^{(0)}\}_{i=1}^4$ . Al resolver el sistema de ecuaciones no lineales, debido a que  $m = 1$ , obtenemos dos posibles soluciones sin embargo solo una conduce a una función racional de  $R_{1,1}$  sin polos en  $[-1, 1]$ . Dicha solución es:

$$p^{(1)} = 0.5255x + 1.0091, q^{(1)} = -0.4486x + 1 \text{ y } E^{(1)} = 0.031.$$

Como era de esperarse, debido a la demostración del teorema anterior,  $f - R^{(0)}$  y  $f - R^{(1)}$  tienen el mismo signo en los puntos  $\{x_i^{(0)}\}_{i=1}^4$ . La función  $\eta(f - R^{(1)}, x)$  alcanza su máximo en  $\tau = 0.708$  y en este punto el valor de la función  $f - R^{(1)}$  es positivo, por lo que  $x_3^{(1)} = 0.708$ , y conservamos

$$x_i^{(1)} = x_i^{(0)} \text{ para } i \in \{1, 2, 4\}.$$

Para hallar  $R^{(2)}$  debemos resolver el sistema de ecuaciones no lineales previo sobre los puntos  $\{x_i^{(1)}\}_{i=1}^4$  y continuar con el algoritmo. Después de 5 pasos se verifica que

$$R^{(5)} = \frac{0.5275x + 1.0092}{-0.4483x + 1}$$

es la mejor aproximación racional asimétrica de  $R_{1,1}$  a  $f$  relativa a  $h_1$  y  $h_2$ , pues cumple que

$$\text{Crit}(f - R^{(5)}) = \{-1, -0.466, 0.698, 1\}$$

es decir, existen  $n + m + 2 = 4$  puntos alternantes, pero no más de 4, de la función  $f - R^{(5)}$ , el primero de ellos es tal que  $(f - R^{(5)})(-1)$  es positivo. En este caso  $\|f - R^{(5)}\| = 0.0321$ . En la figura 4.4 se muestran  $\eta(f - R^{(0)}, x)$  y  $\eta(f - R^*, x)$ . Obsérvese que los puntos iniciales del algoritmo (círculos azules) están muy cercanos a los puntos críticos de  $f - R^*$  (asteriscos rojos). De hecho el primero y el último coinciden. También obsérvese que  $E_{min}$  esta suficientemente cerca de  $\|f - R^{(5)}\|$  (ambos en verde).

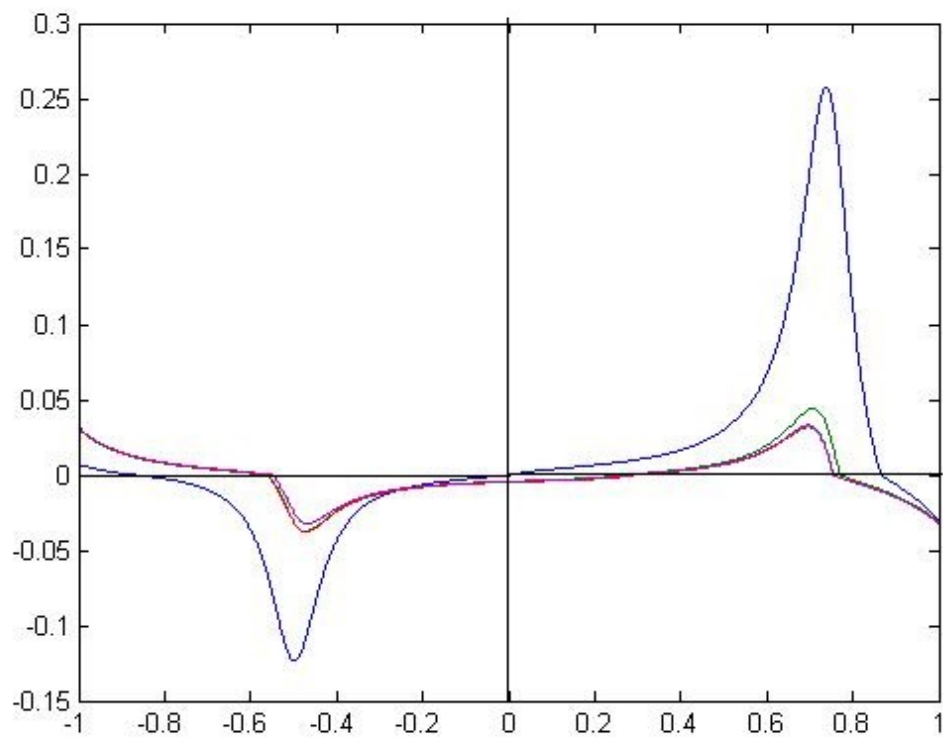


Figura 4.2: Evolución de  $\eta(f - R^{(i)}, x)$  con  $i = 0, \dots, 5$ .

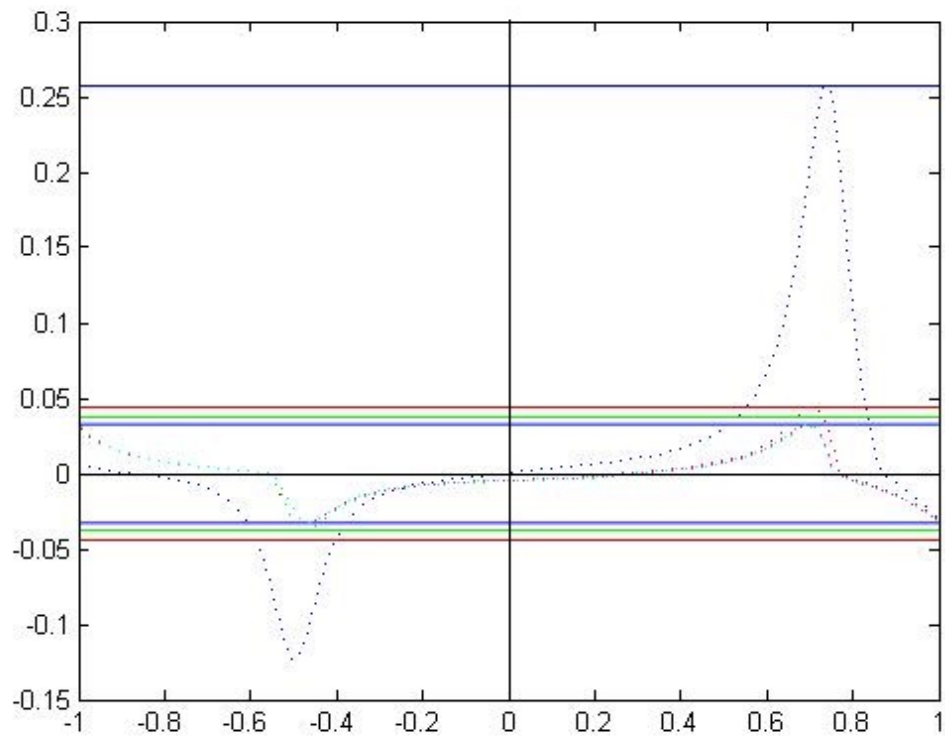


Figura 4.3: Evolución de  $\|f - R^{(i)}\|$  con  $i = 0, \dots, 5$ .

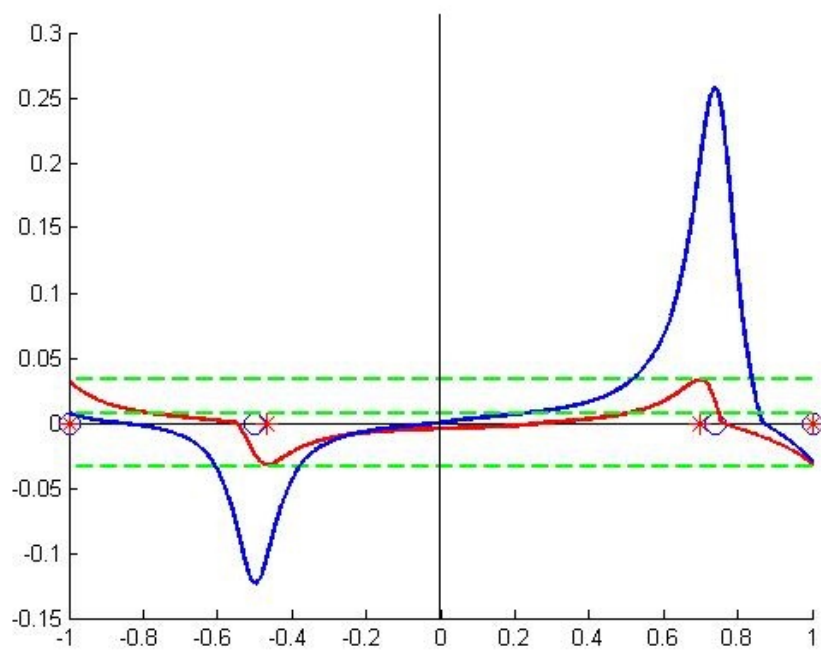


Figura 4.4: Comparación de  $\eta(f - R^{(0)}, x)$  y  $\eta(f - R^*, x)$ .



## Conclusiones.

En este trabajo se utilizaron diferentes métodos para estudiar la aproximación asimétrica de funciones mediante polinomios y/o fracciones racionales algebraicas. Con estos resultados tenemos una teoría unificada y más completa, que engloba muchos resultados aislados referentes al tema tratado.

Se generalizaron los conceptos relativos a la aproximación mediante amplitudes de bandas variantes, cuando el espacio aproximante es cualquier subespacio de Haar de  $C[a, b]$ . En este contexto, pudimos garantizar la existencia de al menos un polinomio generalizado de mejor aproximación a una función continua. Se ofrecen también, criterios para caracterizar los polinomios generalizados de mejor aproximación mediante bandas de amplitudes variantes a una función continua y demostramos que todos ellos son equivalentes. Logramos concluir que para una función continua dada sobre un intervalo cerrado, el conjunto de los polinomios generalizados de mejor aproximación mediante bandas de amplitudes variantes a ella, es unitario.

Después de establecer una norma asimétrica adecuada de forma que la aproximación asimétrica debido a ella, sea *equivalente* a la definición de aproximación mediante bandas variante, exhibimos un teorema que caracteriza, en caso de existir, la función racional generalizada de mejor aproximación asimétrica a una función continua definida sobre un espacio métrico compacto y cuando la función a aproximar -y por ende la clase racional aproximante- está definida sobre un intervalo cerrado ofrecemos un teorema de alternación tipo Chebyshev que caracteriza a la función racional generalizada de mejor aproximación asimétrica y garantizamos la unicidad de la misma si cumple una condición. Se demuestra que en el ca-

so de la de mejor aproximación racional algebraica asimétrica siempre es posible garantizar la existencia y la unicidad de función de mejor aproximación y desde luego se cumplen los teoremas de caracterización previos.

Al igual que en el caso de la aproximación uniforme clásica es necesaria la noción de función normal y degenerada, al trabajar con esta aproximación asimétrica fue necesario generalizar estos conceptos, así como demostrar diversos teoremas con ellos. En particular el teorema 3.7 nos determina una clase de funciones que tienen la propiedad de ser buenas para aplicar en ellas el algoritmo de Remez esto sin importar las funciones  $h_1$  y  $h_2$  que definen la aproximación asimétrica. También caracterizamos el dominio de continuidad del operador  $T_{n,m}^{h_1,h_2}$ , en función de las funciones  $(n, m, h_1, h_2)$ -normales.

En el último capítulo se propone una extensión del algoritmo de Remez que permita calcular la función racional algebraica de mejor aproximación asimétrica. Se demuestra la convergencia del mismo siempre que se verifiquen ciertas condiciones por demás necesarias también para el caso uniforme clásico ( $h_1 = h_2 = 1$ ) y se da un ejemplo en el que se calcula la función racional algebraica de mejor aproximación asimétrica verificando *a posteriori* que la función a aproximar cumplía condiciones que garantizan la convergencia.

PROBLEMAS ABIERTOS. Cuando concluimos una investigación usualmente aparecen nuevas preguntas y algunas de ellas pudieran ser relevantes para el tema bajo consideración. Esta ocasión no es una excepción y nos quedan inquietudes cuyo estudio cuidadoso nos dirá si se trata de nimiedades, de problemas delicados, o bien de problemas usualmente denominados abiertos, porque su solución o estudio, según corresponda, sería de interés general para el tema. En esta investigación nos queda como un problema abierto, de interés amplio por la situación práctica que aparece en las aplicaciones, la extensión de la aproximación asimétrica para el caso de datos discretizados. Es decir, el estudio de la aproximación racional asimétrica en el contexto de un número finito de datos, según Kemp.

# Bibliografía

- [1] Achieser, N.I., *Theory of Approximation* Dover Publications, Inc., New York, 1992.
- [2] Arenas, F.G., Puertas, M.L., Romaguera, S. *Ordered fractal semigroups as a model of computation* Math. Comput. Model., Volume 36, December 2002, Pages 1121-1129
- [3] Chalmers, B.L. y Taylor, G.D. *Uniform Approximation with constraints* Jber d Dt. Math. Verein. 81(1979) 49-86.
- [4] Chebotarev, N. G., *On a general minimax criterion*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 39,1 (1943), 373-376. (En ruso).
- [5] Chebotarev, N. G., *A minimax criterion and its applications*, Collected papers, vol. 2, Akad. Nauk SSSR, Moscow-Leningrad 1949, pp. 396-409. (En ruso)
- [6] Cheney, E.W. y Loeb, H.L. *Generalized Rational Approximation* J. SIAM Numer Anal. Ser. B. Vol. 1., USA, 1964. pp 11-25.
- [7] Cheney, E.W., *Introduction to Approximation Theory*, AMS Chelsea Publishing, Providence, U.S.A, 1966
- [8] DeVore, Ronald A., Lorentz, George G., *Constructive Approximation*, Springer-Verlag, Berlín, 1993.
- [9] Dolzhenko E. P., Sevast'yanov, *Sing-sensitive approximation*, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 91, 5, 1998, pp. 3205-3257.
- [10] Escardo, M.H. *PCF extended with real numbers*, Theoretical Computer Science 162, 1996, pp. 79-115.

- [11] Escardo, M.H. Introduction to Real PCF, Notes for an invited speech at the 3rd Real Numbers and Computers Conference (RNC3), l'Universite Pierre et Marie Curie, Paris, April 1998. Available at: <http://www.cs.bham.ac.uk/mhe/papers.html>.
- [12] Guerra F., Jiménez M. A., *A semi-infinite programming approach to a mixed approximation problem*, Parametric Optimization and Related Topics IV, J.Guddat et al, series Approximation and Optimization, Peter Lang Verlag, Frankfurt, 1997, pp. 135-143.
- [13] Guerra F., Jiménez M. A., *On feasible sets defined through Chebyshev approximation*, Mathematical Methods of Operations Research, Vol. 47, 2, 1998, pp. 255-264.
- [14] Hernández Morales, José Margarito, *Espacios de Lipschitz con métricas no clásicas*. Tesis doctoral. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. 2011.
- [15] Jiménez M. A., Juárez E. L, Guerra F., *Transformation of some mixed approximation problems by optimization methods*, Optimization, Vol. 5, 1, 2002, pp. 175-190.
- [16] Jiménez M.A., Martínez. Ivonne L. *Mejor aproximación polinomial en bandas no uniformes*. En Tópicos de Aproximación II, Ed. Textos científicos BUAP 2007.
- [17] Jiménez M. A., Martínez I. L., *Varying amplitude as degree of approximation*, International conference on approximation methods and numerical modeling in environment and natural resources, MA-MERN'07, Book of abstracts, Granada, España, 2007 pp. 85-88.
- [18] Jiménez M.A., Martínez I. L., Méndez J.N., *Rational asymmetric approximation and normal functions* aprobado para su publicación en Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity.
- [19] Krein M. G., Nudel'man A. A., *The Markov moment problem and extremal problems. Ideas and problems of P. L. Chebyshev and A. A. Markov and their further development*, Nauka, Moscow 1973.

- [20] Künzi, H.P.A., *Nonsymmetric distances and their associated topologies: About the origin of basic ideas in the area of asymmetric topology* in: Handbook of the History of General Topology, ed. by C.E. Aull and R. Lowen, vol. 3, Kluwer Dordrecht, 2001, pp. 853-968.
- [21] Loeb H.L., Moursund D.G. and Taylor G.D., *Uniform rational weighted approximations having restricted ranges*, Journal of approximation theory 1, pp. 401-411. 1968.
- [22] Loeb H.L., Moursund D.G., Schumaker L.L. and Taylor G.D. *Uniform generalized weight function polynomial approximation with interpolation* SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol 6, 2, 1969, pp 284-293.
- [23] Martínez, Ivonne L. *Aproximación polinomial mediante bandas de amplitudes variantes* Tesis doctoral. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. 2009.
- [24] Méndez Alcocer, José Nobel, et al. *Generalized uniform weighted approximation of continuous functions from Haar spaces en Tópicos de la Teoría de la Aproximación IV*. Textos científicos de la BUAP. pp 125-140. Puebla 2012.
- [25] Méndez Salinas, Víctor *Desarrollo computacional de la aproximación polinomial algebraica y trigonométrica mediante bandas de amplitudes variantes* Tesis de maestría. 2010.
- [26] Moursund D. G., *Chebyshev approximation using a generalized weight function*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 3, 3, 1966, pp. 435-450.
- [27] Moursund D. G. and G. D. Taylor, *Uniform rational approximation using a generalized weight function*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 5, 1968, pp. 882-889.
- [28] Pokrovskii A. V., *The best asymmetric approximation in spaces of continuous functions*, Izvestiya Mathematics, Vol. 70, 4, (2006) pp. 809-839.
- [29] Remez, E. Ya. *Sur la détermination des polynômes d'approximation de degré donnée* Comm. Soc. Math. Kharkov **10**, 41 (1934).

- [30] Remez, E. Ya. *Sur un procédé convergent d'approximations successives pour déterminer les polynômes d'approximation* Compt. Rend. Acad. Sc. **198**, 2063 (1934).
- [31] Remez, E. Ya. *Sur le calcul effectif des polynômes d'approximation des Tschebyscheff* Compt. Rend. Acade. Sc. **199**, 337 (1934).
- [32] Rivlin, Theodore J., *An Introduction to the Approximation of Functions*, Dover Publications, Inc. New York, 1969.
- [33] Romaguera, S., Schellekens, M., *Weightable quasi-metric semigroups and semilattices*, Electronic Notes in Theoretical Computer Science 40. 2001. 12 pages
- [34] Romaguera, S. Schellekens, M., *Duality and quasi-normability for complexity spaces*, Appl. Gen. Topology 3. 2002, pp 91-112.