BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

2-pseudocompacidad y C-compacidad en grupos paratopológicos

Tesis que presenta
Silvia Varinia Flores Guarneros
Para obtener el grado de
Maestría en Ciencias Matemáticas

Asesores de tesis:
Dr. Manuel Sanchis López
Dr. David Villa Hernández

Sinodales:

Dr. Bykov Barabanov Alexander Igorevich

Dr. Oleg Okunev

Dr. Arnoldo Bezanilla López

Índice general

Introducción 5

1. Espacios bitopológicos **9**
1.1. Conceptos básicos 9
1.2. 2-pseudocompacidad 16
1.3. Grupos paratopológicos 18
1.4. Casi-uniformidades en grupos paratopológicos 21

2. Grupos paratopológicos 2-pseudocompactos **25**
2.1. 2-pseudocompacidad y compacidad tenue 25
2.2. Regularización de un grupo paratopológico 27
2.3. Grupos paratopológicos T_0 36

3. Grupos paratopológicos C-compactos **41**
3.1. Definiciones y propiedades 41
3.2. C-compacidad 42

Introducción

La idea de estudiar las estructuras algebraicas mediante la introducción de una cierta *convergencia* o, en términos modernos, una topología, tiene una larga tradición que se remonta al siglo diecinueve. De esta forma surgieron los grupos topológicos, definidos al inicio como grupos de Lie o como ciertos grupos de transformaciones analíticas de variedades euclideanas (ver [14]). En otras palabras, muchos de esos grupos aparecieron como grupos de simetrías de ciertos espacios de gran interés en aquel momento. Esta es la razón por la que los grupos topológicos son *simétricos*: la operación inversa es un homeomorfismo.

Al inicio de los años treinta del siglo pasado, se produjo un avance impresionante en el desarrollo de este campo: Peter and Weyl probaron su famoso teorema sobre representaciones de grupos compactos (ver [33]), teorema que, a su vez, permitió a Pontryagin y van Kampen desarrollar la teoría de dualidad para grupos topológicos conmutativos localmente compactos. Son enormes las contribuciones a la teoría de los grupos topológicos realizadas en el siglo veinte. A grandes rasgos, las más importantes de estas contribuciones explotan la simetría de esta estructura, sin la cual los argumentos originales no funcionan.

Sin embargo, las necesidades de varias ramas de las Matemáticas revelaron la importancia del estudio de ciertas estructuras algebraicas dotadas con una topología, donde la relación entre las operaciones algebraicas con la topología es asimétrica. Uno de los ejemplos más impactantes de este fenómeno es el teorema de Ellis sobre la existencia de idempotentes en cada semigrupo topológico por la *izquierda* compacto (ver [15, 16]). Lo sencillo de la formulación del resultado combinado con lo profundo de su contenido han convertido el resultado en una verdadera joya de las Matemáticas. Entre las innumerables aplicaciones del teorema de Ellis encontramos varias que permiten estudiar particiones finitas de los números naturales y encontrar partes infinitas bien estructuradas en algún elemento de la partición (ver [25, 27]).

Los grupos semitopológicos (grupos algebraicos dotados de una topología para la cual la operación es separadamente continua) y paratopológicos (semigrupos topológicos con estructura algebraica de grupo) tienen una relación más estrecha entre la topología y las operaciones algebraicas comparada con la existente en los semigrupos topológicos por la izquierda. Sin embargo, esta relación sigue siendo asimétrica y complicada. En los últimos treinta años han aparecido

decenas de artículos dedicados a aclarar esta relación, y marcar la diferencia entre estas estructuras y la de grupo topológico por un lado, y entre sí por el otro (ver [1]–[9], [10]–[12], [15], [18]–[21], [32]–[36], [39], [46], entre otros).

La tesis se centra en el estudio de varias cuestiones que se han revelado de gran interés en Álgebra Topológica concernientes a grupos paratopológicos, cuestiones que han saltado al primer plano en este campo en los últimos 10–15 años. La idea es realizar una recopilación sistemática de dos técnicas fundamentales en su estudio (su relación con la teoría de los espacios bitopológicos y la noción de regulación de un espacio topológico) y de los resultados más relevantes relacionados con dos conceptos *cercanos* a la compacidad en el contexto de los grupos paratopológicos y su relación con la topología asimétrica: la 2-pseudocompacidad y la C-compacidad. El objetivo es elaborar un material de forma metódica y ordenada como paso previo a la investigación en el marco de una tesis doctoral de problemas abiertos en este campo. A continuación se presenta una exposición breve de estos aspectos.

Estructura de la tesis

Grupos paratopológicos vía biespacios

En el primer capítulo se pretende explicar como puede explotarse en el estudio de los grupos paratopológicos el hecho de que pueden verse como un espacio bitopológico (en lo sucesivo, un biespacio). Recordemos que una terna ordenada (X, τ, σ) se denomina un *biespacio* si tanto τ como σ son topologías sobre X. Una función $f : (X, \tau, \sigma) \longrightarrow (Y, \tau^\star, \sigma^\star)$ se dice que es *bicontinua* si $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau^\star)$ y $f : (X, \sigma) \longrightarrow (Y, \sigma^\star)$ son funciones continuas.

Si $\xi(e)$ es el filtro de entornos de la identidad de un grupo paratopológico (G, τ), entonces la familia $\{ U^{-1} \mid U \in \xi(e) \}$ define una topología τ^{-1}, denominada la *conjujada de* τ, de forma que (G, τ^{-1}) es un grupo paratopológico homeomorfo a (G, τ). Por lo tanto, (G, τ) puede entenderse, de forma natural, como el biespacio (G, τ, τ^{-1}). Es un hecho bien conocido que $(G, \tau \vee \tau^{-1})$ es un grupo topológico de Hausdorff si (G, τ) es un espacio topológico T_0.

Recordemos que una *casiuniformidad* en un conjunto X es un filtro $\mathcal{U}$ en $X \times X$ tal que (i) cada miembro de $\mathcal{U}$ es una relación reflexiva, y (ii) para cada $U \in \mathcal{U}$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^2 \subseteq U$. El par $(X, \mathcal{U})$ se denomina un espacio casiuniforme. Si $\mathcal{U}$ es una casiuniformidad en X, $\mathcal{U}^{-1} = \{U^{-1} \mid U \in \mathcal{U}\}$ es una casiuniformidad en X, la denominada casiuniformidad conjugada de $\mathcal{U}$.

Un biespacio (X, τ, σ) es casiuniformizable si existe una casiuniformidad $\mathcal{U}$ en X tal que la topología inducida en la forma usual por $\mathcal{U}$ coincide con τ y la inducida por $\mathcal{U}^{-1}$ coincide con σ. Un grupo paratopológico (G, τ) es casiuniformizable via la la *casiuniformidad izquierda* que tiene como base la familia

$$U_L = \{(x, y) \mid x^{-1}y \in U\}$$

para cada entorno de la identidad U y su conjugada (de forma análoga, mediante la casiuniformidad derecha cuya definición es clara a partir de la anterior y su conjugada). Es interesante resaltar que $\mathcal{U}_L \vee \mathcal{U}^{-1}$ es una uniformidad en G que induce la topología $\tau \vee \tau^{-1}$.

Los hechos anteriores permiten estudiar los grupos paratopológicos mediante las técnicas de la teoría de biespacios y las técnicas de la teoría de la topología asimétrica. La idea de este apartado es analizar como estos hechos pueden utilizarse para estudiar distintos tipos de bicompactaciones y compleciones (desde el punto de vista asimétrico) para un grupo paratopológico .

2-pseudocompacidad

En el segundo capítulo se expone uno de los problemas que se presentan de forma natural en la Teoría de los biespacios, el cual es encontrar una generalización adecuada del concepto de pseudocompacidad. No hay forma única de extender este concepto y su estudio da lugar a diversos conceptos que en el caso de un espacio topológico de Tychonoff (X, τ) (considerado como el biespacio (X, τ, τ) coinciden con la noción de pseudocompacidad (véase [18]).

Una de estas nociones es el concepto de 2-pseudocompacidad. Si las letras u y l representan respectivamente la topología superior y la topología inferior de los números reales $\mathbb{R}$, un biespacio (X, τ, σ) se denomina 2-*pseudocompacto* si toda función bicontinua $f : (X, \tau, \sigma) \longrightarrow (\mathbb{R}, u, l)$ es una función acotada en $\mathbb{R}$.

En el contexto de los grupos paratopológicos, la siguiente caracterización de la 2-pseudocompacidad se ha revelado como especialmente útil:

Teorema ([18], Corolario 1.5 (7)). Un biespacio (X, σ, τ) es 2-*pseudocompacto* si, y sólo si, para toda sucesión decreciente $(U_n)_{n<\omega}$ de conjuntos no vacíos σ-abiertos de X, y para toda sucesión decreciente $(V_n)_{n<\omega}$ de conjuntos no vacíos τ-abiertos de X, se tiene

$$\cap_{n<\omega} \operatorname*{cl}_{(X,Q)} U_n \neq \emptyset \text{ y } \cap_{n<\omega} \operatorname*{cl}_{(X,P)} V_n \neq \emptyset.$$

Resaltemos que el teorema anterior implica que todo grupo paratopológico numerablemente compacto es 2-pseudocompacto. La 2-pseudocompacidad se ha revelado como una herramienta muy importante en el estudio del clásico problema de encontrar propiedades bajo las cuales un grupo paratopológico es un grupo topológico. En este contexto, puede consultarse (entre otros) el artículo [1]. En este apartado recopilaremos los resultados de grupos paratopológicos relacionados con el concepto de 2-pseudocompacidad con el objetivo de sistematizar las técnicas utilizadas y analizar la relación de este concepto con el de bicompactación de Stone-Čech de un grupo paratopológico cuando lo vemos como un biespacio. Este aspecto liga de forma natural con el concepto de C-compacidad como se pone de manifiesto en el tercer capítulo.

C-compacidad

Finalmente, en el tercer capítulo veremos que todo biespacio 2-*pseudocompacto* es C-compacto. A diferencia del concepto de 2-pseudocompacidad (ver Teorema 3.2) no existe una caracterización interna de esta noción ni siquiera en el campo de los grupos paratopológicos. No obstante, el hecho de que un biespacio (X, σ, τ) es C-compacto si, y sólo si, admite solo casiuniformidades acotadas, permite interesantes aplicaciones en la teoría de los grupos paratopológicos. Como ejemplo podemos citar el siguiente resultado. Un importante teorema de Comfort y Ross [13] establece que un grupo topológico de Hausdorff es pseudocompacto si, y sólo si, su compactación de Stone-Čech es un grupo topológico. Este resultado plantea el problema de caracterizar cuándo la bicompactación de Stone-Čech de un grupo paratopológico es también un grupo paratopológico. Gracias a las propiedades de las casiuniformidades acotadas es posible obtener el siguiente resultado:

Teorema[41, Proposición 3.4] Dado un grupo paratopológico (G, τ) T_0, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) (G, τ) es un grupo paratopológico C-compacto.

(ii) (G, τ) es un grupo topológico pseudocompacto.

(iii) La bicompactación de Stone-Čech de (G, τ) es un grupo paratopológico.

El resultado anterior pone de manifiesto dos hechos: la importancia del concepto de casiuniformidad en el campo de los grupos paratopológicos y que todo grupo paratopológico C-compacto y T_0 es, en realidad, un grupo topológico. Esta última propiedad contrasta con el caso de los grupos 2-pseudocompactos: Ravsky construye en [39] un ejemplo de un grupo paratopológico numerablemente compacto (por consiguiente, 2-pseudocompacto) que no es un grupo topológico. En este apartado explotaremos esta diferencia sustancial entre ambos conceptos para analizar las disimilitudes esenciales entre las casiuniformidades inducidas en un grupo paratopológico 2-pseudocompacto y un grupo paratopológico C-compacto, en particular, como construir grupos paratopológicos 2-pseudocompactos que admitan casiuniformidades no acotadas. También estudiaremos las propiedades de las casiuniformidades de los subconjuntos C-compactos (es decir, el concepto relativizado de C-compacidad) de un grupo paratopológico.

Capítulo 1

Espacios bitopológicos

1.1. Conceptos básicos

Una terna ordenada (X, τ, σ) se denomina un *espacio bitopológico* si tanto τ como σ son topologías sobre X. En lo sucesivo escribiremos *biespacio* al hacer referencia a un espacio bitopológico.

Dado el biespacio (X, τ, σ), definimos la *topología supremo* $\tau \vee \sigma$ de las topologías τ y σ como la topología que tiene como base a la familia $\{u \cap v : u \in \tau, v \in \sigma\}$.

De la definición anterior se deduce que $\tau \subseteq \tau \vee \sigma$ y $\sigma \subseteq \tau \vee \sigma$.

Definición 1.1.1. *El biespacio (X, τ, σ) se denomina 2-T_0 si para cada pareja de puntos distintos en X existe un τ-abierto que contiene a uno de ellos pero no contiene al otro o un σ-abierto que contiene a uno de ellos pero no contiene al otro.*

El motivo de la definición anterior se resalta en la siguiente proposición.

Proposición 1.1.2. *El biespacio (X, τ, σ) es 2-T_0 si, y sólo si, el espacio topológico $(X, \tau \vee \sigma)$ es T_0.*

Demostración. Supongamos que $(X, \tau \vee \sigma)$ es T_0. Sean $x, y \in X$ dos puntos distintos , existe U en $\tau \vee \sigma$ tal que $x \in U$ y $y \notin U$ o $x \notin U$ y $y \in U$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $x \in U$ y $y \notin U$. Tenemos que $U = V_1 \cap V_2$, donde $V_1 \in \tau$ y $V_2 \in \sigma$. Como $y \notin U$, $y \notin V_1$ o $y \notin V_2$. Sin pérdida de generalidad asumamos que $y \notin V_1 \in \tau$. Además, $x \in V_1 \cap V_2 \subseteq V_1 \in \tau$. Esto demuestra que (X, τ, σ) es 2-T_0.

Ahora probemos la otra implicación. Para ello, consideremos el biespacio (X, τ, σ) el cual es 2-T_0. Sean $x, y \in X$ dos puntos distintos, por hipótesis existe un conjunto U tal que $U \in \tau$ ó $U \in \sigma$ y, además U contiene exactamente a uno de los puntos x, y. Supongamos, sin pérdida de generalidad que $U \in \tau$, $x \in U$ y $y \notin U$.Al darse la inclusión $\tau \subseteq \tau \vee \sigma$, $(X, \tau \vee \sigma)$ es T_0. □

Corolario 1.1.3. *Si (X,τ) o (X,σ) son T_0, entonces $(X,\tau\vee\sigma)$ es T_0.*

El siguiente ejemplo muestra que el recíproco del corolario 1.1.3 es falso.

Definamos los siguientes espacios

$$X=\{x,y,z\}$$

$$\tau=\{\{x,y,z\},\{\emptyset\},\{x,z\},\{y\}\}$$

$$\sigma=\{\{x,y,z\},\{\emptyset\},\{x,y\},\{z\}\}$$

$$\tau\vee\sigma=\{\{\emptyset\},\{x\},\{y\},\{z\},\{x,y\},\{x,z\},\{y,z\},\{x,y,z\}\}.$$

Es fácil comprobar que ni τ ni σ son topologías T_0. Sin embargo, $\tau\vee\sigma$ es la *topología discreta*.

Definición 1.1.4. *Una función $f:(X,\tau,\sigma)\to(Y,\tau^*,\sigma^*)$ se dice que es bicontinua si $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^*)$ y $f:(X,\sigma)\to(Y,\sigma^*)$ son funciones continuas.*

Sea (X,τ) un espacio topológico, diremos que una función $f:X\to\mathbb{R}$ es τ-lsc si la función es semicontinua inferiormente. De forma similar es τ-usc si la función es semicontinua superiormente. En lo sucesivo, denotaremos por u a la topología en los números reales generada por la familia de conjuntos $\{(-\infty,a):a\in\mathbb{R}\}$ y por l a la topología en los números reales generada por la familia de conjuntos $\{(a,\infty):a\in\mathbb{R}\}$. Además, el símbolo $\mathbb{I}$ representará al intervalo $[0,1]$. Notemos que una función $f:(X,\tau,\sigma)\to(\mathbb{R},u,l)$ es bicontinua si, y sólo si, f es τ-usc y σ-lsc.

Definición 1.1.5. *El biespacio (X,τ,σ) se denomina 2-completamente regular si para cada $x\in X$ y cada τ-cerrado P que no contiene a x, existe $f:(X,\tau,\sigma)\to(\mathbb{I},u,l)$ bicontinua tal que $f(x)=0$ y $f(P)\subseteq\{1\}$; y para cada σ-cerrado Q que no contiene a x, existe $g:(X,\tau,\sigma)\to(\mathbb{I},u,l)$ bicontinua tal que $g(x)=1$ y $g(Q)\subseteq\{0\}$.*

Diremos que los biespacios (X,τ,σ) y (Y,τ^*,σ^*) son *isomorfos* si existe una función bicontinua y biyectiva $f:(X,\tau,\sigma)\to(Y,\tau^*,\sigma^*)$ tal que

$$f^{-1}:(Y,\tau^*,\sigma^*)\to(X,\tau,\sigma)$$

también es bicontinua.

Definición 1.1.6. *El biespacio (X,τ,σ) se denomina 2-Hausdorff si dados dos puntos distintos $x,y\in X$, existen un conjunto τ-abierto U y un conjunto σ-abierto V tales que $x\in U$, $y\in V$ y $U\cap V=\emptyset$ o un conjunto τ-abierto U y un conjunto σ-abierto V tales que $x\in V$, $y\in U$ y $U\cap V=\emptyset$.*

Una consecuencia inmediata de la definición anterior es que si (X, τ, σ) es 2-Hausdorff, entonces $(X, \tau \vee \sigma)$ es Hausdorff.

Diremos que el biespacio (X, τ, σ) es *2-Tychonoff* si es *2-completamente regular* y *2-Hausdorff*.

Proposición 1.1.7. *Si (X, τ, σ) es 2-Hausdorff y $A \subseteq X$, entonces el biespacio $(A, \tau_{|A}, \sigma_{|A})$ es 2-Hausdorff.*

Demostración. Sean $x, y \in A$ dos puntos distintos y $A \subseteq X$. Como X es 2-Hausdorff, podemos suponer sin pérdida de generalidad que existen $U \in \tau$ y $V \in \sigma$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Para probar que A es 2-Hausdorff, basta considerar $(U \cap A) \in \tau_{|A}$, $(V \cap A) \in \sigma_{|A}$. □

Sea una familia $\{(X_\alpha, \tau_\alpha, \sigma_\alpha); \alpha \in \mathcal{A}\}$ de biespacios, definimos el *producto de los biespacios* $\{(X_\alpha, \tau_\alpha, \sigma_\alpha); \alpha \in \mathcal{A}\}$ denotado por $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}}(X_\alpha, \tau_\alpha, \sigma_\alpha)$ como la terna $(\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha, \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} \tau_\alpha, \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} \sigma_\alpha)$, donde $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ es el producto cartesiano de $\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$, $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} \tau_\alpha$ es la topología producto de la familia de topologías $\{\tau_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ y $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} \sigma_\alpha$ es la topología producto de la familia de topologías $\{\sigma_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$.

Proposición 1.1.8. *Si $\{(X_\alpha, \tau_\alpha, \sigma_\alpha) : \alpha \in A\}$ es una familia de biespacios 2-Hausdorff, entonces el producto $\prod_{\alpha\in A}(X_\alpha, \tau_\alpha, \sigma_\alpha)$ es 2-Hausdorff.*

Demostración. Sean $x = (x_\alpha)_{\alpha\in A}, y = (y_\alpha)_{\alpha\in A} \in \prod_{\alpha\in A}(X_\alpha, \tau_\alpha, \sigma_\alpha)$ dos puntos distintos. Como $x \neq y$, existe $\alpha \in A$ tal que $x_\alpha \neq y_\alpha$. Por hipótesis, el biespacio $(X_\alpha, \tau_\alpha, \sigma_\alpha)$ es 2-Hausdorff, podemos suponer sin pérdida de generalidad que existen un τ_α-abierto U_α y un σ_α-abierto V_α tales que $x_\alpha \in U_\alpha$, $y_\alpha \in V_\alpha$ y $U_\alpha \cap V_\alpha = \emptyset$. Sean $U = (\prod_{\beta\in A\setminus\{\alpha\}} X_\beta) \times U_\alpha$ y $V = (\prod_{\beta\in A\setminus\{\alpha\}} X_\beta) \times V_\alpha$; por consiguiente $x \in U \in \tau$, $y \in V \in \sigma$ y $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto, $\prod_{\alpha\in A}(X_\alpha, \tau_\alpha, \sigma_\alpha)$ es 2-Hausdorff. □

Si (X, τ, σ) es un biespacio, entonces $BC(X, \tau, \sigma)$ denotará al conjunto de todas las funciones bicontinuas $f : (X, \tau, \sigma) \to (\mathbb{R}, u, l)$. Por otro lado, definimos $BC^*(X, \tau, \sigma) = \{f : (X, \tau, \sigma) \to (\mathbb{I}, u, l)$: f es bicontinua$\}$.

Definición 1.1.9. *Sean (X, τ, σ) un biespacio y $F \subseteq BC(X, \tau, \sigma)$. Diremos que (τ, σ) es una bitopología inicial respecto a F si τ está generada por $\{f^{-1}(U) : U \in u, f \in F\}$ y σ está generada por $\{f^{-1}(V) : V \in l, f \in F\}$.*

Proposición 1.1.10. *(X, τ, σ) es 2-completamente regular si, y sólo si, es inicial respecto a una familia $F \subseteq BC(X, \tau, \sigma)$.*

Demostración. Supongamos que (X, τ, σ) es 2-completamente regular. Sea $F = BC(X, \tau, \sigma)$. Veamos que (τ, σ) es inicial respecto a F. Para ello, tomemos $x_0 \in X$ y $U \in \tau$ el cual contiene a x_0. Definamos $P = X\setminus U$, observemos que P es un conjunto τ-cerrado que no contiene a x_0. Como (X, τ, σ) es 2-completamente

regular, existe $f : (X, \tau, \sigma) \to (\mathbb{I}, u, l)$ bicontinua tal que $f(x_0) = 0$ y $f(P) \subseteq \{1\}$. Sea $V = (-\infty, 1/2) \in u$, entonces $x_0 \in f^{-1}(V) \subseteq U$. Esto demuestra que τ está generada por la familia $\{f^{-1}(U) : f \in F, U \in \tau\}$. De forma análoga se prueba que σ está generada por la familia $\{f^{-1}(U) : f \in F, U \in l\}$.

Recíprocamente probemos que si (X, τ, σ) es inicial respecto a una familia $F \subseteq BC(X, \tau, \sigma)$, entonces (X, τ, σ) es 2-completamente regular. Para ello, tomemos $x_0 \in X$ y P un conjunto τ-cerrado que no contiene a x_0. Por inicialidad, existen $h_r : (X, \tau, \sigma) \to (\mathbb{R}, u, l)$ donde $1 \leq r \leq n$, tales que $x_0 \in \bigcap_{1 \leq r \leq n} h_r^{-1}(V_r) \subset X \setminus P$, donde $V_r = (-\infty, a_r) \subset \mathbb{R}$. Sean $g_r = h_r - h_r(x_0)$, $1 \leq r \leq n$ y $h = sup\{g_r : 1 \leq r \leq n\} \in BC(X, \tau, \sigma)$. Notemos que por la definición de g_r, se tiene que $g_r(x_0) = 0$, para cada $1 \leq r \leq n$. Por lo tanto, $h(x_0) = sup\{g_r(x_0) : 1 \leq r \leq n\} = 0$. Sea $a = min\{h_r - h_r(x_0) : 1 \leq r \leq n\}$. Queremos ver que $h(P) \subseteq [a, \infty)$. Para ello, tomemos $p \in P$. Notemos que $p \notin \cap_{i=1}^{n} h_r^{-1}(V_r)$. En consecuencia, existe r_0 tal que $p \notin h_{r_0}^{-1}(V_{r_0})$. Lo cual implica que $h_{r_0}(p) \geq a_{r_0}$ Tomemos $g_{r_0}(p) = h_{r_0}(p) - h_{r_0}(x_0) \geq a_{r_0} - h_{r_0}(x_0) \geq a$. Por lo tanto, $h(p) = sup\{g_r(p) : 1 \leq r \leq n\} \geq g_{r_0}(p) \geq a$. Sea $f = \dfrac{(g \vee 0) \wedge a}{a}$, se sigue de lo anterior que $f : (X, \tau, \sigma) \to (\mathbb{I}, u, l)$ es una función bicontinua tal que $f(x_0) = 0$ y $f(P) \subseteq \{1\}$. Por lo tanto, (X, τ, σ) es 2-completamente regular. □

Como un corolario de lo anterior, tenemos lo siguiente.

Corolario 1.1.11. *El producto arbitrario de biespacios 2-completamente regulares es 2-completamente regular.*

Demostración. Consideremos una familia $\{(X_\alpha, \tau_\alpha, \sigma_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ de biespacios 2-completamente regulares. El producto $\prod(X_\alpha, \tau_\alpha, \sigma_\alpha)$ es inicial respecto de las proyecciones $h_\alpha : (\prod X_\alpha, \tau_\alpha, \sigma_\alpha) \to (X_\alpha, \tau_\alpha, \sigma_\alpha)$. Sabemos que cada $(X_\alpha, \tau_\alpha, \sigma_\alpha)$ es 2-completamente regular y, por la Proposición 1.1.10, el biespacio $(X_\alpha, \tau_\alpha, \sigma_\alpha)$ es inicial respecto a una familia F_α de funciones bicontinuas de $(X_\alpha, \tau_\alpha, \sigma_\alpha)$ en $(\mathbb{R}, u, l)$. Por lo tanto, (X, τ, σ) es inicial respecto a $\{f \circ h_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}, f \in F_\alpha\}$. □

Proposición 1.1.12. *El biespacio (X, τ, σ) es 2-Tychonoff si, y sólo si, es isomorfo a un subespacio de un producto de copias de $(\mathbb{I}, u, l)$.*

Demostración. Como el biespacio $(\mathbb{I}, u, l)$ es 2-Tychonoff, tenemos que $(\mathbb{I}, u, l)$ es 2-Hausdorff y 2-completamente regular. Así que por los resultados anteriores, también lo es cualquier subiespacio de productos de copias de $(\mathbb{I}, u, l)$.

Recíprocamente, supongamos que (X, τ, σ) es 2-Tychonoff. Para abreviar, pongamos $F = BC^*(X, \tau, \sigma)$. Ahora probaremos que la siguiente función es un encaje:

$$e \colon (X, \tau, \sigma) \to \prod_{f \in F} (\mathbb{I}, u, l)$$

Donde $e(x) = (f(x))_{f \in F}$ para cada $x \in X$. Como (X, τ, σ) es 2-Hausdorff bastará probar que e separa puntos de conjuntos τ-cerrados y σ-cerrados. Tomemos

$x \in X$ y un τ-cerrado P que no contiene a x. Como (X, τ, σ) es 2-completamente regular existe $f : (X, \tau, \sigma) \to (\mathbb{I}, u, l)$ tal que $f(x) = 0$ y $f(P) \subseteq \{1\}$. Tenemos que $\overline{f(P)}^u \subseteq \overline{\{1\}}^u = [1, \infty)$. Por lo tanto, $f(x) \notin \overline{f(P)}^u$. De manera similar, si Q es un σ-cerrado que no contiene a x, existe $g : (X, \tau, \sigma) \to (\mathbb{I}, u, l)$ tal que $g(x) = 1$ y $g(Q) \subseteq \{0\}$. Utilizando un argumento similar, tenemos que $g(x) \notin \overline{g(Q)}^l$. Hemos probado que e separa puntos de τ-cerrados y σ-cerrados. □

El siguiente concepto nos permite caracterizar a los biespacios que son 2-completamente regulares.

Definición 1.1.13. *Una casi-uniformidad $\mathcal{U}$ en un conjunto X es una familia de subconjuntos de $X \times X$ tal que:*

1. *$\Delta = \{(x, x) : x \in X\} \subseteq U$, para todo $U \in \mathcal{U}$;*

2. *Si $U \in \mathcal{U}$ y $U \subseteq V$, entonces $V \in \mathcal{U}$;*

3. *Si $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$, entonces $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$;*

4. *Si $U \in \mathcal{U}$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V \circ V \subseteq U$; donde $V \circ V$ es el conjunto de elementos $(x, y) \in X \times X$ tales que $(x, z), (z, y) \in V$ para algún $z \in X$.*

Dada una casi-uniformidad $\mathcal{U}$ en X, definimos la *casi-uniformidad conjugada* de $\mathcal{U}$ como $\mathcal{U}^{-1} = \{U^{-1} : U \in \mathcal{U}\}$, donde $U^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in U\}$. La casi-uniformidad $\mathcal{U}$ en X induce una uniformidad $\mathcal{U}^s = \mathcal{U} \vee \mathcal{U}^{-1}$. Tenemos que $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}^s$ y $\mathcal{U}^{-1} \subset \mathcal{U}^s$. Una casi-uniformidad $\mathcal{U}$ induce de forma natural una topología τ_u en X como sigue:

Tomemos $x \in X$ y $U \in \mathcal{U}$. Hagamos $U(x) = \{y : (x, y) \in U\}$. Entonces, la familia $\{U(x) : x \in X, U \in \mathcal{U}\}$ es una base para una topología $\tau_{\mathcal{U}}$ en X. De lo anterior, tenemos que a cada espacio casi-uniforme $(X, \mathcal{U})$ le podemos asociar el biespacio $(X, \tau_u, \tau_{u^{-1}})$.

Diremos que un biespacio (X, τ, σ) es *casi-uniformizable* si existe una casi-uniformidad $\mathcal{U}$ en X tal que $\tau_u = \tau$ y $\tau_{u^{-1}} = \sigma$.

El siguiente concepto es útil para inducir casi-uniformidades en una clase de espacios en la que se trabajará más adelante.

Definición 1.1.14. *Dado un conjunto X, una función de valores reales no negativos d en $X \times X$ se denomina una casi-pseudométrica en X si satisface las siguientes propiedades:*

1. *$d(x, x) = 0$ para todo $x \in X$;*

2. *$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todo $x, y, z \in X$.*

Si además para todo $x, y \in X$ se satisface:

3. *$d(x, y) + d(y, x) = 0 \Rightarrow x = y$.*

Diremos que d es una casi-métrica.

Una casi-métrica d es una *métrica* si $d(x,y) = d(y,x)$ para todo $x, y \in X$. Si d es una casi-pseudométrica en X, $d^{-1}(x,y) = d(y,x)$ es también una casi-pseudométrica en X y se denomina *la casi-pseudométrica conjugada* de d. Observemos que si d es una casi-métrica en X, entonces $d \vee d^{-1}$ es una métrica en X.

Una casi-pseudométrica d induce una casi-uniformidad $\mathcal{U}_d$ de forma natural que tiene como sub-base los conjuntos de la forma $U_\epsilon = \{(x,y) : d(x,y) < \epsilon\}$, para todo $\epsilon > 0$.

Por lo tanto, todo espacio casi-pseudométrico (X,d) induce el biespacio $(X, \tau_d, \tau_{d^{-1}})$. Fijémonos que la topología τ_d inducida por la casi-pseudométrica d viene definida por las bolas $B_r(x)$, donde $B_r(x) = \{y : d(x,y) < r\}$, $r > 0$ y $x \in X$. Análogamente, diremos que un biespacio (X, τ, σ) es *casi-pseudometrizable* si existe una casi-pseudométrica d tal que $\tau_d = \tau$ y $\tau_{d^{-1}} = \sigma$.

Definición 1.1.15. *Sean (X, τ, σ) un biespacio y $f : (X, \tau, \sigma) \to (\mathbb{R}, l, u)$ una función bicontinua. El conjunto $\{x \in X : f(x) \leq 0\}$ es un conjunto τ-cero con respecto a σ, y $\{x \in X : 0 \leq f(x)\}$ es un conjunto σ-cero con respecto a τ.*

En lo sucesivo, abreviaremos como sigue: un conjunto τ-cero con respecto a σ será denominado como un conjunto τ-cero, y un conjunto σ-cero con respecto a τ será denominado como un conjunto σ-cero.

Proposición 1.1.16. *El biespacio (X, τ, σ) es 2-completamente regular si, y sólo si, los conjuntos τ-cero forman una base para los conjuntos τ-cerrados y los conjuntos σ-cero forman una base para los conjuntos σ-cerrados.*

Demostración. Supongamos que (X, τ, σ) es 2-completamente regular. Veamos que los conjuntos τ-cero forman una base para los conjuntos τ-cerrados. Tomemos un un punto $p \in X$ y un conjunto τ-cerrado P que no contenga a p. Como (X, τ, σ) es 2-completamente regular, existe $f\colon (X, \tau, \sigma) \to (\mathbb{I}, u, l)$ bicontinua tal que $f(p) = 0$ y $f(P) \subseteq \{1\}$. La función $h\colon (\mathbb{I}, u, l) \to (\mathbb{R}, l, u)$ definida como $h(x) = -x + \dfrac{1}{2}$ es bicontinua. Además, $h(f(p)) = \frac{1}{2}$ y $h(f(P)) \subseteq \{-\frac{1}{2}\}$. Sea Z el conjunto τ-cero de la función $h \circ f$. Tenemos que $p \notin Z$ y $P \subseteq Z$. Esto demuestra que los conjuntos τ-cero forman una base para los conjuntos τ-cerrados. Utilizando un argumento similar podemos probar que los conjuntos σ-cero forman una base para los conjuntos σ-cerrados.

Ahora, supongamos que los conjuntos τ-cero forman una base para los conjuntos τ-cerrados y los conjuntos σ-cero forman una base para los conjuntos σ-cerrados. Tomemos un un punto $p \in X$ y conjunto τ-cerrado P que no contenga a p. Por hipótesis, existe una función bicontinua $f : (X, \tau, \sigma) \to (\mathbb{R}, l, u)$ tal que $p \notin Z = \{x \in X : f(x) \leq 0\}$ y $P \subseteq Z$. En consecuencia, $f(p) > 0$. Sean $g = (f \vee 0) \wedge f(p)\colon (X, \tau, \sigma) \to ([0, f(p)], l, u)$ y $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua decreciente tal que $h(0) = 1$ y $h(f(p)) = 0$. Si $k = h \circ g$, entonces

$k\colon (X,\tau,\sigma) \to (\mathbb{I},u,l)$ es bicontinua, $k(P) \subseteq k(Z) = 1$ y $k(p) = h(f(p)) = 0$. De manera análoga, se prueba que para cada σ-cerrado Q que no contiene a x, existe $g\colon (X,\tau,\sigma) \to (\mathbb{I},u,l)$ bicontinua tal que $g(x) = 1$ y $g(Q) \subseteq \{0\}$. □

Lema 1.1.17. *(Kelly [27, Lema 6.12]) Sea $\{U_n : n \in \omega\}$ una sucesión de miembros de una casi-uniformidad en $X \times X$ tales que $U_0 = X \times X$, cada U_n contiene a la diagonal y $U_{n+1}^3 \subseteq U_n$ para todo $n \in \omega$. Entonces, existe una casi-pseudométrica d en $X \times X$ tal que $U_n \subseteq \{(x,y) : d(x,y) < 2^{-n}\} \subseteq U_{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Supongamos que p y q son casi-pseudométricas conjugadas en X. Para cada $\epsilon > 0$ definamos los conjuntos

$$U_{p,\epsilon} = \{(x,y) \in X \times X : p(x,y) < \epsilon\},$$

y

$$U_{q,\epsilon} = \{(x,y) \in X \times X : q(x,y) < \epsilon\}.$$

Teorema 1.1.18. *El espacio bitopológico (X,τ,σ) es casi-uniformizable si, y sólo si, es 2-completamente regular.*

Demostración. Supongamos primero que (X,τ,σ) es 2-completamente regular. Para toda función de valores reales f en X, definimos

$$p(f)(x,y) = 0 \vee (f(x) - f(y))$$

Entonces $p(f)$ es una casi-pseudométrica en X. Denotamos la casi-pseudométrica conjugada de $p(f)$ por $q(f)$, y notemos que $p(-f) = q(f)$. Sea

$$\gamma = \{U_{p(f),r} : r > 0\colon f \text{ bicontinua}\}.$$

Como ya hemos comentado, γ es una sub-base para una casi-uniformidad $\mathcal{U}$ en X. Afirmamos que $\tau_{\mathcal{U}} = \tau$ y $\tau_{\mathcal{U}^{-1}} = \sigma$. Primero mostraremos que $\tau_{\mathcal{U}} = \tau$. Sean $G \in \tau$ y $x \in G$. Como X es 2-completamente regular, existe una función bicontinua f en X tal que $0 \leq f \leq 1$, $f = 0$ en $X \setminus G$, y $f(x) = 1$. En consecuencia,

$$x \in U_{p(f),1/2}(x) = \{y \in X : 0 \vee (1 - f(y)) < 1/2\} \subseteq G,$$

lo cual implica que $G \in \tau_{\mathcal{U}}$. Tenemos que $\tau \subseteq \tau_{\mathcal{U}}$.

Por otra parte, si $H \in \tau_{\mathcal{U}}$ y $x \in H$, entonces para algún $V \in \mathcal{U}$, se tiene que $V(x) \subseteq H$. Como γ es una sub-base para $\mathcal{U}$, existe un conjunto finito F de funciones bicontinuas en X y un conjunto finito $\{r(f) : f \in F\}$ de números reales positivos tal que

$$V \supseteq \bigcap_{f \in F} U_{p(f),r(f)}.$$

Para x fija y $f \in F$, el conjunto

$$U_{p(f),r(f)}(x) = \{y \in X : 0 \vee (f(x) - f(y)) < r(f)\}$$

es τ-abierto. En consecuencia, como

$$x \in \bigcap_{f \in F} U_{p(f),r(f)(x)} \subseteq V(x) \subseteq H,$$

Lo anterior implica que H es τ-abierto. Por lo tanto, $\tau_{\mathcal{U}} \subseteq \tau$. Hemos probado que $\tau_{\mathcal{U}} = \tau$.De manera similar, $\sigma = \tau_{\mathcal{U}^{-1}}$, y, por lo tanto, (X, τ, σ) es casi-uniformizable.

Recíprocamente, supongamos que existe una casi-uniformidad $\mathcal{U}$ en X tal que $\tau_{\mathcal{U}} = \tau$ y $\tau_{\mathcal{U}^{-1}} = \sigma$. Demostraremos que los conjuntos τ-cero forman una base para los conjuntos τ-cerrados. Sea $G \in \tau$ y $w \in G$. En consecuencia, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V(w) \subseteq G$. Notemos que $\mathcal{U}^3 = \{U^3 : U \in \mathcal{U}\}$ es una base para $\mathcal{U}$. Definamos inductivamente una sucesión $\{U_n : n = 0, 1, 2, ...\}$ de elementos de $\mathcal{U}$ tal que $U_{n+1}^3 \subseteq U_n$ para todo n. Sea $U_0 = X \times X$ y $U_1 = V$. Supongamos que se ha definido $U_0, ..., U_n$. Como U^3 es una base para $\mathcal{U}$, existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $W^3 \subseteq U_n$; sea $U_{n+1} = W$. Entonces, por el Lema 1.1.17, existe una casi-pseudométrica $p \in X$ tal que

$$U_n \subseteq \{(x, y) \in X \times X : p(x, y) < 2^{-n}\} \subseteq U_{n-1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea q la casi-pseudométrica conjugada de p. Sean τ' y σ' topologías en X determinadas por p y q respectivamente. Afirmamos que $\tau' \subseteq \tau$ y $\sigma' \subseteq \sigma$. Tomemos $K \in \tau'$ y $z \in K$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $\{y \in X : p(z, y) < \epsilon\} \subseteq K$. Elijamos n tal que $2^{-n} < \epsilon$; entonces $U_n(z) \subseteq K$, y, por lo tanto, $K \in \tau$. Análogamente, se prueba que $\sigma' \subseteq \sigma$. Si la función f en X se define como $f(y) = p(w, y)$, entonces $f\colon (X, \tau', \sigma') \to (\mathbb{R}, u, l)$ es bicontinua. En efecto, los conjuntos $\{y : p(w, y) < K\}$ y $\{y : p(w, y) \leq K\}$ son respectivamente τ-abierto y σ-cerrado. Por lo tanto, f es bicontinua. De lo anterior, tenemos que $Z = \{y \in X : f(y) \geq 1/4\}$ es un conjunto σ-cero, $w \notin Z$, y $X \setminus G \subseteq Z$. Si $f(z) < 1/4$, entonces

$$z \in \{y \in X : p(w, y) < 1/4\} \subseteq U_1(w) = V(w) \subseteq G.$$

En consecuencia, los conjuntos τ-cero forman una base para los conjuntos τ-cerrados. De forma análoga, se prueba que los conjuntos σ-cero forman una base para los conjuntos σ-cerrados. Por lo tanto, por la Proposición 1.1.16, (X, τ, σ) es 2-completamente regular.

□

1.2. 2-pseudocompacidad

Definición 1.2.1. *Sean (X, τ, σ) un biespacio y $A \subseteq X$. Diremos que A es 2-acotado en (X, τ, σ), si $f(A)$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$ para toda función bicontinua $f\colon (X, \tau, \sigma) \to (\mathbb{R}, u, l)$. Diremos que el biespacio (X, τ, σ) es 2-pseudocompacto si X es 2-acotado en sí mismo.*

Teorema 1.2.2. *Sean (X, τ, σ) un biespacio y $A \subseteq X$. Entonces, las siguientes condiciones son condiciones:*

(1) A es 2-acotado en (X, τ, σ).

(2) Toda familia σ-localmente finita $\mathcal{U}$ de τ-abiertos no vacíos en X con $U \cap A \neq \emptyset$ para cada $U \in \mathcal{U}$, y cada familia τ-localmente finita $\mathcal{V}$ de σ- abiertos no vacíos en X con $V \cap A \neq \emptyset$ para cada $V \in \mathcal{V}$, son finitas.

(3) Para toda sucesión decreciente $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de τ-abiertos no vacíos en X con $U_n \cap A \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y para cada sucesión decreciente $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de σ-abiertos en X con $V_n \cap A \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n}^{\sigma} \neq \emptyset \quad y \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_n}^{\tau} \neq \emptyset.$$

Demostración. Probemos que (1) implica (2). Supongamos que existe una familia σ-localmente finita $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ de τ-abiertos en X no vacíos tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in U_n \cap A$. Entonces, existe una función bicontinua $f_n : (X, \sigma, \tau) \to ([0, n], u, l)$ tal que $f_n(x_n) = n$ y $f_n(y) = 0$ para cada $y \in X \setminus U_n$. Sea $f = \Sigma_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Queremos mostrar que f es bicontinua en (X, τ, σ). En efecto, fijemos un $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Entonces, existe un σ-abierto σ_x de x el cual intersecta sólo una cantidad finita de elementos de $\mathcal{U}$, digamos $U_{n_1}, ..., U_{n_r}$. Para todo $i \leq r$, existe un σ-abierto V_{n_i} de x tal que $f_{n_i}(y) - f_{n_i}(x) < \epsilon/r$ para todo $y \in V_{n_i}$. Entonces, $f(y) - f(x) = \Sigma_{i\leq r}(f_{n_i}(y) - f_{n_i}(x)) < \epsilon$ para cada $y \in V \cap Q_x$, donde $V = \cap_{i\leq r} V_{n_i}$. Esto muestra que $f : (X, \sigma) \longrightarrow (\mathbb{R}, u)$ es continua. Por hipótesis, existe un τ-abierto V_x de x tal que $f_{n_i}(x) - f_{n_i}(y) < \epsilon/r$ para todo $i \leq r$ y todo $y \in V_x$. Como $f_n(x) = 0$ para todo $n \neq n_i$ y para todo $i \leq r$, tenemos que $f(x) - f(y) < \epsilon$ para todo $y \in V_x$. Así, $f : (X, \tau) \to (\mathbb{R}, l)$ es continua. Sin embargo, f no es acotada en A, lo cual es una contradicción. Por tanto, toda familia σ-localmente finita $\mathcal{U}$ de τ-abiertos no vacíos de X con $U \cap A \neq \emptyset$, para toda $U \in \mathcal{U}$ es finita. De manera análoga, podemos mostrar que toda familia τ-localmente finita $\mathcal{V}$ de σ-abiertos de X con $V \cap A \neq \emptyset$, para toda $V \in \mathcal{V}$, es finita.

Probemos que (2) implica (3). Sea $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de τ-abiertos de X no vacíos tales que $U_n \cap A \neq \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ no es σ-localmente finita y, por lo tanto, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n}^{\sigma} \neq \emptyset$. Análogamente, tenemos que si $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de σ-abiertos de X no vacíos tales que $V_n \cap A \neq \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_n}^{\tau} \neq \emptyset$.

Probemos que (3) implica (1). Supongamos que existe una función bicontinua $f : (X, \tau, \sigma) \to (\mathbb{R}, u, l)$ no acotada en A. Podemos suponer que $f^{-1}(n, +\infty) \cap A \neq \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Sea $U_n = f^{-1}(n, +\infty)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de σ-abiertos no vacíos. Por hipótesis, existe $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n}^{\tau}$. Entonces, tenemos que $f^{-1}(-\infty, f(x)+1)$ es un τ-abierto de x el cual no intersecta a U_n para toda $n \geq f(x) + 1$, pero esto es una contradicción. Por lo tanto, A es 2-acotado en (X, τ, σ). □

Corolario 1.2.3. *Para cualquier biespacio (X, τ, σ) las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) (X, τ, σ) es 2-pseudocompacto;

(2) Si f es una función bicontinua en (X, τ, σ), entonces f es acotada, $inf\{f(x) : x \in X\} \in f(X)$ y $sup\{f(x) : x \in X\} \in f(X)$;

(3) Toda familia σ-localmente finita $\mathcal{U}$ de τ-abiertos no vacíos de X, y toda familia τ-localmente finita $\mathcal{V}$ de σ-abiertos no vacíos de X son finitas;

(4) Para toda sucesión decreciente $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de τ-abiertos no vacíos de X, y para toda sucesión decreciente $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de σ-abiertos no vacíos de X, tenemos que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n}^{\sigma} \neq \emptyset$ y $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_n}^{\tau} \neq \emptyset$.

Demostración. Por el teorema 1.2.2, las condiciones (1), (3) y (4) son equivalentes.

Es claro que (2) implica (1). Probemos ahora que (1) implica (2). Supongamos que X es 2-pseudocompacto y que r no pertenece a $f(X)$, donde $r = sup\{f(x) : x \in X\}$. Sea $g : X \to \mathbb{R}$, definida $g(x) = \dfrac{1}{r - f(x)}$. Entonces g es una función bicontinua en (X, τ, σ) y no es acotada en X. Esto contradice que el biespacio (X, τ, σ) es 2-pseudocompacto. Con un razonamiento similar se prueba que f alcanza el ínfimo. □

1.3. Grupos paratopológicos

Un *grupo paratopológico* (G, τ) consiste de un grupo algebraico G dotado de una topología τ con la cual la multiplicación en G es continua. Un grupo paratopológico es llamado *grupo topológico* si la inversión es una función continua.

Ejemplo 1.3.1. *Sea $\mathbb{S}$ la recta de Sorgenfrey, es decir, los números reales $\mathbb{R}$ con la suma y la topología τ generada por los intervalos $[a, b)$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$. Entonces $\mathbb{S}$ es un grupo paratopológico. No obstante, la inversión en $\mathbb{S}$ no es una función continua ya que el conjunto $(0, 1]$ no es abierto en $\mathbb{S}$.*

Sea G un grupo. Designaremos el elemento neutro del grupo por e. Fijemos $g \in G$. Consideremos las funciones λ_g y ρ_g, ambas de G en G, definidas como $\lambda_g(x) = gx$ y $\rho_g(x) = xg$ para cada $x \in G$. La función λ_g (respectivamente, ρ_g) es llamada la *traslación izquierda* (respectivamente, *traslación derecha*) de G por g.

Proposición 1.3.2. *Sea G un grupo paratopológico, para todo elemento $g \in G$. Se verifica,*

a) las funciones λ_g y ρ_g son homeomorfismos del grupo paratopológico G en sí mismo ;

b) para cualquier base de entornos $\mathcal{B}_e$ de e en G, las familias $\{gU : U \in \mathcal{B}_e\}$ y $\{Ug : U \in \mathcal{B}_e\}$ son una base de entornos de g en G.

Demostración. Probemos a). Como G es un grupo paratopológico, las traslaciones λ_g y ρ_g son continuas. Es fácil ver que la inversa de λ_g es $\lambda_{g^{-1}}$, por lo tanto, λ_g es un homeomorfismo de G en G. De forma similar se demuestra que ρ_g es un homeomorfismo de G en sí mismo. La parte b) se sigue de a). □

Un espacio X es *homogéneo* si para cada par de puntos x, y, existe un homeomorfismo $f : X \to Y$ tal que $f(x) = y$.

Corolario 1.3.3. *Todo grupo paratopológico es un espacio homogéneo.*

En [35], Pontryagin caracteriza internamente cuándo un grupo algebraico G dotado de una topología τ es un grupo topológico. Haciendo una pequeña modificación en el resultado de Pontryagin se obtiene en grupos paratopológicos lo siguiente.

Teorema 1.3.4. *([37]) Sean G un grupo paratopológico y $\mathcal{U}$ una base de entornos de la identidad e en G. Entonces:*

i) para $U, V \in \mathcal{U}$, existe un elemento $W \in \mathcal{U}$ el cual satisface $W \subseteq U \cap V$;

ii) para cada $U \in \mathcal{U}$ y cada $x \in U$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $Vx \subseteq U$;

iii) para cada $U \in \mathcal{U}$ y cada $x \in G$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $xVx^{-1} \subseteq U$;

iv) para cada $U \in \mathcal{U}$, existe un elemento $V \in \mathcal{U}$ el cual satisface $V^2 \subseteq U$.

Recíprocamente, sean G un grupo y $\mathcal{U}$ una familia de subconjuntos de G cuyos miembros contienen a e que satiface las condiciones i)–iv). Entonces $\mathcal{B}_{\mathcal{U}} = \{Ua : a \in G, U \in \mathcal{U}\}$ es una base para una topología $\tau_{\mathcal{U}}$ en G tal que $(G, \tau_{\mathcal{U}})$ es un grupo paratopológico. Además, la familia $\{aU : a \in G, U \in \mathcal{U}\}$ también es una base para la topología $\tau_{\mathcal{U}}$.

Demostración. Supongamos que G es un grupo paratopológico. La parte i) se cumple porque $\mathcal{U}$ es una base de entornos de e. Los incisos ii) y iii) se siguen de la continuidad de las funciones ρ_x y $\rho_{x^{-1}} \circ \lambda_x$. Como la multiplicación es continua en G, se satisface iv).

Probemos el recíproco. Sea $\mathcal{U}$ una familia de subconjuntos de G cuyos miembros contienen a e satiface las condiciones i)–iv). Sea τ la familia de conjuntos $W \subseteq G$ que satisfacen la siguiente condición:

($\star$) para cada $x \in W$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $Ux \subseteq W$.

Afirmación 1. *τ es una topología en G.*
En efecto, es claro que el vacío y G están en τ. También es claro que la unión

arbitraria de elementos de τ está en τ. Ahora, tomemos $W_1, W_2 \in \tau$. Pongamos $W = W_1 \cap W_2$. Veamos que W pertenece a τ. Si tomamos $x \in W$, existen $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ tales que $U_i x \subseteq W_i$ para $i = 1, 2$. Por i), podemos encontrar $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \subseteq U_1 \cap U_2$. Por lo tanto, $Ux \subseteq W_1 \cap W_2 = W$. Se sigue de lo anterior que $W \in \tau$. Hemos probado la afirmación.

Afirmación 2. *$Ux \in \tau$ para cada $x \in G$ y cada $U \in \mathcal{U}$.*
Tomemos $y \in Ux$. Entonces, $yx^{-1} \in U$. Por ii), existe un elemento $V \in \mathcal{U}$ el cual satisface $Vyx^{-1} \subseteq U$, es decir, $Vy \subseteq Ux$. Por lo tanto, el conjunto Ux está en $\mathcal{U}$.

La afirmación 2 y la condición ii) implican lo siguiente:

Afirmación 3. *La familia $\mathcal{B}_{\mathcal{U}} = \{Ua : a \in G, U \in \mathcal{U}\}$ es una base para la topología τ.*

Afirmación 4. *La multiplicación en G es continua respecto a la topología τ.*
Tomemos $a, b \in G$ y O un elemento de τ tal que $ab \in O$. Por la definición de τ, podemos encontrar $W \in \mathcal{U}$ tal que $Wab \subseteq O$. La condición iv) garantiza la existencia de un elemento $U \in \mathcal{U}$ el cual satisface $U^2 \subseteq W$. Por iii), existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $aVa^{-1} \subseteq U$. Se sigue de lo anterior que $U(aVa^{-1}) \subseteq U^2 \subseteq W$, por lo tanto, $UaVb = U(aVa^{-1})ab \subseteq Wab$. Queda probada la afirmación.

Afirmación 5. *$bV \in \tau$ para cada $b \in G$ y cada $V \in \mathcal{U}$.*
Tomemos $y \in bV$, es decir, $b^{-1}y \in V$. Por ii), existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $Wb^{-1}y \subseteq V$. Aplicando iii), podemos encontrar un elemento $U \in \mathcal{U}$ el cual satisface $b^{-1}Ub \subseteq W$. En consecuencia, $b^{-1}Uy = (b^{-1}Ub)b^{-1}y \subseteq Wb^{-1}y \subseteq V$, esto es, $b^{-1}Uy \subseteq V$. Por lo tanto, $Uy \subseteq bV$. Hemos probado la afirmación.

Por último, de la afirmación 5 y la condición iii) se concluye que la familia $\{aU : a \in G, U \in \mathcal{U}\}$ también es una base para la topología τ. □

Si A es un subconjunto de un grupo paratopológico G, definimos el *inverso de A* como $A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\}$. Decimos que A es *simétrico* si $A = A^{-1}$.

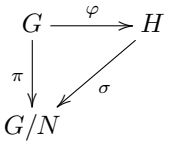
Proposición 1.3.5. *Sea G un grupo paratopológico y $\mathcal{U}$ una base de entornos de la identidad e de G. Entonces son equivalentes:*

a) G es un grupo topológico;

b) para cada $U \in \mathcal{U}$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^{-1} \subseteq U$.

Demostración. a) implica b) porque la inversión es continua en la identidad. Probemos que b) implica a). Tomemos un abierto O en G y un elemento arbitrario $x \in O$. El conjunto $x^{-1}O$ es una vecindad abierta de e. Como $\mathcal{U}$ es una base local de e, podemos encontrar $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \subseteq x^{-1}O$. Por hipótesis, existe un elemento $V \in \mathcal{U}$ el cual satisface $V^{-1} \subseteq U$. Por lo tanto, $V \subseteq U^{-1} \subseteq O^{-1}x$. En consecuencia, $x^{-1} \in Vx^{-1} \subseteq O^{-1}$. Como G es un grupo paratopológico, Vx^{-1} es una vecindad abierta de x^{-1}. Por lo tanto, el conjunto O^{-1} es abierto en G. Hemos demostrado que la inversión es continua en G. □

Teorema 1.3.6. *(**Teorema sobre epimorfismos continuos**). Sean G y H grupos paratopológicos, $\varphi : G \to H$ un epimorfismo continuo y $N = ker\varphi$. Si la función $\sigma : G/N \to H$ se define como $\sigma(xN) = \varphi(x)$, entonces el diagrama*



es conmutativo y σ es un isomorfismo continuo. Además, si la función φ es abierta, entonces σ es un isomorfismo topológico.

Demostración. La función φ está bien definida, porque $\{\varphi(y)\} = \varphi(x)\varphi(N) = \{\varphi(x)\}$, para cada $y \in xN$. Por el primer teorema de isomorfismos para grupos algebraicos, σ es un isomorfismo. Como φ es continua y π es abierta, σ es un isomorfismo continuo. Análogamente se prueba que la función σ es abierta si la función φ es abierta. □

1.4. Casi-uniformidades en grupos paratopológicos

Sea (G, τ) un grupo paratopológico, definimos la *topología conjugada* τ^{-1} en G como $\tau^{-1} = \{U^{-1} : U \in \tau\}$. Tenemos que (G, τ^{-1}) es un grupo paratopológico.

Por lo tanto, un grupo paratopológico (G, τ) puede verse como un biespacio (G, τ, τ^{-1}). Los grupos paratopológicos (G, τ) y (G, τ^{-1}) son homeomorfos. Basta considerar el homeomorfismo $In\colon (G, \tau) \to (G, \tau^{-1})$ definido como $In(x) = x^{-1}$ para cada $x \in G$.

Sea (G, τ) un grupo paratopológico con identidad e. Denotemos por $\mathcal{N}(e)$ a la familia de vecindades de e en G. A continuación definiremos algunas casi-uniformidades en (G, τ). Para cada $U \in \mathcal{N}(e)$, sea

$U_L = \{(x, y) : x^{-1}y \in U\}$;
$U_R = \{(x, y) : yx^{-1} \in U\}$.

La familia $\{U_L : U \in \mathcal{N}(e)\}$ es una base para una casi-uniformidad $\mathcal{L}$ en G y la familia $\{U_R : U \in \mathcal{N}(e)\}$ es una base para una casi-uniformidad $\mathcal{R}$ en G. Sea $\mathcal{B} = \mathcal{L} \vee \mathcal{R}$. Usualmente $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ y $\mathcal{B}$ son conocidas como la casi-uniformidad izquierda, derecha y bilateral, respectivamente.

Sea (X, τ) un espacio. Una casi-uniformidad $\mathcal{U}$ en X es *compatible* con (X, τ) si $\tau_{\mathcal{U}} = \tau$.

Lema 1.4.1. *Dado un grupo paratopológico (G, τ), se tiene que:*

1) $\tau_{\mathcal{L}} = \tau$ *y* $\tau_{\mathcal{L}^{-1}} = \tau^{-1}$;

2) $\tau_{\mathcal{R}} = \tau$ *y* $\tau_{\mathcal{R}^{-1}} = \tau^{-1}$.

Demostración. Como $U_R^{-1}(x) = U^{-1}x$ para cada $x \in G$ y cada $U \in \mathcal{N}(e)$. Por lo tanto, $\mathcal{R}$ es también compatible con (G, τ, τ^{-1}). □

Teorema 1.4.2. *Si* (G, τ, τ^{-1}) *es un grupo paratopológico , entonces es casi-uniformizable.*

Demostración. Sea (G, τ, τ^{-1}) un grupo paratopológico. Por el lema anterior, se cumple que $\tau_{\mathcal{L}} = \tau$ y $\tau_{\mathcal{L}^{-1}} = \tau^{-1}$. □

Teorema 1.4.3. *Si* (G, τ) *es un grupo paratopológico , entonces el biespacio* (G, τ, τ^{-1}) *es 2-completamente regular.*

Demostración. Por el teorema 1.4.2 (G, τ, τ^{-1}) es casi-uniformizable. Utilizando lo anterior y el teorema 1.1.18, tenemos que el biespacio (G, τ, τ^{-1}) es 2-completamente regular. □

El supremo $\tau^* = \tau \vee \tau^{-1}$ es una topología de grupo en G y $G^* = (G, \tau^*)$ se llama el grupo topológico asociado a G. Observemos que τ^* es la mínima de las topologías de grupo en G que contienen a τ.

Definición 1.4.4. *Sea* G *un grupo. Una función casi-valor absoluto para* G *es una función no negativa de valores reales* ρ *en* G *tal que*

(1) $\rho(e) = 0$;

(2) $\rho(xy) \leq \rho(x) + \rho(y)$ *para cada* $x, y \in G$;

(3) Si $\rho(x_n) \to 0$, *entonces* $\rho(ax_na^{-1}) \to 0$ *para cada* $a \in G$.

Como una consecuencia inmediata de esta definición obtenemos lo siguiente.

Proposición 1.4.5. *Sea* ρ *una función absolutamente casi-valuada en el grupo* G. *Entonces la función* d *definida en* $G \times G$ *como* $d(x, y) = \rho(x^{-1}y)$ *(o como* $d(x, y) = \rho(yx^{-1})$*) es una casi-pseudométrica en* G *tal que* (G, τ_d) *es un grupo paratopológico.*

Definición 1.4.6. *Sea* G *un grupo y* d *una casi-pseudométrica en* G. *Entonces* d *se denomina invariante por la izquierda si para cada* $a, x, y \in G$, $d(ax, ay) = d(x, y)$; *invariante por la derecha si* $d(xa, ya) = d(x, y)$; *y se denomina biinvariante si es invariante por la izquierda y es invariante por la derecha.*

El siguiente resultado se obtiene directamente aplicando las definiciones.

Proposición 1.4.7. *Si la casi-pseudométrica d es invariante por la izquierda (derecha), entonces d^{-1} también lo es.*

Proposición 1.4.8. *Si (G,τ) es un grupo paratopológico y d es una casi-pseudométrica invariante por la izquierda (derecha) en G tal que $\tau_d = \tau$, entonces $\tau_{d^{-1}} = \tau^{-1}$.*

Demostración. Supongamos que d es invariante por la izquierda. Dado que (G,τ) es primero numerable, (G,τ^{-1}) es también primero numerable. Al ser primero numerable, la topología queda caracterizada por las sucesiones convergentes. Como $x_n \to x$ (respecto a τ^{-1}) si, y sólo si, $x_n^{-1} \to x^{-1}$ (respecto a τ) se tiene que el hecho $x_n^{-1}x \to e$ (respecto a τ) es equivalente a que $d(e, x_n^{-1}x) \to 0$. De aquí se deduce que, $\tau_{d^{-1}} = \tau^{-1}$. □

Todo grupo topológico primero numerable es metrizable. Este resultado es falso en grupos paratopológicos (la recta de Sorgenfrey). No obstante, el siguiente resultado establece que todo grupo paratopológico primero numerable es casi-pseudometrizable.

Teorema 1.4.9. *Todo grupo paratopológico (G,τ) primero numerable admite una casi-pseudométrica compatible invariante por la izquierda.*

Demostración. Sea (U_n) una base numerable de vecindades de e. Por el Teorema 1.3.4, existe una base numerable (V_n) de vecindades de e tal que $V_0 = G$ y $V_n^3 \subseteq V_{n-1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Definamos una función no negativa de valores reales P en G como

$$P(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in V_n \text{ para todo } n \in \omega; \\ 2^{-n}, & \text{si } x \in V_n \setminus V_{n+1}. \end{cases}$$

En consecuencia,
(1) $P(e) = 0$;
(2) $x_n \to e$ (respecto a τ) si, y sólo si, $p(x_n) \to 0$.
Más aún, $P(abc) \leq 2max\{P(a), P(b), P(c)\}$ para cada $a, b, c \in G$. De lo anterior podemos concluir que

$$P(a_1a_2...a_n) \leq 2\Sigma_{i=1}^{n} P(a_i).$$

En consecuencia, definamos la función $\rho : G \to \mathbb{R}$ tal que

$$\rho(x) = inf\{\Sigma_{i=1}^{k} P(a_i a_{i-1}^{-1}) : a_0 = e, a_k = x, k finita\}.$$

Por la Proposición 1.4.5 la función d definida en $G \times G$ como $d(x,y) = \rho(x^{-1}, y)$ es una casi-pseudométrica en G, la cual es invariante por la izquierda. Mostraremos que d es compatible con (G,τ). Observemos que $\rho(x) \leq P(x) \leq$

$2\rho(x)$ para cada $x \in G$. En consecuencia, $x_n \to x$ (respecto a τ) si, y sólo si, $x^{-1}x_n \to e$ (respecto a τ) si, y sólo si, $P(x^{-1}x_n \to 0)$ si, y sólo si, $\rho(x^{-1}x_n) \to 0$ si, y sólo si, $x, x_n \to 0$.

En consecuencia, $\tau_d = \tau$; por la Proposición 1.4.8, $\tau_{d^{-1}} = \tau^{-1}$. □

Como una consecuencia inmediata del Teorema anterior, tenemos lo siguiente.

Corolario 1.4.10. *Todo grupo paratopológico (G, τ) primero numerable admite una casi-pseudométrica compatible invariante por la derecha.*

Demostración. Sea d la casi-pseudométrica invariante por la izquierda obtenida en el Teorema 1.4.9. Es fácil comprobar que la función d' definida en $G \times G$ como $d'(x, y) = d(y^{-1}, x^{-1})$ es una casi-pseudométrica compatible invariante por la derecha con (G, τ). □

Capítulo 2

Grupos paratopológicos 2-pseudocompactos

2.1. 2-pseudocompacidad y compacidad tenue

En este capítulo daremos una introducción a los grupos paratopológicos 2-pseudocompactos.

Definición 2.1.1. *Un grupo paratopológico (G,τ) es 2-pseudocompacto si el biespacio (G,τ,τ^{-1}) es 2-pseudocompacto.*

La siguiente proposición nos proporciona una caracterización de los grupos paratopológicos 2-pseudocompactos que permite utilizar sólo una de las topologías τ o τ^{-1}.

Proposición 2.1.2. *Un grupo paratopológico (G,τ) es 2-pseudocompacto si y sólo si para cada sucesión decreciente $\{U_n : n\in\omega\}$ de abiertos no vacíos en G se tiene que*

$$\bigcap_{n\in\omega}\overline{U^{-1}}^{\tau}\neq\emptyset.$$

Demostración. La familia $\{U_n^{-1} : n\in\omega\}$ es una sucesión decreciente de abiertos no vacíos en (G,τ^{-1}). Por el Teorema 1.2.2 tenemos que $\bigcap_{n\in\omega}\overline{U^{-1}}^{\tau}\neq\emptyset$. Veamos la implicación contraria. Supongamos que para cada sucesión decreciente $\{U_n : n\in\omega\}$ de abiertos no vacíos en (G,τ) se satisface $\bigcap_{n\in\omega}\overline{U^{-1}}^{\tau}\neq\emptyset$. Probemos que para cada sucesión decreciente $\{V_n : n\in\omega\}$ de abiertos no vacíos en G, la intersección $\bigcap_{n\in\omega}\overline{V_n}^{\tau^{-1}}$ es no vacía. Por hipótesis, $\bigcap_{n\in\omega}\overline{V_n^{-1}}^{\tau}\neq\emptyset$. Al ser la función de tomar inversos $In\colon (G,\tau)\to(G,\tau^{-1})$ un homeomorfismo, se tiene que, $\bigcap_{n\in\omega}\overline{V_n}^{\tau^{-1}}=\bigcap_{n\in\omega}In\left(\overline{V_n^{-1}}^{\tau}\right)\neq\emptyset$. Por el Teorema 1.2.2, podemos concluir que el biespacio (G,τ,τ^{-1}) es 2-pseudocompacto. □

Si no hay confusión posible utilizaremos $\overline{V_n^{-1}}$ en lugar de $\overline{V_n^{-1}}^{\tau}$.

Es inmediato por la proposición anterior que todo grupo paratopológico numerablemente compacto es 2-pseudocompacto.

Probaremos a continuación, algunas propiedades de los grupos paratopológicos que necesitaremos y que no han sido enunciadas en el capítulo anterior.

Proposición 2.1.3. *Si (G,τ) es un grupo paratopológico, entonces para cualquier subconjunto A de (G,τ) se satisface:*

$$\overline{A} = \bigcap_{U\in\mathcal{N}(e)} AU^{-1} = \bigcap_{U\in\mathcal{N}(e)} U^{-1}A.$$

Demostración. El punto x está en $\overline{A}$ si y sólo si la intersección $xU \cap A$ no es vacía para cada $U \in \mathcal{N}(e)$; equivalentemente, si y sólo si, $x \in AU^{-1}$ para cada $U \in \mathcal{N}(e)$. Lo anterior muestra que $\overline{A} = \bigcap_{U\in\mathcal{N}(e)} AU^{-1}$. De forma similar se prueba que $\overline{A} = \bigcap_{U\in\mathcal{N}(e)} U^{-1}A$. □

Corolario 2.1.4. *Sea A un subconjunto de un grupo paratopológico (G,τ). Entonces, $\overline{A} \subseteq AU^{-1}$ y $\overline{A} \subseteq U^{-1}A$ para cada $U \in \mathcal{N}(e)$.*

Lema 2.1.5. *Sea (G,τ) un grupo paratopológico. Si $U, V \in \mathcal{N}(e)$ satisfacen $V^2 \subseteq U$, entonces $\overline{V^{-1}} \subseteq U^{-1}$.*

Demostración. Por el corolario anterior, $\overline{V^{-1}} \subseteq V^{-1}V^{-1} \subseteq U^{-1}$. □

Recordemos que un un espacio (X,τ) es un *espacio de Baire* si la intersección de cada sucesión decreciente de abiertos densos es un conjunto denso.

Un espacio X es *homogéneo* si para cada par de puntos x, y, existe un homeomorfismo $f : X \to Y$ tal que $f(x) = y$.

Teorema 2.1.6. *Todo grupo paratopológico (G,τ) 2-pseudocompacto es un espacio de Baire.*

Demostración. Sea $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión decreciente de conjuntos densos abiertos de (G,τ). Como (G,τ) es un espacio homogéneo, es suficiente probar que $W \cap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n) \neq \emptyset$, para cada $W \in \mathcal{N}(e)$. Construiremos por inducción dos sucesiones $\{x_n \in G : n \in \omega\}$ y $\{W_n \in \mathcal{N}(e) : n \in \omega\}$ tales que para cada $n \in \omega$:

$$(*)\ (x_{n+1}W_{n+1})^{-1} \subseteq \overline{(x_{n+1}W_{n+1})^{-1}} \subseteq (x_nW_n \cap V_{n+1})^{-1}.$$

Sean $W_0 = W$ y $x_0 = e$. Elijamos $x_n \in (G,\tau)$ y $W_n \in \mathcal{N}(e)$ los cuales satisfacen la condición (*). Tomemos $x_{n+1} \in (G,\tau)$ y $W_{n+1} \in \mathcal{N}(e)$ tales que $x_{n+1}W_{n+1}^2 \subseteq x_nW_n \cap V_{n+1}$, entonces

$$\begin{aligned}(x_{n+1}W_{n+1})^{-1} &\subseteq \overline{(x_{n+1}W_{n+1})^{-1}} = \overline{W_{n+1}^{-1}x_{n+1}^{-1}} = \overline{W_{n+1}^{-1}}x_{n+1}^{-1}\\ &\subseteq W_{n+1}^{-1}W_{n+1}^{-1}x_{n+1}^{-1} = (x_{n+1}W_{n+1}^2)^{-1} \subseteq (x_nW_n \cap V_{n+1})^{-1}.\end{aligned}$$

Esto completa la inducción. Por (*), tenemos que $x_{n+1}W_{n+1} \subseteq x_nW_n \subseteq W \subseteq U$ para cada $n \in \omega$. Como (G, τ) es 2-pseudocompacto, podemos seleccionar $g \in G$ tal que

$$g \in \bigcap_{n\in\omega} \overline{(x_{n+1}W_{n+1})^{-1}} \subseteq \bigcap_{n\in\omega} (x_nW_n \cap V_{n+1})^{-1} \subseteq W^{-1} \cap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n^{-1}).$$

Por lo tanto, $W \cap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n) \neq \emptyset$. Esto completa la prueba. □

Un espacio topológico X es T_1 si, y sólo si, los subconjuntos de X formados por un único punto son cerrados. Un espacio topológico X es T_3, si para cada punto $x \in X$ y cualquier conjunto cerrado $F \subset X$ tal que x no pertenece a F, existen entornos U_x de x y V_F de F tales que $U_x \cap V_F = \emptyset$.

Un espacio topológico X que es T_1 y T_3 se denomina *regular*.

Proposición 2.1.7. *Un espacio topológico X es un espacio regular si, y sólo si, para cada $x \in X$ y cada conjunto abierto V que contiene a x, existe un conjunto abierto U que contiene a x tal que $\overline{U} \subset V$.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio regular. Sean $x \in X$ y V un conjunto abierto que contiene a x. Por definición de regular, existen conjuntos abiertos U_1, U_2 tales que $x \in U_1$, $X \setminus V \subset U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. En consecuencia, $U_1 \subset X \setminus U_2 \subset V$, lo cual implica que $\overline{U_1} \subset V$, dado que $X \setminus U_2$ es un conjunto cerrado. Recíprocamente probemos ahora que X es un espacio regular. Para ello, tomemos $x \in X$ y F un conjunto cerrado tal que $x \notin F$. Sea $V = X \setminus F$. Notemos que V es conjunto abierto que contiene a x. Por hipótesis, existe un conjunto abierto W que contiene a x tal que $\overline{W} \subset V$. Consideremos los conjuntos abiertos $U_1 = W$ y $U_2 = X \setminus \overline{W}$ los cuales son disjuntos, tales que $x \in U_1$ y $F = X \setminus V \subset X \setminus \overline{W} = U_2$. □

2.2. Regularización de un grupo paratopológico

Es interesante notar que de la definición de espacio regular podemos inducir que todo espacio regular es un espacio de Hausdorff.

Dado un espacio (X, τ), se define la *semirregularización* de τ como $\tau_r = \{int\overline{U} : U \in \tau\}$. La topología τ_r es más débil que τ y el espacio $r(X) = (X, \tau_r)$ es llamado la *semirregularización* de X. Es fácil probar que si X es Hausdorff, el espacio $r(X)$ es Hausdorff. Si (G, τ) es un grupo paratopológico, entonces al espacio $r(G) = (G, \tau_r)$ lo llamaremos la *regularización* de G debido al siguiente hecho:

Teorema 2.2.1. *Si (G,τ) es un grupo paratopológico, entonces $r(G)=(G,\tau_r)$ es un grupo paratopológico T_3. En consecuencia, si $r(G)$ es regular cuando (G,τ) es Hausdorff.*

Demostración. La familia $\mathcal{B}_r=\{int\overline{U} : U\in\mathcal{N}_G(e)\}$ es una base local de la identidad e en $r(G)$. Veamos que $r(G)$ es un grupo paratopológico; para ello, es suficiente probar que la familia $\mathcal{B}_r$ satisface las condiciones de Pontryagin enunciadas en el Teorema 1.3.4.

La condición i) se cumple porque la intersección de dos abiertos regulares es un abierto regular.

Para la condición ii), tomemos $U\in\mathcal{N}_G(e)$ y $x\in int\overline{U}$. Como $int\overline{U}$ es τ-abierto en G, existe $V\in\mathcal{N}_G(e)$ tal que $Vx\subseteq int\overline{U}$. En consecuencia, $(int\overline{V})x=int(\overline{Vx})\subseteq int(\overline{int\overline{U}})=int\overline{U}$.

La parte iii) se satisface debido a que las traslaciones izquierdas y derechas son homeomorfismos de (G,τ) en (G,τ).

Probemos la condición iv). Tomemos $U\in\mathcal{N}_G(e)$. Como (G,τ) es un grupo paratopológico, existe $V\in\mathcal{N}_G(e)$ tal que $V^2\subseteq U$. Por la continuidad de la multiplicación en G, tenemos que $\overline{V}^2\subseteq\overline{U}$. Como $int\overline{V}$ es abierto en G, tenemos que $(int\overline{V})^2\subseteq int(\overline{V}^2)\subseteq int\overline{U}$.

De lo anterior podemos concluir que $r(G)$ es un grupo paratopológico. Veamos que $r(G)$ es T_3. La semirregularización de un espacio topológico tiene los mismos abiertos regulares que el espacio de partida. Sabemos que la familia $\mathcal{B}_r$ consiste en abiertos regulares en G, por lo tanto, la familia $\mathcal{B}_r$ está formada de abiertos regulares en $r(G)$. Tomemos $O\in\mathcal{B}_r$. La igualdad $int_{\tau_r}\overline{O}^{\tau_r}=O$ se satisface porque O ha de ser un abierto regular en $r(G)$. Como (G,τ) es un grupo paratopológico, existe $W\in\mathcal{B}_r$ tal que $W^2\subseteq O$. En consecuencia $W\overline{W}^{\tau_r}\subseteq\overline{W}^{\tau_r}\overline{W}^{\tau_r}\subseteq\overline{O}^{\tau_r}$. Así, $\overline{W}^{\tau_r}\subseteq int_{\tau_r}\overline{O}^{\tau_r}=O$. Hemos probado que (G,τ_r) es un grupo paratopológico T_3. La prueba queda completa dado que (G,τ) es un espacio homogéneo. □

Dado un grupo G, un subconjunto $S\subseteq G$ es un *subsemigrupo* de G si para cada $x,y\in S$ se tiene que $xy\in S$.

Teorema 2.2.2. *Todo grupo paratopológico T_3 (G,τ) 2-pseudocompacto es un grupo topológico.*

Demostración. Supongamos que (G,τ) no es un grupo paratopológico . Entonces existe una vecindad $U\in\mathcal{N}(e)$ tal que $V\nsubseteq\overline{U^{-1}}\subset(U^{-1})^2$ para cada $V\in\mathcal{N}(e)$. Por inducción construiremos una sucesión $\{U_i : i\in\omega\}$ de vecindades abiertas de la identidad e de G tal que $\overline{U_0}\subset U$ y $U_{i+1}^2\subset U_i$ para cada $i\in\omega$. Sea $F=\bigcap\{U_i : i\in\omega\}$. Entonces F es un subsemigrupo de (G,τ). Como el grupo G es 2-pseudocompacto, existe un punto $x\in G$ tal que $x\in\bigcap_{i\in\omega}\overline{(U_i\setminus\overline{U^{-1}})^{-1}}\subset\overline{U_i^{-1}}\subset\bigcap(U_i^{-1})^2\subset F^{-1}$. Además, $x\in\overline{(U_0\setminus\overline{U^{-1}})^{-1}}\subset\overline{(U_0\setminus U^{-1})^{-1}}\subset\overline{U_0^{-1}\setminus U}\subset G\setminus U$. Como $x\notin\overline{U_0}$, existe una vecindad $W\in\mathcal{N}(e)$ tal que $W\subset U_1$ y $Wx\cap U_0=\emptyset$. Sean $m,n\in\omega$ y $n>m\geq 1$. Si $Wx^n\cap Wx^m\neq\emptyset$,

entonces $\emptyset \neq Wx \cap Wx^{m+1-n} \subset Wx \cap U_1F \subset Wx \cap U_1^2 \subset Wx \cap U_0 = \emptyset$. Por lo tanto, $\{Wx^i : i \geq 1\}$ es una familia infinita de conjuntos disjuntos. Elijamos una vecindad $V \in \mathcal{N}(e)$ tal que $V^2 \subset W$. Como G es 2-pseudocompacto, existe un punto $y \in \bigcap_{n\geq 1} \overline{(\bigcup_{i\geq n} Vx^i)^{-1}}$. En consecuencia, existen números $m, n \in \omega$ tales que $n > m \geq 1$ y $yV \cap (Vx^m)^{-1} \neq \emptyset$ y $yV \cap (Vx^n)^{-1} \neq \emptyset$. Entonces, $y^{-1} \in V^2x^m \cap V^2x^n \subset Wx^m \cap Wx^n$. Esta contradicción prueba que G es un grupo topológico. □

Recordemos que un espacio X se denomina *tenuemente compacto* si cada familia localmente finita de abiertos en X es finita. En el caso de espacios de Tychonoff el concepto coincide con el de pseudocompacidad, es decir, con la propiedad de que toda función real y continua definida en X es una función acotada.

Es un hecho bien conocido el siguiente resultado.

Lema 2.2.3. *Sea (X, τ) un espacio topológico, U y V abiertos disjuntos, entonces $int\overline{U} \cap int\overline{V} = \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que $U \cap V = \emptyset$. Sea V un conjunto abierto, V^C es un conjunto cerrado. Para cualquier conjunto W, tenemos que: $intW \subseteq W$.

$$\overline{U} \cap V = \emptyset$$

$$int\overline{U} \cap V = \emptyset$$

$$int\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$$

$$int\overline{U} \cap int\overline{V} = \emptyset$$

Recíprocamente, supongamos que $int\overline{U} \cap int\overline{V} = \emptyset$. Es suficiente observar que para cualquier conjunto abierto W, tenemos que $W \subseteq int\overline{W}$. □

De la propiedad anterior se deduce inmediatamente el siguiente resultado.

Lema 2.2.4. *Un espacio X es tenuemente compacto si, y sólo si, su semirregularización $r(X)$ es tenuemente compacto.*

Corolario 2.2.5. *Todo grupo paratopológico 2-pseudocompacto es tenuemente compacto*

Demostración. Sea (G, τ) un grupo paratopológico 2-pseudocompacto. La regularización (G, τ_r) del grupo (G, τ) es un grupo paratopológico T_3, el cual es 2-pseudocompacto. Ahora basta aplicar el teorema anterior para completar la prueba. □

Cabe señalar que el recíproco no se cumple. Lo cual veremos en un ejemplo posterior.

Recordemos que $\mathcal{N}(e)$ denota al conjunto de vecindades abiertas de e en G. Un grupo semitopológico G es T_1 si, y sólo si, para cada $x \in G \setminus \{e\}$, existe $V \in \mathcal{N}(e)$ tal que $x \notin V$, es decir, $\bigcap_{V\in\mathcal{N}(e)} V = \{e\}$, equivalentemente, $\bigcap_{V\in\mathcal{N}(e)} V^{-1} = \{e\}$. Tomando como base este hecho, tenemos la siguiente definición.

Definición 2.2.6. *Sea G un grupo semitopológico T_1. El número de simetría de G, denotado por $Sm(G)$, es el mínimo cardinal κ tal que para cada vecindad U de e en G, existe una familia $\gamma \subseteq \mathcal{N}(e)$ tal que $\bigcap_{V\in\gamma} V^{-1} \subseteq U$ y $|\gamma| \leq \kappa$.*

Un grupo semitopológico T_1 G satisface $Sm(G) = 1$ si, y sólo si, G es un grupo cuasitopológico, es decir, un grupo semitopológico con inversa continua. Las siguientes tres proposiciones se deducen fácilmente de la definición de número de simetría (los espacios involucrados en dichas proposiciones son considerados T_1).

Proposición 2.2.7. *Si K es un subgrupo del grupo semitopológico G, entonces se tiene la desigualdad $Sm(K) \leq Sm(G)$.*

El *pseudocarácter* de un punto x en un espacio T_1 X se define como el número cardinal más pequeño de la forma $|\mathcal{U}|$, donde $\mathcal{U}$ es una familia de subconjuntos abiertos de X tales que $\bigcap \mathcal{U} = \{x\}$; este número cardinal es denotado por $\psi(x, X)$. El *pseudocarácter* de un espacio T_1 X se define como el supremo de todos los números $\psi(x, X)$ para cada $x \in X$; este número cardinal es denotado por $\psi(X)$. Al ser un espacio homogéneo, el número $\psi(g, G)$ es el mismo para cada $g \in G$

Proposición 2.2.8. *Cada grupo semitopológico G satisface $Sm(G) \leq \psi(G)$, donde $\psi(G)$ es el pseudocarácter de G.*

Proposición 2.2.9. *Sea $G = \prod_{i\in I} G_i$ el producto de una familia de grupos semitopológicos tales que $Sm(G_i) \leq \kappa$ para cada $i \in I$. Entonces $Sm(G) \leq \kappa$.*

Diremos que un espacio X es de *Lindelöf*, si toda cubierta abierta de X, tiene una subcubierta numerable.

La noción de espacio de Lindelöf conduce a la definición de número de Lindelöf.

El menor número cardinal m tal que toda cubierta abierta de un espacio X tiene un refinamiento abierto de cardinalidad $\leq m$ se define como *número de Lindelöf* y se denota como $l(X)$.

El siguiente resultado relaciona el número de Lindelöf y el número de simetría de un grupo paratopológico (G, τ).

Proposición 2.2.10. *Si (G, τ) es un grupo paratopológico T_1, entonces se satisface la desigualdad $Sm(G) \leq l(G)$.*

Demostración. Tomemos $U \in \mathcal{N}(e)$. Como G es un grupo paratopológico T_1, para cada $x \in G \setminus U$ existe $V_x \in \mathcal{N}(e)$ tal que $e \notin xV_x^2$, es decir, $V_x^{-1} \cap xV_x = \emptyset$. La familia $\{xV_x : x \in G \setminus U\}$ es una cubierta abierta del cerrado $G \setminus U$, por lo tanto, existe un subconjunto $S \subseteq G \setminus U$ tal que $|S| \leq l(G)$ y la familia de abiertos $\{xV_x : x \in S\}$ cubre a $G \setminus U$. De lo anterior se sigue que $\bigcap_{x \in S} V_x^{-1} \subseteq U$ y $|S| \leq l(G \setminus U)$. Por lo tanto, $Sm(G) \leq l(G)$. □

Proposición 2.2.11. *Sea (G, τ) un grupo paratopológico 2-pseudocompacto. Entonces (G, τ) es un grupo topológico si y sólo si $Sm(G) \leq \omega$.*

Demostración. Es claro que si (G, τ) es un grupo topológico, entonces $Sm(G) \leq \omega$. Probemos el recíproco. Supongamos que (G, τ) tiene número de simetría numerable. Sea $U \in \mathcal{N}(e)$. Por la continuidad de la multiplicación en G existe $V \in \mathcal{N}(e)$ tal que $V^2 \subseteq U$. Por hipótesis, existe una sucesión $\{V_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{N}(e)$ tal que $\bigcap V_n^{-1} \subseteq V$. Como (G, τ) es un grupo paratopológico, podemos suponer que $V_{n+1}^2 \subseteq V_n$ para cada $n \in \omega$. Aplicando el Lema 2.1.5, tenemos que $\overline{V_{n+1}^{-1}} \subseteq V_n^{-1}$ para todo $n \in \omega$ y, por lo tanto, $\bigcap_{n \in \omega} \overline{V_n^{-1}} = \bigcap_{n \in \omega} V_n^{-1}$. Si existe $n \in \omega$ tal que $V_n \subseteq \overline{V^{-1}}$, entonces $V_n \subseteq \overline{V^{-1}} \subseteq V^{-2} \subseteq U^{-1}$ con lo cual terminaríamos la demostración. Supongamos lo contrario, es decir, $V_n \setminus \overline{V^{-1}} \neq \emptyset$ para cada $n \in \omega$. Tenemos lo siguiente:

$$\bigcap_{n \in \omega} \overline{V_n^{-1} \setminus (\overline{V^{-1}})^{-1}} \subseteq \bigcap_{n \in \omega} \overline{V_n^{-1} \setminus V} \subseteq (\bigcap_{n \in \omega} \overline{V_n^{-1}}) \setminus V = (\bigcap_{n \in \omega} V_n^{-1}) \setminus V = \emptyset.$$

Lo anterior contradice la 2-pseudocompacidad de (G, τ). Por lo tanto, (G, τ) es un grupo topológico. □

Corolario 2.2.12. *Todo grupo paratopológico 2-pseudocompacto de pseudocarácter numerable es un grupo topológico.*

Demostración. Es consecuencia de la Proposición 2.2.8 y la Proposición 2.2.11. □

Corolario 2.2.13. *Sea $G = \prod_{i \in I} G_i$ el producto de grupos paratopológicos Lindelöf. Si K es un subgrupo 2-pseudocompacto de G, entonces K es un grupo topológico.*

Demostración. Por las proposiciones 2.2.7, 2.2.9 y 2.2.10 se tiene $Sm(K) \leq \omega$. Como K es 2-pseudocompacto, aplicando la proposición 2.2.11 obtenemos el resultado. □

Lema 2.2.14. *Sea $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ la circunferencia unitaria con su topología usual. Si $z \in \mathbb{T}$ de orden infinito, entonces $\{z^n : n \in \omega\}$ es denso en $\mathbb{T}$.*

Lema 2.2.15. *Sean (G,τ) un grupo paratopológico con identidad e, $\mathcal{B}$ una base local en e y S un subsemigrupo de G el cual contiene a e. Entonces, existe una topología $\sigma \supseteq \tau$ en G tal que (G,σ) es un grupo paratopológico y $B_s = \{S \cap B : B \in \mathcal{B}\}$ es una base local de e en (G,σ).*

Como hemos mencionado antes, el siguiente ejemplo muestra que el recíproco del Corolario 2.2.5 no se cumple.

Ejemplo 2.2.16. *Existe un grupo paratopológico Hausdorff primero numerable tenuemente compacto G, que no es un grupo topológico. En consecuencia, G no es 2-pseudocompacto.*

Demostración. Sea $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ la circunferencia unitaria y $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ el homomorfismo cociente tal que $\pi(x) = e^{2\pi xi}$ para cada $x \in \mathbb{R}$. En lo sucesivo consideraremos a $\mathbb{R}$ como un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{Q}$ de los números racionales. En consecuencia, existe una base B del espacio vectorial $\mathbb{R}$ con $1 \in B$. Elijamos un elemento arbitrario $y_0 \in B \setminus \{1\}$. Sea $x_0 = \pi(y_0)$. Consideremos el homomorfismo de espacios vectoriales $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ tal que $f(B \setminus \{y_0\}) = \{0\}$ y $f(y_0) = 1$. Probemos que existe una única función $g : \mathbb{T} \to \mathbb{Q}$ tal que $f = g \circ \pi$. En efecto, el núcleo de π es $\mathbb{Z}$ y $f(\mathbb{Z}) = \{0\}$. Por lo tanto, g existe y es única. Además, g es continua porque f es continua y π es abierta. Sea $S = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{T} : g(x) > 0\}$. Por el Lema 2.2.15, existe una topología de grupo paratopológico σ en $\mathbb{T}$ tal que la familia $U_n = \{S \cap \pi(-1/n, 1/n) : n > 0\}$ es una base local de la unidad. Sea $G = (\mathbb{T}, \sigma)$. Probemos que S es denso en G. En efecto, sea $x \in G$. Queremos ver ahora que $xU_n \cap S \neq \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > -g(x)$. Por el Lema 2.2.14, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(x_0^n)^m = x_0^{mn} \in \pi(-1/n, 1/n)$. Sea $y = x_0^{mn}$. De la definición de S se sigue que $x_0 \in S$. Como S es subsemigrupo, $y \in S$. Tenemos que $y \in U_n$. Lo cual implica que $xy \in xU_n$, notemos que $g(xy) = g(x) + g(y) = mn + g(x) > 0$. Por lo tanto, $xy \in S$. De este modo, $xy \in xU_n \cap S$. Calculemos ahora la regularización $r(G)$ de G. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos $Int_G\left(\overline{U_n}^G\right) = Int_G\left(\overline{S \cap \pi(-1/n, 1/n)}^G\right) = Int_G\left(\overline{\pi(-1/n, 1/n)}^G\right) = Int_G\left(\pi[-1/n, 1/n]\right) = \pi(-1/n, 1/n)$. Denotemos por τ, a la topología usual del grupo $\mathbb{T}$. Se sigue de lo anterior que $r(G) = (\mathbb{T}, \tau)$. Como $r(G)$ es pseudocompacto, el Lema 2.2.4 implica que G es tenuemente compacto. □

Recordemos que un grupo algebraico G es *periódico* si todo elemento tiene orden finito.

Proposición 2.2.17. *Si (G,τ) es un grupo paratopológico periódico y de Baire, entonces (G,τ) es un grupo topológico.*

Demostración. Sean (G,τ) un grupo y $B' = \cap\{U^{-1} : U \in \mathcal{N}(e)\}$. De la definición de B', se deduce que es cerrado. un subconjunto cerrado de G. Dado que B' es un semigrupo periódico, vemos que B' es un grupo. Para cada $n > 1$ sea $G_n = \{x \in G : x^n \in B'\}$. Como el grupo G es Baire, existe un número

$n > 1$ tal que el conjunto G_n tiene interior no vacío. Por consiguiente, existen un punto $x \in G_n$ y una vecindad U de la identidad de G tal que $(xu)^n \in B^{'}$ para cada $u \in U$. Entonces $V^{-1} \subset B^{'}(xV)^{n-1}x$ para cada subconjunto V de U. Sea U_1 una vecindad arbitraria de la identidad de G. Entonces $x^n \in B^{'}U_1$. Por la continuidad de la multiplicación, existe una vecindad $W \subset U$ tal que $(xW)^{n-1}x \subset B^{'}U_1$. Como $B^{'} \subset U_1$, vemos que $W^{-1} \subset B^{'}U_1 \subset U_1^2$. □

Corolario 2.2.18. *Si (G, τ) es un grupo paratopológico 2-pseudocompacto, entonces (G, τ) es un espacio de Baire.*

Lema 2.2.19. *Sean (G, τ) un grupo paratopológico , $K \subset G$ un subespacio compacto, $F \subset G$ un conjunto cerrado, y $K \cap F = \emptyset$. Entonces existe una vecindad U de la identidad tal que $UK \cap F = \emptyset$.*

Demostración. Para cada punto $x \in K$ existe una vecindad V_x de la identidad tal que $V_x x \cap F = \emptyset$. Sea U_x una vecindad de la identidad tal que $U_x^2 \subset V_x$. Existe una familia finita $\mathcal{F}$ tal que $K \subset \bigcup\{U_x x : x \in \mathcal{F}\}$. Sea $U = \bigcap\{U_x : x \in \mathcal{F}\}$. Entonces $UK \cap F \subset U\bigcup\{U_x x : x \in \mathcal{F}\} \cap F \subset \bigcup\{U_x^2 x : x \in \mathcal{F}\} \cap F = \emptyset$. □

Ejemplo 2.2.20. *Sea (G, τ) la recta de Sorgengrey y consideremos el conjunto $F = \{-1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Es fácil ver que F es un subconjunto cerrado de (G, τ) pero $U \cap U + F \neq \emptyset$ para cada vecindad U del cero.*

Lema 2.2.21. *(Numakura) Todo semigrupo S compacto que cumple con las leyes de cancelación izquierda y derecha es un grupo topológico.*

Demostración. Supongamos que S satisface las leyes de cancelación izquierda y derecha

$$aS = Sa = S$$

para cada $a \in S$. Sea $a_0 \in S$ y elijamos $e \in S$ tal que $ea_0 = a_0$. En consecuencia, para cualquier $a \in S$, tenemos que $a_0 x = a$ para algún $x \in S$ y, por lo tanto, $ea = ea_0 x = a_0 x = a$. Lo cual implica que e es la identidad izquierda. La existencia del inverso por la izquierda es inmediato. Por lo tanto, S es un grupo. Para mostrar que S es un grupo topológico, basta con mostrar que la inversión es continua. Sea U un subconjunto abierto de S; tenemos que probar que $V = U^{-1}$ es abierto. Para ello, sea la red x_α en V', $\alpha \in D$ convergente a $x_0 \in S$. Todo x_α^{-1} está en U' y por la compacidad de U', existe una subred $x_\beta^{-1}, \beta \in E$, de x_α^{-1}, y un elemento $y \in U'$ tal que $\lim_\beta x_\beta^{-1} = y$. Por la continuidad de la multiplicación, $x_0 y = \lim_\beta x_\beta^{-1} = x_\beta x_\beta^{-1} = e$. Es decir, $x_0 = y^{-1} \in V'$. Por lo tanto, V' es un conjunto cerrado y V es un conjunto abierto. □

Proposición 2.2.22. *Todo grupo paratopológico Hausdorff 2-pseudocompacto que contiene un conjunto compacto G_δ no vacío es un grupo topológico.*

Demostración. Supongamos que (G,τ) es un grupo paratopológico Hausdorff 2-pseudocompacto. Sea $K \subseteq G$ un conjunto G_δ, compacto y no vacío. Supongamos que (G,τ) no es un grupo topológico. En consecuencia, existe una vecindad $U \in \mathcal{N}(e)$ tal que $V \nsubseteq \overline{U^{-1}} \subset (U^{-1})^2$ para cada vecindad $V \in \mathcal{N}(e)$.

Por inducción utilizando el Lema 2.2.19 podemos construir una familia de sucesiones $\{V_i : i \in \omega\}$ de vecindades abiertas de la identidad e de (G,τ) tal que $V_0 = U$, $V_{i+1}^2 \subset V_i$ para cada $i \in \omega$ y $\bigcap\{V_iK : i \in \omega\} = K$. Sea $H = \bigcap\{V_i : i \in \omega\}$. La construcción de H implica que H es un semigrupo. Además, como $\overline{V_{i+1}^{-1}} \subset V_{i+1}^{-1}V_{i+1}^{-1} \subset V_i^{-1}$ para cada $i \in \omega$, vemos que H^{-1} es un subconjunto cerrado de G. Además, $HK \subset \bigcap\{V_iK : i \in \omega\} = K$, así $H \subset G_K$. Dado que G_K es un grupo, entonces H^{-1} también está incluido en G_K, de esta manera H^{-1} es un semigrupo topológico compacto que cumple con las leyes de cancelación. Por el Lema 2.2.21, H^{-1} es un grupo. Tenemos que $V_i \nsubseteq \overline{U^{-1}}$ para cada $i \in \omega$. Dado que el grupo G es 2-pseudocompacto, existe un punto $x \in G$ tal que $xW^{-1} \cap (V_i \setminus \overline{U^{-1}}) \neq \emptyset$ para cada $W \in \mathcal{N}(e)$ y cada $i > 0$. Entonces $xW^{-1} \cap (V_i \setminus U^{-1}) \neq \emptyset$ y $Wx^{-1} \cap (V_i^{-1} \setminus U) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $x^{-1} \in \overline{V_i^{-1}} \subset V_{i-1}^{-1}$. En consecuencia, $x \in H^{-1}$. Pero $H^{-1} = H \subset U \cap U^{-1}$ y $U^{-1} \cap (V_i \setminus \overline{U^{-1}}) = \emptyset$. Esta contradicción prueba que G es un grupo topológico. □

Lema 2.2.23. *Sea G un grupo paratopológico que no es un grupo topológico. Entonces, existe una vecindad abierta $U \in \mathcal{N}(e)$ tal que $U \cap U^{-1}$ es denso en ninguna parte en G, es decir, el interior de la cerradura de $U \cap U^{-1}$ es vacío.*

Demostración. La operación de los inversos en G es discontinua. En consecuencia, también es discontinua en e, por lo que podemos elegir una vecindad abierta $W \in \mathcal{N}(e)$ tal que $e \notin int(W^{-1})$. Como la multiplicación en G es continua, es posible hallar una vecindad abierta $U \in \mathcal{N}(e)$ tal que $U^3 \subset W$. Recordemos que el conjunto $U \cap U^{-1}$ es denso en ninguna parte. Supongamos lo contrario. En consecuencia, existe un conjunto abierto V no vacío tal que $V \subset \overline{U \cap U^{-1}}$. Por el Corolario 2.1.4, se sique que $V \subset \overline{U \cap U^{-1}} \subset (U \cap U^{-1})U^{-1} \subset U^{-2}$. Entonces, $VU^{-}1 \subset U^{-3} \subset W^{-1}$. Notemos que $V \cap U \neq \emptyset$, y el conjunto VU^{-1} es abierto en G. Por lo tanto, $e \in VU^{-1} \subset int(W^{-1})$, lo cual es una contradicción. □

Teorema 2.2.24. *Supongamos que G es un grupo paratopológico T_3 tenuemente compacto. Entonces G es un grupo topológico.*

Demostración. Supongamos lo contrario. Por el Lema 2.2.23, existe una vecindad abierta $U \in \mathcal{N}(e)$ tal que $U \cap U^{-1}$ es denso en ninguna parte. Sea $W \in \mathcal{N}(e)$ tal que $\overline{WW} \subset U$. Definamos a $O = W \setminus \overline{U \cap U^{-1}}$. En consecuencia, $O \subset W \subset \overline{O}$ y $O^{-1} \cap U = \emptyset$. Fijemos una sucesión de conjuntos abiertos $\{M_n : n \in \omega\}$ en X tal que $G = \cap\{M_n : n \in \omega\}$. Además, definiremos una sucesión de conjuntos abiertos $\{U_n : n \in \omega\}$ en X y una sucesión $\{x_n : n \in \omega\}$ de elementos de G

de tal forma que $x_n \in U_n$. Sea $U_0 = M_0$, y x_0 cualquier punto de O. Supongamos ahora que, para algún $n \in \omega$, se define un subconjunto abierto U_n de X y $x_n \in G \cap U_n$. Dado que $e \in W \subset \overline{O}$, tenemos que $x_n \in x_n\overline{O} = \overline{x_nO}$. Como U_n es una vecindad abierta de x_n, se sigue que $U_n \cap x_nO \neq \emptyset$. Tomemos a x_{n+1} cualquier punto de $U_n \cap x_nO$. Notemos que $x_{n+1} \in G$, dado que $x_nO \subset G$. Por la regularidad de X, podemos encontrar una vecindad abierta U_{n+1} de x_{n+1} en X tal que la clausura de U_{n+1} está contenida en $U_n \cap M_n$, y $U_{n+1} \cap G \subset x_nO$. La definición de los conjuntos U_n y los puntos x_n, para cada $n \in \omega$, queda completada. Notemos que $\overline{U_i} \subset U_j$ siempre que $j < i$. Tenemos también que $x_{n+1} \in x_nO$, para cada $n \in \omega$. Sea $F = \bigcap_{n\in\omega} U_n$. Claramente, $F \subset G$, y $F = \bigcap_{n\in\omega} \overline{U_n} \neq \emptyset$, dado que X es pseudocompacto. El conjunto FW es una vecindad abierta de F en G. Denotemos a $P = \overline{FW}$ en X, y $H = \overline{X \setminus P}$ en X. Se puede mostrar que $H \cap F = \emptyset$. En efecto, supongamos lo contrario, y fijemos $x \in F \cap H$. Como FW es una vecindad abierta de F en G, dado que $x \in F$, se sigue que existe una vecindad abierta $O(x)$ de x en X tal que $O(x) \cap G \subset FW$. En consecuencia, como G es denso en X, tenemos que $O(x) \subset P$. Por otra parte, si $x \in H$, entonces, $O(x) \cap (X \setminus P)$ es no vacío, lo cual es una contradicción. Así que, $H \cap F = \emptyset$. De la pseudocompacidad de X y de la definición de F, se sigue que $U_k \cap H = \emptyset$, para algún $k \in \omega$(dado que $\overline{U_i} \subset U_j$ siempre que $j < i$). Entonces $U_k \subset P$. Dado que $x_k \in U_k \cap G$, tenemos que $x_k \in \overline{FW}$. Por lo tanto, $F \subset U_{k+2} \cap G \subset x_{k+1}O \subset x_{k+1}W$. Además,

$$x_k \in \overline{FW} \subset x_{k+1}\overline{WW}.$$

Teniendo en cuenta que $x_{k+1} \in x_kO$, obtenemos $x_k \in x_kO\overline{WW}$. Por lo tanto, $e \in O\overline{WW} \subset OU$. Así que, $O \cap U^{-1} \neq \emptyset$. Dado que $O \subset U$, se sigue que $O \cap (U \cap U^{-1}) = O \cap U^{-1} \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. □

Proposición 2.2.25. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces (X, τ) es tenuemente compacto si, y sólo si, $r(X)$ es tenuemente compacto.*

Demostración. Supongamos que (X, τ) es tenuemente compacto. Sea $\mathcal{U}$ una familia de abiertos no vacíos en $r(X)$ localmente finita. Dado que $\tau_r \subset \tau$, la familia $\mathcal{U}$ es localmente finita en (X, τ). En consecuencia, $\mathcal{U}$ es finita ya que (X, τ) es tenuemente compacto. Por lo tanto, $r(X)$ es tenuemente compacto. Recíprocamente, supongamos que $r(X)$ la semirregularización de (X, τ) es tenuemente compacto. Queremos mostrar que (X, τ) es tenuemente compacto. Para ello, sea $\mathcal{U}$ una familia de abiertos no vacíos en (X, τ) localmente finita. Veamos que $\mathcal{U}$ es finita. Sea $x \in X$, por hipótesis, existe $U_x \in \tau$ tal que U_x intersecta a un número finito de elementos de $\mathcal{U}$. Sea $\mathcal{U}' = \{int\overline{U} : U \in \mathcal{U}\} \subset \tau_r$. Consideremos $int\overline{U_x} \in \tau_r$. Supongamos por el contrario que para una cantidad infinita de elementos de $\mathcal{U}$, $int\overline{U} \cap int\overline{U_x} \neq \emptyset$, lo cual contradice la elección de U_x. Por lo tanto, (X, τ) es tenuemente compacto.

□

Proposición 2.2.26. *Sea (X,τ) el producto de una familia $\{(X_i,\tau_i) : i \in I\}$ de espacios topológicos. Entonces $r(\prod_{i\in I} X_i) = \prod_{i\in I} r(X_i)$.*

Demostración. Como ambos espacio tienen el mismo conjunto subyacente, es suficiente probar que los espacios $r(\prod_{i\in I} X_i)$ y $\prod_{i\in I} r(X_i)$ comparten una base. Sea $\mathcal{B}$ el conjunto de abiertos canónicos del producto (X,τ). Como $\mathcal{B}$ es una base para la topología τ en X, la familia $r(\mathcal{B}) = \{Int\overline{U} : U \in \mathcal{B}\}$ es una base para el espacio $r(\prod_{i\in I} X_i)$. En donde el interior y la cerradura son tomados en el producto.

Ahora, tomemos $U \in \mathcal{B}$ con $U = \prod_{i\in I} U_i$ y casi todos los conjuntos U_i coinciden con X_i, excepto un número finito de elementos de I. Como $U \in \mathcal{B}$ tenemos que $Int\overline{U} = \prod_{i\in I} Int_{\tau_i}\overline{U_i}^{\tau_i}$. Sabemos que los conjuntos de la forma $\prod_{i\in I} Int_{\tau_i}\overline{U_i}^{\tau_i}$ forman una base para el espacio $\prod_{i\in I} r(X_i)$. Se sigue de lo anterior que la familia $r(\mathcal{B})$ es base para los espacios $r(\prod_{i\in I} X_i)$ y $\prod_{i\in I} r(X_i)$. □

2.3. Grupos paratopológicos T_0

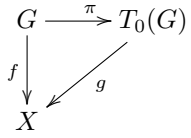
Proposición 2.3.1. *Si G es un grupo paratopológico , entonces K es un subgrupo invariante de G y el homorfismo cociente $\pi : G \longrightarrow G/K$ cumple que $U = \pi^{-1}\pi(U)$, para cada conjunto abierto $U \subseteq G$.*

Demostración. Sea $P = \bigcap \mathcal{N}(e)$. De la definición de K, tenemos que $e \in K$ y $K^{-1} = K$. Dado que los automorfismos de G son automorfismos de G sobre él mismo, vemos que K es invariante en G. Veamos que K es un subgrupo de G. Elijamos un elemento arbitrario $x \in K$. Para ello, verifiquemos que $xP \subseteq P$ y $Px \subseteq P$. Dado un elemento $U \in \mathcal{N}(e)$, tenemos que $x \in K \subseteq U$. En consecuencia, $e \in x^{-1}U$ y $x^{-1}U \in \mathcal{N}(e)$. Por definición de P, tenemos que $P \subseteq \bigcap_{U\in\mathcal{N}(e)} x^{-1}U = x^{-1}\bigcap \mathcal{N}(e) = x^{-1}P$, equivalentemente, $xP \subseteq P$. Utilizando un argumento similar, se muestra que $Px \subseteq P$. Nuevamente, sea x un elemento de K. Entonces, $x^{-1} \in K$ dado que K es simétrico. Por lo tanto, $Px^{-1} \subseteq P$, equivalentemente, $xP^{-1} \subseteq P^{-1}$. También $xP \subseteq P$, y, por lo tanto, de lo anterior tenemos que $x(P \cap P^{-1}) \subseteq P \cap P^{-1}$, es decir, $xK \subseteq K$. Por lo tanto, K es un subgrupo de G. Afirmamos que $KU = U$, para cada conjunto abierto U de G. Efectivamente, supongamos por contradicción que existe un elemento $x \in K$ y un conjunto abierto U no vacío en G tal que $xU \setminus U \neq \emptyset$. Entonces existe $a \in U$ tal que $xa \notin U$. Por lo tanto, $V = Ua^{-1} \in \mathcal{N}(e)$ y $x \in K \setminus V \neq \emptyset$, lo cual contradice la definición de K. Sea $\pi : G \longrightarrow G/K$ el homomorfismo cociente. Se sigue de la afirmación anterior que $U = \pi^{-1}\pi(U)$, para cada conjunto abierto $U \subseteq G$. Se puede mostrar que el grupo cociente G/K es un T_0-espacio. En efecto, sea un elemento $y \in G \setminus K$ distinto del elemento neutro del grupo cociente, tomemos $x \in G$ tal que $\pi(x) = y$. Entonces, $x \notin K$, así que, existe $U \in \mathcal{N}(e)$, donde $x \notin U \cap U^{-1}$. Si $x \notin U$, entonces la igualdad $U = \pi^{-1}\pi(U)$ implica que $y \notin \pi(U)$. Si $x \notin U^{-1}$, entonces $x^{-1} \notin U$ y, de igual manera, $y^{-1} \notin \pi(U)$. Lo cual implica que $y \notin \pi(U^{-1})$. En cualquier caso, $y \notin V \cap V^{-1}$, donde $V = \pi(U)$ es una vecindad abierta del elemento neutro $\overline{e} \in G/K$. Supongamos que y_1 y y_2 son elementos distintos de G/K. Entonces $y_1y_2^{-1} \neq \overline{e}$, así que, existe una

vecindad abierta V de $\overline{e} \in G/K$ tal que $y_1 y_2^{-1} \notin V \cap V^{-1}$. En cualquier caso, $y_1 \notin V y_2$ o $y_2 \notin V y_1$. Por lo tanto, G/K es un T_0-espacio. □

Sea (G, τ) un grupo paratopológico. Si $K = \bigcap\{U \cap U^{-1} : U \in \mathcal{N}(e)\}$, entonces denotamos al grupo cociente G/K como $T_0(G)$. En lo sucesivo utilizaremos esta notación.

Teorema 2.3.2. *Sean G un grupo paratopológico y $\pi : G \to T_0(G)$ el homomorfismo cociente. Si f es una función continua de G en un espacio X el cual es T_0, entonces existe una función continua $g : T_0(G) \to X$, tal que $f = g \circ \pi$*



Demostración. Veamos que f es constante en cada clase lateral. Supongamos lo contrario. Para ello, tomemos $x, y \in G$ tales que $x^{-1}y \in K$ y $f(x) \neq f(y)$. Como X es T_0, existe un abierto V en X que contiene exactamente a sólo uno de los puntos $f(x)$ y $f(y)$. Sin pérdida de generalidad que V contiene a $f(x)$ y no a $f(y)$. En consecuencia, el abierto $W = f^{-1}(V)$ contiene a x y no a y. Tomemos $U \in \mathcal{N}(e)$ tal que $xU \subseteq W$. Se sigue de lo anterior que

$$y \in xK \subseteq x(U \cap U^{-1}) \subseteq xU \subseteq W.$$

Lo anterior es una contradicción. Por lo tanto, f es constante en cada clase lateral. Este hecho nos garantiza que la función $g\colon T_0(G) \to X$ dada por $g(\{xK\}) = f(x)$ está bien definida. Como π es abierta y f es continua, tenemos que g es continua. Además, por la definición de g, podemos concluir que $f = g \circ \pi$.

□

Corolario 2.3.3. *Un grupo paratopológico G es un grupo topológico si, y sólo si, $T_0(G)$ es grupo topológico.*

Demostración. Si G es un grupo topológico, entonces $T_0(G)$ es también un grupo topológico visto como cociente de G. Inversamente, supongamos ahora que $T_0(G)$ es un grupo topológico. Sea U un conjunto abierto en G, $\pi(U)$ es abierto en $T_0(G)$. Dado que $T_0(G)$ es grupo paratopológico , tenemos que $\pi(U)^{-1}$ es abierto. Por la proposición anterior $\pi^{-1}(\pi(U)^{-1}) = U^{-1}K = U^{-1}$. Como U es abierto y π es homomorfismo continuo, tenemos que U^{-1} es abierto en G. □

Proposición 2.3.4. *Un grupo paratopológico G es tenuemente compacto si, y sólo si, el grupo paratopológico $T_0(G)$ es tenuemente compacto.*

Demostración. Si el grupo G es tenuemente compacto, entonces el grupo $T_0(G)$ es la imagen continua de un espacio tenuemente compacto. Por lo tanto, $T_0(G)$ es tenuemente compacto. Ahora supongamos que el grupo $T_0(G)$ es tenuemente compacto. Sea $\mathcal{U}$ una familia localmente finita de subconjuntos abiertos del espacio G y $K = \bigcap\{U \bigcap U^{-1} : U \in \mathcal{N}(e)\}$. Entonces $UK = K$ para cada conjunto abierto U del espacio G. Sea $\pi : G \to T_0(G)$ el homomorfismo cociente. En consecuencia, la familia $\{\pi(U) : U \in \mathcal{U}\}$ también es localmente finita. Dado que el espacio T_0 es tenuemente compacto, la familia $\{\pi(U) : U \in \mathcal{U}\}$ es finita. Por lo tanto, $\mathcal{U}$ también es finita. □

Proposición 2.3.5. *Sea G el producto de una familia $\{G_i : i \in I\}$ de grupos paratopológicos. Entonces, $T_0(G) \cong \prod_{i\in I} T_0(G_i)$.*

Demostración. Sean e la identidad de G y e_i la identidad de G_i. Definamos $K = \bigcap_{U\in\mathcal{N}(e)}(U \cap U^{-1})$ y $K_i = \bigcap_{V\in\mathcal{N}(e_i)}(V \cap V^{-1})$. Es fácil ver que $K = \prod_{i\in I} K_i$. Además, $T_0(G) = G/K$ y $T_0(G_i) = G_i/K_i$ para cada $i \in I$. Sea $\pi_i \colon G_i \to T_0(G_i)$ el homomorfismo cociente, para cada $i \in I$. Definamos la función $f \colon G \to \prod_{i\in I} T_0(G_i)$ como el producto de las funciones π_i. Como π_i es un homomorfismo continuo, abierto y sobreyectivo para cada $i \in I$, tenemos que f también es un homomorfismo continuo, abierto y sobreyectivo. Por el teorema 1.3.6, podemos concluir que $G/kerf \cong \prod_{i\in I} T_0(G_i)$. Es claro que $kerf = \prod_{i\in I} K_i = K$. Se sigue de lo anterior que

$$T_0(G) = G/K = G/kerf \cong \prod_{i\in I} T_0(G_i).$$

□

Teorema 2.3.6. *(Comfort-Ross) Si G es un grupo topológico T_0, entonces G es completamente regular.*

Teorema 2.3.7. *El producto de una familia de grupos topológicos pseudocompactos es pseudocompacto.*

Teorema 2.3.8. *El producto de una familia de grupos paratopológicos tenuemente compactos es tenuemente compacto.*

Demostración. Sea $\{G_i : i \in I\}$ una familia de grupos paratopológicos tenuemente compactos. Consideremos el producto $\prod_{i\in I} G_i$ y $r(\prod_{i\in I} G_i)$ la semirregularización de dicho producto. Por la Proposición 2.2.26, $r(\prod_{i\in I} G_i = \prod_{i\in I} r(G_i)$. Por el Teorema 2.2.1, $r(G_i)$ es un grupo paratopológico T_3. Ahora utilizando la Proposición 2.2.25, $r(G_i)$ es tenuemente compacto. En virtud del Teorema 2.2.24, la regularización $r(G_i)$ es un grupo topológico. Consideremos $T_0(r(G_i))$.

Por los resultados 2.3.1–2.3.4, se tiene que $T_0(r(G_i))$ es un grupo topológico T_0 tenuemente compacto. Del Teorema 2.3.6, se tiene que $T_0(r(G_i))$ es un grupo topológico pseudocompacto. Por el Teorema 2.3.7, $\prod_{i\in I} T_0(r(G_i))$ es un grupo topológico pseudocompacto. Por la Proposición 2.3.5, $\prod_{i\in I}(T_0(r(G_i))) \cong T_0(\prod_{i\in I} r(G_i))$. Utilizando el Corolario 2.3.3 y la Proposición 2.3.4, se tiene que $\prod_{i\in I} r(G_i)$ es un grupo topológico tenuemente compacto. Se sigue de la Proposición 2.2.26, que $\prod_{i\in I} r(G_i) = r(\prod_{i\in I} G_i)$ es tenuemente compacto. Finalmente, por la Proposición 2.2.25, se tiene que $\prod_{i\in I} G_i)$ es tenuemente compacto. □

Capítulo 3

Grupos paratopológicos C-compactos

3.1. Definiciones y propiedades

En este capítulo se mostrarán algunas de las propiedades de los grupos paratopológicos C-compactos.

Sea $\{A_s\}_{s\in S}$ una familia de subconjuntos de un espacio topológico X. Diremos que $\{A_s\}_{s\in S}$ es *localmente finita*, si para cada $x \in X$ existe una vecindad U de x tal que el conjunto $\{s \in S : U \cap A_s \neq \emptyset\}$ es finito. La familia $\{A_s\}_{s\in S}$ se denomina *discreta*, si para cada $x \in X$ existe una vecindad U de x que intersecta a lo sumo un elemento de $\{A_s\}_{s\in S}$.

Un grupo paratopológico G se dice *precompacto*, si para cada $V \in \mathcal{N}(e)$, existe un subconjunto finito A de G, tal que $AV = VA = G$.

Teorema 3.1.1. *Todo grupo topológico pseudocompacto es precompacto.*

Demostración. Sea (G, τ) un grupo topológico . Supongamos que (G, τ) no es precompacto. En consecuencia, existe una vecindad $U \in \mathcal{N}(e)$ y una sucesión de puntos $\{x_k\}$ en (G, τ) tal que

$$x_k \notin \bigcup_{n<k} x_n U$$

para cada k. Elijamos una vecindad simétrica $V \in \mathcal{N}(e)$ para la cual $V^4 \subset U$, tomemos una función continua no negativa f_k sobre G para cada entero positivo k, tal que $f_k(x_k) = k$ y $f_k = 0 \notin x_k V$.
Dado que la sucesión $\{x_k V\}$ es localmente finita, la función f de valores reales definida sobre G por la relación

$$f(x) = \Sigma_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

es continua. Dado que f no es acotada, el grupo G no es pseudocompacto. □

Teorema 3.1.2. *(Arhangel'skii y Reznichenko) Supongamos que G es un grupo topológico, H un grupo paratopológico y $\varphi : G \to H$ un homomorfismo sobreyectivo continuo. Si G es un grupo precompacto, entonces H es un grupo topológico.*

Demostración. Supongamos que H no es un grupo topológico. Por el Lema 2.2.23, existe una vecindad U del neutro en H tal que $U \cap U^{-1}$ es denso en ninguna parte. Sea W una vecindad simétrica del neutro en G tal que $\varphi(W) \subset U$. Dado que G es un grupo precompacto, existe un conjunto finito $A \subset G$, tal que $G = AW$. En consecuencia, $M = \varphi(W) \subset U \cap U^{-1}$ es denso en ninguna parte y $BM = H$, donde $B = \varphi(A)$. Por lo tanto, H es la unión finita de conjuntos densos en ninguna parte, lo cual es una contradicción. □

3.2. C-compacidad

El siguiente resultado es conocido, por lo cual omitimos su demostración.

Proposición 3.2.1. *Un espacio X es pseudocompacto si y sólo si X es Tychonoff y $f(X)$ es compacto en $\mathbb{R}$ para cada función continua $f\colon X \to \mathbb{R}$.*

Si A es un subconjunto de X. Diremos que A es *C-compacto* en (X, τ, σ) si $f(A)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ para cada $f \in C(X, \tau \vee \sigma)$. Un grupo paratopológico (G, τ) se dice *C-compacto*, si el biespacio (G, τ, τ^{-1}) es C-compacto.

Lema 3.2.2. *Si la función $h\colon (X, \tau, \sigma) \to (Y, \tau^*, \sigma^*)$ es bicontinua, entonces $h : (X, \tau \vee \sigma) \to (Y, \tau^* \vee \sigma^*)$ es continua.*

Demostración. Sabemos que la familia $B = \{U \cap V : U \in \tau^*, V \in \sigma^*\}$ es una base para la topología $\tau^* \vee \sigma^*$. Tomemos $U \in \tau^*$ y $V \in \sigma^*$, entonces $h^{-1}(U \cap V) = h^{-1}(U) \cap h^{-1}(V)$. Como h es bicontinua, el conjunto $h^{-1}(U) \cap h^{-1}(V)$ es abierto en $(X, \tau \vee \sigma)$. □

Proposición 3.2.3. *Sea el biespacio C-compacto (X, τ, σ). Si h es una función bicontinua de (X, τ, σ) sobre el biespacio (Y, τ^*, σ^*), entonces (Y, τ^*, σ^*) es C-compacto.*

Teorema 3.2.4. *(Romaguera, Sanchis) Un grupo paratopológico T_0 es C-compacto si, y sólo si, es un grupo topológico pseudocompacto.*

Demostración. Sea (G, τ) un grupo paratopológico T_0 C-compacto. Por definición, $f(G)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ para cada $f \in C(G, \tau \vee \tau^{-1})$. Lo anterior implica que el grupo topológico $(G, \tau \vee \tau^{-1})$ es pseudocompacto. Por el teorema 3.1.1, (G, τ) es C-compacto dado que $\tau \vee \tau^{-1} = \tau$. La función identidad es un isomorfismo continuo de $(G, \tau \vee \tau^{-1})$ sobre (G, τ). Se sigue del teorema 3.1.2 y de la pseudocompacidad de $(G, \tau \vee \tau^{-1})$ se deduce que (G, τ) es un grupo topológico pseudocompacto.

Recíprocamente, supongamos que (G, τ) es un grupo topológico pseudocompacto. En consecuencia, $\tau = \tau^{-1}$. La proposición 3.2.1 implica que (G, τ) es C-compacto. □

Teorema 3.2.5. *Un grupo paratopológico (G, τ) es C-compacto si, y sólo si, G es un grupo topológico tenuemente compacto.*

Demostración. Supongamos que (G, τ) es C-compacto. Sea $\pi\colon G \to T_0(G)$ el homomorfismo cociente. Definamos $\pi(\tau) = \{\pi(U) : U \in \tau\}$. En consecuencia, $T_0(G) = (G/K, \pi(\tau))$. Tenemos que $\pi\colon (G, \tau, \tau^{-1}) \to (G/K, \pi(\tau), \pi(\tau)^{-1})$ es una función bicontinua. Por la Proposición 3.2.3, $(T_0(G), \pi(\tau))$ es un grupo paratopológico T_0 y C-compacto. Por la Proposición 3.2.4 tenemos que $T_0(G)$ es un grupo topológico pseudocompacto. La Proposición 2.3.4 dice que G es tenuemente compacto si, y sólo si, $T_0(G)$ es tenuemente compacto. Concluimos que G es tenuemente compacto. Además, el Corolario 2.3.3 implica que G es un grupo topológico.

Ahora, supongamos que G es un grupo topológico tenuemente compacto. En consecuencia, $\tau = \tau^{-1} = \tau \vee \tau^{-1}$. Sea $f\colon (G, \tau) \to \mathbb{R}$ una función continua. Por el teorema 2.3.2, existe una función continua $g\colon T_0(G) \to \mathbb{R}$ tal que $f = g \circ \pi$, donde $\pi\colon G \to T_0(G)$ es el homomorfismo cociente. Como G es un grupo topológico, $T_0(G)$ también es un grupo topológico T_0 y, por lo tanto Tychonoff. La compacidad tenue de G implica que $T_0(G)$ es un grupo topológico pseudocompacto. Se sigue de la proposición 3.2.1 que $f(G) = g(\pi(G))$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Hemos probado que G es C-compacto.

□

Corolario 3.2.6. *El producto de grupos paratopológicos C-compactos es C-compacto.*

La demostración de este resultado se obtiene como consecuencia del teorema anterior y el Teorema 2.3.8.

Bibliografía

[1] O.T. Alas, M. Sanchis, Countably compact paratopological groups, Semigroup Forum 74 (2007) 423–438.

[2] Arhangel'skii, A. V., On topological and algebraic structure of extremally disconnected semitopological groups, *Comment. Math. Univ. Carolin.* **41** no. 4 (2000), 803–810.

[3] Arhangel'skii, A. V., Topological invariants in algebraic environment, In: *Recent Progress in General Topology II*, M. Hušek and J. van Mill, Eds., pp. 1–57, North-Holland, Amsterdam 2002.

[4] Arhangelskii, A. V. y M. Husek, Extensions of topological and semitopological groups and the product operation, *Comment. Math. Univ. Carolin.* **42** no. 1 (2001), 173–186.

[5] Arhangel'skii, A. V. y E. A. Reznichenko, Paratopological and semitopological groups versus topological groups, *Topol. Appl.* **151** (2005), 107–119.

[6] Arhangel'skii, A. V. y M. G. Tkachenko, *Topological groups and related structures. An introduction.* Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 1070 páginas, por aparecer (2007).

[7] A.V. Arhangel'skii, M.G. Tkachenko, Topological Groups and Related Structures, Atlantis Studies in Mathematics, Vol. I, Atlantis Press/World Scientific, Paris-Amsterdam, 2008.

[8] Banakh, T. y O. Ravsky, On subgroups of saturated or totally bounded paratopological groups, *Algebra Discrete Math.* no. 4 (2003), 1–20.

[9] Berglund, J., H. Junghenn y P. Milnes, *Compact right topological semigroups and generalizations of almost periodicity*, Lecture Notes in Math., V. 663 Springer-Verlag, Berlin 1978.

[10] Bokalo, B. y I. Guran, Sequentially compact Hausdorff cancellative semigroup is a topological group, *Mat. Studii* **6** (1996), 39–40.

[11] Bouziad, A., The Ellis theorem and continuity in groups, *Topol. Appl.* **50** (1993), 73–80.

[12] Bouziad, A., Every Čech-analytic Baire semitopological group is a topological group, *Proc. Amer. Math. Soc.* **24** no. 3 (1998), 953–959.

[13] W. W. Comfort and Kenneth A. Ross, Pseudocompactness and uniform continuity in topological groups, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 16, No. 3, 1966.

[14] Dieudonné, J., On topological groups of homeomorphisms, *Amer. J. Math.* **70** (1948), 659–680.

[15] Ellis, R., A note on the continuity of the inverse, *Proc. Amer. Math. Soc.* **8** (1957), 372–373.

[16] Ellis, R., *Lectures on Topological Dynamics*, Benjamin, New York 1969.

[17] R. Engelkig, General Topology, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[18] S. García-Ferreira, S. Romaguera and M. Sanchis, Bounded subsets and Grothendieck's theorem for bispaces, Houston Journal of Mathematics, Volume 25, No. 2, (1999).

[19] S. García-Ferreira and A. García-Maynez, On weakly-Pseudocompact Spaces, Vol. 20, No. 1, Houston Journal of Mathematics, 1994.

[20] Guran, I. I., Some open problems in the theory of topological groups and semigroups, *Mat. Studii* **10** no. 2 (1998), 223–224.

[21] Heath, R. W., Some non-metric, first countable, cancellative topological semigroups that are generalized metric spaces, *Topol. Appl.* **44** (1992), 167–173.

[22] Hernández, C., Condensations of Tychonoff universal topological algebras, *Comment. Math. Univ. Carolin.* **42** no. 3 (2001), 529–533.

[23] Hernández, C. y M. G. Tkachenko, Three examples of pseudocompact quasitopological groups, *Topol. Appl.*, Por aparecer.

[24] Hernández, S., M. Sanchis y M. Tkachenko, Bounded sets in spaces and topological groups, *Topology Appl.* **101** (2000), 21–43.

[25] Hindman, N., Ultrafilters and combinatorial number theory, *Lecture Notes in Math.* **751** (1979), 49–184.

[26] J. L. Kelley, General Topology, Springer Verlag, New York, 1955.

[27] Korovin, A. V., Continuous actions of pseudocompact groups and axioms of topological group, *Comment. Math. Univ. Carolin.* **33** (1992), 335–343.

[28] H.-P. A. Künzi, J. Marín, and S. Romaguera, Quasi-Uniformities on Topological Semigroups and Bicompletion, Vol. 62 (2001).

[29] Lie, S. y F. Engel, *Theorie der Transformationsgruppen*, Leipzig, Teubner 1, 2, 3.

[30] Montgomery, D., Continuity in topological groups, *Bull. Amer. Math. Soc.* **42** (1936), 879–882.

[31] Mukherjea, A. y N. A. Tserpes, A note on countably compact semigroups, *J. Austral. Math. Soc.* **13** (1972), 180–184.

[32] Papazyan, T., Extremal topologies on a semigroup, *Topol. Appl.* **39** no. 3 (1991), 229–243.

[33] Peter, F. y H. Weyl, Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuerlichen Gruppen, *Math. Ann.* **97** (1927), 737–755.

[34] L.S. Pontryagin, Continuous Groups, third edition, "Nauka", Moscow 1973.

[35] O.V. Ravsky, (2−)Pseudocompact paratopological groups that are topological, http://arxiv.org/abs/1003.5343 (28 de Marzo de 2010).

[36] O.V. Ravsky, Paratopological groups 1, Matematychni Studii 16 (2001), No. 1, 37–48.

[37] Ravsky, O. V., Paratopological groups 2, *Mat. Studii* **17** no. 1 (2002), 93–101.

[38] Ravsky, O. V., *Topological and algebraic properties of paratopological groups*, Ph.D. Thesis , Lviv University, Lviv 2002 (en ukraniano).

[39] Ravsky, O. V., An example of a Hausdorff countably compact paratopological group which is not a topological group, in: *IVth Internat. Algebraic Conf. in Ukraine*, August 4–9, 2003, Lviv.

[40] Reznichenko, E. A., Extensions of functions defined on products of pseudocompact spaces and continuity of the inverse in pseudocompact groups, *Topol. Appl.* **59** (1994), 233–244.

[41] S. Romaguera and M. Sanchis, Continuity of the Inverse in Pseudocompact Paratopological Groups, Algebra Colloquium 14, (2007).

[42] Romaguera, S. y M. Sanchis y M. Tkachenko, Free paratopological groups, *Topology Proc.* **27** no. 2 (2003), 613–641.

[43] S. Romaguera and M. Sanchis, Totally Bounded Quasi-Uniformities and Pseudocompactness of Bispaces, Monatsh. Math. 138, 289-305 (2003).

[44] I. Sánchez, Grupos paratopológicos, Universidad Autónoma Metropolitana, 2013.

[45] I. Sánchez, Subgroups of products of paratopological groups, Topology and its Applications 163 (2014), 160-173.

[46] Sanchis, M. y M. Tkachenko, Totally Lindelöf paratopological groups, 23 páginas, Enviado.

[47] Sanchis, M. y M. Tkachenko, Recent progress in paratopological groups, *Quaderni Math.* (2012)

[48] Sergio Salbany, Bitopological Spaces, Compactifications and Completions, Mathematical Monographs of the University of Cape Town, No. 1, 1974.

[49] Tkachenko, M. G., *Paratopological and semi topological groups vs topological groups* in Recent Progress in General Topology III, Elsevier, to appear.

[50] Wallace, A. D., The structure of topological semigroups, *Bull. Amer. Math. Soc.* **61** (1955), 95–112.