



**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA**

**FACULTAD DE CIENCIAS DE LA ELECTRÓNICA**

**MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA ELECTRÓNICA  
OPCIÓN EN AUTOMATIZACIÓN**

**“Control adaptable de fricción para robots manipuladores” \***

# **T E S I S**

Presentada para obtener el título de:  
**Maestro en Ciencias de la Electrónica**

Presenta:

**Ing. Ernesto Daniel Rodríguez Hernández\***

Directores:

Dr. Fernando Reyes Cortés (MCEA-FCE-BUAP)

Dra. María Aurora Diozcora Vargas Treviño (MCEA-FCE-BUAP)

**Puebla, México**

**Octubre 2021**

\*BECARIO CONACYT



# Resumen

En este trabajo de tesis se describen algunos avances en el estudio de fricción, el cual es un fenómeno naturalmente presente en todos los sistemas con partes en movimiento, produce una contribución considerable al desempeño y comportamiento de robots manipuladores. Se presentan algunos de los métodos clásicos para el modelado de fricción en robots manipuladores, así como algunas mejoras a dichos modelos clásicos, además de proponer nuevos modelos estáticos de fricción orientados a compensación de fricción en robots manipuladores. Se presenta un breve estudio de los robots manipuladores como modelos dinámicos junto con el método de moldeo de energía para diseño de leyes de regulación enfocadas a control de posición, proponiendo algunas leyes de control saturado novedosas. Se describe el procedimiento para convertir las leyes de control saturado propuestas en este trabajo en modelos de fricción de ganancias constantes y sus ventajas con respecto a los modelos convencionales documentados en la literatura. Finalmente se propone un esquema de regulación para robots manipuladores que incluye una componente de compensación adaptable de par disipado por fricción con su respectivo análisis y demostración de estabilidad según Lyapunov. Los resultados de la investigación para este trabajo de tesis fueron documentados en los artículos *Nuevo modelo de fricción para robots manipuladores* publicado en el congreso ELECTRO 2020, y el artículo *Nuevo modelo de fricción basado en funciones hiperbólicas* publicado en el congreso MECAMEX 2020.



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>Introducción</b>	<b>VII</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Fenómeno de fricción . . . . .	1
1.2. Modelado dinámico de robots manipuladores . . . . .	1
1.2.1. Propiedades matemáticas de los robots manipuladores . . . . .	3
1.3. Efecto Stribeck . . . . .	4
1.4. Modelo de fricción clásico . . . . .	4
1.5. Modelo de fricción de Dahl . . . . .	5
1.6. Modelo de fricción de LuGre . . . . .	6
1.7. Identificación paramétrica . . . . .	7
<b>2. Análisis de modelos de fricción</b>	<b>9</b>
2.1. Propiedades del modelo de fricción de LuGre . . . . .	9
2.1.1. Propiedad 1: Función acotada . . . . .	9
2.1.2. Propiedad 2: Estado interno disipativo . . . . .	10
2.1.3. Propiedad 3: Disipatividad entrada-salida con $\sigma_1$ constante . . . . .	11
2.1.4. Propiedad 4: Disipatividad entrada/salida con velocidad dependiente $\bar{\sigma}_1(v)$ . . . . .	11
<b>3. Diseño de un nuevo modelo de fricción para robots manipuladores</b>	<b>15</b>
3.1. Introducción . . . . .	15
3.1.1. Mejora de modelos clásicos de fricción . . . . .	16
3.2. Propuesta inicial de un modelo de fricción estático (Modelo A) . . . . .	17
3.3. Modelo de fricción mejorado (modelo B) . . . . .	19
3.4. Propuesta de un nuevo modelo de fricción C . . . . .	22
3.4.1. Sintonía de ganancias del modelo de fricción C . . . . .	23
3.5. Péndulo robot de 1GDL con modelo de fricción . . . . .	28
3.6. Cinemática directa del péndulo robot . . . . .	28
3.6.1. Simulación de péndulo robot . . . . .	30
3.6.2. Simulación del modelo de fricción clásico en el péndulo robot . . . . .	31
3.6.3. Simulación del modelo de fricción de LuGre en el péndulo robot . . . . .	33

3.7.	Resultados Experimentales (modelos A y B) . . . . .	34
3.7.1.	Análisis de resultados experimentales (modelos A y B) . . . . .	34
3.8.	Resultados experimentales (modelo C) . . . . .	37
3.8.1.	Análisis de resultados experimentales (modelo C) . . . . .	38
<b>4.</b>	<b>Diseño de algoritmos de control para robots manipuladores</b>	<b>41</b>
4.1.	Introducción . . . . .	41
4.2.	Control de posición en robots manipuladores . . . . .	41
4.2.1.	Diseño de leyes de control . . . . .	42
4.2.2.	Diseño de leyes de control mediante el método de moldeo de energía	43
4.3.	Propuestas de leyes de control . . . . .	44
4.3.1.	Propuesta de ley de control 1 . . . . .	45
4.3.2.	Propuesta de ley de control 2 . . . . .	46
4.3.3.	Propuesta de ley de control 3 . . . . .	47
4.4.	Análisis de propuestas de algoritmos de control . . . . .	50
4.5.	Análisis de estabilidad de leyes de control para robots manipuladores .	51
4.5.1.	Análisis de estabilidad de Lyapunov . . . . .	54
4.6.	Resultados experimentales . . . . .	60
<b>5.</b>	<b>Control adaptable de robots manipuladores</b>	<b>65</b>
5.1.	Diseño de algoritmo de compensación de fricción adaptable . . . . .	65
5.2.	Diseño de algoritmos de regresión . . . . .	67
5.2.1.	Obtención del gradiente . . . . .	68
5.3.	Simulación en MATLAB . . . . .	70
5.3.1.	Resultados de simulación . . . . .	71
5.4.	Análisis de estabilidad . . . . .	74
5.4.1.	Dinámica del robot . . . . .	74
5.4.2.	Estabilidad de Lyapunov . . . . .	75
5.4.3.	Derivada de Lyapunov . . . . .	76
	<b>Conclusiones</b>	<b>81</b>
5.5.	Trabajo a futuro . . . . .	82
	<b>Bibliografía</b>	<b>83</b>

# Introducción

Los robots manipuladores seriales son sistemas articulados que pueden analizarse desde su modelo dinámico. El modelo dinámico de un robot manipulador permite el estudio del sistema completo, pues describe a grandes rasgos su respuesta ante una entrada conocida facilitando el diseño de su controlador. El control de robots manipuladores implica conocer a profundidad los fenómenos físicos que están implicados en el comportamiento dinámico del sistema, tales como pares inerciales, pares gravitacionales, fricción, etc.

El fenómeno de fricción es un efecto disipativo que convierte la energía mecánica en energía térmica e introduce una componente de amortiguamiento que modela la forma de la respuesta transitoria. Este fenómeno se ha representado por mucho tiempo a través de los modelos clásicos de fricción viscosa y fricción de Coulomb, estas componentes corresponden únicamente al estado estacionario del modelo de LuGre, el cual describe el comportamiento completo del fenómeno de fricción.

En este trabajo de tesis se profundiza en los aspectos relevantes del fenómeno de fricción ya mencionados para implementarlos en un nuevo modelo, el cual represente de forma precisa los efectos de la disipación de energía mecánica de un robot manipulador. El objetivo principal es lograr que este nuevo modelo sea competitivo con el modelo de fricción de LuGre, el cual es considerado actualmente como el modelo de fricción publicado más completo.

## Justificación

Los robots manipuladores como objetos de estudio en control automático, ofrecen un amplio espectro en la formulación de problemas teóricos y prácticos, debido a su naturaleza no lineal y multivariable de su comportamiento dinámico.

A pesar de una gran cantidad de trabajos científicos en la literatura sobre algoritmos de control de robots manipuladores, la mayoría de esos trabajos ilustra sus resultados a través de simulaciones [1]-[6].

Las simulaciones son importantes y flexibles durante las primeras etapas en el diseño

de algoritmos de control; sin embargo, estos resultados son generalmente incompletos, debido que desprecian aspectos prácticos tales como dinámica de las articulaciones del robot, ruido en los sensores, fenómenos de fricción, etc. De ahí que, sus resultados tienen valor limitado.

Hay pocos trabajos que validan sus desarrollos teóricos con resultados experimentales [5]-[8]. Esta problemática se debe a:

- Falta de un adecuado sistema experimental (con la instrumentación necesaria para el registro de variables de estado y pares aplicados).
- Dificultad que presenta obtener el modelo exacto del robot manipulador. Evidentemente, lo anterior involucra el modelo de fricción.

Por otro lado, la validación experimental de algoritmos de control asegura su potencial éxito en el mundo real de las aplicaciones, de esta forma el desarrollo de un sistema experimental es un paso esencial para medir el desempeño de nuevos y existentes algoritmos de control.

Actualmente, en el campo científico el número de evaluaciones experimentales con robots manipuladores en tiempo real ha ido aumentando (ver [7]-[9]), donde han presentado estudios de evaluación comparativa entre diversos controladores con robots manipuladores). Sin embargo, aun persiste el problema de modelado y compensación de fricción.

## Objetivos

Los objetivos planteados para el presente trabajo de tesis son los siguientes:

### Objetivo general:

- Este proyecto tiene como objetivo fundamental diseñar y desarrollar un esquema de control de posición con compensación de fricción de robots manipuladores.

### Objetivos particulares

- O<sub>1</sub>:** Seleccionar el modelo dinámico de fricción más adecuado de acuerdo al estado del arte en fricción de robots manipuladores (tribología).
- O<sub>2</sub>:** Diseñar un esquema de control con compensación de fricción, manteniendo las ganancias constantes del esquema de control.
- O<sub>3</sub>:** Generalizar el esquema de control con compensación de fricción y ganancias constantes, hacia un esquema de control con compensación de fricción y ganancias variables.

- O<sub>4</sub>**: Obtener la versión adaptable de fricción del esquema de control con ganancias variables.
- O<sub>5</sub>**: Análisis de robustez del esquema de control con compensación de fricción (incluyendo las versiones con ganancias constantes y variables, así como la versión adaptable).
- O<sub>6</sub>**: Publicación de los resultados de tesis en revista (arbitrada/indexada) y/o congreso arbitrado.

## Contribuciones

La principal contribución de este trabajo es la ley de control para robots manipuladores con compensación de fricción adaptable. Como subproducto del diseño y desarrollo de los algoritmos de control con compensación de fricción adaptable, se realizaron múltiples propuestas de modelos de fricción similares a los modelos clásicos con la diferencia principal de estar estructurados como funciones continuas, favoreciendo el análisis de estabilidad. Se documentaron técnicas de mejora a modelos de fricción clásicos existentes. Una aportación destacable de este trabajo es la propuesta de 2 leyes de control saturado para robots manipuladores y su respectivo análisis de estabilidad, así como una breve descripción del método empleado para generar modelos de fricción a partir de leyes de control del tipo saturado. El modelo de control con compensación de fricción incluye un análisis detallado de estabilidad según Lyapunov y el método empleado en el diseño de dicha ley de control. Los resultados generados a partir de la investigación relacionada a este trabajo de tesis se encuentra publicada en los artículos de congreso incluidos en la sección de anexos de este documento.



# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Fenómeno de fricción

Se conoce como fricción al efecto físico que se opone al movimiento (en el caso de los robots manipuladores este fenómeno se presenta en el movimiento de sus articulaciones), dicho fenómeno disipa la energía cinética y transforma la energía mecánica en energía térmica, provocando efectos negativos sobre la eficiencia del movimiento en motores y sistemas mecánicos [10].

La fricción se encuentra en todos los sistemas mecánicos y su aportación al modelo de energía de un Robot manipulador es relevante para el comportamiento final del sistema, ya que al incluir un modelo matemático que describa este fenómeno de manera fiel a la realidad mejora el desempeño de los algoritmos de control, y a su vez, permite la creación de sistemas más robustos y precisos.

### 1.2. Modelado dinámico de robots manipuladores

El modelo dinámico de un robot manipulador está formado a partir de ecuaciones diferenciales, que describen su comportamiento y parámetros físicos, tales como efectos inerciales, fuerzas centrípetas, par gravitacional, entre otras.

El mejor método para formar el modelo dinámico es mediante las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange, las cuales traducen los parámetros de un robot y su dinámica ecuaciones sencillas que, además, facilitan el análisis y diseño de algoritmos de control [11].

El Lagrangiano  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  de un robot manipulador se define como la diferencia entre la energía cinética  $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  y la energía potencial  $\mathcal{U}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ :

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}) \quad (1.1)$$

donde  $\mathbf{q}$  y  $\dot{\mathbf{q}}$  representan los vectores de posición y velocidad articular respectivamente. La energía cinética  $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  es dependiente de la posición y velocidad articular, mientras que la energía potencial  $\mathcal{U}(\mathbf{q})$  solo depende de la posición. Las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange que definen el modelo dinámico de un robot manipulador de  $n$  grados de libertad están dadas por:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \quad (1.2)$$

El modelo dinámico de un robot manipulador proporciona una representación completa de la fuerza que es proporcionada a los servomotores y el movimiento de los elementos rígidos del motor. Este método, posee la ventaja con respecto a otros métodos de desarrollarse de forma idéntica sin importar las coordenadas de referencia elegidas para el estudio del sistema [12].

Las ecuaciones de Euler- Lagrange para un sistema robótico de  $n$  grados de libertad posee la siguiente estructura:

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\tau}_f(\dot{\mathbf{q}}) \quad (1.3)$$

donde:

- $M(\mathbf{q})$  es la matriz de inercias,
- $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$  es la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis,
- $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  es el vector de pares gravitacionales,
- $\boldsymbol{\tau}_f(\dot{\mathbf{q}})$  es el vector de par de fricción.

El modelo dinámico de un robot manipulador de  $n$  grados de libertad con eslabones rígidos conectados por articulaciones libres de elasticidad en cadena cinemática abierta está dado por:

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \boldsymbol{\tau}_{fr}(\dot{\mathbf{q}}) \quad (1.4)$$

donde

- $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de pares aplicados,
- $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de posiciones articulares o coordenadas generalizadas,
- $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de velocidades articulares,
- $\ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de aceleraciones articulares,
- $M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de inercia, simétrica y definida positiva,

- $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis,
- $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de pares gravitacionales,
- $\boldsymbol{\tau}_{fr}(\dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de pares de fricción.

La ecuación (1.4) describe la dinámica general de un robot manipulador además de incluir los efectos del par gravitacional y par disipado por fricción. La estructura del modelo dinámico mostrada anteriormente se ajusta a los robots de estudio tanto físicos como de simulación empleados en este trabajo de tesis, por lo que el modelo dinámico aquí mostrado es la base del análisis teórico en el diseño de algoritmos de control para todos los casos de estudio aquí presentados.

### 1.2.1. Propiedades matemáticas de los robots manipuladores

Los robots manipuladores de articulaciones rígidas y servoactuadores rotacionales poseen las siguientes características [13]:

**Propiedad 1.** La matriz  $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es simétrica, definida positiva, y satisface:

$$M(\mathbf{q}) = M^T(\mathbf{q}); M(\mathbf{q}) > 0; \mathbf{x}^T M(\mathbf{q}) \mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{q}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \mathbf{x}^T M^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{q}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (1.5)$$

**Propiedad 2.** Para robot compuestos únicamente por actuadores rotacionales, existe una constante positiva  $\beta_M$  que satisface:

$$\|M(\mathbf{q})\| < \lambda_M^{\max} < \beta_M. \quad (1.6)$$

**Propiedad 3.** Si  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ , entonces la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis satisface  $C(\mathbf{q}, \mathbf{0}) = 0 \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ .

**Propiedad 4.** La derivada temporal de la matriz de inercias  $\dot{M}(\mathbf{q})$  es una matriz simétrica que satisface:

$$\dot{M}(\mathbf{q}) = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \quad (1.7)$$

**Propiedad 5.** La derivada temporal de la matriz de inercia  $\dot{M}(\mathbf{q})$  y la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  satisfacen:

$$\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left[ \dot{M}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \dot{\mathbf{q}} = 0, \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n. \quad (1.8)$$

Por lo tanto, la matriz  $\dot{M}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  es una matriz antisimétrica.

**Propiedad 6.** Para robots compuestos únicamente por articulaciones rotacionales, existe una constante positiva  $k_c > 0$ , que satisface:

$$\|C(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \mathbf{y}\| \leq k_c \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n. \quad (1.9)$$

### 1.3. Efecto Stribeck

El efecto Stribeck [3], es un modelo estático incluido en la representación más completa del efecto de fricción. La representación del fenómeno disipativo de fricción en las articulaciones de un robot manipulador se expresan matemáticamente mediante la siguiente ecuación:

$$\tau_{f_i} = \sigma_0 \dot{q}_i + \text{signo}(\dot{q}_i) [\tau_{c_i} + (\tau_{s_i} - \tau_{c_i}) e^{-\left| \frac{\dot{q}_i}{\tau_{s_i}} \right|^\delta}] \quad (1.10)$$

donde:

- $\tau_{f_i}$  es el par de fricción,
- $\sigma_0$  es el coeficiente de rugosidad de las micro asperezas,
- $\dot{q}_i$  es la velocidad articular del eslabón  $i$ ,
- $\tau_{c_i}$  es el coeficiente de fricción de Coulomb del eslabón  $i$ ,
- $\tau_{s_i}$  es el coeficiente de fricción estática del eslabón  $i$ ,
- $\delta$  es un parámetro de diseño que modifica la forma de la curva de Stribeck.

### 1.4. Modelo de fricción clásico

El modelo de fricción clásico [14] es ampliamente conocido y está documentado por diversos autores. Este modelo incorpora las ecuaciones de fricción viscosa:

$$\tau_{f_{b_i}} = b_i \dot{q}_i, \quad (1.11)$$

la fricción de Coulomb

$$\tau_{c_i} = f_{c_i} \text{signo}(\dot{q}_i), \quad (1.12)$$

así como una componente de fricción estática.

$$\tau_{f_{e_i}} = f_{e_i} [1 - |\text{signo}(\dot{q}_i)|] \quad (1.13)$$

Al integrar las ecuaciones (1.11), (1.12) y (1.13) se obtiene un modelo matemático que integra la mayor parte del torque disipado por el fenómeno de fricción, englobando así los aspectos no dinámicos del fenómeno de manera simple y suficientemente precisa para aplicaciones en las que la fricción no sea un factor decisivo en el desempeño del sistema o controlador.

Este modelo es ampliamente utilizado en robótica y control de servomecanismos debido a su simplicidad y estructura estática, lo que a su vez, permite la incorporación

de compensación de fricción directamente; sin embargo, una de las desventajas principales de este modelo es su incapacidad de reproducir el efecto Stribeck y la histéresis característica de la fricción con precisión, por lo que se han propuesto distintos métodos más completos para modelado de fricción.

$$\tau_{f_i} = b_i \dot{q}_i + f_{ci} \text{signo}(\dot{q}_i) + f_{ei} [1 - |\text{signo}(\dot{q}_i)|] \quad (1.14)$$

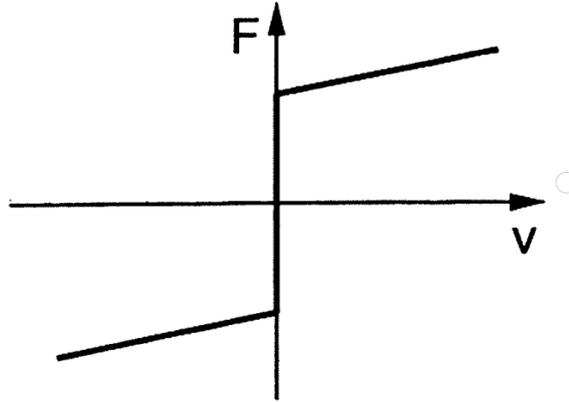


Figura 1.1: Gráfica característica del modelo de fricción clásica.

## 1.5. Modelo de fricción de Dahl

El primer acercamiento al modelado de fricción en servomecanismos fue hecho por Dahl en 1968 [15]. El modelo de fricción de Dahl, comúnmente conocido como *modelo de fricción de rodamiento de bolas*, ofrece una representación general de los efectos de fricción en sistemas mecánicos que muestran un comportamiento con decaimiento lineal similar a lo mostrado en el comportamiento de la fricción de Coulomb.

Dahl logró su hallazgo al reemplazar un péndulo con una masa y una cuerda de piano, las observaciones de este experimento lo condujeron a un modelo de fricción basado en la curva característica del modelo de tensión - deformación. Una forma básica del modelo de Dahl es la función

$$F = F_c (1 - e^{-\sigma_0 |x|/F_c}) \text{signo} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \sigma_0 \left( -\frac{F}{F_c} \text{signo}(v) \right) \quad (1.15)$$

donde  $F$  es la fuerza,  $x$  es el desplazamiento,  $\sigma_0$  es la rigidez y  $F_c$  es la fricción de Coulomb.

Añadiendo a la ecuación  $z = F/\sigma_0$  como variable de estado y aplicando la regla de la cadena se obtiene:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{\sigma_0} \frac{dF}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sigma_0} \frac{dF}{dx} v = v - \frac{\sigma_0}{F_c} |v|z, \quad (1.16)$$

que es la ecuación del modelo de fricción de Dahl. En estado estacionario, el modelo se puede expresar como:

$$F_{ss} = \sigma_0 z_0 = F_c \text{signo}(v). \quad (1.17)$$

El modelo de fricción es un sistema dinámico de primer orden, que incluye a la ecuación de fricción de Coulomb como caso particular (en estado estacionario). Este modelo tiene la desventaja de no incluir el efecto Stribeck ni la histéresis, los cuales son importantes para un modelo del efecto de fricción, por lo que este modelo se considera incompleto.

## 1.6. Modelo de fricción de LuGre

El modelo de fricción de LuGre está dado por [7]

$$\dot{z} = v - \sigma_0 \frac{|v|}{g(v)} z = v - h(v)z, \quad (1.18)$$

$$F = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + f(v), \quad (1.19)$$

donde  $v$  es la velocidad entre los 2 superficies en contacto,  $z$  es el estado de fricción interno, y  $F$  es la fuerza de fricción, Este modelo presenta múltiples ventajas con respecto al modelo de Dahl, pues es modelo de fricción de LuGre, tiene una función dependiente de la velocidad  $g(v)$  en lugar de constante, además de una variable  $\sigma_1$  que representa micro desplazamientos.

El modelo de LuGre es una representación más acertada del comportamiento de la fricción a nivel microscópico e incorpora información sobre la rigidez producida por el fenómeno de fricción.

La Fig. 1.2 muestra el comportamiento típico del modelo de fricción de LuGre, en el cual se observan los efectos de la fricción de Coulomb, la fricción estática, el efecto Stribeck y una región de histéresis.

La estructura del modelo de fricción de histéresis en estado estable corresponde en gran medida a la forma característica de algunos modelos clásicos, con la adición de la región de histéresis. La integración de todos los fenómenos físicos considerados en el modelo de LuGre es lo que lo convierte en uno de los modelos más precisos para compensación de fricción en motores y otros sistemas mecánicos.

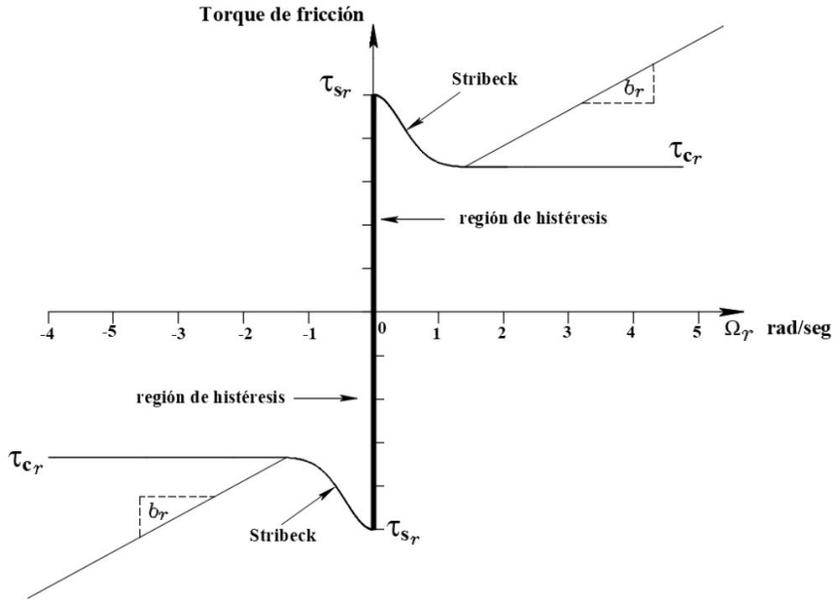


Figura 1.2: Gráfica característica del modelo de LuGre

## 1.7. Identificación paramétrica

El modelo dinámico de un robot manipulador contiene en su estructura los parámetros físicos del sistema que representa tales como, longitud de eslabones, distancia al centro de gravedad, masas, momentos de inercia y coeficientes de fricción.

Los parámetros físicos de un robot comercial normalmente no están disponibles para el usuario, debido a que los fabricantes no revelan información detallada sobre la estructura del robot. Dado que en la mayoría de los casos no es posible desarmar los robots y determinar estos parámetros por medición, se utilizan algoritmos de control adaptables y controles robustos, los cuales se anteponen a las incertidumbres en los parámetros del robot.

El método de identificación paramétrica es una herramienta atractiva para determinar los parámetros dinámicos de robots manipuladores, sobre todo cuando existe dificultad para medirlos directamente. Sin embargo, la naturaleza no lineal del modelo dinámico de robots manipuladores hace que la tarea de identificación paramétrica no sea trivial [16].

Los robots manipuladores pertenecen a una clase de sistemas mecánicos no lineales con una estructura dinámica bien definida. El modelo dinámico de un robot manipulador de  $n$  grados de libertad presenta la propiedad de linealidad con respecto a los parámetros del robot que dependen de masas, momentos de inercias, centros de masa y coeficientes de fricción.

$$\left[ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \phi_{\mathcal{L}}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial \phi_{\mathcal{L}}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right] \boldsymbol{\theta}_\varepsilon = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}). \quad (1.20)$$

En el modelo dinámico de un robot, la fricción se modela generalmente como la combinación de una componente de fricción de Coulomb y una componente de fricción viscosa, por lo tanto, el modelo de fricción clásico es lineal con respecto a los coeficientes de fricción.

$$\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) = \phi_F(\dot{\mathbf{q}}) \boldsymbol{\theta}_F \quad (1.21)$$

donde  $\phi_F$  es una matriz de orden  $n \times 2n$  y  $\boldsymbol{\theta}_F$  es un vector de  $2n \times 1$ , el cual contiene los coeficientes de fricción viscosa y de Coulomb. Por lo que la ecuación toma la forma

$$\left[ \left[ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \phi_{\mathcal{L}}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial \phi_{\mathcal{L}}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right] \phi_F(\dot{\mathbf{q}}) \right] \boldsymbol{\theta}_\varepsilon = \boldsymbol{\tau} \quad (1.22)$$

donde

$$\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\theta}_\varepsilon^T \boldsymbol{\theta}_F^T]^T \quad (1.23)$$

denota el vector de parámetros dinámicos y de fricción del robot manipulador. Finalmente, el modelo dinámico generalizado de un robot manipulador puede expresarse de la siguiente manera para obtener linealidad en los parámetros del robot manipulador.

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) = \Upsilon(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\tau} \quad (1.24)$$

donde  $\Upsilon(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$  es una matriz  $n \times p$  de funciones conocidas,  $\boldsymbol{\theta}$  es el vector  $p \times 1$  que contiene los parámetros del robot y  $p = p_1 + p_2 + 2n$ .

# Capítulo 2

## Análisis de modelos de fricción

En este capítulo, se analizan de manera profunda los algunos de los modelos de fricción publicados (LuGre y Dahl) y sus propiedades [1], [7]. El modelo de Dahl y el modelo de LuGre poseen una estructura similar debido a que LuGre puede entenderse como una extensión del modelo de Dahl con cambios en los elementos microscópicos de la fricción. Por lo tanto, el análisis de propiedades aquí desarrollado aplica a ambos modelos [17].

### 2.1. Propiedades del modelo de fricción de LuGre

Considerando el modelo de LuGre descrito por:

$$\dot{z} = v - \sigma_0 \frac{|v|}{g(v)} z = v - h(v)z, \quad (2.1)$$

$$F = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + f(v), \quad (2.2)$$

considerando  $g(v)$  y  $f(v)$  como

$$g(v) = F_c + (F_s - F_c)e^{-\left|\frac{v}{v_s}\right|^\alpha}, \quad (2.3)$$

$$f(v) = \sigma_2 v \quad (2.4)$$

#### 2.1.1. Propiedad 1: Función acotada

En la ecuación (2.3) se tiene que  $0 < g(v) \leq F_s$ . Por lo que el conjunto  $\Omega = \{z : |z| \leq F_s/\sigma_0\}$  existe y es invariante en el modelo de LuGre. Es decir, si  $|z(0)| \leq F_s/\sigma_0 \Rightarrow |z(t)| \leq F_s/\sigma_0 \quad \forall t \geq 0$ .

Esta propiedad es una consecuencia del hecho de que la derivada temporal de la ecuación cuadrática  $W = z^2/2$  a lo largo de las soluciones de (2.1) está dado por

$$\dot{W} = z \left( v - \sigma_0 \frac{|v|}{g(v)} \right) = |v| |z| \left( \sigma_0 \frac{|z|}{g(v)} - \operatorname{sgn}(v) \operatorname{sgn}(z) \right).$$

Nótese que  $\sigma_0(|z|/g(v)) \geq 0$  y que  $\operatorname{sgn}(v)\operatorname{sgn}(z)$  toman valores de 1 o  $-1$ . Cuando  $\operatorname{sgn}(v)\operatorname{sgn}(z) = -1$ , resulta que  $(\sigma_0(|z|/g(v)) - \operatorname{sgn}(v)\operatorname{sgn}(z))$  es una función positiva mientras que  $\dot{W}$  es semidefinida positiva. Por el contrario, cuando el  $\operatorname{sgn}(v)\operatorname{sgn}(z) = 1$  y  $|z| > g(v)/\sigma_0$ , resulta que  $\dot{W}$  es negativa. Como  $g(v)$  es positivo y acotado por  $F_s$ , es notable que  $\Omega$  es un conjunto invariante de soluciones de (2.1).

Con esta propiedad se concluye que si el estado interno  $z$  se encuentra inicialmente debajo de la cota superior de la función  $g(v)$ , que a su vez se encuentra de bajo la función normalizada  $F_s/\sigma_0$ , entonces el estado permanece acotado, específicamente,  $z(t) \leq F_s/\sigma_0 \forall t \geq 0$ .

### 2.1.2. Propiedad 2: Estado interno disipativo

El mapa  $v \mapsto z$  definido por (2.1) es disipativo con respecto a la función  $W(z(t)) = (1/2)z^2(t)$ , como sigue

$$\int_t^0 z(\tau)v(\tau)d\tau \geq W(z(t)) - W(z(0)), \text{ para todo } t \geq 0. \quad (2.5)$$

Partiendo de la ecuación (2.1) se tiene que

$$zv = z \frac{dz}{dt} + \frac{|v|}{g(v)} z^2 \geq z \frac{dz}{dt}. \quad (2.6)$$

Por lo tanto

$$\int_0^t z(\tau)v(\tau)d\tau \geq \int_0^t z(\tau) \frac{dz(\tau)}{d\tau} d\tau \geq W(t) - W(0) \quad (2.7)$$

$$\int_0^t z(\tau)v(\tau)d\tau \geq \int_0^t z(\tau)dz(\tau) \geq W(t) - W(0). \quad (2.8)$$

Esta propiedad indica que el modelo de LuGre entrada-estado pasivo para todos los valores positivos de los parámetros del modelo. También, es posible caracterizar las condiciones bajo las cuales el mapa de entrada-salida (I/O)  $v \mapsto F$  es también pasiva, por lo que, existe una  $\beta > 0$ , tal que,  $\int_t^0 F_v \geq -\beta$  para todo  $t \geq 0$ .

### 2.1.3. Propiedad 3: Disipatividad entrada-salida con $\sigma_1$ constante

El mapa  $v \mapsto F$ , definido por (2.1) (2.2) tiene la propiedad

$$\int_0^t Fvd\tau \geq W(z(t)) - W(z(0)) + \rho \int_0^t v^2 d\tau \geq -W(z(0)), \text{ for all } t \geq 0, \quad (2.9)$$

Al igual que en el caso anterior, se parte de la desigualdad (2.6), lo que resulta en

$$\int_0^t Fvd\tau \geq \sigma_0 \int_0^t z \frac{dz}{d\tau} d\tau + \sigma_1 \int_0^t \dot{z} \frac{dz}{d\tau} d\tau + \int_0^t f(v) \frac{dz}{d\tau} d\tau \quad (2.10)$$

Donde  $f(v) = \sigma_2 v$ , lo que resulta en

$$\int_0^t Fvd\tau \geq \sigma_0 \int_0^t z dz + \sigma_1 \int_0^t v^2 d\tau + \sigma_2 \int_0^t v dz \quad (2.11)$$

La ecuación (2.9) que implica que el mapa es una entrada estrictamente pasiva con  $\rho = \sigma_2 - \sigma_1(F_s - F_c/F_c) > 0$  y con la función de almacenamiento  $W(z) = (\sigma_0/2)z^2$  solo si

$$\sigma_2 > \sigma_1 \frac{(F_s - F_c)}{F_c}. \quad (2.12)$$

La condición de pasividad (2.12) requiere que el coeficiente de fricción viscosa  $\sigma_2$  sea suficientemente grande. También se tiene una restricción menor cuando  $F_s$  y  $F_c$  son muy cercanos entre sí, sin embargo, dicha restricción se vuelve importante cuando  $F_s$  es significativamente mayor que  $F_c$ .

### 2.1.4. Propiedad 4: Disipatividad entrada/salida con velocidad dependiente $\bar{\sigma}_1(v)$

Suponiendo que  $\bar{\sigma}_1(v)$  satisface las siguientes condiciones:

$$|v|\bar{\sigma}_1(v) < 4g(v) \quad (2.13)$$

$$\bar{\sigma}_1(0) = \sigma_1 \triangleq 2\zeta\sqrt{\sigma_0 m} - \sigma_2 \quad (2.14)$$

Entonces, el mapa  $v \mapsto F$  define un operador de entrada estrictamente pasiva,  $\int_0^t Fvd\tau \geq W(z(t)) - W(z(0)) + \sigma_2 \int_0^t v^2 d\tau$ , para todo  $T \geq 0$ , con la función de almacenamiento  $W(z) = (\sigma_0/2)z^2$ .

Si la función  $\bar{\sigma}_1(v) > 0$  decae exponencialmente, entonces la función:

$$|v|\bar{\sigma}_1(v) > 0 \quad (2.15)$$

es positiva y cóncava.

Debido a que:

$$F_c \leq g(v) \leq F_s \quad \forall v, \quad (2.16)$$

la condición 2.13 se satisface mientras se cumple

$$\max_v \{|v|\bar{\sigma}_1(v)\} < 4F_c. \quad (2.17)$$

La función:

$$\bar{\sigma}_1(v) = \sigma_1 e^{-(v/v_c)^2} \quad (2.18)$$

con:

$$\sigma_0 \triangleq 2\zeta\sqrt{\sigma_0 m} - \sigma_2 \quad (2.19)$$

$$\sigma_0 \triangleq 2\zeta\sqrt{\sigma_0 m} - \sigma_2 \Rightarrow v_c < 4\sqrt{2e}F_c/\sigma_1 \quad (2.20)$$

satisface las condiciones (2.13) y (2.14). Eligiendo el coeficiente de micro-amortiguamiento  $\bar{\sigma}_1(v)$ , es posible obtener un modelo que es pasivo y tiene un buen micro-amortiguamiento. El ratio de transición entre el estado pegado a deslizamiento está gobernado por el parámetro  $v_c$ . Este parámetro puede ser elegido lo suficientemente pequeño para satisfacer:

$$\bar{\sigma}_1(v) = \sigma_1 e^{-(v/v_c)^2} \quad (2.21)$$

y hace variar a  $\bar{\sigma}_1(v)$  lo suficientemente rápido para que el ratio de variación del producto:

$$\bar{\sigma}_1(v)\dot{z} \quad (2.22)$$

está dominado por el ratio de variación de  $\bar{\sigma}_1(v)$ . De ese modo se tiene que:

$$\bar{\sigma}_1(v)\dot{z} \approx \sigma_1\dot{z} \Rightarrow v \approx 0 \Rightarrow \bar{\sigma}_1(v)\dot{z} \approx 0 \Rightarrow v > \epsilon \quad (2.23)$$

El comportamiento local del sistema en fricción está amortiguado, mientras la disipación entrada/salida propia del modelo es recuperada. Note que este comportamiento se mantiene para parámetros arbitrariamente grandes.

Debido al hecho de que el modelo de fricción de LuGre es un caso particular del modelo de Dahl, y que ambos comparten algunas características esenciales como los parámetros  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$  y la variable de estado interna  $z$ , las cuales son prácticamente idénticas en ambos modelos, podemos concluir que el análisis de las propiedades del modelo de LuGre aplica también para el modelo de Dahl, por lo que podemos afirmar que

el modelo de Dahl está acotado, posee un estado interno  $z$  disipativo, y disipatividad entrada-salida.



# Capítulo 3

## Diseño de un nuevo modelo de fricción para robots manipuladores

### 3.1. Introducción

Como se ha mencionado anteriormente, en el modelado dinámico de robots manipuladores es de vital importancia conocer a profundidad todos los fenómenos que influyen en el comportamiento del sistema, de modo que este pueda describirse de forma completa y precisa, permitiendo un control óptimo de cualquier sistema sin importar su configuración geométrica. El fenómeno de fricción representa una aportación notable al comportamiento dinámico final del sistema, pues representa la energía que el robot disipa a través de calor debido al rozamiento de sus partes mecánicas.

Al igual que sucede con la compensación de gravedad, en cual es necesario comprender y modelar adecuadamente el fenómeno (energía potencial) para conseguir una respuesta en estado estable sin oscilaciones; un modelo de fricción completo permite eliminar las vibraciones del robot al alcanzar su posición final, además de mejorar el factor de desempeño del sistema.

De contarse con un modelo exacto del fenómeno de fricción ya sea del tipo dinámico o estático, las aplicaciones tecnológicas representarían una enorme ventaja en aquellos sistemas que requieran una precisión muy alta, o en aquellos donde la fricción sea un problema mayor para su funcionamiento adecuado. En el área de robótica, el uso de un modelo de esta clase es notable y es un problema de alto interés, debido a que existen muchas maneras de abordar una solución, cada una con sus ventajas y desventajas.

Actualmente, en el campo de la robótica es común el uso de modelos estáticos de fricción (en los que se maneja a la fricción como una función dependiente de la velocidad) que describen elementos básicos de este fenómeno como lo son la fricción de Coulomb, la fricción estática, la fricción viscosa, etc. Estos elementos se integran de forma numérica en un controlador y su implementación es sencilla. Cualquier modelo de fricción de esta clase, mejora el desempeño de los algoritmos de control, sin embargo,

como se ha demostrado a través de la investigación, estos modelos son una aproximación muy simplificada de lo que ocurre en el rozamiento de superficies, y se enfoca más en el comportamiento a nivel macroscópico de las superficies de contacto.

Otro punto importante de los modelos estáticos actuales, es el hecho de que son funciones discontinuas debido a la presencia de la función signo, y por lo tanto, estos modelos no son continuamente diferenciales, y no existe una manera formal de demostrar estabilidad de un esquema de control con estas características debido a que se requiere de una función continuamente diferenciable.

### 3.1.1. Mejora de modelos clásicos de fricción

Un método para resolver el problema de los modelos de fricción estáticos diferenciable a trozos debido a la función signo, es sustituir la región cercana a la velocidad cero por una pendiente con la máxima inclinación posible [18]. Para lograr esto, se emplea la función  $\tanh(\Omega v)$  en lugar de la función  $\text{sgn}(v)$ , donde  $\Omega, \gg v \in \mathbb{R}_+$ , por lo que aplicando esta corrección al modelo clásico de fricción se obtiene.

$$F = b\dot{q} + f_c \tanh(\Omega \dot{q}) \quad (3.1)$$

Con el ajuste anterior, la gráfica característica del modelo se modifica, tal como se muestra a continuación

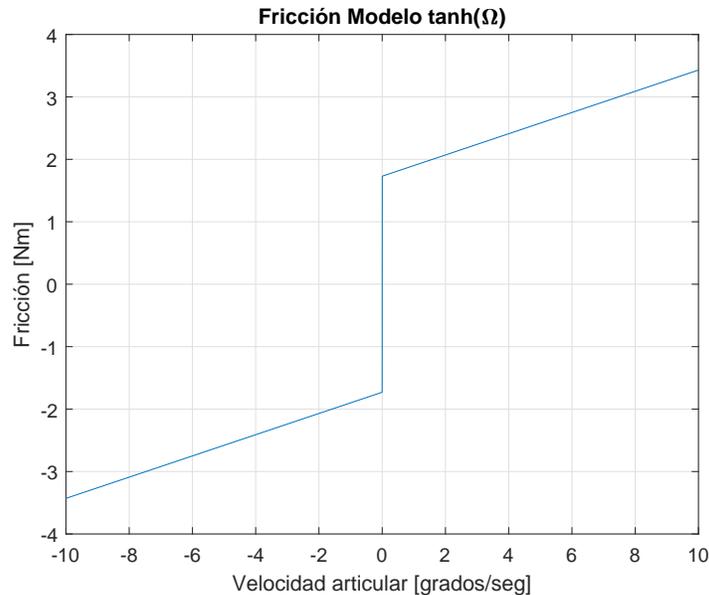


Figura 3.1: Gráfica característica del modelo de fricción clásica mejorado

Con esto se logra tener un modelo continuo y que puede emplearse en análisis de estabilidad con controladores con compensación de fricción. Cualitativamente, ambos modelos son equivalentes (cuando  $\Omega = \infty$ ), sin embargo debe tomarse en cuenta que, si bien este es un resultado que mejora a los modelo de fricción discontinuos, no es una buena solución al problema, principalmente porque representa una carga de recursos mucho mayor en comparación con la función signo hablando de forma numérica y, en algunos casos puede ser contraproducente si esto sobrepasa la capacidad de los recursos del sistema, produciendo retraso en las operaciones matemáticas y errores de cálculo.

### 3.2. Propuesta inicial de un modelo de fricción estático (Modelo A)

Se propone que es posible diseñar un modelo de fricción estático que posea todas las características más importantes del modelo de fricción de LuGre si se encuentra una función tal que, ante una entrada  $v$ , tenga un comportamiento análogo al del modelo de fricción de LuGre; sin embargo, el modelo debe ser continuamente diferenciable para poder emplearse en análisis de estabilidad en controladores con compensación de fricción.

Tomando las características antes mencionadas en consideración, se propuso la siguiente función como un modelo inicial para un robot manipulador de 1GDL:

$$F = f_c \frac{\sinh^2(\delta\dot{q})\tanh(\delta\dot{q})}{1 + \sinh^{2s}(\delta\dot{q})} + b\dot{q} \quad (3.2)$$

donde:

$q$	Posición articular del motor [ $m$ ],
$\dot{q} = \frac{dq}{dt}$	Velocidad articular entre superficies de contacto [ $grad/seg$ ],
$f_c$	Coefficiente de fricción de Coulomb [ $N/m$ ],
$b$	Coefficiente de fricción viscosa [ $N/m$ ],
$\delta$	Coefficiente de disipatividad,
$s$	Coefficiente de Histéresis.

La ecuación (3.2) posee la siguiente curva característica mostrada en la Fig. 3.2, donde puede notarse que se tiene un comportamiento semejante a los modelos clásicos de fricción. Para valores adecuados de  $f_c$ ,  $b$  y  $\alpha$ , se tiene un modelo análogo a un modelo

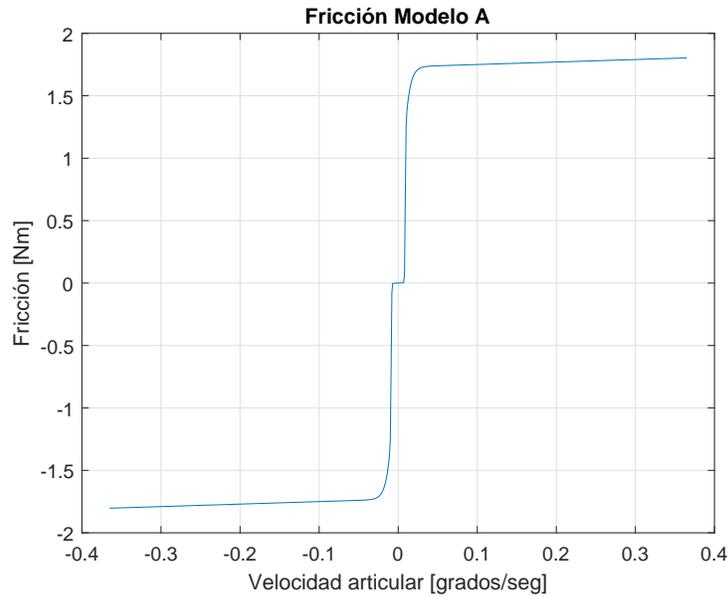


Figura 3.2: Gráfica característica modelo de fricción inicial propuesto

clásico discontinuo del tipo mostrado en la ecuación (3.1).

En este modelo se mejora el desempeño numérico del controlador, pues optimiza los cálculos necesarios para mostrar la estructura deseada, y cuenta con una ventaja importante con respecto a todos los modelos mencionados anteriormente, pues en este modelo se cumple que  $F = 0 \Rightarrow \dot{q} = 0$ , lo cual es un comportamiento real debido a la ley de conservación de la energía, ya que, al no existir una entrada al sistema (a modo de energía cinética), no existe energía disipativa en ese instante de tiempo.

la variable  $\alpha$  de la ecuación (3.2) modifica el ancho de la zona de histéresis y la rapidez con la que la fricción decae al acercarse a cero. Al ajustar la variable  $\alpha$  se obtienen las siguientes curvas características

Eligiendo un valor adecuado para  $\alpha$  genera un resultado más acertado; se propone  $\alpha = 6$  para la mayoría de los motores de transmisión directa.

Este modelo no considera la curva del efecto Stribeck, por lo que no es un modelo de fricción completo, sin embargo, se ha demostrado sus aplicaciones y la ventaja que representa para análisis de estabilidad en robots bajo un esquema de control con compensación de fricción.

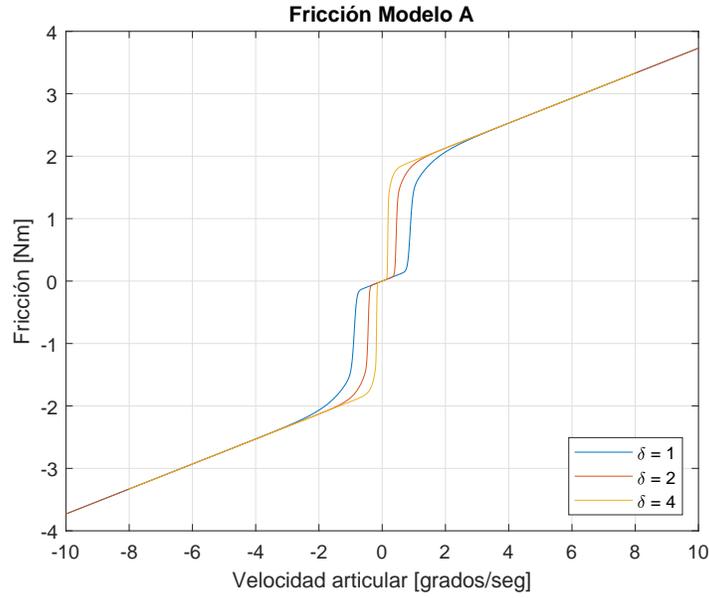


Figura 3.3: Grafica característica de modelo de fricción A con variaciones en  $\delta$ .

### 3.3. Modelo de fricción mejorado (modelo B)

Con base en el modelo mostrado en la ecuación (3.2), se propone un modelo revisado del mismo, que incluya una manera de representar la curva del efecto Stribeck para velocidades positivas y negativas conservando la cualidad de ser un modelo estático. Para lograr mejorar el modelo, se propone emplear una transformación matemáticamente similar empleando la función  $\cosh(\dots)$ , e incluir un nuevo parámetro ( $m$ ) relacionado a la curva del efecto Stribeck.

La ecuación propuesta como nuevo modelo de fricción para un robot de 1GDL es la siguiente

$$F = f_c \frac{\sinh^{2s-1}(\delta\dot{q})\cosh(\delta\dot{q})}{1 + \sinh^{2s}(\delta\dot{q})} + b\dot{q} \quad (3.3)$$

donde

- $q$  Posición articular del motor [ $m$ ],
- $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$  Velocidad articular entre superficies de contacto [ $grad/seg$ ],
- $f_c$  Coeficiente de fricción de Coulomb [ $N/m$ ],
- $b$  Coeficiente de fricción viscosa [ $N/m$ ],
- $\delta$  Coeficiente de disipatividad.

$s$  Coeficiente de efecto Stribeck

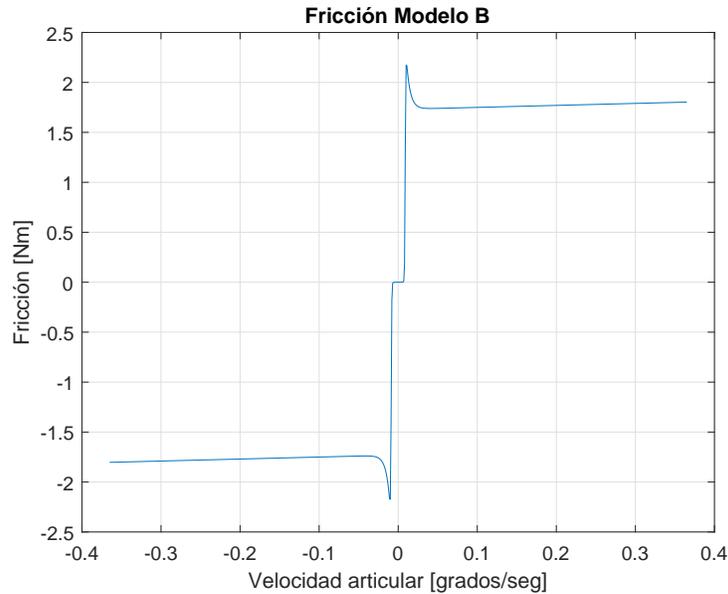


Figura 3.4: Gráfica característica modelo B.

La ecuación (3.3) posee la siguiente gráfica característica mostrada en la Fig. 3.4 donde es notable que el coeficiente de Stribeck ( $s$ ) determina la forma que tendrá la fricción cuando se alcance el punto máximo de la misma antes de salir de la región cercana a  $\dot{q} = 0$ , en la que luego será sustituida por la fricción viscosa  $b$  para velocidades superiores.

En este modelo, al igual que en el modelo descrito por la ecuación (3.2), se cuenta con un coeficiente de disipatividad, que desempeña el mismo papel y además define la forma de la región de histéresis, en la cual el comportamiento cualitativo de la fricción es estrictamente microscópico, tal como se muestra a continuación.

Este modelo, cuenta con todas las características conocidas más relevantes de la fricción a nivel macroscópico y microscópico (fricción viscosa, fricción de Coulomb y curva de efecto Stribeck), por lo que se puede considerar un modelo estático de fricción completo y adecuado para emplearse en un control con compensación de fricción.

Nótese que si se elige un parámetro  $\delta \gg \dot{q}$ , el modelo resultante es equivalente al modelo clásico con fricción estática.

Al ser una función dependiente de la velocidad, este modelo se puede implementar de forma numérica en un controlador. El cálculo numérico para cada instante de tiempo se puede realizar de forma eficiente, ya que no se introduce ningún elemento demasiado complicado, y lo más importante, se trata de una función continuamente diferenciable

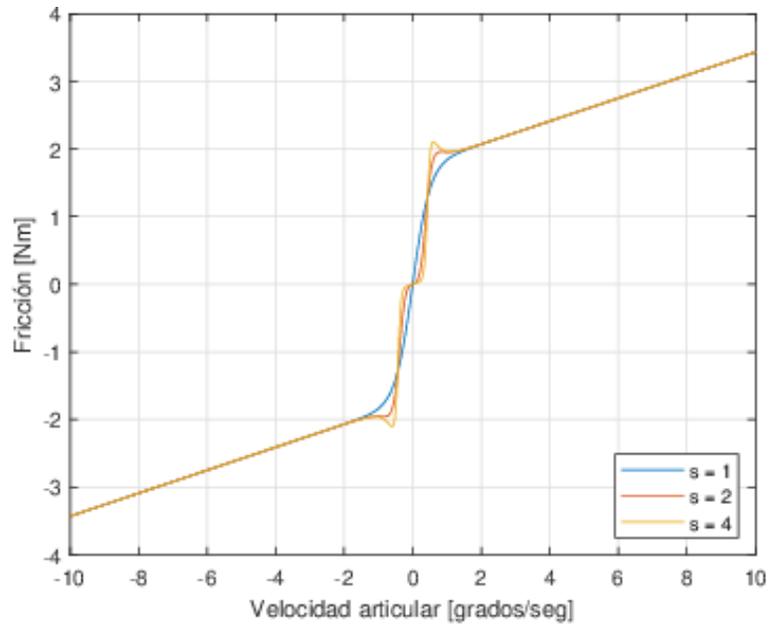


Figura 3.5: Gráfica característica de modelo de fricción B con variaciones en  $s$ .

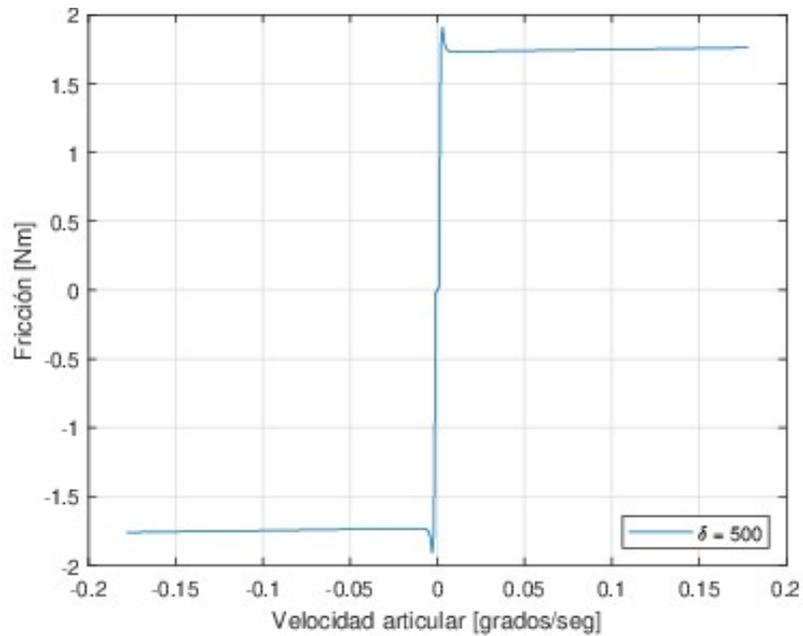


Figura 3.6: Gráfica de modelo B con  $\delta = 500$ .

en cualquier momento, por lo que permite el análisis de estabilidad de un controlador de manera formal y elegante.

A nivel experimental, la histéresis propia de la fricción aparece de manera natural en el modelo y proporciona una idea clara del comportamiento de la fricción de un motor (o robot) a velocidades bajas. Una posible mejora a este modelo, sería la inclusión

de un modelo de histéresis que funcione a velocidades bajas, el cual permita diseñar simulaciones más cercanas a la realidad, sin embargo, a nivel práctico, este modelo es suficiente para representar la fricción en grado completo.

Debido a su sencillez de ajuste y simplicidad, podemos afirmar que se trata de un modelo competitivo incluso con aquellos modelos del tipo dinámicos, como lo es el caso del modelo de LuGre. Una de las principales razones de mayor peso para emplear un modelo de fricción dinámico, es lograr representar en su totalidad las características más importantes del fenómeno de fricción, sin embargo, esto carece de sentido si se logra esto mediante un modelo estático debido a que, la principal ventaja de usar un modelo estático es que no se incrementa el orden de la ecuación característica de un sistema, lo que facilita el análisis matemático y la implementación numérica (de la cual se hablará en capítulos posteriores).

### 3.4. Propuesta de un nuevo modelo de fricción C

Partiendo de la propuesta del uso de funciones continuas (como lo son las funciones trigonométricas o hiperbólicas), podemos afirmar que es posible diseñar una amplia familia de modelos de fricción basado en una adecuada combinación de funciones hiperbólicas expresando matemáticamente la fricción como una función estática dependiente de la velocidad, que a su vez es una función continua. Con estas consideraciones, se diseñó una nueva propuesta de modelo de fricción, el cual conserva las ventajas de ser una función continua e incluir aspectos relevantes de modelos de fricción dinámicos (efecto Stribeck y región de histéresis).

El nuevo modelo de fricción propuesto es el siguiente:

$$\tau_f = f_c \frac{\tanh^{2h}(\delta\dot{q})}{1 + \alpha \tanh^{2s}(\delta\dot{q})} + b\dot{q} \quad (3.4)$$

donde:

- $f_c \in \mathbb{R}_+$  es el coeficiente de fricción de Coulomb
- $\dot{q} \in \mathbb{R}_+$  es la velocidad articular de los motores del robot,
- $\alpha \in \mathbb{R}_+$  es el coeficiente de normalización,
- $\delta \in \mathbb{R}_+$  es el coeficiente de disipatividad,
- $h \in \mathbb{R}_+$  es el coeficiente de histéresis,
- $s \in \mathbb{R}_+$  es el coeficiente de efecto Stribeck.
- $b \in \mathbb{R}_+$  es el coeficiente de fricción viscosa

La ecuación (3.4), que representa el modelo de fricción propuesto, es claramente un modelo del tipo estático, y contiene componentes de los modelos dinámicos y estáticos. La estructura matemática de este modelo de fricción facilita su implementación en un controlador con compensación de fricción de manera similar a la compensación de gravedad.

### 3.4.1. Sintonía de ganancias del modelo de fricción C

En el modelo de fricción propuesto se cuenta con los parámetros  $f_c$  y  $b$  ampliamente usados en modelos de fricción. Normalizando las variables del modelo de fricción y eligiendo un valor adecuado  $d$  para  $\delta$ , se obtiene un modelo análogo al modelo de fricción clásico, con una transición suavizada en la región de cambio de sentido de giro (alrededor de  $\dot{q} = 0$ ). La respuesta del modelo de fricción normalizado, con un coeficiente de fricción viscosa  $b = 0$  (sin fricción viscosa) se muestra en la Fig. 3.7.

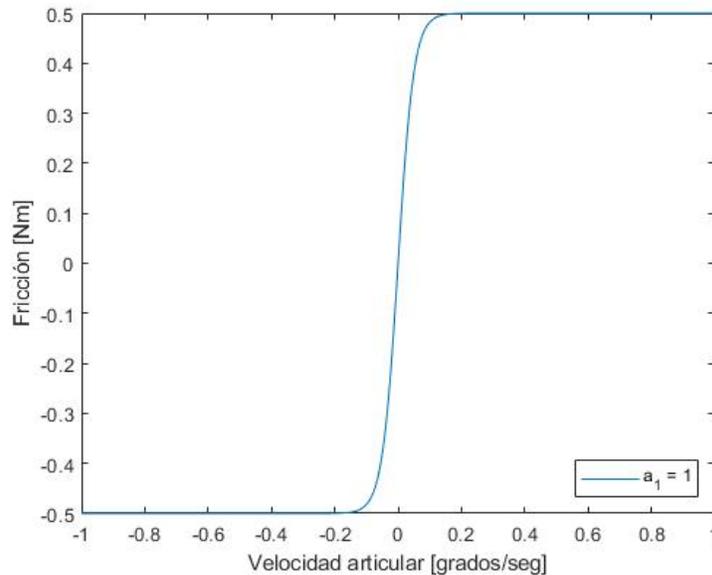


Figura 3.7: Curva característica del modelo de fricción C con variaciones en coeficiente de normalización, a)  $s_1 = 0$ ,  $h_1 = 1$ ,  $a_1 = 1$ ,  $b_1 = 0$ ,  $d_1 = 20$ ,  $f_{c1} = 1$ .

El coeficiente de normalización  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  es una constante de diseño que ajusta la componente de fricción de Coulomb en estado estable en 1 y  $-1$  para los giros positivos y negativos del servomotor, este parámetro debe ajustarse con respecto al comportamiento general del modelo y ajustar la componente de fricción de Coulomb. Esta parte del modelo de fricción está orientado a representar únicamente el fenómeno de fricción de Coulomb, el cual está compuesto principalmente por la función signo; de modo que, en contraste con la ley de fricción de Coulomb, en este caso el modelo se distingue

por el uso de funciones continuas. Mediante una correcta elección de  $\alpha$ , se logra asemejar el modelo de fricción a la función signo, lo que es fundamental para no obstruir la aportación del coeficiente de fricción de Coulomb. La aportación del coeficiente de normalización se ejemplifica en la Fig. 3.8, donde se puede apreciar que la selección adecuada del coeficiente de normalización ajusta los límites del componente de fricción de Coulomb (de 0.5Nm a 1.0Nm).

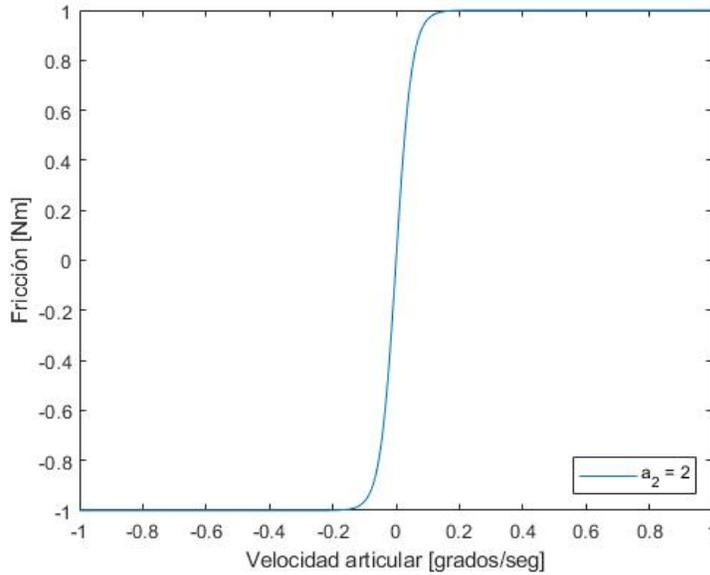


Figura 3.8: Modelo de fricción con variación en coeficiente de normalización, a)  $s_1 = 0$ ,  $h_1 = 1$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $b_1 = 0$ ,  $\delta_1 = 20$ ,  $f_{c1} = 1$ .

El coeficiente disipatividad  $\delta \in \mathbb{R}_+$  reduce la pendiente en la región de transición entre el sentido de giro del servomotor, es seleccionado de acuerdo con el comportamiento deseado de la fricción; este elemento del modelo de fricción es esencial para conservar la estructura continua de la función sin emplear funciones discontinuas tales como la función signo. La aportación del coeficiente de disipatividad se ejemplifica en la Fig. 3.9 donde se observan los cambios en la pendiente de fricción viscosa a medida que se ajusta el coeficiente de disipatividad.

Los aspectos más relevantes de este modelo son aquellos relacionados con aspectos microscópicos del fenómeno de fricción, tales como la histéresis y la curva de efecto Stribeck. El coeficiente de histéresis  $h \in \mathbb{R}_+$  modifica el comportamiento del modelo en la región de baja velocidad del robot, en la que el rozamiento de micro asperezas y las vibraciones de los servomotores generan una región de un grosor determinado por la interacción de estos elementos; con este parámetro de diseño se modifica el grosor de la región de baja velocidad.

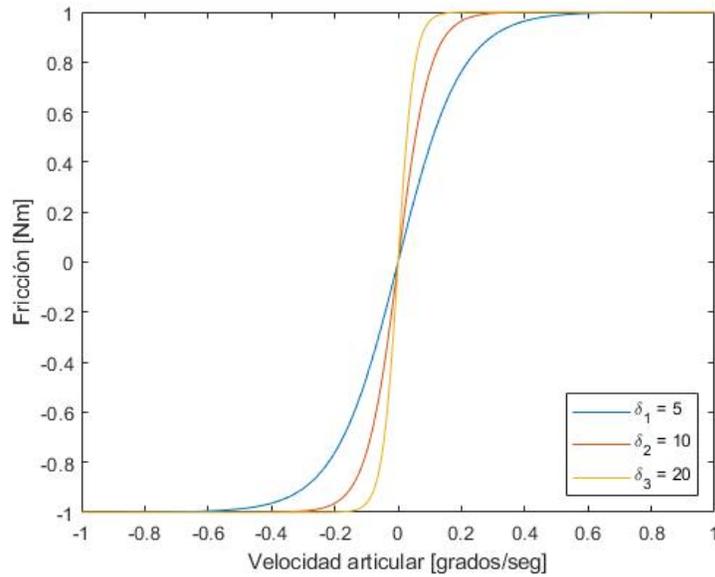


Figura 3.9: Modelo de fricción con variaciones en coeficiente de disipatividad, a)  $s_1 = 0$ ,  $h_1 = 1$ ,  $\alpha_1 = 2$ ,  $b_1 = 0$ ,  $\delta_1 = 5$ ,  $f_{c1} = 1$ ; b)  $s_2 = 0$ ,  $h_2 = 1$ ,  $\alpha_2 = 2$ ,  $b_2 = 0$ ,  $\delta_2 = 10$ ,  $f_{c2} = 1$ ; c)  $s_3 = 0$ ,  $h_3 = 1$ ,  $\alpha_3 = 2$ ,  $b_3 = 0$ ,  $\delta_3 = 20$ ,  $f_{c3} = 1$ .

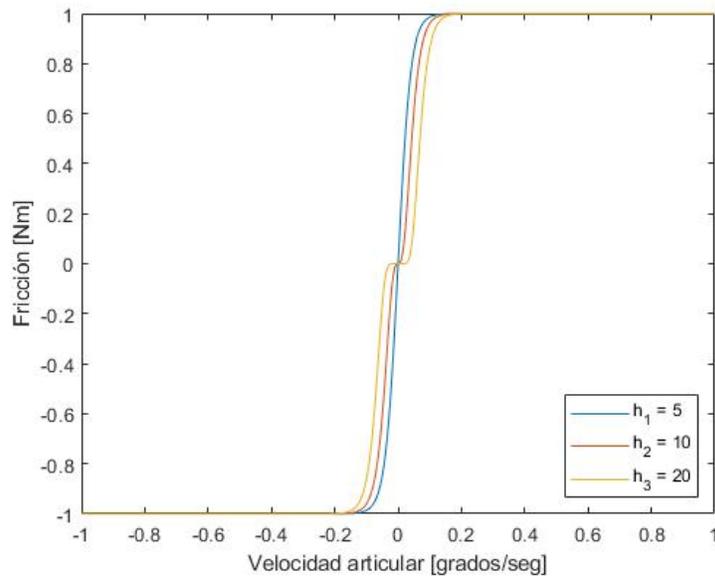


Figura 3.10: Modelo de fricción con variaciones en coeficiente de histéresis, a)  $s_1 = 0$ ,  $h_1 = 1$ ,  $\alpha_1 = 2$ ,  $b_1 = 0$ ,  $\delta_1 = 25$ ,  $f_{c1} = 1$ ; b)  $s_2 = 0$ ,  $h_2 = 2$ ,  $\alpha_2 = 2$ ,  $b_2 = 0$ ,  $\delta_2 = 25$ ,  $f_{c2} = 1$ ; c)  $s_3 = 0$ ,  $h_3 = 6$ ,  $\alpha_3 = 2$ ,  $b_3 = 0$ ,  $\delta_3 = 25$ ,  $f_{c3} = 1$ .

El aporte del coeficiente de histéresis al modelo de fricción se muestra en la Fig. (3.10). El coeficiente de histéresis pretende principalmente generar una separación de grosor variable en la región de baja velocidad del servoactuador. En un modelo dinámi-

co, la histéresis se produce por variaciones en los pares de fricción, los cuales son dependientes de los valores anteriores de las variables de estado del sistema. En este modelo, este comportamiento se emula al permitir generar una región de forma y tamaño similar a la histéresis dinámica y del mismo modo, puede observarse en casos de estudio con robots experimentales. La histéresis artificial producida en este modelo cuenta con una pendiente idéntica a la encontrada en la componente de fricción viscosa, esta relación adquiere relevancia en aplicaciones reales de compensación donde se requiera de una respuesta retardada del modelo cuando el robot parte del reposo, permitiendo ser usado como un freno artificial para evitar el movimiento libre producido por perturbaciones no deseadas que se encuentren dentro de un determinado rango.

Por otra parte, el coeficiente de efecto Stribeck  $s \in \mathbb{R}_+$  moldea la forma de la curva de efecto Stribeck, este es también un parámetro de diseño que se selecciona de acuerdo con el comportamiento esperado de la fricción en el robot. La selección de los parámetros de histéresis y Stribeck, pueden emplearse de manera análoga al comportamiento de modelos dinámicos si es que se conoce el comportamiento de estos elementos en el sistema. La aportación del coeficiente de Stribeck al modelo de fricción se muestra en la Fig. 3.11.

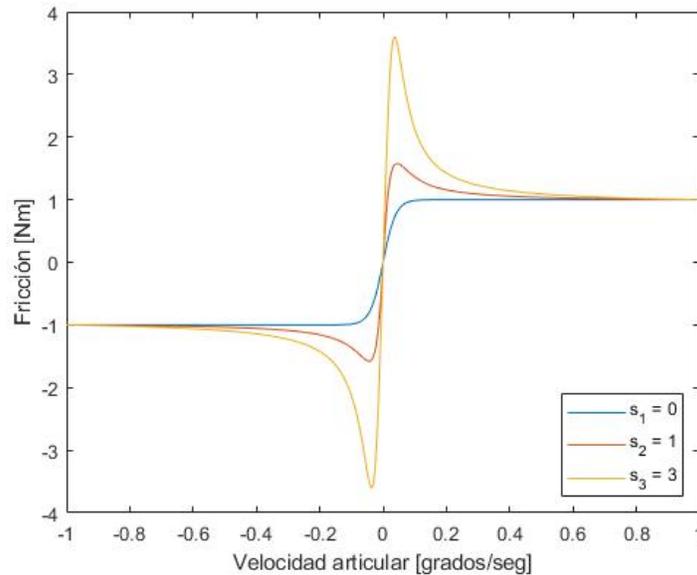


Figura 3.11: variaciones Stribeck

La combinación de los elementos incluidos en el modelo da paso a un amplio rango de diseño en cuanto al comportamiento esperado de la fricción en un robot manipulador. Otra ventaja notable en el modelo de fricción es la capacidad de incluir directamente elementos del modelo de fricción clásico, tal como los coeficientes de fricción viscosa y de Coulomb. Uno de los parámetros que se encuentra mayormente limitado en esta versión del modelo de fricción es el coeficiente de Stribeck debido a que es muy sensible

a cambios, tal como se ilustra en la Fig. 3.12, sin embargo los errores provocados por el coeficiente de Stribeck pueden ser compensados mediante alguna variable auxiliar, tal como el coeficiente de disipación o el coeficiente de normalización. La combinación de los coeficientes de Stribeck e histéresis puede diseñarse priorizando el comportamiento deseado de cualquiera de los 2 elementos y posteriormente ajustarse mediante el coeficiente de normalización.

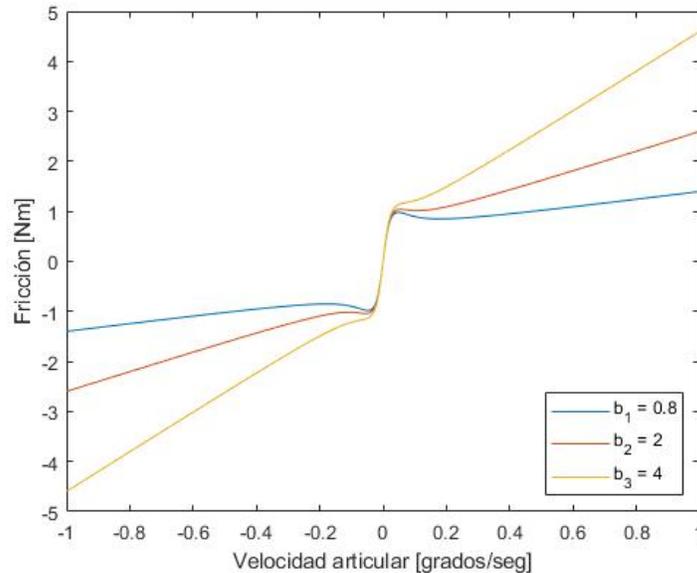


Figura 3.12: Modelo de fricción con variaciones en coeficiente de fricción viscosa. a)  $s_1 = 1$ ,  $h_1 = 1$ ,  $\alpha_1 = 2$ ,  $b_1 = 0.8$ ,  $\delta_1 = 25$ ,  $f_{c1} = 1$ ; b)  $s_2 = 1$ ,  $h_2 = 1$ ,  $\alpha_2 = 3.34$ ,  $b_2 = 2$ ,  $\delta_2 = 25$ ,  $f_{c2} = 1$ ; c)  $s_3 = 1$ ,  $h_3 = 1$ ,  $\alpha_3 = 6.49$ ,  $b_3 = 4$ ,  $\delta_3 = 25$ ,  $f_{c3} = 1$

Otra característica presente en el fenómeno de fricción comúnmente ausente en los modelos de tanto dinámicos como estáticos es la asimetría. La asimetría en el fenómeno de fricción produce pares de fricción de magnitudes diferentes cuando se tiene una dirección de giro u otra. Esta desigualdad propicia un error en la estimación de los pares de fricción, sin embargo, asumiendo que se conozca la diferencia promedio entre los pares de fricción de un robot en particular, es posible implementar dicha diferencia entre los pares de fricción positivos y negativos con el modelo de fricción aquí presentado mediante la elección de valores fraccionarios para los parámetros de efecto Stribeck e histéresis; de esta forma, el par de fricción negativo modifica su forma con respecto al par de fricción positivo, el cual mantiene su estructura.

Es evidente que la implementación de este modelo de fricción en el control de un robot manipulador puede realizarse de manera similar a cualquier otro modelo estático sin pérdida de generalidad, lo que supone una ventaja considerable para su uso en sistemas robóticos que ya cuenten con compensación de fricción mediante modelos de fricción estáticos.

### 3.5. Péndulo robot de 1GDL con modelo de fricción

Para el estudio del fenómeno de fricción en este trabajo, se eligió como punto de partida un robot manipulador de 1GDL tipo péndulo, el cual posee un modelo dinámico conocido y bien documentado por distintos autores. La simplicidad de un diseño como este supone ventajas importantes para el análisis de fenómenos que no son tan aparentes, pues facilita la identificación paramétrica debido a la reducida cantidad de piezas que lo componen.

Con el propósito de disponer de un modelo que sirva de referencia en las simulaciones, se diseñó un modelo tridimensional del robot que incluye los parámetros básicos necesarios para mostrar el comportamiento de los modelos matemáticos usados en la representación del fenómeno de fricción mostrado en la Fig. 3.13.

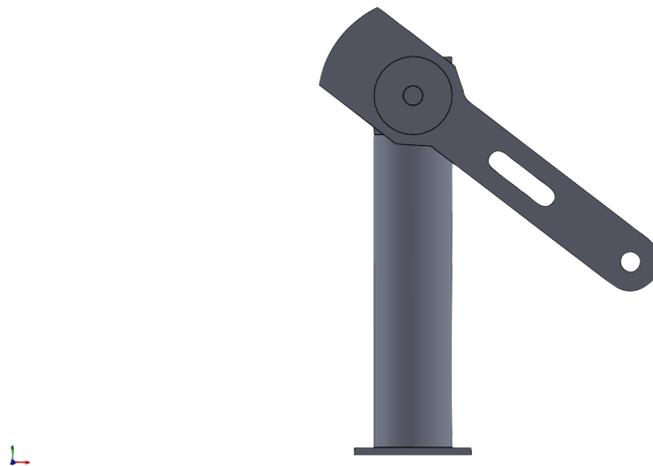


Figura 3.13: Modelo 3D del robot de 1GDL en SolidWorks

### 3.6. Cinemática directa del péndulo robot

Para definir el modelo cinemático del péndulo, primeramente se establecen los ejes de referencia, que definen la posición de casa del robot, así como la dirección de giro del servoactuador. A partir los ejes de referencia se pueda calcular el movimiento del robot, para un robot de 1GDL como el que se estudia en este trabajo, solo se tomarán en cuenta sus movimientos sobre los ejes  $x$  y  $y$ , tal como se muestra en la figura 3.14. El modelado del robot se realizó tomando en cuenta una potencia máxima entregada por el sistema de  $4Nm^2$ , para que el modelo sea compatible con motores de transmisión directa comerciales. Los pasos descritos en esta sección se encuentran detallados en el capítulo 1.

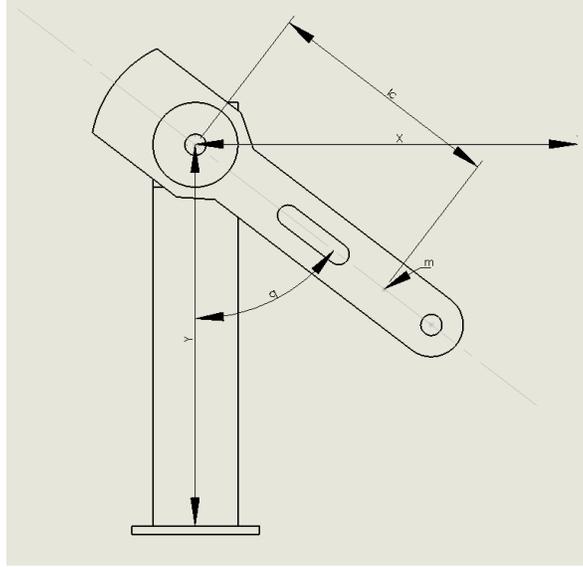


Figura 3.14: Sistema de referencia del péndulo

La cinemática directa del péndulo posee la siguiente estructura:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_c \text{sen}(q) \\ -l_c \text{cos}(q) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Posteriormente se calcula el vector de velocidad cartesiana  $\mathbf{v}$  como la derivada temporal del vector de posiciones articulares:

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_c \text{cos}(q) \dot{q} \\ l_c \text{sen}(q) \dot{q} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Se definen la energía cinética y la energía potencial del sistema para completar el Lagrangiano. La energía cinética del péndulo está dada por:

$$\mathcal{K}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} I \dot{q}^2 \quad (3.7)$$

Al estar representada por un vector, el cuadrado de la velocidad cartesiana del sistema se calcula mediante el producto punto entre vectores, resultando en el escalar  $l_c^2$ , por lo que la energía cinética puede reescribirse como:

$$\mathcal{K}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} [m l_c^2 + I] \dot{q}^2 \quad (3.8)$$

La energía potencial del sistema se define como:

$$\mathcal{U}(q) = mgh \quad (3.9)$$

donde:

$$h = h_1 - h_2 = -l_c \text{cos}(q) - (-l_c) = l_c(1 - \text{cos}(q)) \quad (3.10)$$

La altura  $h$  es calculada desde el centro de masa, tomando como referencia una posición inicial, que en este caso es el punto de reposo del robot cuando este se encuentra des-energizado. Por otro lado,  $-l_c \cos(q)$  es la posición del robot cuando este se encuentra energizado y en su punto de máxima energía potencial (generalmente el punto más alto alcanzable por el robot).

Sustituyendo en el modelo del Lagrangiano, las ecuaciones de energía cinética y potencial del modelo de estudio, se obtiene:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} [ml_c^2 + I] \dot{q}^2 - mgl_c(1 - \cos(q)) \quad (3.11)$$

Para obtener el modelo de energía del robot, se realizan las derivadas parciales del lagrangiano con respecto a  $q$  y  $\dot{q}$ . Si el diseñador lo requiere, puede agregar la fricción del sistema al modelo, obteniendo la siguiente ecuación:

$$\tau = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} + \tau_f(\dot{q}) \quad (3.12)$$

La ecuación resultante ilustrada en (3.12) constituye una representación matemática del modelo dinámico que corresponde al sistema de estudio, modelando los efectos del par de entrada del sistema sobre los estados internos del robot. De esta manera, es posible realizar desarrollos teóricos que representen el comportamiento de un robot hipotético o real, así como analizar sus propiedades, posibles limitantes y aplicaciones.

### 3.6.1. Simulación de péndulo robot

Una vez obtenido un modelo matemático que representa al sistema de estudio, es posible generar un protocolo de simulación que nos permita realizar pruebas experimentales sin necesidad de contar con el robot real, y obtener una idea general de la respuesta del sistema ante ciertos tipos de entrada, o el desempeño de distintos algoritmos y técnicas de control.

El protocolo de simulación empleado en este trabajo de tesis está basado en el software MATLAB y está constituido por un conjunto de scripts que describen al robot como un sistema independiente capaz de recibir señales de entrada y producir datos de salida.

El entorno de simulación se centra en el modelo dinámico del robot manipulador, el cual puede ser de uno a  $n$  grados de libertad y estar constituido por una configuración antropomórfica (como es el caso del sistema de investigación experimental de este trabajo) o cualquier otra configuración de interés. El script de MATLAB que describe al robot está diseñado a modo de función, por lo que este recibe una entrada en forma de par aplicado a los servomotores y el modelo dinámico representa los estados internos del sistema ante dicha entrada en forma de una ODE, cuya respuesta proporciona como

salida los estados de posición, velocidad y aceleración articulares del robot.

La entrada teórica del robot de simulación está dada ya sea por una serie de datos experimentales, arbitrarios, o un algoritmo de control. En el caso de emplear un vector de datos, es posible recrear el comportamiento del robot durante una simulación o prueba experimental real previa, o bien, analizar el comportamiento del sistema ante una entrada arbitraria hipotética. Para el caso de un algoritmo de control, se diseña un script a modo de función que contenga el controlador a evaluar, donde se especifiquen como entradas los estados del sistema necesarios para el controlador (típicamente el error de posición y la velocidad articular); y finalmente la salida del controlador se establece como entrada de par al robot manipulador contenido en su propio script, en otras palabras, la salida de la función de control, actúa como entrada de la función que describe al sistema dinámico.

Por último, se añade un script que coordina el funcionamiento de la simulación, este programa incluye generalmente las variables físicas del sistema tales como masas de los eslabones, longitudes, momentos de inercia y distancia al centro de masa. También se incluye en este programa el algoritmo de integración numérica que da solución a la ODE que describe el sistema dinámico y devuelve dicha respuesta al algoritmo de control. En esta etapa de la simulación, se generan los vectores de datos que registran la respuesta del sistema durante las simulaciones con la posibilidad de representar los datos de manera gráfica o realizar un análisis adicional directamente. Con esto, es posible determinar la mejor sintonía de ganancias para un controlador, comparar algoritmos de control, o conocer a grandes rasgos el comportamiento que tendría un controlador con compensación de fricción, tal como es el objetivo de este trabajo.

La simulación del modelo dinámico del péndulo se diseñaron 3 códigos en MATLAB, los cuales se describen a continuación:

### 3.6.2. Simulación del modelo de fricción clásico en el péndulo robot

El modelado de un robot manipulador mediante las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange con el modelo de fricción clásico se describe comúnmente de la siguiente manera:

$$\tau = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} + b_i \dot{q}_i + f_{ci} \text{signo}(\dot{q}_i) + f_{ei} [1 - |\text{signo}(\dot{q}_i)|] \quad (3.13)$$

Para la demostración de los efectos de la fricción sobre un robot manipulador, es posible hacer uso del software MATLAB, mediante un script que represente el modelo dinámico de un robot teórico con parámetros arbitrarios, obteniendo así resultados numéricos que describan una aproximación del comportamiento de un sistema real. El

protocolo de simulación es idéntico al planteado en la sección anterior, con la adición de una componente que describe la disipación de torque por fricción mediante el modelo clásico de fricción. Al robot se le otorga una entrada de par que genera desplazamientos por su espacio de trabajo, recopilando la información de la velocidad articular en cada momento de la simulación, para posteriormente analizar los datos y reconstruir la fricción del sistema.

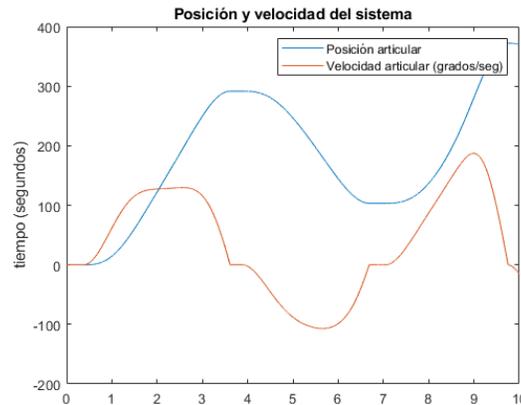


Figura 3.15: Posición y velocidad articular del sistema

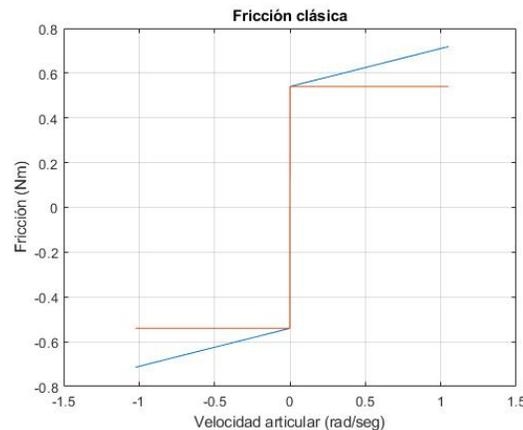


Figura 3.16: Fricción del sistema (fricción clásica)

Los resultados arrojados por la simulación se muestran en la Fig. 3.15, que representa los estados internos del péndulo durante la simulación. La Fig. 3.16 muestra el par disipado por fricción del péndulo, destacando sus 2 componentes de forma individual, con la componente de fricción de Coulomb en color naranja, y el par de fricción que incluye la fricción viscosa se muestra en azul. De este análisis se puede destacar que la fricción del sistema son muy similares al modelo de LuGre, el cual expone un comportamiento similar al de una tangente hiperbólica con pendiente de  $90^\circ$  dentro de un región de histéresis, mostrando también, el efecto Stribeck en los extremos de dicha

región.

### 3.6.3. Simulación del modelo de fricción de LuGre en el péndulo robot

El modelo de fricción de LuGre (detallado en el capítulo 1 de este trabajo), presenta la estructura de una ODE, por lo cual, para lograr simularlo mediante MATLAB, es necesario resolver la ecuación característica del modelo. Para este fin, se realizó una modificación al protocolo de simulación del péndulo bajo fricción, reemplazando el modelo de fricción clásico por el modelo de LuGre en estado estable.

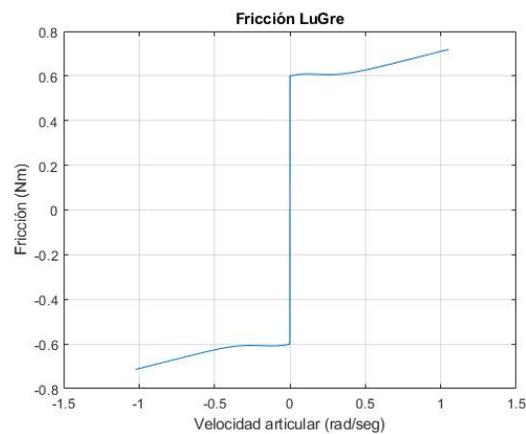


Figura 3.17: Fricción del sistema (modelo de LuGre)

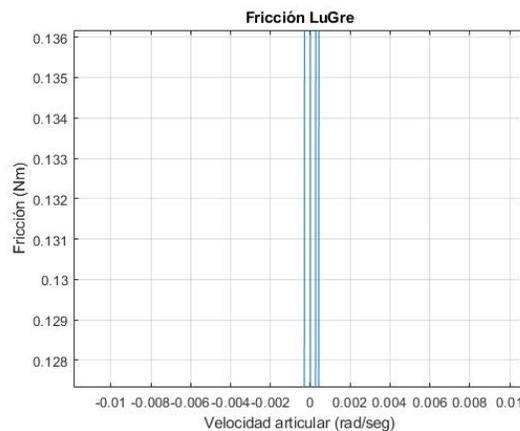


Figura 3.18: Acercamiento a la región de histéresis)

En este resultado se puede apreciar el comportamiento general del modelo de LuGre mostrado en la Fig. 3.17, con sus principales características. Se observa una componente de fricción viscosa y una componente de fricción de Coulomb, así como el efecto

Stribeck. La región de histéresis es muy pequeña pero puede verse con un acercamiento a la región de velocidad mínima, tal como se muestra en la Fig. 3.18. Todas estas componentes ofrecen una idea clara de los elementos necesarios para un modelo de fricción completo. Esta simulación demuestra el comportamiento del modelo de LuGre y su implementación.

### 3.7. Resultados Experimentales (modelos A y B)

Los modelos A y B descritos anteriormente fueron probados experimentalmente en un robot físico de 3 grados de libertad. El experimento consistió en introducir un vector de posiciones deseadas tal que, el robot tuviera movimiento oscilante con rotaciones positivas y negativas durante unos segundos, registrando el torque, error de posición, velocidades articulares y el tiempo transcurrido con una tarjeta de adquisición de datos incluida.

Los datos obtenidos en el experimento, principalmente la velocidad articular y el tiempo, contienen la información necesaria para reconstruir los efectos de la fricción en el robot. Dado que la fricción es comúnmente una función dependiente de la velocidad entre las superficies de rozamiento, la manera de reconstruir la fricción en los modelos clásicos en el caso de datos experimentales se puede realizar de manera sencilla. En el caso de los modelos dinámicos la implementación de un modelo de análisis de datos experimentales requieren de un proceso más complejo, en el que se realizan los cálculos necesarios para obtener el modelo.

Las figuras 3.19 - 3.23 muestran los resultados experimentales de los modelos de fricción clásica, fricción clásica mejorada con la función  $\tanh(\dots)$ , modelo de fricción A, modelo de fricción B y LuGre, únicamente del último eslabón del robot, por lo que puede a fines prácticos, puede considerarse como si se tratara de un péndulo robot.

#### 3.7.1. Análisis de resultados experimentales (modelos A y B)

Durante el análisis y observación de los resultados experimentales, se encontraron algunos aspectos importantes del fenómeno de fricción. Un primer análisis de los datos empleados en este avance, así como los datos empleados en análisis anteriores, sugieren que la histéresis es un resultado natural en cualquier caso de modelado de fricción, ya sea que se empleen modelos clásicos o dinámicos. La aparición de la histéresis en los modelos clásicos Fig. 3.19 se debe a la recursividad de la curva característica y a los saltos que ocurren entre el giro positivo y negativo del motor.

En el caso del modelo clásico mejorado con la función  $\tanh(\Omega \dot{q})$  (Fig. 3.20), se puede destacar su similitud con el modelo clásico. En esencia, para un  $\Omega$  adecuado, ambos modelos son equivalentes.

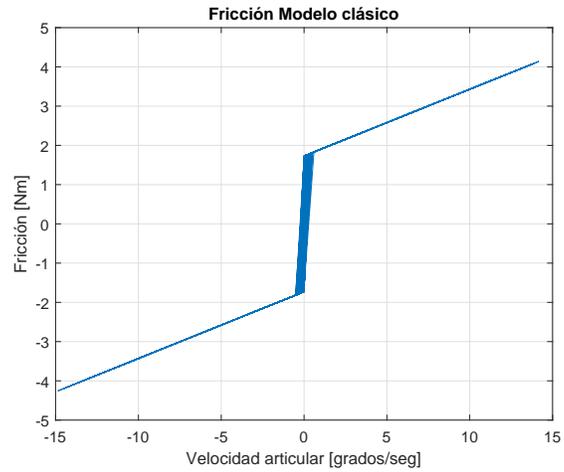


Figura 3.19: Modelo clásico con datos experimentales

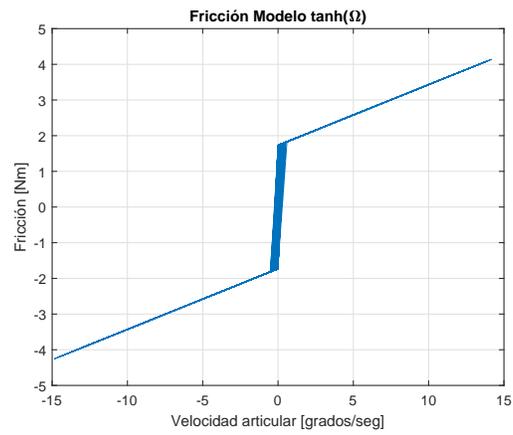


Figura 3.20: Modelo clásico experimental mejorado con tanh

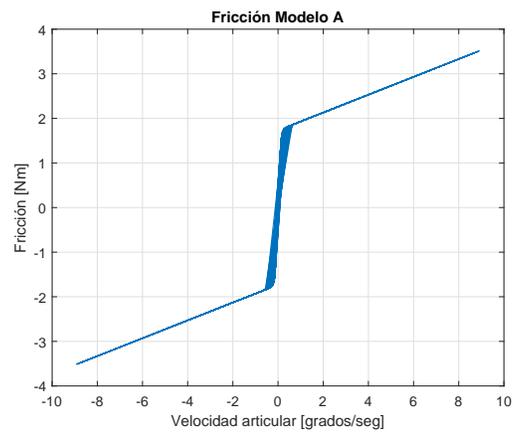


Figura 3.21: Resultados experimentales modelo de fricción A.

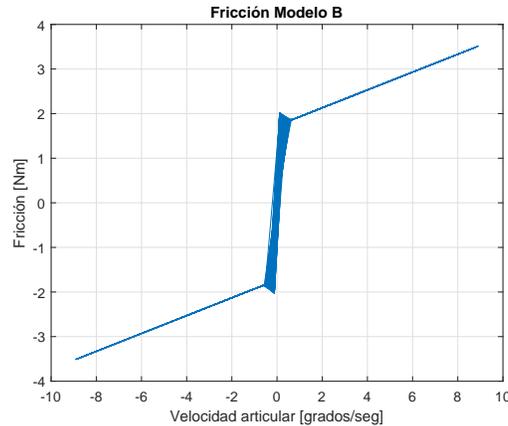


Figura 3.22: Resultados experimentales modelo de fricción B

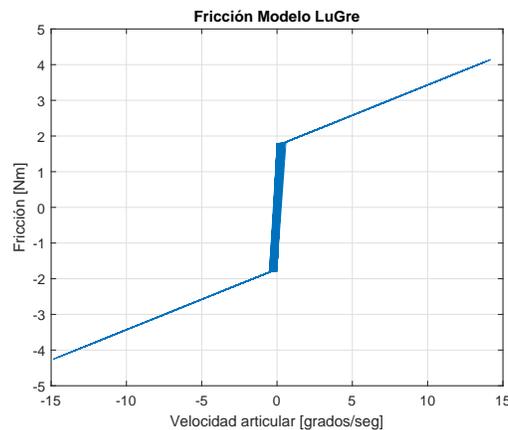


Figura 3.23: Resultados experimentales modelo de LuGre

El modelo de fricción propuesto A mostrado en la Fig. 3.21 presenta similitud con los modelos clásicos, sin embargo, la principal diferencia en este modelo radica en la región de histéresis y la pendiente característica de la fricción. Es notable que a medida que la velocidad se aproxima a cero, la región de histéresis se vuelve más angosta, lo que marca una diferencia notable cuando se pasa de velocidades positivas y negativas. Este comportamiento de la fricción ha sido observado en varios experimentos, y es una característica del modelo. Por otro lado, el parámetro  $\delta$  permite ajustar el comportamiento de la fricción en esta región. por último, se observa que el cambio entre la componente de Coulomb y la componente de fricción viscosa, es más suave que en los casos anteriores, sugiriendo la existencia de la curva de Stribeck. Este comportamiento es equivalente de manera cualitativa a un caso particular del modelo de LuGre en el que la fricción estática sea tan pequeña que la curva de Stribeck no tenga un aporte significativo.

Finalmente, Los modelos de LuGre (3.23) y el modelo B (Fig. 3.22) representan

los resultados más completos del análisis de fricción. en el caso del modelo de LuGre aplicado al péndulo, se observa que tiene un comportamiento similar al de la fricción clásica para este caso particular; la fricción estática es tan pequeña, que la curva de Stribeck queda oculta en la región de histéresis. En el caso del modelo de fricción B, se puede observar un comportamiento similar a LuGre, y a todos los modelos antes mencionados, tomando las propiedades mencionadas en la región de histéresis del modelo A, así como una curva de Stribeck notoria a simple vista. En este caso (al igual que en modelo A), los parámetros de fricción se encuentran dados por las componentes principales del modelo clásico, y se han tomado valores arbitrarios para el resto de parámetros de diseño adicionales para que estos sean visibles en el análisis. Las diferencias entre el modelo de LuGre y el modelo B pueden ajustarse mediante los parámetros de diseño para que ambos sean idénticos.

Empleando identificación paramétrica, sería posible deducir con mayor precisión los parámetros en cada modelo de fricción, lo que a su vez respalda la competitividad de los modelos de fricción aquí propuestos con otros modelos publicados también mencionados en este trabajo.

### 3.8. Resultados experimentales (modelo C)

Con el fin de validar el desempeño del modelo de fricción propuesto en este artículo, se realizaron una serie de experimentos con un robot de investigación de 3 grados de libertad en el laboratorio de robótica y control de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

El robot seleccionado es del tipo antropomórfico y posee servoactuadores de transmisión directa sin escobillas, por lo que el torque proporcionado no se ve afectado por factores externos al fenómeno de fricción tales como el juego mecánico propio de los sistemas con reductores. De este modo, es posible medir de forma acertada el torque disipado por el rozamiento de superficies en las articulaciones del robot.

En el experimento realizado se tomaron en cuenta los parámetros físicos relacionados al fenómeno de fricción en el robot manipulador experimental previamente conocidos, mostrados en la tabla 1. Una vez obtenidos los datos del experimento, estos se analizaron empleando el software MATLAB, generando los pares de fricción del robot manipulador producidos por el modelo de fricción propuesto correspondiente a cada lectura discreta de velocidad articular proporcionada por el encoder.

Los pares aplicados introducidos a los servomotores del robot se calcularon con la estructura matemática mostrada en la ecuación 3.14, conservando las características anteriormente mencionadas y considerando el par máximo soportado por cada servomotor.

$$\tau = \beta \sin(0.2t) \quad (3.14)$$

donde:

- $t \in \mathbb{R}_+$  es el tiempo en segundos desde que el robot fue encendido.
- $\beta \in \mathbb{R}_+$  es el vector de pares máximos soportados por cada uno de los servoactuadores del robot.

Parámetro	Nombre	Valor
Coefficiente de fricción de Coulomb 1	$f_{c1}$	5.17Nm
Coefficiente de fricción de Coulomb 2	$f_{c2}$	1.90Nm
Coefficiente de fricción de Coulomb 3	$f_{c3}$	1.73Nm
Coefficiente de fricción de viscosa 1	$b_1$	2.28Nmseg <sup>2</sup> /grad
Coefficiente de fricción de viscosa 2	$b_2$	1.20Nmseg <sup>2</sup> /grad
Coefficiente de fricción de viscosa 3	$b_3$	0.17Nmseg <sup>2</sup> /grad
Coefficiente de disipatividad 1	$\delta_1$	45
Coefficiente de disipatividad 2	$\delta_2$	40
Coefficiente de disipatividad 3	$\delta_3$	85
Coefficiente de efecto Stribeck 1	$s_1$	1.00
Coefficiente de efecto Stribeck 2	$s_2$	1.00
Coefficiente de efecto Stribeck 3	$s_3$	0.92
Coefficiente de histéresis 1	$h_1$	1.00
Coefficiente de histéresis 2	$h_2$	0.95
Coefficiente de histéresis 3	$h_3$	0.92

**Tabla 1.** Parámetros físicos de robot experimental

Los resultados esperados en este experimento son pares de fricción que posean la estructura característica del fenómeno de fricción, incluyendo algunos de los elementos relevantes no incluidos en la mayoría de los modelos estáticos (principalmente curva de efecto Stribeck y región de histéresis), de modo que su aportación pueda ser implementada posteriormente en algún controlador con compensación de fricción.

### 3.8.1. Análisis de resultados experimentales (modelo C)

En la Fig 3.24 y Fig. 3.26 se muestran los resultados de los pares calculados del modelo de fricción para cada una de las 3 articulaciones del robot. En la Fig. 3.24 se muestra la respuesta calculada de los pares de fricción para el servomotor de la base. En la Fig. 3.25 se muestran los pares de fricción modelados en segundo servomotor. En la Fig. 3.26 se muestran los pares de fricción tercer servomotor— del robot. Es notable que los elementos macroscópicos del fenómeno de fricción se encuentran en el modelo, de la misma forma que lo harían en cualquier otro modelo estático.

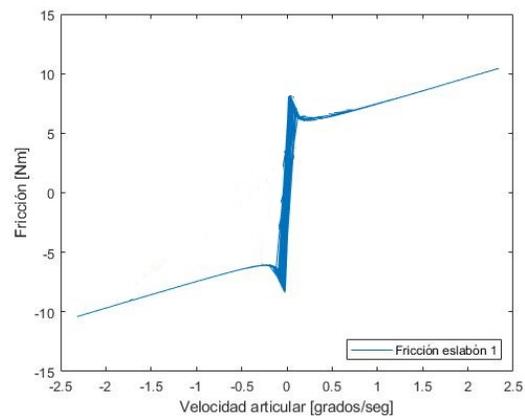


Figura 3.24: Pares de fricción eslabón 1

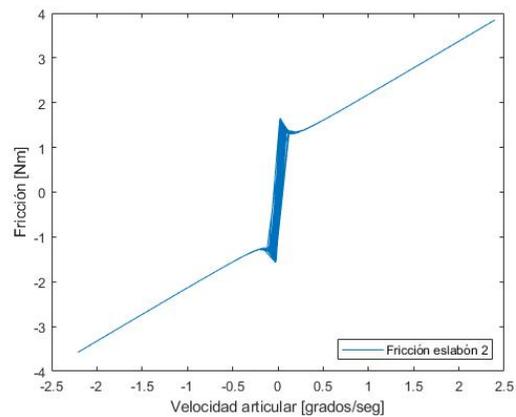


Figura 3.25: Pares de fricción eslabón 2

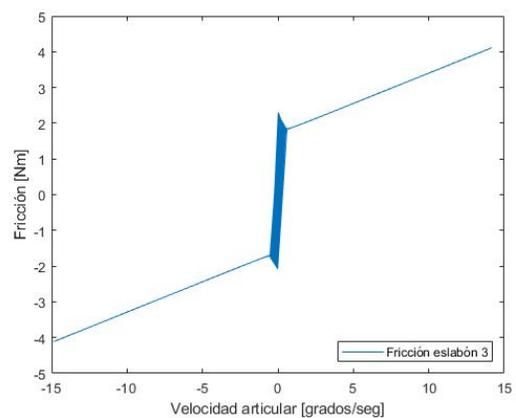


Figura 3.26: Figura 10. Pares de fricción eslabón 3

En el caso de los parámetros físicos del modelo de fricción relacionados a fenómenos microscópicos, concretamente aquellos relacionados con el efecto Stribeck y la histéresis-

sis, son en este caso, aproximaciones seleccionadas de manera arbitraria con el propósito de volver evidente su aportación al modelo de fricción. Estos elementos del fenómeno de fricción son del tipo dinámico, por lo que incluirlos en el modelo dinámico de un robot manipulador requiere normalmente de la inclusión de variables de estado dedicadas para cada uno de los servoactuadores en un robot, esto incrementa el número de variables de estado del sistema por lo menos al doble. Una interpretación distinta de la inclusión de estas variables de estado al modelo dinámico del robot manipulador para usos prácticos podría ser que se incrementa el número de grados de libertad del sistema, por lo tanto, su complejidad y a su vez, la capacidad de cómputo necesaria para controlarlo en tiempo real.

Debido a que la aportación del fenómeno de fricción resulta ser considerablemente pequeña en comparación con los pares aplicados a los servomotores en un robot, muchas veces se termina ignorando al fenómeno de fricción en el controlador del sistema, sin embargo, al implementar un modelo de fricción estático como el que se muestra en este trabajo, se conserva la simplicidad del modelo dinámico del robot manipulador y se incrementa la flexibilidad en la estructura deseada del fenómeno de fricción en los servomotores del robot con respecto a los modelos estáticos clásicos de fricción.

Al comparar cualitativamente la curva característica de los modelos de fricción clásicos es notable que estos representan una desventaja importante en el análisis matemático de estabilidad de Lyapunov en controladores con compensación de fricción, pues en estos análisis es requerido que el modelo dinámico del sistema sea continuamente diferenciable, y este problema se presenta también en algunos modelos dinámicos de fricción que emplean funciones discontinuas. El uso de funciones hiperbólicas solventa este problema de análisis matemático, y conserva la funcionalidad de modelo de fricción para algoritmos de control de robots. Las diferencias entre los pares de fricción que existen entre cada uno de los eslabones del robot se deben entre otras cosas, a la velocidad y torque máximo que es capaz de proporcionar cada servoactuador, así como el desgaste que hay en cada una de las superficies de contacto, la forma y rugosidad de las micro asperezas del material del que está fabricado el robot. La estructura del modelo de fricción está sujeta a cambios a largo plazo debido al desgaste natural de los componentes en los servoactuadores.

Otro aspecto destacable en el desempeño del modelo de fricción es la capacidad de sugerir la presencia de una región de histéresis generados por la recursividad de los datos al cambiar rápidamente entre los giros positivos y negativos de los actuadores. Esta área de alta vibración con rápidos cambios en los pares de fricción de un servoactuador es un aspecto importante de los modelos dinámicos, por lo que el uso del modelo propuesto en este artículo puede ser empleado como un recurso para representar este fenómeno en el desempeño de un robot manipulador sin necesidad de recurrir a modelos dinámicos.

# Capítulo 4

## Diseño de algoritmos de control para robots manipuladores

### 4.1. Introducción

Los robots como sistemas dinámicos son interés en la comunidad científica por los complejos problemas que plantean y sus respectivas aplicaciones en otras ciencias y a procesos industriales. Uno de los principales focos de estudio de la robótica es el diseño de algoritmos de control aplicado a sistemas industriales. Contar con un algoritmo eficiente y robusto que le permita a un robot industrial realizar una tarea con precisión, con una alta repetibilidad y velocidad de operación es una ventaja industrial que rápidamente se ha hecho evidente en los últimos 50 años, desplazando las tareas extremadamente complejas y peligrosas de operadores humanos hacia procesos completamente automatizados realizados por robots.

Actualmente existe una extensa variedad de controladores de alto desempeño que cumplen con las expectativas necesarias para establecer un sistema robótico en la industria (encabezado por el algoritmo de control PD clásico y algunas de sus variaciones), sin embargo, el problema de diseño de algoritmos de control continúa abierto debido al amplio margen de mejora que existe para los modelos de controladores actuales, principalmente en aplicaciones específicas donde un algoritmo de control generalizado proporcione un desempeño deficiente.

### 4.2. Control de posición en robots manipuladores

El problema de control de posición en robots manipuladores (también conocido como regulación) consiste en introducir una entrada de par mediante los actuadores del robot, que ajuste la posición angular de las articulaciones con respecto a un marco de referencia establecido, hasta una posición angular deseada. El par introducido al sistema se adapta a la magnitud de los errores de posición en tiempo real, reduciéndolos a

medida que el tiempo evoluciona hasta alcanzar un error suficientemente pequeño para ser despreciable.

Formalmente podemos definir el problema de control de posición como el diseño de una ley de control  $\boldsymbol{\tau}$  que proporcione una entrada de par de control adecuada a los servomotores de un robot, de modo que su posición articular  $\mathbf{q}(t)$  y su velocidad articular  $\dot{\mathbf{q}}(t)$  tiendan asintóticamente hacia una posición articular deseada  $\mathbf{q}_d$  y velocidad articular cero.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_d \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

En el caso particular de regulación en robots manipuladores, se dice un algoritmo de control resuelve el problema de regulación cuando se alcanza el atractor mostrado en la ecuación (4.1) el cual es un atractor del sistema dinámico que debe existir y ser único.

Una forma alternativa de representar el modelo dinámico de un robot manipulador consiste en relacionar el parámetro constante de posición deseada  $\mathbf{q}_d$  con el vector de variables posición articular  $\dot{\mathbf{q}}(t)$ , lo que resulta en una nueva variable que define la magnitud del error de posición del sistema.

$$\tilde{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}(t) \quad (4.2)$$

Por lo que la ecuación (4.1) ahora puede expresarse como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

La solución al problema de regulación tal como se encuentra expresado en (4.3) es conveniente para simplificar el análisis de estabilidad en leyes de control debido a que facilitan el análisis de los puntos de equilibrio del sistema resultando en un único punto de equilibrio en el origen.

### 4.2.1. Diseño de leyes de control

Uno de los algoritmos de control más conocidos es el control proporcional-derivativo, propuesto en 1981 por Takeagi y Arimoto como una solución al problema de regulación de robots manipuladores. La propuesta consiste en diseñar una señal de control  $\boldsymbol{\tau}$  compuesta por 2 componentes fundamentales. La parte proporcional del control PD está directamente relacionado con el vector de posición articular del robot, mientras que la parte derivativa de la ley de control PD se ajusta de acuerdo a la velocidad articular del robot.

$$\boldsymbol{\tau} = K_p \tilde{\mathbf{q}} - K_v \dot{\mathbf{q}} \quad (4.4)$$

Una interpretación física del funcionamiento del algoritmo de control PD es similar a un sistema resorte-amortiguador. La parte proporcional de la ley de control PD es

similar a al modelado de un resorte, compuesto por el producto de un desplazamiento ( $\tilde{\mathbf{q}}$ ) y una constante ( $K_p$ ) tal como lo plantea la ley de Hooke, y la parte derivativa es similar al modelado de un amortiguador, formado por el producto entre la derivada temporal el desplazamiento o velocidad ( $\dot{\mathbf{q}}$ ) y una constante de amortiguamiento ( $K_v$ ). Típicamente, el algoritmo de control PD se implementa en robots manipuladores incluyendo una componente extra que constituye la compensación del par gravitacional  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  sobre el robot.

$$\boldsymbol{\tau} = K_p \tilde{\mathbf{q}} - K_v \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (4.5)$$

La implementación de un algoritmo de control en el modelo dinámico de un robot manipulador da como resultado un modelo en lazo cerrado que tiene por entrada las coordenadas de posición deseada del robot y como salidas, las posiciones, velocidades y aceleraciones articulares del robot, que son realimentadas al sistema.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [K_p \tilde{\mathbf{q}} - K_v \dot{\mathbf{q}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}] \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

La ecuación (4.6) es una ecuación autónoma que ha sido ampliamente estudiada y probada asintóticamente estable.

### 4.2.2. Diseño de leyes de control mediante el método de moldeo de energía

Una de las mejores técnicas de diseño de leyes de control adecuadas para sistemas dinámicos complejos como robots manipuladores es el moldeo de energía. Esta técnica permite el diseño de leyes de control de forma simple y garantiza que la ley de control diseñada será estable en el sentido de Lyapunov. Si se usa correctamente, es altamente probable que la ley de control resultante sea de alto desempeño, y con la manipulación correcta de la forma característica de las funciones de energía, incluso es posible lograr un control con cierta curva característica específica, permitiendo diseñar controles para aplicaciones concretas.

La técnica de moldeo de energía consiste en diseñar una ecuación definida positiva, de tal modo que al ser evaluada en cero resulte en cero, y continúe creciendo de modo que al ser evaluada en el infinito resulte en un valor infinito. Esta ecuación es conocida como *energía potencial artificial* y es la base del diseño de una ley de control con este método.

$$\boldsymbol{\tau} = \nabla \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) - \mathbf{f}_v(K_v, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (4.7)$$

donde:

- $\nabla \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}})$  es el gradiente de energía potencial artificial,
- $\mathbf{f}_v(K_v, \dot{\mathbf{q}})$  es la función de amortiguamiento o freno mecánico artificial,

- $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  es la compensación de pares gravitacionales.

La función energía potencial artificial es una ecuación de diseño distinta de la energía potencial del robot. Se define como una función definida positiva, cuyo gradiente es una función con cruce por cero, delimitado al primer y tercer cuadrante. Las matrices  $K_p$  y  $K_v$  son las matrices proporcionales y derivativas incluidas en las leyes de control clásicas.

### 4.3. Propuestas de leyes de control

Para propósitos académicos, y como un aporte complementario de este trabajo de tesis, se han desarrollado diferentes leyes de control especializadas en control de robots manipuladores, con la intención de cimentar las bases del diseño de algoritmos de fricción posteriores.

Las leyes de control diseñadas en este apartado pertenecen al grupo de algoritmos de control saturados debido a su similitud con algunas estructuras favorables encontradas en modelos de fricción clásicos (concretamente a la función signo), y a que son una de las mejores categorías de algoritmos de control con alto desempeño, pues permiten delimitar la región de operación en un rango seguro para los servomotores del robot limitando el torque que se aplica a estos y protegiéndolos de sobrecarga o errores que lleven a una respuesta inesperadamente alta de par aplicado.

El diseño de las leyes de control propuestas en este trabajo se describen a detalle en la siguiente sección, comenzando por la función energía potencial artificial, seguido de su gradiente y su respectiva ley de control. En el diseño de las leyes de control propuestas en este trabajo, se emplea un caso particular de la técnica del moldeo de energía de modo que la ecuación resultante sean siempre controles saturados.

$$\mathcal{U}_a(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \sqrt{\ln(f(\mathbf{x}))}^T K \sqrt{\ln(f(\mathbf{x}))} \quad (4.8)$$

donde:

- $K$  es una matriz diagonal de ganancias (constantes),
- $\mathcal{U}_a(\mathbf{x})$  es la función de energía potencial artificial,
- $c$  es una constante de normalización definida por diseño,
- $f(\mathbf{x})$  es la función que define la ley de control.

En la estructura de la ley de control diseñada, se tiene que la función energía potencial artificial, debe ser definida positiva, sin embargo, debido a que la estructura

está compuesta por la función  $\ln(\mathbf{x})$ , se tiene que la función característica de la ley de control debe ser de la forma:

$$f(\mathbf{0}) = \mathbf{1}, \quad (4.9)$$

de modo que simultáneamente se cumpla

$$\ln(f(\mathbf{x})) > \mathbf{0}. \quad (4.10)$$

Con esto se garantiza que la ley de control resultante sea estable según Lyapunov, mientras se cumplan las condiciones necesarias.

### 4.3.1. Propuesta de ley de control 1

#### Función energía potencial artificial (propuesta 1)

El diseño de la función energía potencial artificial para esta propuesta se compone de la siguiente manera

$$\mathcal{U}_a(\mathbf{x}) = \frac{1}{m\alpha} \sqrt{\ln((2 \cosh^m(\alpha\mathbf{x})) - 1)^T} K \sqrt{\ln((2 \cosh^m(\alpha\mathbf{x})) - 1)} \quad (4.11)$$

donde

- $K$  es una matriz diagonal de ganancias (constantes),
- $m$  es una constante de diseño,
- $\alpha$  es una constante de diseño.

#### Ley de control (propuesta 1)

El gradiente de la función energía potencial artificial genera la estructura característica de la ley de control.

$$\nabla \mathcal{U}_a(\mathbf{x}) = K \frac{\sinh(\alpha\mathbf{x}) \cosh^{m-1}(\alpha\mathbf{x})}{\cosh^m(\alpha\mathbf{x}) - 0.5} \quad (4.12)$$

La ecuación (4.12) puede reescribirse para eliminar la potencia negativa

$$\nabla \mathcal{U}_a(\mathbf{x}) = K \frac{\tanh(\alpha\mathbf{x}) \cosh^m(\alpha\mathbf{x})}{\cosh^m(\alpha\mathbf{x}) - 0.5} \quad (4.13)$$

La ley de control final se construye a partir del gradiente de la función energía potencial artificial correspondiente, sustituyendo las variables  $\tilde{\mathbf{q}}$ ,  $\hat{\mathbf{q}}$  y las matrices de ganancias  $K_p$  y  $K_v$  del problema de regulación y la ley de control PD, y puede escribirse como

$$\boldsymbol{\tau}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = K_p \frac{\tanh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) \cosh^m(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{\cosh^m(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) - 0.5} - K_v \frac{\tanh(\alpha \dot{\mathbf{q}}) \cosh^m(\alpha \dot{\mathbf{q}})}{\cosh^m(\alpha \dot{\mathbf{q}}) - 0.5} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (4.14)$$

La ley de control propuesta pertenece a la categoría de regulador saturado puede ser empleado en el control de posición para robots manipuladores de eslabones rígidos con servoactuadores de transmisión directa sin pérdida de generalidad.

### 4.3.2. Propuesta de ley de control 2

#### Función energía potencial artificial (propuesta 2)

El diseño de la función energía potencial artificial para esta propuesta se compone de la siguiente manera

$$\mathcal{U}_a(\mathbf{x}) = \frac{1}{2m\alpha} \sqrt{\ln(\cosh^m(\alpha \mathbf{x}) + \cosh^{2m}(\alpha \mathbf{x}) - 1)}^T K \sqrt{\ln(\cosh^m(\alpha \mathbf{x}) + \cosh^{2m}(\alpha \mathbf{x}) - 1)} \quad (4.15)$$

donde:

- $K$  es una matriz diagonal de ganancias (constantes),
- $m$  es una constante de diseño,
- $\alpha$  es una constante de diseño.

#### Ley de control (propuesta 2)

El gradiente de la función energía potencial artificial genera la estructura característica de la ley de control.

$$\nabla \mathcal{U}_a(\mathbf{x}) = K \frac{\sinh(\alpha \mathbf{x}) \cosh^{m-1}(\alpha \mathbf{x}) (2 \cosh^m(\alpha \mathbf{x}) + 1)}{2(\cosh^m(\alpha \mathbf{x}) + \cosh^{2m}(\alpha \mathbf{x}) - 1)} \quad (4.16)$$

La ley de control final se construye a partir del gradiente de la función energía potencial artificial correspondiente, sustituyendo las variables  $\tilde{\mathbf{q}}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  y las matrices de ganancias  $K_p$  y  $K_v$  del problema de regulación y la ley de control PD, y puede escribirse como

$$\boldsymbol{\tau}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = K_p \frac{\sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) \cosh^{m-1}(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) (2 \cosh^m(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + 1)}{2(\cosh^m(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + \cosh^{2m}(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) - 1)} - K_v \frac{\sinh(\alpha \dot{\mathbf{q}}) \cosh^{m-1}(\alpha \dot{\mathbf{q}}) (2 \cosh^m(\alpha \dot{\mathbf{q}}) + 1)}{2(\cosh^m(\alpha \dot{\mathbf{q}}) + \cosh^{2m}(\alpha \dot{\mathbf{q}}) - 1)} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (4.17)$$

La ley de control propuesta pertenece a la categoría de regulador saturado puede ser empleado en el control de posición para robots manipuladores de eslabones rígidos con servoactuadores de transmisión directa sin pérdida de generalidad, sin embargo, su uso requiere de una cantidad de recursos computacionales mucho mayor comparado con un control PD tradicional

### 4.3.3. Propuesta de ley de control 3

#### Función energía potencial artificial (propuesta 3)

El diseño de la función energía potencial artificial para esta propuesta se compone de la siguiente manera:

$$\mathcal{U}_a(\mathbf{x}) = \frac{1}{2m\alpha} \sqrt{\ln(\sinh^{2m}(\alpha\mathbf{x}) + \cosh^{2m}(\alpha\mathbf{x}))}^T K \sqrt{\ln(\sinh^{2m}(\alpha\mathbf{x}) + \cosh^{2m}(\alpha\mathbf{x}))} \quad (4.18)$$

donde

- $K$  es una matriz diagonal de ganancias (constantes),
- $m$  es una constante de diseño,
- $\alpha$  es una constante de diseño.

#### Ley de control (propuesta 3)

El gradiente de la función energía potencial artificial genera la estructura característica de la ley de control:

$$\nabla \mathcal{U}_a(\mathbf{x}) = K \frac{\cosh(\alpha\mathbf{x}) \sinh^{2m-1}(\alpha\mathbf{x}) + \sinh(\alpha\mathbf{x}) \cosh^{2m-1}(\alpha\mathbf{x})}{\sinh^{2m}(\alpha\mathbf{x}) + \cosh^{2m}(\alpha\mathbf{x})} \quad (4.19)$$

La estructura del algoritmo de control, conformada por la combinación de las funciones hiperbólicas  $\cosh(\dots)$  y  $\sinh(\dots)$  es una propuesta completamente original, nunca antes publicada, que además puede implementarse de manera sencilla en los sistemas robóticos disponibles en el laboratorio de robótica y control de la BUAP.

Es posible simplificar significativamente el algoritmo de control mostrado en la ecuación (4.19) de manera que se reduzca sustancialmente el número y grado de las operaciones matemáticas del algoritmo de control, disminuyendo la carga en el controlador al calcular los pares aplicados al robot de la siguiente manera:

$$\frac{\cosh(\alpha\mathbf{x}) \sinh^{2m-1}(\alpha\mathbf{x}) + \sinh(\alpha\mathbf{x}) \cosh^{2m-1}(\alpha\mathbf{x})}{\sinh^{2m}(\alpha\mathbf{x}) + \cosh^{2m}(\alpha\mathbf{x})} = \frac{\cosh(\alpha\mathbf{x}) \sinh^{2m-1}(\alpha\mathbf{x})}{\sinh^{2m}(\alpha\mathbf{x}) + \cosh^{2m}(\alpha\mathbf{x})} + \frac{\sinh(\alpha\mathbf{x}) \cosh^{2m-1}(\alpha\mathbf{x})}{\sinh^{2m}(\alpha\mathbf{x}) + \cosh^{2m}(\alpha\mathbf{x})} \quad (4.20)$$

Considere las siguientes identidades de las funciones hiperbólicas:

$$\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \tanh(x) \quad (4.21)$$

$$\frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \coth(x) = \frac{1}{\tanh(x)} \quad (4.22)$$

Reescribiendo la ecuación (4.20) y sustituyendo las propiedades (4.21) y (4.22) tenemos:

$$\frac{\cosh(\alpha\mathbf{x}) \sinh^{2m-1}(\alpha\mathbf{x})}{\sinh^{2m}(\alpha\mathbf{x}) + \cosh^{2m}(\alpha\mathbf{x})} + \frac{\sinh(\alpha\mathbf{x}) \cosh^{2m-1}(\alpha\mathbf{x})}{\sinh^{2m}(\alpha\mathbf{x}) + \cosh^{2m}(\alpha\mathbf{x})} = \frac{\left(\frac{\cosh(\alpha\mathbf{x})}{\sinh(\alpha\mathbf{x})}\right) \cancel{(\sinh^{2m}(\alpha\mathbf{x}))}}{\cancel{(\sinh^{2m}(\alpha\mathbf{x}))} \left(1 + \frac{\cosh^{2m}(\alpha\mathbf{x})}{\sinh^{2m}(\alpha\mathbf{x})}\right)} + \frac{\left(\frac{\sinh(\alpha\mathbf{x})}{\cosh(\alpha\mathbf{x})}\right) \cancel{(\cosh^{2m}(\alpha\mathbf{x}))}}{\cancel{(\cosh^{2m}(\alpha\mathbf{x}))} \left(1 + \frac{\sinh^{2m}(\alpha\mathbf{x})}{\cosh^{2m}(\alpha\mathbf{x})}\right)} \quad (4.23)$$

$$\frac{\frac{1}{\tanh(\alpha\mathbf{x})}}{1 + \frac{1}{\tanh^{2m}(\alpha\mathbf{x})}} + \frac{\tanh(\alpha\mathbf{x})}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\mathbf{x})} = \frac{\frac{1}{\tanh(\alpha\mathbf{x})}}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\mathbf{x})} + \frac{\tanh(\alpha\mathbf{x})}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\mathbf{x})} \quad (4.24)$$

$$\frac{\frac{1}{\tanh(\alpha\mathbf{x})}}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\mathbf{x})} + \frac{\tanh(\alpha\mathbf{x})}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\mathbf{x})} = \frac{\tanh^{2m}(\alpha\mathbf{x})}{(\tanh(\alpha\mathbf{x})) (1 + \tanh^{2m}(\alpha\mathbf{x}))} + \frac{\tanh(\alpha\mathbf{x})}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\mathbf{x})}$$

$$\frac{\tanh^{2m}(\alpha\mathbf{x})}{(\tanh(\alpha\mathbf{x})) (1 + \tanh^{2m}(\alpha\mathbf{x}))} + \frac{\tanh(\alpha\mathbf{x})}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\mathbf{x})} = \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha\mathbf{x})}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\mathbf{x})} + \frac{\tanh(\alpha\mathbf{x})}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\mathbf{x})} \quad (4.25)$$

Por lo tanto, podemos afirmar que:

$$\frac{\cosh(\alpha\mathbf{x}) \sinh^{2m-1}(\alpha\mathbf{x}) + \sinh(\alpha\mathbf{x}) \cosh^{2m-1}(\alpha\mathbf{x})}{\sinh^{2m}(\alpha\mathbf{x}) + \cosh^{2m}(\alpha\mathbf{x})} = \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha\mathbf{x}) + \tanh(\alpha\mathbf{x})}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\mathbf{x})} \quad (4.26)$$

El algoritmo de control resultante posee un comportamiento característico ideal para su implementación en sistemas robóticos y otros sistemas de control por ganancia positiva, en lo que además, sea necesario acotar la acción de control dentro de un rango seguro definido por el usuario.

La aportación del parámetro  $m$  se muestra en la Fig. 4.2. La acción de control saturada mostrada en la Fig. 4.1 previene el exceso de torque proporcionado al robot mediante la elección correcta de las ganancias proporcional y derivativa en el algoritmo de control, en combinación con el adecuado diseño de reglas de sintonía. La estructura matemática del control actúa por sí misma con una medida de seguridad para el robot al limitar el torque máximo que se puede proporcionar, el cual puede producirse por alguna perturbación externa en el robot, o un diseño deficiente.

La región de operación en el primer y tercer cuadrantes, garantizan que el algoritmo de control es adecuado para su implementación, y que este otorgará una respuesta de

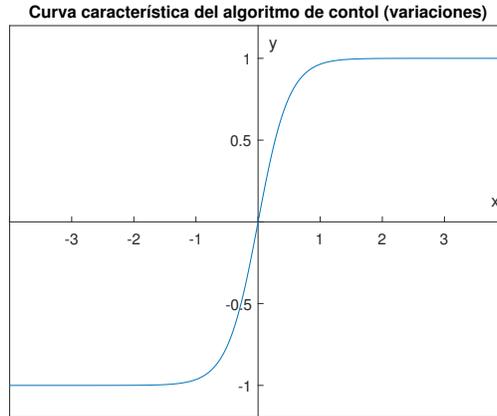


Figura 4.1: Gráfica característica de controlador 2 (parámetros:  $m = 1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $k_p = 1$ ).

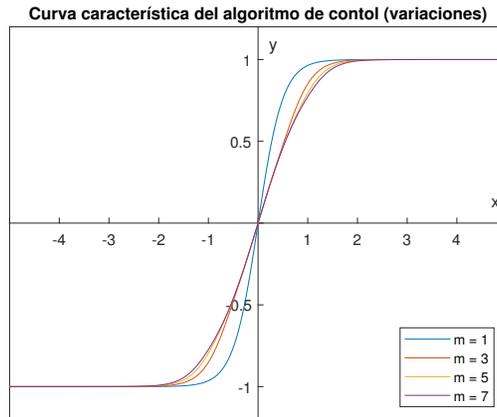


Figura 4.2: Aportación del parámetro  $m$  en el algoritmo de control (parámetros:  $\alpha = 1$ ,  $k_p = 1$ ).

control en el la dirección correcta mientras el robot no alcance su posición deseada.

La curva característica de este algoritmo de control puede asemejarse a la función  $\tanh(\dots)$ , distinguiéndose principalmente por la región de transición previa a la saturación, siendo el algoritmo de control propuesto más rápido, con una transición menos suavizada, tal como se muestra en la Fig 4.2. Mediante la adecuada selección del parámetro  $\alpha$ , es posible modificar la pendiente de la región de transición de modo que esta se suavice ligeramente, o se acentúe, de manera similar a la función  $\text{signo}(\dots)$ .

Sustituyendo la simplificación (4.26) en la función candidata a ley de control propuesta en (4.19), se obtiene una versión muy reducida del mismo control sin pérdida de generalidad. La ley de control final se se construye a partir del gradiente de la fun-

ción energía potencial artificial correspondiente, sustituyendo las variables  $\tilde{\mathbf{q}}$ ,  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$  y las matrices de ganancias  $K_p$  y  $K_v$  del problema de regulación y la ley de control PD, y puede escribirse como:

$$\boldsymbol{\tau}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = K_p \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + \tanh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \tanh^{2m}(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - K_v \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) + \tanh(\alpha \dot{\tilde{\mathbf{q}}})}{1 + \tanh^{2m}(\alpha \dot{\tilde{\mathbf{q}}})} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (4.27)$$

Esta versión reducida del algoritmo de control, reduce la carga de recursos necesaria para ejecutar el algoritmo en tiempo real en un robot de  $n$  grados de libertad, además de estar formado principalmente por una única función hiperbólica, que es altamente eficiente, en algunos de los lenguajes de programación disponibles en microcontroladores.

El algoritmo de control resultante posee un comportamiento característico ideal para su implementación en robots manipuladores y otros sistemas de control por ganancia positiva, en lo que además, sea necesario acotar la acción de control dentro de un rango seguro definido por el usuario.

## 4.4. Análisis de propuestas de algoritmos de control

Las ecuaciones (4.14), (4.17) y (4.27) son leyes de control derivadas del algoritmo de control clásico PD, que incorporan una estructura saturada, además de características únicas que modifican la dinámica del robot de manera distinta a distintos algoritmos documentados como el control PDtahn. La estructura matemática que poseen las 3 propuestas está diseñada de manera que sean funciones continuas, y su curva característica conserve sus las propiedades de control saturado.

En el diseño de leyes de control mediante moldeo de energía existe una cantidad infinita de implementaciones distintas de funciones energía potencial artificial que resulten en controladores funcionales, sin embargo, los algoritmos de control saturados basados en funciones hiperbólicas son muy limitados, pues sólo existen pocas funciones hiperbólicas, de las cuales hay un número reducido que se encuentran implementadas de manera eficiente en algunos lenguajes de programación. Las dificultades de algunos microcontroladores para realizar cálculos de funciones hiperbólicas ocurre frecuentemente por el poco uso que se le da a dichas funciones, porque existen regiones en dichas funciones que llevan a resultados indefinidos o demasiado grandes para la memoria disponible, o por problemas fundamentalmente más simples, como la ausencia de otras funciones o sucesiones de las que están compuestas las funciones hiperbólicas. De cualquier modo, las leyes de control con esta construcción particular se construyen principalmente a partir de las funciones  $\sinh(\dots)$ ,  $\cosh(\dots)$  y  $\tanh(\dots)$ , que son funciones altamente eficientes y se encuentran disponibles en una variedad de lenguajes de programación y dispositivos de control, por lo que podemos estar seguros de que todas

las propuestas funcionarán de manera adecuada y en tiempo real.

A pesar de la evidente similitud que existe entre los algoritmos de control, estos son sustancialmente diferentes al ser implementados en el controlador. Los cambios sutiles en la estructura matemática de alguna de las leyes de control puede llevar a un desempeño significativamente distinto, además de la evidente diferencia en la carga de cómputo derivada del orden de las funciones determinado por el parámetro de diseño  $m$ . En el caso de la propuesta 1, se tiene un control sencillo, que requiere únicamente de 2 tipos distintos de funciones hiperbólicas, sencillo de utilizar y muy similar a un control PDtanh. La ley de control de la propuesta 2 presenta algunas diferencias importantes con los demás algoritmos de control, está formado por las funciones hiperbólicas  $\sinh(\dots)$  y  $\cosh(\dots)$ , pero la estructura matemática es notablemente más compleja, y la diferencia en su curva característica no es lo suficientemente grande como para considerarla en una aplicación distinta en la que puedan ser implementadas las propuestas 2 y 3, por lo que podemos considerarla meramente como un ejemplo con fines académicos, o en un caso muy particular de aplicación en el que el software del microcontrolador sólo soporte las 2 funciones hiperbólicas que lo conforman.

La tercera propuesta presenta una estructura completamente distinta, novedosa y de interés para fines académicos y en aplicaciones de robótica industriales. Se compone únicamente de la función  $\tanh(\dots)$  que suele encontrarse implementada en muchos lenguajes de programación de manera nativa, y en su defecto, es sencilla de implementar. La estructura que posee es similar a controles documentados de alto desempeño (como el control PDtanh), y a su vez es muy versátil, permitiendo ajustar la estructura a las necesidades del usuario, por podría ser posible obtener un desempeño mayor con una sintonía adecuada de ganancias.

Debido a su estructura favorable y a que posee características valiosas para los objetivos de este trabajo de tesis, el análisis de estabilidad de los controles propuestos se centran en esta ley de control.

## 4.5. Análisis de estabilidad de leyes de control para robots manipuladores

Partiendo de la estructura matemática de la ley de control simplificado mostrado en la ecuación (4.26) establecemos algunas de sus propiedades, principalmente las cotas superiores e inferiores que posee. El analizar la estructura de la ecuación, es notable que la ley de control está acotada; al estar compuesta principalmente por la función  $\tanh(\dots)$ , la cual está acotada, podemos afirmar que:

$$-1 \leq \tanh(x) \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (4.28)$$

$$-1 \leq \tanh^{2m-1}(x) \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (4.29)$$

Por otra parte, la función  $\tanh(\dots)$  elevada a una potencia par, es una función semidefinida positiva tal que:

$$0 \leq \tanh^{2m}(x) \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (4.30)$$

Por lo que, la ecuación característica del algoritmo de control está acotada:

$$-1 \leq \frac{\tanh^{2m-1}(x) + \tanh(x)}{1 + \tanh^{2m}(x)} \leq 1 \quad (4.31)$$

A partir de las ecuaciones (4.28) a (4.31), podemos afirmar que la norma euclidiana del vector  $\nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})$  está acotado superiormente por:

$$\left\| \begin{bmatrix} \frac{\tanh^{2m-1}(x_1) + \tanh(x_1)}{1 + \tanh^{2m}(x_1)} \\ \frac{\tanh^{2m-1}(x_2) + \tanh(x_2)}{1 + \tanh^{2m}(x_2)} \\ \vdots \\ \frac{\tanh^{2m-1}(x_n) + \tanh(x_n)}{1 + \tanh^{2m}(x_n)} \end{bmatrix} \right\| \leq \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + \dots + 1^2}$$

$$\left\| \begin{bmatrix} \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha x_1) + \tanh(\alpha x_1)}{1 + \tanh^{2m}(\alpha x_1)} \\ \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha x_2) + \tanh(\alpha x_2)}{1 + \tanh^{2m}(\alpha x_2)} \\ \vdots \\ \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha x_n) + \tanh(\alpha x_n)}{1 + \tanh^{2m}(\alpha x_n)} \end{bmatrix} \right\| \leq \begin{cases} \sqrt{n} \gamma_{p_m} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \sqrt{n} \gamma_{p_m} \|\mathbf{x}\| \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (4.32)$$

El gradiente de la ecuación característica del algoritmo de control  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\tanh^{2m-1}(x) + \tanh(x)}{1 + \tanh^{2m}(x)} \right)$  puede ser expresado como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\tanh^{2m-1}(x) + \tanh(x)}{1 + \tanh^{2m}(x)} \right) = \frac{\operatorname{sech}^2(x) + 2m \operatorname{sech}^2(x) \tanh^{2m-2}(x) - \operatorname{sech}^2(x) \tanh^{2m-2}(x)}{(1 + \tanh^{2m}(x))^2}$$

$$+ \frac{-\operatorname{sech}^2(x) \tanh^{4m-2}(x) - 2m \operatorname{sech}^2(x) \tanh^{2m}(x) + \operatorname{sech}^2(x) \tanh^{2m}(x)}{(1 + \tanh^{2m}(x))^2} \quad (4.33)$$

despejando  $\operatorname{sech}^2(x)$  en (4.33):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\tanh^{2m-1}(x) + \tanh(x)}{1 + \tanh^{2m}(x)} \right) = \frac{(\operatorname{sech}^2(x)) (1 + 2m \tanh^{2m-2}(x) - \tanh^{2m-2}(x) - \tanh^{4m-2}(x) - 2m \tanh^{2m}(x) + \tanh^{2m}(x))}{(1 + \tanh^{2m}(x))^2} \quad (4.34)$$

Observando el efecto del parámetro de diseño  $m$ , podemos afirmar que el pico máximo del gradiente se obtiene en  $m = 1$  de la siguiente manera:

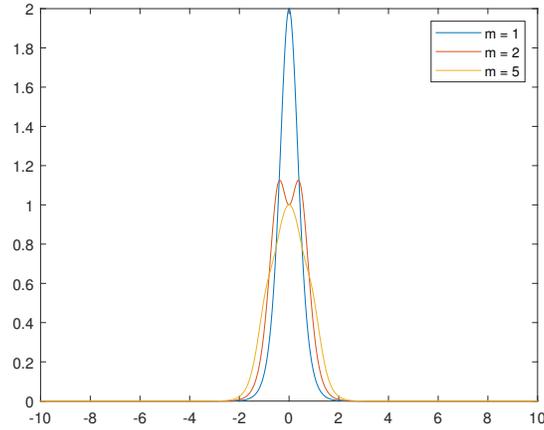


Figura 4.3: Curva característica de gradiente de algoritmo de control.

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tanh^{2m-1}(x) + \tanh(x)}{1 + \tanh^2(x)} \right|_{x=0} = \frac{(\operatorname{sech}^2(0)) (1 + 2m \tanh^{2m-2}(0) - \tanh^{2m-2}(0) - \tanh^{4m-2}(0) - 2m \tanh^{2m}(0) + \tanh^{2m}(0))}{(1 + \tanh^2(0))^2} \quad (4.35)$$

considerando  $m = 1$

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tanh^{2-1}(x) + \tanh(x)}{1 + \tanh^2(x)} \right|_{x=0} = \frac{((1)^2) (1 + 2(0)^{2-2} - (0)^{2-2} - (0)^{4-2} - 2(0)^2 + (0)^2)}{(1 + (0)^2)^2} \quad (4.36)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tanh^{2-1}(x) + \tanh(x)}{1 + \tanh^2(x)} \right|_{x=0} = \frac{((1)^2) (1 + 2 - 1)}{(1)^2} = \frac{2}{1} = 2 \quad (4.37)$$

El gradiente de la ecuación característica de la ley de control es bastante más complejo y dificulta el análisis profundo de su comportamiento. Podemos notar que, salvo por la función  $\operatorname{sech}^2(x)$ , la estructura del gradiente de control se compone de funciones  $\tanh(\dots)$  que se cancelan entre sí. Finalmente, podemos asegurarnos de que existe una cota superior al analizar la curva característica de la ecuación. En la Fig. 4.3 se muestra la curva característica de la ecuación (4.34) para diferentes valores de  $m$ , es fácil notar el pico máximo de la ecuación mostrada, y con la evidencia mostrada en las ecuaciones (4.35) - (4.37), podemos definir la cota de la ecuación (4.34) del mismo modo que se realizó para la ecuación (4.32) y se añade la variable auxiliar  $\rho_{p_m}$  para incluir rizados generados por el parámetro  $m$ , necesario para la demostración de estabilidad en algoritmos de control saturados.

$$\left\| \begin{bmatrix} \frac{(\operatorname{sech}^2(x_1))(1+2m \tanh^{2m-2}(x_1) - \tanh^{2m-2}(x_1) - \tanh^{4m-2}(x_1) - 2m \tanh^{2m}(x_1) + \tanh^{2m}(x_1))}{(1+\tanh^{2m}(x_1))^2} \\ \frac{(\operatorname{sech}^2(x_2))(1+2m \tanh^{2m-2}(x_2) - \tanh^{2m-2}(x_2) - \tanh^{4m-2}(x_2) - 2m \tanh^{2m}(x_2) + \tanh^{2m}(x_2))}{(1+\tanh^{2m}(x_2))^2} \\ \vdots \\ \frac{(\operatorname{sech}^2(x_i))(1+2m \tanh^{2m-2}(x_i) - \tanh^{2m-2}(x_i) - \tanh^{4m-2}(x_i) - 2m \tanh^{2m}(x_i) + \tanh^{2m}(x_i))}{(1+\tanh^{2m}(x_i))^2} \end{bmatrix} \right\| \leq \begin{cases} 2\sqrt{n}\rho_{p_m} \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ 2\sqrt{n}\rho_{p_m} \|\mathbf{x}\| \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (4.38)$$

Finalmente, es importante mencionar que en este algoritmo de control se incluyen únicamente funciones hiperbólicas estrictamente continuas, por lo que no existe ningún conflicto o restricción para demostrar estabilidad asintótica del algoritmo de control mediante el método directo de Lyapunov.

#### 4.5.1. Análisis de estabilidad de Lyapunov

Partiendo del algoritmo de control generado por la ecuación (4.27) tenemos

$$\boldsymbol{\tau} = K_p \begin{bmatrix} \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha\tilde{q}_1) + \tanh(\alpha\tilde{q}_1)}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\tilde{q}_1)} \\ \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha\tilde{q}_2) + \tanh(\alpha\tilde{q}_2)}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\tilde{q}_2)} \\ \vdots \\ \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha\tilde{q}_n) + \tanh(\alpha\tilde{q}_n)}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\tilde{q}_n)} \end{bmatrix} - K_v \begin{bmatrix} \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha\dot{q}_1) + \tanh(\alpha\dot{q}_1)}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\dot{q}_1)} \\ \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha\dot{q}_2) + \tanh(\alpha\dot{q}_2)}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\dot{q}_2)} \\ \vdots \\ \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha\dot{q}_n) + \tanh(\alpha\dot{q}_n)}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\dot{q}_n)} \end{bmatrix} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (4.39)$$

La ecuación en lazo cerrado del sistema se obtiene al combinar la ecuación característica del sistema dinámico junto la ley de control mostrado en la ecuación (4.39).

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^{-1}(\mathbf{q}) \left[ K_p \begin{bmatrix} \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha\tilde{q}_1) + \tanh(\alpha\tilde{q}_1)}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\tilde{q}_1)} \\ \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha\tilde{q}_2) + \tanh(\alpha\tilde{q}_2)}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\tilde{q}_2)} \\ \vdots \\ \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha\tilde{q}_n) + \tanh(\alpha\tilde{q}_n)}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\tilde{q}_n)} \end{bmatrix} - K_v \begin{bmatrix} \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha\dot{q}_1) + \tanh(\alpha\dot{q}_1)}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\dot{q}_1)} \\ \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha\dot{q}_2) + \tanh(\alpha\dot{q}_2)}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\dot{q}_2)} \\ \vdots \\ \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha\dot{q}_n) + \tanh(\alpha\dot{q}_n)}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\dot{q}_n)} \end{bmatrix} - B\dot{\mathbf{q}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \right] \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

#### Propuesta de función candidata de Lyapunov estricta

Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$\begin{aligned}
V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) = & \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2m\alpha} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\sinh^{2m}(\alpha\tilde{q}_1) + \cosh^{2m}(\alpha\tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(\sinh^{2m}(\alpha\tilde{q}_2) + \cosh^{2m}(\alpha\tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\sinh^{2m}(\alpha\tilde{q}_n) + \cosh^{2m}(\alpha\tilde{q}_n))} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\sinh^{2m}(\alpha\tilde{q}_1) + \cosh^{2m}(\alpha\tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(\sinh^{2m}(\alpha\tilde{q}_2) + \cosh^{2m}(\alpha\tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\sinh^{2m}(\alpha\tilde{q}_n) + \cosh^{2m}(\alpha\tilde{q}_n))} \end{bmatrix} \\
& - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \begin{bmatrix} \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha\tilde{q}_1) + \tanh(\alpha\tilde{q}_1)}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\tilde{q}_1)} \\ \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha\tilde{q}_2) + \tanh(\alpha\tilde{q}_2)}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\tilde{q}_2)} \\ \vdots \\ \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha\tilde{q}_n) + \tanh(\alpha\tilde{q}_n)}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\tilde{q}_n)} \end{bmatrix}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\
& + \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0^2}{[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \begin{bmatrix} \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha\tilde{q}_1) + \tanh(\alpha\tilde{q}_1)}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\tilde{q}_1)} \\ \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha\tilde{q}_2) + \tanh(\alpha\tilde{q}_2)}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\tilde{q}_2)} \\ \vdots \\ \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha\tilde{q}_n) + \tanh(\alpha\tilde{q}_n)}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\tilde{q}_n)} \end{bmatrix}^T M(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha\tilde{q}_1) + \tanh(\alpha\tilde{q}_1)}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\tilde{q}_1)} \\ \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha\tilde{q}_2) + \tanh(\alpha\tilde{q}_2)}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\tilde{q}_2)} \\ \vdots \\ \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha\tilde{q}_n) + \tanh(\alpha\tilde{q}_n)}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\tilde{q}_n)} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Observando la estructura matemática de la ecuación (4.41) podemos notar que su segundo componente es definido positivo debido a que la matriz  $K_p$  es una matriz diagonal compuesta por las ganancias proporcionales del algoritmo de control, las cuales son parámetros de diseño siempre positivas. Analizando los términos restantes de la ecuación propuesta de Lyapunov, es notable que esta puede reestructurarse en forma cuadrática, de modo que se demuestre que es definida positiva mediante el criterio de Sylvester.

Considere la estructura de una función cuadrática perfecta

$$\frac{1}{2}(a-c)^2b = \frac{1}{2}(a-c)b(a-c) = \frac{1}{2}a^2b - abc - \frac{1}{2}bc^2 = \frac{1}{2}aba - abc - \frac{1}{2}cbc \tag{4.42}$$

De manera análoga a lo mostrado en la ecuación (4.42), es posible reestructurar la ecuación (4.41) en forma cuadrática

$$\begin{aligned}
V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) = & \frac{1}{2} \underbrace{\dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}_{a^2b} + \frac{1}{2m\alpha} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\sinh^{2m}(\alpha\tilde{q}_1) + \cosh^{2m}(\alpha\tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(\sinh^{2m}(\alpha\tilde{q}_2) + \cosh^{2m}(\alpha\tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\sinh^{2m}(\alpha\tilde{q}_n) + \cosh^{2m}(\alpha\tilde{q}_n))} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\sinh^{2m}(\alpha\tilde{q}_1) + \cosh^{2m}(\alpha\tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(\sinh^{2m}(\alpha\tilde{q}_2) + \cosh^{2m}(\alpha\tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\sinh^{2m}(\alpha\tilde{q}_n) + \cosh^{2m}(\alpha\tilde{q}_n))} \end{bmatrix} \\
& - \underbrace{\frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \begin{bmatrix} \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha\tilde{q}_1) + \tanh(\alpha\tilde{q}_1)}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\tilde{q}_1)} \\ \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha\tilde{q}_2) + \tanh(\alpha\tilde{q}_2)}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\tilde{q}_2)} \\ \vdots \\ \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha\tilde{q}_n) + \tanh(\alpha\tilde{q}_n)}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\tilde{q}_n)} \end{bmatrix}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}_{abc}
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0^2}{[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2]} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha\tilde{q}_1) + \tanh(\alpha\tilde{q}_1)}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\tilde{q}_1)} \\ \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha\tilde{q}_2) + \tanh(\alpha\tilde{q}_2)}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\tilde{q}_2)} \\ \vdots \\ \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha\tilde{q}_n) + \tanh(\alpha\tilde{q}_n)}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\tilde{q}_n)} \end{bmatrix}^T M(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha\tilde{q}_1) + \tanh(\alpha\tilde{q}_1)}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\tilde{q}_1)} \\ \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha\tilde{q}_2) + \tanh(\alpha\tilde{q}_2)}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\tilde{q}_2)} \\ \vdots \\ \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha\tilde{q}_n) + \tanh(\alpha\tilde{q}_n)}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\tilde{q}_n)} \end{bmatrix}}{bc^2} \quad (4.43)$$

Por lo tanto, sustituyendo (4.43) en el primer término de (4.42)

$$V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2m\alpha} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\sinh^{2m}(\alpha\tilde{q}_1) + \cosh^{2m}(\alpha\tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(\sinh^{2m}(\alpha\tilde{q}_2) + \cosh^{2m}(\alpha\tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\sinh^{2m}(\alpha\tilde{q}_n) + \cosh^{2m}(\alpha\tilde{q}_n))} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\sinh^{2m}(\alpha\tilde{q}_1) + \cosh^{2m}(\alpha\tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(\sinh^{2m}(\alpha\tilde{q}_2) + \cosh^{2m}(\alpha\tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\sinh^{2m}(\alpha\tilde{q}_n) + \cosh^{2m}(\alpha\tilde{q}_n))} \end{bmatrix} \\ + \frac{1}{2} \left[ \dot{\mathbf{q}} - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \begin{bmatrix} \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha\tilde{q}_1) + \tanh(\alpha\tilde{q}_1)}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\tilde{q}_1)} \\ \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha\tilde{q}_2) + \tanh(\alpha\tilde{q}_2)}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\tilde{q}_2)} \\ \vdots \\ \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha\tilde{q}_n) + \tanh(\alpha\tilde{q}_n)}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\tilde{q}_n)} \end{bmatrix} \right]^T M(\mathbf{q}) \left[ \dot{\mathbf{q}} - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \begin{bmatrix} \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha\tilde{q}_1) + \tanh(\alpha\tilde{q}_1)}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\tilde{q}_1)} \\ \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha\tilde{q}_2) + \tanh(\alpha\tilde{q}_2)}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\tilde{q}_2)} \\ \vdots \\ \frac{\tanh^{2m-1}(\alpha\tilde{q}_n) + \tanh(\alpha\tilde{q}_n)}{1 + \tanh^{2m}(\alpha\tilde{q}_n)} \end{bmatrix} \right]$$

Por lo tanto, considerando que la matriz  $M(\mathbf{q})$  es simétrica y definida positiva, queda demostrado que la función candidata de Lyapunov es definida positiva.

### Derivada de función candidata de Lyapunov

Con el propósito de simplificar significativamente el análisis de estabilidad, podemos reescribir la ecuación (4.41) como sigue

$$V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2m\alpha} \sqrt{\mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})}^T K_p \sqrt{\mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})} - \epsilon(\tilde{\mathbf{q}}) \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ + \frac{1}{2} \epsilon^2(\tilde{\mathbf{q}}) \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}}) \quad (4.44)$$

donde  $\epsilon(\tilde{\mathbf{q}})$  es una simplificación de la función

$$\epsilon(\tilde{\mathbf{q}}) = \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \in \mathbb{R}_+ \quad \forall \tilde{\mathbf{q}} \quad (4.45)$$

siendo  $\epsilon_0$  una constante de diseño auxiliar positiva y menor a 1. La ecuación (4.45) resulta siempre en una constante positiva.

Considere las siguientes propiedades y simplificaciones

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{q}_d - \mathbf{q}) = -\dot{\mathbf{q}} \quad (4.46)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = M^{-1}(\mathbf{q}) [K_p \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}}) - K_v \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}}) - B\dot{\mathbf{q}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}] \quad (4.47)$$

$$[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2 \leq [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|] \quad (4.48)$$

$$\dot{\epsilon}(\tilde{\mathbf{q}}) = \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}}}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \leq \frac{\epsilon_0 \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\mathbf{q}}\|}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \leq \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \in \mathbb{R}_+ \quad \forall \tilde{\mathbf{q}} \quad (4.49)$$

$$\dot{\epsilon}^2(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{2\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}}}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^3} = \underbrace{\left[ \frac{\epsilon_0^2}{[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \right]}_{\epsilon^2(\tilde{\mathbf{q}})} \underbrace{\left[ \frac{2\tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}}}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]} \right]}_{2k(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})} \quad (4.50)$$

$$k(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \leq \frac{\|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\mathbf{q}}\|}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]} \leq \|\dot{\mathbf{q}}\| \quad (4.51)$$

$$\frac{1}{2} \dot{\epsilon}^2(\tilde{\mathbf{q}}) = \epsilon^2(\tilde{\mathbf{q}}) k(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \leq \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \|\dot{\mathbf{q}}\| \quad (4.52)$$

$$\epsilon(\tilde{\mathbf{q}})^2 = \frac{\epsilon_0^2}{[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \leq \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \quad (4.53)$$

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})) = \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} \quad (4.54)$$

$$\frac{d}{dt} (\nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})) = -\nabla \dot{\mathcal{U}}_a(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (4.55)$$

Partiendo de la simplificación mostrada en la ecuación (4.44), y haciendo uso de las ecuaciones (4.46) a (4.55), podemos hallar la derivada temporal de la función candidata de Lyapunov propuesta como sigue:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T K_p \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}}) - \dot{\epsilon}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ &+ \epsilon(\tilde{\mathbf{q}}) \nabla \dot{\mathcal{U}}_a(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \epsilon(\tilde{\mathbf{q}}) \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \epsilon(\tilde{\mathbf{q}}) \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} \\ &+ \frac{1}{2} \epsilon^2(\tilde{\mathbf{q}}) k(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}}) + \frac{1}{2} \epsilon^2(\tilde{\mathbf{q}}) \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})^T \dot{M}(\mathbf{q}) \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}}) \\ &- \epsilon^2(\tilde{\mathbf{q}}) \nabla \dot{\mathcal{U}}_a(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}}) \end{aligned} \quad (4.56)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.46) y (4.47) en (4.56) tenemos:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) = & \dot{\mathbf{q}}^T \cancel{M(\tilde{\mathbf{q}})} [\cancel{M^{-1}(\tilde{\mathbf{q}})} [K_p \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}}) - K_v \nabla \mathcal{U}_a(\dot{\mathbf{q}}) - B\dot{\mathbf{q}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}]] \\
& + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T K_p \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}}) - \dot{\epsilon}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\
& + \epsilon(\tilde{\mathbf{q}}) \nabla \dot{\mathcal{U}}_a(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \epsilon(\tilde{\mathbf{q}}) \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\
& + \frac{1}{2} \epsilon^2(\tilde{\mathbf{q}}) k(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}}) \\
& - \epsilon(\tilde{\mathbf{q}}) \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})^T \cancel{M(\tilde{\mathbf{q}})} [\cancel{M^{-1}(\tilde{\mathbf{q}})} [K_p \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}}) \\
& - K_v \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}} - B\dot{\mathbf{q}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}]] \\
& + \frac{1}{2} \epsilon^2(\tilde{\mathbf{q}}) \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})^T \underbrace{C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T}_{\dot{M}(\mathbf{q})} \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}}) \\
& - \epsilon^2(\tilde{\mathbf{q}}) \nabla \dot{\mathcal{U}}_a(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Reduciendo términos semejantes:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) = & \cancel{\dot{\mathbf{q}}^T K_p \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})} - \dot{\mathbf{q}}^T K_v \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} - \underbrace{\dot{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}_{\text{Propiedad de antisimetría}} \\
& - \cancel{\dot{\mathbf{q}}^T K_p \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})} - \dot{\epsilon}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \epsilon(\tilde{\mathbf{q}}) \nabla \dot{\mathcal{U}}_a(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\
& - \epsilon(\tilde{\mathbf{q}}) \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})^T \underbrace{C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T}_{\dot{M}(\mathbf{q})} \dot{\mathbf{q}} \\
& + \frac{1}{2} \epsilon^2(\tilde{\mathbf{q}}) k(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}}) \\
& - \epsilon(\tilde{\mathbf{q}}) \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})^T K_p \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}}) + \epsilon(\tilde{\mathbf{q}}) \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})^T K_v \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}}) \\
& + \epsilon(\tilde{\mathbf{q}}) \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})^T B \dot{\mathbf{q}} + \epsilon(\tilde{\mathbf{q}}) \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} \\
& + \frac{1}{2} \epsilon^2(\tilde{\mathbf{q}}) \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})^T \underbrace{[C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T]}_{\dot{M}(\mathbf{q})} \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}}) \\
& - \epsilon^2(\tilde{\mathbf{q}}) \nabla \dot{\mathcal{U}}_a(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})
\end{aligned} \tag{4.58}$$

A partir de las reducciones anteriores, tenemos que la ecuación (4.56) ahora puede reescribirse como:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) = & -\dot{\mathbf{q}}^T K_v \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} - \dot{\epsilon}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\
& + \epsilon(\tilde{\mathbf{q}}) \nabla \dot{\mathcal{U}}_a(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \epsilon(\tilde{\mathbf{q}}) \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} \\
& + \epsilon^2(\tilde{\mathbf{q}}) k(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}}) \\
& - \epsilon(\tilde{\mathbf{q}}) \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})^T K_p \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}}) + \epsilon(\tilde{\mathbf{q}}) \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})^T K_v \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}}) \\
& + \epsilon(\tilde{\mathbf{q}}) \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})^T B \dot{\mathbf{q}} \\
& + \frac{1}{2} \epsilon^2(\tilde{\mathbf{q}}) \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})^T [C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T] \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}}) \\
& - \epsilon^2(\tilde{\mathbf{q}}) \nabla \dot{\mathcal{U}}_a(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})
\end{aligned} \tag{4.59}$$

La ecuación (4.59) es acotada superiormente para favorecer la demostración de un intervalo en el que la derivada temporal de función candidata de Lyapunov sea definida

negativa. Empleando las desigualdades (4.32) y (4.38), junto con las propiedades (1.5) - (1.9) y (4.45) - (4.52), tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) \leq & -\lambda_{K_v}^{\min} \sqrt{n} \gamma_{v_m} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 - \lambda_B^{\min} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + \epsilon(\tilde{\mathbf{q}}) \beta_M \sqrt{n} \rho_{p_m} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \\ & - \epsilon(\tilde{\mathbf{q}}) \beta_M \sqrt{n} \gamma_{v_m} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 - \epsilon(\tilde{\mathbf{q}}) k_c \sqrt{n} \gamma_{v_m} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 - \epsilon(\tilde{\mathbf{q}}) \lambda_{K_p}^{\min} n \gamma_{v_m}^2 \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 \\ & - \epsilon(\tilde{\mathbf{q}}) \lambda_B^{\max} \sqrt{n} \gamma_{p_m} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\mathbf{q}}\| + \epsilon(\tilde{\mathbf{q}}) \lambda_{K_v}^{\max} n \gamma_{p_m} \rho_{p_m} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\mathbf{q}}\| \\ & + \epsilon(\tilde{\mathbf{q}}) k_c n \gamma_{p_m}^2 \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\mathbf{q}}\| \\ & + \epsilon(\tilde{\mathbf{q}}) \beta_M n \gamma_{p_m}^2 \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\mathbf{q}}\| - \epsilon(\tilde{\mathbf{q}}) n \beta_M \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{aligned} \quad (4.60)$$

Factorizando la ecuación (4.60) tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) \leq & -\epsilon(\tilde{\mathbf{q}}) \lambda_{K_p}^{\min} n \gamma_{v_m}^2 \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 \\ & - [\lambda_B^{\min} - \sqrt{n} [\lambda_{K_v}^{\max} \gamma_{v_m} + \epsilon(\tilde{\mathbf{q}}) (\beta_M (\rho_{p_m} + \gamma_{p_m}) + \gamma_{p_m}) + k_c \gamma_{p_m}]] \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \\ & + \epsilon(\tilde{\mathbf{q}}) [\sqrt{n} \lambda_B^{\max} + n \lambda_{K_v}^{\max} \rho_{p_m} \gamma_{v_m} + n \gamma_{p_m} (\gamma_{p_m} k_c + \beta_M (\gamma_{p_m} + \rho_{p_m}))] \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{aligned}$$

Por lo que podemos reescribir la derivada temporal de la función candidata de Lyapunov en forma matricial:

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \leq - \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix} < 0 \quad (4.61)$$

donde  $\Theta \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz formada por:

$$\theta_{11} = \epsilon(\tilde{\mathbf{q}}) \lambda_{K_p}^{\min} n \gamma_{v_m}^2$$

$$\theta_{12} = \theta_{21} = -\frac{1}{2} \epsilon(\tilde{\mathbf{q}}) [\sqrt{n} \lambda_B^{\max} + n \lambda_{K_v}^{\max} \rho_{p_m} \gamma_{v_m} + n \gamma_{p_m} (\gamma_{p_m} k_c + \beta_M (\gamma_{p_m} + \rho_{p_m}))]$$

$$\theta_{22} = \lambda_B^{\min} - \sqrt{n} [\lambda_{K_v}^{\max} \gamma_{v_m} + \epsilon(\tilde{\mathbf{q}}) (\beta_M (\rho_{p_m} + \gamma_{p_m}) + \gamma_{p_m}) + k_c \gamma_{p_m}].$$

Analizando la ecuación (4.61), podemos afirmar que el componente  $\theta_{11}$  de la matriz  $\Theta$  es positivo debido a que está formado únicamente por constantes positivas. Con esto en consideración, podemos asegurar que la derivada temporal de la función candidata de Lyapunov mientras el determinante  $\det[\Theta]$  de  $\Theta$  sea positivo. Analizando el producto de los términos  $\theta_{11}$ ,  $\theta_{22}$ ,  $\theta_{12}$  y  $\theta_{21}$  tenemos que:

$$(\theta_{11}) (\theta_{22}) > (\theta_{12}) (\theta_{21}) \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} & \epsilon(\tilde{\mathbf{q}}) \left( \lambda_{K_p}^{\min} n \gamma_{v_m}^2 \right) \left( \lambda_B^{\min} - \sqrt{n} \lambda_{K_v}^{\max} \gamma_{v_m} \right) + \epsilon^2(\tilde{\mathbf{q}}) \left( \left( \lambda_{K_p}^{\min} n \gamma_{v_m}^2 \right) \sqrt{n} (\beta_M (\rho_{p_m} + \gamma_{p_m}) + \gamma_{p_m}) + k_c \gamma_{p_m} \right) \\ & > \frac{1}{4} \epsilon^2(\tilde{\mathbf{q}}) [\sqrt{n} \lambda_B^{\max} + n \lambda_{K_v}^{\max} \rho_{p_m} \gamma_{v_m} + n \gamma_{p_m} (\gamma_{p_m} k_c + \beta_M (\gamma_{p_m} + \rho_{p_m}))] \end{aligned} \quad (4.63)$$

multiplicando de ambos lados de la desigualdad por  $\frac{1}{\epsilon(\tilde{\mathbf{q}})}$ :

$$\begin{aligned}
& \left( \lambda_{K_p}^{min} n \gamma_{v_m}^2 \right) \left( \lambda_B^{min} - \sqrt{n} \lambda_{K_v}^{max} \gamma_{v_m} \right) + \epsilon(\tilde{\mathbf{q}}) \left( \left( \lambda_{K_p}^{min} n \gamma_{v_m}^2 \right) \sqrt{n} (\beta_M (\rho_{p_m} + \gamma_{p_m}) + \gamma_{p_m}) + k_c \gamma_{p_m} \right) \\
& > \frac{1}{4} \epsilon(\tilde{\mathbf{q}}) \left[ \sqrt{n} \lambda_B^{max} + n \lambda_{K_v}^{max} \rho_{p_m} \gamma_{v_m} + n \gamma_{p_m} (\gamma_{p_m} k_c + \beta_M (\gamma_{p_m} + \rho_{p_m})) \right]
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Despejando el segundo término del lado izquierdo de la desigualdad:

$$\begin{aligned}
& \left( \lambda_{K_p}^{min} n \gamma_{v_m}^2 \right) \left( \lambda_B^{min} - \sqrt{n} \lambda_{K_v}^{max} \gamma_{v_m} \right) \\
& > \frac{1}{4} \epsilon(\tilde{\mathbf{q}}) \left[ \sqrt{n} \lambda_B^{max} + n \lambda_{K_v}^{max} \rho_{p_m} \gamma_{v_m} + n \gamma_{p_m} (\gamma_{p_m} k_c + \beta_M (\gamma_{p_m} + \rho_{p_m})) \right] \\
& \quad - \epsilon(\tilde{\mathbf{q}}) \left( \left( \lambda_{K_p}^{min} n \gamma_{v_m}^2 \right) \sqrt{n} (\beta_M (\rho_{p_m} + \gamma_{p_m}) + \gamma_{p_m}) + k_c \gamma_{p_m} \right)
\end{aligned} \tag{4.65}$$

Despejando  $\epsilon(\tilde{\mathbf{q}})$  tenemos:

$$\begin{aligned}
& \left( \lambda_{K_p}^{min} n \gamma_{v_m}^2 \right) \left( \lambda_B^{min} - \sqrt{n} \lambda_{K_v}^{max} \gamma_{v_m} \right) \\
& > \epsilon(\tilde{\mathbf{q}}) \left[ \frac{1}{4} \left[ \sqrt{n} \lambda_B^{max} + n \lambda_{K_v}^{max} \rho_{p_m} \gamma_{v_m} + n \gamma_{p_m} (\gamma_{p_m} k_c + \beta_M (\gamma_{p_m} + \rho_{p_m})) \right] \right. \\
& \quad \left. - \left( \left( \lambda_{K_p}^{min} n \gamma_{v_m}^2 \right) \sqrt{n} (\beta_M (\rho_{p_m} + \gamma_{p_m}) + \gamma_{p_m}) + k_c \gamma_{p_m} \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Por lo tanto, podemos afirmar que  $\epsilon_0$  existe en el intervalo

$$\begin{aligned}
& \frac{\left( \lambda_{K_p}^{min} n \gamma_{v_m}^2 \right) \left( \lambda_B^{min} - \sqrt{n} \lambda_{K_v}^{max} \gamma_{v_m} \right)}{\frac{1}{4} \left[ \sqrt{n} \lambda_B^{max} + n \lambda_{K_v}^{max} \rho_{p_m} \gamma_{v_m} + n \gamma_{p_m} (\gamma_{p_m} k_c + \beta_M (\gamma_{p_m} + \rho_{p_m})) \right] - \left( \left( \lambda_{K_p}^{min} n \gamma_{v_m}^2 \right) \sqrt{n} (\beta_M (\rho_{p_m} + \gamma_{p_m}) + \gamma_{p_m}) + k_c \gamma_{p_m} \right)} \\
& > \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} > 0.
\end{aligned} \tag{4.67}$$

Por lo que queda demostrada estabilidad asintótica para robots manipuladores bajo el control propuesto.

## 4.6. Resultados experimentales

Para sustentar la propuesta realizada del algoritmo de control, ahora se presentan los resultados de un experimento realizado con un robot de 3 GDL bajo el algoritmo de control propuesto en condiciones controladas. El robot empleado en el análisis experimental pertenece al laboratorio de electrónica y robótica de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, y está diseñado como robot para pruebas experimentales. La estructura del robot es antropomórfica, compuesta por actuadores únicamente rotacionales y servomotores de transmisión directa de alto torque y resolución. Los servomotores sin escobillas poseen una fricción mínima debido al mínimo rozamiento que existe entre sus elementos, además de admitir un control por entrada de torque, por lo que los algoritmos propuestos en este trabajo son completamente compatibles con

el sistema robótico experimental sin pérdida de generalidad. Las características de los servoactuadores del robot se presentan en la siguiente tabla:

Eslabón	Modelo	Torque [Nm]	Encoder [p/rev]
Base	DM1050A	50	1024000
Hombro	DM1150A	150	1024000
Codo	DM1015B	15	655360

**Tabla 2.** Características de servoactuadores en el robot experimental

El experimento consiste en mover cada una de las articulaciones del robot desde una posición inicial ( $\mathbf{q}(0)^T = \mathbf{0}^T$ ,  $\dot{\mathbf{q}}(0)^T = \mathbf{0}^T$ ), de modo que se logre el objetivo del control, resultando en error de posición y velocidad cero para todas las articulaciones ( $\tilde{\mathbf{q}}(t)^T = \mathbf{0}^T$ ,  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t)^T = \mathbf{0}^T$ ). Los datos del experimento son registrados en un fichero generado por la tarjeta de adquisición de datos embebida en el robot para posteriormente ser analizados. El algoritmo de control empleado en el experimento es el mostrado en la ecuación (4.39), el cual un algoritmo saturado, por lo que se mantiene un torque máximo constante que protege a los servoactuadores de daños causados por errores de posición excesivos o perturbaciones externas.

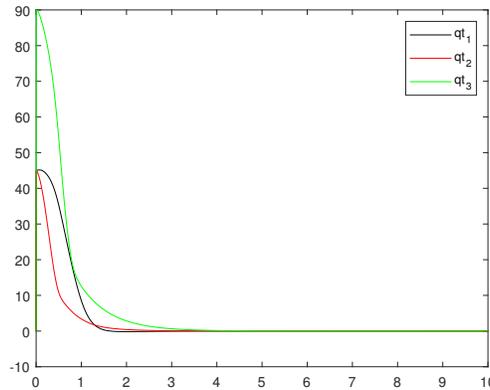


Figura 4.4: Errores de posición del robot experimental para  $m = 1$

La Figura 4.4 muestra los errores de posición del robot experimental en cada uno de sus eslabones para el caso de  $m = 1$ . En este experimento se puede notar la respuesta del robot ante la entrada requerida  $q_{d1} = 45$ ,  $q_{d2} = 45$ ,  $q_{d3} = 90$ , sin ningún sobretiro aparente en las articulaciones, combinado con rápido seguimiento de la entrada de referencia, alcanzando un error mínimo pasados los 3 segundos del experimento. Por otra parte, los pares aplicados a los eslabones del robot, mostrados en la Figura 4.5, demuestran que el robot se mantuvo dentro de los márgenes de par aplicado adecuados, señalados por el fabricante, por lo que no se puso en riesgo la integridad de los servoactuadores. Los pares aplicados al robot dan una respuesta rápida generada por la

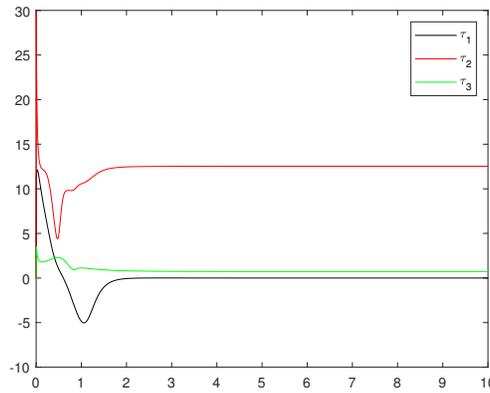


Figura 4.5: Pares aplicados al robot experimental para  $m = 1$

ganancia proporcional, orientando al robot cerca de la posición deseada, para posteriormente, proporcionar un torque de compensación correspondiente a un freno mecánico artificial generado por la ganancia derivativa, previniendo la aparición de sobretiros y reduciendo el error de posición a medida que el torque se estabiliza y se queda únicamente con el par proporcionado por la compensación de gravedad y compensación de fricción viscosa, resultando en un par estable y un error mínimo despreciable, logrando así el objetivo del control.

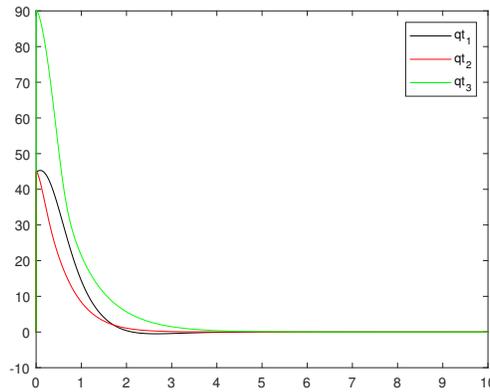


Figura 4.6: Errores de posición del robot experimental para  $m = 2$

Las Figuras 4.6 a 4.9, representan los casos particulares para la familia de control hiperbólica con  $m = 2$  y  $m = 3$ . Como ya se ha mencionado anteriormente, en la Figura 4.2 se puede notar que a medida que el parámetro de diseño  $m$  crece, la respuesta de la ley de control se vuelve más lenta, conservando su saturación característica. Esto repercute en el desempeño del controlador, dando una respuesta más rápida o atenuada según se requiera.

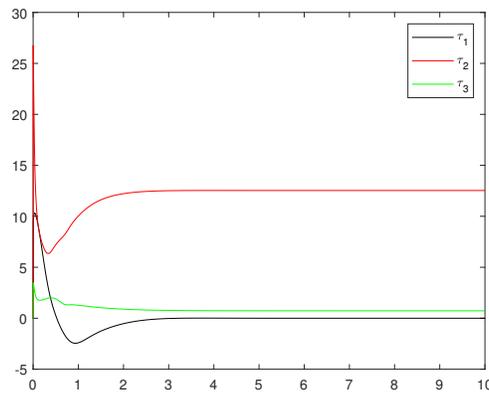


Figura 4.7: Pares aplicados al robot experimental para  $m = 2$

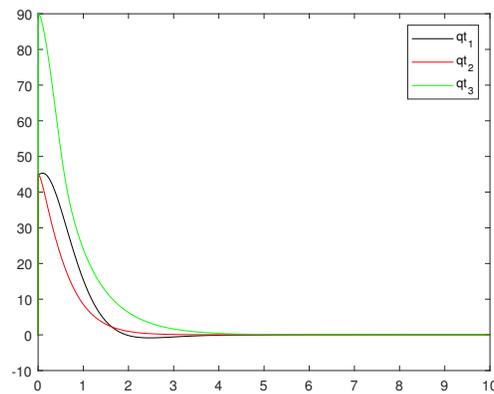


Figura 4.8: Errores de posición del robot experimental para  $m = 3$

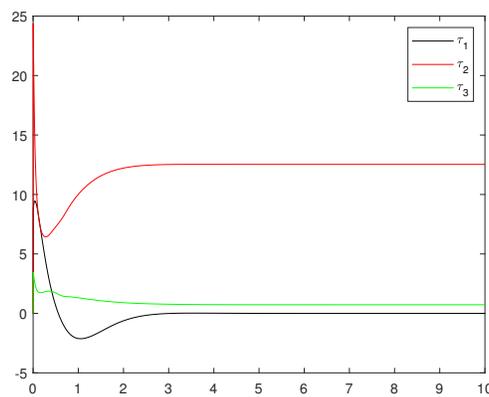


Figura 4.9: Pares aplicados al robot experimental para  $m = 3$

Tanto en el caso de  $m = 2$  como  $m = 3$ , se tiene un tiempo de transición similar, alcanzando la referencia aproximadamente a los 3 segundos de comenzado el experi-

mento, siendo  $m = 3$  la versión más lenta. Del mismo modo que en el caso anterior, no se presentan sobretiros significativos, por lo que el posicionamiento del robot ocurre de manera suave y precisa. La principal diferencia en el desempeño de este control se observa en los pares aplicados, pues ya no existen transiciones repentinas entre la acción proporcional y derivativa, por lo que se tiene una entrada de par moderadamente estable en todo momento del experimento.

Con todo esto podemos afirmar que nos encontramos con una extensa familia de reguladores hiperbólicos para robots manipuladores, saturada. Esta propuesta novedosa posee todas las características necesarias para emplearse en robots industriales debido a su alta robustez y la capacidad de manejar incertidumbres en los parámetros al ser probada asintóticamente estable de manera estricta, por lo que se tiene un margen de operación ilimitado, garantizando el control de robots antropomórficos desde cualquier condición inicial.

# Capítulo 5

## Control adaptable de robots manipuladores

### 5.1. Diseño de algoritmo de compensación de fricción adaptable

La compensación adaptable de fricción presentada en este trabajo es similar al método de control adaptable por modelo de referencia con la principal diferencia de ser posible su implementación en sistemas dinámicos y algunos modelos estáticos con buenos resultados.

En esta sección se describe el proceso necesario para diseñar un algoritmo de control orientado a robots manipuladores, que incorpore un modelo de fricción adaptable basado en los modelos de fricción  $B$  y  $C$  propuestos en este trabajo.

La compensación de fricción adaptable implementada en el controlador tiene el principal objetivo anteponerse a la incertidumbre en los parámetros físicos relacionados a la fricción. Con esto, se reducirían efectos negativos como la atenuación indeseada del movimiento del robot debido al rozamiento de los eslabones, mejorando la respuesta del sistema y reforzando el desempeño del controlador.

Se propone el uso de un algoritmo de control saturado para este caso de estudio para favorecer el desempeño del robot evitando el exceso de torque en errores elevados y protegiendo los servoactuadores del robot. La base del controlador con compensación de fricción adaptable será el ampliamente conocido controlador PD, empleando la versión saturada con la función  $\tanh$ . El algoritmo de control PD saturado con compensación de gravedad y sin fricción está dado por:

$$\boldsymbol{\tau} = K_P \tanh(\boldsymbol{\lambda} \dot{\boldsymbol{q}}) - K_v \tanh \dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) \quad (5.1)$$

donde:

- $\boldsymbol{\tau}$  es el vector de pares aplicados al robot en  $Nm$ ,

- $K_P$  es la matriz diagonal de ganancias proporcionales del controlador,
- $K_V$  es la matriz diagonal de ganancias derivativas del controlador
- $\lambda$  es el vector de velocidad de las ganancias proporcionales,
- $\tilde{\mathbf{q}}$  es el vector de velocidades articulares del robot en *grad/seg*,
- $\tilde{\mathbf{q}}$  es el vector de errores de posición articular del robot en grados.

Expandiendo la ley de control mostrada en (5.1), podemos agregar una componente de fricción de fricción  $\boldsymbol{\tau}_f$  que represente el par de fricción disipado en forma de calor por causa de dicho fenómeno tal que:

$$\boldsymbol{\tau} = K_P \tanh(\lambda \tilde{\mathbf{q}}) - K_v \tanh(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\tau}_f(\dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\theta}_b, \boldsymbol{\theta}_{f_c}) \quad (5.2)$$

El par de fricción adaptable del robot puede descomponerse en sus 2 elementos principales para facilitar el análisis y el diseño del algoritmo de control adaptable como sigue:

$$\boldsymbol{\tau}_f(\dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\theta}_b, \boldsymbol{\theta}_{f_c}) = \boldsymbol{\tau}_{f_c}(\dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\theta}_{f_c}) + \boldsymbol{\tau}_{f_b}(\dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\theta}_b) \quad (5.3)$$

Los pares de fricción calculados en la ley de control está formado por la versión adaptable de los modelos de fricción propuestos en este trabajo de tesis. La estructura matemática del par de fricción adaptable para un robot manipulador está dada por:

$$\boldsymbol{\tau}_f(\dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau}_{f_0}(\dot{\mathbf{q}}) + \boldsymbol{\Phi}_{f_c}(\dot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\theta}_{f_c} + \boldsymbol{\Phi}_{f_b}(\dot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\theta}_{f_b} \quad (5.4)$$

donde  $\boldsymbol{\tau}_{f_0}$  representa una posible parte de  $\boldsymbol{\tau}_f(\dot{\mathbf{q}})$  independiente de los vectores de parámetros  $\boldsymbol{\theta}_{f_c}$  y  $\boldsymbol{\theta}_{f_b}$ , el cual contiene una estimación de los parámetros físicos del robot. Como es notable, es necesario contar con 2 vectores de parámetros adaptables, pues los modelos de fricción suelen estar definidos como la suma de los componentes de fricción. Cada componente de fricción puede separarse en un vector de parámetros constantes proporcional a una función estática dependiente de la velocidad articular  $\boldsymbol{\Phi}(\dot{\mathbf{q}})$ .

El modelo de compensación de fricción adaptable soluciona complementa la ley de control para el caso de un robot manipulador en el que los vectores de parámetros  $\boldsymbol{\theta}_{f_c}$  y  $\boldsymbol{\theta}_{f_b}$  son constantes pero desconocidos. Dado que se asume que los parámetros del modelo de fricción son constantes, podemos afirmar que las cotas superiores de los mismos existen y pueden ser evaluadas de modo que la ley de control garantice estabilidad en lazo cerrado de modo que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_d$ .

Por lo tanto se propone la siguiente ley de control con compensación de gravedad para robots manipuladores generalizada:

$$\boldsymbol{\tau} = K_P \tanh(\lambda \tilde{\mathbf{q}}) - K_v \tanh(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\Phi}_{f_c}(\dot{\mathbf{q}})\hat{\boldsymbol{\theta}}_{f_c} + \boldsymbol{\Phi}_{f_b}(\dot{\mathbf{q}})\hat{\boldsymbol{\theta}}_{f_b} \quad (5.5)$$

donde  $\hat{\theta}_{f_c}$  y  $\hat{\theta}_b$  son los vectores de parámetros adaptables.

La adaptabilidad del modelo de fricción se obtiene mediante la adecuada propuesta de un algoritmo de regresión para  $\hat{\theta}_{f_c}$  y  $\hat{\theta}_b$  de modo que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}(t) = 0$ . Definimos el error de estimación del algoritmo de regresión como:

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_{f_c} &= \hat{\theta}_{f_c} - \theta_{f_c} \\ \tilde{\theta}_b &= \hat{\theta}_b - \theta_b\end{aligned}\tag{5.6}$$

donde se considera que los vectores de parámetros  $\theta_{f_c}$   $\theta_b$ . Por lo que la derivada temporal de los vectores de parámetros se definen como:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\theta}}_{f_c} &= \dot{\hat{\theta}}_{f_c} \\ \dot{\tilde{\theta}}_b &= \dot{\hat{\theta}}_b\end{aligned}\tag{5.7}$$

## 5.2. Diseño de algoritmos de regresión

Partiendo de los modelos de fricción estáticos  $B$  y  $C$  presentados en el capítulo 4, aplicados a un robot manipulador de 1GDL:

$$\tau_{f_B}(\dot{q}) = f_c \frac{\sinh^{2s-1}(\delta\dot{q}) \cosh(\delta\dot{q})}{1 + \sinh^{2s}(\delta\dot{q})} + b\dot{q}\tag{5.8}$$

$$\tau_{f_C}(\dot{q}) = f_c \alpha \frac{\tanh^{2h-1}(\delta\dot{q})}{1 + \alpha \tanh^{2s}(\delta\dot{q})} + b\dot{q}\tag{5.9}$$

es posible proponer una estructura matemática para el modelo de fricción que solventa el problema de control de posición del robot manipulador mientras los parámetros físicos de la fricción son desconocidos. Proponemos el diseño de la estructura matemática del regresor de los modelos de fricción como el gradiente de sus respectivas estructuras matemáticas estáticas mostradas en (5.8) y (5.9) [19].

El modelo dinámico de un robot manipulador de 1GDL en lazo cerrado bajo control y compensación de fricción adaptable posee la siguiente estructura

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \\ \hat{\theta}_{f_c} \\ \hat{\theta}_{f_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q} \\ M(q)^{-1} [k_p \tanh(\lambda\dot{q}) - k_v \dot{q} - C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + \tau_f(\dot{q}, \theta_{f_c}, \theta_{f_b})] \\ \Gamma \Phi_{f_c}(\tilde{q})^T \left( \alpha \frac{\tilde{q}}{1 + \|\tilde{q}\|} - \dot{q} \right) \\ \Delta \Phi_{f_b}(\tilde{q})^T \left( \alpha \frac{\tilde{q}}{1 + \|\tilde{q}\|} - \dot{q} \right) \end{bmatrix}\tag{5.10}$$

### 5.2.1. Obtención del gradiente

El algoritmo de regresión para la estimación de parámetros de fricción en el robot se obtiene siguiendo el método del gradiente, por lo que para el modelo de fricción (5.8) el algoritmo de regresión está dado por:

$$\tau_f(\dot{q}, \theta_b, \theta_{f_c}) = \hat{\theta}_{f_c} \frac{\sinh^{2s-1}(\delta\dot{q}) \cosh(\delta\dot{q})}{1 + \sinh^{2s}(\delta\dot{q})} + \hat{\theta}_b \dot{q} \quad (5.11)$$

para el modelo de fricción mostrado en (5.9) de manera similar se tiene:

$$\tau_f(\dot{q}, \theta_b, \theta_{f_c}) = \hat{\theta}_{f_c} \frac{\tanh^{2h-1}(\delta\dot{q})}{1 + \tanh^{2s}(\delta\dot{q})} + \hat{\theta}_b \dot{q} \quad (5.12)$$

Debido a que no es posible diseñar un regresor a partir del gradiente  $\frac{\partial \tau_{f_b}}{\partial \dot{q}}$ , se propone el uso del siguiente algoritmo de regresión para la estimación del parámetro  $b$  en ambos modelos de fricción experimentales:

$$\dot{\hat{\theta}}_b = \gamma_b \left( \dot{q} \left( \frac{\dot{q}}{1 + |\dot{q}|} \right) \right) \quad (5.13)$$

donde  $\gamma_{f_b}$  es un parámetro de diseño que compensa la velocidad de estimación del parámetro  $\hat{\theta}_{f_b}$  en caso de que el parámetro estimado tome demasiado tiempo en estabilizarse o por el contrario, ocurra demasiado rápido, resultando en una estimación deficiente.

Para el modelo de fricción experimental (5.8), el regresor propuesto está formado por el gradiente  $\frac{\partial \tau_{f_c}}{\partial \dot{q}}$ , el cual se obtiene como se indica a continuación.

Asumiendo que el coeficiente de disipatividad del modelo de fricción experimental (5.8) sea  $\delta = 1$ , tenemos:

$$\frac{\partial \tau_{f_c}}{\partial \dot{q}} \left( \frac{\sinh^{2s-1}(\dot{q}) \cosh(\dot{q})}{1 + \sinh^{2s}(\dot{q})} \right) \Rightarrow \frac{\mathcal{U}(\dot{q})}{\mathcal{V}(\dot{q})} \quad (5.14)$$

donde

$$\mathcal{U}(\dot{q}) = \sinh^{2s-1}(\dot{q}) \cosh(\dot{q}) \quad (5.15)$$

$$\mathcal{V}(\dot{q}) = 1 + \sinh^{2s}(\delta\dot{q}) \quad (5.16)$$

A su vez, podemos descomponer  $\mathcal{U}(\dot{q})$ :

$$\mathcal{U}(\dot{q}) = \mathcal{M}(\dot{q}) \mathcal{N}(\dot{q}) \quad (5.17)$$

donde:

$$\mathcal{M}(\dot{q}) = \sinh^{2s-1}(\dot{q}) \quad (5.18)$$

$$\mathcal{N}(\dot{q}) = \cosh(\dot{q}) \quad (5.19)$$

El gradiente de la ecuación (5.14) está dado por:

$$\frac{\partial \tau_{fc}}{\partial \dot{q}} = \frac{\mathcal{V}(\dot{q})\mathcal{U}'(\dot{q}) - \mathcal{U}(\dot{q})\mathcal{V}'(\dot{q})}{(\mathcal{V}(\dot{q}))^2} \quad (5.20)$$

Las derivadas de las funciones  $\mathcal{M}(\dot{q})$  y  $\mathcal{N}(\dot{q})$  están dadas por:

$$\mathcal{M}'(\dot{q}) = (2m - 1)\sinh^{2s-1}(\dot{q})\cosh(\dot{q}) \quad (5.21)$$

$$\mathcal{N}'(\dot{q}) = \sinh(\dot{q}) \quad (5.22)$$

Por lo tanto, la derivada de  $\mathcal{U}(\dot{q})$  está dada por:

$$\mathcal{U}'(\dot{q}) = \sinh^{2s-1}(\dot{q})\sinh(\dot{q}) + \cosh(\dot{q})(2s - 1)\sinh^{2s-1}(\dot{q})\cosh(\dot{q}) \quad (5.23)$$

Simplificando se obtiene

$$\mathcal{U}'(\dot{q}) = (\sinh^{2s}(\dot{q}))(1 + (2s - 1)\cosh^2(\dot{q})\sinh^{-2}(\dot{q})) \quad (5.24)$$

La derivada de  $\mathcal{V}(\dot{q})$  está dada por:

$$\mathcal{V}'(\dot{q}) = (2s)\sinh^{2s-1}(\dot{q})\cosh(\dot{q}) \quad (5.25)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5.15), (5.16), (5.24) y (5.25) en (5.20), y simplificando, se obtiene:

$$\frac{\partial \tau_{fc}}{\partial \dot{q}} = \dot{\theta}_{fc} = \gamma_{fc} \frac{(2s - 1)\sinh^{2s-2}(\dot{q}) + (2m)\sinh^{2s}(\dot{q}) - \sinh^{4s-2}(\dot{q})}{[1 + \sinh^{2s}(\dot{q})]^2} \quad (5.26)$$

De manera análoga al procedimiento para encontrar el gradiente de  $\frac{\partial \tau_{fc}}{\partial \dot{q}}$ , se realiza el análisis del gradiente  $\frac{\partial \tau_b}{\partial \dot{q}}$ . Considerando ahora a  $\delta$  como una constante de diseño se tiene:

$$\frac{\partial \tau_{fc}}{\partial \dot{q}} \left( \frac{\tanh^{2h-1}(\delta \dot{q})}{1 + a \tanh^{2s}(\delta \dot{q})} \right) \Rightarrow \frac{\mathcal{U}(\dot{q})}{\mathcal{V}(\dot{q})} \quad (5.27)$$

donde:

$$\mathcal{U}(\dot{q}) = \tanh^{2h-1}(\delta \dot{q}) \quad (5.28)$$

$$\mathcal{V}(\dot{q}) = 1 + atan^{2s}(\delta\dot{q}) \quad (5.29)$$

Las derivadas correspondientes a las ecuaciones (25) y (26) son:

$$\mathcal{U}'(\dot{q}) = (2h - 1)\delta sech^2(\delta\dot{q})tanh^{2h-2}(\delta\dot{q}) \quad (5.30)$$

$$\mathcal{V}'(\dot{q}) = \frac{((2\delta s)atan(\dot{q})^{2s-1})}{(\delta^2\dot{q}^2 + 1)} \quad (5.31)$$

Por lo que el gradiente  $\frac{\partial\tau_{fc}}{\partial\dot{q}}$  tendría la estructura matemática mostrada en (17):

$$\frac{\partial\tau_{fc}}{\partial\dot{q}} = \gamma_{fc} \frac{(1 + atan^{2s}(\delta\dot{q})) ((2h - 1)\delta sech^2(\delta\dot{q})tanh^{2h-2}(\delta\dot{q})) - (tanh^{2h-1}(\delta\dot{q})) \left( \frac{((2\delta s)atan(\dot{q})^{2s-1})}{(\delta^2\dot{q}^2 + 1)} \right)}{(1 + atan^{2s}(\delta\dot{q}))^2} \quad (5.32)$$

Con esto, ya es posible realizar las pruebas experimentales del algoritmo de control con los modelos de fricción adaptable en el péndulo robot.

### 5.3. Simulación en MATLAB

Para la implementación en MATLAB del algoritmo de control se emplean 3 programas en código *m* Para representar el modelo dinámico del robot junto con los parámetros adaptables, un código secundario está dedicado al algoritmo de control mostrado en (5.2) el cual proporciona el torque de entrada saturado al robot. En las simulaciones de ambos algoritmos adaptables se incluyen los efectos de par gravitacional y par de fricción correspondiente a su versión de ganancias constantes, de modo que en el controlador, se intente alcanzar los valores constantes de fricción mediante estimación.

el objetivo de la simulación planteada es lograr el posicionamiento del robot en la posición de  $90^\circ$  con los parámetros adaptables en condiciones iniciales cero, d modo que estos se acerquen lo más posible a su valor real conforme la simulación evoluciona. El controlador del péndulo robot se incluye con la misma estructura matemática mostrada en (5.2), tomando como ganancias de control constantes  $k_p = 10$  y  $k_v = 2$  para ambos modelos experimentales de fricción. Cada una de las componentes de fricción son incluidas como se muestra en las ecuaciones (5.8) y (5.9), en donde se incluyen los parámetros de estimación  $\hat{\theta}_{fc}$  y  $\hat{\theta}_{fb}$ .

En el programa principal, se incluyen las configuraciones del algoritmo de integración numérica ode45(...), estableciendo una tolerancia de  $1e^{-5}$ , esto es posible debido a la simplicidad del modelo dinámico del péndulo, así como el hecho de que solo se estén empleando funciones continuas suaves, excluyendo las funciones discontinuas típicas de los modelos de fricción clásicos.

Para facilitar el análisis, se crean vectores que incluyen los parámetros físicos originales del péndulo, que permiten comparar el valor estimado con el valor real y tener una idea general de error de estimación, así como realizar las correcciones correspondientes.

En las gráficas de resultados también se incluyen los pares aplicados al robot, así como el error de posición articular que permiten ver como se comportará el robot en su estado estable, y si es que este alcanza la posición deseada, lo que se traduce en un desempeño aceptable.

### 5.3.1. Resultados de simulación

Después de un análisis repetido de los resultados del diseño de los algoritmos de estimación para las variables físicas adaptables del controlador, así como realizar las correcciones pertinentes para asegurar el correcto desempeño del mismo, se lograron los siguientes resultados en el péndulo robot que utiliza el modelo de fricción experimental mostrado en (5.8).

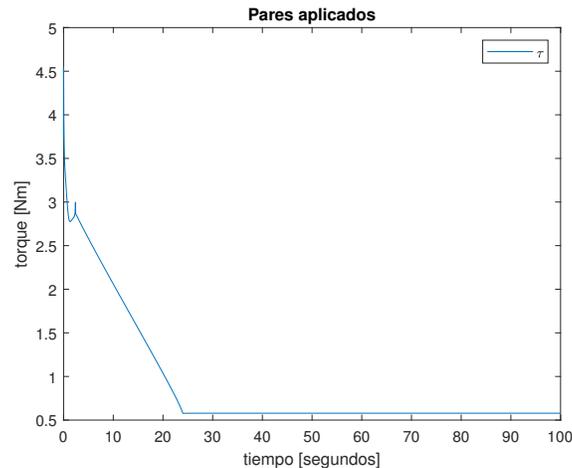


Figura 5.1: Pares aplicados modelo de fricción  $B$

En las figuras 5.1 a 5.3, se muestran los resultados de la simulación bajo el modelo de fricción experimental  $B$ . En la figura 5.1, se muestra el funcionamiento del controlador, teniendo un torque máximo inicial de  $5Nm$ , que va disminuyendo a medida que el tiempo evoluciona. Poco después de haber iniciado su funcionamiento, se puede apreciar un pequeño rizo con un cambio de dirección bastante pronunciado, que puede interpretarse como un cambio importante en los parámetros adaptables. Después de este fenómeno anormal en el desempeño del controlador, se observa una pendiente suave, hasta disminuir considerablemente al llegar al estado estable.

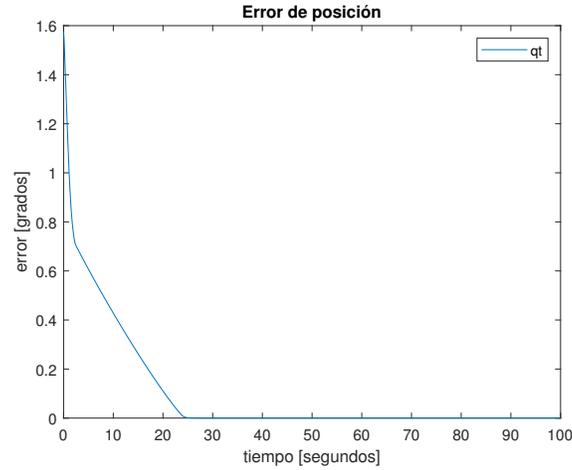


Figura 5.2: Error de posición articular modelo de fricción  $B$

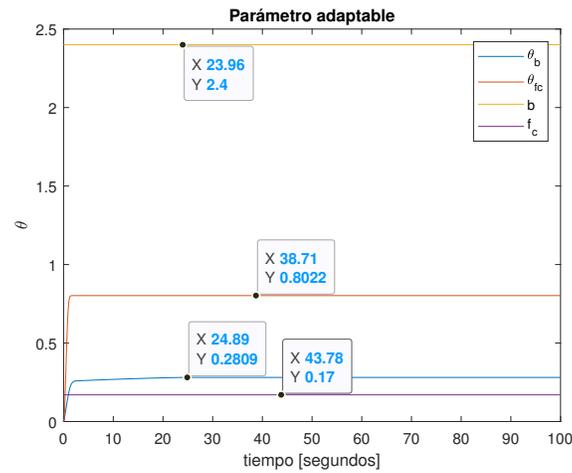
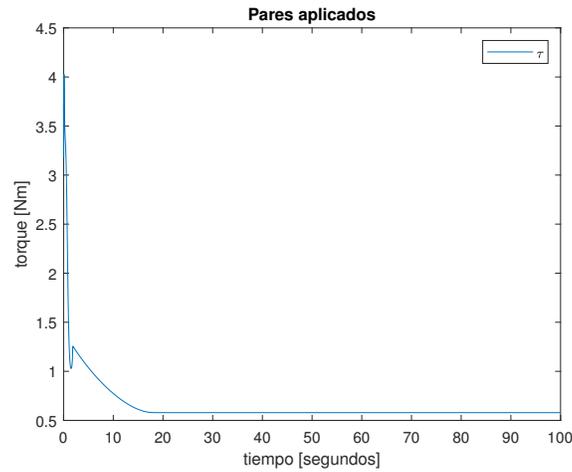
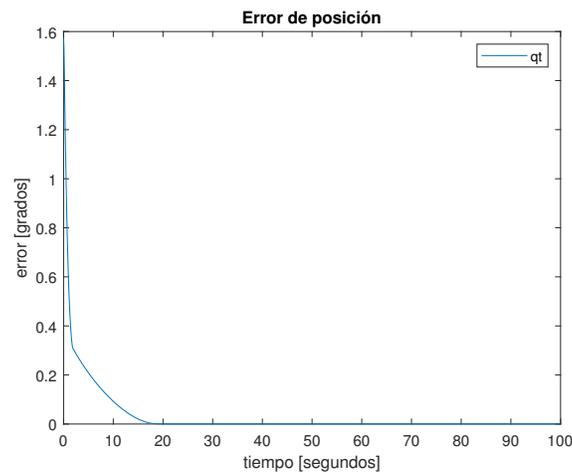


Figura 5.3: Parámetros adaptables modelo de fricción  $B$

Estando en estado estable, el motor continua introduciendo torque al sistema, debido en parte a la acción de compensación de gravedad, por la posición deseada de  $90^0$ ; así como el efecto del par de fricción, al cual ha entrado en la zona de baja velocidad alternando entre su componente de fricción de Coulomb y efecto Stribeck.

En cuanto a los parámetros adaptables, se observa un desempeño aceptable, teniendo una respuesta muy acercada en el caso del parámetro adaptable  $\hat{\theta}_b$ , y una estimación no muy acercada en el caso del parámetro  $\hat{\theta}_{fc}$ . Podemos afirmar que se ha logrado una estimación adecuada, debido a que el error de posición es muy cercano a cero. Esto es debido al tipo de control que se está utilizando en este caso de estudio.

Para el caso del péndulo robot con el modelo de fricción experimental C mostrado en (5.9), se tienen los siguientes resultados de simulación.

Figura 5.4: Pares aplicados modelo de fricción  $C$ Figura 5.5: Errores de posición modelo de fricción  $C$ 

En el caso del péndulo robot con el modelo de fricción experimental (2), se tienen resultados bastante similares al caso anterior, con la diferencia más notable en la estimación de parámetros. La corrección en la estimación de parámetros se debe a la correcta elección del parámetro de velocidad de estimación  $\gamma_{f_c}$  y  $\gamma_b$ , los cuales, después de prueba y error se fijaron como  $\gamma_{f_c} = 0.014$  y  $\gamma_b = 0.348$ . La elección de estos parámetros muy importante en el desempeño final del control. Los parámetros físicos del robot y del modelo de fricción empleados en la simulación se muestran en la tabla siguiente.

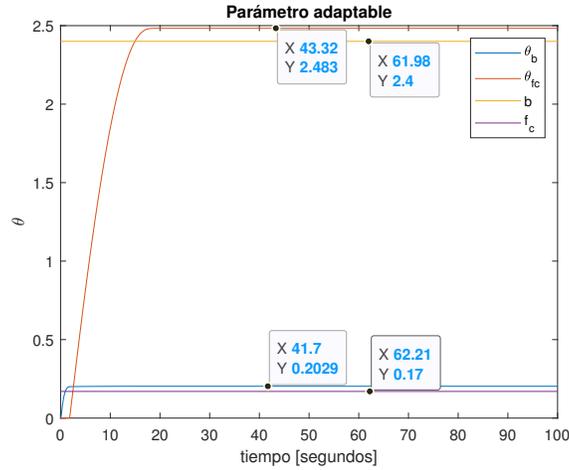


Figura 5.6: Parámetros adaptables modelo de fricción  $C$

Parámetro	Notación	Valor
Masa del eslabón	$m$	$5.90kg$
Distancia al centro de masa	$l_c$	$0.01m$
Constante de aceleración gravitacional	$g$	$9.81m/seg^2$
Momento de inercia del robot	$I_r$	$0.16 \frac{Nmseg^2}{rad}$
Coefficiente de fricción de Coulomb	$f_c$	2.40
Coefficiente de fricción viscosa	$b$	0.17
Coefficiente de disipatividad	$d$	25
Coefficiente de efecto Stribeck	$s$	2
Coefficiente de histéresis	$h$	2

**Tabla 3.** Parámetros físicos de péndulo robot.

Como se puede observar en la figura 5.6, en este caso también se logró un alto desempeño, teniendo un error en estado estable cercano a cero, con una estimación de parámetros muy cercana a los parámetros físicos reales.

## 5.4. Análisis de estabilidad

### 5.4.1. Dinámica del robot

El modelo dinámico de un robot manipulador de  $n$  grados de libertad con fricción puede escribirse como:

$$\tau = M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + g(\mathbf{q}) + \tau_{fr}(\dot{\mathbf{q}}) \quad (5.33)$$

El robot de  $n$  grados de libertad de actuadores rotacionales bajo control con fricción adaptable está dado por:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{f_c} \\ \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{f_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [K_p \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}}) - K_v \nabla \mathcal{U}_a(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - C(\mathbf{q}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \boldsymbol{\tau}_f(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \boldsymbol{\theta}_{f_c}, \boldsymbol{\theta}_{f_b})] \\ \Gamma \Phi_{f_c}(\tilde{\mathbf{q}})^T \left( \alpha \frac{\tilde{\mathbf{q}}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} - \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \right) \\ \Delta \Phi_{f_b}(\tilde{\mathbf{q}})^T \left( \alpha \frac{\tilde{\mathbf{q}}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} - \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \right) \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

Donde las matrices  $\Gamma, \Delta \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices diagonales definidas positivas que contienen las ganancias de adaptación del algoritmo de regresión. Los vectores  $\nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $\nabla \mathcal{U}_a(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  representan los vectores de acción de control obtenidos mediante la técnica de moldeo de energía. El control empleado para esta metodología puede diseñarse de manera distinta, siempre y cuando se garantice que el par aplicado al robot está acotado de manera segura, el algoritmo de control es suficientemente robusto para sobreponerse a los errores causados por la adaptación de parámetros, así como poder ajustar la velocidad de respuesta mediante un parámetro constante  $\lambda$  que mejore el desempeño del control o del regresor según sea necesario.

### 5.4.2. Estabilidad de Lyapunov

El sistema dinámico descrito por la ecuación (5.34) posee un único punto de equilibrio en el origen  $[\tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{f_c}^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{f_b}^T]^T = \mathbf{0}$ . Partiendo de esta afirmación, proponemos la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$\begin{aligned} V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{f_c}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{f_b}) &= \frac{1}{2} [\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \alpha \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{q}})]^T M(\mathbf{q}) [\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \alpha \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{q}})] + \frac{1}{\lambda} \sqrt{\mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})}^T K_p \sqrt{\mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})} \\ &\quad - \frac{\alpha^2}{2} \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{q}}) + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{f_c}^T \Gamma^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{f_c} + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{f_b}^T \Delta^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{f_b} \end{aligned} \quad (5.35)$$

Donde  $\boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{q}})$  es un vector de diseño que favorece la demostración de estabilidad. Está definido de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{q}}) = \frac{\tilde{\mathbf{q}}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \quad (5.36)$$

Es fácil ver que la ecuación (5.35) es una función definida positiva debido a que la mayoría de los componentes que la conforman están expresados en forma cuadrática, sin embargo, para completar la demostración, es necesario demostrar que:

$$\frac{1}{\lambda} \sqrt{\mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})}^T K_p \sqrt{\mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})} - \frac{\alpha^2}{2} \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{q}}) \quad (5.37)$$

es una ecuación definida positiva. Es claro que  $\frac{1}{\lambda}\sqrt{\mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})}^T K_p \sqrt{\mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})}$  es definida positiva, con todas las propiedades que esto conlleva. Para demostrar que la expresión es definida positiva para todo  $\tilde{\mathbf{q}} \neq \mathbf{0}$  considere las siguientes cotas:

$$\frac{1}{\lambda}\sqrt{\mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})}^T K_p \sqrt{\mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})} \geq \begin{cases} \frac{1}{2}\lambda_m \{K_p\} \nabla \mathcal{U}_a(\lambda) \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2, & \|\tilde{\mathbf{q}}\| < 1 \\ \frac{1}{2}\lambda_m \{K_p\} \nabla \mathcal{U}_a(\lambda) \|\tilde{\mathbf{q}}\|, & \|\tilde{\mathbf{q}}\| \geq 1 \end{cases} \quad (5.38)$$

$$- \frac{\alpha^2}{2(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}} \geq \begin{cases} \frac{\alpha^2}{2} \lambda_M \{M\} \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2, & \|\tilde{\mathbf{q}}\| < 1 \\ \frac{\alpha^2}{2} \lambda_M \{M\} \|\tilde{\mathbf{q}}\|, & \|\tilde{\mathbf{q}}\| \geq 1 \end{cases} \quad (5.39)$$

Es posible asegurar que (5.35) es definida positiva diseñando  $\alpha$  de modo que satisfaga:

$$\min \left\{ \sqrt{\frac{\lambda \{K_p\} \nabla \mathcal{U}_a(\lambda)}{\lambda_M \{M\}}} \right\} > \alpha > 0 \quad (5.40)$$

de modo que se satisfacen las siguientes desigualdades:

$$\frac{1}{\lambda}\sqrt{\mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})}^T K_p \sqrt{\mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})} \geq \frac{1}{2}\lambda_m \{K_p\} \nabla \mathcal{U}_a(\lambda) \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 > \frac{\alpha^2}{2} \lambda_M \{M\} \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 \geq \frac{\alpha^2}{2} \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{q}}) \quad (5.41)$$

para todo  $1 > \|\tilde{\mathbf{q}}\| > 0$ , y

$$\frac{1}{\lambda}\sqrt{\mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})}^T K_p \sqrt{\mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})} \geq \frac{1}{2}\lambda_m \{K_p\} \nabla \mathcal{U}_a(\lambda) \|\tilde{\mathbf{q}}\| > \frac{\alpha^2}{2} \lambda_M \{M\} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \geq \frac{\alpha^2}{2} \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{q}}) \quad (5.42)$$

para todo  $1 > \|\tilde{\mathbf{q}}\| \geq 1$ . Las desigualdades (5.41) y (5.42) implican que (5.37) es definida positiva, por lo que la función de Lyapunov es definida positiva.

### 5.4.3. Derivada de Lyapunov

Expandiendo la función candidata de Lyapunov, tenemos:

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{fc}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{fb}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \sqrt{\mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})}^T K_p \sqrt{\mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})} - \alpha \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{fc}^T \Gamma^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{fc} + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{fb}^T \Delta^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{fb} \quad (5.43)$$

que facilita el análisis de la derivada temporal de la función original. La derivada temporal de la ecuación (5.43) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{fc}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{fb}) &= \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T K_p \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}}) \\ &\quad - \alpha \dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \alpha \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{q}})^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ &\quad - \alpha \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{fc}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_{fc} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{fb}^T \Delta^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_{fb} \end{aligned} \quad (5.44)$$



Por lo que la derivada temporal de la ecuación candidata de Lyapunov finalmente puede ser expresada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{f_c}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{f_b}) &= -\dot{\mathbf{q}}^T K_v \dot{\mathbf{q}} - \alpha \dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \alpha \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{q}})^T K_p \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}}) \\ &\quad + \alpha \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{q}})^T K_v \dot{\mathbf{q}} - \alpha \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{q}})^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (5.50)$$

donde  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\tilde{\mathbf{q}})$  puede escribirse como:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\tilde{\mathbf{q}}) = -\frac{\dot{\mathbf{q}}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} + \frac{\tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}}}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2 \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}} \quad (5.51)$$

Acotando la ecuación (5.51) se obtiene:

$$\|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\tilde{\mathbf{q}})\| = \left\| -\frac{\dot{\mathbf{q}}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} + \frac{\tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}}}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2 \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \right\| \leq 2\|\dot{\mathbf{q}}\| \quad (5.52)$$

Empleando la propiedad 1.9 es posible acotar la ecuación (5.50) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{f_c}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{f_b}) &\leq -\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T K_v \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \lambda_m \{K_v\} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + 2\alpha \lambda_M \{M\} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \\ &\quad + k_c \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 - \alpha \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{q}})^T K_p \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}}) + \alpha \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{q}})^T K_v \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (5.53)$$

que a su vez, puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{f_c}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{f_b}) &\leq -\frac{1}{2} [\dot{\mathbf{q}} - \alpha \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{q}})]^T K_v [\dot{\mathbf{q}} - \alpha \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{q}})] \\ &\quad - \left( \frac{1}{2} \lambda_m \{K_v\} - \alpha k_c - 2\alpha \lambda_M \{M\} \right) \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \\ &\quad - \frac{\alpha}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \left( \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}}) - \frac{\alpha \tilde{\mathbf{q}}^T K_v \tilde{\mathbf{q}}}{2(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)} \right) \end{aligned} \quad (5.54)$$

La ecuación (5.54) permite ver que se trata de una ecuación definida positiva siempre y cuando se cumpla:

$$\tilde{\mathbf{q}}^T K_p \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}}) - \frac{\alpha \tilde{\mathbf{q}}^T K_v \tilde{\mathbf{q}}}{2(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)} \quad (5.55)$$

sea definida positiva. Para este fin, se añade una regla de diseño para  $\alpha$ :

$$\min \left\{ \frac{2\lambda_m \{K_p \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})\}}{\lambda_M \{K_v\}} \right\} > \alpha > 0 \quad (5.56)$$

Por lo que puede ser demostrado que (5.55) es definida positiva para todo  $\tilde{\mathbf{q}}$  se tiene que:

$$-\frac{\alpha \tilde{\mathbf{q}}^T K_v \tilde{\mathbf{q}}}{2(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)} \begin{cases} -\frac{1}{2} \alpha \lambda_m \{K_v\} \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2, & \|\tilde{\mathbf{q}}\| < 1 \\ -\frac{1}{2} \alpha \lambda_m \{K_v\} \|\tilde{\mathbf{q}}\|, & \|\tilde{\mathbf{q}}\| \geq 1 \end{cases} \quad (5.57)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}^T \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}}) \geq \begin{cases} \lambda_m \{K_p\} \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}}) \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2, & \|\tilde{\mathbf{q}}\| < 1 \\ \lambda_m \{K_p\} \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}}) \|\tilde{\mathbf{q}}\|, & \|\tilde{\mathbf{q}}\| \geq 1 \end{cases} \quad (5.58)$$

Considerando (5.57) y (5.58) tenemos:

$$\tilde{\mathbf{q}} K_p \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}}) \geq \lambda_m \{K_p\} \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}}) \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 > \frac{1}{2} \alpha \lambda_M \{K_v\} \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 \geq \frac{\alpha \tilde{\mathbf{q}}^T K_v \tilde{\mathbf{q}}}{2(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)} \quad (5.59)$$

para todo  $1 > \|\tilde{\mathbf{q}}\| > 0$ , y

$$\tilde{\mathbf{q}} K_p \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}}) \geq \lambda_m \{K_p\} \nabla \mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}}) \|\tilde{\mathbf{q}}\| > \frac{1}{2} \alpha \lambda_M \{K_v\} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \geq \frac{\alpha \tilde{\mathbf{q}}^T K_v \tilde{\mathbf{q}}}{2(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)} \quad (5.60)$$

para todo  $\|\tilde{\mathbf{q}}\| \geq 1$ .

Con la evidencia presentada, podemos afirmar que la derivada de la función de Lyapunov  $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{f_c}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{f_b})$  es definida negativa. Observando los resultados obtenidos del análisis anterior, podemos concluir que se obtiene estabilidad, debido a que se cumple que  $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{f_c}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{f_b}) > \mathbf{0}$  y  $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{f_c}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{f_b}) < \mathbf{0}$ . Con la estructura propuesta para el control con fricción adaptable, no es posible determinar estabilidad asintótica de forma global debido a la ausencia de los estados  $\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_{f_c}$  y  $\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_{f_b}$  en la derivada de la función candidata. Con este resultado, podemos garantizar una tendencia asintótica de los estados internos no adaptables al origen  $[\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$  a medida que  $t \rightarrow \infty$ .



# Conclusiones

En la actualidad existen pocos modelos de fricción que representen de forma precisa este fenómeno en servomecanismos; aunado a lo anterior, estos modelos generalmente representan la fricción de manera demasiado idealizada, sin tomar en cuenta aspectos relevantes del comportamiento dinámico. Al ser un fenómeno presente en todo servomecanismo, la fricción afecta directamente la respuesta de los robots manipuladores, además de afectar negativamente el desempeño de los controladores, por lo que la implementación de un modelo de fricción adaptable para robots manipuladores supone una enorme mejora con respecto a los modelos dinámicos actuales basados en modelos de fricción clásicos e incluso con respecto al modelo de fricción de LuGre.

Los resultados experimentales preliminares conseguidos en este trabajo, confirman el comportamiento de los modelos de fricción clásicos y de LuGre, y dejan ver las características más importantes de este fenómeno, como lo son su región de histéresis, el efecto Stribeck y sus componentes de fricción viscosa y de Coulomb. Todo esto apunta a que es posible el desarrollo de un modelo de fricción novedoso de carácter adaptable orientado a Robots manipuladores de transmisión directa.

Se ha demostrado hasta ahora, que es posible generar una ley de control con compensación adaptable empleando el uso de regresores basados en el gradiente del modelo de fricción. Empleando esta estrategia, se ha logrado obtener 2 modelos de fricción adaptables que satisfacen el problema de control de posición con compensación de fricción con un error en estado estable de cero, y una estimación de los parámetros de fricción funcional en el péndulo robot.

A diferencia de los esquemas de control adaptable enfocados al problema de regulación, los problemas de compensación de fricción adaptable o estimación de parámetros en tiempo real son significativamente más complejos. Esto se debe a que el problema de control de posición puede resolverse a través de la selección adecuada de las ganancias proporcional y derivativa, que es flexible y permite un número infinito de soluciones para combinaciones de estas ganancias, siendo todas estas opciones aceptables como solución. En el caso del problema de compensación adaptable, la solución sólo es posible cuando se ha alcanzado una estimación de parámetros de forma correcta, los cuales corresponden a parámetros físicos del sistema, y sólo pueden ser representados de una manera.

El desempeño del algoritmo de control con compensación adaptable propuesto en este trabajo corresponde a un desempeño aceptable para aplicaciones específicas, pero es significativamente más lento que otros algoritmos de control no adaptables, esto es natural, debido a la complejidad de los esquemas de control adaptables, y a la etapa inicial del algoritmo, cuando parte de las condiciones iniciales y debe ajustarse a sí mismo hasta encontrar valores adecuados para su sintonía. Del mismo modo, la demora en el tiempo de respuesta del sistema bajo control adaptable es proporcional a la complejidad del robot en el que se implemente, debido a la no linealidad e interferencia producida por fenómenos que ocurren de manera simultánea en el control del robot. De acuerdo con la evidencia presentada en este trabajo, podemos afirmar que el sistema se mantiene con un alto desempeño hasta los 2GDL, la implementación en robots de orden superior implicaría una sintonía muy rigurosa y mucha sensibilidad a cambios en los parámetros físicos, por lo que el uso de un algoritmo de control adaptable carecería de sentido.

El control adaptable de sistemas dinámicos tanto lineales como no lineales, puede implementarse en sistemas no lineales de alta complejidad mediante el uso del método del gradiente, añadiendo parámetros adaptables a modo de derivadas del modelo original, excluyendo aquellos parámetros físicos que se desea estimar. Del mismo modo, es importante considerar que los algoritmos de control adaptables, son una buena opción para eliminar fallos o incertidumbres importantes en el controlador de un sistema dinámico, sin embargo, el diseño e implementación de la adaptabilidad en un controlador no es un asunto trivial, y aún hace falta la inclusión de algunas estimaciones a priori de las variables físicas a estimar. De usarse de manera correcta, estos representan una valiosa herramienta en el diseño de sistemas robóticos de alto desempeño, inmunes a perturbaciones inesperadas y que conservan precisión a lo largo de su vida útil.

## 5.5. Trabajo a futuro

- Se prevé la posibilidad de mejorar los algoritmos de regresión sin abandonar el método de diseño a través una nueva propuesta basada en estabilidad de Lyapunov.
- Proponer una nueva solución al problema de compensación de fricción adaptable empleando un método alternativo basado en control robusto o estimación de parámetros con el algoritmo de mínimos cuadrados.
- Proponer un método de sintonización de ganancias adaptables.
- Reforzar los resultados obtenidos en este trabajo a través de análisis experimental en sistemas de más de 2GDL.

# Bibliografía

- [1] ARMSTRONG & CANUDAS, 1994. B. Armstrong, P. Dupont, and C. Canudas. 1994. “A Survey of Models, Analysis Tools and Compensation Methods for the Control of Machines with Friction”, *Automatica*, Vol. 30. No. 7, pp. 1083-1138. 1994.
- [2] CANUDAS & ASTRÖM, 1987. C. Canudas, K. J. Aström, and K. Braun. 1987. “Adaptive Friction Compensation in DC-Motor Drives”. *IEEE Journal of Robotics and Automation*. Vol. 3, No. 6, pp. 681-685, December 1987.
- [3] OLSSON & ASTRÖM, 1998. H. Olsson, K. J. Aström, C. Canudas, M. Gäfvert, and P. Lischinsky. 1998, “Friction Models and Friction Compensation ”, *European Journal of Control*, Vol. 4, pp. 176-195.
- [4] CLAUDE & CARUFEL, 2000. J. Claude and J. Carufel. 2000. “Friction and Stick-Slip in Robots: Simulation and Experimentation”. *Multibody System Dynamics*. Vol. 4, pp. 341-354, 2000.
- [5] LAMPAERT & SWEVERS, 2002. V. Lampaert, J. Swevers, and F. AI-Bender. 2002, “Experimental Comparison of Different Friction Models for Accurate Low-Velocity Tracking ”, *Proceedings of the 10th Mediterranean Conference on Control and Automation*, July 9-12, pp. 1-8, Lisbon, Portugal.
- [6] CANUDAS & KELLY, 2007. C. Canudas and R. Kelly, 2007., “Passivity Analysis of Motion Control for Robot Manipulators with Dynamic Friction” , *Asian Journal of Control*, Vol. 9, No. 1, pp. 30-36.
- [7] ASTRÖM & CANUDAS, 2008. K. J. Aström and C. Canudas. 2008. “Revisiting the LuGre Friction Model”, *IEEE Control Systems Magazine*, pp. 101-114, December 2008.
- [8] SAHIFZADEH ET AL, 2018. M. Sahifzadeh, M. Masouleh, A. Kalhor, and P. Shahverdi. “An Experimental Dynamic Identification and Control of an Overconstrained 3-DOF Parallel Mechanism in Presence of Variable Friction and Feedback Delay”. *Robotics and Automation Systems*, Vol. 102, pp. 27-43. 2018.
- [9] PAN ET AL, 2018. Y. Pan, H. Wang, X. Li, and H. Yu. “Adaptive Command-Filtered Backstepping Control of Robot Arms with Compliant Actuators ”. *IEEE Trans on Control Systems Technology*. Vol. 26, No. 3, pp. 1149-1156, May 2018.

- [10] L. FREIDOVICH ET AL, 2010. L. Freidovich, A. Robertsson, A. Shiriaev and R. Johansson. "LuGre-Model-Based Friction Compensation". IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 18, no. 1, pp. 194-200, Jan. 2010.
- [11] S. Y. NAING & T. RAIN, 2019. S. Y. Naing and T. Rain. "Analysis of Position and Angular Velocity of Four-Legged Robot (Mini-Bot) from Dynamic Model Using Euler-Lagrange Method". 2019 International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM), 2019, pp. 1-4.
- [12] A. EL-ITAOUY & A. ELTIMSAHY, 1988. A. El-Itaoui and A. Eltimsahy. "Modeling and control of the Merlin 6200 industrial robot". Proceedings. 1988 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1988, pp. 1670-1675 vol.3
- [13] FERNANDO REYES ET AL, 2019. Fernando Reyes, Olga Félix, Jaime Cid-Monjaraz, Gwendi Alonso. "A family of hyperbolic-type control schemes". Kibernetika, 2019, pp. 561-585 vol.55.
- [14] M. C. MOTA-MARTÍNEZ, F. REYES-CORTÉS AND J. CID-MONJARAZ, 2017. Fernando Reyes, Olga Félix, Jaime Cid-Monjaraz, Gwendi Alonso. "Programming Environment of Control Algorithms". 2017 International Conference on Mechatronics, Electronics and Automotive Engineering (ICMEAE), 2017, pp. 82-87.
- [15] B. KAEWKHAM-AI & K. UTHAICHANA, 2012. B. Kaewkham-ai and K. Uthai-chana. "Comparative study on friction compensation using Coulomb and Dahl models with extended and unscented Kalman filters," 2012 7th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications (ICIEA), 2012, pp. 191-195.
- [16] T. WU AND J. MOVELLAN, 2012. T. Wu and J. Movellan, 2012. "Semi-parametric Gaussian process for robot system identification," 2012 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2012, pp. 725-731.
- [17] N. BARAHANOV & R. ORTEGA, 2000. N. Barahanov and R. Ortega. "Necessary and sufficient conditions for passivity of the LuGre friction model". IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 45, no. 4, pp. 830-832, April 2000.
- [18] SOREN ANDERSSON, ET AL, 2006. Soren Andersson, Anders Soderberg and Stefan Bjorklund. "Friction models for sliding dry, boundary and mixed lubricated contacts". Tribology International , vol. 40, pp. 580-587, January 2006.
- [19] RAFAEL KELLY, ET AL, 1996. Rafael Kelly, Victor Santibañez and Fernando Reyes. "On saturated-proportional derivative feedback with adaptive gravity compensation of robot manipulators". International Journal of adaptive control and signal processing, vol. 10, pp. 465-479, 1996.