Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Modelos de evolución diaria de temperatura: aplicación al caso de Puebla

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Eduardo Pérez Domínguez

Asesorado por

Andrés Fraguela Collar
Moisés Soto Bajo

Puebla Pue.
22 de noviembre de 2023

Modelos de evolución diaria de temperatura: aplicación al caso de Puebla

Eduardo Pérez Domínguez

22 de noviembre de 2023

Título: Modelos de evolución diaria de temperatura: aplicación al caso de Puebla
Estudiante: Eduardo Pérez Domínguez

COMITÉ

Juan Alberto Escamilla Reyna
Presidente

Carlos Guillén Galván
Secretario

Alfonso Díaz Furlong
Vocal

Vocal

Andrés Fraguela Collar
Moisés Soto Bajo
Asesor

Índice general

Introducción **VII**
0.1. Contexto . . . VII
0.2. Planteamiento del problema . . . VII
0.3. Objetivos . . . VIII
0.4. Metodología . . . VIII
0.5. Conclusiones . . . IX

1. Sistemas de medición del espacio y el tiempo a escala humana **1**
1.1. Preliminares de Matemáticas . . . 2
1.1.1. Medición de ángulos y Trigonometría . . . 2
1.1.2. Función módulo generalizada . . . 2
1.2. Marco de posicionamiento espacial a escala terrestre . . . 3
1.2.1. Posición relativa del Sol y la Tierra: Nociones de Geografía y Astronomía . 3
1.2.1.1. Nociones relativas al movimiento de rotación terrestre . . . 3
Rotación, eje de rotación, Ecuador terrestre y Polo Norte y Sur . . . 3
Latitud y longitud . . . 3
La esfera celeste . . . 3
1.2.1.2. Nociones relativas a los movimientos de rotación y traslación terrestres . . . 3
Órbita terrestre y eclíptica . . . 3
Declinación solar y Ascensión recta . . . 5
Refracción atmosférica . . . 6
Afelio y Perihelio . . . 6
Anomalías media y verdadera . . . 7
1.2.2. Sistemas de coordenadas espaciales . . . 7
1.2.2.1. Coordenadas geográficas . . . 7
1.2.2.2. Coordenadas ecuatoriales . . . 9
1.2.2.3. Coordenadas horizontales . . . 9
1.3. Sistemas de medición del tiempo . . . 9
1.3.1. Sistemas de medición del tiempo a escala anual . . . 9
1.3.1.1. Calendario Gregoriano . . . 9
1.3.1.2. Fecha Juliana . . . 10
1.3.1.3. Cambio entre los sistemas Gregoriano y Juliano . . . 10
1.3.2. Sistema de medición del tiempo a escala diaria . . . 13
1.3.2.1. Ecuación del tiempo . . . 13
Tiempo solar aparente y Tiempo solar medio. Ángulo hora solar . . . 13
Tiempo universal coordinado . . . 14
Ecuación del tiempo . . . 14
Algoritmos . . . 14
1.3.2.2. Periodos notables del día . . . 15

Amanecer y Atardecer . . . 15
Mediodía solar y Medianoche solar. Día y Noche . . . 15
Cálculo de los instantes y duraciones . . . 15
Ecuación del amanecer . . . 17

2. Modelos de la evolución diaria de la temperatura 19
2.1. Modelos puramente trigonométricos . . . 19
2.1.1. James E. Carson [9] . . . 19
2.1.2. A. Walter [55] . . . 20
2.1.3. M.E. Johnson, E.A. Fitzpatrick [30] . . . 21
2.1.4. C.T. de Wit et al. [16] . . . 21
2.2. Modelos mixtos . . . 22
2.2.1. William J. Parton, Jesse A. Logan [41] . . . 22
2.2.2. G. G. Wilkerson, J.W. Jones, K.J. Boote, K.T. Ingram, J.W. Mishoe [68] . 23
2.2.3. B.A. Kimball, L.A. Bellamy [32] . . . 24
2.2.4. Dale E. Linvill [35] . . . 26
2.2.5. Carla Cesaraccio, Donatella Spano, Pierpaolo Duce, Richard L. Snyder [10] 27
2.2.6. Frank-M Göttsche, Folke S. Olesen [26] . . . 29
2.2.7. Raphael Felber, Sibylle Stoeckli, Pierluigi Calanca [22] . . . 30
2.3. Otros . . . 31
2.3.1. E. John Sadler, Ronald E. Schroll [48] . . . 31
2.4. Resultados en la literatura sobre comparación de modelos . . . 33
2.4.1. Johnson, M.E., y E. A. Fitzpatrick [31] . . . 33
2.4.2. Wann, Mien, Doreen Yen y Harvey J. Gold [56] . . . 33
2.4.3. Baker, J. M., D.C. Reicosky y D. G. Baker [8] . . . 34
2.4.4. Reicosky, D.C., et al. [45] . . . 34
2.4.5. Waichler, Scott R. y Mark S. Wigmosta [54] . . . 34
2.4.6. Akinnubi, R.T. y M. O. Adeniyi [3] . . . 35
2.5. Análisis de adecuación de los modelos al problema en cuestión. . . . 35

3. Ajuste de modelos a datos de estaciones meteorológicas de Puebla 37
3.1. Base de datos de estaciones meteorológicas . . . 37
3.2. Procesamiento de los datos . . . 39
3.2.1. Análisis exploratorio . . . 39
3.2.2. Selección de periodos . . . 41
3.2.3. Limpieza de los datos . . . 43
3.2.4. Ajuste de los datos . . . 48
3.3. Estudio con los modelos de temperatura escogidos . . . 52
3.3.1. Obtención de máximos y mínimos diarios . . . 53
3.3.2. Evaluación del desempeño de los modelos: metodología y resultados . . . 55
3.4. Conclusiones . . . 61

A. Código 63
A.1. Ecuaciones del tiempo . . . 63
A.2. Modelos . . . 65
A.3. Análisis exploratorio . . . 71
A.4. Limpieza de datos . . . 76
A.5. Ajuste trigonométrico . . . 79
A.6. Comparación modelos . . . 83

Bibliografía 87

Introducción

0.1. Contexto

El estudio de la temperatura del aire tiene gran importancia en muchas áreas de estudio (ver 2).

El Dengue, así como otras enfermedades transmitidas por mosquitos, constituyen uno de los problemas principales de salud a nivel mundial y en México en particular. El Dengue, Chikungunya y Zika son transmitidos fundamentalmente por dos especies de mosquitos, el *Aedes aegypti* y el *Aedes albopictus* (ver [70], [40]).

En consecuencia, para estudiar y entender los mecanismos epidemiológicos que rigen la aparición de brotes epidémicos y la dinámica de estas enfermedades, es importante entender la dinámica vital de estas especies de mosquitos ([13], [39]).

Está bien establecido en la literatura científica que ciertas condiciones ambientales, especialmente climatológicas, tienen gran influencia en la dinámica vital de estos mosquitos. Entre otras, podemos citar la temperatura, las precipitaciones, la humedad relativa, la altitud, la presencia de vegetación, etc. Sin embargo, el factor que incide principalmente en el desarrollo de los mosquitos es la temperatura (ver [47], [23], [52], [4], [72], [73], [33], [6], [21], [42]).

0.2. Planteamiento del problema

En particular en lo que respecta al estudio de las poblaciones de mosquitos transmisores de dengue (*Aedes Aegypti y Albopictus*) resulta importante conocer la variabilidad de la temperatura en las regiones donde ellos habitan pues ello se correlaciona en gran medida con la productividad de mosquitos en la región, lo cual está directamente relacionado con la posible aparición de brotes de dengue. Concretamente, se sabe que los hábitos vitales de los mosquitos dependen mucho de que la temperatura se mantenga en ciertos rangos. En consecuencia, es importante conocer o poder estimar en qué intervalos de tiempo o al menos su duración a lo largo de un día la temperatura se encontrará en esos rangos.

En la literatura científica existen multitud de modelos de evolución diaria de la temperatura. Sin embargo, la aplicación de estos modelos no siempre es inmediata, debido a que sus formulaciones requieren datos de diferente naturaleza, que no siempre están disponibles o que dependen de la ubicación espacio temporal local y de ciertas condiciones locales que solo pueden calcularse si se entiende como se mide localmente la posición relativa de la Tierra y el Sol, tales como los tiempos

en los que ocurren el atardecer y el amanecer. En lo que atañe a esta tesis, es común que únicamente se reporten máximas y mínimas diarias de temperatura. En esta situación, surge la cuestión de averiguar qué modelos se pueden utilizar si sólo se cuenta con estos datos, y si la aproximación obtenida es razonable.

El problema de investigación que se plantea es el siguiente: ¿Es posible estimar la evolución diaria de la temperatura (con una resolución temporal al menos de horas) en un lugar dado de la República Mexicana contando únicamente con los datos de temperatura mínima y máxima diaria?

0.3. Objetivos

Dada la pregunta anterior, el objetivo de esta tesis es desarrollar y evaluar una metodología que permita, a partir de los datos de temperatura mínima y máxima diaria en un lugar y fecha concretos, y de información contextual adicional (coordenadas geográficas, la fecha juliana, etc.), el obtener una estimación razonable de la evolución diaria de temperatura con una resolución temporal satisfactoria. La metodología se evaluará usando datos de estaciones meteorológicas del estado de Puebla.

Como objetivos secundarios de la tesis, derivados del objetivo principal, se plantea el proporcionar un catálogo de modelos de evolución diaria de temperatura junto con su análisis, y una explicación detallada de los elementos que aparecen en estos modelos. Estos temas se tratan en diferentes fuentes de la literatura científica y académica especializada, por lo que no constituyen material original de la tesis. Sin embargo, hemos constatado que la presentación de estos temas no siempre es todo lo rigurosa que podría ser, desde el punto de vista de la Física o las Matemáticas. En este contexto, pensamos que tiene valor por sí mismo el exponer este conocimiento de forma más rigurosa, de manera que la presentación sea apta para estudiantes y académicos de facultades de ciencias físico-matemáticas, ingeniería, etc.

Por otra parte, derivado del estudio anterior, se aporta además una presentación de los sistemas de medición del espacio y el tiempo a escala terrestre o humana, en relación con las ecuaciones del tiempo. Esto permite, por ejemplo, estimar las horas en las que ocurren el amanecer y el atardecer, así como las duraciones del día y la noche, en un lugar y fecha determinados. Este tema tiene interés por sí mismo, aparte de ser un paso auxiliar en la mayoría de modelos de evolución diaria de la temperatura.

0.4. Metodología

En vista del problema y los objetivos planteados, lo primero que se hizo fue revisar la literatura científica y académica buscando modelos matemáticos de evolución diaria de la temperatura. En esta tesis se reportan todos los modelos de este tipo que pudimos encontrar. Además, se hizo especial énfasis en tratar de entenderlos y exponerlos con total rigor matemático. Frecuentemente, se encontró que los modelos se aplicaban a situaciones con condiciones espacio-temporales muy específicas. En esos casos, se trató de presentar los modelos con la mayor generalidad posible, dejando para más adelante el análisis de la idoneidad de aplicación en circunstancias concretas.

En estos modelos suelen aparecer ciertos elementos, que tienen que ver con descripciones geográficas (ubicación de puntos en el planeta Tierra), astronómicas (posición relativa del Sol y la Tierra, y percepción del Sol desde un punto determinado de la Tierra) y de medición del tiempo

(identificación precisa de una fecha, interpretación y definición rigurosa de fenómenos naturales como el atardecer, el amanecer, etc.). Se dedicó una parte de esta tesis a explicar todo esto con detalle.

En especial, se hizo un análisis de la idoneidad de los modelos para dar respuesta a la pregunta de investigación planteada. Para ello, se analizó la información necesaria para su aplicación; es decir, las variables de entrada necesarias para su uso. En este contexto, se consideró que un modelo era admisible si requería información temporal (fecha de simulación), geográfica (ubicación espacial, o coordenadas geográficas, del lugar de simulación), y temperatura mínima y máxima diaria. Se encontró que varios modelos suponían conocidos datos como las temperaturas en el amanecer o atardecer, o instantes en que se daba la temperatura máxima o mínima diaria. En estos casos, se consideraron no admisibles y se desestimó su uso en este trabajo.

Para ejemplificar y evaluar la metodología de simulación de temperaturas, se usaron datos de temperaturas de cinco estaciones meteorológicas del estado de Puebla, con datos correspondientes al periodo 2010-2018. Para su uso, se requirió un preprocesamiento, que incluía distintas fases: análisis exploratorio para conocer el estado de los datos y posibles problemas y soluciones, selección de periodos o muestras de los datos representativas que presentaran una buena disposición para el análisis, limpieza de los datos, e interpolación para obtener series temporales representativas de la evolución anual general de temperaturas en el lugar correspondiente.

Finalmente, se utilizaron estas series temporales interpoladas para evaluar el desempeño de los modelos catalogados como admisibles. Para ello, se obtuvieron las temperaturas mínimas y máximas diarias, para poder calibrar los modelos. Una vez obtenidas las simulaciones, se compararon con la interpolación original, calculando los errores de aproximación.

Para el procesamiento de estas señales, se usaron herramientas elementales de visualización y análisis de los datos (graficación de curvas; histogramas; cálculo de estadísticas básicas como promedios, mínimos y máximos, porcentajes de datos faltantes, etc.), y herramientas estándar de procesamiento para la limpieza y ajuste de los datos (detección y clusterización de intervalos con datos anómalos, interpolación lineal, ajuste por polinomios trigonométricos, pseudoinversa de Moore-Penrose, etc.) y de análisis del ajuste (cálculo de errores en diferentes métricas).

En el enlace siguiente se puede encontrar diverso material generado durante el proceso de elaboración de esta tesis: ficheros de datos, códigos en GNU Octave [19] que implementan diferentes tareas del análisis y procesamiento de las señales, y las gráficas de las series temporales de temperaturas obtenidas, tanto reales como procesadas, y simuladas con diferentes modelos, para el caso de cinco estaciones meteorológicas del estado de Puebla: `https://drive.google.com/drive/folders/1cPVAX5jUuG0YbrnjI1ID7xSHTS16QTRu?usp=drive_link`

0.5. Conclusiones

Dados los distintos análisis realizados se escogieron 3 modelos que se adecuaban a las restricciones de nuestro problema: el modelo sinusoidal de de Wit [16], el modelo mixto de Wilkerson [68] que es una curva sinusoidal en el día y una línea recta en la noche, y el modelo mixto de Linvill [35] que también es una curva sinusoidal en el día, y en la noche supone que la temperatura decrece logarítmicamente. Haciendo una comparativa de los errores relativos de estos modelos respecto a la temperatura procesada, limpiada y extrapolada (ver tabla 3.13) se puede concluir que el modelo de Linvill [35] tuvo el mejor desempeño para 4 de las 5 estaciones. Para una de las estaciones meteorológicas el modelo de de Wit [16] tuvo un mejor rendimiento en algunas métricas.

Sin embargo, para la métrica p=∞ (que es la más exigente desde un punto de vista aproximativo), el modelo de Linvill tuvo el error relativo más pequeño. Esto sugiere que el modelo de Linvill es el más prometedor para estimar la evolución diaria de la temperatura dadas las ubicaciones de las estaciones meteorológicas y las restricciones para los datos de entrada considerados aquí (temperaturas mínima y máxima, tiempos del amanecer, atardecer y mediodía solar).

Capítulo 1

Sistemas de medición del espacio y el tiempo a escala humana

En primer lugar, los modelos de evolución diaria de temperatura son modelos temporales; es decir, la variable independiente es el tiempo, y su resultado es una serie temporal, que indica una temperatura en cada instante de tiempo dentro de un rango.

Segundo, la temperatura superficial en un lugar de la corteza terrestre, a nivel del suelo, es una magnitud física compleja, influida por muchos factores. Pero principalmente, está determinada por la actividad del Sol y cómo la luz del astro incide en el punto determinado, aportando radiación que genera calor. Por lo tanto, la posición relativa del Sol y la Tierra es el factor más importante. Además, y de manera complementaria, también es clave el conocer cómo los rayos de luz provenientes del Sol inciden en un punto determinado, dependiendo de su ubicación geográfica y del instante de tiempo.

Tercero, la posición relativa del Sol y la Tierra está descrita, según el conocimiento físico existente, por la Mecánica Newtoniana, y con más generalidad si se quiere, por la Teoría general de la Relatividad. Sin embargo, para la precisión requerida en estos modelos, no es necesario tener en cuenta tal nivel de complejidad, pudiendo realizarse una gran simplificación. Así, la posición relativa del Sol y la Tierra viene determinada fundamentalmente por dos movimientos relativos de la Tierra con respecto al Sol: el movimiento de traslación, y el movimiento de rotación. El primero determina la época del año, las estaciones (invierno, primavera, verano y otoño), los meses, etc. Esto afecta al clima de una región específica de la Tierra de forma determinante. El segundo determina el ciclo diario de día y noche, provocando una cuasi periodicidad local en las temperaturas, alternándose un periodo más cálido en el que las temperaturas aumentan hasta su máximo para después ir decayendo, coincidiendo con la recepción directa de la energía proveniente del Sol (el día), y un periodo más frío en el que las temperaturas van decayendo, debido a la falta de recepción de la fuente lumínica, hasta el inicio del ciclo siguiente (la noche).

Cuarto, para poder describir adecuadamente estos mecanismos y cómo influyen en la evolución de la temperatura, es necesario contar con sistemas adecuados de medición del tiempo y de ubicación espacial, y entenderlos bien. En este capítulo se desarrollan estos temas.

1.1. Preliminares de Matemáticas

1.1.1. Medición de ángulos y Trigonometría

Aunque en Matemáticas normalmente se utilizan los radianes para medir ángulos, tradicionalmente en este contexto se han utilizado otros dos sistemas de unidades.

El primero es el sistema sexagesimal, cuyas unidades son los grados, arco-minutos y arco-segundos, donde $360°$ equivale a 2π radianes, $1°$ equivale a 60 arco-minutos ($60'$) y 1 arco-minuto equivale a 60 arco-segundos ($60''$).

El otro sistema es el sistema horario, cuyas unidades son las horas, minutos y segundos. En este sistema 24 horas (24h) equivale a $360°$, 1 hora equivale a 60 minutos (60 m) y 1 minuto equivale a 60 segundos (60 s). Así, una hora equivale a $\frac{360°}{24} = 15°$, un minuto equivale a $\frac{360°}{1440} = \frac{1}{4}^{\circ}$ y un segundo equivale a $\frac{360°}{86400} = \frac{1}{240}^{\circ}$.

En matemáticas las funciones $\sin t$, $\cos t$ y $\tan t$ se definen tales que sus argumentos están dados en radianes. Se van a definir las funciones $\operatorname{sindeg} t = \sin(\frac{2\pi}{360}t)$, $\operatorname{cosdeg} t = \cos(\frac{2\pi}{360}t)$ y $\operatorname{tandeg} t = \tan(\frac{2\pi}{360}t)$ ya que los parámetros usados para los cálculos posteriores se encuentran en grados sexagesimales.

1.1.2. Función módulo generalizada

En los cálculos posteriores va a ser necesario usar la función módulo con números reales, se va a definir de la siguiente forma:

Sean $r, s \in \mathbb{R}$, entonces $\exists n \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{R}$ tales que $ns \leq r < (n+1)s$, y se puede expresar:

$$r = ns + q \quad \text{y} \quad 0 \leq q < s, \tag{1.1}$$

$$\Rightarrow \frac{r}{s} = n + \frac{q}{s} \quad \text{y} \quad 0 \leq \frac{q}{s} < 1, \tag{1.2}$$

$$\Rightarrow \left\lfloor \frac{r}{s} \right\rfloor = n. \tag{1.3}$$

Sustituyendo 1.3 en 1.2:

$$\frac{r}{s} = \left\lfloor \frac{r}{s} \right\rfloor + \frac{q}{s}, \tag{1.4}$$

$$\Rightarrow q = r - s \left\lfloor \frac{r}{s} \right\rfloor. \tag{1.5}$$

A ésta cantidad q se le va a denotar como:

$$\text{mód}(r, s) \equiv q. \tag{1.6}$$

Note que esta función mód es una generalización de la función módulo usualmente definida en matemáticas para los números naturales de la misma forma.

1.2. Marco de posicionamiento espacial a escala terrestre

1.2.1. Posición relativa del Sol y la Tierra: Nociones de Geografía y Astronomía

1.2.1.1. Nociones relativas al movimiento de rotación terrestre

Rotación, eje de rotación, Ecuador terrestre y Polo Norte y Sur

Es conocido que el planeta Tierra gira hacía el este alrededor de un eje llamado *eje de rotación*, este rota una vez alrededor del Sol cada 24 horas, aproximadamente. El ecuador terrestre es el circulo alrededor de la Tierra que en todos sus puntos equidista de los polos norte y sur, se encuentra en un plano perpendicular al eje de rotación llamado *plano ecuatorial*; el ecuador divide al planeta en los hemisferios norte y sur. El Polo Norte (Sur) es el punto donde la superficie en el hemisferio norte (sur) de la Tierra coincide con el eje de rotación.

Latitud y longitud

La latitud l de un punto sobre la superficie terrestre se define como el ángulo entre el plano ecuatorial y la linea que conecta el centro de la Tierra y el punto, esta coordenada va desde los $-90°$ hasta los $90°$. Para la longitud de un punto se definen primero los meridianos, son lineas paralelas entre si que son perpendiculares al ecuador y pasan a través de los polos norte y sur. Entonces, la longitud ϕ de un punto es el ángulo entre el meridiano que pasa por el Real Observatorio de Greenwich y el meridiano que pasa por el punto. La longitud va desde los $0°$ hasta los $180°$ con valores negativos hacia el este y negativos al oeste.

La esfera celeste

Es una esfera ficticia sin radio definido usada para describir la posición de objetos en el cielo vistos desde la Tierra y es concéntrica respecto a esta. En la esfera de la Figura 1.1 el ecuador celeste (celestial equator) es un plano que se extiende a través del ecuador terrestre. A las prolongaciones de los ejes de rotación del norte y sur de la Tierra se les llama respectivamente polo norte celeste y polo sur celeste.

1.2.1.2. Nociones relativas a los movimientos de rotación y traslación terrestres

Órbita terrestre y eclíptica

Visto desde un sistema de referencia inercial en el espacio, la Tierra rota alrededor de un eje y se traslada alrededor del Sol en una trayectoria elíptica, donde este es un foco de la elipse. La órbita de la Tierra tiene una excentricidad de 0.0167. Ya que este valor es muy cercano a 0 su trayectoria es muy cercana a la de una circunferencia y el centro de la órbita es muy cercano al del Sol. El plano que incluye la órbita de la Tierra alrededor del Sol es llamado *plano de la eclíptica* y no es paralelo al plano que se extiende a través del ecuador de la Tierra (plano ecuatorial o ecuador celeste). Fijado un radio para la esfera celeste, la *eclíptica* es la intersección del plano de la eclíptica con la esfera celeste. Visto desde la Tierra, la eclíptica marca el camino aparente que sigue el sol. Al ángulo formado entre el plano de la eclíptica y el ecuador celeste se le llama *oblicuidad de la eclíptica* y tiene un valor de $23.44°$ grados actualmente, como se muestra en la Figura 1.2, y

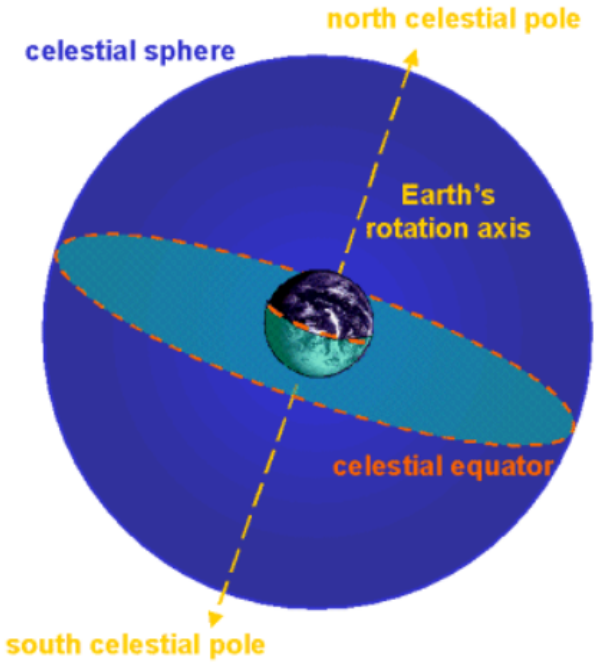

Figura 1.1: Esfera celeste [12].

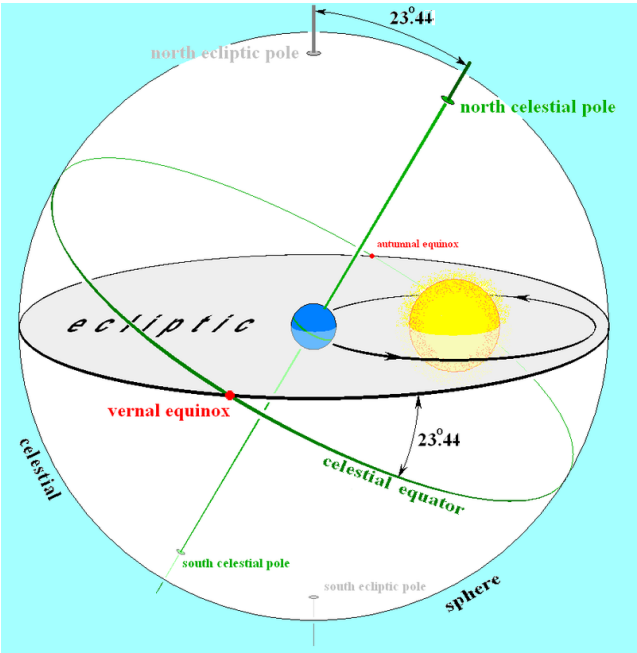

Figura 1.2: Esfera celeste con el plano de la eclíptica y los equinoccios [61].

varía mínimamente con el tiempo (se estima que decrece 47 arco-segundos por siglo), por lo que se supondrá constante [44].

La *longitud eclíptica* es la distancia angular que ha recorrido el Sol desde el punto Aries (ver concepto abajo) a través del plano de la eclíptica en un instante de tiempo; es decir, es una medida de que tanto ha avanzado la Tierra en su órbita desde el equinoccio de primavera. Este ángulo varía desde 0° hasta 360° [15]. Es importante notar que este angulo no incrementa linealmente con el tiempo ya que la Tierra no tiene la misma velocidad orbital durante toda su trayectoria debido a la excentricidad de esta.

Declinación solar y Ascensión recta

Al ángulo entre la línea imaginaria que va desde el centro de la Tierra hasta el centro del Sol y el plano ecuatorial se le llama *declinación solar* y se le denota δ. Esta coordenada indica qué tan al norte o sur se encuentra el cuerpo celeste del ecuador, δ varía desde $-90°$ hasta $90°$. Por definición, la declinación solar es mínima ($\delta = 0°$) en los equinoccios de primavera y otoño (esto indica que el sol se encuentra sobre el ecuador celeste, y es máxima ($\delta = \pm 23.44°$ [69]) en los llamados solsticios de verano e invierno, respectivamente. Durante los solsticios la duración del día o de la noche son las máximas del año, mientras que en los equinoccios la duración del día y de la noche son aproximadamente iguales (Figura 1.4). Nótese que los equinoccios no coinciden con los puntos de mayor cercanía al Sol ni los solsticios con los puntos de mayor lejanía al Sol (Figura 1.3).

Se necesitan dos nuevos conceptos para definir la ascensión recta: el *circulo hora* de un objeto celeste es la circunferencia que pasa por los polos norte y sur celestes a través del objeto celeste. El *punto Aries* es la posición relativa del Sol respecto a la Tierra cuando ocurre el equinoccio de primavera. Usando la Tierra como sistema de referencia, la ascensión recta α es la distancia

angular de un punto en horas minutos y segundos desde el punto Aries al circulo hora del punto a través del ecuador celeste; α varía desde 0h hasta 24h y aumenta hacia el este (α es 0h para el equinoccio de primavera y 12h para el equinoccio de otoño, mientras que es 6h para el solsticio de verano y 18h para el solsticio de invierno).

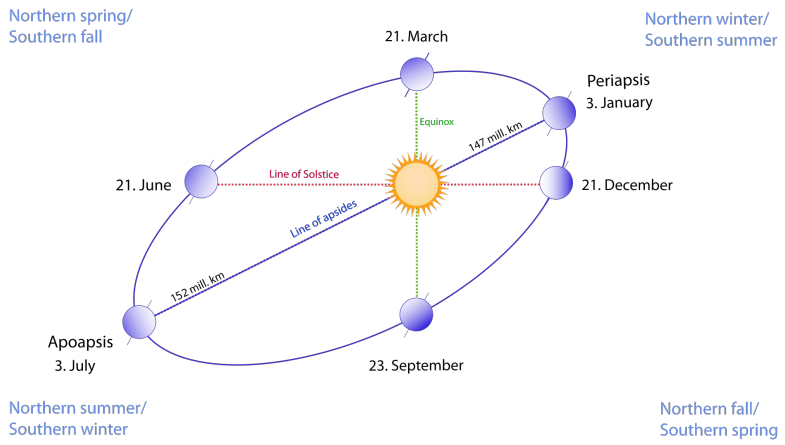

Figura 1.3: Equinoccios de primavera y otoño. Solsticios de invierno y verano [60].

Refracción atmosférica

Cuando la luz del Sol pasa a través de la atmósfera esta es refractada. Esto tiene un efecto en los tiempos en los que ocurren el amanecer y el atardecer. Suponiendo condiciones atmosféricas normales, cuando ocurre el amanecer o atardecer el centro de la posición real del Sol (su altitud a) está aproximadamente a 50 arco-minutos (0.83°) por debajo del horizonte [51]. Alrededor de 16 arco-minutos de esta altitud es el radio aparente del sol, mientras que los 34 arco-minutos restantes corresponden al efecto de refracción atmosférico (Figura 1.5).

Afelio y Perihelio

El apoapsis y el periapsis son los puntos de una órbita elíptica más alejados y cercanos del cuerpo al que están orbitando, respectivamente. En el caso de la órbita de la Tierra alrededor del Sol estos puntos se llaman afelio y perihelio [57].

El Sol también tiene un movimiento de rotación alrededor de su eje, por lo que se le puede definir un plano ecuatorial. Ahora, el plano ecuatorial del Sol y la elipse sobre la que se traslada la Tierra tienen dos intersecciones llamadas nodos ascendente y descendente. El nodo ascendente es cuando la órbita terrestre pasa del hemisferio sur del Sol hacia el norte y el descendente cuando se pasa del hemisferio norte del Sol hacia el sur. Ahora, se define la *longitud del nodo ascendente* Ω como el ángulo sobre el plano ecuatorial del Sol desde la dirección del punto Aries hasta el nodo ascendente [58]. El *argumento del perihelio* es el ángulo entre el nodo ascendente y el perihelio, medido desde el Sol. Así, la *longitud del perihelio* es la suma del argumento del perihelio y la longitud del nodo ascendente. Puede ser interpretado (ver Figura 1.6) como el ángulo desde el punto Aries hasta el perihelio si el plano ecuatorial del Sol no formara un ángulo con el plano de la eclíptica (el plano sobre el que se traslada la Tierra)

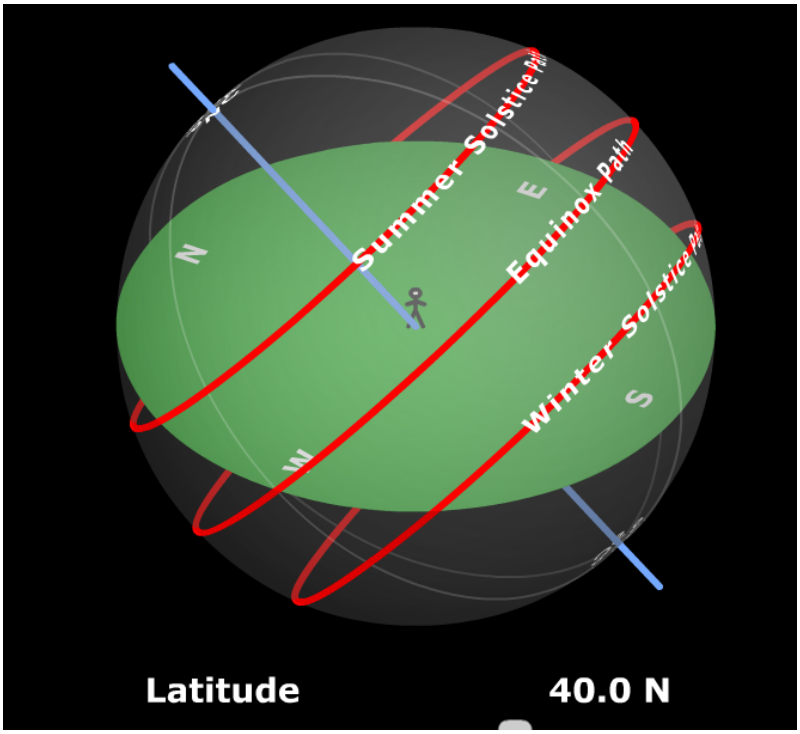

Figura 1.4: Trayectorias del Sol (en rojo) en los equinoccios y solsticios para un observador a 40° latitud norte, la línea azul es la prolongación de los ejes de los polos. En esta latitud en verano los días son más largos y en invierno más cortos [53].

Anomalías media y verdadera

Imagine una Tierra ficticia cuya órbita es una circunferencia que pasa por el eje principal de la elipse de su órbita real alrededor del Sol; además, esta Tierra ficticia tiene velocidad constante y el mismo periodo que su órbita real. Entonces, la anomalía media es el ángulo que forma esta Tierra ficticia en un instante de tiempo medido desde el perihelio con respecto al centro del circulo [38].

La anomalía verdadera es el ángulo formado entre el perihelio y la posición de la Tierra en su órbita elíptica alrededor del Sol, medido con respecto al Sol [38].

La Ecuación del centro es la diferencia entre la anomalía verdadera y la anomalía media [38].

1.2.2. Sistemas de coordenadas espaciales

Hay dos sistemas de coordenadas muy usados para ubicar objetos en la esfera celeste: Las *coordenadas ecuatoriales* y *coordenadas horizontales*.

1.2.2.1. Coordenadas geográficas

Se le llama coordenadas geográficas al sistema de referencia que utiliza una superficie esférica (coordenadas esféricas con radio constante). Es usado para localizar un punto sobre la superficie

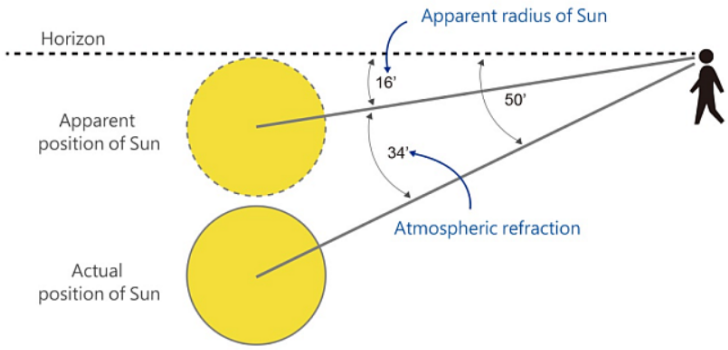

Figura 1.5: Posición real y aparente del Sol en el amanecer y atardecer [51].

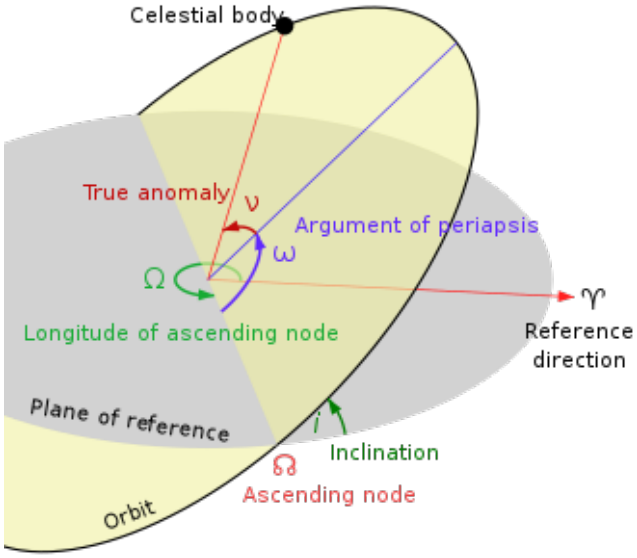

Figura 1.6: Elementos orbitales. En el caso del Sol y la Tierra la dirección de referencia es el punto Aries y el plano de referencia es el plano ecuatorial del Sol [65].

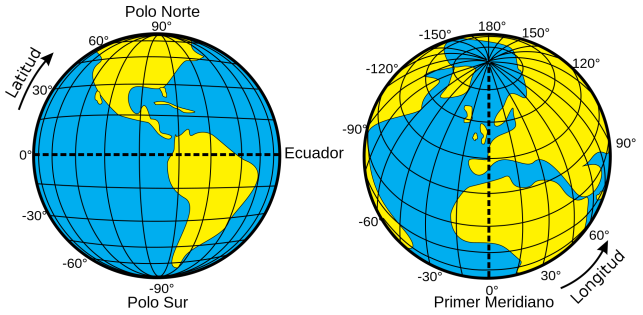

Figura 1.7: Coordenadas geográficas [59].

de la Tierra mediante un par de números llamados latitud y longitud(ϕ,l) (ver Figura 1.7).

1.2.2.2. Coordenadas ecuatoriales

Las coordenadas ecuatoriales son una analogía a cómo se describen posiciones en la Tierra mediante los meridianos y paralelos (latitud y longitud) 1.8. Estas coordenadas están definidas por la *declinación* (δ) y la *ascensión recta* (α) y se usan para medir la posición de cuerpos celestes desde la Tierra, en nuestro caso se usarán para medir la posición del Sol.

1.2.2.3. Coordenadas horizontales

En el sistema de coordenadas horizontales se usa el horizonte local de un observador, por lo tanto, la posición de un objeto es dependiente de la longitud y latitud del observador 1.9. Las coordenadas son: el ángulo de altitud (a), que es la distancia angular del objeto sobre el horizonte, a es positiva sobre el horizonte y negativa debajo de él, por lo que varía desde $-90°$ hasta $90°$). Y el azimut (Az), que es la distancia angular de la proyección del objeto sobre el horizonte, medida desde el norte y que aumenta positivamente hacia el este. ($a = 0°$ corresponde al norte, $a = 90°$ al este, $a = 180°$ sur y $a = 270°$ al oeste). Además, el ángulo complementario al de altitud es llamado ángulo cenit y se denota por θ.

En la Figura 1.9, el *cenit* (zenith) es el punto donde el ángulo de altitud es de 90° y el meridiano celeste es el meridiano que pasa por el polo norte celeste, el cenit del observador y el polo sur celeste.

1.3. Sistemas de medición del tiempo

1.3.1. Sistemas de medición del tiempo a escala anual

1.3.1.1. Calendario Gregoriano

El calendario gregoriano se instauró por el Papa Gregorio XIII. Su propósito original fue corregir la fecha de Pascua, que cada vez se alejaba más del equinoccio de primavera. Esto ocurrió debido a que el calendario juliano, que era el calendario usado anteriormente, calculaba mal por un factor de 11 minutos anuales el año solar (que es el intervalo de tiempo entre dos pasos consecutivos del

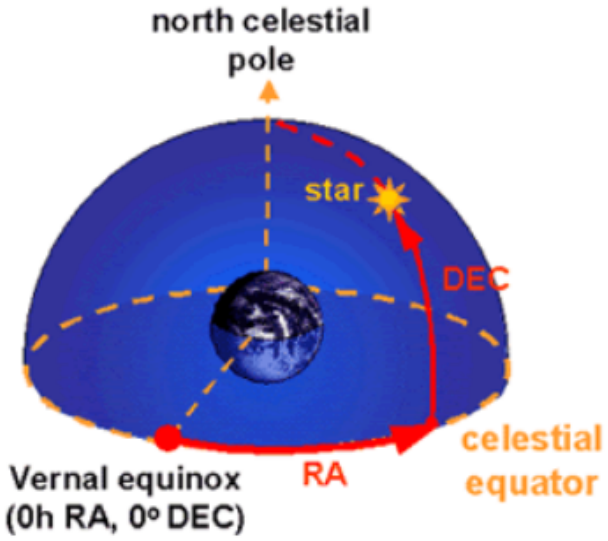

Figura 1.8: Coordenadas ecuatoriales. La posición de un objeto está dada por su ascensión recta (RA o α) y su declinación (DEC o δ) [14].

sol por el punto Aries). El calendario gregoriano es un calendario solar con 12 meses de 28 a 31 días cada uno. El año consiste de 365 días y se agrega un día al final de febrero cada 4 años, esta regla se exceptúa cuando el año es divisible por 400 [71].

1.3.1.2. Fecha Juliana

Para los astrónomos que observaban el cielo en el pasado era inconveniente que los días cambiaran durante la noche, por lo que en muchas culturas se empezó a adoptar la costumbre de que los días empezaran a partir del mediodía. El día Juliano es un conteo de los días transcurridos desde el mediodía (ver concepto en 1.3.2.2) del 4713 A.C.

La fecha Juliana es la suma del día Juliano más la fracción del día en UTC (Tiempo Universal Coordinado 1.3.2.1) transcurrida en un instante de tiempo desde el mediodía [38]. Es importante hacer mención que los datos a usar para el análisis de los modelos de temperatura usan el formato UTC-6, que es el huso horario que se usa en Puebla desde 1942 [64].

1.3.1.3. Cambio entre los sistemas Gregoriano y Juliano

A continuación vamos a explicar cómo calcular el Día Juliano a partir del Calendario Gregoriano.

Dada una fecha en el Calendario Gregoriano, denotamos por A, M y D el año, el mes y el día del mes, respectivamente. Nótese que M toma valores del 1 al 12 y D del 1 al 31. Para lo que sigue

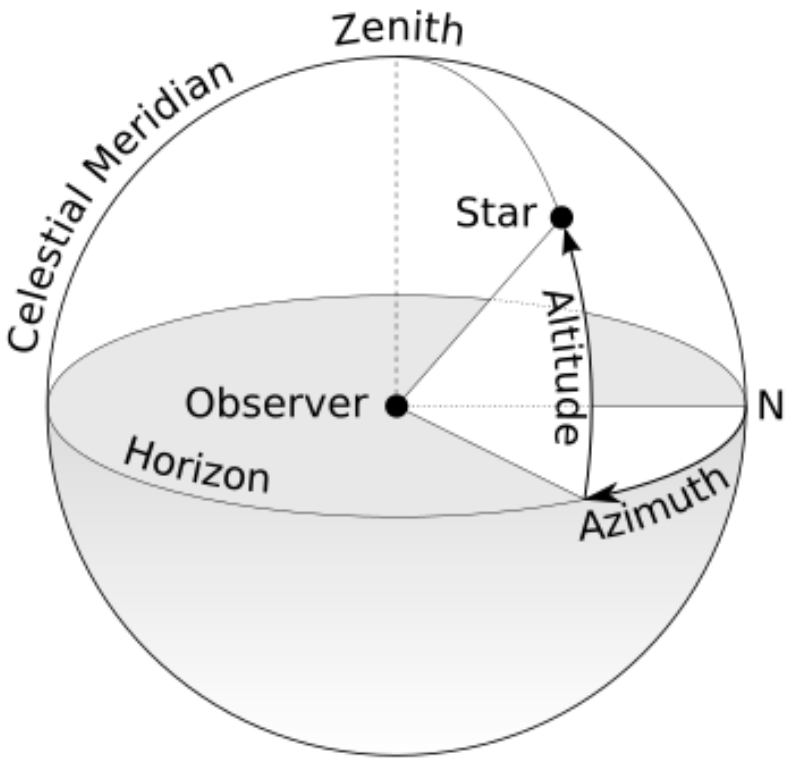

Figura 1.9: Coordenadas horizontales. La posición de un objeto está dada por su altitud (a) y su azimut (Az) [62].

es conveniente introducir un cambio de variables, relacionado con el Calendario Juliano. En este calendario los años empiezan el 1 de Marzo. De acuerdo con esto definimos las variables A' y M' para denotar los años y meses de una forma alternativa.
La variable M' toma valores del 0 al 11, correspondiendo a Marzo el valor 0, a Abril el valor 1 y así sucesivamente hasta Diciembre con el valor 9. A Enero y Febrero les corresponden los valores 10 y 11 respectivamente. A' puede ser igual a A o diferir en 1. Las relaciones entre las variables anteriores son las siguientes:

$$A' = A - \left\lfloor \frac{12 - M}{10} \right\rfloor, \tag{1.7}$$

$$M' = \text{mód}(M - 3, 12), \tag{1.8}$$

$$A = A' + \left\lfloor \frac{M}{10} \right\rfloor, \tag{1.9}$$

$$M = \text{mód}(M' + 2, 12) + 1. \tag{1.10}$$

Para calcular el Día Juliano introducimos las siguientes variables auxiliares:

$$y = \lfloor 365.25(A' + 4712) \rfloor, \tag{1.11}$$

$$d = \lfloor 30.6M' + 0.5 \rfloor, \tag{1.12}$$

$$N = y + d + D + 59, \tag{1.13}$$

$$g = \left\lfloor 0.75 \left\lfloor \frac{A'}{100} + 1 \right\rfloor \right\rfloor - 2. \tag{1.14}$$

Entonces el número de Día Juliano (JDN) se expresa como:

$$\text{JDN} = N - g. \tag{1.15}$$

Y para calcular la fecha Juliana, simplemente se agrega al número entero JDN la fracción del día en el instante deseado:

$$\text{JD} = \text{JDN} + \frac{\text{hora} - 12}{24} + \frac{\text{minutos}}{1440} + \frac{\text{segundos}}{86400}. \tag{1.16}$$

En la ecuación anterior horas, minutos y segundos se interpretan como la hora tal y como la marca el reloj.

Ahora, vamos a ver cómo cambiar del sistema Juliano al calendario Gregoriano.

Dado el número de día Juliano JDN se tiene $N = g + \text{JDN}$ (1.15). Ahora, g se calcula de la siguiente forma:

$$g = \left\lfloor 0.75 \left\lfloor \frac{\text{JDN} - 4479.5}{36524.25} \right\rfloor + 0.5 \right\rfloor - 37. \tag{1.17}$$

Luego, si d' es el número de días transcurridos en el año desde Marzo 1 ($d' = 0$) se tiene:

$$d' = \lfloor \text{mód}(N - 59.25, 365.25) \rfloor, \tag{1.18}$$

$$A = \left\lfloor \frac{N}{365.25} \right\rfloor - 4712, \tag{1.19}$$

$$M = \text{mód}\left(\left\lfloor \frac{d' + 0.5}{30.6} \right\rfloor + 2, 12 \right) + 1, \tag{1.20}$$

$$D = \lfloor \text{mód}(d' + 0.5, 30.6) \rfloor + 1. \tag{1.21}$$

Estos algoritmos se han obtenido de [27, 49] y son válidos para fechas recientes.

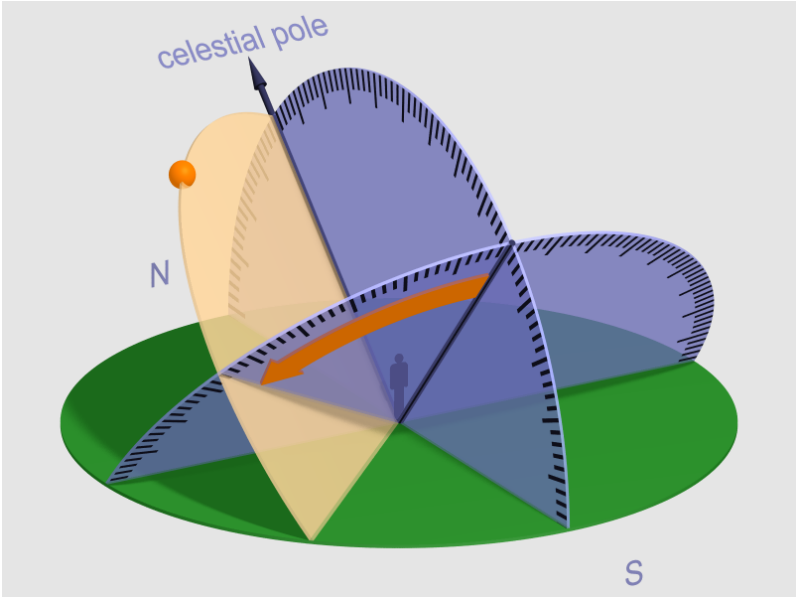

Figura 1.10: Representación gráfica de la medición del ángulo hora [63].

1.3.2. Sistema de medición del tiempo a escala diaria

1.3.2.1. Ecuación del tiempo

Tiempo solar aparente y Tiempo solar medio. Ángulo hora solar

El Ángulo hora solar es la diferencia angular entre el meridiano que atraviesa el Sol en el mediodía (cuando el Sol está en su punto más cercano al cenit, que coincide con el meridiano celeste) y el meridiano en el que se encuentra el Sol en un tiempo dado (circulo hora) [38]. Por definición, este ángulo es de 0° en el mediodía y va incrementando después de este (Figura 1.11). Se va a denotar por la letra griega ω. Este ángulo varía desde $-90°$ hasta 90°. Ya que ω se mide respecto a un observador depende de las coordenadas geográficas.

El tiempo solar aparente (o tiempo local aparente LAT) es la medida del tiempo basada en el angulo en el cielo formado por el movimiento diurno del Sol, la rapidez del movimiento diurno varía con las estaciones debido a la oblicuidad de la eclíptica y la excentricidad de la órbita de la Tierra [38]. Este ángulo es equivalente al ángulo hora solar. En este tiempo son las 12:00 horas cuando es el mediodía y puede ser medido por un reloj de Sol.

Dada la necesidad de una escala temporal que fuera uniforme se creó el concepto de tiempo solar medio. El tiempo solar medio es la medida de tiempo equivalente al ángulo hora solar basada en el movimiento diurno de un Sol ficticio que orbita la Tierra a velocidad constante cada 24 h [38]. El tiempo solar medio cayó en desuso debido a la impracticabilidad de este, ya que este tiempo depende de la longitud del observador; por ejemplo, en este tiempo, siempre existe una diferencia de aproximadamente 12 minutos entre la ciudad de Niza, Francia y Bruselas, Bélgica

Usualmente, estas dos escalas temporales varían por unos minutos y esta variación es descrita a lo largo del año por la *ecuación del tiempo*.

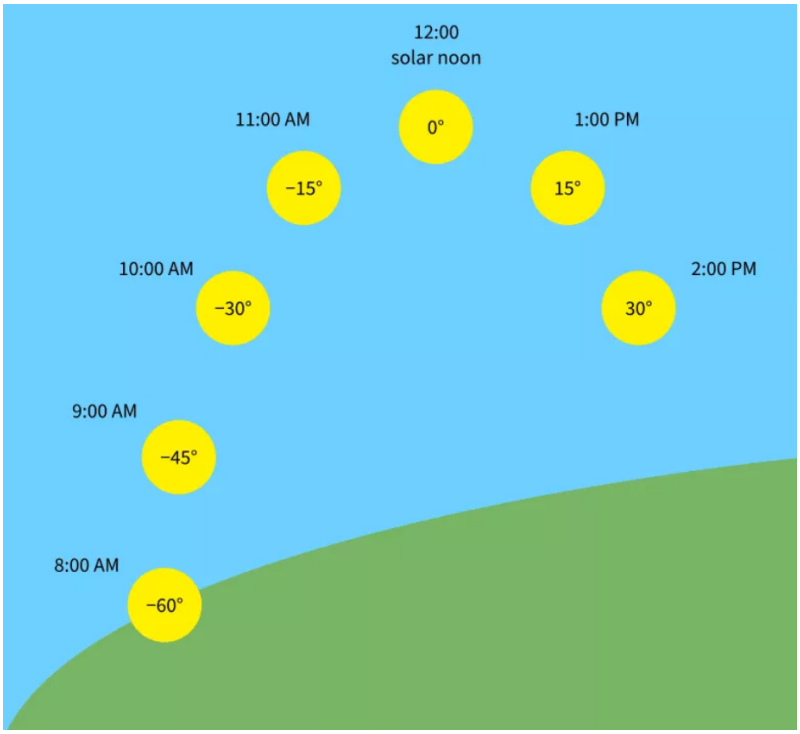

Figura 1.11: Trayectoria del sol durante el día mostrando el ángulo hora solar convertido a tiempo solar local [50].

Tiempo universal coordinado

Se le va a denominar tiempo universal (UTC o UT) al tiempo asociado al meridiano de Greenwich con el cual se regula el tiempo en el resto del mundo. La zona horaria es cada una de las partes que queda dividida por los 24 meridianos igualmente espaciados. El tiempo estándar local (LST) es la sincronización de los relojes basado en el UTC dependiente de la zona horaria, es el tiempo que se lee en los relojes digitales, ver [38].

Ecuación del tiempo

La ecuación del tiempo denotada por E describe a lo largo del año la diferencia entre el tiempo solar medio y el tiempo solar aparente [38]. Esta es una ecuación empírica, por lo cual existen muchas expresiones de ésta.

Algoritmos

Para hacer el cambio entre el tiempo local aparente y el tiempo estándar se usan las siguientes ecuaciones [29]:

- LAT es el tiempo local aparente
- LST es el tiempo estándar local
- $\circ$ se refiere a grados sexagesimales.

- L_{st} es el meridiano estándar para la zona horaria.
- E es la ecuación del tiempo.
- l es la longitud en donde se hace el cálculo.
- UTC es el tiempo universal coordinado.
- DOY es el día del año, varía desde 1-365, no se toman en cuenta los años bisiestos.
- B es una variable auxiliar llamada "day angle".

$$\mathrm{LAT} - \mathrm{LST} = 4\frac{min}{\circ}(L_{st} - l) + E \tag{1.22}$$

En donde:

$$\begin{aligned} L_{st} =& 15(\mathrm{UTC} - \mathrm{LST}), \\ B =& (\mathrm{DOY} - 1)\frac{2\pi}{365}. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Note que si la longitud se encuentra al este del meridiano estándar donde se hace el cálculo entonces $L_{st} - l$ es positivo, mientras que si se encuentra al oeste es negativo. Se tiene la siguiente expresión para la ecuación del tiempo:

$$\begin{aligned} E = 229.18\frac{\mathrm{min}}{\mathrm{rad}}(&0.000075 + 0.001868\cos B \\ &- 0.032077\sin B - 0.014615\cos 2B - 0.04089\sin 2B). \end{aligned} \tag{1.24}$$

1.3.2.2. Periodos notables del día

Amanecer y Atardecer

Se entiende por *amanecer* y *atardecer* cuando la parte superior del Sol aparente (el Sol se encuentra en otra posición real debido a la refracción atmosférica) toca el horizonte en la mañana y en la tarde respectivamente. Cuando estos fenómenos ocurren la altitud del Sol aparente es 0° en el sistema de coordenadas horizontales, y el ángulo cenit real del Sol es de $90°50'$ [38].

Mediodía solar y Medianoche solar. Día y Noche

El *mediodía solar* ocurre cuando el Sol está en su punto más cercano al cenit. La medianoche solar ocurre cuando el Sol está en su punto más cercano al nadir, el punto opuesto al cenit. La hora a la que ocurren estos eventos varía con el tiempo debido a la trayectoria del Sol alrededor de la Tierra y como se ilustra en la Figura 1.4 el camino que sigue el Sol también varía con el tiempo. Se entiende por día al periodo entre el amanecer y el atardecer y por noche al periodo entre el atardecer y el amanecer del día siguiente.

Cálculo de los instantes y duraciones

A continuación, se van a describir las ecuaciones que nos permiten calcular el instante preciso del amanecer y el atardecer, además de la duración del día y la noche, para cierto día del calendario en cualquier posición geográfica.
Las variables que vamos a utilizar son las siguientes:

1. ω es el ángulo hora solar 1.3.2.1.

2. ϕ es la latitud del observador en la Tierra 1.2.2.1.

3. δ es la declinación del Sol 1.2.1.2.

4. θ es el ángulo cenit del Sol 1.2.2.3.

5. a es el ángulo de altitud del Sol, que es complementario al ángulo cenit 1.2.2.3.

6. J_{date} es la fecha Juliana 1.3.1.2.

7. n, el numero de días que han pasado desde el 1^{ero} de Enero del 2000, 12:00:00.

8. J^* Es una aproximación del tiempo solar medio en n expresado como el día Juliano mas la fracción del día 1.3.2.1.

9. l es la longitud del observador, medida positivamente hacia el este 1.2.2.1.

10. M es la anomalía media del Sol 1.2.1.2.

11. C Es la ecuación del centro para la Tierra 1.2.1.2.

12. λ Es la longitud eclíptica del Sol 1.2.1.2.

13. 102.9372 es el valor de la longitud del perihelio 1.2.1.2.

14. $J_{transit}$ es la fecha juliana a la que ocurre el mediodía solar 1.3.2.2.

15. 2451545 es la fecha Juliana equivalente a Enero 1, 2000 a las 12:00 pm en calendario Gregoriano.

16. $0.0053\,\text{sindeg}(M) - 0.0069\,\text{sindeg}(2\lambda)$ es una aproximación de la ecuación del tiempo 1.3.2.1.

17. $23.44°$ es la inclinación máxima del eje de rotación de la Tierra con respecto a su orbita alrededor del Sol.

18. J_{rise} es la fecha Juliana del amanecer.

19. J_{set} es la fecha Juliana del atardecer.

20. LSN la hora a la que ocurre el mediodía (local solar noon) 1.3.2.2.

21. t_r, t_s las horas a las que ocurren el amanecer y atardecer, respectivamente.

22. Y, Z la duración del día y de la noche, respectivamente 1.3.2.2.

Las variables 1-5, 9-13 tienen como unidades los grados sexagesimales, las variables 20-22 están dadas en horas.

Ecuación del amanecer

La ecuación que relaciona el ángulo cenit con la latitud, la declinación del Sol y el ángulo hora del Sol es la siguiente [66]:

$$\operatorname{cosdeg}\theta = \operatorname{sindeg} a = \operatorname{sindeg}\phi \operatorname{sindeg}\delta + \operatorname{cosdeg}\phi \operatorname{cosdeg}\delta \operatorname{cosdeg}\omega. \tag{1.25}$$

Cuando ocurre el amanecer o el atardecer, el ángulo cenit del Sol es aproximadamente $\theta = 90°$, por lo que la ecuación en este caso se reduce a:

$$\operatorname{cosdeg}\omega_0 = -\operatorname{tandeg}\phi \operatorname{tandeg}\delta, \tag{1.26}$$

Donde ω_0 es el ángulo hora solar en el atardecer (si se toma un valor positivo) o el amanecer (si se toma un valor negativo).

Sin embargo, la ecuación anterior no toma en cuenta la refracción de la luz solar debido a la atmósfera de la Tierra y el diámetro del disco solar (50 arco-minutos [51]). Teniendo en cuenta esto, el ángulo de altitud del Sol es aproximadamente $a_0 = -0.833°$:

$$\operatorname{cosdeg}\omega_0 = \frac{\operatorname{sindeg}(a_0) - \operatorname{sindeg}\phi \operatorname{sindeg}\delta}{\operatorname{cosdeg}\phi \operatorname{cosdeg}\delta}. \tag{1.27}$$

Con (1.27) se pueden calcular los tiempos en los que ocurre el atardecer y el amanecer con los siguientes pasos [67]:

1. $n = \lceil J_{\text{date}} - 2451545 + 0.0008 \rceil$
2. $J^* = n - \frac{l}{360°}$.
3. $M = \text{mód}(357.5291 + 0.98560028 J^*, 360)$.
4. $C = 1.9148 \operatorname{sindeg}(M) + 0.02 \operatorname{sindeg}(2M) + 0.0003 \operatorname{sindeg}(3M)$.
5. $\lambda = \text{mód}(M + C + 180 + 102.9372, 360)$.
6. $J_{transit} = 2451545 + J^* + 0.0053 \operatorname{sindeg}(M) - 0.0069 \operatorname{sindeg}(2\lambda)$.
7. $\operatorname{sindeg}\delta = \operatorname{sindeg}\lambda \operatorname{sindeg} 23.44°$.
8. Se calcula ω_0 con la ecuación (1.27).
9. $J_{rise} = J_{transit} - \frac{\omega_0}{360}$,
   $J_{set} = J_{transit} + \frac{\omega_0}{360}$.

   Así, podemos obtener en fecha Juliana el momento en el que va a ocurrir el atardecer y el amanecer.

Finalmente, para conocer el numero de horas que tiene el día se hará lo siguiente. Note que por la definición de ángulo hora se puede deducir fácilmente que $\frac{\omega_0}{15}$ nos da el intervalo de horas entre el amanecer y el mediodía solar, o entre el mediodía solar y el atardecer.

$$t_{r,k} = \text{LSN} - \frac{\omega_0}{15}, \tag{1.28}$$

$$t_{s,k} = \text{LSN} + \frac{\omega_0}{15}. \tag{1.29}$$

Luego, el numero de horas que tiene el día es el intervalo en el que el Sol está presente en el cielo local, por lo tanto:

$$Y_k = t_{s,k} - t_{r,k} = \frac{2}{15}\omega_0. \tag{1.30}$$

Denotando $t_{r,k+1}$ como el tiempo en el que ocurre el amanecer en el día siguiente (el día $k+1$), entonces:

$$Z_k = t_{r,k+1} - t_{s,k}. \tag{1.31}$$

Capítulo 2

Modelos de la evolución diaria de la temperatura

El estudio de la temperatura del aire tiene un rol importante en varias áreas de estudio, tales como las ciencias ambientales, el estudio del crecimiento de las plantas, la construcción de invernaderos y las tasas de desarrollo biológico de insectos [25, 32]. En esta sección se han investigado modelos que requieran pocas variables de entrada y además ofrezcan buenos resultados. Se ha encontrado que tales modelos generalmente dependen de la temperatura máxima y mínima registradas a lo largo del día y las horas en las que ocurren el amanecer y atardecer, que dependen de las coordenadas geográficas y el día del año en donde se está haciendo el cálculo, como se vio en las sección de ecuaciones del tiempo. Se entiende por modelo de evolución de la temperatura diaria a un modelo matemático que consta de un conjunto de funciones que dan la temperatura en función del tiempo para una ubicación espacial determinada sobre la superficie terrestre.

Para todos los modelos de temperatura se va a usar un tiempo t que no necesariamente está en el intervalo de [0,24] horas. Al día en el que se está haciendo el cálculo se le va a denotar con k. Así, supongamos $\tilde{t} \in [0, 24]$, entonces se tiene que $t = \tilde{t} + 24(k-1)$ con $\tilde{t} = \text{mód}(t, 24)$.

2.1. Modelos puramente trigonométricos

2.1.1. James E. Carson [9]

En el articulo de Carson [9] se hace un análisis de datos de temperatura del suelo y aire recabados del Laboratorio Nacional Argonne a distintas alturas, a nivel del suelo y a 170 cm por encima para medir la temperatura del aire. Se propone analizar estos datos mediante una serie de polinomios trigonométricos.

Las variables de entrada del modelo son:

- N es el numero de datos en la serie temporal usada.
- t es la variable temporal (varía desde 0 hasta $N-1$).

- $< T >$ es un promedio de la temperatura sobre todo el intervalo de tiempo estudiado (en nuestro caso será el promedio diario).
- P es el periodo de cada término de la serie trigonométrica, en nuestro caso $P = N$.

Los parámetros del modelo son:

- A_n, B_n, C_n son las amplitudes de cada término trigonométrico.
- ϕ_n es el ángulo de fase.

La variable de salida es

- $T(t)$ es la temperatura en el instante de tiempo t.

Los datos de temperatura se ajustan computacionalmente para obtener los valores de los parámetros.

Si la serie temporal está espaciada de manera uniforme (un dato de temperatura cada 10 minutos, por ejemplo) y tiene N datos, entonces los datos de temperatura se pueden representar de la siguiente forma:

$$T(t) =< T > + \sum_{n=1}^{N/2} A_n \sin\left(\frac{2\pi}{P} nt\right) + B_n \cos\left(\frac{2\pi}{P} nt\right), \tag{2.1}$$

o mediante la siguiente expresión equivalente:

$$T(t) =< T > + \sum_{n=1}^{N/2} C_n \sin\left(\frac{2\pi}{P} nt + \phi_n\right). \tag{2.2}$$

donde $C_n = (A_n^2 + B_n^2)^{\frac{1}{2}}$ y $\phi_n = \arctan \frac{B_n}{A_n}$.

La fórmula (2.2) se propone ya que solo involucra un coeficiente (C_n) en lugar de dos (A_n, B_n). De esta forma es mas fácil ver como varía el comportamiento de la temperatura contra el tiempo en función de la profundidad. Note que no es necesario el uso de los $N/2$ términos, el cuantos términos utilizar puede ser determinado mediante un análisis de errores, esto se explora con más detalle en [9].

2.1.2. A. Walter [55]

En Walter [55] se propone un método para encontrar la variación diurna de la temperatura usando los datos de temperatura proporcionados por estaciones meteorológicas por cada hora. Para esto, se aplica el modelo propuesto en [9] con 3 términos sinusoidales en donde se ajustan datos tomados por estaciones en distintos lugares de la misma forma que en [9]. Se observa que el cociente entre la amplitud de los primeros 3 términos y el rango es casi constante en la escala diaria (nótese que en este modelo "rango" hace referencia a la diferencia entre la máxima y mínima observada y amplitud hace referencia a los coeficientes C_n de cada término sinusoidal (2.2)). De esto, se construye una "curva unitaria" usando el promedio de todas las estaciones del cociente entre la amplitud y el rango como coeficiente para cada término. Así, de esta curva unitaria se puede obtener la variación diurna de la temperatura multiplicando el valor de la curva unitaria en cierto instante por el rango obtenido para cada caso particular.

2.1.3. M.E. Johnson, E.A. Fitzpatrick [30]

En el articulo de Johnson y Fitzpatrick [30] se propone usar un modelo de temperatura combinado para el periodo de 24 horas, esto es, usar el modelo de [55] para la noche y un modelo sinusoidal durante el día. Para esto, se usa la misma curva unitaria usada en [55] (los mismos valores ajustados para los coeficientes y los ángulos de fase). Sin embargo, para que no haya una discontinuidad en la gráfica combinada de temperatura contra tiempo, y para asegurarse que la temperatura mínima ocurra en el amanecer, se introducen unas funciones para dilatar (o contraer) y trasladar tanto horizontal como verticalmente la curva de temperatura diurna de Walter. Este modelo combinado da mejores resultados que solamente el uso del modelo de Walter para las 24 horas del día. Se dan más detalles en [30].

2.1.4. C.T. de Wit et al. [16]

En el trabajo de de Wit [16] se presenta un modelo que usa dos funciones coseno para modelar la temperatura del aire. En este modelo se hacen dos suposiciones importantes, que la temperatura máxima ocurre a las 14 horas y que la temperatura mínima ocurre en el amanecer. El modelo propuesto por De Wit se ha usado para modelar el crecimiento de cultivos por su simplicidad [45]. En esta tesis se propone una modificación de la descripción del modelo dada por el artículo de Reicosky [45] expresada con mayor rigor matemático. Aquí, las variables de entrada son:

- $T_{max,k}$ es la temperatura máxima registrada en el día k.
- $T_{min,k}$ es la temperatura mínima registrada en el día k.
- t es el tiempo en horas.
- $t_{r,k}$ es la hora a la que ocurre el amanecer en el día k.

Se definen las siguientes variables auxiliares:

$$T_{avg,k} = \frac{T_{max,k} + T_{min,k}}{2}, \tag{2.3}$$

$$T_{amp,k} = \frac{T_{max,k} - T_{min,k}}{2}. \tag{2.4}$$

Y la variable de salida es:

- $T_k(t)$ es la temperatura en cualquier instante dado para el día k.

Entonces, si dividimos el día entre el amanecer y las 14 horas, y las 14 horas y el amanecer del día siguiente se tiene que:

Si $t_{r,k} \leq t \leq 24(k-1) + 14$ entonces:

$$T_k(t) = T_{avg,k} - T_{amp,k} \cos\left[\frac{\pi(t - t_{r,k})}{24(k-1) + 14 - t_{r,k}}\right], \tag{2.5}$$

Si $24(k-1) + 14 < t \leq t_{r,k+1}$ entonces:

$$T_k(t) = \frac{T_{max,k} + T_{min,k+1}}{2} + \frac{T_{max,k} - T_{min,k+1}}{2} \cos\left[\frac{\pi(t - 24(k-1) - 14)}{t_{r,k+1} - 24(k-1) - 14}\right]. \tag{2.6}$$

Note que en (2.5) cuando $t = t_{r,k}$ entonces $T_k(t = t_{r,k}) = T_{avg,k} - T_{amp,k} = T_{min,k}$. Luego, la curva de temperatura va creciendo suavemente hasta llegar a su valor máximo cuando son las 14 horas del día k ($t = 24(k-1) + 14$). Luego, (2.6) empieza en $T_{max,k}$ y disminuye hasta alcanzar el valor $T_{min,k+1}$, suponiendo que $T_{min,k+1} < T_{max,k}$ (ver Figura 2.1). Es importante advertir que si $T_{min,k+1}$ es mucho menor que $T_{min,k}$ se puede alcanzar una temperatura menor a la mínima en el día k.

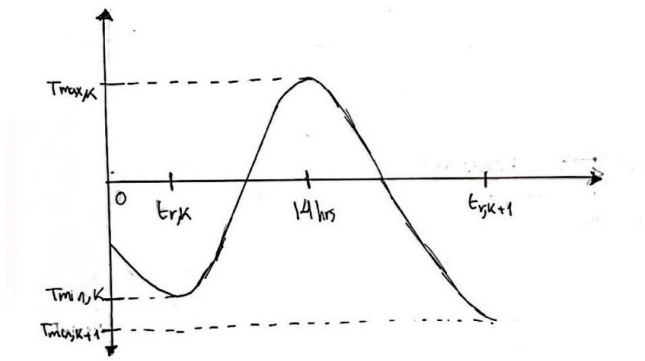

Figura 2.1: Gráfica de temperatura contra tiempo.

2.2. Modelos mixtos

2.2.1. William J. Parton, Jesse A. Logan [41]

En el artículo Parton y Logan [41] se desarrolla un modelo denominado seno-exponencial en el que se modela la temperatura del día con una función sinusoidal y la de la noche con una función exponencial.

Las variables de entrada del modelo son:

- t es el tiempo en horas.
- $t_{r,k}, t_{s,k}$ son las horas a las que ocurre el amanecer y atardecer en el día k, respectivamente.
- $T_{max,k}$ es la temperatura máxima registrada a lo largo del día k.
- $T_{min,k}$ es la temperatura mínima registrada a lo largo del día k.
- $t_{min,k}$ es el instante en el que ocurre la temperatura mínima en el día k.
- Y_k es la duración del día y Z_k es la duración de la noche en el día k.
- $m_k(t)$ es el número de horas desde que ocurre la temperatura mínima.
- $n_k(t)$ es el número de horas desde que ocurre el atardecer.

Nótese que $m_k(t) = t - t_{min,k} = t - (t_{r,k} + c)$ y $n_k(t) = t - t_{s,k}$.
Además, se tiene la variable auxiliar:

- $T_{s,k}$ es la temperatura en el atardecer en el día k, usando (2.7) con $t = t_s$.

La variable de salida es:

- $T_k(t)$ es la temperatura en la hora t, en el día k.

Además, el modelo contiene 3 parámetros:

- a es el coeficiente de retraso para la temperatura máxima.
- b es el coeficiente de temperatura en la noche.
- c es el retraso de la temperatura mínima desde la hora a la que ocurre el amanecer.

Estos parámetros se calibran computacionalmente ajustando el modelo a datos de temperatura. Entonces las ecuaciones del modelo son:

Si $t_{r,k} < t \leq t_{s,k}$

$$T_k(t) = T_{min,k} + (T_{max,k} - T_{min,k}) \sin\left(\frac{\pi m_k(t)}{Y_k + 2a}\right), \tag{2.7}$$

Si $t_{s,k} < t \leq t_{r,k+1}$

$$T_k(t) = T_{min,k} + (T_{s,k} - T_{min,k}) e^{-\frac{b n_k(t)}{Z}}. \tag{2.8}$$

Las suposiciones del modelo son (a) la temperatura máxima va a ocurrir durante las horas del día antes del atardecer, (b) que la temperatura mínima ocurrirá durante las primeras horas de la mañana. Estas suposiciones no son ciertas muchos días a lo largo del año y el modelo no tiene muy buenos resultados en éstos [41].

2.2.2. G. G. Wilkerson, J.W. Jones, K.J. Boote, K.T. Ingram, J.W. Mishoe [68]

En el artículo de Wilkerson et al. [68] se describe un modelo que divide al día en 2 segmentos, desde 2 horas después del amanecer hasta el atardecer y desde el atardecer hasta 2 horas después del amanecer del día siguiente.

Las variables de entrada son:

- t es el tiempo en horas.
- $t_{s,k}, t_{r,k}$ son los instantes en los que ocurre el atardecer y el amanecer, respectivamente.
- $T_{max,k}, T_{min,k}$ son las temperatura máxima y mínima registradas a lo largo del día, respectivamente.

Las variables auxiliares son:

- τ_k, b_k, δ_k.

La variable de salida es:

- $T_k(t)$ es la temperatura dada en un instante de tiempo, para el día k.

Si $t_{s,k-1} \leq t < t_{r,k} + 2$

$$\tau_k = \frac{\pi(t_{s,k} - t_{r,k} - 2)}{t_{s,k} - t_{r,k}}, \tag{2.9}$$

$$b_k = T_{min,k} + (T_{max,k} - T_{min,k}) \sin \tau_k, \tag{2.10}$$

$$T_k(t) = \frac{T_{min,k} - b_{k-1}}{t_{r,k} + 2 - t_{s,k-1}}(t - t_{s,k-1}) + b_{k-1}. \tag{2.11}$$

Si $t_{r,k} + 2 \leq t < t_{s,k}$

$$\delta_k = \frac{\pi(t - t_{r,k} - 2)}{t_{s,k} - t_{r,k}}, \tag{2.12}$$

$$T_k(t) = T_{min,k} + (T_{max,k} - T_{min,k}) \sin \delta_k(t). \tag{2.13}$$

Si $t_{s,k-1} \leq t < t_{r,k} + 2$ la temperatura se modela con una linea recta, y si $t_{r,k} + 2 < t < t_{s,k}$ la temperatura se modela con una función sinusoidal. La ecuación de la linea recta une los puntos $T = b_{k-1}$ y $T = T_{min,k}$, mientras que la función sinusoidal va desde $T(t = t_{r,k} + 2) = T_{min,k}$ (se supone que la temperatura mínima ocurre en $t = t_{r,k} + 2$)) hasta $T(t = t_{s,k}) = b_k$ (Figura 2.2). Nótese que si $T_{min,k+1}$ es muy baja con respecto a $T_{min,k}$, en el día k puede existir una temperatura T menor a T_{min}. Además, la temperatura máxima $T_{max,k}$ va a ocurrir cuando $\tau_k = \frac{\pi}{2}$ que es lo mismo que $\frac{t - t_{r,k} - 2}{t_{s,k} - t_{r,k}} = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{t_{s,k} - t_{r,k}}{2} + t_{r,k} + 2$. Este modelo se propuso originalmente para modelar el crecimiento de los frijoles de soya.
La descripción de este modelo ha sido obtenida de Reicosky [45].

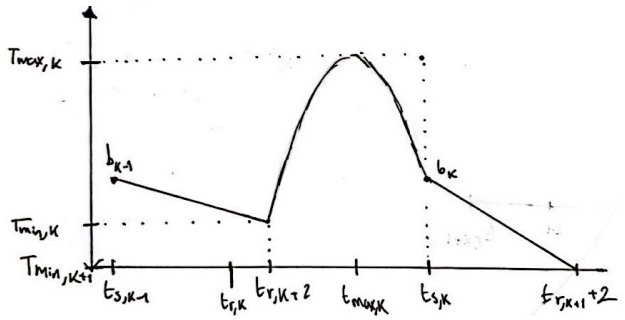

Figura 2.2: Gráfica de temperatura contra tiempo.

2.2.3. B.A. Kimball, L.A. Bellamy [32]

En esta tesis se propone una modificación del modelo de Kimball y Bellamy [32], en donde t va a ser la hora estándar local. En este modelo la temperatura entre las horas del "día" ($t_{min,k} < t \leq t_{s,k}$) se va a modelar con una función coseno que pasa por $T_{max,k}$ y $T_{min,k}$, mientras que la temperatura en la "noche" ($t_{s,k} < t \leq t_{min,k+1}$) va a decaer exponencialmente hacía $T_{min,k+1}$.

Las variables de entrada del modelo son:

- t es el tiempo en horas
- $T_{max,k}, T_{min,k}$ son las temperaturas máximas y mínimas registradas a lo largo del día k, respectivamente.
- $T_{s,k}$ es la temperatura en el instante del atardecer.
- $t_{max,k}$ es la hora a la que ocurre la temperatura máxima.
- $t_{min,k}$ es la hora a la que ocurre la temperatura mínima.

Las variables auxiliares del modelo son:

- $T_{sky,k}$ es la temperatura promedio del aire en la noche.
- κ es la constante con la que va a decaer la temperatura en la noche.
- ϵ, que depende de la temperatura del atardecer y la temperatura mínima.

Las variables de salida son:

- $T_k(t)$ la temperatura del aire en un instante t dado, en el día k.

Si $t_{min,k} < t \leq t_{s,k}$

$$T_k(t) = T_{min,k} + (T_{max,k} - T_{min,k}) \cos \frac{\pi(t - t_{max,k})}{2(t_{max,k} - t_{min,k})} \tag{2.14}$$

Si $t_{s,k} < t \leq t_{min,k+1}$

$$T_k(t) = T_{sky,k} + (T_{s,k} - T_{sky,k}) e^{-\kappa[t - t_{s,k}]} \tag{2.15}$$

Se escoge κ tal que (2.15) sea $T_{min,k+1}$ en $t = t_{min,k+1}$.

$$\kappa = \frac{\ln\left(\dfrac{T_{min,k+1} - T_{sky,k}}{T_{set,k} - T_{sky,k}}\right)}{t_{s,k} - t_{min,k+1}}. \tag{2.16}$$

Se calcula la variable auxiliar ϵ:

$$\epsilon = 1 - 0.261 e^{\left(-7.77\times10^{-4}\left(\frac{T_{s,k} - T_{min,k+1}}{2}\right)^2\right)}. \tag{2.17}$$

En Idso [28] se dan más detalles de (2.17). Finalmente, la temperatura promedio del aire en la noche está dada por:

$$T_{sky,k} = [(T_{s,k} + 273 + T_{min,k+1} + 273)/2]\epsilon^{1/4} - 273. \tag{2.18}$$

Note que ϵ es muy cercano a 1, por lo que $\epsilon^{1/4}$ se supondrá igual a 1 dada la precisión requerida por nuestro estudio.

2.2.4. Dale E. Linvill [35]

En el articulo de Linvill [35] se describe un modelo seno-logarítmico, en donde el seno representa la temperatura del amanecer al atardecer, y el logaritmo la temperatura desde el atardecer hasta el amanecer del día siguiente. Todas las variables usadas han sido descritas anteriormente. Para este modelo, se supone que T_{max} ocurre 2 horas después del mediodía solar ($t = t_{noon,k} + 2$) y que la temperatura mínima T_{min} ocurre en el amanecer ($t = t_r$).

Las variables del modelo de entrada son:

- t es el tiempo en horas.
- $T_{max,k}, T_{min,k}$ son las temperaturas máxima y mínima registradas. a lo largo del día, respectivamente.
- $t_{r,k}$ es la hora a la que ocurre el amanecer en el día k.
- $t_{s,k}$ es la hora a la que ocurre el atardecer en el día k.
- Y_k es la duración del día en el día k.
- Z_k es la duración de la noche en el día k.
- $t_{noon,k}$ es el tiempo en horas a la que ocurre el mediodía solar en el día k.

La variable auxiliar es:

- $T_{s,k}$ puede calcularse con la fórmula (2.19) poniendo $t = t_{s,k}$.

La variable de salida es:

- $T_k(t)$ es la temperatura del aire en un instante t dado, en el día k.

Entonces, las ecuaciones son:

Si $t_{r,k} < t \leq t_{s,k}$

$$T_k(t) = (T_{max,k} - T_{min,k}) \sin\left(\frac{\pi(t - t_{r,k})}{2(t_{noon} + 2 - t_{r,k})}\right) + T_{min,k}, \tag{2.19}$$

Si $t_{s,k} < t \leq t_{r,k+1}$

$$T_k(t) = T_{s,k} - \frac{T_{s,k} - T_{min,k+1}}{\ln(Z_k + 1)} \ln(t - t_{s,k} + 1). \tag{2.20}$$

En la fórmula (2.19) la temperatura $T_k(t)$ empieza desde $T_{min,k}$ en $t = t_{r,k}$ y aumenta suavemente a través de la función seno hasta alcanzar su máximo $T_{max,k}$ en $t = t_{noon}+2$. Luego, la temperatura desciende un poco hasta llegar a la temperatura en el atardecer $T_{s,k}$. A partir de ahí, se supone que la temperatura va a decrecer logarítmicamente hasta la temperatura mínima del día siguiente (Figura 2.3).
Este modelo no contiene parámetros para calibrarse en un lugar específico.

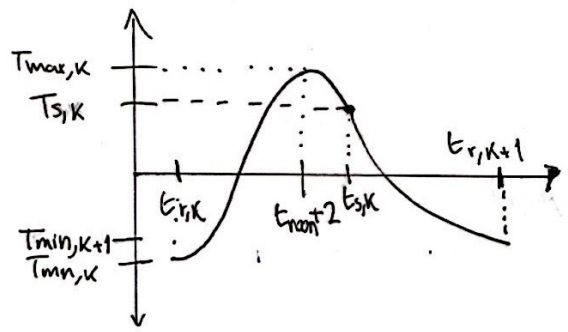

Figura 2.3: Gráfica de temperatura contra tiempo.

2.2.5. Carla Cesaraccio, Donatella Spano, Pierpaolo Duce, Richard L. Snyder [10]

En Cesaraccio et al. [10] se desarrolla un modelo que usa dos funciones sinusoidales para describir la variación diurna de temperatura, mientras que usa una raíz cuadrada para describir el enfriamiento durante la noche. En este modelo las variables de entrada son:

- t es el tiempo en horas.
- $T_{max,k}, T_{min,k}$ son las temperaturas máximas y mínimas registradas a lo largo del día, respectivamente.
- $t_{max,k}$ es la hora a la que ocurre la temperatura máxima.
- $t_{min,k}$ es la hora a la que ocurre la temperatura mínima.
- $t_{s,k}, t_{r,k}$ son los tiempos en los que ocurre el atardecer y amanecer, respectivamente.
- $t_{r,k+1}, T_{r,k+1}$ son el tiempo en el que ocurre el amanecer del día siguiente y la temperatura en el amanecer del día siguiente, respectivamente.

La variable auxiliar es:

- $T_{s,k}$ es la temperatura durante el atardecer.

La variable de salida es:

- $T(t)$ es la temperatura en un instante t dado.

Luego, el parámetro a calibrar del modelo es:

- c

Este se estima empíricamente ajustando valores observados. En este modelo, el tiempo de la temperatura mínima y la máxima están fijos: t_{max} ocurre 4 horas antes del atardecer ($t_{max,k} = t_{s,k} - 4$) y $t_{min,k}$ ocurre en el amanecer ($t_{min,k} = t_{r,k}$). La hora a la que ocurre la temperatura mínima en el día siguiente se calcula como $t_{r,k+1} = t_{r,k} + 24$. También, se supone que $T_{r,k} = T_{min,k}$ .La temperatura en el atardecer se calcula de la siguiente forma:

$$T_{s,k} = T_{max,k} - c(T_{max,k} - T_{min,k+1}). \tag{2.21}$$

[16] estima el valor del parámetro $c = 0.39$. Luego, el modelo divide el día completo en 3 segmentos: del amanecer a la máxima temperatura, de la máxima temperatura al atardecer y de la temperatura máxima al amanecer del siguiente día. Así, la temperatura se calcula como:

$$T_k(t) = \begin{cases} T_{min,k} + \alpha_k \sin\left[\dfrac{\pi}{2}\dfrac{t - t_{min,k}}{t_{max,k} - t_{min,k}}\right] & t_{r,k} < t \leq t_{max,k} \\ T_{s,k} + \beta_k \cos\left[\dfrac{\pi}{2}\dfrac{t - t_{max,k}}{4}\right] & t_{max,k} < t \leq t_{s,k} \\ T_{s,k} + \gamma_k \sqrt{t - t_{s,k}} & t_{s,k} < t \leq t_{r,k+1} \end{cases} \tag{2.22}$$

En donde $\alpha_k = T_{max,k} - T_{min,k}$, $\beta_k = T_{max,k} - T_{s,k}$ y $\gamma_k = \dfrac{T_{r,k+1} - T_{s,k}}{\sqrt{t_{r,k+1} - t_{s,k}}}$. Suponiendo $T_{s,k} > T_{min,k+1}$ y $\gamma_k < 0$ entonces la temperatura empieza desde $T(t = t_{r,k}) = T_{min,k}$ y aumenta sinusoidalmente hasta el máximo $T(t = t_{s,k} - 4) = T_{max,k}$. Luego, la temperatura desciende hasta la temperatura en el atardecer mediante un coseno. Finalmente, la temperatura desciende hasta la mínima del día siguiente por medio de la función raíz cuadrada. Note que existe un "pico" en $t = t_{s,k}$ por lo que la función $T_k(t)$ no es derivable en ese punto (Figura 2.4). Este modelo fue comparado con los modelos de De Wit, Parton y Wilkerson [16, 41, 68] en California, siendo superior el modelo de Cesaraccio (ver [10]).

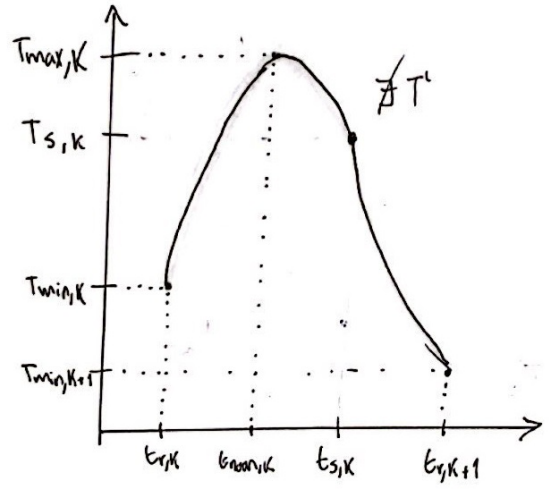

Figura 2.4: Gráfica de temperatura contra tiempo.

2.2.6. Frank-M Göttsche, Folke S. Olesen [26]

Las variables de entrada son:

- t es el tiempo en horas.
- $t_{ss,k}$ se define como la hora a la que la temperatura empieza a decaer exponencialmente ("thermal sunset").
- $t_{max,k}$ es la hora a la que ocurre la temperatura máxima.
- $T_{max,k}, T_{min,k}$ son las temperaturas máximas y mínimas registradas a lo largo del día, respectivamente.
- T_0 es la temperatura mínima registrada durante la mañana (aproximadamente la temperatura en el amanecer).
- δT es la diferencia entre la temperatura que 2.24 alcanza en el infinito ($t \to \infty$) y la temperatura T_0.

Las variables auxiliares son:

- $T_{a,k} = T_{max,k} - T_{min,k}$.
- $Y = t_{s,k} - t_{r,k}$ es la duración del día.
- $c = T_{a,k} \cos\left(\frac{\pi}{Y}(t_{ss,k} - t_{max,k})\right) - \delta T$.

La variable de salida es:

- $T(t)$ es la temperatura en un instante t dado.
- κ se escoge tal que las ecuaciones sean continuamente diferenciables en $t = t_{ss,k}$.

Si $t_{r,k} < t < t_{ss,k}$

$$T_k(t) = T_0 + T_{a,k} \cos\left(\frac{\pi}{Y}(t - t_{max,k})\right). \tag{2.23}$$

Si $t_{ss,k} < t < t_{r,k+1}$

$$T_k(t) = (T_0 + \delta T) + \left[T_{a,k} \cos\left(\frac{\pi}{Y}(t_{ss,k} - t_{max,k})\right) - \delta T\right] e^{-\frac{(t - t_{ss,k})}{\kappa}}. \tag{2.24}$$

El valor de κ se obtiene de diferenciar las ecuaciones 2.23 y 2.24 e igualarlas en $t = t_{ss,k}$:

$$T'(t) = -\frac{T_{a,k}\pi}{Y} \sin\left(\frac{\pi}{Y}(t - t_{max,k})\right) \tag{2.25}$$

$$= \frac{-c}{\kappa} e^{\frac{-(t - t_{ss,k})}{\kappa}}. \tag{2.26}$$

En $t = t_{ss,k}$:

$$T'(t_{ss,k}) = -\frac{T_{a,k}\pi}{Y} \sin\left(\frac{\pi}{Y}(t_{ss,k} - t_{max,k})\right) = \frac{-c}{\kappa}. \tag{2.27}$$

Por lo tanto

$$\kappa = \frac{cY}{\pi T_{a,k} \sin\left(\frac{\pi}{Y}(t_{ss,k} - t_{max,k})\right)} \tag{2.28}$$

$$= \frac{Y}{\pi}\left[\cot\left(\frac{\pi}{Y}(t_{ss,k} - t_{max,k})\right) - \frac{\delta T}{T_{a,k}} \csc\left(\frac{\pi}{Y}(t_{ss,k} - t_{max,k})\right)\right]. \tag{2.29}$$

Supongamos que $\delta T > 0$. Esto es $\delta T > 0 \iff T(\infty) > T_0$. Note que esto implica, para la ecuación 2.24 $T(t) \geq T_0 + \delta T > T_0$, por lo que podemos considerar $T_0 = T_{min,k}$. Además, para la fórmula 2.23 consideremos $t = t^*$ tal que $T(t^*) = T_0$:

$$T_0 = T(t^*) = T_0 + T_{a,k} \cos\left(\frac{\pi}{Y}(t^* - t_{max,k})\right), \tag{2.30}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{Y}(t^* - t_{max,k})\right) = 0, \tag{2.31}$$

$$\Rightarrow t_{max,k} = t^* + Y/2. \tag{2.32}$$

Así, la variable de entrada $t_{max,k}$ se ha convertido en una variable auxiliar dado t^*. Ahora, si suponemos $t_{r,k} = t^*$ entonces podemos calcular $t_{max,k}$. Es razonable suponer que la temperatura mínima se encuentra alrededor del amanecer ya que $T_0 = T_{min,k}$ (una hipótesis de algunos modelos es que $t_{min,k} = t_{r,k} + c_k$, donde c_k es un parámetro ajustable, vease [41]).

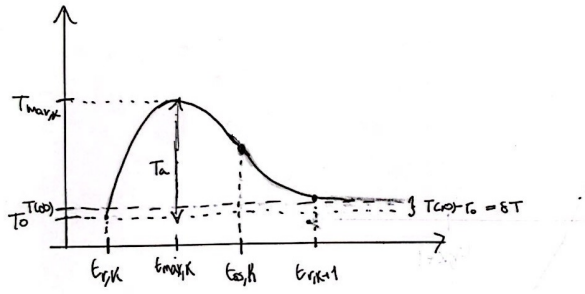

Figura 2.5: Gráfica de temperatura contra tiempo.

2.2.7. Raphael Felber, Sibylle Stoeckli, Pierluigi Calanca [22]

Es de importancia tener una buena resolución temporal de datos climatológicos para poder modelar bien tanto el crecimiento de plantas como el desarrollo de insectos (Felber [22]). Ya que usualmente solo se tienen disponibles la temperatura mínima y máxima, Felber, Raphael, Sibylle y Pierluigi [22] proponen un modelo inspirado en el de Parton [41] con algunas modificaciones en el territorio de Suiza. Además, se va a comparar el modelo haciendo una calibración general para todo el territorio y otra para lugares específicos, las calibraciones se van a hacer con 10 estaciones que ofrecen datos de temperatura por hora. Las variables de entrada del modelo son:

- t es el tiempo en horas.
- $t_{r,k}, t_{s,k}$ son las horas a las que ocurre el amanecer y atardecer, respectivamente.
- $T_{max,k}$ es la temperatura máxima registrada a lo largo del día.

- $T_{min,k}$ es la temperatura mínima registrada a lo largo del día.

Las variables auxiliares del modelo son:

- n_k
- $T_{s,k}$ calculada usando (2.35) con $t = t_{s,k}$.

Además, el modelo contiene 2 parámetros:

- b es el coeficiente de temperatura en la noche.
- c es el retraso de la temperatura mínima desde la hora a la que ocurre el amanecer.

Estos parámetros se calibran computacionalmente ajustando el modelo a datos de temperatura. Luego, la variable de salida del modelo es:

- $T_k(t)$ es la temperatura en un instante t dado.

Entonces las ecuaciones del modelo son:

$$n_k = t_{r,k} - t_{s,k-1} + c_k. \tag{2.33}$$

Para $t_{s,k-1} < t < t_{r,k} + c$:

$$T_k(t) = T_{min,k} + (T_{s,k-1} - T_{min,k}) \left[e^{\frac{-b(t-t_{s,k-1})}{n_k}} - \frac{t - t_{s,k-1}}{n_k} e^{-b} \right]. \tag{2.34}$$

Para $t_{r,k} + c_k < t < t_{s,k}$:

$$T_k(t) = T_{min,k} + (T_{max,k} - T_{min,k}) \sin\left(\frac{\pi(t - t_{r,k} - c)}{t_{s,k} - t_{r,k} + 2a - 2c} \right). \tag{2.35}$$

A diferencia del modelo de Parton[41] este modelo si pasa por las temperaturas mínima y máxima, se agrega el termino $-\frac{t-t_{s,k-1}}{n_k} e^{-b}$ para que $T(t = t_{r,k} + c_k) = T_{min,k}$ (es una hipótesis del modelo que $t_{min,k} = t_{r,k} + c_k$). Así, la curva de temperatura empieza desde $T(t = t_{s,k-1}) = T_{s,k-1}$ y decae hasta la temperatura mínima $t = t_{r,k} + c_k$. Luego, la temperatura se modela a través de la función seno, subiendo hasta la temperatura máxima y disminuyendo un poco hasta el atardecer. Usando los valores de los parámetros dados por [22] ($a \approx 2.71, c \approx 0.75$) y poniendo $t_{s,k} - t_{r,k} = 12$ (un tiempo razonable para la duración del día) se calcula que aproximadamente $t_{s,k}$ se encuentra a $3/4$ del semi-periodo de la función seno (ver Figura 2.6). Se menciona que el modelo opera con los tiempos dados en TST (true solar time), se hacen conversiones para la hora local.

2.3. Otros

2.3.1. E. John Sadler, Ronald E. Schroll [48]

En el modelo de Sadler y Schroll [48] se emplea un método distinto. Primero, se van a normalizar los valores de la temperatura, de modo que en cualquier tiempo dado durante el día el valor de

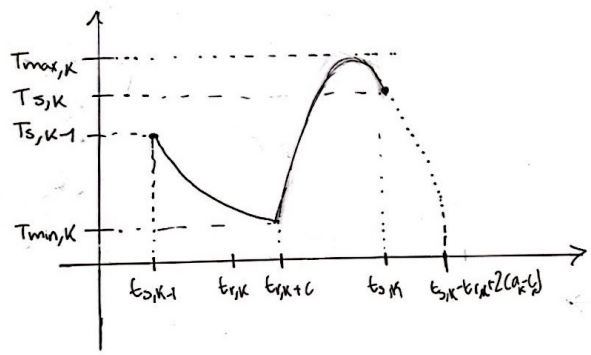

Figura 2.6: Gráfica de temperatura contra tiempo.

la temperatura normalizado está entre 0 y 1. Luego, se normaliza la escala temporal observada de valores por hora para minimizar la variación anual; en esta normalización las 0000 h, el amanecer (t_r), el atardecer (t_s) y las 2400 h son definidas como 0.00, 0.25, 0.75 y 1, respectivamente. Las variables del modelo son:

- $T_{c(ij)}$ es la temperatura calculada del aire en el día i en el tiempo j.
- t_n es el tiempo normalizado.
- Y_k es la duración del día k en horas.
- $T_{n(ij)}$ es la temperatura normalizada en el día i en el tiempo j.
- $T_{(ij)}$ es la temperatura observada en el día i en el tiempo j.
- $T_{min(i)}$ es la temperatura mínima observada en el día i.
- $T_{max(i)}$ es la temperatura máxima observada en el día i.

Entonces, la ecuación para normalizar la temperatura es:

$$T_{n(ij)} = \frac{T_{ij} - T_{min(i)}}{T_{max(i)-T_{min(i)}}}. \tag{2.36}$$

y para normalizar el tiempo es:

$$\begin{aligned} t_n &= 0.25\frac{t}{t_s} && si \quad 00 \leq t < t_r, \\ t_n &= 0.5\frac{t-t_r}{Y} + 0.25 && si \quad t_r \leq t < t_s, \\ t_n &= 0.25\frac{t-t_s}{24-t_s} + 0.75 && si \quad t_s \leq t < 24. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Luego, las distribuciones acotadas entre 0 y 1 y que tienen sesgo positivo, negativo o nulo pueden ser descritas por la distribución beta. Las temperaturas del aire normalizadas fueron ordenadas entre 20 clases (de ancho 0.05). Luego, una distribución beta de 2 parámetros.

$$f_\beta(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}. \tag{2.38}$$

donde Γ es la distribución gamma, *alpha* y β son los parámetros de forma y x es la variable beta. La media y la varianza de cada clase son usados como estimadores de momento de *alpha* y *beta*. La función de distribución acumulada de la distribución beta se obtiene integrando numéricamente la ecuación 2.38

$$\alpha > 0, \beta > 0, 0 \leq x \leq 1.$$

Finalmente, las temperaturas del aire durante cada segmento se calculan con las siguientes ecuaciones, en donde el percentil 50 de la función de distribución acumulada para cada una de las 20 clases del tiempo normalizado resultó en un conjunto de 20 pares (x,y):

$$\begin{aligned}
&T_{c(ij)} = T_{max(i-1)} - (1.0 - T_{n(j)})(T_{max(i-1)} - T_{min(i-1)}),\\
&00 \leq t < t_r\\
&\\
&T_{(ij)} = T_{n(j)}(T_{max(i)-T_{min(i)}}) + T_{min(i)},\\
&t_r \leq t < t_s\\
&\\
&T_{c(ij)} = T_{max(i)} - (1.0 - T_{n(j)})(T_{max(i)} - T_{min(i+1)}).\\
&t_s \leq t < 24
\end{aligned} \tag{2.39}$$

2.4. Resultados en la literatura sobre comparación de modelos

2.4.1. Johnson, M.E., y E. A. Fitzpatrick [31]

En el artículo de Johnson y Fitzpatrick [31] se compara la eficacia de los modelos de [55] y [5] estimando una curva promedio diurna de temperatura durante el día. El modelo de Anway, que es una curva sinusoidal tiene mejores resultados que el de la curva unitaria de Walter, también en el modelo de Walter se vio que este sobrestima la temperatura en el invierno y la subestima en verano. Se cree que es debido a la suposición de Walter que la temperatura mínima ocurre a las $t = 4.5$ LAT. Aún más, se encontró que la eficacia de los modelos dependía mucho más en los datos de entrada que en la forma matemática de los modelos en sí.

2.4.2. Wann, Mien, Doreen Yen y Harvey J. Gold [56]

En [56] se hace la comparación de 3 modelos empíricos, estos son el modelo seno-exponencial de Parton y Logan [41], el modelo sinusoidal de de Wit [16] y el modelo de Johnson [31]. El modelo de Parton y Logan [41] fue el que mejor se ajustó a todos los datos recopilados. Asimismo, este es el único modelo que se aprovecha de la información del amanecer y el atardecer, esto hace que ofrezca una mejor estimación después del atardecer (cuando empieza el proceso de "enfriamiento" debido a la falta de radiación solar). Por otro lado, los otros dos modelos usan una función coseno entre la temperatura máxima y la mínima del siguiente día. Esto asume implícitamente que el "enfriamiento" ocurre en un punto medio de estos extremos de temperatura. Entonces, la forma de la curva cuando empieza a descender la temperatura está completamente determinada por la hora a las que ocurren estas temperaturas y las temperaturas mismas. Así, se piensa la inferioridad de estos modelos se debe a la imprecisión de sus suposiciones. Se ve que la precisión de los 3 modelos mejora mientras los datos tengan mejor resolución temporal. A pesar de usar un parámetro más, el modelo de [41] es claramente la mejor opción para modelar variación diurna.

2.4.3. Baker, J. M., D.C. Reicosky y D. G. Baker [8]

En [8] se comparan 3 modelos, los modelos comparados son el modelo seno exponencial [41], el de de Wit [16] y un modelo lineal. En este estudio el modelo de Parton no se calibra y se usan los parámetros que se estiman en el artículo original, en contraste con [56] que ajustó los datos con mínimos cuadrados, tratando los parámetros como "empíricos". Para determinar estos tiempos medios en los que ocurría la máxima y la mínima no se usaron días en donde la temperatura máxima no ocurría entre 1200 y 1800 TST ni días en donde la temperatura mínima no ocurría entre medianoche y 1000 TST. Sin embargo, se usaron todos los días para las demás pruebas. Se encontró que el número de días válidos para encontrar los tiempos medios de ocurrencia fue sorprendentemente bajo en contraste con [56]. Las conclusiones muestran que el modelo lineal subestima sistemáticamente la temperatura en el mediodía. El modelo de de Wit acumula sobre-estimaciones en las ultimas horas de la tarde y temprano en la noche y las subestima temprano en la mañana. El modelo de Parton sobre-estima durante la mañana y temprano en la tarde y subestima en la noche. En general, los 3 modelos tienen errores estándar similares y muestran las mismas tendencias estacionales. Probablemente la mayor causa de errores son los tiempos de ocurrencia de los extremos de temperatura muy lejanos a los asumidos por los modelos. Para ubicaciones en el alto medio-oeste esto es muy frecuente. Para modelos orientados a procesos el rendimiento del modelo en un mediodía con cielo despejado es lo más importante, para esta situación el modelo de de Wit fue el mejor (un resultado contrario a aquel de [56]).

2.4.4. Reicosky, D.C., et al. [45]

En el artículo de Reicosky [45] se van a analizar 5 modelos. Los resultados de estos modelos fueron comparados con datos recolectados en el oeste central de Minnesota. El modelo 1 es aquel presentado por de Wit [16]. El modelo 2 es descrito por [68]. El modelo 3 es el modelo descrito por [1], el modelo 4 es el modelo seno-exponencial de Parton [41] y el modelo 5 es un modelo lineal. Los datos de entrada de estos modelos fueron 4 años de datos recopilados en la Universidad de Minnesota, a 343 metros de elevación. Nuevamente, se encontró que en los días fríos la precisión del modelo es muy poca ($R^2 \leq 0.6$) mientras que en días calurosos y extremadamente cálidos la precisión de los modelos es igualmente buena. Se descubrió que el modelo lineal tuvo un rendimiento muy bueno frente a los modelos sinusoidales y mixtos más sofisticados. Los modelos de de Wit [16] y Wilkerson [68] mostraron ser los mejores en circunstancias generales, la funciones propuestas por [1] y [41] mostraron el mayor error de los 5 modelos, lo que demuestra que la hora a la que ocurre la temperatura máxima se debe calcular empíricamente y que se deben re-calcular los parámetros para el sitio del estudio, respectivamente.

2.4.5. Waichler, Scott R. y Mark S. Wigmosta [54]

En el artículo de Waichler y Wigmosta [54] se comparan 3 modelos de temperatura para investigar su uso en H.J Andews Experimental Forest. Solo se mencionarán los primeros dos ya que para el tercero se requieren datos de precipitación. Los dos métodos utilizados modelan la temperatura del aire durante el día usando 3/4 de periodo de una función senoidal con ecuaciones inspiradas en los artículos de [46] y [41]. Las suposiciones del primer modelo propuesto son que la temperatura mínima se alcanza en el amanecer, la máxima al mediodía solar y el promedio en el atardecer. Luego, para la temperatura de la noche se hizo una interpolación lineal de la temperatura del atardecer hasta el amanecer. El segundo modelo es prácticamente idéntico excepto porque se desplaza horizontalmente la curva dos horas antes. Se concluyó que el modelo con el desplazamiento de dos

horas dio mejores resultados, conviene calibrar las horas desplazadas dependiendo del sitio donde se haga el estudio.

2.4.6. Akinnubi, R.T. y M. O. Adeniyi [3]

En el artículo de Akinnubi et al. [3] se comparan 5 distintos modelos con datos de entrada de temperatura de dos regiones tropicales de Nigeria llamada Ile-Ife e Ibadian. Los 3 modelos relevantes comparados para este estudio son el de de Wit [16], Parton y Logan [41] y una serie de Fourier modificada. Se encontró para los modelos de de Wit y Parton que sobrestimaban la temperatura durante la mañana y las altas horas de la noche; asimismo, estos modelos no pudieron capturar el rápido efecto de enfriamiento en la noche asociado a regiones húmedas. También, se encontró en estos dos modelos que su comportamiento era mucho más preciso en días en los que las condiciones de temperatura eran estables. Por otra parte, el modelo de la serie de Fourier fue más preciso para la región de estudio, con algunas limitaciones cuando ocurrió la transición de la temporada seca a la húmeda. En general, el rendimiento de los 3 modelos fue bueno durante las horas de luz.

2.5. Análisis de adecuación de los modelos al problema en cuestión.

En esta sección se hace un análisis de los modelos descritos en las secciones 2.1 a 2.3, desde el punto de vista de si son adecuados para ser utilizados en el problema de investigación planteado al principio de la tesis. Para ello, se analizan las variables de entrada y de salida de los modelos, separando las primeras en admisibles (podemos suponerlas conocidas o calculables en el marco de nuestro problema) o no admisibles. Antes del análisis, que se resumirá en un cuadro, hay que explicar nuestro concepto de admisibilidad, y cuáles variables consideramos admisibles y cuáles no, y por qué. Los resultados de esta sección serán aplicados en el capítulo siguiente, que es el principal de la tesis.

Tipo	Modelo	Input (admisible)	Input (no admisible)	Output	Observaciones
Trigonométricos	Carson [9]: 1963		T en una malla temporal	T	Se ajusta con Análisis de Fourier discreto
	Walter [55]: 1967				Variación de [9]
	Johnson y Fitzpatrick [30]: 1977				Variación de [55]
	de Wit [16]: 1978	T_{max}, T_{min}, t_r		T	
Mixtos	Parton, Logan [41]: 1981	T_{max}, T_{min}, t_r, t_s	T_s, t_{min}, a, b, c	T	Los parámetros a, b, c tienen que ajustarse
	Wilkerson et. al. [68]: 1983	T_{max}, T_{min}, t_r, t_s		T	
	Kimball y Bellamy [32]: 1986	T_{max}, T_{min}	t_{max}, t_{min}, T_s	T	
	Linvill [35]: 1990	T_{max}, T_{min}, t_r, t_s, t_{noon}		T	
	Cesaraccio et. al. [10]: 2001	T_{max}, T_{min}, t_r, t_s	t_{max}, t_{min}, c	T	Ajustar parámetro c
	Göttsche, Olesen [26]: 2001	T_{max}, T_{min}, t_r, t_s	t_{max}, T_o, t_{ss}, δT	T	Ajustar algunos parámetros
	Felber et. al. [22]: 2018	T_{max}, T_{min}, t_r, t_s	b, c	T	Ajustar b, c
Estadístico	Sadler, Schroll [48]: 1997				Modelo estadístico

Capítulo 3

Ajuste de modelos a datos de estaciones meteorológicas de Puebla

El propósito de este capítulo es utilizar las herramientas expuestas en los anteriores para analizar datos de temperaturas reales de estaciones meteorológicas en el Estado de Puebla para obtener conclusiones que puedan ser utilizadas para la modelización de las temperaturas en este estado a partir de datos de máximas y mínimas diarias.

3.1. Base de datos de estaciones meteorológicas

A través de una petición formal, se obtuvieron datos climatológicos aportados por el Servicio Meteorológico Nacional (SMN, `https://smn.conagua.gob.mx/en`). De acuerdo con [`https://smn.conagua.gob.mx/es/smn/funciones-y-objetivos`], "El Servicio Meteorológico Nacional (SMN) es el organismo encargado de proporcionar información sobre el estado del tiempo a escala nacional y local en nuestro país. El Servicio Meteorológico Nacional, depende de la Comisión Nacional del Agua (CONAGUA), la cual forma parte de la Secretaría de Medio Ambiente y Recursos Naturales (SEMARNAT)".

Los archivos, en formato xls, contienen información de varias variables climatológicas (temperatura del aire, pluviosidad, humedad relativa, dirección del viento, dirección de la ráfaga, rapidez del viento, rapidez de la ráfaga, presión barométrica, radiación solar) en el periodo 2010-2018, correspondientes a una lista de 186 Estaciones Meteorológicas Automatizadas (EMA) operadas por el SMN. Una EMA "Es un conjunto de dispositivos eléctricos y mecánicos que realizan mediciones de las variables meteorológicas de forma automática (sobre todo en forma numérica)" (`https://smn.conagua.gob.mx/en/observando-el-tiempo/estaciones-meteorologicas-automaticas-ema-s`). Los datos vienen con una resolución temporal de 10 minutos. Esto es, vienen dados en intervalos de 10 minutos, incluyendo las horas en punto.

Esta base de datos fue procesada por el profesor Moisés Soto, con apoyo de algunos estudiantes en tareas de servicio social. Lo que se hizo, a grandes rasgos, fue: estandarizar y completar la información de las EMA, con datos como el nombre oficial, código SMN, abreviatura, y sus datos geográficos (estado y municipio, coordenadas de latitud y longitud, altitud); estructurar la base de datos para manejarla mejor, cambiando formatos de archivos (a xlsx, mat y csv), nombres de

archivos y carpetas en las que se guardan, agrupando por EMA, año y mes, así como eliminar archivos repetidos; estandarizar la estructura interna de los archivos e identificar los datos omitidos, marcados con la variable de GNU Octave [19] NaN (Not a number); extraer los datos de temperatura; etc. Este trabajo previo facilitó mucho las tareas realizadas en esta tesis.

De la lista de EMA, se extrajeron datos de 5 estaciones en concreto, que eran las que estaban ubicadas en el Estado de Puebla. En este trabajo de tesis, se utilizarán los datos de temperatura correspondientes a estas cinco estaciones. Los datos generales de estas estaciones son los siguientes:

Codigo SMN	Nombre oficial	Abreviatura	Estado	Municipio	Latitud (grados)	Latitud (minutos)	Latitud (segundos)
	Huauchinango	huauch	Puebla	Huachinango	20	10	41
21132	Izúcar de matamoros	izuc	puebla	Izúcar de matamoros	18	37	0
21083	Tehuacán	tehua	Puebla	Tehuacán	18	18	50
21091	Teziutlán	teziu	Puebla	Teziutlán	19	53	16
21082	Universidad Tecnológica Tecamachalco	utt	Puebla	Tecamachalco	18	51	59

Abreviatura	Latitud (decimal)	Longitud (grados)	Longitud (minutos)	Longitud (segundos)	Longitud (decimal)	Altitud (msnm)
huauch	20.17805556	98	3	59	98.06638889	2193
izuc	18.61666667	98	27	7	98.45194444	1297
tehua	18.31388889	97	37	1	97.61694444	2416
teziu	19.88777778	97	23	26	97.39055556	1818
utt	18.86638889	97	43	18	97.72166667	2229

Tabla 3.1: Información respecto a las estaciones meteorológicas de donde se han extraído los datos para esta tesis.

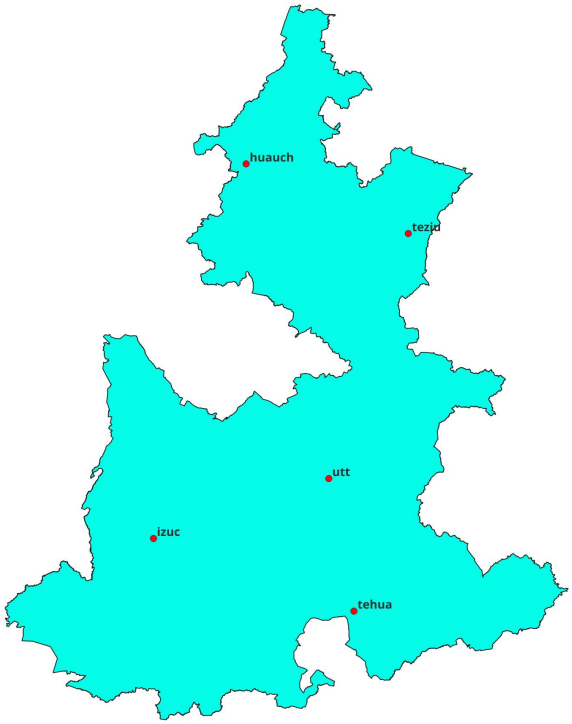

Figura 3.1: Mapa del estado de Puebla con la ubicación de las 5 EMAS. Este mapa se elaboró usando QGIS[43] y el marco estadístico nacional del INEGI [37].

3.2. Procesamiento de los datos

Previo al uso de los datos para calibrar los modelos de evolución diaria de la temperatura, es necesario un procesamiento que los prepare, dando mayores garantías a la representatividad de los datos.

3.2.1. Análisis exploratorio

Se hizo un análisis exploratorio de los datos, graficando las temperaturas en intervalos de dos días, constatando visualmente que efectivamente había muchos huecos en los datos (periodos con datos no disponibles). Estos huecos eran de diferente naturaleza, pudiendo afectar al análisis de maneras diferentes.

Por un lado, había periodos largos sin datos disponibles. Esto implica, lógicamente, que la EMA puede tener periodos intermitentes en los que está trabajando o no, pudiendo ser por diferentes motivos, a priori (se decidió que no estuviera en funcionamiento, o por mantenimiento o reparación). En este sentido, la interrupción en el reporte de datos se piensa que pueda estar correlacionada con un funcionamiento inestable de la estación meteorológica, por lo que un periodo largo sin interrupciones sugiere que la estación debería estar funcionando bien, presumiblemente.

Por el otro lado, existen huecos pequeños con algunos datos faltantes. Estas interrupciones podrían deberse a causas externas a la EMA (por ejemplo, interrupciones en suministro eléctrico, etc.) o a fallas menores en el funcionamiento de la EMA. De manera complementaria, en la inspección visual se observó que había regiones en los datos que parecían poco realistas (típicamente, subidas o bajadas muy bruscas en las temperaturas en periodos de tiempo cortos, de pocas horas). Estos datos podrían ser erróneos, debido a un mal funcionamiento de la EMA, o ser efectivamente verídicos, en cuyo caso se estima que no serían representativos de la evolución usual de la temperatura, sino manifestaciones de fenómenos anómalos. En cualquier caso, estas ocurrencias debían tenerse en cuenta para que no influyeran negativamente en el análisis. En las siguientes gráficas, los subperiodos se van a referir grupos de 2 días bajo los que se dividen los periodos. Si el periodo empieza el 1 de marzo de 2010, el subperiodo 10 se va a referir a los días 19 y 20 de marzo de 2010.

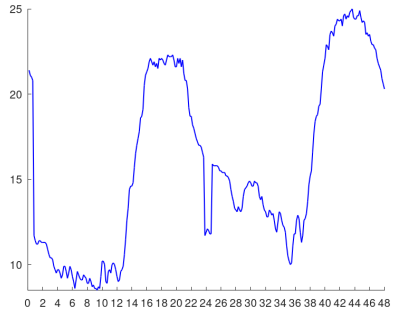

Figura 3.2: Gráfica de temperatura (°C) vs tiempo (horas). huauch, periodo 4, subperiodo 36. 11 y 12 de marzo del 2016. Tiempo dado en UTC.

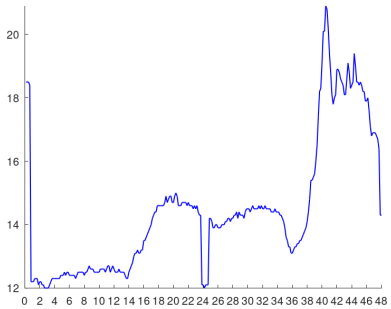

Figura 3.3: Gráfica de temperatura (°C) vs tiempo (horas). huauch, periodo 5, subperiodo 87. 20 y 21 de noviembre del 2016. Tiempo dado en UTC.

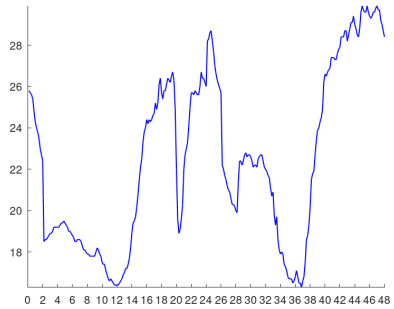

Figura 3.4: Gráfica de temperatura (°C) vs tiempo (horas). izuc, periodo 2, subperiodo 6. 11 y 12 de julio del 2010. Tiempo dado en UTC.

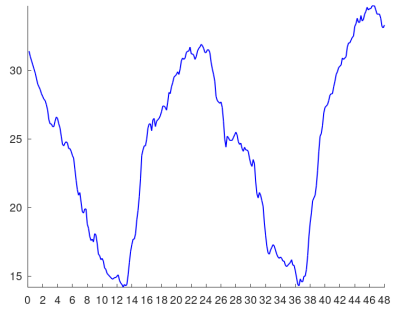

Figura 3.5: Gráfica de temperatura (°C) vs tiempo (horas). izuc, periodo 6, subperiodo 28. 26 y 27 de marzo del 2016. Tiempo dado en UTC.

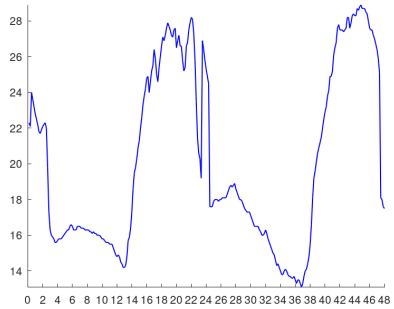

Figura 3.6: Gráfica de temperatura (°C) vs tiempo (horas). tehua, periodo 14, subperiodo 3. 5 y 6 de octubre del 2016. Tiempo dado en UTC.

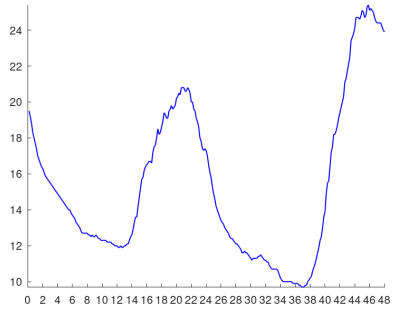

Figura 3.7: Gráfica de temperatura (°C) vs tiempo (horas). tehua, periodo 12, subperiodo 11. 21 y 22 de marzo del 2016. Tiempo dado en UTC.

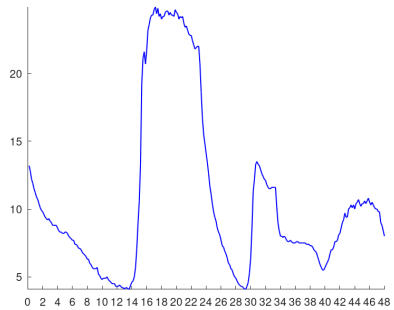

Figura 3.8: Gráfica de temperatura (°C) vs tiempo (horas). teziu, periodo 3, subperiodo 11. 21 y 22 de enero del 2016. Tiempo dado en UTC.

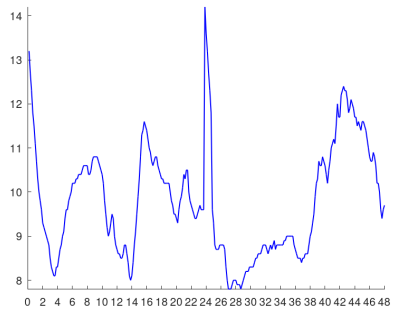

Figura 3.9: Gráfica de temperatura (°C) vs tiempo (horas). teziu, periodo 5, subperiodo 1. 1 y 2 de enero del 2018. Tiempo dado en UTC.

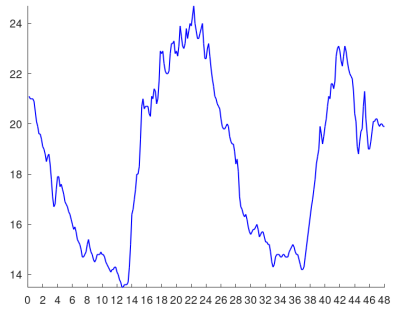

Figura 3.10: Gráfica de temperatura (°C) vs tiempo (horas). utt, periodo 8, subperiodo 9. 17 y 18 de julio del 2015. Tiempo dado en UTC.

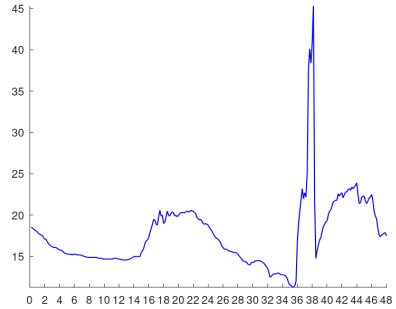

Figura 3.11: Gráfica de temperatura (°C) vs tiempo (horas). utt, periodo 1, subperiodo 32. 1 y 2 de septiembre del 2010. Tiempo dado en UTC.

3.2.2. Selección de periodos

Como consecuencia del análisis anterior, se decidió seleccionar algunos periodos en cada estación meteorológica que fueran los suficientemente representativos de la evolución usual de la temperatura en ese lugar.

En primer lugar, se pensó que debían ser periodos lo más largos posibles con datos casi ininterrumpidos, para aumentar la fiabilidad en los datos. Se buscó que los periodos seleccionados cubrieran en la medida de lo posible todos los meses del año, para representar lo mejor posible la variabilidad estacional de la temperatura. Además, se controló el número de datos faltantes, y que los datos comprendieran periodos completos.

Se hizo un reporte por EMA de cuantos periodos existían que fueran mayores a cierta tolerancia (7 días por ejemplo). Luego se implementó el que los periodos tuvieran días completos (que el primer dato del periodo sea a las 0:00 horas y el último a las 23:50 horas). Se filtraron los meses tales que fueran completos, es decir, que los periodos empezaran el primero de cierto mes a las 0:00 horas y terminaran al final del mes a las 23:50 horas. El filtro final consistió en graficar la duración de estos periodos obtenidos y obtener una tolerancia para cada EMA de la longitud de los periodos (ver figura 3.12), así se pudo obtener un número pequeño de periodos mientras se priorizaba su longitud. Al darle un vistazo a estos periodos se notó que no cubrían totalmente muchos meses del año. Por ejemplo, para tehua después de los filtros solo había 4 periodos y cubrían marzo, junio, julio y octubre. Para finalizar se agregaron periodos manualmente para intentar cubrir todos los meses del año por cada estación. Las tablas 3.2 3.3 3.4 3.5 y 3.6 muestran los periodos seleccionados finalmente.

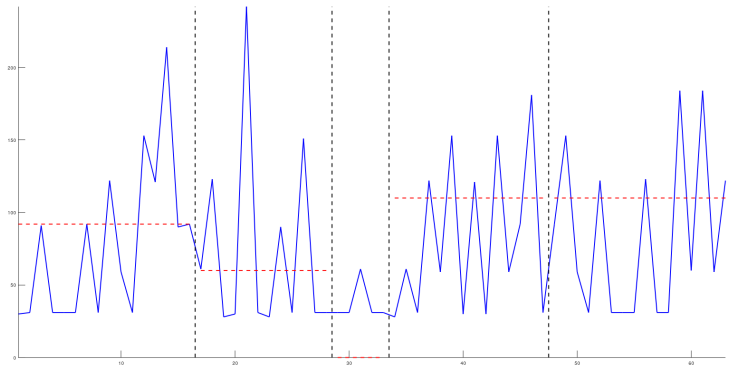

Figura 3.12: Gráfica de la duración de periodos. Cada punto del eje horizontal representa un periodo encontrado con los filtros explicados, las líneas negras verticales dividen las EMA y en el eje vertical se encuentra la duración del periodo en días. En rojo aparece la tolerancia para la duración que se escogió para cada EMA. Este análisis todavía no tiene en cuenta en qué meses del año ocurren los periodos, únicamente su duración.

Año inicial	Mes inicial	Día inicial	Hora inicial	Minuto inicial	Año final	Mes final	Día final	Hora final	Minuto final	Dato inicial	Dato final	Duración en días
2014	3	1	0	0	2014	5	31	23	50	8497	21744	92
2014	9	1	0	0	2014	12	31	23	50	34993	52560	122
2015	7	1	0	0	2015	11	30	23	50	26065	48096	153
2016	1	1	0	0	2016	4	30	23	50	1	17424	121
2016	6	1	0	0	2016	12	31	23	50	21889	52704	214
2017	6	1	0	0	2017	8	31	23	50	21745	34992	92

Tabla 3.2: Periodos seleccionados finales para la EMA huauch.

Año inicial	Mes inicial	Día inicial	Hora inicial	Minuto inicial	Año final	Mes final	Día final	Hora final	Minuto final	Dato inicial	Dato final	Duración en días
2010	4	1	0	0	2010	5	31	23	50	12961	21744	61
2010	7	1	0	0	2010	10	31	23	50	26065	43776	123
2014	2	1	0	0	2014	9	30	23	50	4465	39312	242
2014	11	6	0	0	2014	11	23	23	50	44497	47088	18
2014	12	1	0	0	2014	12	31	23	50	48097	52560	31
2016	2	1	0	0	2016	4	30	23	50	4465	17424	90
2017	1	1	0	0	2017	5	31	23	50	1	21744	151

Tabla 3.3: Periodos seleccionados finales para la EMA izuc.

Año inicial	Mes inicial	Día inicial	Hora inicial	Minuto inicial	Año final	Mes final	Día final	Hora final	Minuto final	Dato inicial	Dato final	Duración en días
2014	1	1	0	0	2014	1	30	23	50	1	4320	30
2014	2	1	0	0	2014	2	27	23	50	4465	8352	27
2015	3	1	0	0	2015	4	9	23	50	8497	14256	40
2015	4	11	0	0	2015	4	29	23	50	14401	17136	19
2015	5	1	0	0	2015	5	30	23	50	17281	21600	30
2015	8	1	0	0	2015	8	30	23	50	30529	34848	30
2015	9	1	0	0	2015	9	16	23	50	34993	37296	16
2015	9	18	0	0	2015	10	27	23	50	37441	43200	40
2015	11	1	0	0	2015	11	29	23	50	43777	47952	29
2015	12	1	0	0	2015	12	20	23	50	48097	50976	20
2015	12	22	0	0	2015	12	30	23	50	51121	52416	9
2016	3	1	0	0	2016	3	31	23	50	8641	13104	31
2016	6	1	0	0	2016	7	31	23	50	21889	30672	61
2016	10	1	0	0	2016	10	31	23	50	39457	43920	31
2017	3	1	0	0	2017	3	31	23	50	8497	12960	31

Tabla 3.4: Periodos seleccionados finales para la EMA tehua.

Año inicial	Mes inicial	Día inicial	Hora inicial	Minuto inicial	Año final	Mes final	Día final	Hora final	Minuto final	Dato inicial	Dato final	Duración en días
2014	9	1	0	0	2014	12	31	23	50	34993	52560	122
2015	5	1	0	0	2015	9	30	23	50	17281	39312	153
2016	1	1	0	0	2016	4	30	23	50	1	17424	121
2016	8	1	0	0	2016	12	31	23	50	30673	52704	153
2018	1	1	0	0	2018	6	30	23	50	1	26064	181

Tabla 3.5: Periodos seleccionados finales para la EMA teziu.

Año inicial	Mes inicial	Día inicial	Hora inicial	Minuto inicial	Año final	Mes final	Día final	Hora final	Minuto final	Dato inicial	Dato final	Duración en días
2010	7	1	0	0	2010	11	30	23	50	26065	48096	153
2012	4	6	0	0	2012	4	29	23	50	13825	17280	24
2013	9	1	0	0	2013	12	31	23	50	34993	52560	122
2014	7	1	0	0	2014	10	31	23	50	26065	43776	123
2014	1	1	0	0	2014	1	31	23	50	1	4464	31
2014	3	1	0	0	2014	3	31	23	50	8497	12960	31
2014	5	1	0	0	2014	5	31	23	50	17281	21744	31
2015	7	1	0	0	2015	12	31	23	50	26065	52560	184
2016	7	1	0	0	2016	12	31	23	50	26209	52704	184
2017	6	1	0	0	2017	9	30	23	50	21745	39312	122

Tabla 3.6: Periodos seleccionados finales para la EMA utt.

3.2.3. Limpieza de los datos

Una vez seleccionados los periodos a considerar en cada una de las cinco EMA, se decidió que era conveniente limpiar un poco los datos antes de su uso para calibrar los modelos. Esto es por la presencia de pequeños periodos en los que los datos parecían no ser realistas, como ya se ha comentado. En particular, había periodos muy cortos (a lo sumo de unas pocas horas), en los que las temperaturas eran muy altas o muy bajas, en comparación con las temperaturas inmediatamente anteriores o posteriores.

En primer lugar, se realizaron histogramas de los datos de temperaturas 3.15 3.14, para tratar de excluir los datos excesivamente altos o bajos, tachándolos de poco realistas. Sin embargo, nos dimos cuenta de que un criterio de tipo umbral establecido de esta forma no iba a funcionar, ya que un dato podía resultar excesivamente alto o bajo, en relación con las temperaturas circundantes, más que en términos absolutos del rango global de temperaturas. Es decir, la naturaleza topológica de la serie de tiempo, en la que una temperatura en un instante determinado está lógicamente relacionada con las de instantes o periodos inmediatamente anteriores o posteriores, es importante (véase figura 3.13). En consecuencia, se decidió abandonar este enfoque y buscar otro.

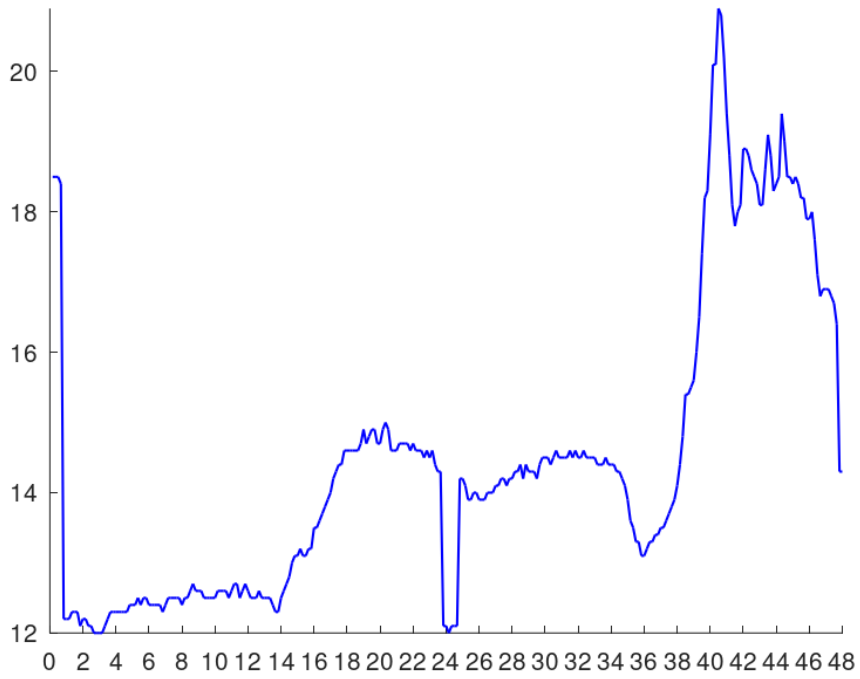

Figura 3.13: Gráfica de temperatura (°C) vs tiempo (horas). huauch, periodo 5, subperiodo 87. Note que se forma un pico al final de la gráfica en el que la temperatura sube bruscamente, sin embargo, no parece una anomalía.

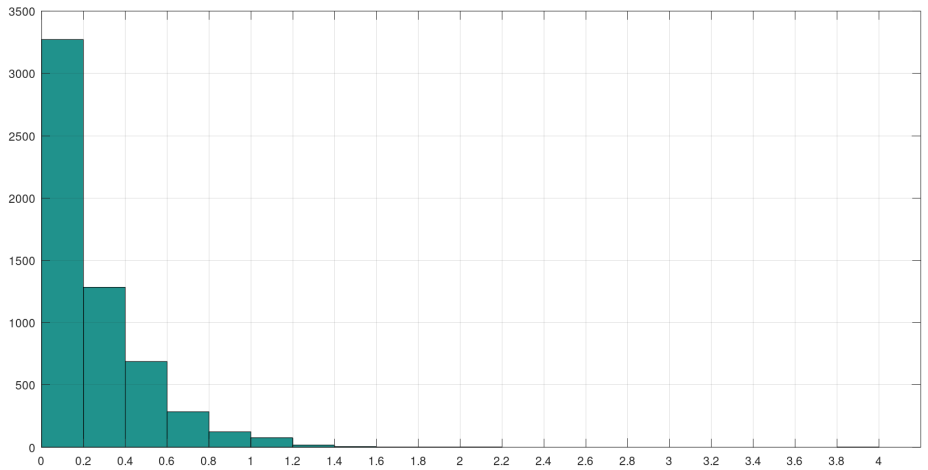

Figura 3.14: Histograma que refleja qué valores tienen los cambios de temperatura entre datos consecutivos. tehua, periodo 3. En el eje horizontal son cajas de los valores de los incrementos de temperatura (IT_k), y en el eje vertical se cuentan el número de incrementos en cada caja

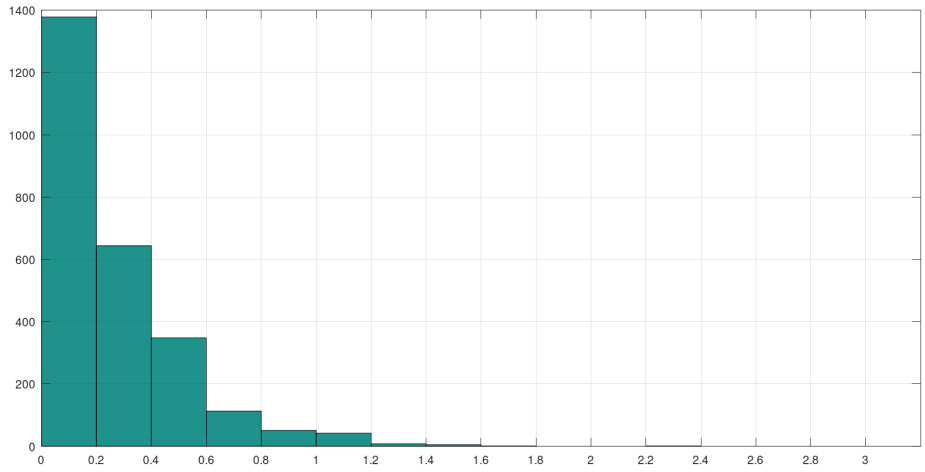

Figura 3.15: Histograma que refleja qué valores tienen los cambios de temperatura entre datos consecutivos. izuc, periodo 4. En el eje horizontal son cajas de los valores de los incrementos de temperatura (IT_k), y en el eje horizontal se cuentan el número de incrementos en cada caja

Alternativamente, se elaboró un criterio, implementado computacionalmente, para detectar estos periodos de comportamiento de temperaturas anómalo, más que valores aislados. Básicamente, se procedió de la manera siguiente:

En primer lugar, se detectaban puntos en los que hubiera un incremento o decremento abrupto de la temperatura, por encima de una tolerancia dada, calibrada empíricamente en 2 grados Celsius. Esto es, si T_k es la temperatura en el instante k, definiendo $IT_k = |T_{k+1} - T_k|$ el intervalo entre datos de temperatura contiguos, queremos un conjunto de datos $J = \{k \in \{1, ..., L-1\} : IT_k \geq 2^\circ \text{ C}\}$, donde L es el número de datos de temperatura para un periodo dado.

Seguidamente, se consideran parejas de estos cambios bruscos que estuvieran temporalmente cerca, con una tolerancia temporal menor a 2 horas. Esto delimitaba periodos cortos de tiempo entre dos cambios bruscos en la temperatura. Para decidir si este periodo era anómalo, se comprobaba si la temperatura promedio en el periodo en cuestión estaba relativamente lejos de la media aritmética de las temperaturas inmediatamente anterior y posterior al intervalo, medido por una tolerancia en la temperatura calibrada empíricamente en 1 grado Celsius.

Aparte de lo anterior, puesto que se observaba que ocasionalmente tales periodos aparecían relativamente agrupados (ver figura 3.22), se realizó un proceso de clusterización, uniéndolos si estaban suficientemente cerca unos de otros, incluyendo los periodos entre ellos. Por supuesto, otros aparecían aislados, y se mantuvieron en el listado de periodos anómalos. Matemáticamente, si

$$k_1, k_2 \in J,$$

un cluster se define como

$$k_1 \sim k_N \iff \exists k_2, ..., k_{N-1} \in J,$$

t.q

$$|k_{j+1} - k_j| < 2 \text{ horas } ,$$

y

$$|\bar{T} - (T_{k_N} + T_{k_1})/2| \ \forall j = 1, ..., N-1.$$

donde $\bar{T}$ es el promedio de T entre k_1 y k_{N+1}.

Finalmente, para cada uno de estos periodos anómalos (bien aislados, bien clusterizados), se realizó un ajuste lineal en los datos. Se decidió esta forma sencilla de interpolación lineal, poco realista, ya que la duración de estos periodos era pequeña, por lo que realmente no afectaba demasiado a las formas de onda de las temperaturas, y se juzgó que no influiría demasiado al ajuste de las curvas. Para realizar el ajuste lineal se usó

$$\tilde{T}_{k_1+\mu} = T_{k_1} + \mu \frac{T_{k_{N+1}-T_{k_1}}}{k_N - k_1 + 1}, \mu = 1, ..., k_N - k_1. \tag{3.1}$$

A continuación (ver Figuras 3.16-3.25) se muestran varios ejemplos de las series temporales de temperaturas, en los que se aplicó la interpolación lineal anterior. Cada figura muestra un intervalo de dos días. En verde, se muestra la serie temporal original, y en azul la interpolada linealmente.

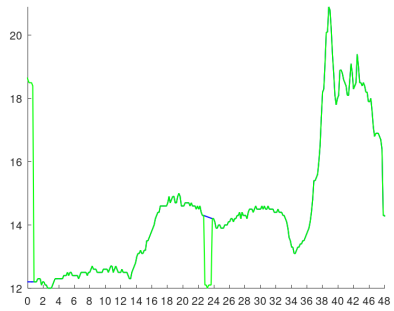

Figura 3.16: Gráfica de temperatura (°C) vs tiempo (horas). huauch, periodo 5, subperiodo 87. 20 y 21 de noviembre del 2016. Tiempo dado en UTC.

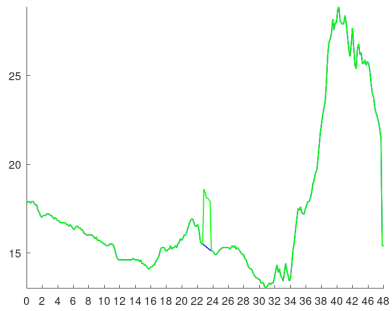

Figura 3.17: Gráfica de temperatura (°C) vs tiempo (horas). huauch, periodo 5, subperiodo 107. 30 6 31 de diciembre del 2016. Tiempo dado en UTC.

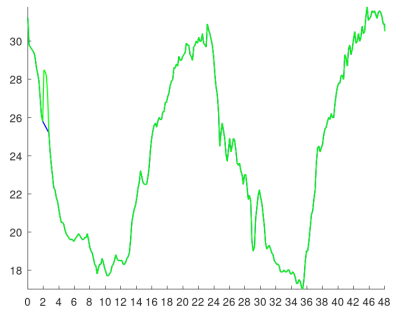

Figura 3.18: Gráfica de temperatura (°C) vs tiempo (horas). izuc, periodo 1, subperiodo 7. 13 y 14 de abril del 2010. Tiempo dado en UTC.

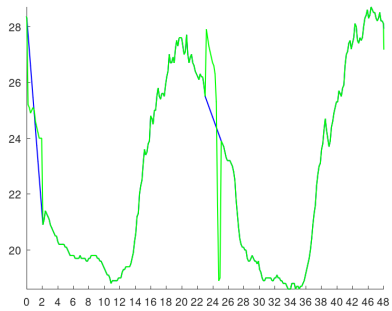

Figura 3.19: Gráfica de temperatura (°C) vs tiempo (horas). izuc, periodo 2, subperiodo 20. 9 y 10 de agosto del 2010. Tiempo dado en UTC.

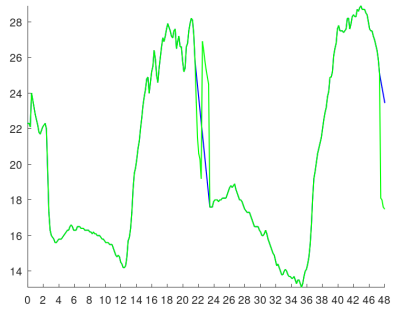

Figura 3.20: Gráfica de temperatura (°C) vs tiempo (horas). tehua, periodo 14, subperiodo 3. 5 y 6 de octubre del 2016. Tiempo dado en UTC.

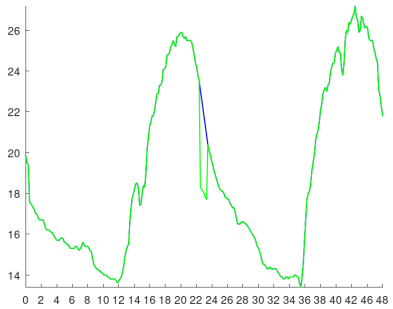

Figura 3.21: Gráfica de temperatura (°C) vs tiempo (horas). tehua, periodo 14, subperiodo 6. 11 y 12 de ocrubre del 2016. Tiempo dado en UTC.

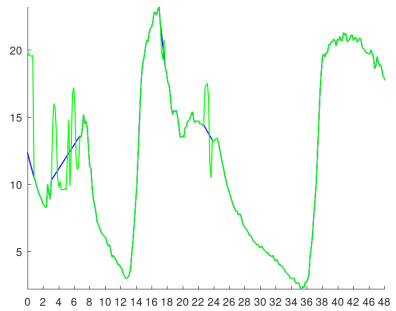

Figura 3.22: Gráfica de temperatura (°C) vs tiempo (horas). teziu, periodo 3, subperiodo 36. 11 y 12 de marzo del 2016. Tiempo dado en UTC.

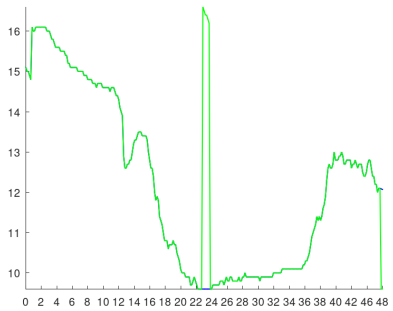

Figura 3.23: Gráfica de temperatura (°C) vs tiempo (horas). teziu, periodo 4, subperiodo 56. 19 y 20 de noviembre del 2016. Tiempo dado en UTC.

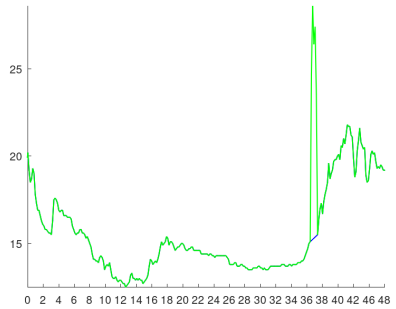

Figura 3.24: Gráfica de temperatura (°C) vs tiempo (horas). utt, periodo 1, subperiodo 40. 17 y 18 de septiembre del 2010

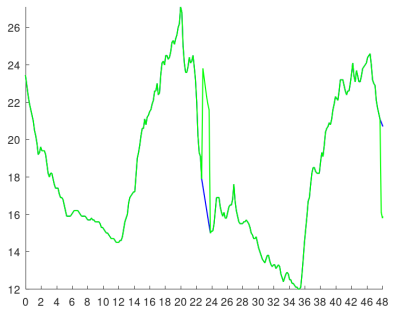

Figura 3.25: Gráfica de temperatura (°C) vs tiempo (horas). utt, periodo 7, subperiodo 11. 21 y 22 de mayo del 2014. Tiempo dado en UTC.

3.2.4. Ajuste de los datos

Una vez se han seleccionado los periodos representativos, y los datos correspondientes han sido limpiados, se procedió a realizar una interpolación de éstos durante todo el periodo 2010-2018. El objetivo es obtener, por cada una de las cinco EMA de Puebla, una serie temporal de las temperaturas en este periodo que manifieste el comportamiento "usual" (es decir, dejando de lado anomalías climáticas) de éstas. Esto se realizó con base a los datos, ya procesados, correspondientes a los periodos seleccionados, que se asumen representativos de la evolución de las temperaturas en estas zonas donde están ubicadas las EMA.

Con objeto de obtener una señal que manifieste adecuadamente el fenómeno, se propuso un modelo trigonométrico; es decir, basado en polinomios trigonométricos. En este, los parámetros a calibrar son los coeficientes del polinomio. Las frecuencias escogidas para los polinomios se tomaron en dos conjuntos, con objeto de representar adecuadamente la periodicidad dual del fenómeno: anual, relativa al movimiento de traslación terrestre y el paso de las estaciones, y diaria, relativa al movimiento de rotación terrestre y la dinámica día-noche.

Así pues, para cada EMA se deben ajustar los coeficientes $\alpha, \beta_k, \gamma_k, \phi_k, \psi_k$ del polinomio trigonométrico siguiente:

$$T(t) = \alpha + \sum_{k=1}^{N} [\beta_k \cos(2\pi k\omega_a t) + \gamma_k \sin(2\pi k\omega_a t)] + \sum_{k=1}^{M} [\phi_k \cos(2\pi k\omega_d t) + \psi_k \sin(2\pi k\omega_d t)] \quad (3.2)$$

donde $\omega_a = 1/365.25$ es la frecuencia anual y $\omega_d = 1$ es la frecuencia correspondiente al día. De cada una de las dos, se tomaron respectivamente N y M armónicos, para poder perfilar una forma de onda que se ajustara relativamente a los datos. N y M se calibraron empíricamente, resultando N=10 (anual) y M=5 (diaria).

El ajuste de la serie temporal se realizó considerando una malla temporal de la misma resolución de los datos, por simplicidad. Es decir, una malla uniforme para el periodo 2010-2018 con una frecuencia de muestreo definida por un dato cada 10 minutos, tomando como unidad temporal el día (24 horas).

Puesto que los datos disponibles para hacer el ajuste corresponden a algunos subperiodos del periodo total 2010-2018 (correspondiente a 3287 días, con 144 datos por día, igual a $L = 473328$ mediciones), se decidió utilizar la metodología de la matriz pseudoinversa de Moore-Penrose [34, 2].

Podemos escribir la malla temporal de la siguiente forma $\{\tilde{t}\}_{n=0}^{L-1} = \frac{n}{144}$. Entonces definimos

$$\left.\begin{array}{l} v_k = \cos(2\pi k\omega_a \tilde{t}) \\ w_k = \sin(2\pi k\omega_a \tilde{t}) \end{array}\right\} \qquad 1 \leq k \leq N \quad (3.3)$$

$$\left.\begin{array}{l} y_j = \cos(2\pi k\omega_a \tilde{t}) \\ z_j = \sin(2\pi k\omega_a \tilde{t}) \end{array}\right\} \qquad 1 \leq j \leq M \quad (3.4)$$

definiendo la matriz A como

$$A = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & v_1 & \cdots & v_N & w_1 & \cdots & w_N & y_1 & \cdots & y_M & z_1 & \cdots & z_M \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}_{L\times(2N+2M+1)} \quad (3.5)$$

y la matriz de coeficientes x como

$$x = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_N \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_N \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_M \\ \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_M \end{bmatrix}_{(2N+2M+1)\times 1} \tag{3.6}$$

Luego, definamos como A_p a la restricción de la matriz A que solamente está evaluada en los periodos seleccionados y a T_p a la temperatura en dichos periodos. Se busca que $A_p x \approx T_p$, es decir, buscamos coeficientes tales que $A_p x$ se parezca a las temperaturas para los periodos seleccionados. Sin embargo, el procedimiento no es tan sencillo puesto que A_p no es una matriz cuadrada y no tiene inversa. La pseudo inversa de Moore-Penrose [34, 2] se puede aplicar en esta problemática y busca una solución aproximada de la siguiente manera. Haciendo la descomposición por valores singulares de $A_p = U\Sigma V^T$ llegamos a que $U\Sigma V^T x = T_p$, multiplicando la ecuación anterior por $V\Sigma^{-1}U^T$

$$\begin{gathered} V\Sigma^{-1}U^T U\Sigma V^T x = V\Sigma^{-1}U^T T_p \\ \hat{x} = V\Sigma^{-1}U^T T_p \\ \hat{x} = A^{\dagger} T_p \end{gathered}$$

donde $\hat{x}$ es la aproximación de los coeficientes y $A^{\dagger} = V\Sigma^{-1}U^T$ es la pseudo inversa de Moore-Penrose [34, 2].

Finalmente, para cada EMA se obtiene un vector de valores para los parámetros del modelo trigonométrico, que son los coeficientes del polinomio trigonométrico, y una serie temporal de temperaturas en la malla temporal correspondiente al periodo 2010-2018. Esta serie temporal es la que se utilizará para la calibración de los modelos de evolución diaria de las temperaturas, y se considera representativa del comportamiento típico (salvo anomalías climatológicas) de las temperaturas en la ubicación geográfica de la EMA, y por extensión de la región donde se encuentra (sin demasiada especificación espacial, a falta de datos con mayor resolución espacial).

$\alpha = 18.46163982$
$\beta_1 = -3.068753446$
$\beta_2 = -0.846814548$
$\beta_3 = 0.198601595$
$\beta_4 = 0.513981273$
$\beta_5 = 0.209362618$
$\beta_6 = -0.02187491$
$\beta_7 = 0.125844054$
$\beta_8 = -0.37561917$
$\beta_9 = 0.127751028$
$\beta_{10} = -0.15366268$
$\gamma_1 = -0.536831261$
$\gamma_2 = -0.486967165$
$\gamma_3 = -0.651907479$
$\gamma_4 = -0.422576703$
$\gamma_5 = 0.072320052$
$\gamma_6 = -0.378491183$
$\gamma_7 = 0.231110517$
$\gamma_8 = -0.270179445$
$\gamma_9 = -0.168116162$
$\gamma_{10} = 0.144683938$
$\phi_1 = 1.688798724$
$\phi_2 = -1.357092928$
$\phi_3 = 0.413115858$
$\phi_4 = -0.173340815$
$\phi_5 = 0.024862773$
$\psi_1 = -3.1602356$
$\psi_2 = -0.133643616$
$\psi_3 = 0.214150471$
$\psi_4 = -0.291375654$
$\psi_5 = 0.158372026$

Tabla 3.7: Valores obtenidos para los coeficientes del polinomio (3.2), huauch.

$\alpha = 21.90429457$
$\beta_1 = -2.233313974$
$\beta_2 = -1.020076432$
$\beta_3 = 0.170753547$
$\beta_4 = -0.412400645$
$\beta_5 = 0.1701621$
$\beta_6 = -0.194947349$
$\beta_7 = 0.211176238$
$\beta_8 = 0.271070341$
$\beta_9 = -0.057841201$
$\beta_{10} = -0.078339255$
$\gamma_1 = 1.166780392$
$\gamma_2 = -0.571989962$
$\gamma_3 = -0.333156231$
$\gamma_4 = 0.158811867$
$\gamma_5 = -0.061087969$
$\gamma_6 = 0.253106181$
$\gamma_7 = -0.162049663$
$\gamma_8 = -0.1769377$
$\gamma_9 = 0.266197113$
$\gamma_{10} = -0.105902471$
$\phi_1 = 5.295179658$
$\phi_2 = -0.819158503$
$\phi_3 = 0.73714481$
$\phi_4 = -0.052247844$
$\phi_5 = 0.13788895$
$\psi_1 = -3.563234329$
$\psi_2 = -0.829470268$
$\psi_3 = -0.076930105$
$\psi_4 = -0.464417898$
$\psi_5 = 0.197495182$

Tabla 3.8: Valores obtenidos para los coeficientes del polinomio (3.2), izuc.

$\alpha = 19.57601785$
$\beta_1 = -2.249046381$
$\beta_2 = -0.968389864$
$\beta_3 = 0.21673658$
$\beta_4 = -0.226871181$
$\beta_5 = -0.184440777$
$\beta_6 = 0.040145717$
$\beta_7 = 0.348272225$
$\beta_8 = 0.455628136$
$\beta_9 = 0.180293703$
$\beta_{10} = 0.110751427$
$\gamma_1 = 0.374464399$
$\gamma_2 = -0.272222471$
$\gamma_3 = -0.488735435$
$\gamma_4 = 0.146849276$
$\gamma_5 = -0.232648394$
$\gamma_6 = -0.544320041$
$\gamma_7 = -0.448325049$
$\gamma_8 = -0.218789824$
$\gamma_9 = -0.13043287$
$\gamma_{10} = -0.284592596$
$\phi_1 = 4.376870343$
$\phi_2 = -1.226277098$
$\phi_3 = 0.402348568$
$\phi_4 = -0.194246826$
$\phi_5 = 0.081494171$
$\psi_1 = -4.224191233$
$\psi_2 = -1.010264885$
$\psi_3 = -0.062144772$
$\psi_4 = -0.365253316$
$\psi_5 = 0.078104376$

Tabla 3.9: Valores obtenidos para los coeficientes del polinomio (3.2), tehua.

$\alpha = 14.98739044$
$\beta_1 = -3.221601546$
$\beta_2 = -0.909272548$
$\beta_3 = 0.167573201$
$\beta_4 = 0.20478938$
$\beta_5 = 0.231117114$
$\beta_6 = 0.029803607$
$\beta_7 = 0.017946733$
$\beta_8 = -0.05132618$
$\beta_9 = -0.091748476$
$\beta_{10} = -0.090377611$
$\gamma_1 = -0.58901657$
$\gamma_2 = -0.446118676$
$\gamma_3 = -0.2706823$
$\gamma_4 = -0.459907567$
$\gamma_5 = -0.369099117$
$\gamma_6 = -0.285866172$
$\gamma_7 = -0.019746234$
$\gamma_8 = -0.296758068$
$\gamma_9 = -0.185854572$
$\gamma_{10} = -0.160170134$
$\phi_1 = 2.523914556$
$\phi_2 = -1.439327917$
$\phi_3 = 0.779663427$
$\phi_4 = -0.260802295$
$\phi_5 = 0.006090144$
$\psi_1 = -3.594354821$
$\psi_2 = -0.007649704$
$\psi_3 = 0.168160545$
$\psi_4 = -0.500751514$
$\psi_5 = 0.282262279$

Tabla 3.10: Valores obtenidos para los coeficientes del polinomio (3.2), teziu.

$\alpha = 17.06952495$
$\beta_1 = -1.922860442$
$\beta_2 = -0.778088578$
$\beta_3 = -0.674079597$
$\beta_4 = -0.396171133$
$\beta_5 = -0.133262059$
$\beta_6 = -0.185208334$
$\beta_7 = 0.164322049$
$\beta_8 = 0.354579183$
$\beta_9 = 0.431646774$
$\beta_{10} = -0.051210283$
$\gamma_1 = 0.745329122$
$\gamma_2 = 0.489873137$
$\gamma_3 = 0.031739069$
$\gamma_4 = -0.538482149$
$\gamma_5 = -0.465804527$
$\gamma_6 = -0.725214661$
$\gamma_7 = -0.498057571$
$\gamma_8 = -0.51728547$
$\gamma_9 = 0.196679374$
$\gamma_{10} = 0.136035412$
$\phi_1 = 3.844057931$
$\phi_2 = -1.304755008$
$\phi_3 = 0.347801768$
$\phi_4 = -0.215678592$
$\phi_5 = 0.020126357$
$\psi_1 = -3.609019958$
$\psi_2 = -0.667842995$
$\psi_3 = 0.11910129$
$\psi_4 = -0.336318342$
$\psi_5 = 0.138219249$

Tabla 3.11: Valores obtenidos para los coeficientes del polinomio (3.2), utt.

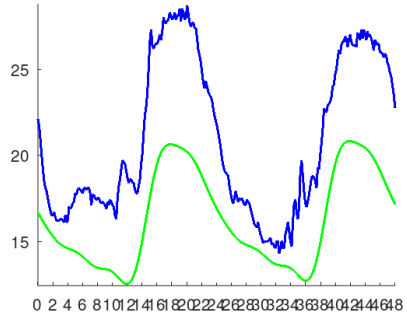

Figura 3.26: Gráfica de temperatura (°C) vs tiempo (horas). En azul se encuentran los datos de temperatura con interpolación lineal, en verde los datos extrapolados usando la pseudoinversa. huauch, periodo 1, subperiodo 1. 1 y 2 de marzo del 2014. Tiempo dado en UTC.

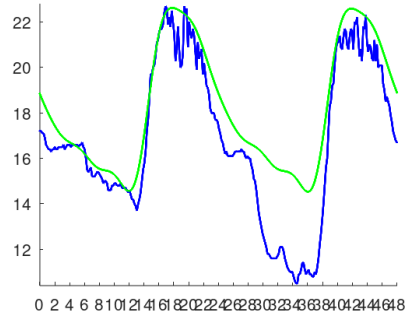

Figura 3.27: Gráfica de temperatura (°C) vs tiempo (horas). En azul se encuentran los datos de temperatura con interpolación lineal, en verde los datos extrapolados usando la pseudoinversa. huauch, periodo 2, subperiodo 28. 25 y 26 de octubre del 2014. Tiempo dado en UTC.

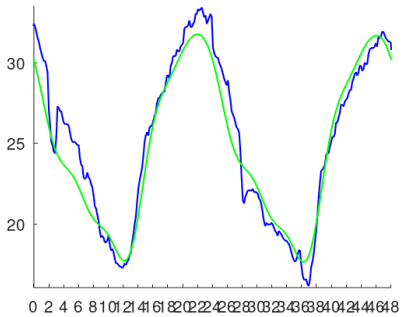

Figura 3.28: Gráfica de temperatura (°C) vs tiempo (horas). En azul se encuentran los datos de temperatura con interpolación lineal, en verde los datos extrapolados usando la pseudoinversa. izuc, periodo 1, subperiodo 6. 11 y 12 de abril del 2010. Tiempo dado en UTC.

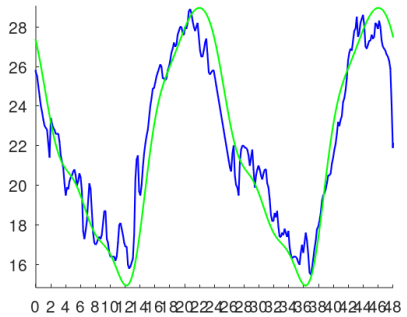

Figura 3.29: Gráfica de temperatura (°C) vs tiempo (horas). En azul se encuentran los datos de temperatura con interpolación lineal, en verde los datos extrapolados usando la pseudoinversa. izuc, periodo 2, subperiodo 38. 13 y 14 de septiembre del 2010. Tiempo dado en UTC.

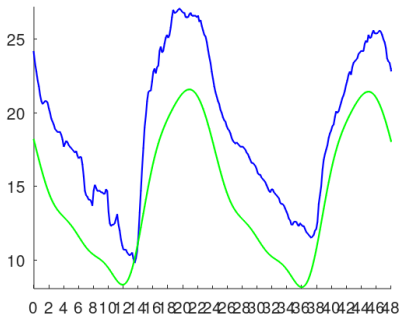

Figura 3.30: Gráfica de temperatura (°C) vs tiempo (horas). En azul se encuentran los datos de temperatura con interpolación lineal, en verde los datos extrapolados usando la pseudoinversa. tehua, periodo 1, subperiodo 6. 11 y 12 de enero del 2014. Tiempo dado en UTC.

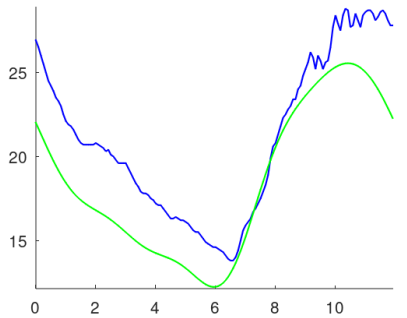

Figura 3.31: Gráfica de temperatura (°C) vs tiempo (horas). En azul se encuentran los datos de temperatura con interpolación lineal, en verde los datos extrapolados usando la pseudoinversa. tehua, periodo 2, subperiodo 14. 27 y 28 de febrero del 2014. Tiempo dado en UTC.

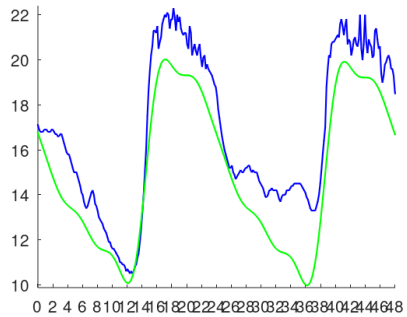

Figura 3.32: Gráfica de temperatura (°C) vs tiempo (horas). En azul se encuentran los datos de temperatura con interpolación lineal, en verde los datos extrapolados usando la pseudoinversa. teziu, periodo 4, subperiodo 40. 18 y 19 de octubre del 2016. Tiempo dado en UTC.

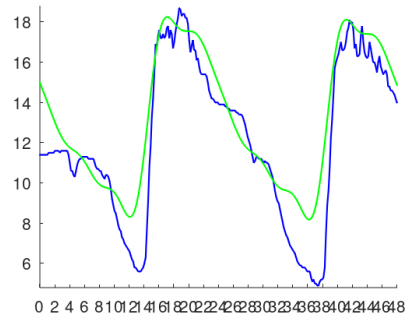

Figura 3.33: Gráfica de temperatura (°C) vs tiempo (horas). En azul se encuentran los datos de temperatura con interpolación lineal, en verde los datos extrapolados usando la pseudoinversa. teziu, periodo 4, subperiodo 72. 21 y 22 de diciembre del 2016. Tiempo dado en UTC.

Figura 3.34: Gráfica de temperatura (°C) vs tiempo (horas). En azul se encuentran los datos de temperatura con interpolación lineal, en verde los datos extrapolados usando la pseudoinversa. utt, periodo 10, subperiodo 10. 19 y 20 de junio del 2017. Tiempo dado en UTC.

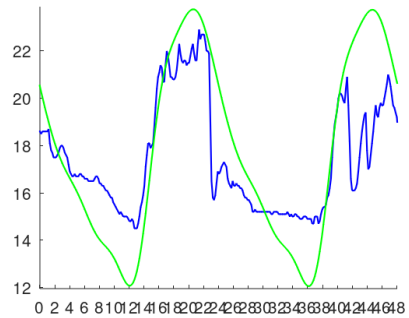

Figura 3.35: Gráfica de temperatura (°C) vs tiempo (horas). En azul se encuentran los datos de temperatura con interpolación lineal, en verde los datos extrapolados usando la pseudoinversa. utt, periodo 10, subperiodo 45. 28 y 29 de agosto del 2017. Tiempo dado en UTC.

3.3. Estudio con los modelos de temperatura escogidos

Una vez que se consideró que los datos estaban suficientemente procesados, y por tanto preparados para su uso para el ajuste de los modelos, se procedió a realizar las simulaciones con los modelos de evolución diaria de temperaturas escogidos. Para ello, es necesario obtener primero los datos necesarios para calibrar los modelos.

3.3.1. Obtención de máximos y mínimos diarios

Como ya se ha dicho, antes de las simulaciones es preciso obtener primero los datos necesarios para las simulaciones. En primer lugar, se tiene en cuenta la información contextual de las estaciones meteorológicas (ver cuadro 3.1). Esto quiere decir, básicamente, la información geográfica de su ubicación espacial (es decir, coordenadas geográficas de latitud y longitud). Con esta información, utilizando las ecuaciones del tiempo (ver sección 1.3), es posible obtener las horas precisas del atardecer, amanecer y mediodía de cada día, en particular en el periodo 2010-2018.

Por otra parte, se requiere el cálculo de temperaturas mínimas y máximas diarias en dicho periodo. Esto se hizo utilizando la serie temporal obtenida en la sección anterior. Por cada día, al que corresponden 144 datos (24 horas con un dato cada 10 minutos), se obtiene el máximo y el mínimo, lo cual aproxima razonablemente bien a los reales, asumiendo que la serie temporal representa la evolución natural de la temperatura.

En estas dos tareas es importante tener en cuenta que los datos proporcionados están referidos no con la hora local, sino con el horario UTC (6 horas más que el horario local en el estado de Puebla). Sin embargo, no se consideró que esto fuera mayor inconveniente, ya que no interfiere demasiado realmente con las horas del amanecer y el atardecer. Esto se puede ver directamente en el algoritmo usado para calcular los instantes en el que ocurre el amanecer (sección 1.3), usando el algoritmo con diferencias de 6 horas el resultado final varía a lo más en el orden de segundos, que es una precisión más que suficiente para este estudio.

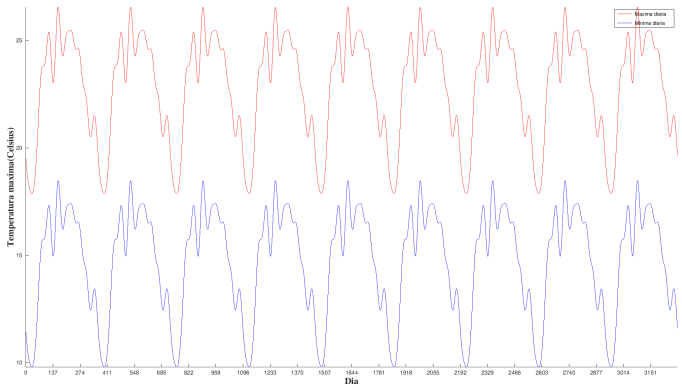

Figura 3.36: Gráfica de máximas y mínimas diarias por cada día, Huauchinango. Note que la curva refleja el carácter periódico anual de las mínimas y máximas diarias debido a las estaciones.

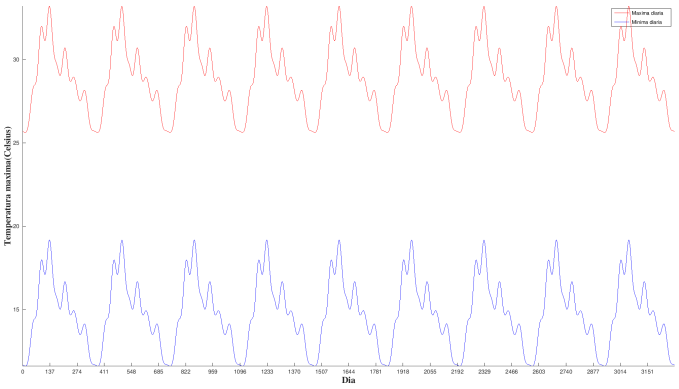

Figura 3.37: Gráfica de máximas y mínimas diarias por cada día, Izúcar de matamoros. Note que la curva refleja el carácter periódico anual de las mínimas y máximas diarias debido a las estaciones.

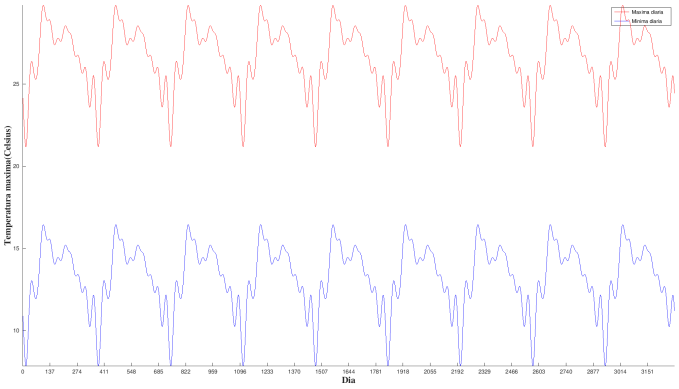

Figura 3.38: Gráfica de máximas y mínimas diarias por cada día, Tehuacán. Note que la curva refleja el carácter periódico anual de las mínimas y máximas diarias debido a las estaciones.

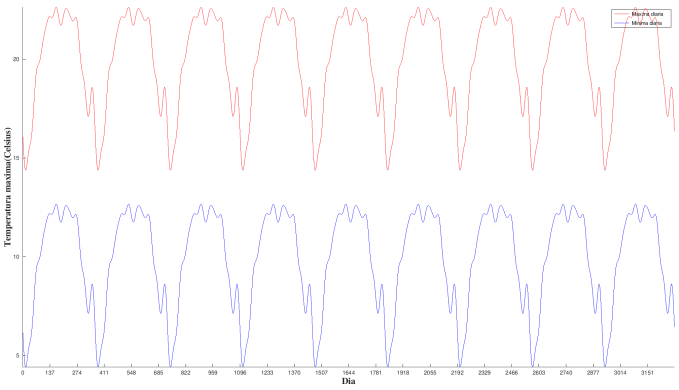

Figura 3.39: Gráfica de máximas y mínimas diarias por cada día, Teziutlán. Note que la curva refleja el carácter periódico anual de las mínimas y máximas diarias debido a las estaciones.

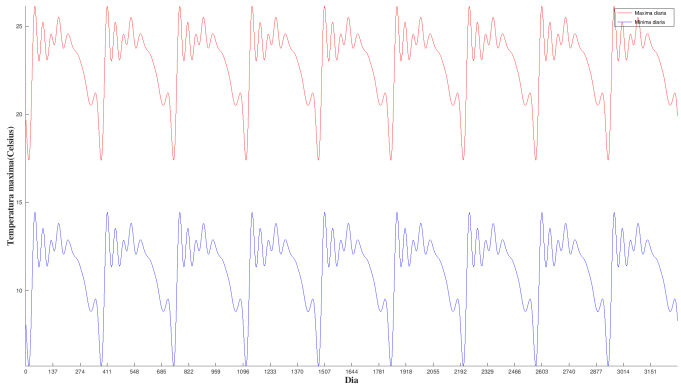

Figura 3.40: Gráfica de máximas y mínimas diarias por cada día, U.T.T. Note que la curva refleja el carácter periódico anual de las mínimas y máximas diarias debido a las estaciones.

3.3.2. Evaluación del desempeño de los modelos: metodología y resultados

Con los datos de la subsección anterior, es posible simular las temperaturas en cada una de las cinco estaciones meteorológicas (o mejor dicho, en sus ubicaciones geográficas). Aplicando los modelos matemáticos, se obtiene para cada estación y cada uno de los tres modelos escogidos (los modelos de de Wit [16], Wilkerson [68]y Linvill [35]) una serie temporal. Con objeto de que la comparación sea directa, la resolución temporal de salida ha de ser igual a la de los datos originales de la base de datos; es decir, se calculan las temperaturas en la misma malla temporal (ver Figuras 3.41-3.50).

Para comparar la discrepancia entre las temperaturas modeladas y las reales, se considera la diferencia entre éstas y la serie temporal obtenida en la sección 3.2, que como se ha dicho antes se considera representativa del comportamiento típico (salvo anomalías climatológicas) de las temperaturas en la ubicación geográfica de la EMA, y por extensión de la región donde se encuentra (sin demasiada especificación espacial, a falta de datos con mayor resolución espacial).

Para medir esta discrepancia se consideran diferentes métricas, que son clásicas. Dado $p \geq 1$, para todo vector $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, se define:

$$||x||_p = (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{1/p},$$

mientras que para $p = \infty$ se define

$$||x||_\infty = max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

Todas estas expresiones definen normas en $\mathbb{R}^n$, y son ampliamente utilizadas en el Análisis matemático y en múltiples aplicaciones para medir el tamaño de señales. Nótese que $p = 2$ es la métrica Euclídea usual, el caso $p = 1$ mide básicamente la discrepancia media (sería la media si se dividiera por n, que no es necesario), y el caso $p = \infty$ es la métrica del máximo, que da la discrepancia máxima, en el peor de los casos.

Finalmente, dado p con $1 \leq p \leq \infty$, consideramos el error entre un dato $v \in \mathbb{R}^n$ y una medición o aproximación $w \in \mathbb{R}^n$ dado por

$$E_p(v, w) = ||v - w||_p.$$

Esta cantidad mide la discrepancia en términos absolutos, pero por sí solo es probable que no diga demasiado. Para hacerlo relativo a la señal que se está aproximando, y poder estimar qué tan grande es la discrepancia o buena es la aproximación, suele considerarse el error relativo, dado por la expresión siguiente. Dado p con $1 \leq p \leq \infty$, el error relativo entre un dato $v \in \mathbb{R}^n$ distinto de cero, y una medición o aproximación $w \in \mathbb{R}^n$ viene dado por

$$E_{r,p}(v, w) = E_p(v, w)/||v||_p.$$

A continuación se muestran los errores de las aproximaciones con los modelos de C.T. de Wit [16], Wilkerson et al. [68] y Linvill et al. [35], medidos en las métricas para $p = 1, 2, \infty$.

Modelos	Huauch			Izuc			Tehua			Teziu			UTT		
	$p=1$	$p=2$	$p=\infty$	$p=1$	$p=2$	$p=\infty$	$p=1$	$p=2$	$p=\infty$	$p=1$	$p=2$	$p=\infty$	$p=1$	$p=2$	$p=\infty$
de Wit	664226.15	1204.09	3.77	390465.94	716.71	3.98	511779.34	1008.39	3.45	649989.78	1241.51	5.21	428999.64	829.13	3.27
Wilkerson	535843.60	1039.64	5.03	671140.52	1305.83	5.87	512452.00	1005.99	5.84	531195.42	1262.80	6.73	456335.58	945.10	5.44
Linvill	319714.74	631.74	2.33	602240.33	1004.39	3.60	264751.12	480.27	2.33	379321.90	686.25	3.34	281692.29	524.77	2.12

Tabla 3.12: Tabla de errores absolutos, se compara el rendimiento de los 3 modelos escogidos.

Modelos	Huauch			Izuc			Tehua			Teziu			UTT		
	$p=1$	$p=2$	$p=\infty$	$p=1$	$p=2$	$p=\infty$	$p=1$	$p=2$	$p=\infty$	$p=1$	$p=2$	$p=\infty$	$p=1$	$p=2$	$p=\infty$
de Wit	0.0760	0.0929	0.1421	0.0376	0.0463	0.1199	0.0552	0.0726	0.1159	0.0916	0.1159	0.2302	0.0530	0.0684	0.1254
Wilkerson	0.0613	0.0802	0.1897	0.0647	0.0844	0.1770	0.0553	0.0724	0.1962	0.0748	0.1179	0.2975	0.0564	0.0779	0.2082
Linvill	0.0365	0.0487	0.0879	0.0580	0.0649	0.1087	0.0285	0.0346	0.0784	0.0534	0.0641	0.1479	0.0348	0.0432	0.0814

Tabla 3.13: Tabla de errores relativos, se compara el rendimiento de los 3 modelos escogidos.

También, se muestran gráficas que comparan las simulaciones los 3 modelos escogidos, en algunas partes de los periodos seleccionados, los datos limpios (quitando periodos anómalos) están en azul, y los interpolados (con polinomios trigonométricos) en verde:

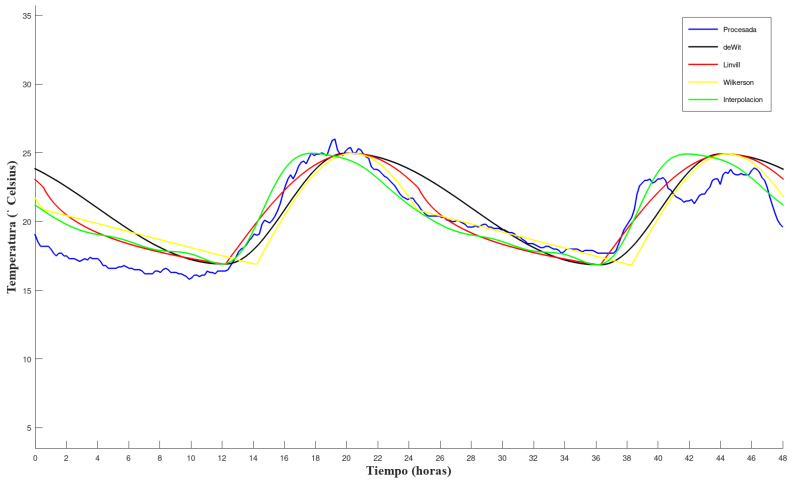

Figura 3.41: Gráfica de temperatura (°C) vs tiempo (horas), huauch. Se grafican los días 2799 y 2800 de 3287. 21 y 22 de agosto del 2017. Tiempo dado en UTC.

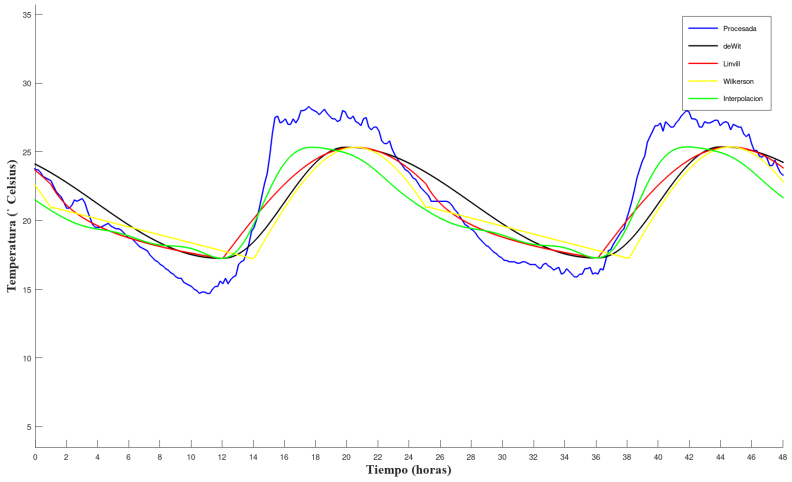

Figura 3.42: Gráfica de temperatura (°C) vs tiempo (horas), huauch. Se grafican los días 2033 y 2034 de 3287. 26 y 27 de junio del 2015. Tiempo dado en UTC

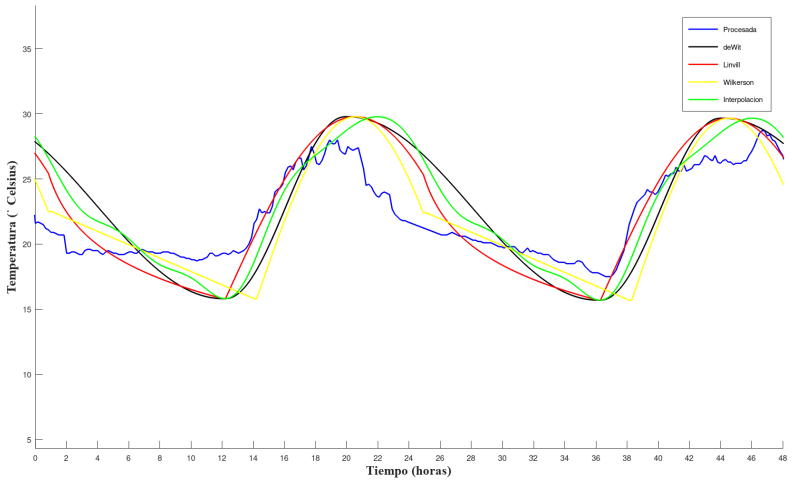

Figura 3.43: Gráfica de temperatura (°C) vs tiempo (horas), izuc. Se grafican los días 225 y 226 de 3287. 13 y 14 de agosto del 2010. Tiempo dado en UTC.

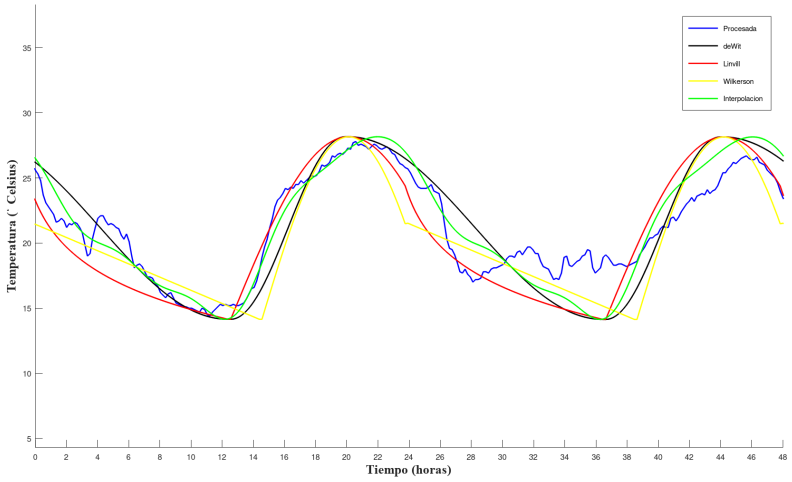

Figura 3.44: Gráfica de temperatura (°C) vs tiempo (horas), izuc. Se grafican los días 1773 y 1774 de 3287. 8 y 9 de noviembre del 2014. Tiempo dado en UTC.

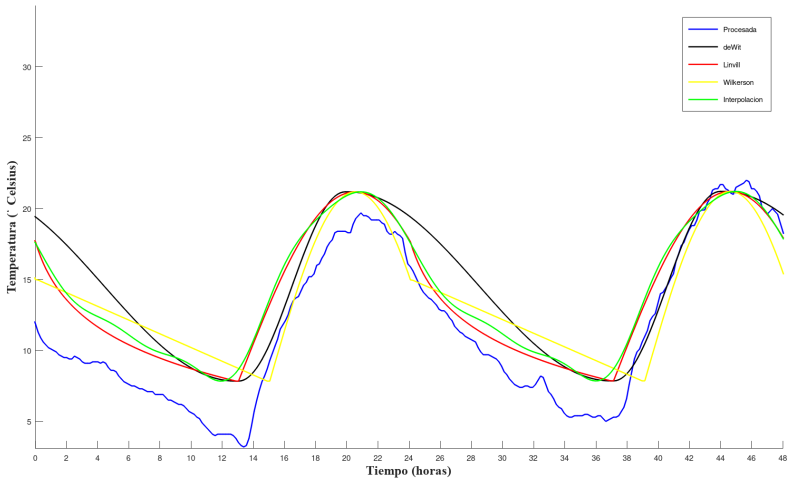

Figura 3.45: Gráfica de temperatura (°C) vs tiempo (horas), tehua. Se grafican los días 1477 y 1478 de 3287. 16 y 17 de enero del 2013. Tiempo dado en UTC.

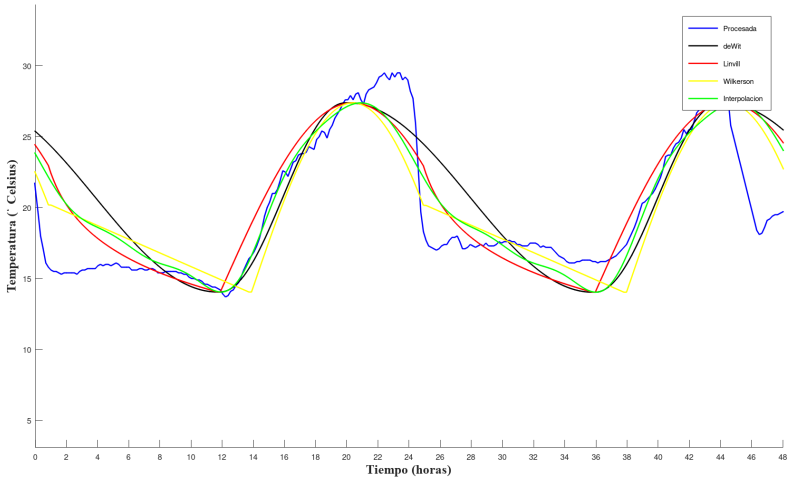

Figura 3.46: Gráfica de temperatura (°C) vs tiempo (horas), tehua. Se grafican los días 2351 y 2352 de 3287. 8 de junio del 2015. Tiempo dado en UTC.

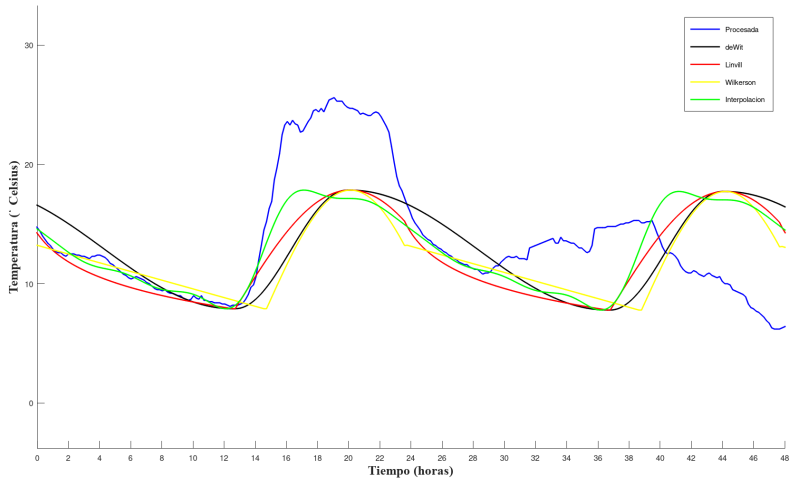

Figura 3.47: Gráfica de temperatura (°C) vs tiempo (horas), teziu. Se grafican los días 1781 y 1782 de 3287. 16 y 17 de noviembre del 2016. Tiempo dado en UTC.

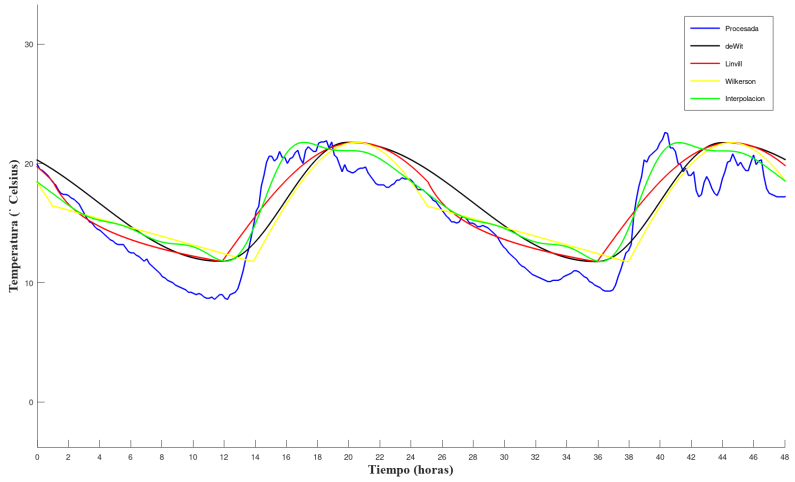

Figura 3.48: Gráfica de temperatura (°C) vs tiempo (horas), teziu. Se grafican los días 2015 y 2016 de 3287. 8 y 9 de julio del 2015. Tiempo dado en UTC.

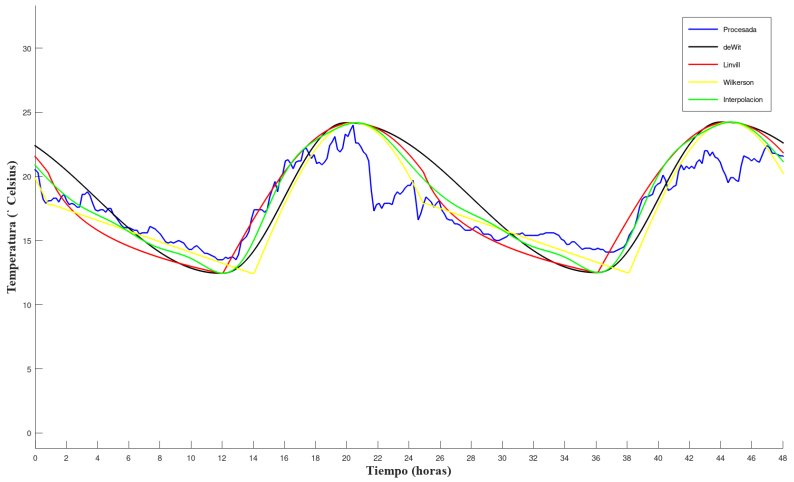

Figura 3.49: Gráfica de temperatura (°C) vs tiempo (horas), utt. Se grafican los días 201 y 202 de 3287. 20 y 21 de julio del 2010. Tiempo dado en UTC.

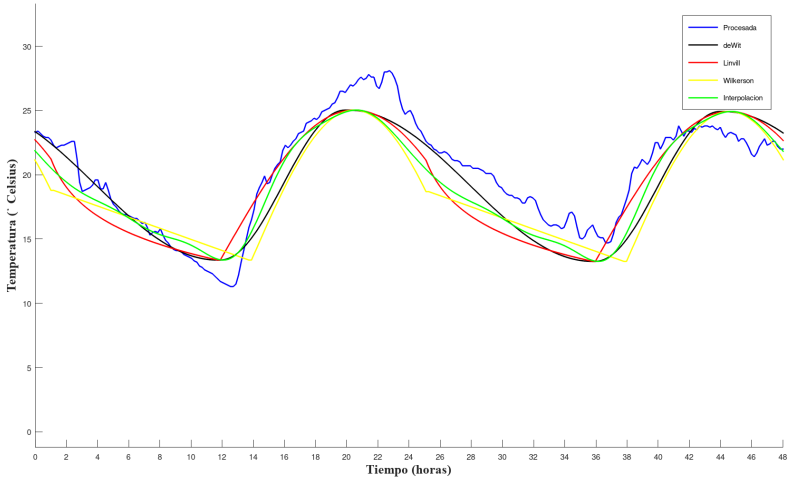

Figura 3.50: Gráfica de temperatura (°C) vs tiempo (horas), utt. Se grafican los días 2731 y 2732 de 3287. 23 y 24 de junio del 2017. Tiempo dado en UTC.

3.4. Conclusiones

En base al análisis de errores hecho y resumido en la tabla 3.13 se puede concluir que el modelo de Linvill [35] tuvo el mejor desempeño para 4 de las 5 estaciones de estudio: Huauchinango, Tehuacán, Teziutlán y UTT, para las 3 métricas usadas p=1, p=2, p=∞. Esto implica que este modelo fue el más preciso y consistente en predecir la evolución diaria de la temperatura en distintas ubicaciones.

Sin embargo, para la estación de Izúcar de Matamoros el modelo de de Wit [16] superó al de Linvill y tuvo un mejor rendimiento para p=1 y p=2. No obstante, para p=∞ el modelo de Linvill tuvo el error relativo más pequeño. Esta métrica mide el error relativo máximo, por lo que aún en esta estación el modelo de de Wit predice razonablemente las temperaturas.

Esto sugiere que el modelo de Linvill es el más prometedor para estimar la evolución diaria de la temperatura dadas las ubicaciones de las EMA y las restricciones para los datos de entrada considerados aquí (temperaturas mínima y máxima, tiempos del amanecer, atardecer y mediodía solar).

Esta conclusión ofrece una respuesta clara a la pregunta de investigación planteada en la tesis: con base en el estudio realizado, recomendamos la utilización del modelo de Linvill para simular la evolución diaria de temperaturas, cuando los únicos datos de temperaturas disponibles para calibrar los modelos sean temperaturas máximas y mínimas. Se asume que los datos espaciales (coordenadas geográficas) y temporales (periodo a simular) son conocidos.

Apéndice A

Código

A continuación, se muestra como ejemplo el código utilizado para hacer las gráficas comparativas de los 3 modelos escogidos, la temperatura procesada y la extrapolada en el capítulo 3. El lenguaje de programación usado a lo largo de esta tesis fue GNU Octave [19]. Para ver el repositorio completo de todo el código utilizado, ingresar a: `https://drive.google.com/drive/folders/139cwZibGYkDzgrgKES4UGr8BS4FriScr?usp=sharing`

A.1. Ecuaciones del tiempo

```
function [J_tiempo,n]=EcuTiempo1_Tiempo_Solar_Medio(l,JD)
%se calcula el numero de dias que
%han pasado desde el 1ero de enero
%del 2000.
%[JD]=EcuTiempo_Gregoriano_a_Juliano(A,M,D,h,m,s);
n=ceil(JD-2451545+0.0008);
%2451545 representa el 1ero de enero del año 2000
%a las 12 horas UT en fecha juliana.
J_tiempo=n-l/360; %tiempo solar medio en fecha juliana
```

```
function [J_mediodia,Lambda]=EcuTiempo2_Mediodia_Solar(l,JD)

J_tiempo=EcuTiempo1_Tiempo_Solar_Medio(l,JD); %se toma el tiempo solar medio
M_a=Aux_mod_generalizada(357.5291+0.98560028*J_tiempo,360);
C = 1.9148*sind(M_a);
C = C+0.02*sind(2*M_a);
C = C+0.0003*sind(3*M_a);
Lambda=Aux_mod_generalizada(M_a+C+180+102.9372,360);
J_mediodia=2451545+J_tiempo;
J_mediodia=J_mediodia+0.0053*sind(M_a)-0.0069*sind(2*Lambda);
%se calcula el mediodia solar en fecha juliana
```

```
function [delta,w]=EcuTiempo3_Declinacion_Solar(l,JD)
```

```

[~,Lambda]=EcuTiempo2_Mediodia_Solar(l,JD);
w=sind(Lambda)*sind(23.44); %w=sindeg(delta) en la ecuacion
delta=asind(w); %se calcula el seno inverso
```

```
function [omega,a_hora]=EcuTiempo4_Angulo_Hora(phi,l,JD)

[delta,w]=EcuTiempo3_Declinacion_Solar(l,JD);%w=sin(delta)
w2=sqrt(1-w*w);%w2=cos(delta)
[J_mediodia,Lambda]=EcuTiempo2_Mediodia_Solar(l,JD);
[A_m,M_m,D_m,h_m,m_m,s_m]=EcuTiempo_Juliano_a_Gregoriano(J_mediodia);

p=-1.454389765158282e-02;%=sind(-50 arcominutos/60) correccion de refraccion
↪  atmosferica
p=p-sind(phi)*w;
p=p/(cosd(phi)*w2);
omega=acosd(p); %p=cosd(omega_o)
%omega esta en el rango [0,180].
%Si la hora es pasado el mediodia,
%el angulo hora es positivo;
%si no, es negativo.
[A,M,D,h,m,s]=EcuTiempo_Juliano_a_Gregoriano(JD);
if h>h_m
a_hora=omega;
elseif h<h_m
a_hora=-omega;
endif
```

```
function [J_r,J_s,J_mediodia]=EcuTiempo5_Atardecer(phi,l,JD)

J_mediodia=EcuTiempo2_Mediodia_Solar(l,JD);
omega=EcuTiempo4_Angulo_Hora(phi,l,JD);
J_r=J_mediodia-omega/360; %se calcula el amanecer y el atardecer en fecha
J_s=J_mediodia+omega/360; %juliana
```

```
function [A,M,D,h,m,s]=EcuTiempo_Juliano_a_Gregoriano(JD)

JDN=fix(JD); %se encuentra la parte entera de la fecha juliana
% es decir, el día juliano
g=floor(0.75*floor((JDN-4479.5)/36524.25)+.5)-37;
N=g+JDN;

d_p=floor(Aux_mod_generalizada(N-59.25,365.25));
A=floor(N/365.25)-4712;
M=Aux_mod_generalizada(floor((d_p+.5)/30.6)+2 , 12) + 1;
D=floor(Aux_mod_generalizada(d_p+.5 , 30.6))+1;
%se hace la función inversa para encontrar el día año y mes
t_h=(JD-JDN)*24+12;
t_m=(t_h-fix(t_h))*60;
s=(t_m-fix(t_m))*60;
```

```
h=fix(t_h);
m=fix(t_m);
%ahora la parte decimal de JD se convierte en horas minutos y segundos
%si la hora calculada es mayor a 24 entonces se le restan 24 horas a h
%y se le agrega un día a D
if h>=24
h=h-24;
d_p=d_p+1;
D=D+1;
endif

%{
        h=h-6; %se convierte a hora local
        if h<0
        h=24+h;
        D=D-1;
        endif
        %}
```

```
function [JDN,A_p,M_p]=EcuTiempo_Gregoriano_a_Dia_Juliano(A,M,D)

A_p=A-floor((12-M)/10);
M_p=Aux_mod_generalizada(M-3,12);

y=floor(365.25*(A_p+4712));
d=floor(30.6*M_p+0.5);
N=y+d+D+59;
g=floor(0.75*floor(A_p/100+1))-2;
JDN=N-g;
%algoritmo para el dia juliano
```

A.2. Modelos

```
function [Temp_deWit]=deWit()

estaciones={'huauch','izuc','tehua','teziu','utt'};
load('C:\Users\edu_p\OneDrive - Benemérita Universidad Autónoma de
↪ Puebla\Tesis\Base de datos de temperaturas Puebla para tesis\Base Datos
↪ Clima 2 - Puebla\MATLAB\Ecuaciones_tiempo\Horas_amanecer.mat');
load('C:\Users\edu_p\OneDrive - Benemérita Universidad Autónoma de
↪ Puebla\Tesis\Base de datos de temperaturas Puebla para tesis\Base Datos
↪ Clima 2 - Puebla\MATLAB\MINMAX.mat');

n_med=144*3287;
malla_temp=0:(n_med-1);
malla_temp=malla_temp/144; %cambia la unidad a dias

Temp_deWit=zeros(n_med,5);

```

```
for ema=1:5
  Horas_Amanecer_ema=zeros(3289,6);
  Hitos_Temp=zeros(3289,6);

  for dia=1:3289
    t_r=Horas_amanecer(dia,9*(ema-1)+1:9*(ema-1)+3);%Vector con horas, minutos y segundos de la hora del amanecer.
    Horas_Amanecer_ema(dia,4)=t_r(1)+t_r(2)/60+t_r(3)/3600;%Tiempo del amanecer, en horas, modulo un dia (entre 0 y 24).
    Horas_Amanecer_ema(dia,5)=(dia-2)*144+6*t_r(1)+ceil(t_r(2)/10);%Posicion justo despues del amanecer.
    Horas_Amanecer_ema(dia,6)=(dia-2)*144+6*20+1;%Posicion a las 20 hrs. SE VA A USAR UTC
    Horas_Amanecer_ema(dia,1:3)=t_r;

    if (dia>1)&&(dia<3289)
      Hitos_Temp(dia,1)=MINMAX(dia-1,4*ema-3);%Temperatura minima.
      Hitos_Temp(dia,2)=MINMAX(dia-1,4*ema-2);%Temperatura maxima.
      Hitos_Temp(dia,3)=(Hitos_Temp(dia,1)+Hitos_Temp(dia,2))/2;%Temperatura media (punto medio entre la minima y la maxima).
      Hitos_Temp(dia,4)=(Hitos_Temp(dia,2)-Hitos_Temp(dia,1))/2;%Semiamplitud del rango de la temperatura.
    endif
  endfor

  Horas_Amanecer_ema(1,5)=NaN;
  Horas_Amanecer_ema(1,6)=1;
  Horas_Amanecer_ema(3289,5)=n_med+1;
  Horas_Amanecer_ema(3289,6)=NaN;
  Hitos_Temp(1,1:4)=Hitos_Temp(3288,1:4);%El dia primero se toma igual al ultimo real.
  Hitos_Temp(3289,1:4)=Hitos_Temp(2,1:4);%El dia ultimo se toma igual al primero real.

  for dia=2:3288
    Hitos_Temp(dia,5)=(Hitos_Temp(dia+1,1)+Hitos_Temp(dia,2))/2;%Temperatura media (punto medio entre la minima -del dia siguiente- y la maxima).
    Hitos_Temp(dia,6)=(Hitos_Temp(dia,2)-Hitos_Temp(dia+1,1))/2;%Semiamplitud del rango de la temperatura, con la minima del dia siguiente.
  endfor

  Hitos_Temp(1,5:6)=Hitos_Temp(3288,5:6);%El dia primero se toma igual al ultimo real.
  Hitos_Temp(3289,5:6)=Hitos_Temp(2,5:6);%El dia ultimo se toma igual al primero real.

  malla_noche=Horas_Amanecer_ema(1,6):Horas_Amanecer_ema(2,5)-1;
  lapso_noche=10+Horas_Amanecer_ema(2,4);%Numero de horas que pasan desde las 14 hasta el amanecer del dia siguiente.
  Temp_deWit(malla_noche,ema)=Hitos_Temp(1,5)+Hitos_Temp(1,6)*cos(pi*linspace(10,lapso_noche,length(malla_noche))/lapso_noche);%Temperatura desde las 14 del dia hasta el amanecer del dia siguiente.
```

```
  for dia=1:3286
    malla_dia=Horas_Amanecer_ema(dia+1,5):Horas_Amanecer_ema(dia+1,6)-1;
    lapso_dia=14-Horas_Amanecer_ema(dia+1,4);%Numero de horas que pasan desde el amanecer hasta las 14.
    Temp_deWit(malla_dia,ema)=Hitos_Temp(dia+1,3)-Hitos_Temp(dia+1,4)*cos(pi*linspace(0,lapso_dia,length(malla_dia))/lapso_dia);%Temperatura desde el amanecer hasta las 14 del dia.
    malla_noche=Horas_Amanecer_ema(dia+1,6):Horas_Amanecer_ema(dia+2,5)-1;
    lapso_noche=10+Horas_Amanecer_ema(dia+2,4);%Numero de horas que pasan desde las 14 hasta el amanecer del dia siguiente.
    Temp_deWit(malla_noche,ema)=Hitos_Temp(dia+1,5)+Hitos_Temp(dia+1,6)*cos(pi*linspace(0,lapso_noche,length(malla_noche))/lapso_noche);%Temperatura desde las 14 del dia hasta el amanecer del dia siguiente.
  endfor

  dia=3287;
  malla_dia=Horas_Amanecer_ema(dia+1,5):Horas_Amanecer_ema(dia+1,6)-1;
  lapso_dia=14-Horas_Amanecer_ema(dia+1,4);%Numero de horas que pasan desde el amanecer hasta las 14.
  Temp_deWit(malla_dia,ema)=Hitos_Temp(dia+1,3)-Hitos_Temp(dia+1,4)*cos(pi*linspace(0,lapso_dia,length(malla_dia))/lapso_dia);%Temperatura desde el amanecer hasta las 14 del dia.
  malla_noche=Horas_Amanecer_ema(dia+1,6):Horas_Amanecer_ema(dia+2,5)-1;
  lapso_noche=10+Horas_Amanecer_ema(dia+2,4);%Numero de horas que pasan desde las 14 hasta el amanecer del dia siguiente.
  Temp_deWit(malla_noche,ema)=Hitos_Temp(dia+1,5)+Hitos_Temp(dia+1,6)*cos(pi*linspace(0,9+5/6,length(malla_noche))/lapso_noche);%Temperatura desde las 14 del dia hasta el amanecer del dia siguiente.
endfor


nombre_archivo=['Temperaturas_deWit.mat'];
codigo=fopen(nombre_archivo,'a');
save(nombre_archivo,'Temp_deWit');
fclose(codigo);

endfunction
```

```
function []=Linvill()

estaciones={'huauch','izuc','tehua','teziu','utt'};
load('C:/Users/edu_p/OneDrive - Benemérita Universidad Autónoma de Puebla/Tesis/Datos/Horas_amanecer.mat');
load('C:/Users/edu_p/OneDrive - Benemérita Universidad Autónoma de Puebla/Tesis/Datos/MINMAX.mat');
n_med=144*3287;
Temp_Linvill=zeros(n_med,5);


for ema=1:5
  Horas_Amanecer_ema=zeros(3289,17);
```

```
Hitos_Temp=zeros(3289,4);
T_s=zeros(3288,1);
for dia=1:3289
  t_rs=zeros(1,9);
  t_rs=Horas_amanecer(dia,9*(ema-1)+1:9*(ema-1)+9);%Vector con horas, minutos y segundos de la hora del amanecer y atardecer y mediodia.
  Horas_Amanecer_ema(dia,1:9)=t_rs;
  Horas_Amanecer_ema(dia,10)=t_rs(1)+t_rs(2)/60+t_rs(3)/3600;%Tiempo del amanecer, en horas, modulo un dia (entre 0 y 24).
  Horas_Amanecer_ema(dia,11)=(dia-2)*144+6*t_rs(1)+ceil(t_rs(2)/10);%Posicion justo despues del amanecer.
  if (t_rs(4)<=6 && t_rs(4)>=0)
    hora_at=t_rs(4)+24;
  else
    hora_at=t_rs(4);
  endif
  Horas_Amanecer_ema(dia,12)=hora_at+t_rs(5)/60+t_rs(6)/3600;%Tiempo del atardecer, en horas puede ser mayor a 24
  Horas_Amanecer_ema(dia,13)=(dia-2)*144+6*hora_at+ceil(t_rs(5)/10);%Posicion justo despues del atardecer.
  Horas_Amanecer_ema(dia,14)=t_rs(7)+t_rs(8)/60+t_rs(9)/3600; %hora del mediodia solar, modulo un dia (alrededor de 18)
  Horas_Amanecer_ema(dia,15)=Horas_Amanecer_ema(dia,14)+2-Horas_Amanecer_ema(dia,10); %t_noon+2-t_r
  Horas_Amanecer_ema(dia,16)=Horas_Amanecer_ema(dia,12)-Horas_Amanecer_ema(dia,10); %t_s-t_r

  if (dia>1)&&(dia<3289)
    Hitos_Temp(dia,1)=MINMAX(dia-1,4*ema-3);%Temperatura minima.
    Hitos_Temp(dia,2)=MINMAX(dia-1,4*ema-2);%Temperatura maxima.
    Hitos_Temp(dia,3)=Hitos_Temp(dia,2)-Hitos_Temp(dia,1); %T_max-T_min.
  endif
endfor

for dia=1:3288
  Horas_Amanecer_ema(dia,17)=24+Horas_Amanecer_ema(dia+1,10)-Horas_Amanecer_ema(dia,12)+1; %Z_k+1
endfor

Horas_Amanecer_ema(1,17)=24+Horas_Amanecer_ema(2,10)-Horas_Amanecer_ema(1,12)+1; %Z_k+1
Hitos_Temp(1,1:3)=Hitos_Temp(3288,1:3);%El dia primero se toma igual al ultimo real.
Hitos_Temp(3289,1:3)=Hitos_Temp(2,1:3);%El dia ultimo se toma igual al primero real.
T_s(1)=Hitos_Temp(1,1)+Hitos_Temp(1,3)*sin((pi*Horas_Amanecer_ema(1,16))/(2*Horas_Amanecer_ema(1,15)));
malla_noche=1:Horas_Amanecer_ema(2,11)-1;
```

```
  Temp_Linvill(malla_noche,ema)=T_s(1)-((T_s(1)-Hitos_Temp(2,1))/log(Horas_Amanecer_ema(1,17)))*log(linspace(24-Horas_Amanecer_ema(1,12)+1,Horas_Amanecer_ema(1,17),length(malla_noche)));
  for dia=1:3286
    malla_dia=Horas_Amanecer_ema(dia+1,11):Horas_Amanecer_ema(dia+1,13)-1;
    Temp_Linvill(malla_dia,ema)=Hitos_Temp(dia+1,1)+Hitos_Temp(dia+1,3)*sin(pi*linspace(0,Horas_Amanecer_ema(dia+1,16),length(malla_dia))/(2*Horas_Amanecer_ema(dia+1,15)));%Temperatura desde el amanecer hasta atardecer.
    malla_noche=Horas_Amanecer_ema(dia+1,13):Horas_Amanecer_ema(dia+2,11)-1;
    T_s(dia+1)=Hitos_Temp(dia+1,1)+Hitos_Temp(dia+1,3)*sin((pi*Horas_Amanecer_ema(dia+1,16))/(2*Horas_Amanecer_ema(dia+1,15)));
    Temp_Linvill(malla_noche,ema)=T_s(dia+1)-((T_s(dia+1)-Hitos_Temp(dia+2,1))/log(Horas_Amanecer_ema(dia+1,17)))*log(linspace(1+1/6,Horas_Amanecer_ema(dia+1,17),length(malla_noche)));
  endfor
  dia=3287;
  malla_dia=Horas_Amanecer_ema(dia+1,11):Horas_Amanecer_ema(dia+1,13)-1;
  Temp_Linvill(malla_dia,ema)=Hitos_Temp(dia+1,1)+Hitos_Temp(dia+1,3)*sin(pi*linspace(0,Horas_Amanecer_ema(dia+1,16),length(malla_dia))/(2*Horas_Amanecer_ema(dia+1,15)));%Temperatura desde el amanecer hasta atardecer.
  T_s(dia+1)=Hitos_Temp(dia+1,1)+Hitos_Temp(dia+1,3)*sin((pi*Horas_Amanecer_ema(dia+1,16))/(2*Horas_Amanecer_ema(dia+1,15)));
  malla_noche=Horas_Amanecer_ema(dia+1,13):n_med;
  Temp_Linvill(malla_noche,ema)=T_s(dia+1)-(((T_s(dia+1)-Hitos_Temp(dia+2,1))/log(Horas_Amanecer_ema(dia+1,17)))*log(linspace(1,23+5/6-Horas_Amanecer_ema(dia,12)+1,length(malla_noche))));
endfor

nombre_archivo=['Temperaturas_Linvill.mat'];
codigo=fopen(nombre_archivo,'a');
save(nombre_archivo,'Temp_Linvill');
fclose(codigo);

endfunction

```

```
function [Temp_Wilkerson]=Wilkerson()

estaciones={'huauch','izuc','tehua','teziu','utt'};
load('C:\Users\edu_p\OneDrive - Benemérita Universidad Autónoma de Puebla\Tesis\Base de datos de temperaturas Puebla para tesis\Base Datos Clima 2 - Puebla\MATLAB\Ecuaciones_tiempo\Horas_amanecer.mat');
load('C:\Users\edu_p\OneDrive - Benemérita Universidad Autónoma de Puebla\Tesis\Base de datos de temperaturas Puebla para tesis\Base Datos Clima 2 - Puebla\MATLAB\MINMAX.mat');
n_med=144*3287;
Temp_Wilkerson=zeros(n_med,5);
for ema=1:5
  Horas_Amanecer_ema=zeros(3289,12);
  Hitos_Temp=zeros(3289,4);
```

```
for dia=1:3289
  t_rs=Horas_amanecer(dia,9*(ema-1)+1:9*(ema-1)+6);%Vector con horas, minutos y segundos de la hora del amanecer y atardecer.
  Horas_Amanecer_ema(dia,1:6)=t_rs;
  Horas_Amanecer_ema(dia,6)=t_rs(1)+t_rs(2)/60+t_rs(3)/3600;%Tiempo del amanecer, en horas, modulo un dia (entre 0 y 24).
  Horas_Amanecer_ema(dia,7)=(dia-2)*144+6*t_rs(1)+ceil(t_rs(2)/10);%Posicion justo despues del amanecer.
  if t_rs(4)<=6
    hora_at=t_rs(4)+24;
  else
    hora_at=t_rs(4);
  endif
  Horas_Amanecer_ema(dia,8)=hora_at+t_rs(5)/60+t_rs(6)/3600;%Tiempo del atardecer, en horas, modulo un dia (entre 0 y 24)
  Horas_Amanecer_ema(dia,9)=(dia-2)*144+6*hora_at+ceil(t_rs(5)/10);%Posicion justo despues del atardecer.
  Horas_Amanecer_ema(dia,10)=Horas_Amanecer_ema(dia,8)-Horas_Amanecer_ema(dia,6); %ts_tr
  Horas_Amanecer_ema(dia,11)=pi*(Horas_Amanecer_ema(dia,10)-2)/Horas_Amanecer_ema(dia,10); %tau en la formula
  if (dia>1)&&(dia<3289)
    Hitos_Temp(dia,1)=MINMAX(dia-1,4*ema-3);%Temperatura minima.
    Hitos_Temp(dia,2)=MINMAX(dia-1,4*ema-2);%Temperatura maxima.
    Hitos_Temp(dia,3)=(Hitos_Temp(dia,2)-Hitos_Temp(dia,1));%T_max-T_min.
    Hitos_Temp(dia,4)=Hitos_Temp(dia,1)+Hitos_Temp(dia,3)*sin(Horas_Amanecer_ema(dia,11)); %b_k
    Horas_Amanecer_ema(dia,12)=24+Horas_Amanecer_ema(dia,6)+2-Horas_Amanecer_ema(dia-1,8); %t_rk+1-ts+2
  endif
endfor
Horas_Amanecer_ema(3289,12)=Horas_Amanecer_ema(3289,6)+2-Horas_Amanecer_ema(3288,8);
Horas_Amanecer_ema(1,12)=NaN;
Hitos_Temp(1,1:4)=Hitos_Temp(3288,1:4);%El dia primero se toma igual al ultimo real.
Hitos_Temp(3289,1:4)=Hitos_Temp(2,1:4);%El dia ultimo se toma igual al primero real.

malla_noche=1:Horas_Amanecer_ema(2,7)+11; %en el primer dia hay 3 minutos que deben corresponder al dia (por el horario UTC, el atardecer empieza a las 00:03) por simplicidad se va a extender la noche 3 minutos
Temp_Wilkerson(malla_noche,ema)=((Hitos_Temp(2,1)-Hitos_Temp(1,4))/(Horas_Amanecer_ema(2,12)))*linspace(24-Horas_Amanecer_ema(1,8),Horas_Amanecer_ema(2,12),length(malla_noche))+Hitos_Temp(1,4);
for dia=1:3286
  malla_dia=Horas_Amanecer_ema(dia+1,7)+12:Horas_Amanecer_ema(dia+1,9)-1;
```

```
    Temp_Wilkerson(malla_dia,ema)=Hitos_Temp(dia+1,1)+Hitos_Temp(dia+1,3)*sin(pi*linspace(0,Horas_Amanecer_ema(dia,10)-2,length(malla_dia))/Horas_Amanecer_ema(dia+1,10));%Temperatura desde el amanecer +2 hasta atardecer.
    malla_noche=Horas_Amanecer_ema(dia+1,9):Horas_Amanecer_ema(dia+2,7)+12-1;
    Temp_Wilkerson(malla_noche,ema)=((Hitos_Temp(dia+2,1)-Hitos_Temp(dia+1,4))/(Horas_Amanecer_ema(dia+2,12)))*linspace(0,Horas_Amanecer_ema(dia+2,12),length(malla_noche))+Hitos_Temp(dia+1,4);
  endfor
  dia=3287;
  malla_dia=Horas_Amanecer_ema(dia+1,7)+12:Horas_Amanecer_ema(dia+1,9)-1;
  Temp_Wilkerson(malla_dia,ema)=Hitos_Temp(dia+1,1)+Hitos_Temp(dia+1,3)*sin(pi*linspace(0,Horas_Amanecer_ema(dia,10)-2,length(malla_dia))/Horas_Amanecer_ema(dia+1,10)); %Temperatura desde el amanecer +2 hasta atardecer.
  malla_noche=Horas_Amanecer_ema(dia+1,9):n_med;
  Temp_Wilkerson(malla_noche,ema)=((Hitos_Temp(dia+2,1)-Hitos_Temp(dia+1,4))/(Horas_Amanecer_ema(dia+2,12)))*linspace(0,(23+5/6-Horas_Amanecer_ema(dia+1,8)),length(malla_noche))+Hitos_Temp(dia+1,4);
endfor

nombre_archivo=['Temperaturas_Wilkerson.mat'];
codigo=fopen(nombre_archivo,'a');
save(nombre_archivo,'Temp_Wilkerson');
fclose(codigo);

endfunction

```

A.3. Análisis exploratorio

```
Nombres_EMA={'huauch','izuc','tehua','teziu','utt'};
dias_meses=[31,28,31,30,31,30,31,31,30,31,30,31];
DirActual=pwd;

for k=1:5

  ema=Nombres_EMA{k};
  Nombre_archivo=[DirActual,sprintf('/PERIODOS DIAS COMPLETOS/periodos_seleccionados_completos_%s.mat',ema)];
  load(Nombre_archivo)

  for j=1:size(PERIODOS,1)

    dia_f=PERIODOS(j,8);
    mes_f=PERIODOS(j,7);
    ano_f=PERIODOS(j,6);

    if rem(ano_f,4)==0 %si el año es bisiesto feb tiene 29 dias, si no 28
      dias_meses(2)=29;
```

```
    else
      dias_meses(2)=28;
    endif

    if !(PERIODOS(j,3)==1) %quiero que cambie estos valores solamente si no es dia 1ero
      %calcular cuantos dias faltan para el sig mes, depende del mes.
      mes=PERIODOS(j,2); %extraer el mes
      d_r=dias_meses(mes)-PERIODOS(j,3)+1; %dias restantes
      dat_r=144*d_r; %datos restantes
      PERIODOS(j,11)=PERIODOS(j,11)+dat_r;
      PERIODOS(j,3)=1;
      PERIODOS(j,2)=PERIODOS(j,2)+1;
    endif


    if !(PERIODOS(j,8)==dias_meses(mes_f)) %quiero que cambie estos valores solamente si no es dia ultimo
      if !(mes_f-1==0) %si no es enero
        dat1_r=144*dia_f; %numero de datos que hay que restar
        PERIODOS(j,7)=PERIODOS(j,7)-1; %mes anterior
        PERIODOS(j,8)=dias_meses(mes_f-1);   %numero final de mes anterior
        PERIODOS(j,12)=PERIODOS(j,12)-dat1_r;
      endif
    endif

    PERIODOS(j,13)=(PERIODOS(j,12)-PERIODOS(j,11)+1)/144;
    if (mes_f-1==0 && dia_f<31)
      PERIODOS(j,13)=3;
    endif

  endfor

  for h=size(PERIODOS,1):-1:1
    if PERIODOS(h,13)<27
      PERIODOS(h,:)=[];
    endif
  endfor

  nombre_archivo=['periodos_meses_completitos_',ema,'.txt']; %se guarda el archivo correspondiente al EMA txt
  codigo=fopen(nombre_archivo,'a');
  save(nombre_archivo,'PERIODOS');
  fclose(codigo);

  nombre_archivo=['periodos_meses_completitos_',ema,'.mat']; %se guarda el archivo correspondiente al EMA mat
  codigo=fopen(nombre_archivo,'a');
  save(nombre_archivo,'PERIODOS');
  fclose(codigo);

endfor
```

```
function []=histogramas_tol()

ema={'huauch','izuc','tehua','teziu','utt'};
nfig=0;
nhist=0;
Num_periodos=[];
DirActual=pwd;
Nombre_dir_salida=[DirActual,'\GRAFICACION\hist_tolerancia'];


for j=1:5

  Nombre_arch_periodos=[DirActual,'/PERIODOS/PERIODOS SELECCIONADOS FINALES/'];
  Nombre_arch_periodos=[Nombre_arch_periodos,sprintf('%s_periodos.txt',ema{j})];
  Nombre_arch_temp=[DirActual,'/ARCHIVOS MAT TEMPERATURA'];
  Nombre_arch_temp=[Nombre_arch_temp,sprintf('/BDC2_%s_',ema{j})];
  load(Nombre_arch_periodos)
  Num_periodos=[Num_periodos,rows(PERIODOS)];

  for k=1:Num_periodos(j)

    deltaT=[];
    long_periodo=PERIODOS(k,13);
    anho=PERIODOS(k,1);
    Nombre_archivo=[Nombre_arch_temp,sprintf('%d',anho),'.mat'];
    load(Nombre_archivo)
    temps=DATOSCLIMA(PERIODOS(k,11):PERIODOS(k,12),6);
    deltaT=abs(temps(2:end)-temps(1:end-1));

    mu=max(deltaT);
    bars=0:0.2:ceil(mu);
    ++nhist;
    bincounts=histc(deltaT,bars);
    figure(nhist)%,'visible','off')
    bar(bars,bincounts,"histc");
    grid on
    xlim([0,ceil(mu)+0.2])
    xticks(bars)
    saveas(nhist,fullfile(Nombre_dir_salida,sprintf('hist_%s_periodo%d',ema{j},k
    ↪  )))
    close(figure)
    %por qué el eje de las x en los histogramas no termina con el valor más
    ↪  alto?
  end
end
```

```

function []=graficaModelos()

estaciones={'huauch','izuc','tehua','teziu','utt'};
n_med=473328;
n_periodos=[6,7,15,5,10];
```

```
dias_mes=[31,28,31,30,31,30,31,31,30,31,30,31];
labels={'0','2','4','6','8','10','12','14','16','18','20','22','24','26','28','30','32','34','36','38','40','42','44','46','48'};
medxuni=144;
load('C:/Users/edu_p/OneDrive - Benemérita Universidad Autónoma de Puebla/Tesis/Datos/Temperaturas_Linvill.mat')
load('C:/Users/edu_p/OneDrive - Benemérita Universidad Autónoma de Puebla/Tesis/Datos/Temperaturas_deWit.mat')
load('C:/Users/edu_p/OneDrive - Benemérita Universidad Autónoma de Puebla/Tesis/Datos/Temperaturas_Wilkerson.mat')
load('C:/Users/edu_p/OneDrive - Benemérita Universidad Autónoma de Puebla/Tesis/Datos/temperatura_interpolada.mat')

graphics_toolkit('qt')
pantalla=get(0,'screensize');
pantalla_O=pantalla(1);
pantalla_S=pantalla(2);
pantalla_ancho=pantalla(3);
pantalla_alto=pantalla(4);
Ancho_linea=1;
Tam_letra=13;


tic


for ema=1:5
  hitos_periodos{ema}=[];
  nfig=ema;
  figure(nfig,...
  'position',pantalla,...
  'visible','off');
  hold on
  m=[];
  M=[];
  handle=zeros(1,5);
  for per=1:n_periodos(ema)
    archivo=['C:/Users/edu_p/OneDrive - Benemérita Universidad Autónoma de Puebla/Tesis/Datos/Temperatura con lineas rectas'];
    load(fullfile(archivo,sprintf('temp_mod_%s_periodo%d',estaciones{ema},per)))
    dato_in=0;
    for anho=2010:(TEMP(1,1)-1)
      if (anho==2012)||(anho==2016)
        dato_in=dato_in+366;
      else
        dato_in=dato_in+365;
      end
    end
    for mes=1:(TEMP(1,2)-1)
      if (mes==2)&&((TEMP(1,1)==2012)||(TEMP(1,1)==2016))
        dato_in=dato_in+dias_mes(mes)+1;
      else
```

```
        dato_in=dato_in+dias_mes(mes);
      end
    end
    dato_in=dato_in+TEMP(1,3)-1; %numero de dias antes del dia de inicio del periodo
    dato_in=dato_in*medxuni; %pasamos a numero de muestras esta cantidad de dias
    dato_in=dato_in+1; %añadimos uno para pasar a la muestra inicial del periodo
    dato_fin=dato_in+rows(TEMP)-1; %1-jan-2010 es el dato 1
    hitos_periodos{ema}=[hitos_periodos{ema};dato_in,dato_fin];
    if per==1
      handle(1)=plot(hitos_periodos{ema}(per,1)-1:hitos_periodos{ema}(per,2)-1,TEMP(:,6),'b','LineWidth',1.3,'Displayname','Procesada');
    else
      plot(hitos_periodos{ema}(per,1)-1:hitos_periodos{ema}(per,2)-1,TEMP(:,6),'b','LineWidth',1.3)
    endif
    m=[m,min(TEMP(:,6))];
    M=[M,max(TEMP(:,6))];
  endfor
  handle(2)=plot(0:n_med-1,Temp_deWit(:,ema),'k','LineWidth',1.3,'Displayname','deWit');
  handle(3)=plot(0:n_med-1,Temp_Linvill(:,ema),'r','LineWidth',1.3,'Displayname','Linvill');
  handle(4)=plot(0:n_med-1,Temp_Wilkerson(:,ema),'y','LineWidth',1.3,'Displayname','Wilkerson');
  handle(5)=plot(0:n_med-1,TEMP_INTERP(:,ema),'g','LineWidth',1.3,'Displayname','Interpolacion');
  legend(handle);
  m=[m,min(Temp_deWit),min(TEMP_INTERP)];
  M=[M,max(Temp_deWit),max(TEMP_INTERP)];
  m=min(m)-0.1;
  M=max(M)+0.1;
  for bidia=1:1643

    axis([(bidia-1)*288,bidia*288-1,m,M])
    set(gca,'FontSize',8)
    xticks(linspace((bidia-1)*288,bidia*288-1,25))
    xticklabels(labels)
    xlabel('Tiempo (horas)',...
    'fontweight','bold',...
    'fontsize',Tam_letra,...
    'FontName','Times new roman');
    ylabel('Temperatura (^\circ Celsius)',...
    'interpreter','tex',...
    'fontweight','bold',...
    'fontsize',Tam_letra,...
    'FontName','Times new roman');

    flag=0;

    for per=1:n_periodos(ema)
```

```
      if ((bidia-1)*288>=hitos_periodos{ema}(per,1) && bidia*288-1 <=hitos_periodos{ema}(per,2)) %se esta graficando un periodo escogido
        print(nfig,sprintf('./Prueba/comparacion_modelos_%s_bi-dia%d_tri.png',estaciones{ema},bidia))
        flag=1
        break
      endif
    endfor
    if flag==0
      print(nfig,sprintf('./Prueba/comparacion_modelos_%s_bi-dia%d.png',estaciones{ema},bidia))
      disp('LISTO')
    endif
  endfor
  axis([bidia*288,n_med-1,m,M])
  xticks(linspace(bidia*288,n_med-1,13))
  xticklabels(labels(1:13))
  print(nfig,sprintf('./Prueba/comparacion_modelos_%s_bi-dia%d.png',estaciones{ema},bidia))
endfor %ema

Tiempo=toc
```

A.4. Limpieza de datos

```
function []=temperature_mod()

xline = @(xval, varargin) line([xval xval], ylim, varargin{:});
ema={'huauch','izuc','tehua','teziu','utt'};
labels={'0','2','4','6','8','10','12','14','16','18','20','22','24','26','28','30','32','34','36','38','40','42','46','48'};
tol=[2];
numdias=2;
subdiv=numdias*24*6;
nfig=0;

Num_periodos=[];
DirActual=pwd;
Nombre_dir_salida=[DirActual,'\\Graficas_filtro'];
barra_prog=waitbar(0,"Corrigiendo temperaturas");

for j=1:5 %corre sobre cada EMA

  Nombre_archivo=[DirActual,'\\PERIODOS SELECCIONADOS FINALES\\'];
  Nombre_archivo=[Nombre_archivo,sprintf('%s_periodos.txt',ema{j})];
  Nombre_archivo2=[DirActual,sprintf('\\BDC2_%s_',ema{j})];
  load(Nombre_archivo)
  Num_periodos=[Num_periodos,rows(PERIODOS)];

  for k=1:Num_periodos(j) %corre sobre cada periodo de cada EMA
```

```
25
26      longit=PERIODOS(k,13)*6*24;
27      anho=PERIODOS(k,1);
28      Nombre_archivo3=[Nombre_archivo2,sprintf('%d',anho),'.mat'];
29      load(Nombre_archivo3) %se llama DATOSCLIMA la variable
30      temp=DATOSCLIMA(PERIODOS(k,11):PERIODOS(k,12),6);
31      fechas_temp=DATOSCLIMA(PERIODOS(k,11):PERIODOS(k,12),1:5);
32      temp_mod=temp;
33      deltaT=abs(temp(2:end)-temp(1:end-1)); %se obtiene un vector vertical de
        ↪  diferencias de temperaturas
34      n=0;
35      T_pos=[];
36
37      for deltaT_i=1:length(deltaT)   %deltaT son diferencias de temperatura
        ↪  c/10mn
38        if deltaT(deltaT_i)>=tol(1)   %hay una tolerancia por cada periodo
39          ++n;
40          %T_jumps(n)=deltaT(deltaT_i); %luego en T_jumps no se conoce cada cuanto
            ↪  tiempo hay datos %%%¿Necesito T_jumps?%%%
41          T_pos(n)=deltaT_i;            %sin embargo, en Tpos se guarda la
            ↪  posicion del vector en deltaT que corresponde
42        endif                          %si quiero saber de donde viene el T_jump
          ↪  en delta_T veo que posicion en T_jump estoy y la busco en Tpos
43      endfor                       %luego, Tpos me dice la posicion del intervalo
        ↪  en deltaT
44                                   %la separacion entre saltos en horas esta dada
                                     ↪  por la diferencia en su posicion en
                                     ↪  deltaT*10*6
45
46      L_pos=length(T_pos);
47      a=1;
48      b=a;
49      lista_par=[];
50
51      while a<L_pos
52        centinela=1;
53        while centinela
54          if b+1<=L_pos
55            if T_pos(b+1)-T_pos(b)<=12
56              b=b+1;
57            else
58              centinela=0;
59            endif
60          else
61            centinela=0;
62          endif
63        endwhile
64        if b>a
65          lista_par=[lista_par;a,b];
66        endif
67        a=b+1;
68        b=a;
```

```
    endwhile

    for mu=1:rows(lista_par)
      l=T_pos(lista_par(mu,1));
      m=T_pos(lista_par(mu,2));
      prom_lm=sum(temp(l:m+1))/(m+2-l);
      if abs(prom_lm-(temp(l)+temp(m)/2))>=1
        temp_mod(l:m+1)=temp(l)+(temp(m+1)-temp(l)).*(0:m+1-l)./(m+1-l);
      endif
    endfor
    if sum(temp_mod!=temp)>0
      fprintf("son distintos: %d , %d .\n",j,k)
    endif
    aux=mod(longit,subdiv);
    num_sub=(longit-aux)/subdiv; %numero subperiodos

    for z=1:num_sub
      nfig=nfig+1;
      figure(nfig,'visible','off')
      hold on
      plot(1:length(temp_mod),temp_mod,'b','LineWidth',1)
      plot(1:length(temp),temp,'g','LineWidth',1)
      axis([(z-1)*subdiv,z*subdiv,min(temp(1+(z-1)*subdiv:z*subdiv)),max(temp(1+(z-1)*subdiv:z*subdiv))])
      xticks(linspace((z-1)*subdiv,z*subdiv,24))
      xticklabels(labels)
      print(nfig,sprintf('%s_periodo%0d_subperiodo%0d.png',ema{j},k,z))
      %print(nfig,fullfile(Nombre_dir_salida,sprintf('%s_periodo%0d_subperiodo%0d.png',ema{j},k,z)))
      close(nfig)
    endfor
    if aux>0
      nfig=nfig+1;
      figure(nfig,'visible','off')
      hold on
      plot(0:length(temp_mod)-1,temp_mod,'b','LineWidth',1)
      plot(0:length(temp)-1,temp,'g','LineWidth',1)
      axis([num_sub*subdiv,longit,min(temp(num_sub*subdiv:longit)),max(temp(num_sub*subdiv:longit))])
      xticks(linspace(num_sub*subdiv,longit,13))
      labelsextra={'0','2','4','6','8','10','12','14','16','18','20','22','24'};
      xticklabels(labelsextra)
      print(nfig,sprintf('%s_periodo%0d_subperiodo%0d.png',ema{j},k,num_sub+1))
      close(nfig)
      %print(nfig,fullfile(Nombre_dir_salida,sprintf('%s_periodo%0d_subperiodo%0d.png',ema{j},k,num_sub+1)))
    endif

      TEMP=[fechas_temp,temp_mod];
      barra_prog=waitbar(k/Num_periodos(j),barra_prog,sprintf("Corrigiendo temperaturas: %f%%.",100*k/Num_periodos(j)));
```

```
      nombre_archivo=['temp_mod_',ema{j},sprintf('_periodo%0d',k),'.mat']; %se guarda el archivo correspondiente al EMA txt
      codigo=fopen(nombre_archivo,'a');
      save(nombre_archivo,'TEMP');
      fclose(codigo);
  endfor %numperiodos

end
close(barra_prog)
```

A.5. Ajuste trigonométrico

```
function []=ajuste_trig4(N,M)

if nargin<2
  N=10;
  M=5;
end

Nombre_dir_salida=[pwd,'\GRAFICACION\Graficas_interpoladas_subperiodos'];

Nombre_dir_salida2=[pwd,'\Temperatura con lineas rectas'];

estaciones={'huauch','izuc','tehua','teziu','utt'};
labels={'0','2','4','6','8','10','12','14','16','18','20','22','24','26','28','30','32','34','36','38','40','42','44','46','48'};
labelsextra={'0','2','4','6','8','10','12','14','16','18','20','22','24'};
dias_mes=[31,28,31,30,31,30,31,31,30,31,30,31];
%dias_mes_bi=[31,29,31,30,31,30,31,31,30,31,30,31];

n_periodos=[6,7,15,5,10];
n_dias=3287; %numero de dias en 9 años (2010-2018)
n_med=473328; %numero total de mediciones
wa=1/365.25; %frecuencia anual
wd=1; %frecuencia diaria, es igual a 1 ya que el tiempo está en días

medxuni=24*6; %numero de mediciones por unidad de tiempo
ventanaxdias=2; %longitud de la ventana en unidades de tiempo
long_ventana=ventanaxdias*medxuni; %longitud de la ventana en numero de mediciones
malla_temp=0:(n_med-1); %malla temporal
malla_temp=malla_temp/medxuni; %unidad de tiempo: dia

A=zeros(n_med,N*2+M*2+1); %matriz con los valores de las funciones trigonometricas en la malla temporal
A(:,1)=1;
for j=1:N
  malla=2*pi*j*wa*malla_temp;
  A(:,j+1)=cos(malla);
  A(:,N+j+1)=sin(malla);
```

```
endfor
for k=1:M
  malla=2*pi*k*wd*malla_temp;
  A(:,N*2+1+k)=cos(malla);
  A(:,N*2+1+M+k)=sin(malla);
endfor
clear malla
TEMP_INTERP=zeros(n_med,5);

for ema=1:5
  hitos_periodos{ema}=[];
  temp_periodos=[];
  A_periodos=[];

  for per=1:n_periodos(ema)
    load(fullfile(Nombre_dir_salida2,sprintf('temp_mod_%s_periodo%d',estaciones{ema},per))) %se llama TEMP

    dato_inicial=0;
    for anho=2010:(TEMP(1,1)-1)
      if (anho==2012)||(anho==2016)
        dato_inicial=dato_inicial+366;
      else
        dato_inicial=dato_inicial+365;
      end
    end
    for mes=1:(TEMP(1,2)-1)
      if (mes==2)&&((TEMP(1,1)==2012)||(TEMP(1,1)==2016))
        dato_inicial=dato_inicial+dias_mes(mes)+1;
      else
        dato_inicial=dato_inicial+dias_mes(mes);
      end
    end
    dato_inicial=dato_inicial+TEMP(1,3)-1; %numero de dias antes del dia de inicio del periodo
    dato_inicial=dato_inicial*medxuni; %pasamos a numero de muestras esta cantidad de dias
    dato_inicial=dato_inicial+1; %añadimos uno para pasar a la muestra inicial del periodo

%    inicio=TEMP(1,:);
%    if inicio(1)>2016
%      dato_inicial=((inicio(1)-2010)*365+2)*medxuni+(sum(dias_mes(1:(inicio(2)-1))))*medxuni+(inicio(3)-1)*medxuni+1;
%    elseif inicio(1)==2016
%      dato_inicial=((inicio(1)-2010)*365+1)*medxuni+(sum(dias_mes_bi(1:(inicio(2)-1))))*medxuni+(inicio(3)-1)*medxuni+1;
%    elseif inicio(1)>2012
%      dato_inicial=((inicio(1)-2010)*365+1)*medxuni+(sum(dias_mes(1:(inicio(2)-1))))*medxuni+(inicio(3)-1)*medxuni+1;
%    elseif inicio(1)==2012
```

```
%       dato_inicial=(inicio(1)-2010)*365*medxuni+(sum(dias_mes_bi(1:(inicio(2)-1))))*medxuni+(inicio(3)-1)*medxuni+1;
%     else
%       dato_inicial=(inicio(1)-2010)*365*medxuni+(sum(dias_mes(1:(inicio(2)-1)))*medxuni+(inicio(3)-1)*medxuni+1;
%     endif

    dato_final=dato_inicial+rows(TEMP)-1;
    hitos_periodos{ema}=[hitos_periodos{ema};dato_inicial,dato_final];%indices inicial y final del periodo en la malla temporal
    temp_periodos=[temp_periodos;TEMP(:,6)]; %temperaturas unicamente en los periodos

    A_periodos=[A_periodos;A(dato_inicial:dato_final,:)]; %Matriz de evaluaciones de las funciones trigonometricas unicamente en los periodos
  endfor

  A_pseudoinv=pinv(A_periodos); %Matriz pseudoinversa de las funciones trigonometricas evaluadas unicamente en los periodos
  coeficientes=A_pseudoinv*temp_periodos; %Coeficientes de las funciones trigonometricas que ajustan por minimos cuadrados a la temperatura en los periodos
  TEMP_interp=A*coeficientes; %temperatura interpolada para los 9 años
  TEMP_INTERP(:,ema)=TEMP_interp;

% GRAFICACION

  nfig=ema;
  figure(nfig,'visible','off')
  hold on

  for per=1:n_periodos(ema)
    load(fullfile(Nombre_dir_salida2,sprintf('temp_mod_%s_periodo%d',estaciones{ema},per))) %se llama TEMP

    num_mues_per=hitos_periodos{ema}(per,2)-hitos_periodos{ema}(per,1)+1; %numero de muestras en el periodo
    res_sub=mod(num_mues_per,long_ventana); %resto al dividir subperiodos
    num_sub=(num_mues_per-res_sub)/long_ventana; %numero subperiodos

    plot(malla_temp(hitos_periodos{ema}(per,1):hitos_periodos{ema}(per,2)),TEMP(:,6),'b','LineWidth',1)
    plot(malla_temp(hitos_periodos{ema}(per,1):hitos_periodos{ema}(per,2)),TEMP_interp(hitos_periodos{ema}(per,1):hitos_periodos{ema}(per,2)),'g','LineWidth',1)

    for z=1:num_sub
      malla_subper=(hitos_periodos{ema}(per,1)+(z-1)*long_ventana):(hitos_periodos{ema}(per,1)+z*long_ventana-1);
      ventana=[TEMP(1+(z-1)*long_ventana:z*long_ventana,6);TEMP_interp(malla_subper)];
```

```
      m=min(ventana)-.1;
      M=max(ventana)+.1;
      axis([malla_temp(malla_subper(1)),malla_temp(malla_subper(end)),m,M])
      xticks(linspace(malla_temp(malla_subper(1)),malla_temp(malla_subper(end)),25))
      xticklabels(labels)
      saveas(nfig,sprintf('./GRAFICACION/Graficas_interpoladas_subperiodos/%s_periodo%0d_subperiodo%0d_InterpTrig.png',estaciones{ema},per,z))
    endfor
    if res_sub>0
      malla_subper=(hitos_periodos{ema}(per,1)+num_sub*long_ventana):hitos_periodos{ema}(per,2);
      ventana=[TEMP(1+num_sub*long_ventana:num_mues_per,6);TEMP_interp(malla_subper)];
      m=min(ventana)-.1;
      M=max(ventana)+.1;
      axis([malla_temp(malla_subper(1)),malla_temp(malla_subper(end)),m,M])
      xticks(linspace(malla_temp(malla_subper(1)),malla_temp(malla_subper(1))+ventanaxdias,13))
      xticklabels(labelsextra)
      saveas(nfig,sprintf('./GRAFICACION/Graficas_interpoladas_subperiodos/%s_periodo%0d_subperiodo%0d_InterpTrig.png',estaciones{ema},per,num_sub+1))
    endif
  endfor%periodos

  close(nfig)

endfor%ema

dias_window=120; %aproximadamente 4 meses.
div=ceil(n_dias/dias_window);
nombre_archivo=['temperatura_interpolada.mat'];
codigo=fopen(nombre_archivo,'a');
save(nombre_archivo,'TEMP_INTERP');
fclose(codigo);
%{
for ema=1:5
  nfig=5+ema;
  figure(nfig,'visible','off')
  hold on

  m=min(TEMP_INTERP(:,ema));
  M=max(TEMP_INTERP(:,ema));
  for per=1:n_periodos(ema)
    load(sprintf('temp_mod_%s_periodo%d',estaciones{ema},per))
    m=min([m;min(TEMP(:,6))]);
    M=max([M;max(TEMP(:,6))]);
    plot(malla_temp(hitos_periodos{ema}(per,1):hitos_periodos{ema}(per,2)),TEMP(:,6),'b','LineWidth',1)
  endfor%periodos
  plot(malla_temp,TEMP_INTERP(:,ema),'g','LineWidth',1)

```

```
  for window=1:div %4 meses (120 dias) graficados
    axis([dias_window*(window-1)+1,dias_window*window,m-1,M+1])
%    axis([(round(n_med/(144*div))-(1/144))*(window-1),(round(n_med/(144*div))-(1/144))*window,-10,40])
    cd Graficas_interpoladas
    print(nfig,sprintf('Global_%s_InterpTrig_%d.png',estaciones{ema},window))
    cd ..

  endfor
  close(nfig)

endfor%ema
%}
endfunction
```

A.6. Comparación modelos

```
function [MINMAX_resumen]=recuperar_max()

dia=144;
estaciones={'huauch','izuc','tehua','teziu','utt'};

load('temperatura_interpolada.mat') %TEMP_INTERP

MINMAX=zeros(3287,20);

for i=1:5
for j=1:3287
  [m1,m2]=min(TEMP_INTERP(dia*(j-1)+1:dia*j,i));
  [M1,M2]=max(TEMP_INTERP(dia*(j-1)+1:dia*j,i));
  MINMAX(j,4*i-3)=m1;%Valor de la minima en el dia.
  MINMAX(j,4*i-2)=M1;%Valor de la maxima en el dia.
  MINMAX(j,4*i-1)=m2;%Posicion (entre 1 y 144) de la minima en el dia.
  MINMAX(j,4*i)=M2;%Posicion (entre 1 y 144) de la maxima en el dia.
endfor
endfor

MINMAX_resumen=[];

for i=1:5
%  disp(estaciones{i})
  v=(MINMAX(:,4*i-1)-1)/6;%Convertimos las posiciones de minima a horas.
  min_media=mean(v);%Hora promedio (entre 0 y 23 + 5/6) en la que se da la minima.
  min_std=std(v);%Desviacion estandar de las horas de temperatura minima.
  v=(MINMAX(:,4*i)-1)/6;%Convertimos las posiciones de maxima a horas.
  max_media=mean(v);%Hora promedio (entre 0 y 23 + 5/6) en la que se da la maxima.
  max_std=std(v);%Desviacion estandar de las horas de temperatura maxima.
  MINMAX_resumen=[MINMAX_resumen,[min_media;min_std;max_media;max_std]];
```

```
endfor

nombre_archivo=['MINMAX.mat']; %se guarda el archivo correspondiente al EMA txt
codigo=fopen(nombre_archivo,'a');
save(nombre_archivo,'MINMAX','MINMAX_resumen');
fclose(codigo);

endfunction
```

```
unction []=tabla_errores()

load('C:/Users/edu_p/OneDrive - Benemérita Universidad Autónoma de Puebla/Tesis/Datos/temperatura_interpolada.mat')
load('C:/Users/edu_p/OneDrive - Benemérita Universidad Autónoma de Puebla/Tesis/Datos/Temperaturas_deWit.mat')
load('C:/Users/edu_p/OneDrive - Benemérita Universidad Autónoma de Puebla/Tesis/Datos/Temperaturas_Linvill.mat')
load('C:/Users/edu_p/OneDrive - Benemérita Universidad Autónoma de Puebla/Tesis/Datos/Temperaturas_Wilkerson.mat')

format long

diff_deWit=TEMP_INTERP-Temp_deWit;
errabs1_deWit=norm(diff_deWit,1,'cols');
errabs2_deWit=norm(diff_deWit,2,'cols');
errabsinfty_deWit=norm(diff_deWit,inf,'cols');
diff_Wilkerson=TEMP_INTERP-Temp_Wilkerson;
errabs1_Wilkerson=norm(diff_Wilkerson,1,'cols');
errabs2_Wilkerson=norm(diff_Wilkerson,2,'cols');
errabsinfty_Wilkerson=norm(diff_Wilkerson,inf,'cols');
diff_Linvill=TEMP_INTERP-Temp_Linvill;
errabs1_Linvill=norm(diff_Linvill,1,'cols');
errabs2_Linvill=norm(diff_Linvill,2,'cols');
errabsinfty_Linvill=norm(diff_Linvill,inf,'cols');

ABS_errors=[errabs1_deWit(1),errabs2_deWit(1),errabsinfty_deWit(1),errabs1_deWit(2),errabs2_deWit(2),errabsinfty_deWit(2),...
errabs1_deWit(3),errabs2_deWit(3),errabsinfty_deWit(3),errabs1_deWit(4),errabs2_deWit(4),errabsinfty_deWit(4)...
,errabs1_deWit(5),errabs2_deWit(5),errabsinfty_deWit(5);...
errabs1_Wilkerson(1),errabs2_Wilkerson(1),errabsinfty_Wilkerson(1),errabs1_Wilkerson(2),errabs2_Wilkerson(2),errabsinfty_Wilkerson(2),...
errabs1_Wilkerson(3),errabs2_Wilkerson(3),errabsinfty_Wilkerson(3),errabs1_Wilkerson(4),errabs2_Wilkerson(4),errabsinfty_Wilkerson(4)...
,errabs1_Wilkerson(5),errabs2_Wilkerson(5),errabsinfty_Wilkerson(5);...
errabs1_Linvill(1),errabs2_Linvill(1),errabsinfty_Linvill(1),errabs1_Linvill(2),errabs2_Linvill(2),errabsinfty_Linvill(2),...
errabs1_Linvill(3),errabs2_Linvill(3),errabsinfty_Linvill(3),errabs1_Linvill(4),errabs2_Linvill(4),errabsinfty_Linvill(4)...
,errabs1_Linvill(5),errabs2_Linvill(5),errabsinfty_Linvill(5)];
```

```
file_id=fopen('Matriz_erroresabsolutos.txt','w')
save('Matriz_erroresabsolutos.txt','ABS_errors');
fclose(file_id)

errabs1_deWit=errabs1_deWit./norm(TEMP_INTERP,1,'cols')
errabs2_deWit=errabs2_deWit./norm(TEMP_INTERP,2,'cols')
errabsinfty_deWit=errabsinfty_deWit./norm(TEMP_INTERP,inf,'cols')

errabs1_Wilkerson=errabs1_Wilkerson./norm(TEMP_INTERP,1,'cols')
errabs2_Wilkerson=errabs2_Wilkerson./norm(TEMP_INTERP,2,'cols')
errabsinfty_Wilkerson=errabsinfty_Wilkerson./norm(TEMP_INTERP,inf,'cols')

errabs1_Linvill=errabs1_Linvill./norm(TEMP_INTERP,1,'cols')
errabs2_Linvill=errabs2_Linvill./norm(TEMP_INTERP,2,'cols')
errabsinfty_Linvill=errabsinfty_Linvill./norm(TEMP_INTERP,inf,'cols')

REL_errors=[errabs1_deWit(1),errabs2_deWit(1),errabsinfty_deWit(1),errabs1_deWit(2),errabs2_deWit(2),errabsinfty_deWit(2),...
errabs1_deWit(3),errabs2_deWit(3),errabsinfty_deWit(3),errabs1_deWit(4),errabs2_deWit(4),errabsinfty_deWit(4)...
,errabs1_deWit(5),errabs2_deWit(5),errabsinfty_deWit(5);...
errabs1_Wilkerson(1),errabs2_Wilkerson(1),errabsinfty_Wilkerson(1),errabs1_Wilkerson(2),errabs2_Wilkerson(2),errabsinfty_Wilkerson(2),...
errabs1_Wilkerson(3),errabs2_Wilkerson(3),errabsinfty_Wilkerson(3),errabs1_Wilkerson(4),errabs2_Wilkerson(4),errabsinfty_Wilkerson(4)...
,errabs1_Wilkerson(5),errabs2_Wilkerson(5),errabsinfty_Wilkerson(5);...
errabs1_Linvill(1),errabs2_Linvill(1),errabsinfty_Linvill(1),errabs1_Linvill(2),errabs2_Linvill(2),errabsinfty_Linvill(2),...
errabs1_Linvill(3),errabs2_Linvill(3),errabsinfty_Linvill(3),errabs1_Linvill(4),errabs2_Linvill(4),errabsinfty_Linvill(4)...
,errabs1_Linvill(5),errabs2_Linvill(5),errabsinfty_Linvill(5)];

file_id2=fopen('Matriz_erroresrelativos.txt','w')
save('Matriz_erroresrelativos.txt','REL_errors');
fclose(file_id2)

endfunction
```

Bibliografía

[1] Acock, B., et al. "Response of vegetation to carbon dioxide 002. The soybean crop simulator GLYCYM: Model Documentation 1982. Joint program of the US Department of Energy, Carbon Dioxide Research Division, and US Department of Agriculture." Agricultural research Service, conducted at USDA-ARS Crop Simulation Unit and Department of Agronomy, Mississippi Agricultural and Forestry Experiment Station (1983).

[2] Aitchison, P. W. "Generalized inverse matrices and their applications." International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 13.1 (1982): 99-109.

[3] Akinnubi, R. T., and M. O. Adeniyi. "Modeling of diurnal pattern of air temperature in a tropical environment: Ile-Ife and Ibadan, Nigeria." Modeling Earth Systems and Environment 3.4 (2017): 1421–1439.

[4] Alto, Barry W., and Steven A. Juliano. "Temperature effects on the dynamics of Aedes albopictus (Diptera: Culicidae) populations in the laboratory." Journal of medical entomology 38.4 (2001): 548–556.

[5] Anway, J. C., Brittain, E. G., Hunt, H. W., Innis, G. S., Parton, W. J., Rodell, C. F., & Sauer, R. H. (1972). ELM: version 1.0.

[6] Brady, Oliver J., et al. "Modelling adult Aedes aegypti and Aedes albopictus survival at different temperatures in laboratory and field settings." Parasites & vectors 6.1 (2013): 1–12.

[7] Breinl, Korbinian, and Giuliano Di Baldassarre. "Space-time disaggregation of precipitation and temperature across different climates and spatial scales." Journal of Hydrology: Regional Studies 21 (2019): 126–146.

[8] Baker, J. M., D. C. Reicosky, and D. G. Baker. "Estimating the time dependence of air temperature using daily maxima and minima: A comparison of three methods." Journal of Atmospheric and Oceanic Technology 5.6 (1988): 736–742.

[9] Carson, James E. "Analysis of soil and air temperatures by Fourier techniques." Journal of Geophysical Research 68.8 (1963): 2217–2232.

[10] Cesaraccio, Carla, et al. "An improved model for determining degree-day values from daily temperature data." International journal of biometeorology 45.4 (2001): 161–169.

[11] Conrad, Victor, and Leo Wenzel Pollak. Methods in climatology. Harvard university press, 2013.

[12] COSMOS - The SAO Encyclopedia of Astronomy. Celestial Sphere. `https://astronomy.swin.edu.au/cosmos/c/Celestial+Sphere`.

[13] Christophers, S. "Aedes aegypti (L.) the yellow fever mosquito: its life history, bionomics and structure." Aëdes aegypti (L.) the Yellow Fever Mosquito: its Life History, Bionomics and Structure. (1960).

[14] COSMOS - The SAO Encyclopedia of Astronomy. Equatorial coordinate system. `https://astronomy.swin.edu.au/cosmos/e/equatorial+coordinate+system`. Consultado en agosto 2023

[15] Da Rosa, Aldo V., and Juan Carlos Ordonez. Fundamentals of renewable energy processes. Academic Press, 2021.

[16] De Wit, Cornelis Teunis. "Simulation of assimilation, respiration and transpiration of crops." (1978).

[17] Duffie, John A., and William A. Beckman. "Solar engineering of thermal processes Wiley." New York (1980).

[18] Douma, Michael, curator. Calendars through the Ages. 2008. Institute for Dynamic Educational Development.

[19] Eaton, John Wesley, David Bateman, Søren Hauberg and Rik Wehbring (2023). GNU Octave version 8.2.0 manual: a high-level interactive language for numerical computations. `https://www.gnu.org/software/octave/doc/v8.2.0/`

[20] Elagib, Nadir Ahmed, Shamsul Haque Alvi, and Martin G. Mansell. "Day-length and extra-terrestrial radiation for Sudan: a comparative study." International Journal of Solar Energy 20.2 (1999): 93–109.

[21] Estallo, Elizabet L., et al. "Weather variability associated with Aedes (Stegomyia) aegypti (Dengue vector) oviposition dynamics in Northwestern Argentina." PLoS One 10.5 (2015): e0127820.

[22] Felber, Raphael, Sibylle Stoeckli, and Pierluigi Calanca. "Generic calibration of a simple model of diurnal temperature variations for spatial analysis of accumulated degree-days." International journal of biometeorology 62.4 (2018): 621–630.

[23] Focks, D. A., et al. "Dynamic life table model for Aedes aegypti (Diptera: Culicidae): simulation results and validation." Journal of medical entomology 30.6 (1993): 1018–1028.

[24] Gholamnia, Mehdi, et al. "Diurnal air temperature modeling based on the land surface temperature." Remote Sensing 9.9 (2017): 915.

[25] Gholamnia, Mehdi, et al. "A new method to model diurnal air temperature cycle." Theoretical and Applied Climatology 137.1 (2019): 229–238.

[26] Göttsche, Frank-M., and Folke S. Olesen. "Modelling of diurnal cycles of brightness temperature extracted from METEOSAT data." Remote Sensing of Environment 76.3 (2001): 337–348.

[27] Hatcher, D. A. "Simple formulae for Julian day numbers and calendar dates." Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society 25 (1984): 53.

[28] Idso, Sherwood B., and Ray D. Jackson. "Thermal radiation from the atmosphere." Journal of geophysical Research 74.23 (1969): 5397–5403.

[29] Iqbal, Muhammad. An introduction to solar radiation. Elsevier, 2012.

[30] Johnson, M. E., and E. A. Fitzpatrick. "The monthly mean diurnal temperature curve." Archiv für Meteorologie, Geophysik und Bioklimatologie, Serie B 25.3 (1977): 265–274.

[31] Johnson, M. E., and E. A. Fitzpatrick. "A comparison of two methods of estimating a mean diurnal temperature curve during the daylight hours." Archiv für Meteorologie, Geophysik und Bioklimatologie, Serie B 25.3 (1977): 251–263. Bioklimatol., Ser. B, 25: 251–263.

[32] Kimball, B. A., and L. A. Bellamy. "Generation of diurnal solar radiation, temperature, and humidity patterns." Energy in agriculture 5.3 (1986): 185–197.

[33] Lambrechts, Louis, et al. "Impact of daily temperature fluctuations on dengue virus transmission by Aedes aegypti." Proceedings of the National Academy of Sciences 108.18 (2011): 7460–7465.

[34] Laub, A. J. "The Moore-Penrose Pseudoinverse." Math 33A (2011).

[35] Linvill, Dale E. "Calculating chilling hours and chill units from daily maximum and minimum temperature observations." HortScience 25.1 (1990): 14–16.

[36] List, Robert J. "Smithsonian meteorological tables." Smithsonian miscellaneous collections (1951).

[37] Marco Geoestadístico Nacional, INEGI, Diciembre 2018, `https://www.inegi.org.mx/app/biblioteca/ficha.html?upc=889463674658`.

[38] McCarthy, Dennis D., and P. Kenneth Seidelmann. Time: from Earth rotation to atomic physics. Cambridge University Press, 2018.

[39] Nelson, Michael J. "Aedes aegypti: biología y ecología." (1986).

[40] Organización Panamericana De La Salud. Dengue. `https://www.paho.org/es/temas/dengue`. Consultado en septiembre 2022.

[41] Parton, William J., and Jesse A. Logan. "A model for diurnal variation in soil and air temperature." Agricultural Meteorology 23 (1981): 205–216.

[42] Pliego, Emilene Pliego, Jorge Velázquez-Castro, and Andrés Fraguela Collar. "Seasonality on the life cycle of Aedes aegypti mosquito and its statistical relation with dengue outbreaks." Applied Mathematical Modelling 50 (2017): 484–496.

[43] QGIS.org, 2023. QGIS Geographic Information System. QGIS Association. `http://www.qgis.org`.

[44] Ray, Richard D., and Svetlana Y. Erofeeva. "Long-period tidal variations in the length of day." Journal of Geophysical Research: Solid Earth 119.2 (2014): 1498–1509.

[45] Reicosky, D. C., et al. "Accuracy of hourly air temperatures calculated from daily minima and maxima." Agricultural and Forest Meteorology 46.3 (1989): 193–209.

[46] Running, Steven W., Ramakrishna R. Nemani, and Roger D. Hungerford. "Extrapolation of synoptic meteorological data in mountainous terrain and its use for simulating forest evapotranspiration and photosynthesis." Canadian Journal of Forest Research 17.6 (1987): 472–483.

[47] Rueda, L. M., et al. "Temperature-dependent development and survival rates of Culex quinquefasciatus and Aedes aegypti (Diptera: Culicidae)." Journal of medical entomology 27.5 (1990): 892–898.

[48] Sadler, E. John, and Ronald W. Schroll. "An empirical model of diurnal temperature patterns." Agronomy Journal 89.4 (1997): 542–548.

[49] Seidelmann, P. Kenneth, ed. Explanatory supplement to the astronomical almanac. University Science Books, 2006.

[50] Sena. Solar hour angle and how to calculate it. https://solarsena.com/solar-hour-angle-calculator-formula/ Abril 2021 Consultado en abril 2022

[51] Tong Y. Effect of atmospheric refraction on the times of sunrise and sunset. https://www.hko.gov.hk/en/education/astronomy-and-time/astronomy/00493-effect-of-atmospheric-refraction-on-the-times-of-sunrise-and-sunset.html. Agosto 2017.

[52] Tun-Lin, W., T. R. Burkot, and B. H. Kay. "Effects of temperature and larval diet on development rates and survival of the dengue vector Aedes aegypti in north Queensland, Australia." Medical and veterinary entomology 14.1 (2000): 31–37.

[53] University of Nebraska-Lincoln. Class Action. https://astro.unl.edu Imagen recuperada en enero 2022

[54] Waichler, Scott R., and Mark S. Wigmosta. "Development of hourly meteorological values from daily data and significance to hydrological modeling at HJ Andrews Experimental Forest." Journal of Hydrometeorology 4.2 (2003): 251–263.

[55] Walter, A. "Notes on the utilization of records from third order climatological stations for agricultural purposes." Agricultural Meteorology 4.2 (1967): 137–143.

[56] Wann, Mien, Doreen Yen, and Harvey J. Gold. "Evaluation and calibration of three models for daily cycle of air temperature." Agricultural and Forest Meteorology 34.2-3 (1985): 121–128.

[57] Wikipedia. Apsis. en.wikipedia.org/wiki/Apsis. Consultado en enero 2022.

[58] Wikipedia. Argument of periapsis. https://en.wikipedia.org/wiki/Argument_of_periapsis. Consultado en septiembre 2021.

[59] Wikipedia. Coordenadas geográficas. https://es.wikipedia.org/wiki/Coordenadas_geogr%C3%A1ficas Consultado en septiembre 2022

[60] Wikipedia Earth's Orbit https://en.wikipedia.org/wiki/Earth%27s_orbit Consultado en septiembre 2021

[61] Wikipedia. Ecliptic. https://en.wikipedia.org/wiki/Ecliptic. Consultado en octubre 2021.

[62] Wikipedia. Horizontal coordinate system. https://en.wikipedia.org/wiki/Horizontal_coordinate_system. Consultado en diciembre 2021.

[63] Wikipedia. Hour angle. https://en.wikipedia.org/wiki/Hour_angle#:~:text=Observing%20the%20Sun%20from%20Earth,noon%20expressed%20as%20positive%20degrees. Consultado en septiembre 2022

[64] Wikipedia. Husos horarios de México. es.wikipedia.org/wiki/Husos_horarios_de_México. Consultado en septiembre de 2023.

[65] Wikipedia. Orbital elements. https://en.wikipedia.org/wiki/Orbital_elements Consultado en septiembre 2021.

[66] Wikipedia. Solar zenith angle. https://en.wikipedia.org/wiki/Solar_zenith_angle. Consultado en septiembre 2021.

[67] Wikipedia Sunrise equation. https://en.wikipedia.org/wiki/Sunrise_equation. Consultado en febrero 2022.

[68] Wilkerson, G. G., et al. “Modeling soybean growth for crop management.” Transactions of the ASAE 26.1 (1983): 63–0073.

[69] Williams. Earth fact sheet. `https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html`. Consultado en diciembre 2021.

[70] World Health Organization. Dengue y Dengue Grave. `https://www.who.int/es/news-room/fact-sheets/detail/dengue-and-severe-dengue`. Consultado en septiembre 2022.

[71] Wolfe, Brendan. The Gregorian Calendar. (2020, December 07). In Encyclopedia Virginia. `https://encyclopediavirginia.org/entries/the-gregorian-calendar`.

[72] Yang, H. M., et al. “Assessing the effects of temperature on the population of Aedes aegypti, the vector of dengue.” Epidemiology & Infection 137.8 (2009): 1188–1202.

[73] Yang, Hyun Mo, et al. “Follow up estimation of Aedes aegypti entomological parameters and mathematical modellings.” Biosystems 103.3 (2011): 360–371.