



BUAP

FCE

Facultad de Ciencias
de la Electrónica

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA ELECTRÓNICA
LICENCIATURA EN INGENIERÍA EN
MECATRÓNICA

“ALGORITMOS DE CONTROL PID NO LINEAL”

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
LICENCIADO EN INGENIERÍA EN MECATRÓNICA

PRESENTA
GUSTAVO PÉREZ MÉNDEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. FERNANDO REYES CORTÉS

H. PUEBLA DE ZARAGOZA, NOVIEMBRE 2022

ÍNDICE

Agradecimientos.....	04
Capítulo 1: Introducción	05
Objetivos.....	06
Capítulo 2: Dinámica de robots manipuladores	07
Introducción.....	07
Cinemática directa.....	07
Metodología Denavit-Hartenberg (DH).....	08
Cinemática Diferencial.....	09
Ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange.....	10
Modelo dinámico de un robot manipulador.....	12
Propiedades del modelo dinámico.....	13
Propiedades de la matriz de inercia.....	13
Propiedades del vector de pares gravitacionales.....	15
Ejemplos.....	16
Péndulo.....	16
Cinemática directa.....	17
Cinemática diferencial.....	19
Ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange.....	19
Modelo dinámico del péndulo.....	21
Robot cartesiano de 3gdl.....	22
Cinemática directa.....	22
Cinemática diferencial.....	26
Ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange.....	27
Modelo dinámico del robot cartesiano de 3gdl.....	29
Robot antropomórfico de 2gdl.....	30
Cinemática directa.....	31
Ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange.....	35
Modelo dinámico del robot antropomórfico de 2 gdl.....	39
Capítulo 3: Esquema de control integral	40
Introducción.....	40
Teoría de estabilidad de Lyapunov.....	40
Definiciones básicas.....	40
El método directo de Luapunov.....	43
Norma \mathcal{L}	44
Propiedades de la norma $\mathcal{L}(f)$	45
Esquema de control PID.....	46
Función candidata de Lyapunoy.....	47
Derivada temporal de la función candidata de Lyapunov.....	48
Estabilidad asintótica.....	49
Procedimiento de sintonía.....	50
Análisis del punto de equilibrio.....	50

Propuesta de la función estricta de Lyapunov.....	52
Esquema de control PID hiperbólico.....	56
Análisis del punto de equilibrio.....	57
Propuesta de la función estricta de Lyapunov.....	57
Capítulo 4: Resultados experimentales.....	62
Introducción.....	62
Algoritmo de control PD.....	64
Algoritmo de control PID lineal.....	67
Algoritmo de control PID hiperbólico.....	70
Evaluación de desempeño con norma $\mathcal{L}_2[\tilde{q}(t)]$	73
Conclusiones.....	75
Bibliografía.....	76

Agradecimientos

A mis padres

Gracias a los dos por el apoyo y el cariño que me han dado siempre, por impulsarme a cumplir esta meta y estar conmigo durante el camino, gracias por ayudarme y alentarme a seguir adelante en los momentos en los que sentía que no podía recordándome que era capaz de lograr esto y más, gracias por creer en mí y decirme lo orgullosos que están de mí, este logro es para ustedes.

A mi hermana

Gracias por ser la mejor hermana que pude tener y estar conmigo en las buenas y en las malas, por estar ahí en todas esas veces que todo se ponía gris y hacerme sentir que todo iba a estar bien, por esas pláticas profundas en las que muchas veces me dijiste lo que tenía que escuchar y no lo que quería, gracias a eso hoy he podido lograr varias de las cosas que quería, por todas las risas, momentos y salidas de gordos que espero que podamos seguir teniendo siempre.

A mi familia

Gracias haberme acompañado durante esta etapa universitaria con su cariño y apoyo, por escucharme cuando les contaba los planes o las complicaciones que tenía y siempre saber responder haciéndome sentir que podría lograr lo que me propusiera o que podía resolver cualquier cosa. Gracias por esperar lo mejor de mí, este trabajo es un paso más que me acerca a lograr mis metas.

A mis amigos Carlos y Manuel

Gracias a ustedes por tantos años de amistad, por todos esos momentos que si nos pusieramos a recordar seguro terminaríamos llorando de risa, por haberme recordado cuando fue necesario las cosas que eran importantes y con eso abrirme los ojos para darme cuenta de los errores que cometía, por enseñarme que estudiar y hacer tarea no tiene que ser un tormento, solo es cuestión de estar con las personas y las canciones correctas para convertir algo que parecería tedioso en una noche agradable, una noche como tantas que pasamos durante estos años en las que mutuamente nos apoyabamos siempre a dar un último esfuerzo.

A mi asesor

Dr. Fernando Reyes, primero que nada, gracias por ser el excelente profesor que es, para mí fue un gusto tener un profesor de robótica que hizo crecer el gusto que ya existía por la materia con sus clases al grado de querer continuar con eso en un trabajo de tesis. Gracias por aceptarme como su tesista y confiar en mí para desarrollar un tema como este, por haberme acompañado de principio a fin estos meses y compartir conmigo un poco de su conocimiento. Para mí es un orgullo poder decir que mi asesor de tesis ha sido usted.

Capítulo 1: Introducción

El esquema de control proporcional integral derivativo PID es un algoritmo lineal, básico y estándar en automatización, el cual sigue vigente su estructura matemática y aplicaciones. El algoritmo de control PID lineal es un esquema sencillo y simple, que surge para mejorar el desempeño en estado estacionario del esquema de control PD [1]; actualmente el PID se utiliza en sistemas con dinámica lineal (invariantes y variantes en el tiempo) y también en algunos sistemas con comportamiento dinámico no lineal.

El esquema de control PID, aún sigue siendo materia de investigación científica, ya que representa temas abiertos de interés para la comunidad científica (por ejemplo, desarrollar bases teóricas para extender su estructura matemática hacia nuevas familias de esquemas con estructura PID no lineal). El comportamiento del esquema PID lineal en sistemas dinámicos no lineales no ha sido competitivo, este ha sido el caso en robots manipuladores donde la efectividad y desempeño del simple PID ha sido superado por nuevas estructuras más robustas y con mejores presentaciones para control de robots manipuladores [3, 4, 10, 11, 15, 16].

Un tema importante del esquema PID en materia de investigación es sobre estabilidad; por ejemplo, en robótica el PID asegura solo comportamiento asintóticamente estable en forma local, es decir, que depende de las condiciones iniciales o que el set-point (referencia deseada constante en el tiempo) esté suficientemente cercana del punto de partida. Actualmente representa un problema abierto demostrar analíticamente que el punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado conformada por la dinámica no lineal del robot manipulador y la estructura de control PID lineal tiene un comportamiento asintóticamente estable en forma global (es decir, existencia y unicidad del punto de equilibrio, válida para cualquier condición inicial dentro del atractor) [3, 4, 11, 12, 17].

Debido a que el esquema PID lineal no asegura un comportamiento asintótico estable en forma global en control de robots manipuladores, en la comunidad científica se han propuesto diversas estructuras tipo PID no lineal, podemos citar a los siguientes trabajos: un regulador semiglobal estable de la forma PI^2D fue propuesto en [2]; un esquema de control PD modificado con acción de control integral no lineal fue desarrollada en [3]; estudio sobre el comportamiento en control de robots manipuladores fue analizado en [4]; las perturbaciones externas representan problemas de deterioro y bajo desempeño para un esquema PID, análisis sobre robustez y condiciones específicas para mejorar el rendimiento del esquema de control es presentado en [5]. El esquema de control PD con extensiones de saturación natural y compensación deseada de gravedad para la regulación global fue analizada en [7].

Desarrollo y análisis de un esquema PID saturado no lineal fue presentado en [8] donde se demuestra estabilidad asintótica semiglobal. En el trabajo [9] se presenta un esquema de control PID no lineal estable en forma global, el cual incorpora funciones de saturación, diseñado con funciones de energía potencial quasi-naturales. La referencia [10] direcciona el problema de un regulador PID no lineal con características asintóticas en forma global (usando la teoría de estabilidad de Lyapunov) sujeto a restricciones de saturación en el torque aplicado. Funciones de saturación natural incluyen los tres términos de un esquema de control PID no lineal, demostración de estabilidad asintótica global usando la teoría de Lyapunov es desarrollado en [12]. Un esquema de control PID saturado con doble integrador es analizado en [13], particularmente el análisis se enfoca en perturbaciones acotadas y demuestra que las regiones de control no saturadas permanecen invariantes.

Un esquema de control PID no lineal en [14] con estabilización global para robots manipuladores es desarrollado con entradas de control acotadas. En el trabajo [15] un control de posición con estructura PID no lineal para robots manipuladores es desarrollado y la estabilidad asintótica global es denotada a través de la teoría de Lyapunov. Un marco teórico para desarrollar esquemas de control saturados adaptables para robots manipuladores es presentado en [16].

Los anteriores trabajos son solo algunas de las principales referencias que se han presentado en los últimos años sobre el desarrollo y diseño de nuevas estructuras de control PID no lineales. Por lo que, la presente tesis tiene como temática de investigación la propuesta de una nueva estructura matemática para el esquema de control PID no lineal, con la finalidad de generar una contribución importante en el ámbito de control automático, también se presentan experimentos con robots manipuladores de transmisión directa donde se demuestra la mejora en el desempeño del algoritmo de control propuesto.

Objetivos

El presente trabajo de investigación se enfoca en el diseño de reguladores tipo PID no lineal para el control de posición de robots manipuladores.

Objetivo general

- Diseñar un regulador PID no lineal utilizando la teoría de estabilidad de Lyapunov aplicado a robots manipuladores.

Objetivos particulares

- Revisión de los principales trabajos desarrollados para esquema de control PID no lineal.
- Simulación en **MATLAB** y evaluación experimental del algoritmo propuesto.
- Demostración de estabilidad en el sentido de Lyapunov del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado formada por la dinámica de la planta y la estructura de control PID no lineal

Como parte del desarrollo de este trabajo, se ha seleccionado a un robot de dos grados de libertad que por medio de simulación se verifique el desempeño del algoritmo de control propuesto.

Capítulo 2:

Dinámica de robots manipuladores

2.1 Introducción

Obtener el modelo dinámico de un robot es el paso inicial para cualquier desarrollo que se desee llevar a cabo ya que a partir de esto, se obtendrá un modelo matemático que describe el comportamiento del robot en cuestión. A lo largo de este capítulo se explicarán temas de vital importancia en el análisis del modelo dinámico, cada uno de los pasos y procedimientos a seguir deben realizarse en el orden que se mostrará ya que cada resultado dependerá de lo obtenido en pasos anteriores. Como complemento a la teoría mostrada, se obtendrá el modelo dinámico que describe el comportamiento de tres tipos de robots que se han tomado como objetos de estudio para explicar de mejor manera los desarrollos realizados. Los tres robots de apoyo son, un péndulo (1 gdl), un robot cartesiano de tres grados de libertad y finalmente el robot antropomórfico de dos grados de libertad, sobre este robot se centra el objetivo de esta tesis.

En primera instancia será necesario obtener la cinemática directa de cada sistema, para lo cual se utilizará la metodología Denavit-Hartenberg, posteriormente se obtendrá la cinemática diferencial y a su vez, el jacobiano del robot para obtener los puntos que presentan singularidades en cada uno de ellos, después de obtener los modelos antes mencionados, se procederá a obtener los modelos de energía de cada robot, esto es, su energía cinética y potencial, con lo cual será posible obtener el lagrangiano de cada uno de los sistemas y con esto, desarrollar las ecuaciones de Euler-Lagrange, una vez obtenidas dichas ecuaciones, se podrá escribir el modelo dinámico de cada robot, así como sus principales ecuaciones. Antes de entrar a los análisis antes mencionados, se mostrarán las características físicas de cada uno de los robots manipuladores a estudiar.

2.2 Cinemática directa

La cinemática es la parte de la física que aborda el problema de análisis y descripción del movimiento de sistemas mecánicos sin tomar en cuenta las fuerzas que lo producen. Esta rama de la física es de suma importancia en la robótica ya que es el inicio del análisis de un robot.

La cinemática directa, es una función vectorial que relaciona las coordenadas articulares $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ con la coordenadas cartesianas $[x, y, z]^T \in \mathbb{R}^3$ del robot $\mathbf{f}_R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, así mismo, como la orientación $[\phi, \theta, \psi]^T \in \mathbb{R}^3$ de la herramienta colocada en el extremo final, tomando en cuenta las propiedades geométricas del sistema mecánico del robot.

La cinemática directa de un robot está dada por el siguiente mapeo vectorial $f_R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \mathbf{f}_R(l_i, \mathbf{q}) \quad (2.1)$$

donde, $[x \ y \ z]^T$ representa la posición cartesiana; $[\phi \ \theta \ \psi]^T$ es la orientación de la herramienta de trabajo, n indica el número de grados de libertad y también representa la dimensión del vector de coordenadas articulares \mathbf{q} ; m es la dimensión conjunta de las coordenadas cartesianas y la orientación de la herramienta de trabajo. Generalmente $m = 6$.

2.2.1 Metodología Denavit-Hartenberg (DH)

Una de las herramientas con mayor utilidad en el análisis de la cinemática directa de un robot es la convención Denavit-Hartenberg, este procedimiento toma importancia cuando el número de grados de libertad del robot se incrementa, ya que para sistemas con pocos grados de libertad, se puede obtener la cinemática directa de forma analítica mediante trigonometría, sin embargo, para sistemas más complejos, este procedimiento se vuelve complicado y es ahí donde resulta más factible utilizar la convención Denavit-Hartenberg, el modelo cinemático obtenido mediante DH estará representado con transformaciones homogéneas.

El desarrollo DH, consiste en generar una tabla con los parámetros que conforman al robot, por cada articulación i -ésima, estos son:

- l_i Longitud del eslabón i , se mide con respecto al eje x_{i-1}
- α_i Ángulo formado entre el eje z_{i-1} y el eje z_i
- d_i Indica un movimiento lineal, en el caso de tratarse de una articulación rotacional este parámetro se sustituye por el espesor del servomotor más el grosor de la barra metálica representado por β_i ; ambos se miden con respecto a z_{i-1} .
- θ_i Para movimientos rotacionales, indica el ángulo de giro de un eslabón respecto a otro, en este caso, va asociado con el espesor del motor denotado por β_i y de la placa de aluminio. θ_i gira con respecto al eje z_{i-1} .

Después de obtener todos los parámetros del robot, se procede a obtener matrices de transformación homogénea para cada uno de los eslabones, esta matriz, será el resultado de multiplicar cuatro transformaciones básicas, expresadas por la convención Denavit-Hartenberg:

$$H_{i-1}^i = H_{Rz_{i-1}}(\theta_i)H_{Tz_{i-1}}(d_i; \beta_i)H_{Tx_{i-1}}(l_i)H_{Rx_{i-1}}(\alpha_i) \quad (2.2)$$

$$H_{i-1}^i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i)\cos(\alpha_i) & \sin(\theta_i)\sin(\alpha_i) & l_i\cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i)\cos(\alpha_i) & -\cos(\theta_i)\sin(\alpha_i) & l_i\sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i; \beta_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Una vez obtenidas las transformaciones homogéneas de cada eslabón, la transformación homogénea de todo el robot estará dada por el producto de las transformaciones obtenidas para cada eslabón.

$$H_0^n = H_0^1 H_1^2 \dots H_{n-2}^{n-1} H_{n-1}^n \quad (2.4)$$

2.3 Cinemática diferencial

La cinemática diferencial es la derivada con respecto al tiempo de la cinemática directa, dicho de forma matemática, esto es:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \mathbf{f}_R(\mathbf{q}) \quad (2.5)$$

Otra forma de expresar la cinemática diferencial es:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{f}_R(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{f}_R(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}.$$

En donde el término $\frac{\partial \mathbf{f}_R(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$ corresponde al jacobiano del robot, también conocido como jacobiano analítico, entonces, se puede reescribir la ecuación (2.6) como:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{f}_R(\mathbf{q}) = J(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.7)$$

Siendo, el jacobiano del robot como:

$$J(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{f}_R(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{6 \times n}.$$

La matriz jacobiano contiene las componentes de la velocidad cartesiana y angular;

$$J(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} J_v(\mathbf{q}) \\ J_w(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

- $J_v(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{3 \times n}$ relaciona la velocidad articular $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ con la velocidad lineal $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{J}_v(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

- $J_w(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{3 \times n}$ relaciona la velocidad angular $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ con la velocidad articular $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \mathbf{J}_w(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

El jacobiano del robot es una herramienta de suma importancia ya que sirve para caracterizar un robot manipulador, encontrar singularidades, analizar redundancias entre otras cosas, por lo que resulta indispensable para el análisis y diseño de algoritmos de control.

2.4 Ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange

Obtener las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange constituye una parte importante en el análisis del modelo dinámico de un robot manipulador y representa la mejor metodología para determinar dicho modelo. La deducción de estas ecuaciones se lleva a cabo a partir de un procedimiento establecido en cuatro pasos que a continuación se describe tomando en cuenta únicamente la posición cartesiana (sin la orientación del extremo final);

- **Paso 1:** Obtener la cinemática directa de cada uno de los eslabones con respecto al centro de masa, tomando en cuenta para el i -ésimo eslabón las longitudes y ángulos anteriores, esto es:

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = \mathbf{f}_R(l_i, l_{i-1}, l_{ci}, q_{i-1}, q_i) \quad (2.9)$$

- **Paso 2:** Calcular la cinemática diferencial del i -ésimo eslabón:

$$\mathbf{v}_i = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

- La rapidez lineal del centro de masa de cada eslabón se calcula a partir de la siguiente expresión:

$$\|\mathbf{v}_i\|^2 = \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i = \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2 \quad (2.11)$$

- **Paso 3:** Obtener las expresiones de energía cinética $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ y el lagrangiano del robot.

La energía cinética $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es la superposición del movimiento de traslación y de rotación, esto es:

$$\mathcal{K}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i + \frac{1}{2} \mathcal{I}_i \left[\sum_{k=1}^n \dot{q}_k \right]^2 \quad (2.12)$$

donde m_i es la masa del i -ésimo eslabón, \mathcal{I}_i es el momento de inercia del i -ésimo rotor.

- En el caso de la energía potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q})$, para campos conservativos, esta no posee una forma específica, dependerá de la geometría del robot en cuestión. Sin embargo, la forma general de la energía potencial está dada por:

$$\mathcal{U}_i(\mathbf{q}) = m_i g l_{ci} h_i(\mathbf{q}) \quad (2.13)$$

- donde g es la constante de aceleración gravitacional, l_{ci} es el centro de masa del i -ésimo eslabón, $h_i(\mathbf{q})$ es una función que depende de la variable articular e indica la altura del eslabón para obtener una diferencia de potencial, con respecto al origen del sistema de referencia del robot.

Obtener el lagrangiano del robot, este tiene una estructura definida y está dado por la siguiente expresión:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}) \quad (2.14)$$

- **Paso 4:** Aplicar las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange evaluando las derivadas parciales de la ecuación (2.15) e incluir el modelo de fricción $\mathbf{f}_f(\mathbf{f}_e, \dot{\mathbf{q}})$.

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + F_c \text{signo}(\dot{\mathbf{q}}) + F_e [1 - |\text{signo}(\dot{\mathbf{q}})|] \quad (2.15)$$

donde:

- $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de posiciones articulares o coordenadas generalizadas.
- $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]^T \in \mathbb{R}^n$ es el vector de velocidades articulares.
- $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n]^T \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares aplicados donde el i -ésimo par τ_i se encuentra asociado con la i -ésima coordenada generalizada q_i .
- $\mathbf{f}_f(\mathbf{f}_e, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas o pares de fricción que depende de la velocidad articular $\dot{\mathbf{q}}$ y de la fricción estática \mathbf{f}_e .
- $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal definida positiva con los coeficientes de fricción viscosa.
- $\mathbf{F}_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal definida positiva con los coeficientes de la fricción de Coulomb.
- $\mathbf{F}_e \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal definida positiva con los coeficientes de fricción estática.

2.5 Modelo dinámico de un robot manipulador

El modelo dinámico de un robot manipulador de n grados de libertad que está formado por eslabones rígidos conectados mediante articulaciones libres de elasticidad en cadena cinemática abierta está dado por la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \quad (2.16)$$

Donde,

- $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de coordenadas generalizadas o posiciones articulares.
- $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de velocidades articulares.
- $\ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de aceleraciones articulares.

- $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia, la cual es simétrica y definida positiva, $M(\mathbf{q}) > 0$.
- $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis, y satisface:

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \dot{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] \quad (2.17)$$

- $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas o pares gravitacionales obtenido como el gradiente de la energía potencial, debido a un campo conservativo, es decir:

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \quad (2.18)$$

- $\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares de fricción que incluye la fricción viscosa, de Coulomb y estática de cada articulación del robot.

2.6 Propiedades del modelo dinámico

El modelo dinámico de un robot manipulador es aquella ecuación que describe el comportamiento dinámico del mismo, esta resulta en una expresión compleja e interesante en sí misma dado que contiene varias propiedades. En esta tesis se abordarán aquellas cuya utilidad es para propósitos de control y análisis de estabilidad mediante el método directo de Lyapunov, dichas propiedades se clasifican como:

- Propiedades de la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$.
- Propiedades de la matriz de Coriolis y fuerzas centrífugas $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$.
- Propiedades del vector de pares gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q})$.

2.6.1 Propiedades de la matriz de inercia

La matriz de inercia $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz simétrica y definida positiva $M(\mathbf{q}) > 0$ que únicamente depende de la variable articular \mathbf{q} (posición articular). La inversa $M^{-1}(\mathbf{q})$ existe y también es definida positiva $M^{-1}(\mathbf{q}) > 0$.

Propiedad 2.1 Existe un número real positivo α tal que:

$$M(\mathbf{q}) \geq \alpha I \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \quad (2.19)$$

donde I representa la matriz identidad de dimensión $n \times n$.

Propiedad 2.2 Para robots que solo tienen articulaciones de revolución existe una constante $\beta > 0$ tal que

$$\|M(\mathbf{q})\| \leq \lambda_{Max}\{M(\mathbf{q})\} \leq \beta \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \quad (2.20)$$

la constante β se calcula de la siguiente forma:

$$\beta \geq n \left(\max_{i,j,q} |m_{i,j}(\mathbf{q})| \right) \quad (2.21)$$

donde $m_{i,j}(\mathbf{q})$ es el elemento en el i -ésimo renglón y j -ésima columna de la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$.

Propiedad 2.3 Además existe un número $k'_M > 0$ tal que:

$$\|M(\mathbf{x}) \mathbf{y}\| \leq k'_M \|\mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.22)$$

Propiedad 2.4 Para todos los vectores $\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ existe un escalar α tal que satisface:

$$C(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \mathbf{y} = C(\mathbf{q}, \mathbf{y}) \mathbf{x}$$

$$C(\mathbf{q}, \mathbf{z} + \alpha \mathbf{x}) \mathbf{y} = C(\mathbf{q}, \mathbf{z}) \mathbf{y} + \alpha C(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \mathbf{y} \quad (2.23)$$

Propiedad 2.5 Para robots que tienen exclusivamente articulaciones rotacionales, existe un número $k_{c1} > 0$ tal que:

$$\|C(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \mathbf{y}\| \leq k_{c1} \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \quad (2.24)$$

Propiedad 2.6 Para toda $\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, existe un número $k_{c2} > 0$ tal que:

$$\|C(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \mathbf{w} - C(\mathbf{y}, \mathbf{v}) \mathbf{w}\| \leq k_{c1} \|\mathbf{z} - \mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| + k_{c2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \|\mathbf{w}\| \|\mathbf{z}\| \quad (2.25)$$

Para cualquier vector $\mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$

Propiedad 2.7 La matriz $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, se relaciona con la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ mediante la propiedad de antisimetría:

$$\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \left[\dot{M}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \mathbf{x} = 0 \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (2.26)$$

donde, $\dot{M}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ resulta una matriz antisimétrica.

Propiedad 2.8 La derivada de la matriz de inercia $\frac{d}{dt}M(\mathbf{q})$ se relaciona con la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis de la siguiente forma:

$$\dot{M}(\mathbf{q}) = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \quad (2.27)$$

2.6.2 Propiedades del vector de pares gravitacionales

El vector de fuerzas o pares gravitacionales de orden $n \times 1$ depende solo de la posición articular \mathbf{q} debido a un campo conservativo y está correlacionado con el vector de velocidad angular $\dot{\mathbf{q}}$ por:

$$\int_0^t \mathbf{g}(\mathbf{q}(t))^T \dot{\mathbf{q}}(t) dt = \mathcal{U}(\mathbf{q}(T)) - \mathcal{U}(\mathbf{q}(0)) \forall t \geq 0 \quad (2.28)$$

Propiedad 2.9 Para robots con articulaciones rotacionales, existe un número k_u tal que:

$$\int_0^T \mathbf{g}(\mathbf{q}(t))^T \dot{\mathbf{q}}(t) dt > k_u \quad (2.29)$$

Propiedad 2.10 De igual forma, existe una $k_g > 0$ que cumple con:

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\| \leq k_g \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.30)$$

Propiedad 2.11 Siendo que se cumple:

$$k_g \geq \left\| \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\| \geq \lambda_{Max} \left\{ \frac{\mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\} \quad (2.31)$$

Propiedad 2.12 Se calcula mediante la su derivada parcial:

$$k_g \geq n \left(\max_{i,j,q} \left| \frac{g_i(\mathbf{q})}{\partial q_j} \right| \right) \quad (2.32)$$

Propiedad 2.13 Por último, existe una constante k' tal que:

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{q})\| \leq k' \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.33)$$

2.7 Ejemplos

Se han seleccionado 3 casos de estudio para desarrollar sus respectivos modelos dinámicos, dichos robots son: péndulo, robot cartesiano de 3 gdl y robot antropomórfico de 2 gdl por lo que, a continuación se explicarán las características físicas de cada uno de los ellos así como el desarrollo y análisis del modelo dinámico de cada uno.

2.7.1 Péndulo

El péndulo es un sistema mecánico de un grado de libertad, consta únicamente de un eslabón rígido de aluminio 6061 con longitud l_1 acoplado de forma mecánica a un servomotor de transmisión directa, como se muestra en la figura 2.1; dicho péndulo está sometido a la acción de la gravedad, su movimiento es rotacional y se encuentra dentro de un plano vertical $x_0 - y_0$.

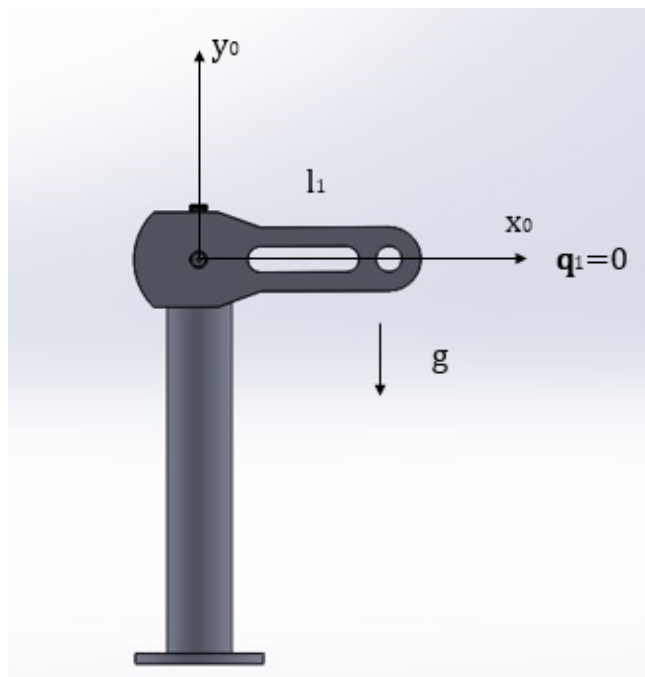


Figura 2.1: Posición de casa del péndulo.

La figura 2.1 muestra la posición de casa cuando $q_1 = 0$, sirve como referencia para desarrollar el análisis cinemático. Los parámetros del péndulo, así como su notación se muestran en la tabla 2.1.

Tabla 2.1: Parámetros que integran el péndulo.

Eslabón	Parámetro	Notación
1	Masa	m
	Longitud	l
	Inercia	\mathcal{I}_r
	Centro de masa	l_{ci}
	Posición articular	q
	Aceleración debida a la gravedad	g

Cinemática directa Para iniciar el análisis de la cinemática del péndulo se deben definir los sistemas de referencia fijo $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$ el sistema de referencia móvil $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$; el origen del sistema de referencia $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$ se coloca en el estator de la articulación del péndulo, como se muestra en la figura 2.2 el eje z_0 se alinea con eje rotacional del servomotor el cual es perpendicular al plano $x_0 - y_0$, en cuanto al sistema de referencia móvil $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$ se coloca en el extremo final del eslabón el cual se mueve de manera conjunta con el péndulo. Los sistemas de referencia Σ_0 y Σ_1 son determinados por la regla de la mano derecha.

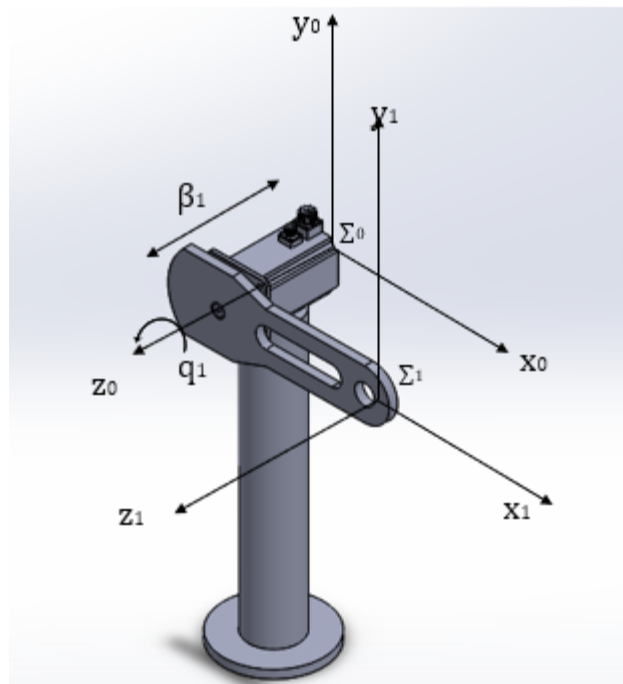


Figura 2.2: Asignación de sistemas de referencia para el péndulo.

Los parámetros que se utilizan en la convención Denavit-Hartenberg $l_i, d_i, \theta_i, \alpha_i$; para $i = 1$, son:

- La longitud del eslabón l_i está dada por l_1
- Como el sistema sólo tiene un movimiento rotacional, por lo que no se considera a d_i , en su lugar se incluye el espesor del servomotor más el espesor del eslabón, lo anterior queda representado con β_1
- θ_i es el ángulo alrededor del eje z_0 que formará la orientación entre el eje x_0 y x_1 cuando el péndulo salga de la posición de casa, esto es q_1
- Debido a que el péndulo se moverá únicamente sobre el plano $x_0 - y_0$, el ángulo formado entre los ejes z_0 y z_1 siempre será cero por lo que $\alpha_1 = 0$, es decir, $z_0 \parallel z_1$.

A partir del análisis anterior, y de acuerdo a la posición de casa establecida en la figura 2.2, la tabla DH queda de la siguiente forma:

Eslabón	l	α	d	θ
1	l_1	0	β_1	q_1

Tabla 2.2: Parámetros DH del péndulo.

Para la metodología Denavit-Hartenberg usando la ecuación (2.2) con los parámetros DH del péndulo se tiene:

$$\begin{aligned}
 H_0^1 &= H_{R_z}(q_1)H_{T_{z_0}}(\beta_1)H_{T_{x_0}}(l_1)H_{R_{x_0}}(0) \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1)\cos(0) & \sin(q_1)\sin(0) & l_1\cos(q_1) \\ \sin(q_1) & \cos(q_1)\cos(0) & -\cos(q_1)\sin(0) & l_1\sin(q_1) \\ 0 & \sin(0) & \cos(0) & \beta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.34)
 \end{aligned}$$

Matriz de transformación homogénea.

En la matriz de transformación homogénea, se incluye la matriz de rotación $R_0^1(\mathbf{q}_1)$ y el vector de traslación, que representa la cinemática directa, es decir;

$$R_0^1(\mathbf{q}_1) = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{f}_R(\mathbf{q}_1) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1\cos(q_1) \\ l_1\sin(q_1) \\ \beta_1 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Cinemática diferencial Para obtener la cinemática diferencial de este sistema, se procede a calcular la derivada temporal de la cinemática directa, de la siguiente forma:

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt} \mathbf{f}_R(\mathbf{q}_1) = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) \\ l_1 \sin(q_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 \\ l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Al estar hablando de un sistema escalar, este no posee una matriz jacobiana, sin embargo se puede obtener la siguiente representación a partir de la cinemática diferencial:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_1) & 0 \\ 0 & l_1 \cos(q_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

De esta forma, se puede interpretar que la ecuación (2.37) funciona como "jacobiano" y a partir de esto, notar que existen singularidades en el robot cuando $q_1 = 0, \pm n\pi$ y cuando $q_1 = \pm n\frac{\pi}{2}$, esto se aprecia con más claridad a partir del determinante del jacobiano, el cual es:

$$\det[J(q_1)] = -l_1^2 \sin(q_1) \cos(q_1) \quad (2.38)$$

así,

- Si la posición articular $q_1 = \pm n\pi$, $\sin(q_1)$ será cero, lo que hará una singularidad.
- Si la posición articular $q_1 = \pm n\frac{\pi}{2}$, $\cos(q_1)$ será cero, lo que hará igualmente una singularidad.

Ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange Aplicar las funciones de energía de Euler-Lagrange, consta de cuatro pasos; la obtención del modelo de cinemática directa respecto al centro de masa, el modelo de cinemática diferencial, las funciones de energía (cinética y potencial) con lo anterior, el lagrangiano, y el último paso, utilizar las ecuaciones de movimiento a partir del lagrangiano.

Paso 1: Lo primero por hacer es describir la cinemática directa de este robot con respecto al centro de masa l_c , por lo que se toma retoma $\mathbf{f}_R(\mathbf{q}_1)$ de la ecuación (2.35) y se expresa respecto al centro de masa l_c :

$$\mathbf{f}_R(\mathbf{q}_1) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_c \cos(q_1) \\ l_c \sin(q_1) \\ \beta_1 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Paso 2: Del mismo modo, se retoma la ecuación (2.36) que incluye el vector de velocidad de traslación del péndulo.

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -l_c \sin(q_1) \dot{q}_1 \\ l_c \cos(q_1) \dot{q}_1 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Es importante notar que la rapidez $\mathbf{v}^T \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2 = l_c^2 \dot{q}_1^2$

Paso 3: Ahora las funciones de energía (cinética y potencial) del péndulo para que de esta forma, se pueda obtener la representación del lagrangiano.

La energía cinética del péndulo incluye la componente de traslación y rotación, está dada por:

$$K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} I_r \dot{q}_1^2 \quad (2.41)$$

dado que $\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}^T \mathbf{v}$. Este resultado se muestra en el paso 2, en la ecuación (2.40), al sustituir se obtiene:

$$K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m l_c^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_r \dot{q}_1^2 = \frac{1}{2} [m l_c^2 + I_r] \dot{q}_1^2 \quad (2.42)$$

Para el caso de la energía potencial, tiene la siguiente forma:

$$\mathcal{U}(q) = mgh \quad (2.43)$$

donde $h = h_1 - h_2 = -l_c \cos(q_1) - (-l_c) = l_c(1 - \cos(q_1))$ (ver figura 2.3).

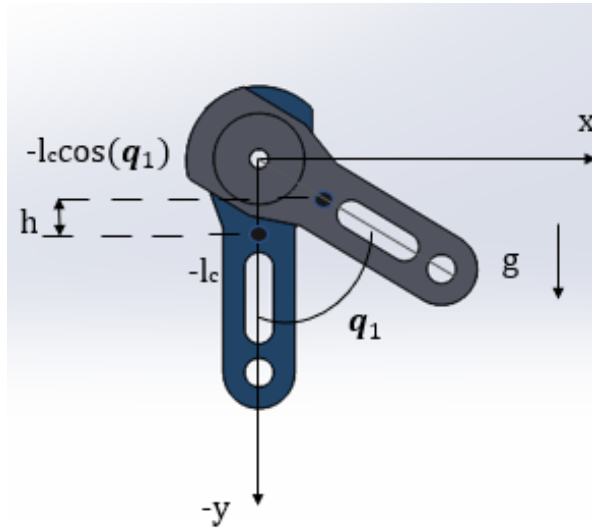


Figura 2.3: Función de diferencia de energía potencial para el péndulo

De esta forma:

$$\mathcal{U}(q) = mgl_c[1 - \cos(q_1)] \quad (2.44)$$

Se procede a obtener el lagrangiano el cual se define de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{K}(q, \dot{q}) - \mathcal{U}(q) \quad (2.45)$$

Sustituyendo las funciones de energía del péndulo en el lagrangiano:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) = \frac{1}{2} [ml_c^2 + I_r] \dot{q}_1^2 - mgl_c[1 - \cos(q_1)] \quad (2.46)$$

Paso 4: Para obtener las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange se realizan derivadas parciales del lagrangiano respecto a (q_1, \dot{q}_1)

$$\tau = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1)}{\partial \dot{q}_1} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1)}{\partial q_1} + \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \quad (2.47)$$

Al evaluar las expresiones que conforman la ecuación anterior para el caso del péndulo, se tiene:

$$\left[\frac{\partial \mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1)}{\partial \dot{q}_1} \right] = [ml_c^2 + I_r] \dot{q}_1 \quad (2.48)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1)}{\partial \dot{q}_1} \right] = [ml_c^2 + I_r] \ddot{q}_1 \quad (2.49)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1)}{\partial q_1} = mgl_c \sin(q) \quad (2.50)$$

Modelo dinámico del péndulo A partir de las ecuaciones obtenidas en el paso cuatro se puede escribir el modelo dinámico del péndulo incluyendo el fenómeno de fricción $f_f(f_e, \dot{q})$ de la siguiente forma:

$$\tau = [ml_c^2 + I_r] \ddot{q}_1 + mgl_c \sin(q_1) + b\dot{q} + f_c \text{signo}(\dot{q}_1) + f_e [1 - |\text{signo}(\dot{q}_1)|] \quad (2.51)$$

$i_p = [ml_c^2 + I_r]$ por lo tanto:

$$\tau = i_p \ddot{q}_1 + mgl_c \sin(q_1) + b\dot{q}_1 + f_c \text{signo}(\dot{q}_1) + f_e [1 - |\text{signo}(\dot{q}_1)|] \quad (2.52)$$

El modelo dinámico puede ser expresado como una ecuación diferencial ordinaria (ode) de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_1 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \frac{1}{i_p} [\tau - mgl_c \sin(q_1) - b\dot{q}_1 - f_c \text{signo}(\dot{q}_1) - f_e [1 - |\text{signo}(\dot{q}_1)|]] \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

2.7.2 Robot cartesiano de 3 gdl

El robot cartesiano de 3 gdl está constituido por tres articulaciones lineales. El nombre de robot cartesiano se da a partir de la forma de programarlo, con base en coordenadas cartesianas. Cada una de las articulaciones será capaz de ejecutar un movimiento en cada uno de los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas es decir $[x, y, z]^T$.

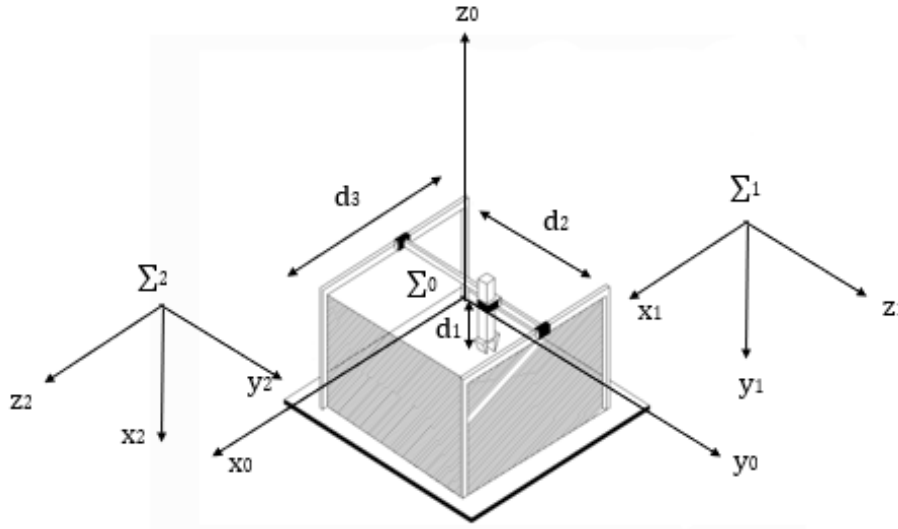


Figura 2.4: Robot cartesiano de 3 gdl.

Los parámetros del robot cartesiano de 3 gdl así como su notación se muestran en la tabla 2.3.

Articulación	Parámetro	Notación
1	Masa de la primera articulación	m_1
2	Masa de la segunda articulación	m_2
3	Masa de la tercera articulación	m_3
	Aceleración debida a la gravedad	g

Tabla 2.3: Parámetros que integran al robot cartesiano de 3 gdl.

Cinemática directa Como se mencionó anteriormente, el robot cartesiano tiene únicamente movimientos lineales, por lo que su análisis es un poco diferente respecto al del péndulo pero partiendo de los mismos principios. Para iniciar, se asignan los sistemas de referencia $\Sigma_i(x_i, y_i, z_i)$.

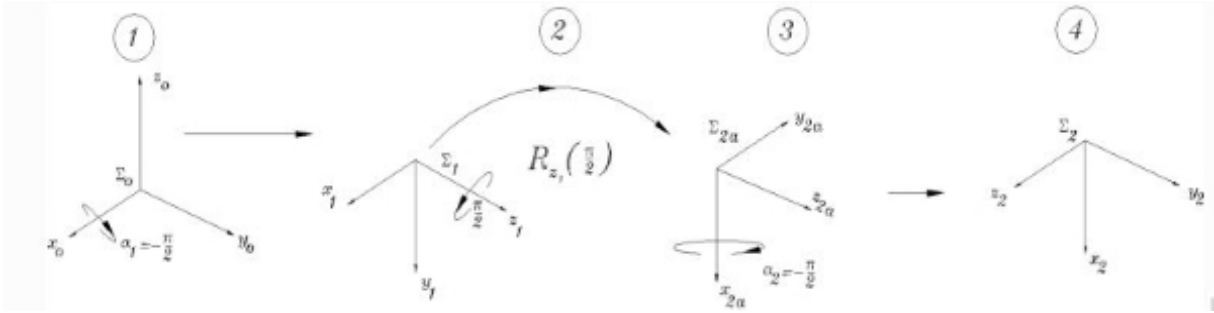


Figura 2.5: Análisis de los sistemas de referencia del robot cartesiano de 3 gdl.

- El sistema de referencia $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$ se coloca con el eje z_0 paralelo al movimiento que medirá d_1 como se muestra en la figura 2.4.
- Para el sistema de referencia $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$ se debe realizar una rotación de $-\frac{\pi}{2}$ alrededor de x_0 para que de este modo, el eje z_0 quede paralelo al movimiento que medirá a la variable d_2 .
- Existe una rotación auxiliar alrededor del eje z_1 con un ángulo de $-\frac{\pi}{2}$ para obtener Σ_2 como se muestra en la figura 2.5.
- Por último, se obtiene el sistema de referencia $\Sigma_2(x_2, y_2, z_2)$ donde el eje z_2 será paralelo al movimiento que generará d_3

Ahora que ya se han fijado los sistemas de referencia, es momento de obtener los parámetros de la tabla DH ($l_i, \alpha_i, d_i, \theta_i$)

- Dado que es un sistema constituido completamente por movimientos lineales, los parámetros en θ_i al igual que l_i son cero
- En cuanto a d_i se encontrarán d_1, d_2, d_3 los cuales corresponden al movimiento lineal de cada articulación del robot.
- Para α_i se presentan dos rotaciones de $-\frac{\pi}{2}$, la primera de $z_0 \rightarrow z_1$ y la segunda de $z_{2a} \rightarrow z_2$

Dado lo anterior, la tabla de parámetros DH queda de la siguiente forma.

Eslabón	l_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	$-\frac{\pi}{2}$	d_1	0
2	0	$-\frac{\pi}{2}$	d_2	$-\frac{\pi}{2}$
3	0	0	d_3	0

Tabla 2.4: Parámetros DH del robot cartesiano de 3 gdl.

Ya que se ha obtenido la tabla DH del robot cartesiano se deducen las matrices de transformación homogénea, de rotación y traslación que describen la cinemática directa de este robot.

Retomando la ecuación (2), escrita con los parámetros DH del robot cartesiano de 3 gdl se tiene:

Para H_0^1 :

$$H_0^1 = H_{Rz_0}(0)H_{Tz_0}(d_1)H_{Tx_0}(0)H_{Rx_0}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \quad (2.54)$$

$$H_0^1 = \begin{bmatrix} \cos(0) & -\sin(0)\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \sin(0)\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & l_1\cos(0) \\ \sin(0) & \cos(0)\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -\cos(0)\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & l_1\sin(0) \\ 0 & \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Al realizar las operaciones indicadas en H_0^1 se tiene:

$$H_0^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

Para H_1^2 :

$$H_1^2 = H_{Rz_1}\left(-\frac{\pi}{2}\right)H_{Tz_1}(d_2)H_{Tx_1}(0)H_{Rx_1}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \quad (2.57)$$

$$H_1^2 = \begin{bmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & l_1\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & l_1\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

Al realizar las operaciones indicadas en H_0^1 se tiene:

$$H_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Para H_2^3 :

$$H_2^3 = H_{Rz_2}(0)H_{Tz_0}(d_3)H_{Tx_2}(0)H_{Rx_2}(0) \quad (2.60)$$

$$H_2^3 = \begin{bmatrix} \cos(0) & -\sin(0)\cos(0) & \sin(0)\sin(0) & l_1\cos(0) \\ \sin(0) & \cos(0)\cos(0) & -\cos(0)\sin(0) & l_1\sin(0) \\ 0 & \sin(0) & \cos(0) & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

$$H_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

Finalmente, la cinemática del robot cartesiano de 3 gdl está dada por la matriz de transformación homogénea H_0^3 :

$$H_0^3 = H_0^1 H_1^2 H_2^3 \quad (2.63)$$

$$H_0^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Y la cinemática directa $\mathbf{f}_R(\mathbf{d})$:

$$\mathbf{f}_R(\mathbf{d}) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_3 \\ d_2 \\ d_1 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

Cinemática diferencial Para obtener la cinemática diferencial del robot cartesiano se procede a calcular la derivada temporal de la cinemática directa, es decir.

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt} \mathbf{f}_R(\mathbf{d}) \quad (2.66)$$

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} d_3 \\ d_2 \\ d_1 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{d}_3 \\ \dot{d}_2 \\ \dot{d}_1 \end{bmatrix}$$

Para obtener el Jacobiano del robot cartesiano se evalúa la siguiente expresión

$$J(\mathbf{d}) = \frac{\partial \mathbf{f}_R(\mathbf{d})}{\partial \mathbf{d}} \quad (2.69)$$

$$J(\mathbf{d}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

el determinante del jacobiano

$$\det[J(\mathbf{d})] = 1 \quad (2.71)$$

Ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange Una vez más se deben aplicar los 4 pasos empleados para obtener estos resultados.

Paso 1: Se escribe el modelo de cinemática directa de cada articulación

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

Paso 2: A partir del modelo de cinemática diferencial que se dedujo anteriormente, se obtienen las expresiones de rapidez de cada articulación, las cuales están dadas por $v_i^T v_i$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_1 \end{bmatrix} \rightarrow v_1^T v_1 = \|\mathbf{v}_1\|^2 = \dot{d}_1^2 \quad (2.75)$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{d}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow v_2^T v_2 = \|\mathbf{v}_2\|^2 = \dot{d}_2^2 \quad (2.76)$$

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} \dot{d}_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow v_3^T v_3 = \|\mathbf{v}_3\|^2 = \dot{d}_3^2 \quad (2.77)$$

Paso 3: Se obtiene el modelo de energía, el cual consta de la energía cinética $\mathcal{K}(\mathbf{d}, \dot{\mathbf{d}})$ y la energía potencial $\mathcal{U}(\mathbf{d})$

La energía cinética está dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(\mathbf{d}, \dot{\mathbf{d}}) &= \frac{1}{2}[m_1 + m_2 + m_3]v_1^T v_1 + \frac{1}{2}[m_2 + m_3]v_2^T v_2 + \frac{1}{2}m_3v_3^T v_3 \\ &= \frac{1}{2}[m_1 + m_2 + m_3]\dot{d}_1^2 + \frac{1}{2}[m_2 + m_3]\dot{d}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{d}_3^2\end{aligned}\quad (2.78)$$

Por otro lado, la energía potencial tiene la siguiente forma:

$$\mathcal{U}(\mathbf{d}) = [m_1 + m_2 + m_3]gd_1 \quad (2.79)$$

A partir de las expresiones de energía cinética y potencial obtenidos en los pasos anteriores, se procede a escribir el Lagrangiano de este robot. El lagrangiano tiene la siguiente forma:

$$\mathcal{L}(\mathbf{d}, \dot{\mathbf{d}}) = \mathcal{K}(\mathbf{d}, \dot{\mathbf{d}}) - \mathcal{U}(\mathbf{d}) \quad (2.80)$$

Escribiendo en la expresión anterior las ecuaciones de energía se tiene:

$$\mathcal{L}(\mathbf{d}, \dot{\mathbf{d}}) = \frac{1}{2}[m_1 + m_2 + m_3]\dot{d}_1^2 + \frac{1}{2}[m_2 + m_3]\dot{d}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{d}_3^2 - [m_1 + m_2 + m_3]gd_1 \quad (2.81)$$

Paso 4: Es necesario obtener las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange a partir de la expresión obtenida para el Lagrangiano $\mathcal{L}(\mathbf{d}, \dot{\mathbf{d}})$ para llegar a la siguiente estructura:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{d}, \dot{\mathbf{d}})}{\partial \dot{\mathbf{d}}} \right] - \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{d}, \dot{\mathbf{d}})}{\partial \mathbf{d}} \right] \quad (2.82)$$

$$\left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{d}, \dot{\mathbf{d}})}{\partial \dot{\mathbf{d}}} \right] = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 + m_3 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 + m_3 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{d}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{d}, \dot{\mathbf{d}})}{\partial \dot{\mathbf{d}}} \right] = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 + m_3 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 + m_3 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{d}_1 \\ \ddot{d}_2 \\ \ddot{d}_3 \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

$$- \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{d}, \dot{\mathbf{d}})}{\partial \mathbf{d}} \right] = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 + m_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} g \quad (2.85)$$

Modelo dinámico del robot cartesiano de 3 gdl Ahora que se conocen las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange, se puede escribir el modelo dinámico del robot cartesiano de 3 gdl, incluyendo el fenómeno de fricción como se muestra en la ecuación (2.86).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m_1 + m_2 + m_3 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 + m_3 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{d}_1 \\ \ddot{d}_2 \\ \ddot{d}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 + m_2 + m_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} g + \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{d}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} f_{c1} & 0 & 0 \\ 0 & f_{c2} & 0 \\ 0 & 0 & f_{c3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{signo}(\dot{d}_1) \\ \text{signo}(\dot{d}_2) \\ \text{signo}(\dot{d}_3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{e1} & 0 & 0 \\ 0 & f_{e2} & 0 \\ 0 & 0 & f_{e3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [1 - |\text{signo}(\dot{d}_1)|] \\ [1 - |\text{signo}(\dot{d}_2)|] \\ [1 - |\text{signo}(\dot{d}_3)|] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.86)$$

El modelo dinámico puede ser expresado como una ecuación diferencial ordinaria (ode) de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \dot{\mathbf{d}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ M^{-1} \left[\boldsymbol{\tau} - g \begin{bmatrix} m_1 + m_2 + m_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{d}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} - F_c \begin{bmatrix} \text{signo}(\dot{d}_1) \\ \text{signo}(\dot{d}_2) \\ \text{signo}(\dot{d}_3) \end{bmatrix} - F_e \begin{bmatrix} [1 - |\text{signo}(\dot{d}_1)|] \\ [1 - |\text{signo}(\dot{d}_2)|] \\ [1 - |\text{signo}(\dot{d}_3)|] \end{bmatrix} \right] \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

2.7.3 Robot antropomórfico de 2 gdl

Este robot está constituido por dos eslabones, el primer eslabón rígido metálico de longitud l_1 estará acoplado a la base mediante un servomotor, mientras que el segundo eslabón, con las mismas características pero de longitud l_2 estará acoplado por medio de un servomotor al eslabón 1, ambos eslabones se encuentran sometidos al efecto de la gravedad y su movimiento se encuentra dentro de un plano vertical $x_0 - y_0$ para el eslabón 1 y $x_1 - y_1$ para el eslabón 2, como se muestra en la figura 2.6.

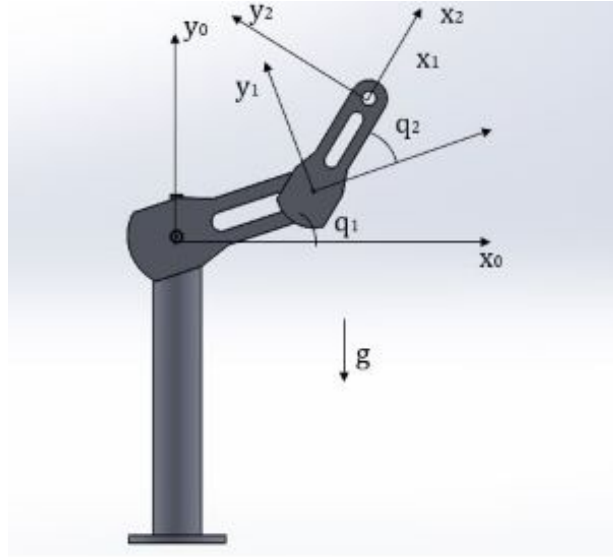


Figura 2.6: Robot antropomórfico de 2 gdl.

Los parámetros del robot de 2gdl así como su notación se muestran en la tabla 2.5.

Eslabón	Significado	Notación
1	Masa del eslabón 1	m_1
	Longitud del eslabón 1	l_1
	Inercia del eslabón 1	I_1
Hombro	Centro de masa del eslabón 1	l_{c1}
	Posición articular del eslabón 1	q_1
2	Masa del eslabón 2	m_2
	Longitud del eslabón 2	l_2
	Inercia del eslabón 2	I_2
Codo	Centro de masa del eslabón 2	l_{c2}
	Posición articular del eslabón 2	q_2
	Aceleración debida a la gravedad	g

Tabla 2.5: Parámetros que integran al robot antropomórfico de 2 gdl.

Cinemática directa El primer paso es asignar los sistemas de referencia para el robot de dos grados de libertad, el sistema de referencia $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$ se colocará en el hombro del robot, alineando el eje z_0 con el eje de giro del servomotor y cuyo origen se encuentra en el estator del motor, el sistema de referencia $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$, estará colocado en la articulación del codo del robot, de igual forma que en el sistema de referencia $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$, el eje z_0 quedará alineado con el eje de giro del segundo servomotor, por último, el sistema de referencia $\Sigma_2(x_2, y_2, z_2)$, se coloca al final del eslabón dos, en el lugar de la herramienta de trabajo, con la misma orientación que los dos sistemas de referencia anteriores.

A continuación, se muestra al robot antropomórfico de dos grados de libertad en la posición de casa con los sistemas de referencia asignados.

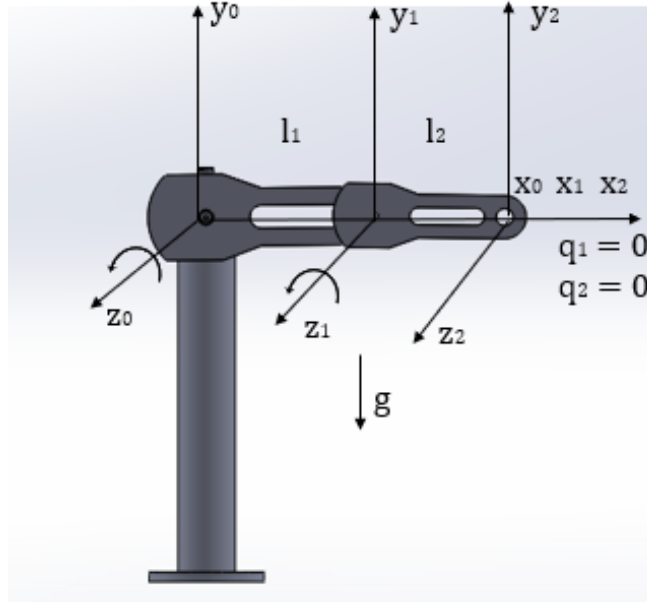


Figura 2.7: Asignación de los sistema de referencia del robot antropomórfico de 2 gdl

Ahora se procede a obtener los parámetros de la tabla DH para continuar con el análisis del modelo de cinemática directa.

- Los parámetros l_i son las longitudes de los eslabones, por lo tanto, en la tabla deberá colocarse l_1 y l_2 , respectivamente.
- Como este robot se mueve en el plano vertical $x_0 - y_0$ los ángulos α formados entre los ejes $z_0 - z_1$ y $z_1 - z_2$ siempre serán paralelos, es decir, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$
- Al no tener desplazamiento lineal, las articulaciones son rotacionales, entonces, los parámetros d_i serán remplazados con β_1 y β_2 los cuales corresponden al grosor de la barra más el servomotor de cada eslabón.
- Los ángulos de rotación θ_i , están definidos por q_1 , y q_2 , respectivamente.

Por lo tanto, la tabla DH queda de la siguiente manera:

Eslabón	l_i	α_i	d_i	θ_i
1	l_1	0	β_1	q_1
2	l_2	0	β_2	q_2

Tabla 2.6: Parámetros DH del robot antropomórfico de 2gdl.

En la figura 2.8 se observa al robot de 2 gdl fuera de la posición de casa, por lo cual se logra apreciar de mejor forma el movimiento de dicho robot así como los parámetros DH.

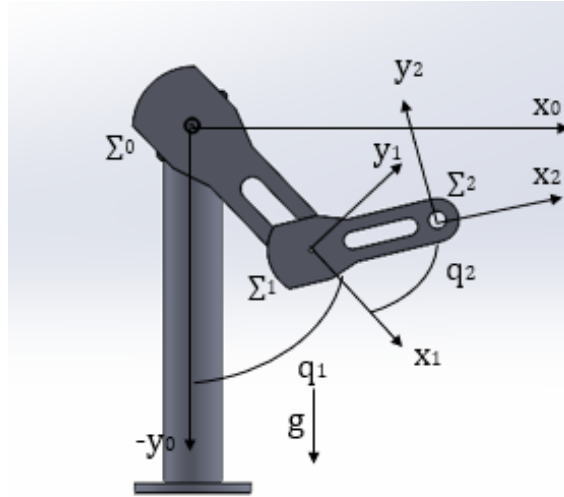


Figura 2.8: Robot antropomórfico de 2 gdl en el IV cuadrante

Ahora que ya se tiene la tabla DH es posible obtener las matrices de transformación homogénea que describen la cinemática del robot, como se trata de dos eslabones, la matriz de transformación homogénea estará dada por el siguiente producto

$$H_0^2 = H_0^1 H_1^2$$

Dado el hecho anterior, es necesario obtener primero las matrices de transformación homogénea H_0^1 y H_1^2 para obtener H_0^2 .

Entonces, retomando la ecuación (2.2) escrita con los parámetros DH de cada uno de los eslabones se tiene

Para H_0^1 :

$$H_0^1 = H_{R_{z_0}}(q_1) H_{T_{z_0}}(\beta_1) H_{T_{x_0}}(l_1) H_{R_{x_0}}(0) \quad (2.88)$$

$$H_0^1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) \cos(0) & \sin(q_1) \sin(0) & l_1 \cos(q_1) \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) \cos(0) & -\cos(q_1) \sin(0) & l_1 \sin(q_1) \\ 0 & \sin(0) & \cos(0) & \beta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

Realizando las operaciones indicadas, se obtiene la siguiente matriz de transformación homogénea H_0^1 :

$$H_0^1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & l_1 \cos(q_1) \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & l_1 \sin(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & \beta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

Para H_1^2 :

$$H_1^2 = H_{R_{Z_1}}(q_2)H_{T_{Z_1}}(\beta_2)H_{T_{X_1}}(l_2)H_{R_{X_1}}(0) \quad (2.91)$$

$$H_1^2 = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & -\sin(q_2) \cos(0) & \sin(q_2) \sin(0) & l_2 \cos(q_2) \\ \sin(q_2) & \cos(q_2) \cos(0) & -\cos(q_2) \sin(0) & l_2 \sin(q_2) \\ 0 & \sin(0) & \cos(0) & \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

Realizando las operaciones indicadas, se obtiene la siguiente matriz de transformación homogénea H_1^2 :

$$H_1^2 = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & -\sin(q_2) & 0 & l_2 \cos(q_2) \\ \sin(q_2) & \cos(q_2) & 0 & l_2 \sin(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

Por lo tanto, la matriz de transformación homogénea H_0^2

$$H_0^2 = H_0^1 H_1^2 \quad (2.94)$$

$$H_0^2 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & l_1 \cos(q_1) \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & l_1 \sin(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & \beta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(q_2) & -\sin(q_2) & 0 & l_2 \cos(q_2) \\ \sin(q_2) & \cos(q_2) & 0 & l_2 \sin(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

Al realizar el producto de ambas matrices, se obtiene el resultado siguiente

$$H_0^2 = \begin{bmatrix} \cos(q_1 + q_2) & -\sin(q_1 + q_2) & 0 & l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ \sin(q_1 + q_2) & \cos(q_1 + q_2) & 0 & l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ 0 & 0 & 1 & \beta_1 + \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

Dado que el modelo cinemático no es único, depende de la posición de casa, esta representación de la cinemática del robot manipulador corresponde a la posición de casa en el primer cuadrante, como que se desea analizar teniendo la posición de casa en el cuarto cuadrante, es necesario realizar una rotación de $-\frac{\pi}{2}$ por lo cual se deben multiplicar las matrices de transformación homogénea H_0^1 y H_1^2 por una matriz de rotación $R_z(-\frac{\pi}{2})$ es decir:

$$H_{0y_0-}^1 = R_{z_0}(-\frac{\pi}{2})H_0^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & l_1 \cos(q_1) \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & l_1 \sin(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & \beta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_{0y_0-}^1 = \begin{bmatrix} \sin q_1 & \cos q_1 & 0 & l_1 \sin q_1 \\ -\cos q_1 & \sin q_1 & 0 & -l_1 \cos q_1 \\ 0 & 0 & 1 & \beta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

$$H_{1y_1-}^2 = R_{z_1}(-\frac{\pi}{2})H_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(q_2) & -\sin(q_2) & 0 & l_2 \cos(q_2) \\ \sin(q_2) & \cos(q_2) & 0 & l_2 \sin(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_{1y_1-}^2 = \begin{bmatrix} \sin q_2 & \cos q_2 & 0 & l_2 \sin q_2 \\ -\cos q_2 & \sin q_2 & 0 & -l_2 \cos q_2 \\ 0 & 0 & 1 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

Ahora que se tienen las matrices de transformación homogénea con la rotación necesaria, es necesario realizar el producto de ellas para obtener el modelo cinemático del robot manipulador tomando la posición de casa sobre el eje $y-$

$$H_{1y_0-}^2 = H_{0y_0-}^1 H_{1y_1-}^2 = \begin{bmatrix} \sin(q_1 + q_2) & \cos(q_1 + q_2) & 0 & l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ -\cos(q_1 + q_2) & \sin(q_1 + q_2) & 0 & -l_1 \cos(q_1) - l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ 0 & 0 & 1 & \beta_1 + \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

De este modo se tiene el modelo cinemático del robot tomando la posición de casa en el cuarto cuadrante. Así mismo, la cinemática directa del robot manipulador de 2gdl para cada uno de los eslabones, estas se muestran en las ecuaciones (2.100) y (2.101):

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \sin(q_1) \\ -l_1 \cos(q_1) \\ \beta_1 \end{bmatrix} \quad (2.100)$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ -l_1 \cos(q_1) - l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ \beta_1 + \beta_2 \end{bmatrix} \quad (2.101)$$

Ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange Los parámetros del robot antropomórfico de dos grados de libertad así como su notación para cada uno de los eslabones se muestran en la tabla 2.5.

Eslabón	Significado	Notación
1 Hombro	Masa del eslabón 1	m_1
	Longitud del eslabón 1	l_1
	Inercia del eslabón 1	I_1
	Centro de masa del eslabón 1	l_{c1}
	Posición articular del eslabón 1	q_1
2 Codo	Masa del eslabón 2	m_2
	Longitud del eslabón 2	l_2
	Inercia del eslabón 2	I_2
	Centro de masa del eslabón 2	l_{c2}
	Posición articular del eslabón 2	q_2
	Aceleración debida a la gravedad	g

Tabla 2.5: Parámetros que integran al robot antropomórfico de 2 gdl.

Paso 2

Para obtener la cinemática diferencial de este sistema, se procede a calcular la derivada temporal del modelo de cinemática directa obtenido para cada eslabón.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) \\ l_1 \sin(q_1) \end{bmatrix} \dot{q}_1 \quad (2.102)$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) & l_2 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (2.103)$$

Cuadrado de la rapidez del eslabón 1

$$\|\mathbf{v}_1\|^2 = \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1 \quad (2.104)$$

$$\|\mathbf{v}_1\|^2 = \begin{bmatrix} l_{c1} \cos(q_1) \dot{q}_1 & l_{c1} \sin(q_1) \dot{q}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c1} \cos(q_1) \dot{q}_1 \\ l_{c1} \sin(q_1) \dot{q}_1 \end{bmatrix} \quad (2.105)$$

$$\|\mathbf{v}_1\|^2 = l_{c1}^2 \cos^2(q_1) \dot{q}_1 + l_{c1}^2 \sin^2(q_1) \dot{q}_1 = l_{c1}^2 [\cos^2(q_1) + \sin^2(q_1)] \dot{q}_1 \quad (2.106)$$

Por identidades trigonométricas $\cos^2(q_1) + \sin^2(q_1) = 1$ entonces:

$$\|\mathbf{v}_1\|^2 = l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 \quad (2.107)$$

Cuadrado de la rapidez del eslabón 2

$$\|\mathbf{v}_2\|^2 = \mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_2 \quad (2.108)$$

$$\|\mathbf{v}_2\|^2 = [[l_1 \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_1 + q_2)] \dot{q}_1 + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) \dot{q}_2]^2 + [[l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2)] \dot{q}_1 + l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \dot{q}_2]^2 \quad (2.109)$$

Desarrollando los cuadrados y posteriormente reduciendo las expresiones mediante identidades trigonométricas se obtiene lo siguiente:

$$\|\mathbf{v}_2\|^2 = [l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(q_2)] \dot{q}_1^2 + l_{c2}^2 \dot{q}_2^2 + 2[l_1 l_{c2} \cos(q_2) + l_{c2}^2] \dot{q}_1 \dot{q}_2 \quad (2.110)$$

Paso 3: Ahora que ya se tiene la cinemática diferencial y con esta, el cuadrado de la rapidez de cada eslabón es posible obtener las funciones de energía cinética y potencial de este robot Retomando la ecuación (2.12) la cual define la energía cinética $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$:

$$\mathcal{K}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) = \frac{1}{2}m_i\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_i + \frac{1}{2}\mathcal{I}_i \left[\sum_{k=1}^n \dot{q}_k \right]^2 \quad (2.111)$$

La energía cinética $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ del robot manipulador de dos grados de libertad, está dada por la siguiente expresión:

$$\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathcal{I}_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_2^T\mathbf{v}_2 + \frac{1}{2}\mathcal{I}_2[\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2 \quad (2.112)$$

Sustituyendo $\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2^T\mathbf{v}_2$ con los valores obtenidos en el paso dos y desarrollando la expresión, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} [m_1l_{c1}^2 + \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + m_2l_1^2 + m_2l_{c2}^2 + 2m_2l_1l_{c2} \cos(q_2)] \dot{q}_1^2 \\ &+ \frac{1}{2} [\mathcal{I}_2 + m_2l_{c2}^2] \dot{q}_2^2 + [m_2l_1l_{c2} \cos(q_2) + m_2l_{c2}^2 + \mathcal{I}_2] \dot{q}_1\dot{q}_2 \end{aligned} \quad (2.113)$$

Por otro lado, la energía potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ para ambos eslabones está dada por:

$$\mathcal{U}(\mathbf{q}) = m_1gl_{c1}[1 - \cos(q_1)] + m_2g[[l_1 + l_{c2}] - [l_1 \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_1 + q_2)]] \quad (2.114)$$

De este modo, el Lagrangiano $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ del robot antropomórfico de dos grados de libertad es:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}) \quad (2.115)$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} [m_1l_{c1}^2 + I_1 + I_2 + m_2l_1^2 + m_2l_{c2}^2 + 2m_2l_1l_{c2} \cos(q_2)] \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} [\mathcal{I}_2 + m_2l_{c2}^2] \dot{q}_2^2$$

$$+ [m_2l_1l_{c2} \cos(q_2) + m_2l_{c2}^2 + \mathcal{I}_2] \dot{q}_1\dot{q}_2 - m_1gl_{c1}[1 - \cos(q_1)] - m_2g[[l_1 + l_{c2}] + [l_1 \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_1 + q_2)]] \quad (2.116)$$

Paso 4: Para obtener las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange se realizan derivadas parciales del Lagrangiano respecto a $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$

$$\tau_1 = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_1} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_1} + \mathbf{F}_1(\dot{\mathbf{q}}) \quad (2.117)$$

$$\tau_2 = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_2} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_2} + \mathbf{F}_2(\dot{\mathbf{q}}) \quad (2.118)$$

Al evaluar las expresiones que conforman la ecuación anterior para el caso del robot de dos grados de libertad, se tienen las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_1} = [m_1 l_{c1}^2 + \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2)] \dot{q}_1 + [m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + m_2 l_{c2}^2 + \mathcal{I}_2] \dot{q}_2 \quad (2.119)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_1} \right] &= [m_1 l_{c1}^2 + \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2)] \ddot{q}_1 + [m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + m_2 l_{c2}^2 + \mathcal{I}_2] \ddot{q}_2 \\ &\quad - 2m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2^2 \end{aligned} \quad (2.120)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_1} = m_1 g l_{c1} \sin(q_1) + m_2 g [l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2)] \quad (2.121)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_2} = [m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + m_2 l_{c2}^2 + \mathcal{I}_2] \dot{q}_1 + [\mathcal{I}_2 + m_2 l_{c2}^2] \dot{q}_2 \quad (2.122)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_2} \right] = [m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + m_2 l_{c2}^2 + \mathcal{I}_2] \ddot{q}_1 + [\mathcal{I}_2 + m_2 l_{c2}^2] \ddot{q}_2 - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2 \dot{q}_1 \quad (2.123)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_2} = m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1^2 + m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_2 g l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \quad (2.124)$$

Modelo dinámico del robot antropomórfico de 2 gdl Aplicando las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange que se obtuvieron en el paso cuatro se escriben los pares aplicados al robot de 2gdl incluyendo el fenómeno de fricción.

Para el eslabón 1 (τ_1):

$$\begin{aligned} \tau_1 = & [m_1 l_{c1}^2 + \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2)] \ddot{q}_1 + [m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + m_2 l_{c2}^2 + \mathcal{I}_2] \ddot{q}_2 \\ & - 2m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2^2 + m_1 g l_{c1} \sin(q_1) + m_2 g [l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2)] \\ & + b_1 \dot{q}_1 + f_{c1} \text{signo}(\dot{q}_1) + [1 - |\text{signo}(\dot{q}_1)|] \text{sat}(\tau_1; \bar{f}_1) \end{aligned} \quad (2.125)$$

Para el eslabón 2 (τ_2):

$$\begin{aligned} \tau_2 = & [m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + m_2 l_{c2}^2 + \mathcal{I}_2] \ddot{q}_1 + [\mathcal{I}_2 + m_2 l_{c2}^2] \ddot{q}_2 + m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1^2 + m_2 g l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \\ & + b_2 \dot{q}_2 + f_{c2} \text{signo}(\dot{q}_2) + [1 - |\text{signo}(\dot{q}_2)|] \text{sat}(\tau_2; \bar{f}_2) \end{aligned} \quad (2.126)$$

El modelo dinámico de un robot de n gdl es:

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + B \dot{\mathbf{q}} + F_c \text{signo}(\dot{\mathbf{q}}) + [1 - |\text{signo}(\dot{\mathbf{q}})|] \text{sat}(\boldsymbol{\tau}; \mathbf{f}_e) \quad (2.127)$$

Por lo que el modelo dinámico del robot de 2 gdl se puede escribir de forma matricial como sigue:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 & m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + \mathcal{I}_2 \\ m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + \mathcal{I}_2 & m_2 l_{c2}^2 + \mathcal{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} 2m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2 & -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2 \\ m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} l_{c1} m_1 \sin(q_1) + m_2 l_1 \sin(q_1) + m_2 l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \\ l_{c2} m_2 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} b_1 \dot{q}_1 + f_{c1} \text{signo}(\dot{q}_1) + [1 - |\text{signo}(\dot{q}_1)|] \text{sat}(\tau_1; \bar{f}_1) \\ b_2 \dot{q}_2 + f_{c2} \text{signo}(\dot{q}_2) + [1 - |\text{signo}(\dot{q}_2)|] \text{sat}(\tau_2; \bar{f}_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.128)$$

El modelo dinámico puede ser expresado como una ecuación diferencial ordinaria (ode) de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ M^{-1}(\mathbf{q}) [\boldsymbol{\tau} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - B \dot{\mathbf{q}} - F_c \text{signo}(\dot{\mathbf{q}}) - F_e (1 - |\text{signo}(\dot{\mathbf{q}})|)] \end{bmatrix} \quad (2.129)$$

Capítulo 3: Esquema de control integral

3.1 Introducción

A lo largo de este capítulo se abordarán temas más específicos relacionados con la propuesta y análisis del algoritmo de control PID no lineal, en términos generales, se desarrollará una estructura de control PID que esté compuesta por funciones trigonométricas hiperbólicas como lo son $\sinh(\theta)$ o $\cosh(\theta)$. Para dar sustento científico teórico a este algoritmo de control, es necesario evaluar la estabilidad del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado mediante la teoría de estabilidad de Lyapunov, para lo cual es conveniente conocer lo que establece dicha teoría, así mismo, al tratarse de una propuesta de un control PID, resulta importante conocer las características de dicha estructura, así como la herramienta empleada para evaluar el desempeño de los algoritmos de control PD, PID lineal y PID hiperbólico, una vez que los puntos anteriores han sido cubiertos será posible llevar a cabo el análisis correspondiente de estabilidad en el sentido de Lyapunov, mediante la propuesta de una función estricta de Lyapunov para obtener los resultados de este análisis.

3.2 Teoría de estabilidad de Lyapunov

En esta sección se revisará la teoría de estabilidad de Lyapunov, esta herramienta será usada para analizar las propiedades de estabilidad del punto de equilibrio de la ecuación de lazo cerrado (sistema dinámico) formado por el modelo dinámico del robot manipulador y la estructura del algoritmo de control.

3.2.1 Definiciones básicas

Considere un sistema dinámico el cual satisface:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (3.1)$$

se asumirá que $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ cumple con la condición 3.1, continua con respecto a \mathbf{x} , uniforme en t y continua en t .

Un punto $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ es un punto de equilibrio de (3.1) si $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*, t) = \mathbf{0}$, se dice que un punto de equilibrio es localmente estable si todas las soluciones que inician cerca de \mathbf{x}^* permanecen cerca de este punto para todo tiempo, \mathbf{x}^* es localmente asintóticamente estable si \mathbf{x}^* es localmente estable y además todas las soluciones que inician cerca de \mathbf{x}^* tienden hacia \mathbf{x}^* como $t \rightarrow \infty$.

Definición 3.1 *Punto de equilibrio*

Un vector constante $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ es un estado de equilibrio o punto de equilibrio del sistema dinámico $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ si se cumple:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}, \quad \forall t \geq 0 \quad (3.2)$$

si la condición inicial $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ cumple con ser un punto de equilibrio del sistema entonces este satisface:

- $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^* \quad \forall t \geq 0,$
- $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0} \quad \forall t \geq 0.$

Normalmente se elige el origen del espacio de estados $\mathbb{R}^n : (\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n)$ como un punto de equilibrio del sistema descrito por la ecuación (3.1). De no ser así, es posible realizar un cambio de coordenadas adecuado para demostrar que cualquier punto de equilibrio puede colocarse en el origen del espacio de estados \mathbb{R}^n .

Es posible que la ecuación diferencial que describe al sistema tenga más de un punto de equilibrio, dependiente del sistema puede tratarse incluso de un número infinito de ellos y más aún, puede no existir ningún punto de equilibrio. A continuación se explican los diferentes tipos de sistemas dinámicos y así mismo los tres casos mencionados anteriormente.

Sistemas dinámicos lineales

Para este tipo de sistemas, se pueden dar dos tipos de posibilidades para la existencia del punto de equilibrio.

$$\dot{x} = -ax$$

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$$

- \exists un único punto de equilibrio si $a \neq 0$ y $A^{-1} \exists$, respectivamente.
- \exists un número infinito de puntos de equilibrio si $a = 0$ y $A^{-1} \nexists$, respectivamente. Todos los puntos de equilibrio forman un continuo, es decir, están pegados unos con respecto a otros puntos de equilibrio.

Sistemas dinámicos no lineales

En este tipo de sistemas, existen más posibilidades para la existencia del punto de equilibrio.

- Único punto de equilibrio: $\dot{x} = x^3, x = 0.$
- Número infinito de puntos de equilibrio: $\dot{x} = \sin(x), x = \pm n\pi,$ pero a diferencia de un sistema lineal, los puntos de equilibrio están separados por vecindades de radio π
- Número finito de puntos de equilibrio: $\dot{x} = x(x - 1), x = 0, x = 1.$
- No tiene puntos de equilibrio: $\dot{x} = e^x,$ en este caso, no procede el análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov.

Definición 3.2 *Estabilidad en el sentido de Lyapunov (punto de equilibrio estable)*

El punto de equilibrio $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ de (3.1) es estable en el sentido de Lyapunov en $t = t_0$ si para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta(t_0, \epsilon) > 0$ tal que:

$$\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{0}\| < \delta \quad \rightarrow \quad \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{0}\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0. \quad (3.3)$$

La estabilidad de Lyapunov no requiere que las trayectorias empezando cerca del origen tiendan al origen asintóticamente.

Definición 3.3 *Estabilidad asintótica y estabilidad asintótica global*

Un punto de equilibrio $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ de (3.1) es asintóticamente estable en $t = t_0$ si

1.- $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ es estable

2.- $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ es localmente atractivo; existe un $\delta(t_0)$ tal que

$$\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{0}\| < \delta \quad \rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (3.4)$$

Se dice que un punto de equilibrio \mathbf{x}^* es globalmente estable si este es estable para todas las condiciones iniciales $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, es decir:

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta \quad \rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x}(t_0) \in \mathbb{R}^n \quad (3.5)$$

Definición 3.4 *Inestabilidad*

Se dice que un punto de equilibrio es inestable si éste no es estable. Sin embargo, para asegurar lo anterior se debe estar seguro de que es posible negar la definición de estabilidad para asegurar inestabilidad es decir que existe al menor un $\epsilon > 0$ para el que no es posible encontrar un $\delta > 0$ que cumpla lo siguiente:

$$\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{0}\| < \delta \quad \rightarrow \quad \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{0}\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0. \quad (3.6)$$

Definición 3.5 *Estabilidad exponencial, rango de convergencia*

El punto de equilibrio $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ es un punto de equilibrio exponencialmente estable de (3.1) si existen constantes $m, \alpha > 0$ y $\epsilon > 0$ tales que:

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq m e^{-\alpha(t-t_0)} \|\mathbf{x}(t_0)\| \quad (3.7)$$

para todo $\|\mathbf{x}(t_0)\| \leq \epsilon$ y $t \geq t_0$. La constante α es llamada rango de convergencia.

3.2.2 El método directo de Lyapunov

También llamado segundo método de Lyapunov, permite determinar la estabilidad del sistema sin resolver la ecuación diferencial (3.1). Este método es una generalización de la idea de que si hay una medición de energía en el sistema entonces se puede estudiar el rango de cambio de energía del sistema para asegurar estabilidad. Es necesario definir qué significa una medición de energía, se tiene una B_ϵ que es una circunferencia de tamaño ϵ alrededor del origen, $B_\epsilon = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| < \epsilon\}$.

Definición 3.6 *Funciones definidas positivas en forma local*

Una función continua $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es una función definida en forma local si para algún $\epsilon > 0$ continua y estrictamente creciente función $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$V(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0} \quad y \quad V(\mathbf{x}, t) \geq \alpha(\|\mathbf{x}\|) \quad \forall \mathbf{x} \in B_\epsilon, \quad \forall t \geq 0 \quad (3.8)$$

Definición 3.7 *Funciones definidas positivas*

Una función continua $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es una función definida positiva si satisface las condiciones de la definición anterior y adicionalmente $\alpha(p) \rightarrow \infty$ como $p \rightarrow \infty$.

Definición 3.8 *Funciones decrecientes*

Una función continua $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es decreciente para algún $\epsilon > 0$ continua y estrictamente función decreciente $\beta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$V(\mathbf{x}, t) \geq \beta(\|\mathbf{x}\|) \quad \forall \mathbf{x} \in B_\epsilon, \quad \forall t \geq 0 \quad (3.9)$$

Definición 3.9 *Función candidata de Lyapunov*

Una función candidata de Lyapunov $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ para el punto de equilibrio $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$, debe ser una función definida positiva y con derivadas parciales continuas. Expresado matemáticamente esto es:

- $V(\mathbf{x}, t)$; Función definida positiva.
- $\frac{\partial V(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}}$; Función continua y diferenciable con respecto a \mathbf{x} .
- $\frac{\partial V(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$; Función continua y diferenciable con respecto a t .

Definición 3.10 *Derivada de una función candidata de Lyapunov*

Sea una función candidata de Lyapunov $V(\mathbf{x}, t)$, la derivada de dicha función denotada por $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ está dada por:

$$\dot{V}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial V(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial V(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (3.10)$$

Definición 3.11 *Función de Lyapunov*

Una función candidata de Lyapunov $V(\mathbf{x}, t)$ resulta en una función de Lyapunov si su derivada satisface lo siguiente:

$$\dot{V}(\mathbf{x}, t) \leq 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (3.11)$$

Una vez desarrollado el método directo de Lyapunov se pueden obtener dos resultados:

- si se tiene una función $V(\mathbf{x}, t)$ definida positiva en forma local y $\dot{V}(\mathbf{x}, t) \leq 0$, entonces se concluye estabilidad del punto de equilibrio.
- si se tiene una función $V(\mathbf{x}, t)$ definida positiva en forma local y $\dot{V}(\mathbf{x}, t) < 0$, entonces se concluye estabilidad asintótica del punto de equilibrio.

Por último, si la propuesta de una función definida positiva $V(\mathbf{x}, t) > 0$ resulta en $\dot{V}(\mathbf{x}, t) > 0$, no se puede concluir nada sobre la estabilidad del punto de equilibrio. En dicho caso, significa que la función candidata de Lyapunov está mal propuesta y se debe mejorar la estructura matemática.

3.3 Norma \mathcal{L}

La notación asociada a la norma \mathcal{L} es \mathcal{L}_n^p (léase *ele – pe – ene*).

De manera general, el espacio \mathcal{L}_n^p para $1 \leq p < \infty$ es definido como el conjunto de funciones continuas $\mathbf{f} : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que,

$$\mathcal{L}_n^p[\mathbf{f}] = \left(\int_0^\infty \|\mathbf{f}(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad (3.12)$$

donde, $\mathcal{L}_n^p[\mathbf{f}]$ representa la norma \mathcal{L}_n^p de la función \mathbf{f} , el subíndice p en \mathcal{L}_n^p se refiere al tipo de norma p usado para definir el espacio, mientras que el número n indica la dimensión de \mathbf{f} . Al tipo de espacio definido por $\mathcal{L}_n^p \forall p \in [1, \infty]$, se le denomina espacio lineal normado.

- La utilidad de la norma \mathcal{L} se ubica en aplicaciones de estabilidad de sistemas dinámicos $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$
- También, para obtener cotas en variables de estado.
- Es una herramienta fundamental para evaluar el desempeño de algoritmos de control de robots manipuladores.

3.3.1 Propiedades de la norma $\mathcal{L}(f)$

La norma $\mathcal{L}_n^p[f]$ satistace las siguientes propiedades:

- La norma $\mathcal{L}_n^p[f]$ de la función f es cero \iff la función $f = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.
- La norma $\mathcal{L}_n^p[f]$ de la función f es positiva, si la función f es diferente de cero.
- La norma $\mathcal{L}_n^p[f]$ satisface la desigualdad del triángulo:

$$\mathcal{L}_n^p[f_1 + f_2] \leq \mathcal{L}_n^p[f_1] + \mathcal{L}_n^p[f_2] \quad \forall f_1, f_2 \in \mathbb{R}^n \quad (3.13)$$

El espacio \mathcal{L}_∞^n consiste del conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ tales que sus normas euclidianas sean acotadas, es decir,

$$\mathcal{L}_\infty^n[f] = \sup_{t \geq 0} \|f(t)\| < \infty$$

donde sup indica el *supremo* o la cota superior mas pequeña.

Por notación, \mathcal{L}_∞ sirve para representar el espacio \mathcal{L}_∞^1 ($n = 1$).

El espacio \mathcal{L}_2^n es el conjunto de todas las funciones continuas $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que:

$$\mathcal{L}_2^n[f] = \sqrt{\int_0^\infty f^T(t)f(t)dt} = \sqrt{\int_0^\infty \|f(t)\|^2 dt} < \infty. \quad (3.14)$$

entonces la integral del cuadrado de la norma euclidiana es medible y está acotada superiormente.

La norma $\mathcal{L}_2[f]$ es ampliamente empleada para evaluar el desempeño de algoritmos de control de robots manipuladores. La interpretación de la norma $\mathcal{L}_2[f]$ y el desempeño del esquema de control a evaluar es inversamente proporcional al desempeño.

Por notación, \mathcal{L}_2 denota el espacio \mathcal{L}_2^1 ($n = 1$).

Considérese una función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$. Supóngase que la función f satisface las siguientes hipótesis:

- $f, \dot{f} \in L_\infty^n$
- $f \in L_\infty^n$

entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \rightarrow \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.

3.4 Esquema de control PID

Con el objetivo de mejorar el desempeño del controlador proporcional derivativo PD en forma global se añade un componente integral a dicho control, con la finalidad de llevar a cero el error de posición en estado estacionario. Bajo lo mencionado anteriormente, surge el controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID) en el control de robots manipuladores.

Dicho esquema de control PID se expresa de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\tau} = K_p \tilde{\boldsymbol{q}} - K_v \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} + K_i \int_0^t \tilde{\boldsymbol{q}}(\sigma) d\sigma + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) \quad (3.15)$$

donde, $K_p, K_v, K_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son las ganancias proporcional, derivativa e integral respectivamente y cumplen con ser matrices simétricas, definidas positivas.

Durante este capítulo se estudiará el sistema de control formado por el control PID y un robot manipulador cuyo modelo dinámico se mostró en el capítulo anterior, retomando las ecuaciones mostradas en dicho capítulo, el modelo dinámico de un robot manipulador de n gdl esta dado por la ecuación (2.16).

$$M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + B\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (2.16)$$

A partir de una posición deseada \boldsymbol{q}_d constante, se realizará una sintonía en el controlador PID la cual debe cumplir con $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\boldsymbol{q}}(t) = \mathbf{0}$ siempre y cuando las condiciones iniciales del error de posición ($\tilde{\boldsymbol{q}}(0)$) y la velocidad ($\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}(0)$) sean suficientemente pequeños, es decir, deberá demostrarse estabilidad asintótica en forma local del origen.

Debido a la acción integral del controlador PID, aparece una nueva variable de estado, que será denotada por $\boldsymbol{\zeta}$, y la derivada temporal de esta variable de estado es $\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \tilde{\boldsymbol{q}}$.

Dado lo anterior, la ley de control PID se puede expresar mediante las dos ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= K_p \tilde{\boldsymbol{q}} + K_v \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} + K_i \boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) \\ \dot{\boldsymbol{\zeta}} &= \tilde{\boldsymbol{q}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Al igualar la ley de control de la ecuación (3.15) con el modelo dinámico del robot (ecuación(2.16)) se obtiene la ecuación en lazo cerrado

$$\begin{aligned} M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + B\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) &= K_p \tilde{\boldsymbol{q}} + K_v \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} + K_i \boldsymbol{\zeta} \\ \dot{\boldsymbol{\zeta}} &= \tilde{\boldsymbol{q}} \end{aligned}$$

Expresando lo anterior en forma vectorial se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\zeta} \\ \tilde{\boldsymbol{q}} \\ \tilde{\boldsymbol{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{q}} \\ -\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} \\ M(\boldsymbol{q})^{-1}[\mathbf{K}_p \tilde{\boldsymbol{q}} - \mathbf{K}_v \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} + \mathbf{K}_i \boldsymbol{\zeta} - C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} - B\dot{\boldsymbol{q}}] \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Los puntos de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado tienen la forma $[\zeta^T \quad \tilde{q}^T \quad \dot{\tilde{q}}^T]^T = [\zeta^{*T} \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T]^T$, donde:

$$\zeta^* = K_i^{-1}[\mathbf{C}(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d)\dot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{g}(\mathbf{q}_d)]$$

donde $\delta \in \mathbb{R}^n$ es un vector de forma que $\zeta^* = K_i^{-1}K_p\tilde{q}$, particularmente, el origen de la ecuación de lazo cerrado es un punto de equilibrio.

En el supuesto caso de que la posición articular deseada sea una función arbitraria del tiempo y no tienda hacia un vector constante, la ecuación en lazo cerrado no tiene ningún punto de equilibrio, por lo que el análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov no puede proceder. A partir de lo anterior, es posible decir que una condición necesaria para la existencia y unicidad del punto de equilibrio es que la posición deseada $q_d(t)$ sea constante, de ahí que el punto de equilibrio será:

$$\begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_i^{-1}\mathbf{g}(\mathbf{q}_d) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3n} \quad (3.19)$$

3.4.1 Función candidata de Lyapunov

Para el estudio de estabilidad del origen del espacio de estados, se realiza la propuesta de la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \mathbf{w}) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha}K_i & 0 & 0 \\ 0 & \alpha K_v & -\alpha M(q) \\ 0 & -\alpha M(q) & M(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{2}\tilde{q}^T[\mathbf{K}_p - \frac{1}{\alpha}\mathbf{K}_i]\tilde{q} + \mathcal{U}(\mathbf{q}_d - \tilde{q}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}_d) + \tilde{q}^T \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde, $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ es la energía potencial del robot y α la constante utilizada en el cambio de variable la cual además, debe elegirse de modo que cumpla con:

$$\frac{\lambda_{\min}\{M\}\lambda_{\min}\{K_v\}}{\lambda_{\max}^2\{M\}} > \alpha > \frac{\lambda_{\max}\{K_i\}}{\lambda_{\min}\{K_p\} - k_g} \quad (3.21)$$

Es necesario comprobar que la función propuesta sea una función definida positiva al menos localmente.

Tomando el siguiente término de la función candidata de Lyapunov

$$\frac{1}{2}\tilde{q}^T[\mathbf{K}_p - \frac{1}{\alpha}\mathbf{K}_i]\tilde{q} + \mathcal{U}(\mathbf{q}_d - \tilde{q}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}_d) + \tilde{q}^T \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) \quad (3.22)$$

la función anterior cumplirá con ser definida positiva globalmente en \tilde{q} siempre y cuando:

$$\lambda_{\min}\{K_p - \frac{1}{\alpha}K_i\} > k_g \quad (3.23)$$

así mismo, se cumple lo siguiente:

$$\lambda_{\min}\{K_p\} - \frac{1}{\alpha}\lambda_{Max}\{K_i\} > k_g \quad (3.24)$$

Dado lo anterior, se puede afirmar que la función candidata de Lyapunov cumple:

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{w}) \geq \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha}K_i & 0 & 0 \\ 0 & \alpha K_v & -\alpha M(q) \\ 0 & -\alpha M(q) & M(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

y haciendo uso de las desigualdades que se muestran a continuación:

$$\frac{1}{\alpha}\mathbf{w}^T \mathbf{K}_i \mathbf{w} \geq \frac{1}{\alpha}\lambda_{\min}\{\mathbf{K}_i\} \|\mathbf{w}\|^2, \quad \alpha \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_v \tilde{\mathbf{q}} \geq \alpha \lambda_{\min}\{\mathbf{K}_v\} \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2,$$

$$\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(q) \dot{\mathbf{q}} \geq \lambda_{\min}\{\mathbf{M}\} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2, \quad -\alpha \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(q) \dot{\mathbf{q}} \geq -\alpha \lambda_{Max}\{\mathbf{M}\} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\mathbf{q}}\|, \quad (3.26)$$

se obtiene la siguiente cota mínima para la función candidata de Lyapunov:

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{w}) \geq \frac{\alpha}{2} \begin{bmatrix} \|\mathbf{w}\| \\ \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha^2}\lambda_{\min}\{K_i\} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\min}\{K_v\} & -\lambda_{Max}\{M\} \\ 0 & -\lambda_{Max}\{M\} & \frac{1}{\alpha}\lambda_{\min}\{M\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\mathbf{w}\| \\ \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

con lo anterior se prueba que $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{w})$ es definida positiva en forma global y radialmente desacotada puesto que α debe cumplir la condición de la ecuación (3.21).

3.4.2 Derivada temporal de la función candidata de Lyapunov

Mediante operaciones algebraicas, usando la propiedad de antisimetría y la igualdad $\dot{M}(q) = C(q, \dot{q}) + C(q, \dot{q})^T$, la derivada temporal de la función candidata de Lyapunov se puede expresar de la siguiente manera:

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{w}) = -\dot{\mathbf{q}}^T [K_v - \alpha M(q)] \tilde{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T [\alpha K_p - K_i] \tilde{\mathbf{q}} - \alpha \tilde{\mathbf{q}}^T C(q, \dot{q})^T \dot{\mathbf{q}} - \alpha \tilde{\mathbf{q}}^T [g(q_d) - g(q)] \quad (3.28)$$

Ahora es necesario demostrar que existe una bola \mathcal{D} de radio $\eta > 0$ alrededor del origen del espacio de estado:

$$\mathcal{D} = \left\{ \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \right\| \leq \eta \right\} \quad (3.29)$$

en donde $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{w}) \leq 0$.

Dado lo anterior, la condición impuesta sobre α resulta:

$$\frac{\lambda_{\min}\{M\} \lambda_{\min}\{K_v\} [\lambda_{\min}\{K_p\} - k_g]}{\lambda_{Max}\{K_i\}} > \lambda_{Max}^2\{M\} \quad (3.30)$$

Teniendo en cuenta que $k_{C_1} \geq 0$ y que $\lambda_{Max}\{M\} > \lambda_{min}\{M\}$ la expresión anterior resulta:

$$\frac{1}{k_{C_1}} \left[\frac{\lambda_{min}\{K_v\}[\lambda_{min}\{K_p\} - k_g]}{\lambda_{Max}\{K_i\}} - \lambda_{Max}\{M\} \right] \geq 0 \quad (3.31)$$

Ahora conviene hacer el centro del radio η de la bola \mathcal{D} :

$$\eta = \frac{1}{k_{C_1}} \left[\frac{\lambda_{min}\{K_v\}[\lambda_{min}\{K_p\} - k_g]}{\lambda_{Max}\{K_i\}} - \lambda_{Max}\{M\} \right] \quad (3.32)$$

El radio η será mayor a medida que $\lambda_{min}\{K_p\}$ y $\lambda_{min}\{K_v\}$ sean mayores, y se verá afectada de forma contraria si $\lambda_{Max}\{K_i\}$ es menor.

Es momento de demostrar que $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{w}) \leq 0$ dentro del espacio \mathcal{D} , para esta región se tiene que

$$\|\dot{\mathbf{q}}\| < \eta \quad (3.33)$$

A partir de la ecuación (3.31) se tiene que:

$$\|\dot{\mathbf{q}}\| < \frac{1}{k_{C_1}} \left[\frac{\lambda_{min}\{K_v\}[\lambda_{min}\{K_p\} - k_g]}{\lambda_{Max}\{K_i\}} - \lambda_{Max}\{M\} \right] \quad (3.34)$$

lo que después de ciertas manipulaciones se llega a:

$$\frac{\lambda_{min}\{K_v\}}{\lambda_{Max}\{M\} + k_{C_1}\|\dot{\mathbf{q}}\|} > \frac{\lambda_{Max}\{K_i\}}{\lambda_{min}\{K_p\} - k_g} \quad (3.35)$$

lo cual resulta válido dentro de \mathcal{D} , por lo que dadas las condiciones de α , siempre podrá seleccionarse de forma que se cumpla lo siguiente:

$$\frac{\lambda_{min}\{K_v\}}{\lambda_{Max}\{M\} + k_{C_1}\|\dot{\mathbf{q}}\|} > \alpha > \frac{\lambda_{Max}\{K_i\}}{\lambda_{min}\{K_p\} - k_g} \quad (3.36)$$

con lo que se concluye que $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{w}) \leq 0$ en la región \mathcal{D} .

3.4.3 Estabilidad asintótica

El teorema de LaSalle asegura estabilidad asintótica global pero ya que $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{w})$ es semidefinida negativa localmente, el teorema no puede utilizarse directamente. Pero, si dentro del enunciado del teorema se cambia la afirmación y en vez de ser "para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ " se escribe "para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ suficientemente pequeño", se puede asegurar estabilidad asintótica local. Dicho lo anterior, el conjunto Ω es:

$$\Omega = \left\{ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3n} : \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{w}) = 0 \right\} \quad (3.37)$$

Si es resulta que $\tilde{\mathbf{q}} = 0$ y $\dot{\mathbf{q}}(t) = 0$ para todo $t \geq 0$, la solución $\mathbf{x}(t)$ pertenecerá a Ω , por consecuencia también se debe cumplir que $\ddot{\mathbf{q}}(t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Si lo anterior se cumple para la ecuación en lazo cerrado del sistema, entonces se concluye que si $\mathbf{x}(t) \in \Omega$ para todo $t \geq 0$, entonces:

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{0} \quad (3.38)$$

$$\mathbf{0} = \frac{1}{\alpha} M(q_d)^{-1} K_i \mathbf{w}(t) \quad (3.39)$$

Por lo tanto, $[\mathbf{w}(0)^T \quad \tilde{\mathbf{q}}(0)^T \quad \dot{\mathbf{q}}(0)^T] = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{3n}$ es la única condición inicial en Ω para la cual $\mathbf{x}(t) \in \Omega$ para todo $t \geq 0$, y así finalmente se concluye que el origen de la ecuación en lazo cerrado es un punto de equilibrio asintóticamente estable en forma local.

3.4.4 Procedimiento de sintonía

Gracias al análisis de estabilidad realizado, es posible obtener un procedimiento para la sintonía del controlador PID, dicho procedimiento resulta en términos de los valores propios de las matrices de ganancia:

$$\lambda_{Max}\{K_i\} \geq \lambda_{min}\{K_i\} < 0 \quad (3.40)$$

$$\lambda_{Max}\{K_p\} \geq \lambda_{min}\{K_p\} < k_g \quad (3.41)$$

$$\lambda_{Max}\{K_v\} \geq \lambda_{min}\{K_v\} < \frac{\lambda_{Max}\{K_i\}}{\lambda_{min}\{K_p\} - k_g} \cdot \frac{\lambda_{Max}^2\{M\}}{\lambda_{min}\{M\}} \quad (3.42)$$

$$\frac{\lambda_{min}\{K_v\}}{\lambda_{Max}\{M\} + k_{C_1} \|\dot{\mathbf{q}}\|} > \alpha > \frac{\lambda_{Max}\{K_i\}}{\lambda_{min}\{K_p\} - k_g}$$

3.4.5 Análisis del punto de equilibrio

Para iniciar con el análisis del esquema de control PID lineal, se debe tener la ecuación en lazo cerrado, dicha ecuación se obtiene de igualar el modelo dinámico del robot manipulador de n gdl (ecuación 2.16) y el esquema de control (ecuación 3.43)

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (2.16)$$

$$\boldsymbol{\tau} = K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_i \int_0^t \tilde{\mathbf{q}}(\sigma) d\sigma - K_v \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (3.43)$$

Al igualar las ecuaciones 2.16 y 3.43 se obtiene la siguiente expresión:

$$K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_i \int_0^t \tilde{\mathbf{q}}(\sigma) d\sigma - K_v \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (3.44)$$

donde.

- K_p, K_v, K_i son matrices diagonales, definidas positivas las cuales corresponden a las ganancias proporcional, derivativa e integral, respectivamente.
- $\int_0^t \tilde{\mathbf{q}}(\sigma) d\sigma = \boldsymbol{\rho} \rightarrow \dot{\boldsymbol{\rho}} = \tilde{\mathbf{q}}$

El término de par gravitacional se eliminará matemáticamente de la ecuación 3.44, de este modo, al reescribir considerando lo anterior y escribiendo la integral con $\boldsymbol{\rho}$, se obtiene la siguiente expresión:

$$K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_i \int_0^t \tilde{\mathbf{q}}(\sigma) d\sigma - K_v \dot{\mathbf{q}} = M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + B \dot{\mathbf{q}} \quad (3.45)$$

Es posible expresar la ecuación en lazo cerrado en su forma matricial, esto después de realizar las debidas operaciones a la ecuación anterior, posteriormente, la ecuación en lazo cerrado en forma matricial se escribe de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\rho} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_i \boldsymbol{\rho} - K_v \dot{\mathbf{q}} - B \dot{\mathbf{q}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}] \\ K_i \boldsymbol{\rho} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Ahora que se obtuvo la ecuación en lazo cerrado es posible continuar con el análisis de la existencia y unicidad del punto de equilibrio como sigue:

i) $-\dot{\mathbf{q}} = I \dot{\mathbf{q}} = 0 \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$

$\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad.

ii) $M(\mathbf{q})^{-1} [K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_i \boldsymbol{\rho} - K_v \dot{\mathbf{q}} - B \dot{\mathbf{q}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}]$

- K_p, K_v, K_i son matrices diagonales, definidas positivas las cuales corresponden a las ganancias proporcional, derivativa e integral, respectivamente.
- $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal definida positiva con los coeficientes de fricción viscosa.

Puesto que $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \Rightarrow K_v \dot{\mathbf{q}} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$

$B \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$

$C(\mathbf{q}, \mathbf{0}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$C(\mathbf{q}, \mathbf{0}) \dot{\mathbf{q}}|_{\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{0}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$

$K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_i \boldsymbol{\rho} = \mathbf{0}$

$\Rightarrow \boldsymbol{\rho} = \int_0^t \tilde{\mathbf{q}}(\sigma) d\sigma = \mathbf{0} \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\rho} = \mathbf{0}$

iii) $K_i \boldsymbol{\rho} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$

\therefore El punto de equilibrio $[\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\rho}]^T = [\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}]^T \in \mathbb{R}^{3n}$ existe y es único.

3.4.6 Propuesta de la función estricta de Lyapunov

La función estricta de Lyapunov, resulta de una suma de términos cuadráticos de por combinaciones entre las variables de estado $\tilde{\mathbf{q}}$, $\dot{\mathbf{q}}$ y $\boldsymbol{\rho}$, la cual se puede ordenar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\rho}) = & \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{\epsilon_0 \boldsymbol{\rho}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{1 + \|\boldsymbol{\rho}\|} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\rho}^T K_i \boldsymbol{\rho} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}} \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0^2 \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}}}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} - \frac{\epsilon_0^2 \boldsymbol{\rho}^T M(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}}}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\rho}^T K_i \boldsymbol{\rho}
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Para probar que la función de Lyapunov sea definida positiva se obtienen las condiciones sobre ϵ_0 ; Esta constante que aparece en la función debe tomar valores dentro de cierto intervalo $(0, \gamma)$,

$$0 < \epsilon_0 < \gamma \tag{3.48}$$

donde, $\gamma \in \mathbb{R}_+$ y además:

$$\gamma = \sqrt{\frac{\lambda_{K_p}^{\max}}{\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\min}}} > \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} > 0 \tag{3.49}$$

$$\sqrt{\frac{\lambda_{K_i}^{\max}}{\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\min}}} > \frac{\epsilon_0}{1 + \|\boldsymbol{\rho}\|} > 0 \tag{3.50}$$

$$\sqrt[4]{\frac{\lambda_{K_i}^{\max}}{\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\min}}} > \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} > 0 \tag{3.51}$$

Para continuar con la demostración de estabilidad será necesario manipular la derivada de la función candidata de Lyapunov (3.47) lo cual se hará retomando las siguientes propiedades del modelo dinámico, las cuales se presentaron en el capítulo 2.

Propiedad 2.7 La matriz $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, se relaciona con la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ mediante la propiedad de antisimetría:

$$\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \left[\dot{M}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \mathbf{x} = 0 \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \tag{2.26}$$

donde, $\dot{M}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ resulta una matriz antisimétrica.

Propiedad 2.8 La derivada de la matriz de inercia $\frac{d}{dt}M(\mathbf{q})$ se relaciona con la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis de la siguiente forma:

$$\dot{M}(\mathbf{q}) = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T$$

Ahora la derivada con respecto al tiempo de la función candidata de Lyapunov (3.47).

$$\begin{aligned} \dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\rho}) &= \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{\epsilon_0 \boldsymbol{\rho}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}}{1 + \|\boldsymbol{\rho}\|} - \frac{\epsilon_0 \dot{\boldsymbol{\rho}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{1 + \|\boldsymbol{\rho}\|} - \frac{\epsilon_0 \boldsymbol{\rho}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{1 + \|\boldsymbol{\rho}\|} + \frac{\epsilon_0^2 \boldsymbol{\rho}^T \dot{\boldsymbol{\rho}} \boldsymbol{\rho}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{\|\boldsymbol{\rho}\| (1 + \|\boldsymbol{\rho}\|)^2} \\ &+ \boldsymbol{\rho}^T K_i \dot{\boldsymbol{\rho}} + \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} + \frac{\epsilon_0 \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}^T}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} - \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \\ &- \frac{\epsilon_0^2 \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| (1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} - \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \dot{\mathbf{q}} - \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} + \frac{\epsilon_0^2 \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}}}{2(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} - \frac{\epsilon_0^2 \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}}}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| (1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^3} \\ &- \frac{\epsilon_0^2 \dot{\boldsymbol{\rho}}^T M(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}}}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} + \frac{\epsilon_0^2 \boldsymbol{\rho}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} - \frac{\epsilon_0^2 \boldsymbol{\rho}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}}}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} - \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} \boldsymbol{\rho}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| (1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^3} + \dot{\boldsymbol{\rho}}^T K_i \boldsymbol{\rho} \quad (3.52) \end{aligned}$$

Con la finalidad de reducir términos de la ecuación (3.52), se sustituye el valor de la aceleración articular $\ddot{\mathbf{q}}$ la cual se encuentra en la ecuación en lazo cerrado formada por el modelo dinámico del robot y el esquema de control, al mismo tiempo se hace uso de la propiedad de antisimetría (propiedad 2.7) y la propiedad 2.8, esto tendrá como resultado simplificar considerablemente la ecuación (3.52) hasta llegar a escribir $\dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\rho})$ como se muestra a continuación en la ecuación (3.53):

$$\begin{aligned} \dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\rho}) &= \dot{\mathbf{q}}^T K_i \boldsymbol{\rho} - \dot{\mathbf{q}}^T K_v \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\boldsymbol{\rho}\|} \boldsymbol{\rho}^T K_p \tilde{\mathbf{q}} - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\boldsymbol{\rho}\|} \boldsymbol{\rho}^T K_i \boldsymbol{\rho} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\boldsymbol{\rho}\|} \boldsymbol{\rho}^T K_v \dot{\mathbf{q}} \\ &+ \frac{\epsilon_0}{1 + \|\boldsymbol{\rho}\|} \boldsymbol{\rho}^T B \dot{\mathbf{q}} - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\boldsymbol{\rho}\|} \boldsymbol{\rho}^T C^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{\epsilon_0 \dot{\boldsymbol{\rho}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{1 + \|\boldsymbol{\rho}\|} + \frac{\epsilon_0^2 \boldsymbol{\rho}^T \tilde{\mathbf{q}} \dot{\boldsymbol{\rho}} \boldsymbol{\rho}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{\|\boldsymbol{\rho}\| (1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} \\ &+ \dot{\mathbf{q}}^T K_i \boldsymbol{\rho} - \dot{\mathbf{q}}^T K_v \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} - \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} - \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T K_i \boldsymbol{\rho}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} + \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T K_v \dot{\mathbf{q}}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} + \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T C^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} + \frac{\epsilon_0 \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} - \frac{\epsilon_0^2 \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| (1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} - \frac{\epsilon_0^2 \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} \\
& -\frac{\epsilon_0^2 \tilde{\mathbf{q}}^T [C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \tilde{\mathbf{q}}}{2 (1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} - \frac{\epsilon_0^2 \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}}}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| (1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^3} - \frac{\epsilon_0^2 \dot{\boldsymbol{\rho}}^T M(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}}}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} \\
& + \frac{\epsilon_0^2 \boldsymbol{\rho}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} - \epsilon_0^2 \frac{\boldsymbol{\rho}^T [C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \tilde{\mathbf{q}}}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} - \frac{\epsilon_0^2 \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} \boldsymbol{\rho}^T M(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}}}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| (1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^3} + \dot{\boldsymbol{\rho}}^T K_i \boldsymbol{\rho} \tag{3.53}
\end{aligned}$$

A partir de la función simplificada gracias a las propiedades del modelo dinámico, se obtienen cotas superiores e inferiores de los términos que integran la ecuación (3.54):

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\rho}) & \leq \lambda_{K_i}^{\max} \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\boldsymbol{\rho}\| - \lambda_{K_v}^{\min} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 - \lambda_B^{\min} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + \frac{\lambda_{K_p}^{\max}}{1 + \|\boldsymbol{\rho}\|} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\boldsymbol{\rho}\| - \frac{\epsilon_0 \lambda_{K_i}^{\min}}{1 + \|\boldsymbol{\rho}\|} \|\boldsymbol{\rho}\|^2 \\
& + \frac{\epsilon_0 \lambda_{K_v}^{\max}}{1 + \|\boldsymbol{\rho}\|} \|\boldsymbol{\rho}\| \|\dot{\mathbf{q}}\| + \frac{\epsilon_0 \lambda_B^{\max}}{1 + \|\boldsymbol{\rho}\|} \|\boldsymbol{\rho}\| \|\dot{\mathbf{q}}\| + \frac{\epsilon_0 K_c}{1 + \|\boldsymbol{\rho}\|} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + \frac{\epsilon_0 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}}{1 + \|\boldsymbol{\rho}\|} \|\boldsymbol{\rho}\| \|\dot{\mathbf{q}}\| + \frac{\epsilon_0^2 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} \|\boldsymbol{\rho}\| \|\dot{\mathbf{q}}\| \\
& + \lambda_{K_i}^{\max} \|\boldsymbol{\rho}\| \|\dot{\mathbf{q}}\| - \lambda_{K_v}^{\min} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 - \lambda_B^{\min} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 - \frac{\epsilon_0 \lambda_{K_p}^{\min}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 + \frac{\epsilon_0 \lambda_{K_i}^{\max}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\boldsymbol{\rho}\| + \frac{\epsilon_0 \lambda_{K_v}^{\max}}{1 + \|\dot{\mathbf{q}}\|} \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\
& + \frac{\epsilon_0 \lambda_B^{\max}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\tilde{\mathbf{q}}\| + \frac{\epsilon_0 K_c}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + \frac{\epsilon_0 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + \frac{\epsilon_0^2 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \\
& + \frac{\epsilon_0^2 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\tilde{\mathbf{q}}\| + \frac{\epsilon_0^2 K_c}{2(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + \frac{\epsilon_0^2 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^3} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\mathbf{q}}\| + \frac{\epsilon_0^2 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 \\
& + \frac{\epsilon_0^2 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} \|\boldsymbol{\rho}\| \|\dot{\mathbf{q}}\| + \frac{\epsilon_0^2 K_c}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + \frac{\epsilon_0^2 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^3} \|\boldsymbol{\rho}\| \|\dot{\mathbf{q}}\| + \lambda_{K_i}^{\max} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\boldsymbol{\rho}\| \tag{3.54}
\end{aligned}$$

Posteriormente se agrupa cada término dependiendo de la combinación de variables a la que pertenecen quedando expresada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\rho}) \leq & - \overbrace{\left[2\lambda_{K_v}^{\min} + 2\lambda_B^{\min} - 2\frac{\epsilon_0 K_c}{1 + \|\boldsymbol{\rho}\|} - \frac{\epsilon_0 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} - \frac{\epsilon_0^2 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} - \frac{\epsilon_0^2 K_c}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} \right]}^{\alpha} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + \\
& \overbrace{\left[2\lambda_{K_i}^{\max} + \frac{\epsilon_0 \lambda_{K_v}^{\max}}{1 + \|\boldsymbol{\rho}\|} + \frac{\epsilon_0 \lambda_B^{\max}}{1 + \|\boldsymbol{\rho}\|} + \frac{\epsilon_0 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}}{1 + \|\boldsymbol{\rho}\|} + \frac{\epsilon_0^2 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}}{(1 + \|\boldsymbol{\rho}\|)^2} + \frac{\epsilon_0^2 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}}{(1 + \|\boldsymbol{\rho}\|)^3} + \frac{\epsilon_0^2 K_c}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} \right]}^{\mu} \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\boldsymbol{\rho}\| - \\
& \overbrace{\left[\frac{\epsilon_0 \lambda_{K_i}^{\min}}{1 + \|\boldsymbol{\rho}\|} \right]}^B \|\boldsymbol{\rho}\|^2 - \overbrace{\left[\frac{\epsilon_0 \lambda_{K_p}^{\min}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} - \frac{\epsilon_0^2 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\min}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \right]}^{\gamma} \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 + \overbrace{\left[\frac{2\epsilon_0 \lambda_{K_p}^{\max}}{1 + \|\boldsymbol{\rho}\|} + 2\lambda_{K_i}^{\max} + \frac{\epsilon_0 \lambda_{K_i}^{\max}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \right]}^{\omega} \|\boldsymbol{\rho}\| \|\tilde{\mathbf{q}}\| + \\
& \overbrace{\left[\frac{\epsilon_0 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}}{1 + \|\boldsymbol{\rho}\|} + \frac{\epsilon_0^2 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}}{(1 + \|\boldsymbol{\rho}\|)^2} + \lambda_{K_v}^{\max} + \frac{\epsilon_0 \lambda_{K_v}^{\max}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} + \frac{\epsilon_0 \lambda_B^{\max}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} + \frac{\epsilon_0^2 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} + \frac{\epsilon_0^2 K_c}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} + \frac{\epsilon_0^2 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^3} \right]}^{\Omega} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\mathbf{q}}\|
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Así mismo, es posible expresar la ecuación 3.65 de la siguiente forma:

$$\dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\rho}) \leq - \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \tilde{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\rho} \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & \frac{1}{2}\Omega & \frac{1}{2}\mu \\ \frac{1}{2}\Omega & \phi & \frac{1}{2}\omega \\ \frac{1}{2}\mu & \frac{1}{2}\omega & \beta \end{bmatrix}}_{\Theta} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \tilde{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\rho} \end{bmatrix} \tag{3.56}$$

Al asegurar que ϵ_0 se mantiene dentro de los intervalos establecidos, se demuestra la estabilidad asintótica global ya que la matriz Θ será definida positiva.

3.5 Esquema de control PID hiperbólico

Para iniciar el análisis del esquema de control PID hiperbólico es necesario tener la ecuación en lazo cerrado la cual se obtiene al igualar el modelo dinámico del robot manipulador de n gdl (ecuación 2.16) y el esquema de control (ecuación 3.57).

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (2.16)$$

$$\boldsymbol{\tau} = K_p \frac{\sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} + K_i \int_0^t \frac{\sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}(\sigma))}{1 + \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}(\sigma))} d\sigma - K_v \frac{\sinh(\alpha \dot{\mathbf{q}})}{1 + \cosh(\alpha \dot{\mathbf{q}})} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (3.57)$$

Al igualar las ecuaciones 2.16 y 3.58 se obtiene la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\tau} = K_p \frac{\sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} + K_i \int_0^t \frac{\sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}(\sigma))}{1 + \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}(\sigma))} d\sigma - K_v \frac{\sinh(\alpha \dot{\mathbf{q}})}{1 + \cosh(\alpha \dot{\mathbf{q}})} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (3.58)$$

donde,

- K_p, K_v, K_i son matrices diagonales, definidas positivas las cuales corresponden a las ganancias proporcional, derivativa e integral, respectivamente.
- $\int_0^t \frac{\sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}(\sigma))}{1 + \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}(\sigma))} d\sigma = \boldsymbol{\rho} \rightarrow \dot{\boldsymbol{\rho}} = \tilde{\mathbf{q}}$

El término de par gravitacional se eliminará matemáticamente de la ecuación 3.56, de este modo, al reescribir considerando lo anterior y sustituyendo $\int_0^t \frac{\sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}(\sigma))}{1 + \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}(\sigma))} d\sigma$ por $\boldsymbol{\rho}$ se obtiene la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\tau} = K_p \frac{\sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} + K_i \boldsymbol{\rho} - K_v \frac{\sinh(\alpha \dot{\mathbf{q}})}{1 + \cosh(\alpha \dot{\mathbf{q}})} = M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} \quad (3.59)$$

Es posible expresar la ecuación en lazo cerrado en su forma matricial, esto después de realizar las debidas operaciones a la ecuación anterior, posteriormente, la ecuación en lazo cerrado en forma matricial se escribe de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\rho} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} \left[K_p \frac{\sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} + K_i \boldsymbol{\rho} - K_v \frac{\sinh(\alpha \dot{\mathbf{q}})}{1 + \cosh(\alpha \dot{\mathbf{q}})} - B\dot{\mathbf{q}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \right] \\ K_i \frac{\sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

3.5.1 Análisis del punto de equilibrio

$$i) -\dot{\mathbf{q}} = -I\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$$

$\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad.

$$ii) M(\mathbf{q})^{-1} \left[K_p \frac{\sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} + K_i \boldsymbol{\rho} - K_v \frac{\sinh(\alpha \dot{\mathbf{q}})}{1 + \cosh(\alpha \dot{\mathbf{q}})} - B\dot{\mathbf{q}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \right]$$

- $K_p, K_v, K_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices diagonales, definidas positivas las cuales corresponden a las ganancias proporcional, derivativa e integral, respectivamente.
- $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal definida positiva con los coeficientes de fricción viscosa.

$$\text{Puesto que } \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \Rightarrow K_v \frac{\sinh(\alpha \dot{\mathbf{q}})}{1 + \cosh(\alpha \dot{\mathbf{q}})} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$$

$$B\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$$

$$C(\mathbf{q}, \mathbf{0}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$C(\mathbf{q}, \mathbf{0})\dot{\mathbf{q}}|_{\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{0}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$$

$$K_p \frac{\sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} + K_i \boldsymbol{\rho} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\rho} = \frac{K_i^{-1} K_p \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\rho} = \mathbf{0}$$

$$iii) K_i \frac{\sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$$

\therefore El punto de equilibrio $[\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\rho}]^T = [\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}]^T \in \mathbb{R}^{3n}$ existe y es único.

3.5.2 Propuesta de la función estricta de Lyapunov

La función estricta de Lyapunov, resulta de una suma de términos cuadráticos de por combinaciones entre las variables de estado $\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}$ y $\boldsymbol{\rho}$, la cual se puede ordenar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\rho}) &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \sqrt{\ln(\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + 1 - \ln(2))}^T K_p \sqrt{\ln(\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + 1 - \ln(2))} \\ &- \frac{\epsilon_0 \boldsymbol{\rho}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{1 + \|\boldsymbol{\rho}\|} + \frac{\epsilon_0^2 \boldsymbol{\rho}^T M(\mathbf{q}) \boldsymbol{\rho}}{(1 + \|\boldsymbol{\rho}\|)^2} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} + \frac{\epsilon_0^2 \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}}}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} - \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T M(\tilde{\mathbf{q}}) \boldsymbol{\rho}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \\ &- \frac{\epsilon_0^2 \boldsymbol{\rho}^T M(\mathbf{q}) \boldsymbol{\rho}}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\rho}^T K_i \boldsymbol{\rho} - \frac{\epsilon_0^2 \boldsymbol{\rho}^T M(\mathbf{q}) \boldsymbol{\rho}}{(1 + \|\boldsymbol{\rho}\|)^2} - \frac{\epsilon_0^2 \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}}}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} \end{aligned} \quad (3.61)$$

Para continuar con la demostración de estabilidad será necesario manipular la derivada de la función candidata de Lyapunov (3.61) lo cual se hará retomando las siguientes propiedades del modelo dinámico, las cuales se presentaron en el capítulo 2.

Propiedad 2.7 La matriz $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, se relaciona con la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ mediante la propiedad de antisimetría:

$$\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \left[\dot{M}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \mathbf{x} = 0 \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (2.26)$$

donde, $\dot{M}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ resulta una matriz antisimétrica.

Propiedad 2.8 La derivada de la matriz de inercia $\frac{d}{dt}M(\mathbf{q})$ se relaciona con la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis de la siguiente forma:

$$\dot{M}(\mathbf{q}) = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \quad (2.27)$$

Ahora la derivada con respecto al tiempo de la función candidata de Lyapunov (3.61).

$$\begin{aligned} \dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\rho}) &= \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{\mathbf{q}^T K_p \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \frac{\epsilon_0 \dot{\boldsymbol{\rho}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{1 + \|\boldsymbol{\rho}\|} \\ &- \frac{\epsilon_0 \boldsymbol{\rho}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{1 + \|\boldsymbol{\rho}\|} - \frac{\epsilon_0 \boldsymbol{\rho}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}}{1 + \|\boldsymbol{\rho}\|} + \frac{\epsilon_0^2 \dot{\boldsymbol{\rho}}^T M(\mathbf{q}) \boldsymbol{\rho}}{(1 + \|\boldsymbol{\rho}\|)^2} + \frac{\epsilon_0^2 \boldsymbol{\rho}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\rho}}{(1 + \|\boldsymbol{\rho}\|)^2} + \frac{\epsilon_0 \boldsymbol{\rho}^T \boldsymbol{\rho}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{\|\boldsymbol{\rho}\|(1 + \|\boldsymbol{\rho}\|)^2} \\ &+ \frac{\epsilon_0^2 \boldsymbol{\rho}^T \boldsymbol{\rho}^T M(\mathbf{q}) \boldsymbol{\rho}}{\|\boldsymbol{\rho}\|(1 + \|\boldsymbol{\rho}\|)^3} + \dot{\mathbf{q}} M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{\epsilon_0 \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} - \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} - \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \\ &- \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{\|\tilde{\mathbf{q}}\|(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} - \frac{\epsilon_0^2 \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} + \frac{\epsilon_0^2 \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}}}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} + \frac{\epsilon_0^2 \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}}}{\|\tilde{\mathbf{q}}\|(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^3} + \frac{\epsilon_0 \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \boldsymbol{\rho}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \\ &- \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\boldsymbol{\rho}}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} - \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\rho}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} + \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \boldsymbol{\rho}}{\|\tilde{\mathbf{q}}\|(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} - \frac{\epsilon_0^2 \boldsymbol{\rho}^T M(\mathbf{q}) \dot{\boldsymbol{\rho}}}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} - \frac{\epsilon_0 \boldsymbol{\rho}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\rho}}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} \\ &+ \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\boldsymbol{\rho}}^T M(\mathbf{q}) \boldsymbol{\rho}}{\|\tilde{\mathbf{q}}\|(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^3} + \boldsymbol{\rho}^T K_i \dot{\boldsymbol{\rho}} - \frac{\epsilon_0^2 \boldsymbol{\rho}^T M(\mathbf{q}) \dot{\boldsymbol{\rho}}}{(1 + \|\boldsymbol{\rho}\|)^2} - \frac{\epsilon_0^2 \boldsymbol{\rho}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\rho}}{(1 + \|\boldsymbol{\rho}\|)^2} + \frac{\epsilon_0^2 \boldsymbol{\rho}^T \dot{\boldsymbol{\rho}} \boldsymbol{\rho}^T M(\mathbf{q}) \boldsymbol{\rho}}{\|\boldsymbol{\rho}\|(1 + \|\boldsymbol{\rho}\|)^3} \\ &+ \frac{\epsilon_0^2 \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}}}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} - \frac{\epsilon_0^2 \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}}}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} + \frac{\epsilon_0^2 \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}}}{\|\tilde{\mathbf{q}}\|(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^3} \end{aligned} \quad (3.62)$$

Con la finalidad de reducir términos de la ecuación (3.62), se sustituye el valor de la aceleración articular $\ddot{\mathbf{q}}$ la cual se encuentra en la ecuación en lazo cerrado formada por el modelo dinámico del robot y el esquema de control, al mismo tiempo se hace uso de la propiedad de antisimetría (propiedad 2.7) y la propiedad 2.8, esto tendrá como resultado simplificar considerablemente la

ecuación (3.62) hasta llegar a escribir $\dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\rho})$ como se muestra a continuación en la ecuación (3.63):

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\rho}) &= \dot{\mathbf{q}}^T K_i \boldsymbol{\rho} - \frac{\dot{\mathbf{q}}^T K_v \sinh(\alpha \dot{\mathbf{q}})}{1 + \cosh(\alpha \dot{\mathbf{q}})} - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} - \frac{\epsilon_0 \boldsymbol{\rho}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{1 + \|\boldsymbol{\rho}\|} - \frac{\epsilon_0 \boldsymbol{\rho}^T C^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}}{1 + \|\boldsymbol{\rho}\|} \\
&- \frac{\epsilon_0 \boldsymbol{\rho}^T K_p \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{(1 + \|\boldsymbol{\rho}\|)(1 + \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}))} - \frac{\epsilon_0 \boldsymbol{\rho}^T K_i \boldsymbol{\rho}}{1 + \|\boldsymbol{\rho}\|} + \frac{\epsilon_0 \boldsymbol{\rho}^T K_v \sinh(\alpha \dot{\mathbf{q}})}{(1 + \|\boldsymbol{\rho}\|)(1 + \cosh(\alpha \dot{\mathbf{q}}))} + \frac{\epsilon_0 \boldsymbol{\rho}^T B \dot{\mathbf{q}}}{1 + \|\boldsymbol{\rho}\|} + \frac{\epsilon_0 \boldsymbol{\rho}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}}{1 + \|\boldsymbol{\rho}\|} \\
&+ \epsilon_0^2 \left[\frac{\sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} \right]^T \frac{M(\mathbf{q}) \boldsymbol{\rho}}{(1 + \|\boldsymbol{\rho}\|)^2} + \frac{\epsilon_0 \boldsymbol{\rho}^T [C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \dot{\mathbf{q}}}{(1 + \|\boldsymbol{\rho}\|)^2} + \frac{\epsilon_0 \boldsymbol{\rho}^T \boldsymbol{\rho} \boldsymbol{\rho}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{\|\boldsymbol{\rho}\|(1 + \|\boldsymbol{\rho}\|)^2} + \frac{\epsilon_0^2 \boldsymbol{\rho}^T \boldsymbol{\rho} \boldsymbol{\rho}^T M(\mathbf{q}) \boldsymbol{\rho}}{\|\boldsymbol{\rho}\|(1 + \|\boldsymbol{\rho}\|)^3} \\
&+ \frac{\dot{\mathbf{q}} K_p \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \cosh(\alpha \dot{\mathbf{q}})} + \dot{\mathbf{q}} K_i \boldsymbol{\rho} - \frac{\dot{\mathbf{q}} K_v \sinh(\alpha \dot{\mathbf{q}})}{1 + \cosh(\alpha \dot{\mathbf{q}})} - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} + \frac{\epsilon_0 \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} - \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}} K_p \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)(1 + \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}))} \\
&- \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}} K_i \boldsymbol{\rho}}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)} + \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}} B \dot{\mathbf{q}}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} + \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{q}}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} - \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T [C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \dot{\mathbf{q}}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} - \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{\|\tilde{\mathbf{q}}\|(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} \\
&- \frac{\epsilon_0^2 \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \mathbf{q}}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} + \frac{\epsilon_0^2 \tilde{\mathbf{q}}^T [C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \tilde{\mathbf{q}}}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} + \frac{\epsilon_0^2 \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}}}{\|\tilde{\mathbf{q}}\|(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^3} + \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \boldsymbol{\rho}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} - \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\boldsymbol{\rho}}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \\
&- \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T [C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \boldsymbol{\rho}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} + \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \boldsymbol{\rho}}{\|\tilde{\mathbf{q}}\|(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} - \frac{\epsilon_0^2 \boldsymbol{\rho}^T M(\mathbf{q}) \dot{\boldsymbol{\rho}}}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} - \frac{\epsilon_0 \boldsymbol{\rho}^T [C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \boldsymbol{\rho}}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} \\
&+ \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\boldsymbol{\rho}} \boldsymbol{\rho}^T M(\mathbf{q}) \boldsymbol{\rho}}{\|\tilde{\mathbf{q}}\|(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^3} + \boldsymbol{\rho}^T K_i \dot{\boldsymbol{\rho}} - \frac{\epsilon_0^2 \boldsymbol{\rho}^T M(\mathbf{q}) \dot{\boldsymbol{\rho}}}{(1 + \|\boldsymbol{\rho}\|)^2} - \frac{\epsilon_0^2 \boldsymbol{\rho}^T [C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \boldsymbol{\rho}}{(1 + \|\boldsymbol{\rho}\|)^2} + \frac{\epsilon_0 \boldsymbol{\rho}^T \dot{\boldsymbol{\rho}} \boldsymbol{\rho}^T M(\mathbf{q}) \boldsymbol{\rho}}{\|\boldsymbol{\rho}\|(1 + \|\boldsymbol{\rho}\|)^3} \\
&+ \frac{\epsilon_0^2 \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}}}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} - \frac{\epsilon_0^2 \tilde{\mathbf{q}}^T [C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \tilde{\mathbf{q}}}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} + \frac{\epsilon_0^2 \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}}}{\|\tilde{\mathbf{q}}\|(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^3} \tag{3.63}
\end{aligned}$$

A partir de la función simplificada gracias a las propiedades del modelo dinámico, se obtienen cotas superiores e inferiores de los términos que integran la ecuación (3.64):

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\rho}) &\leq \lambda_{K_i}^{\max} \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\boldsymbol{\rho}\| - \gamma_1 \lambda_{K_v}^{\max} \sqrt{n} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 - \lambda_B^{\min} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 - \frac{\epsilon_0 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\min} \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\boldsymbol{\rho}\|}{1 + \|\boldsymbol{\rho}\|} \\
&- \frac{\epsilon_0 K_c \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\boldsymbol{\rho}\|}{1 + \|\boldsymbol{\rho}\|} - \frac{\epsilon_0 \gamma_1 \lambda_{K_p}^{\min} \sqrt{n} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\boldsymbol{\rho}\|}{[1 + \|\boldsymbol{\rho}\|]} - \frac{\epsilon_0 \lambda_{K_i}^{\min} \|\boldsymbol{\rho}\|^2}{1 + \|\boldsymbol{\rho}\|} + \frac{\epsilon_0 \gamma_1 \lambda_{K_v}^{\max} \sqrt{n} \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\boldsymbol{\rho}\|}{1 + \|\boldsymbol{\rho}\|} + \frac{\epsilon_0 \lambda_B^{\max} \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\boldsymbol{\rho}\|}{1 + \|\boldsymbol{\rho}\|}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\epsilon_0 K_c \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\boldsymbol{\rho}\|}{1 + \|\boldsymbol{\rho}\|} + \frac{\epsilon_0 \gamma_1 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max} \sqrt{n} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\boldsymbol{\rho}\|}{(1 + \|\boldsymbol{\rho}\|)^2} + \frac{\epsilon_0^2 K_c \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\boldsymbol{\rho}\|}{(1 + \|\boldsymbol{\rho}\|)^2} + \frac{\epsilon_0 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max} \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\boldsymbol{\rho}\|}{(1 + \|\boldsymbol{\rho}\|)^2} + \frac{\epsilon_0^2 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max} \|\boldsymbol{\rho}\|^2}{(1 + \|\boldsymbol{\rho}\|)^3} \\
& - \gamma_1 \lambda_{K_p}^{\min} \sqrt{n} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + \lambda_{K_i}^{\max} \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\boldsymbol{\rho}\| - \gamma_1 \lambda_{K_v}^{\min} \sqrt{n} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + \lambda_B^{\max} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \\
& + \frac{\epsilon_0 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} - \frac{\epsilon_0 \gamma_1 \lambda_{K_p}^{\min} \sqrt{n} \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} - \frac{\epsilon_0 \lambda_{K_i}^{\min} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\boldsymbol{\rho}\|}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} + \frac{\epsilon_0 \lambda_B^{\max} \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\tilde{\mathbf{q}}\|}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} + \frac{\epsilon_0 K_c \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \\
& - \frac{\epsilon_0 K_c \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\tilde{\mathbf{q}}\|}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} - \frac{\epsilon_0 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\min} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} - \frac{\epsilon_0^2 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\min} \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\tilde{\mathbf{q}}\|}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} + \frac{\epsilon_0^2 K_c \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} + \frac{\epsilon_0^2 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max} \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\tilde{\mathbf{q}}\|}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^3} \\
& + \frac{\epsilon_0 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max} \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\boldsymbol{\rho}\|}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} - \frac{\epsilon_0 \gamma_1 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\min} \lambda_{K_i}^{\min} \sqrt{n} \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} - \frac{\epsilon_0 K_c \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\boldsymbol{\rho}\|}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} + \frac{\epsilon_0 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max} \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\boldsymbol{\rho}\|}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} \\
& - \frac{\epsilon_0^2 \gamma_1 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\min} \lambda_{K_i}^{\min} \sqrt{n} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\boldsymbol{\rho}\|}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} - \frac{\epsilon_0 K_c \|\boldsymbol{\rho}\|^2}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} + \frac{\epsilon_0 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max} \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\boldsymbol{\rho}\|}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^3} + \gamma_1 (\lambda_{K_i}^{\max})^2 \sqrt{n} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\boldsymbol{\rho}\| \\
& - \frac{\epsilon_0^2 \gamma_1 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\min} \lambda_{K_i}^{\min} \sqrt{n} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\boldsymbol{\rho}\|}{(1 + \|\boldsymbol{\rho}\|)^2} - \frac{\epsilon_0^2 K_c \|\boldsymbol{\rho}\|^2}{(1 + \|\boldsymbol{\rho}\|)^2} + \frac{\epsilon_0^2 \gamma_1 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max} \lambda_{K_i}^{\max} \sqrt{n} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\boldsymbol{\rho}\|}{(1 + \|\boldsymbol{\rho}\|)^3} + \frac{\epsilon_0^2 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max} \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\tilde{\mathbf{q}}\|}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} \\
& - \frac{\epsilon_0^2 K_c \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} + \frac{\epsilon_0^2 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max} \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\tilde{\mathbf{q}}\|}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^3} \tag{3.64}
\end{aligned}$$

posteriormente se agrupa cada término dependiendo de la combinación de variables a la que pertenecen quedando expresada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\rho}) & \leq - \left[2\gamma_1 \lambda_{K_v}^{\min} \sqrt{n} + 2\lambda_B^{\min} - \frac{\epsilon_0 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} - \frac{\epsilon_0 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} \right] \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \\
& + \left[-\frac{\epsilon_0 \gamma_1 \lambda_{K_p}^{\min} \sqrt{n}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} + \frac{\epsilon_0 K_c}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} - \frac{\epsilon_0 \gamma_1 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\min} \lambda_{K_i}^{\min} \sqrt{n}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \right] \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 \\
& + \left[\frac{\epsilon_0 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} - \frac{\epsilon_0 K_c}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} + -\frac{\epsilon_0^2 K_c}{(1 + \|\boldsymbol{\rho}\|)^2} + \frac{\epsilon_0^2 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}}{(1 + \|\boldsymbol{\rho}\|)^3} \right] \|\boldsymbol{\rho}\|^2 \\
& + \left[-\gamma_1 \lambda_{K_p}^{\min} \sqrt{n} + \frac{\epsilon_0 \lambda_B^{\max}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} - \frac{\epsilon_0 K_c}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} + \frac{2\epsilon_0^2 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} + \frac{2\epsilon_0^2 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^3} \right] \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\tilde{\mathbf{q}}\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[2\lambda_{K_i}^{\max} + \frac{2\epsilon_0\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}}{1+\|\boldsymbol{\rho}\|} + \frac{\epsilon_0\gamma_1\lambda_{K_v}^{\max}\sqrt{n}}{1+\|\boldsymbol{\rho}\|} + \frac{\epsilon_0\lambda_B^{\max}}{1+\|\boldsymbol{\rho}\|} + \frac{\epsilon_0^2K_c}{(1+\|\boldsymbol{\rho}\|)^2} + \frac{2\epsilon_0\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}}{1+\|\tilde{\mathbf{q}}\|} \right] \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\boldsymbol{\rho}\| \\
& + \left[\frac{\epsilon_0\lambda_{K_i}^{\max}}{1+\|\tilde{\mathbf{q}}\|} - \frac{\epsilon_0K_c}{1+\|\tilde{\mathbf{q}}\|} + \gamma_1\sqrt{n} \left(\frac{\epsilon_0\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}}{(1+\|\boldsymbol{\rho}\|)^2} - \frac{\epsilon_0\lambda_{K_p}^{\min}}{1+\|\boldsymbol{\rho}\|} - \frac{\epsilon_0^2\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\min}\lambda_{K_i}^{\min}}{(1+\|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (\lambda_{K_o}^{\max})^2 - \frac{\epsilon_0^2\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\min}\lambda_{K_i}^{\min}}{(1+\|\boldsymbol{\rho}\|)^2} + \frac{\epsilon_0^2\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}\lambda_{K_i}^{\max}}{(1+\|\boldsymbol{\rho}\|)^3} \right) \right] \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\boldsymbol{\rho}\| \tag{3.65}
\end{aligned}$$

Así mismo, es posible expresar la ecuación 3.65 de la siguiente forma:

$$\dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\rho}) \leq - \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \tilde{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\rho} \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & \frac{1}{2}\Omega & \frac{1}{2}\mu \\ \frac{1}{2}\Omega & \phi & \frac{1}{2}\omega \\ \frac{1}{2}\mu & \frac{1}{2}\omega & \beta \end{bmatrix}}_{\Theta} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \tilde{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\rho} \end{bmatrix} \tag{3.66}$$

donde,

$$\begin{aligned}
\alpha &= \left[2\gamma_1\lambda_{K_v}^{\min}\sqrt{n} + 2\lambda_B^{\min} - \frac{\epsilon_0\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}}{1+\|\tilde{\mathbf{q}}\|} - \frac{\epsilon_0\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}}{(1+\|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} \right] \\
\phi &= \left[-\frac{\epsilon_0\gamma_1\lambda_{K_p}^{\min}\sqrt{n}}{1+\|\tilde{\mathbf{q}}\|} + \frac{\epsilon_0K_c}{1+\|\tilde{\mathbf{q}}\|} - \frac{\epsilon_0\gamma_1\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\min}\lambda_{K_i}^{\min}\sqrt{n}}{1+\|\tilde{\mathbf{q}}\|} \right] \\
\beta &= \left[\frac{\epsilon_0\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}}{1+\|\tilde{\mathbf{q}}\|} - \frac{\epsilon_0K_c}{(1+\|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} + \frac{\epsilon_0^2K_c}{(1+\|\boldsymbol{\rho}\|)^2} + \frac{\epsilon_0^2\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}}{(1+\|\boldsymbol{\rho}\|)^3} \right] \\
\Omega &= \left[-\gamma_1\lambda_{K_p}^{\min}\sqrt{n} + \frac{\epsilon_0\lambda_B^{\max}}{1+\|\tilde{\mathbf{q}}\|} - \frac{\epsilon_0K_c}{1+\|\tilde{\mathbf{q}}\|} + \frac{2\epsilon_0^2\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}}{(1+\|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} + \frac{2\epsilon_0^2\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}}{(1+\|\tilde{\mathbf{q}}\|)^3} \right] \\
\mu &= \left[2\lambda_{K_i}^{\max} + \frac{2\epsilon_0\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}}{1+\|\boldsymbol{\rho}\|} + \frac{\epsilon_0\gamma_1\lambda_{K_v}^{\max}\sqrt{n}}{1+\|\boldsymbol{\rho}\|} + \frac{\epsilon_0\lambda_B^{\max}}{1+\|\boldsymbol{\rho}\|} + \frac{\epsilon_0^2K_c}{(1+\|\boldsymbol{\rho}\|)^2} + \frac{2\epsilon_0\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}}{1+\|\tilde{\mathbf{q}}\|} \right] \\
\omega &= \left[\frac{\epsilon_0\lambda_{K_i}^{\max}}{1+\|\tilde{\mathbf{q}}\|} - \frac{\epsilon_0K_c}{1+\|\tilde{\mathbf{q}}\|} + \gamma_1\sqrt{n} \left(\frac{\epsilon_0\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}}{(1+\|\boldsymbol{\rho}\|)^2} - \frac{\epsilon_0\lambda_{K_p}^{\min}}{1+\|\boldsymbol{\rho}\|} - \frac{\epsilon_0^2\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\min}\lambda_{K_i}^{\min}}{(1+\|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (\lambda_{K_o}^{\max})^2 - \frac{\epsilon_0^2\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\min}\lambda_{K_i}^{\min}}{(1+\|\boldsymbol{\rho}\|)^2} + \frac{\epsilon_0^2\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}\lambda_{K_i}^{\max}}{(1+\|\boldsymbol{\rho}\|)^3} \right) \right] \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\boldsymbol{\rho}\|
\end{aligned}$$

Al asegurar que ϵ_0 se mantiene dentro de los intervalos establecidos, se demuestra la estabilidad asintótica global ya que la matriz Θ será definida positiva.

Capítulo 4: Resultados experimentales

4.1 Introducción

Con la finalidad de respaldar los desarrollos teóricos llevados a cabo a lo largo de la presente tesis se realizaron pruebas experimentales de los algoritmos de control: PD, PID, PID hiperbólico; sobre una plataforma experimental diseñada y construida en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, la cual consiste en un robot antropomórfico de 3 gdl (figura 4.1) equipado con servomotores de transmisión directa, tarjetas y software que permiten al robot realizar movimientos sobre un espacio tridimensional y de esta forma lograr realizar aplicaciones de automatización y pruebas de diversos esquemas de control. En cuanto a las características físicas de este sistema, los eslabones están fabricados con aluminio 6061 con una longitud de 0.45 m. Tiene una computadora Pentium con tarjetas FPGA´s y 3 DAC´s de 12 bits, los servoamplificadores admiten una entrada de 10v. La características y modelos de los servomotores se muestran en la tabla 4.1

El objetivo del experimento es mover el extremo final del manipulador desde una posición inicial hacia una posición final deseada $\mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^3$ la cual deberá ser constante en el tiempo. Dichas posiciones deseadas serán las mismas para las pruebas realizadas con los tres algoritmos de control, estas serán $[q_{d1}, q_{d2}, q_{d3}]^T = [45^\circ, 45^\circ, 90^\circ]^T$, las cuales representan las posiciones finales de la base, del hombro y del codo respectivamente. Para la realización de estos experimentos se ajustaron las posiciones y velocidades iniciales iguales a cero, esto es: $[q_1(0), q_2(0), q_3(0)]^T = [0^\circ, 0^\circ, 0^\circ]^T$ y $[\dot{q}_1(0), \dot{q}_2(0), \dot{q}_3(0)]^T = [0, 0, 0]^T$ grados/seg. Finalmente y con el propósito de medir el rendimiento de cada uno de los algoritmos de control se utilizará la norma \mathcal{L}_2 , mientras más pequeña sea dicho valor, menor será el error de posición lo que equivale a un mejor desempeño.



Figura 4.1: Plataforma experimental robot antropomórfico de 3gdl

Eslabón	Modelo	Torque (Nm)	Encoder (p/rev)
Base	DM1050A	15	1024000
Hombro	DM1150A	50	1024000
Codo	DM1015B	4	655360

Tabla 4.1: Características de los servomotores de la plataforma experimental.

En la fase experimental, los algoritmos evaluados son los siguientes:

- *PD* : $\boldsymbol{\tau} = K_p \tilde{\mathbf{q}} - K_v \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})$
- *PID* : $\boldsymbol{\tau} = K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_i \int_0^t \tilde{\mathbf{q}} dt - K_v \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})$
- *PID hiperbólico* : $\boldsymbol{\tau} = K_p \frac{\sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} + K_i \int_0^t \frac{\sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - K_v \frac{\sinh(\alpha \dot{\mathbf{q}})}{1 + \cosh(\alpha \dot{\mathbf{q}})} + \mathbf{g}(\mathbf{q})$

donde,

- $K_p, K_i, K_v \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ son las ganancias proporcional, integral y derivativa, respectivamente; matrices diagonales definidas positivas.
- $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ es el vector de error de posición: $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$
- $\mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ es el vector de referencias deseadas.
- $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ es el vector de velocidades articulares.
- $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ es el vector de pares gravitacionales aplicados a los eslabones del robot.
- $\alpha \in \mathbb{R}$ es una constante positiva.

Del mismo modo, se seleccionaron las ganancias para los tres algoritmos de control cumpliendo con las condiciones de las ecuaciones 4.1, 4.2 y 4.3, estas ganancias y las constantes que forman parte de los algoritmos de control se muestran en la tabla 4.2:

$$\lambda_{Max}\{K_i\} \geq \lambda_{min}\{K_i\} > 0 \quad (4.1)$$

$$\lambda_{Max}\{K_p\} \geq \lambda_{min}\{K_p\} < k_g \quad (4.2)$$

$$\lambda_{Max}\{K_v\} \geq \lambda_{min}\{K_v\} < \frac{\lambda_{Max}\{K_i\}}{\lambda_{min}\{K_p\} - k_g} \cdot \frac{\lambda_{Max}^2\{M\}}{\lambda_{min}\{M\}} \quad (4.3)$$

Constantes	G. Proporcionales	G. Derivativas	G. Integrativas
$\alpha = 1.05\pi$	$k_{p1} = 15$	$k_{v1} = 0.76k_{p1}$	$k_{i1} = 0.02k_{v1}$
	$k_{p2} = 50$	$k_{v2} = 0.4k_{p2}$	$k_{i2} = 0.02k_{v2}$
	$k_{p3} = 4$	$k_{v3} = 0.31k_{p3}$	$k_{i3} = 0.02k_{v3}$

Tabla 4.2: Ganancias y constantes seleccionadas para las pruebas de los algoritmos de control.

Las pruebas se realizaron mediante un programa desarrollado en lenguaje C, con el cual es posible obtener un muestreo de los valores de las variables durante el tiempo de experimentación el cual fue de 10 segundos, mientras que el tiempo de muestreo fue de $h = 0.0025s$, las variables que se monitorearon fueron las siguientes:

- Error de posición \tilde{q}
- Velocidades articulares \dot{q}
- Pares aplicados τ_i ; para $i = 1, 2, 3$.

Cabe mencionar que debido a que las pruebas experimentales fueron realizadas sobre un robot manipulador de 3 gdl, cada una de las variables mencionadas tendrá tres componentes, las cuales corresponden los respectivos eslabones del robot, y a su vez serán etiquetadas dependiendo la relación articular que presentan, con la finalidad de asociar l_c a su respectivo eslabón.

4.2 Algoritmo de control PD

En primer lugar, se presentan los resultados obtenidos con el algoritmo de control PD, las variables medidas y graficadas para este caso son: error de posición \tilde{q} , velocidad articular \dot{q} y torque aplicado τ , cada una para los tres eslabones del robot. En la figura 4.2 se presenta la gráfica de error de posición y posteriormente, la explicación de la misma.

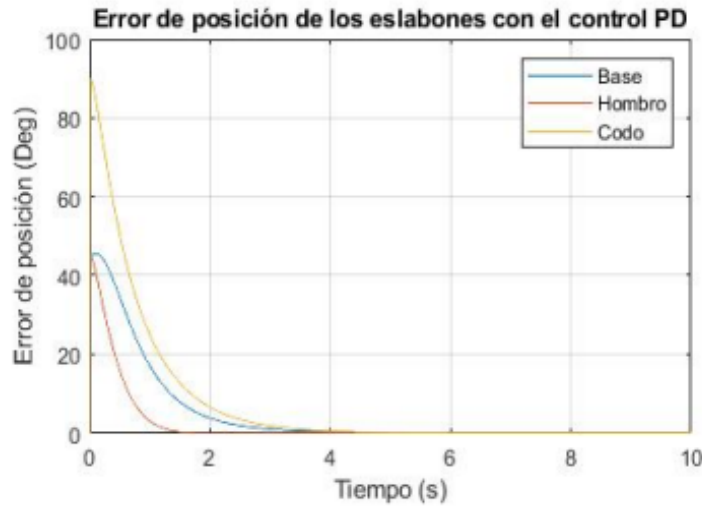


Figura 4.2: Gráfica de error de posición con el control PD.

Los errores de posición experimentales de la figura 4.2 muestran un transitorio suave sin oscilaciones, ni sobreimpulsos o picos en su etapa transitoria, entra en estado estacionario $\tilde{q}_1 = 1.8s$; $2.8s$ para \tilde{q}_2 ; $4s$ para \tilde{q}_3 .

En la tabla 4.2 se presentan los tiempos de asentamiento antes mencionados.

Eslabón	T_{a_PD}
Base	1.8s
Hombro	2.8s
Codo	4s

Tabla 4.2: Tiempo de asentamiento de los eslabones con el control PD.

El tiempo de asentamiento promedio con el control PD es de 2.86s lo cual no representa un valor elevado.

Así mismo, se presenta un error en estado estacionario el cual puede atribuirse a que no se consideró el fenómeno de fricción estática por lo que es normal que este error no sea cero, sin embargo el valor que se tiene es sumamente pequeño, lo que permite considerarlo despreciable. Los valores de error de posición $\tilde{\mathbf{q}}_{ss_PD}$ que toman los eslabones cuando ya están en estado estacionario son $\tilde{q}_1(4) = 0.24623$, $\tilde{q}_2(5) = -0.00441$, $\tilde{q}_3(5) = 0.12757$ por lo que la norma euclidiana del vector se escribe de la siguiente forma:

$$\|\tilde{\mathbf{q}}_{ss_PD}\| = \sqrt{(0.24623)^2 + (-0.00441)^2 + (0.12757)^2} = 0.27735^\circ$$

En la tabla 4.3 se presentan los errores en estado estacionario de cada eslabón.

Eslabón	$\tilde{\mathbf{q}}_{ss_PD}$
Base	0.24623°
Hombro	-0.00441°
Codo	0.1277°

Tabla 4.3: Error en estado estacionario de los eslabones con el control PD.

Las ganancias del K_p y K_v del control PD fueron seleccionadas a modo de mantener a los servomotores operando en su zona lineal con el objetivo de no saturar los torques, de la tabla 4.1 sabemos que los pares máximos del robot son 15Nm, 50Nm y 4Nm en la base, hombro y codo respectivamente, de esta manera, el primer resultado importante que se puede interpretar a partir de la figura 4.3 es que ninguno de los servomotores sobrepasa el límite permisible del par aplicado al eslabón correspondiente.

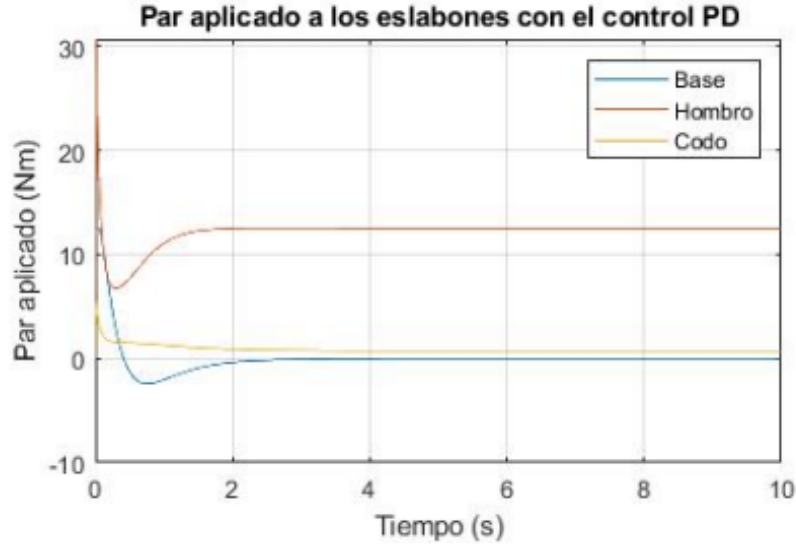


Figura 4.3: Gráfica de par aplicado con el control PD.

La gráfica de torque representa la acción de control derivativa, esto debido a que después de alcanzar la velocidad máxima es necesario que se lleve a cabo la acción derivativa de freno mecánico con la finalidad de evitar los sobreimpulsos en la posición articular, esto se logra al aplicar torque en la dirección opuesta a la del inicio. Una vez que se llevó a cabo la acción de frenado, el par aplicado se estabiliza en valores diferentes de cero, en el caso del hombro y el codo, mientras que para la base es cero, específicamente en los valores siguientes $\tau_{ss_PD} = [0, 12.5301, 0.7267]^T Nm$ esto se debe a que el par gravitacional actúa sobre estos dos eslabones y el algoritmo de control está diseñado para compensar esta acción, en la base no se encuentra esta compensación ya que dicho eslabón está anclado al suelo y es este último el que compensa este fenómeno. La norma del vector τ_{ss_PD} es $\|\tau_{ss_PD}\| = 12.551$.

Las gráficas de velocidad son fáciles de entender una vez que se ha explicado la forma que toma la respuesta del par aplicado, ahora es posible darse cuenta que el primer pico de par existe debido a que se desea alcanzar una velocidad máxima, la cual se puede observar en la figura 4.4 dicha velocidad se alcanza en menos de un segundo para todos los eslabones cuando están sometidos a la acción del algoritmo de control PD, después de este pico, como consecuencia del freno efectuado que llevan a cabo los servomotores la velocidad empieza a disminuir hasta que llega a cero en todos los eslabones. En el capítulo 2, cuando se habló del modelo dinámico se mencionó que la parte derivativa de un algoritmo de control, en este caso PD, es la que determina como se realizará este frenado, o disminución de velocidad con el objetivo de llegar a la posición deseada sin que exista presencia de sobreimpulsos.

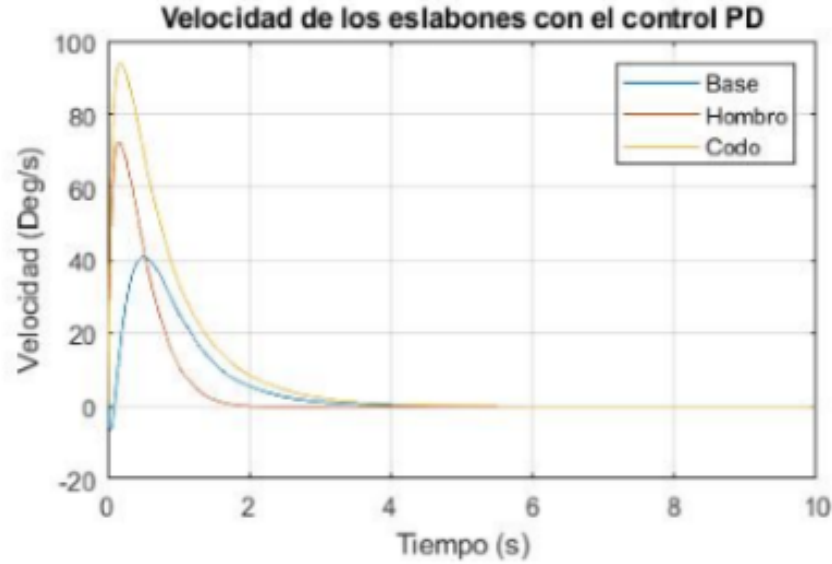


Figura 4.4: Gráfica de velocidad con el control PD.

Las velocidades máximas que alcanzan los eslabones bajo la acción del control PD $\dot{q}_{\max_PD} = [40.9139, 72.4418, 93.9251]^T$ grados las cuales fueron alcanzadas en $t_{\dot{q}_{\max_PD}} = [0.4925, 0.175, 0.19]^T s$.

4.3 Algoritmo de control PID lineal

Ahora que se han presentado los resultados que corresponden a los experimentos realizados con el algoritmo de control PD es tiempo de presentar los resultados experimentales del algoritmo de control PID lineal, en lo que respecta a las variables medidas para este caso se presentan las mismas tres que en con el PD (error de posición, velocidad articular y par aplicado). A continuación se muestran las gráficas de error de posición así como la explicación.

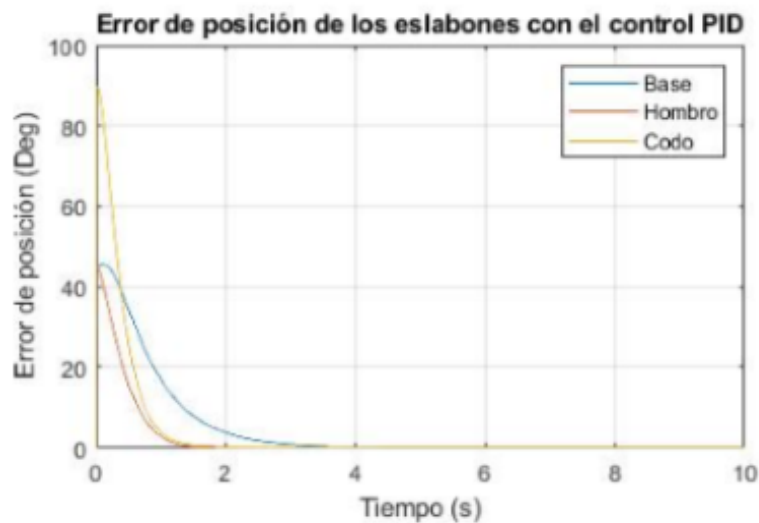


Figura 4.5: Gráfica de error de posición con el control PID.

El transitorio no presenta sobre impulsos, no hay picos y entra sin rizados al régimen transitorio, la evolución del error de posición para el PID lineal tiende asintóticamente hacia cero al igual que en el control PD, del mismo modo, su respuesta es suave el tiempo de asentamiento de cada eslabón se presenta a continuación en la tabla 4.4.

Eslabón	T_{a_PID}
Base	3.5s
Hombro	1.9s
Codo	1.4s

Tabla 4.4: Tiempo de asentamiento de los eslabones con el control PID lineal.

El tiempo de asentamiento promedio con el control PID lineal es de 2.26s siendo este un valor promedio menor que para el caso del PD. A los 4 segundos termina el régimen transitorio e inicia el estado estacionario y dado que en este esquema de control tampoco se consideró el fenómeno de fricción estática, se presenta error de posición en estado estacionario, los valores de este error se muestran a continuación en la tabla 4.5.

Eslabón	$\tilde{\mathbf{q}}_{ss_PID}$
Base	0.1111
Hombro	-0.1135
Codo	0.5913

Tabla 4.5: Error en estado estacionario de los eslabones con el control PID lineal.

A partir de los datos experimentales que se obtuvieron para este algoritmo es posible obtener los valores de error de posición en los tiempos anteriores, y de este modo, obtener la norma euclidiana del vector de error en estado estacionario $\|\tilde{\mathbf{q}}_{ss_PID}\|$

$$\|\tilde{\mathbf{q}}_{ss_PID}\| = \sqrt{\tilde{\mathbf{q}}_1(4)^2 + \tilde{\mathbf{q}}_2(4)^2 + \tilde{\mathbf{q}}_3(4)^2}$$

$$\|\tilde{\mathbf{q}}_{ss_PID}\| = \sqrt{(0.1111)^2 + (-0.0374)^2 + (-0.006)^2} = 0.11738$$

Del mismo modo que para el control PD, las ganancias del algoritmo de control (K_p , K_v , K_i) se seleccionaron para que los servomotores actuaran sobre su zona lineal a fin de evitar saturación en los mismos, y en la figura 4.6 se puede observar que ninguno de los pares aplicados supera los límites establecidos (15Nm, 50Nm y 4Nm, respectivamente). Al mantener los servomotores actuando en su zona lineal, lejos de la saturación se prevee que estos comiencen a incorporar vibraciones al sistema, lo cual resulta perjudicial tanto para la mecánica del sistema como para el desempeño de los algoritmos ya que esas vibraciones pueden provocar oscilaciones no deseadas en las posiciones de los eslabones, es por ello que fue de suma importancia mantener a los servomotores en una zona de acción adecuada.

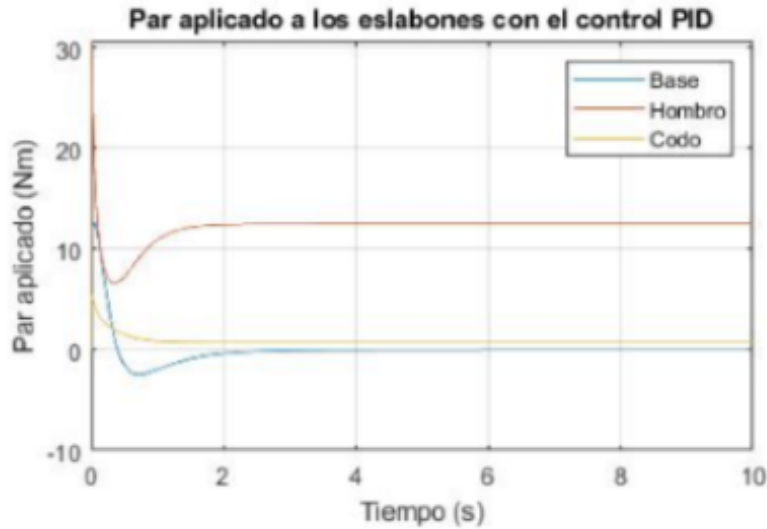


Figura 4.6: Gráfica de par aplicado con el control PID.

También existe presencia de sobreimpulsos en las gráficas, los cuales se deben a la acción de frenado que se debe realizar para evitar los sobreimpulsos en la posición del robot. Por último, el par aplicado en estado estacionario en cada uno de los eslabones está dado por el vector $\tau_{ss_PID} = [0, 12.5341, 0.7245]^T Nm$ mientras que la norma de este vector es $\|\tau_{ss_PID}\| = 12.563$

Las gráficas correspondientes a la velocidad articular de los eslabones cuando están bajo el efecto del control PID lineal se muestran a continuación en la figura 4.7. Del mismo modo que en el control PD, se presentan respuestas similares, alcanzando velocidades máximas en menos de un segundo y decreciendo hasta ser cero dado que se ha llegado a la posición final y al mantener los eslabones en dicha posición, la velocidad se vuelve cero.

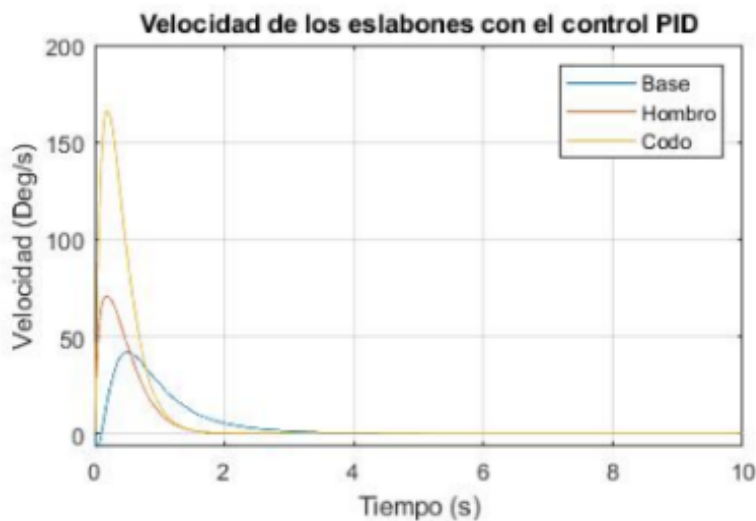


Figura 4.7: Gráfica de velocidad con el control PID.

El vector de velocidades máximas con el control PID lineal es $\dot{q}_{\max_PID} = [41.9243, 71.1862, 166.272]^T$ grados/segundo, las cuales se alcanzaron en $t_{\dot{q}_{\max_PID}} = [0.5, 0.1875, 0.205]^T$ segundos.

4.4 Algoritmo de control PID hiperbólico

Por último, se presentan los resultados experimentales obtenidos para el algoritmo de control PID hiperbólico, el cual fue el objeto de estudio de esta tesis, como se mencionó en la presentación de resultados del esquema PID lineal, las variables medidas que se presentarán en este apartado son: error de posición, velocidad articular y par aplicado. Del mismo modo que para los esquemas anteriores, se iniciará la presentación de resultados con el error de posición (figura 4.8) y su explicación.

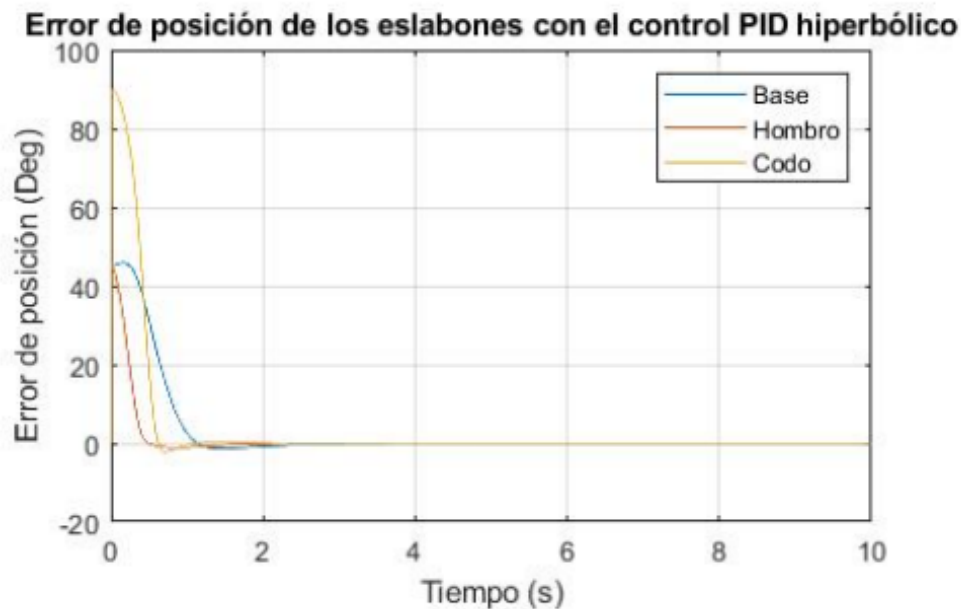


Figura 4.8: Gráfica de error de posición con el control PID Hiperbólico.

El primer resultado que resalta una ventaja de este algoritmo, es que el PID hiperbólico es el que presenta menor tiempo transitorio debido a la estructura exponencial de la hipérbola, para el error de posición con el PID hiperbólico se vuelve a presentar una tendencia asintótica a cero, el transitorio es suave y se mantiene en régimen estacionario sin rizados, sin embargo, a pesar de que la respuesta que se tiene es suave, esta presenta pequeños sobreimpulsos, los valores correspondientes al sobreimpulso de cada eslabón se presentan a continuación en la tabla 4.6.

Eslabón	$\%M_p_PIDH$
Base	2.97%
Hombro	2.93%
Codo	2.46%

Tabla 4.6: Porcentaje de sobreimpulso de los eslabones.

Los porcentajes de sobreimpulso que se presentan en la respuesta del error de posición son realmente pequeños por lo que no afectan de manera significativa al desempeño del robot y aunado a esto último, los eslabones presentan un tiempo de asentamiento menor con este algoritmo de control respecto a los dos anteriores, los valores se muestran a continuación en la tabla 4.7.

Eslabón	T_{a_PIDH}
Base	1.89s
Hombro	1.79s
Codo	1.29s

Tabla 4.7: Tiempo de asentamiento de los eslabones con el control PID hiperbólico.

El tiempo de asentamiento promedio con el control PID hiperbólico es de 1.65s siendo el valor más bajo de los tres obtenidos. Este resultado compensa la presencia de los pequeños sobreimpulsos, ya que además de tratarse de porcentajes muy pequeños que se pueden considerar despreciables, el tiempo que tardan los eslabones en llegar a la posición deseada es mucho menor que en los algoritmos anteriores. Por último, de igual forma que en los algoritmos PD y PID lineal, se omitió el fenómeno de fricción, por lo que también existe la presencia de error en estado estacionario, el cual se muestra en la tabla 4.8 para cada eslabón.

Eslabón	$\tilde{\mathbf{q}}_{ss_PIDH}$
Base	-0.117
Hombro	-0.055
Codo	-0.020

Tabla 4.8: Error en estado estacionario de los eslabones con el control PID hiperbólico.

Expresando como vector el error en estado estacionario se tiene: $\tilde{\mathbf{q}}_{ss_PIDH} = [-0.117, -0.055, -0.020]^T$ grados. Así mismo, la norma de dicho vector es: $\|\tilde{\mathbf{q}}_{ss_PIDH}\| = 0.13082$ grados.

En cuanto a los resultados obtenidos respecto al par aplicado con el algoritmo de control PID hiperbólico se presenta la figura 4.9, la cual contiene las gráficas de esta variable en cada uno de los eslabones que conforman el robot, los resultados obtenidos no son muy diferentes en comparación con lo obtenido para los algoritmos de control anteriores, la evolución del par aplicado tiene la misma forma, la selección de ganancias evita que los servomotores caigan en estado de saturación.

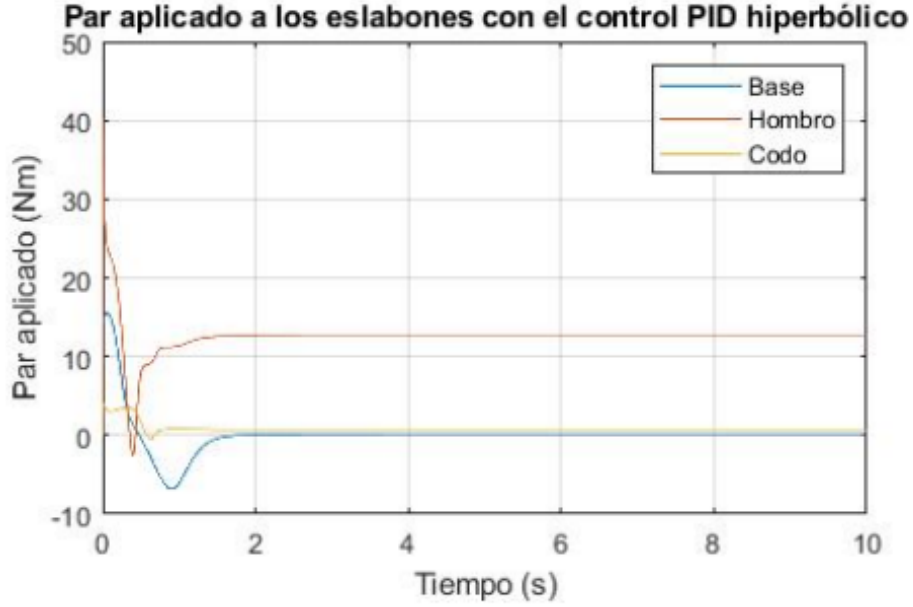


Figura 4.9: Gráfica de par aplicado con el control PID Hiperbólico.

Así mismo, con la intención de compensar la acción de la gravedad, los pares aplicados en el hombro y el codo son diferentes de cero, dichos valores son muy cercanos a lo que se mostró para los esquemas de control lineales, el vector de par en estado estacionario es $\tau_{s\dot{s}}_{PIDH} = [0, 12.5331, 0.7251]^T Nm$ y su norma es igual a $\|\tau_{s\dot{s}}_{PIDH}\| = 12.554$, si bien los valores obtenidos no son iguales, la diferencia que existe entre ellos es demasiado pequeña, al punto de poder considerarlos como iguales, dado que el efecto que tienen sobre el sistema es mínimo.

Las velocidades articulares de los eslabones mientras se usó el algoritmo de control PID hiperbólico se muestran en las gráficas de la figura 4.10. El primer resultado evidentemente observable es que las velocidades toman formas similares a las de los primeros algoritmos de control, sin embargo en este caso resalta la presencia de velocidades mucho más grandes que en los anteriores, el vector de velocidades máximas $\dot{\mathbf{q}}_{\max_PIDH} = [78.5666, 149.719, 274.698]^T$ grados/segundo, es por mucho mayor que los obtenidos con los algoritmos de control anteriores.

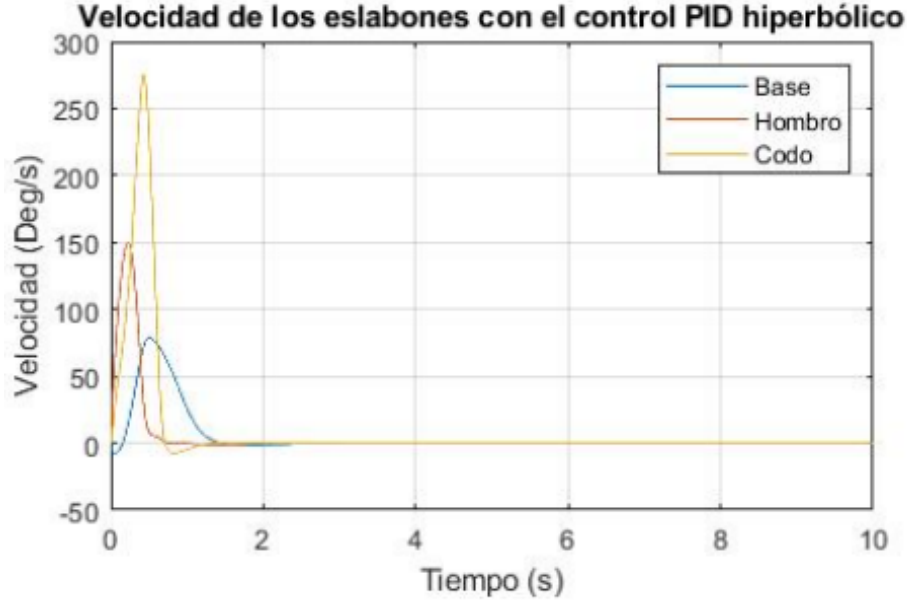


Figura 4.10: Gráfica de velocidad con el control PID Hiperbólico.

Al presentar las gráficas de error de posición se pudo observar que el error existente tanto en el transitorio como en estado estable era mínimo, incluso menor que en los otros dos casos, aunado a esto, la velocidad con la que se llega a la posición deseada es mayor, como se pudo observar con los tiempos de asentamiento, este resultado es destacable ya que al llegar a la posición deseada en menor tiempo sin presentar errores de posición debidos a sobreimpulsos de porcentaje considerable se está hablando de un buen desempeño del algoritmo dado que la velocidad de movimiento es utilizada por la acción de control derivativa como un efecto de amortiguamiento no lineal, sabiendo que dicha acción derivativa está dada por $K_v \frac{\sinh(\dot{q})}{1+\cosh(\alpha\dot{q})}$.

4.5 Evaluación de desempeño con norma $L_2[\tilde{q}(t)]$

Después de presentar los resultados obtenidos en las pruebas experimentales se puede notar que los tres algoritmos de control poseen un buen desempeño ya que en todos los casos se llegó a la posición deseada con respuestas transitorias aceptables, sin embargo es necesario aplicar una evaluación de desempeño más exhaustiva con la finalidad de obtener un dato cuantitativo que determine de manera absoluta cual de los algoritmos probados es el que presentó un mejor desempeño en los experimentos realizados. Esta evaluación se lleva a cabo obteniendo un valor escalar que resulta de evaluar la norma $\mathcal{L}_2[\tilde{q}(t)]$ la cual es una medición numérica del vector de error de posición y está dada por la ecuación (4.2).

$$\mathcal{L}_2[\tilde{q}(t)] = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|\tilde{q}(\sigma)\|^2 d\sigma} \quad (4.2)$$

donde, $T \in \mathbb{R}_+$ es el tiempo experimental, el cual fue de $T = 10s$ para las pruebas realizadas. Al tratarse de un valor escalar que depende de la medición del error en el tiempo de prueba, el valor

más pequeño representa un mejor desempeño en el algoritmo de control, la figura 4.11 contiene la gráfica que compara los valores obtenidos para cada uno de los algoritmos.

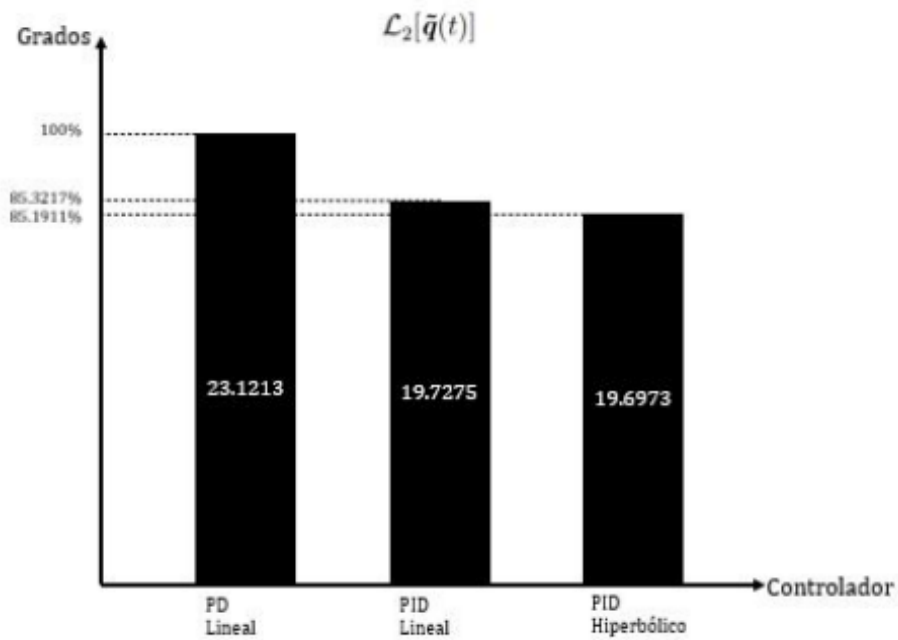


Figura 4.11: Norma \mathcal{L}_2 de los algoritmos de control.

Los valores para $\mathcal{L}_2[\tilde{q}(t)]$ de cada algoritmo de control fueron $\mathcal{L}_2[\tilde{q}_{PD}(t)] = 23.1213$, $\mathcal{L}_2[\tilde{q}_{PID}(t)] = 19.7275$ y $\mathcal{L}_2[\tilde{q}_{PIDH}(t)] = 19.6973$ siendo este último el menor de los valores obtenidos, lo que indica que el algoritmo que presenta mejor desempeño de los tres es el PID hiperbólico. La diferencia entre el PD y los PID's es notoria, ya que normalizando el escalar obtenido para el PD como el 100% del índice de desempeño, los PID's están alrededor de 15% abajo de este valor, sin embargo, en la comparación entre el PID lineal y el PID hiperbólico, la diferencia es pequeña, apenas de unas décimas, no obstante se habla de un mejor desempeño en el PID hiperbólico ya que para esta evaluación se utilizaron solo 10 segundos de tiempo de experimentación, a medida que este tiempo aumenta, la diferencia entre estos índices será mas notoria ya que la norma $\mathcal{L}_2[\tilde{q}(t)]$ está en función del error acumulado en el tiempo de prueba por lo que mientras mayor sea el este tiempo, el error acumulado será mayor y a su vez, aumenta la diferencia que existe entre los índices de desempeño de estos algoritmos.

El mejor desempeño que presenta el algoritmo de control PID hiperbólico se atribuye a la estructura no lineal que lo conforma, como se sabe, los robots son sistemas con dinámica no lineal y tratar de lograr un mejor desempeño con estructuras de control lineal como lo son el PD y el PID resulta un trabajo un tanto imposible ya que por las características del sistema, una estructura no lineal siempre será la que presente un mejor desempeño, como fue en el caso del PID hiperbólico que se propuso.

Conclusiones

A lo largo de esta tesis, se presentó la propuesta de un nuevo algoritmo de control PID hiperbólico como solución al problema de control de posición en robots manipuladores, además se realizó la comparación de desempeño entre dicha estructura y los algoritmos de control PD y PID, ambos lineales la cual en principio se pensó para realizarse en un robot antropomórfico de 2 gdl, pero teniendo en mente enriquecer los resultados de esta tesis, se realizó sobre un robot antropomórfico de 3 gdl. El resultado de esta comparación fue el que se esperaba ya que se encontró que el algoritmo PID hiperbólico tiene mejor desempeño respecto a los otros dos, esto debido a la estructura no lineal que presenta. La propuesta se fortalece y respalda matemáticamente gracias al desarrollo de la demostración de estabilidad asintótica en el sentido de Lyapunov, para lograr lo anterior, se propuso una función estricta de Lyapunov con la cual se plantearon las condiciones necesarias para asegurar dicha estabilidad en forma global, este desarrollo se obtuvo tanto para el PID lineal y el PID hiperbólico lo cual toma relevancia ya que anteriormente estas afirmaciones solo se habían respaldado mediante desarrollos experimentales, sin embargo, no existía demostración matemática de ello hasta ahora, por lo que se puede decir que estos son los resultados más importantes de la tesis. Respecto a la sintonía de las ganancias, estas fueron seleccionadas mediante un conjunto de inecuaciones que obligan a las matrices de ganancia a permanecer en un estado de no saturación de los servomotores del robot. Finalmente los resultados de la fase experimental arrojan que este nuevo algoritmo de control es una opción sumamente viable para ser utilizada en aplicaciones de control de posición tanto para fines de investigación como industriales. En esta ocasión se presentó esta estructura de control como una sola, sin embargo este diseño y análisis puede ser extendido hacia una familia de controladores PID hiperbólicos, con el objetivo de estudiar más a fondo este algoritmo a medida que cambian los parámetros que lo integran con el objetivo de mejorar su comportamiento en lazo cerrado.

Bibliografía

- [1] Takegaki, M. and Arimoto, S (1981). A new feedback method for dynamic control of manipulators. *ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control*, 103:119-125.
- [2] Romeo Ortega, Antonio Loria, and Rafael Kelly (1995). A semiglobal Stable Output Feedback PI²D Regulator for Robots Manipulators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 40, No. 8, pp. 1435-1436, August 1995.
- [3] Rafael Kelly (1998). Global Positioning of Robot Manipulators via PD control Plus a Class of Nonlinear Integral Actions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 43, No. 7, pp. 934-930, July 1998.
- [4] José Álvarez-Ramírez, Ilse Cervantes and Rafael Kelly (2000). PID regulation of Robot Manipulators: Stability and Performance. *Systems and Control Letter*, Vol. 41, pp 73-83.
- [5] Antoine Chaillet, Antonio Loria, and Rafael Kelly (2006). Robustness of PID-Controlled Manipulators with Respect to External Disturbances. *Proceedings to the 45th IEEE Conference On Decision and Control*, San Diego, CA, USA, pp2949-2954, December 13-15, 2006.
- [6] Spong, M. W., Hutchinson, S., and Vidyasagar, M. (2006). *Robot Modeling and Control*. John Wiley & Sons, Inc., New York / Chichester / Weinheim / Brisbane / Singapore / Toronto.
- [7] Arturo Zavala-Río and Víctor Santibañez (2007). A Natural Saturating Extension of PD-With-Desired Gravity-Compensation Control Law for Robot Manipulators With Bounded Inputs. *IEEE Transactions on Robotics*, Vol. 3, No. 2, pp 386-391, April 2007.
- [8] José Álvarez Ramírez, Víctor Santibañez and Ricardo Campa (2008). Stability of Robot manipulators Under Saturated PID Compensation. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 16, No.6, pp. 1333-1341, November 2008.
- [9] Dong Sun, Songyu Hu, Xiaoyin Shao, and Chong Liu (2009). Global Stability of a Saturated Nonlinear PID Controller for Robot Manipulators. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 17, No. 4, pp. 892-899, July 2009.
- [10] Yuxin Su, Peter C. Müller, and Chunhong Zheng (2010). Global Asymptotic Saturated PID Controller for Robot Manipulators. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 18, No. 6, pp. 1280-1288, November 2010.
- [11] Reyes, F., Cid, J., Limón, M. A., and Cervantes, M. (2013). Square root - type control for robot manipulators. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, Vol. 10, No. 39, 2013.
- [12] Anotnio Yarza, Víctor Santibañez, and Javier Moreno Valenzuela. Global Asymptotic Stability of the Classical PID Controller by Considering Saturation Effects in Industrial Robots. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, Vol. 8, No. 4, pp. 34-42, 2014.

- [13] Jinchang Hu and Honghua Zhang. Globally Asymptotically Stable Saturated PID Controllers for a Double Integrator with Constant Disturbance. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 24, pp. 1488–1504, 2014.
- [14] Marco Mendoza, Arturo Zavala, Víctor Santibañez and Fernando Reyes. Output-Feedback Proportional Integral Derivative Type Control with Simple Tuning for the Global Regulation of Robot Manipulators with Input Constraints. *The Institution of Engineering and Technology*, pp. 1–10, 2015.
- [15] Adriana Salinas, Javier Moreno and Rafael Kelly. A Family of Nonlinear PID-Like Regulators for a Class of Torque-Driven Robot Manipulators Equipped with Torque-Constrained Actuators. *Advances in Mechanical Engineering*, Vol. 8, No. 2, pp. 1–14, 2016.
- [16] Daniela López Araujo, Antonio Loria and Arturo Zavala. Adaptive Tracking Control of Euler-Lagrange Systems with Bounded Controls. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Vol. 31, pp. 299–313, 2017.
- [17] Yi, Yang. Qin, S., and Jiang, P. (2017). A modified super-twisting sliding mode control with inner feedback and adaptive gain schedule. In *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, volume 31, pages 398–416. John Wiley & Sons, Ltd.
- Reyes, F. (2011). Robótica Control de Robots Manipuladores. Alfaomega.