BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
POSTGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

"Descomposición mutuamente aposindética de continuos homogéneos "

Tesis que para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias Matemáticas

Presenta:

Tania Gricel Benitez López

Directores de Tesis

Dr. Sergio Macías Álvarez
Dr. Raúl Escobedo Conde

Puebla Pue. Junio de 2015.

II

Índice general

Introducción **v**

1. Preliminares **1**
1.1. Espacios Cociente 1
1.2. Hiperespacios 5
1.3. Continuos filamento 9
1.4. Continuos amplios 13
1.5. Continuos con la propiedad de Kelley 15
1.6. Continuos homogéneos 21

2. La función $\mathcal{J}$ y $\mathcal{T}$ **31**
2.1. Definición y ejemplos 31
2.2. Propiedades y Comparación de las funciones $\mathcal{J}$ y $\mathcal{T}$ 34

3. Descomposición de continuos **41**
3.1. Teorema de Jones 41
3.2. Descomposición mutuamente aposindética 43

4. Productos de continuos homogéneos **49**
4.1. Construcciones de productos homogéneos 49

Bibliografía **61**

Introducción

En 1920 W. Sierpiński [2], define homogeneidad como sigue: Dados un espacio topológico X y dos puntos x y y en X, decimos que X es *homogéneo* si existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(x) = y$.

Desde entonces ha habido mucho interés por el estudio de estos espacios. Por ejemplo, ese mismo año Knaster y Kuratowski preguntaron si cada continuo homogéneo del plano es una curva cerrada simple, véase [2]. Posteriormente, en 1955 F. Burton Jones prueba el Teorema de Descomposición Aposindética (véase Teorema 3.1.11), con el cual reduce el estudio de los continuos homogéneos al entendimiento de los continuos homogéneos aposindéticos y el de los continuos homogéneos indescomponibles. En 1992 J.T. Rogers, Jr. propone una clasificación de los continuos homogéneos utilizando el Teorema de Descomposición Aposindética. Luego, en 2010 J. Prajs propone un nuevo teorema de descomposición, pero lo hace utilizando la aposindesis mutua (véase Teorema 3.2.19).

Este trabajo está basado en el artículo "*Concerning the mutually aposyndetic decomposition of products of homogeneous continua*" de K. Villarreal [15]. En el cual se aplica el Teorema de Descomposición Mutuamente Aposindética de Prajs para la obtención de otras caracterizaciones de productos de continuos homogéneos.

En el Capítulo 1, se dan las definiciones y propiedades básicas de topología cociente y distintas clases de continuos, las cuales nos servirán para diversas pruebas a lo largo de este trabajo.

En la primera parte del Capítulo 2, presentamos a la función $\mathcal{T}$, ésta fue definida por F. B. Jones en [5] y la función $\mathcal{J}$, la cual es definida por J. Prajs en [12], así como algunos ejemplos de ambas funciones. En la segunda parte vemos algunas propiedades, además de ver en qué espacios estas funciones coinciden, mostramos la comparación entre ellas.

En la primera sección del Capítulo 3, presentamos la descomposición aposindética, $\mathcal{G}$, y el Teorema de Descomposición Aposindética de Jones. Para esto se dan algunas definiciones y resultados para poder enunciarlo. La segunda parte, consiste en construir la Descomposición Mutuamente Aposindética, $\mathcal{Q}$, así como mostrar algunas propiedades y, posteriormente presentar el Teorema de Descomposición Mutuamente Aposindética. Como consecuencia de que la función $\mathcal{T}$ y la función $\mathcal{J}$ son definidas de manera muy similar, se sigue que las descomposiciones $\mathcal{G}$ y $\mathcal{Q}$ son muy parecidas. Así, los teoremas de descomposición son muy similares. Dentro de las diferencias, no se sabe si los elementos de $\mathcal{Q}$ son conexos, mientras que los de $\mathcal{G}$ si lo son.

Finalmente, en el Capítulo 4, se hace una aplicación del Teorema de Descomposición Mutuamente Aposindética para los productos de continuos homogéneos.

Capítulo 1

Preliminares

El objetivo de este capítulo, es mostrar los resultados básicos de topología cociente, Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios, que nos servirán como base para este trabajo.

1.1. Espacios Cociente

Aquí definiremos una forma de construir espacios nuevos basándonos en espacios conocidos. Esto se hace "identificando" o "pegando", de una manera adecuada, usando ciertas descomposiciones. Veremos un resultado con respecto a funciones semicontinuas superiormente. Primero, presentamos la notación básica que utilizaremos.

Notación 1.1.1. Como de costumbre, $\mathbb{N}$ denota al conjunto de los números naturales; $\mathbb{R}$ denota al conjunto de los números reales y $\mathbb{R}^n$, con $n \in \mathbb{N}$, denota al espacio Euclidiano de dimensión n, con la métrica Euclidiana.

Notación 1.1.2. Si X es un espacio métrico, con métrica d, y A un subconjunto de X, entonces:

- $Cl_X(A)$ denota la cerradura de A.
- $Int_X(A)$ denota el interior de A.
- $Fr_X(A)$ denota la frontera de A.
- Si $\varepsilon > 0$ entonces $\mathcal{V}_\varepsilon^d(A)$ denota la bola abierta de radio ε alrededor de A, es decir, $\mathcal{V}_\varepsilon^d(A) = \{x \in X \mid \text{existe } a \in A \text{ tal que } d(x,a) < \delta\}$.

- Si $A = \{x\}$, para algún punto $x \in X$, escribiremos $\mathcal{V}_\varepsilon^d(x)$ en lugar de $\mathcal{V}_\varepsilon^d(\{x\})$.

Cuando no haya confusión con respecto de dónde se está tomando la cerradura, interior o la frontera se omitirá el subíndice.

Definición 1.1.3. Sean X un espacio métrico y $f : X \to 2^X$ una función, donde 2^X denota al conjunto de todos los subconjuntos cerrados de X, decimos que f es *semicontinua superiormente en x* si para todo abierto U de X tal que $f(x) \subset U$, existe un abierto V de X tal que $x \in V$ se tiene que para todo $y \in V$, $f(y) \subset U$. Diremos que f es *semicontinua superiormente* si lo es en cada uno de sus puntos.

Definición 1.1.4. Sean X y Y espacios métricos y $f : X \to Y$ una función. Definimos a la gráfica de la función f como el siguiente conjunto.

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in f(x)\}.$$

Teorema 1.1.5. *Sean X y Y espacios compactos y de Hausdorff y M un subconjunto de $X \times Y$ tal que para cada $x \in X$ existe $y \in Y$ tal que $(x, y) \in M$. Entonces, M es cerrado si y sólo sí existe una función semicontinua superiormente $f : X \to 2^Y$ tal que $\Gamma(f) = M$.*

Demostración. Supongamos que M es cerrado. Para cada $x \in X$ sea:

$$f(x) = \{y \in Y \mid (x, y) \in M\}.$$

Observemos, que por hipótesis, $f(x)$ es un subconjunto no vacío de Y. Consideremos las funciones proyección $\pi_1 : X \times Y \to X$ y $\pi_2 : X \times Y \to Y$ sobre X y Y respectivamente. Así tenemos que $f(x) = \pi_2(\pi_1^{-1}(x) \cap M)$, como $\pi_1^{-1}(x)$ es cerrado y M es cerrado, así $f(x)$ es un cerrado en Y. Por tanto, f está bien definida.

Veamos que f es semicontinua superiormente. Supongamos que no, sean $x \in X$, existe un abierto V de Y tal que $f(x) \subset V$, de tal forma que para cada abierto U de X con $x \in U$ existe $z \in U$ tal que $f(z) \nsubseteq V$.

Denotemos $\mathcal{U}_x = \{U \mid U \text{ es abierto de } X \text{ y } x \in U\}$. Para cada $U \in \mathcal{U}_x$, sea $M_U = \{(p, q) \in M \mid p \in Cl_X(U) \text{ y } q \in Y \setminus V\}$. Notemos que $M_U \neq \emptyset$, pues como $x \in U$, existe $z \in U$ tal que existe $y \in f(z)$ tales que $y \in Y \setminus V$. Además, como $z \in U$, esto implica que $z \in Cl_X(U)$, así $(z, y) \in M$. También, observemos que $M_U = (Cl_X(U) \times Y \setminus V) \cap M$. Por tanto, para toda $U \in \mathcal{U}_x$, M_U es cerrado.

Sea $\mathcal{M} = \{M_U \mid U \in \mathcal{U}_x\}$. Afirmamos que $\mathcal{M}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Sea $\{U_1, \ldots, U_n\} \in \mathcal{U}_x$, definimos $U = \cap_{j=1}^n U_j$. Veamos que $M_{U_1} \cap \cdots \cap M_{U_n} \neq \emptyset$. Sea $(p, q) \in M_U$. Entonces $(p, q) \in M$ lo cual implica que $p \in Cl_X(U)$ y $q \in Y \setminus V$. Como $U \subset \cap_{j=1}^n U_j$, se tiene que $p \in U_j$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Así $p \in Cl_X(U_j)$

para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Por tanto, $(p, q) \in M_{U_1} \cap \cdots \cap M_{U_n}$. Como $X \times Y$ es compacto y $\mathcal{M}$ tiene la propiedad de la intersección finita, $\cap\{\mathcal{M}\} \neq \emptyset$.

Sea $(a, b) \in \cap\mathcal{M}$. Esto implica que $(a, b) \in M_U$ para todo $U \in \mathcal{U}_x$. Así $(a, b) \in M$ es tal que $a \in Cl_X(U)$ y $b \in Y \setminus V$, pero $a \in Cl_X(U)$ para todo $U \in \mathcal{U}_x$. Lo que implica que $a = x$. Por otro lado, como $(a, b) \in M$, se tiene que $b \in f(x)$, pero $b \in Y \setminus V$, lo cual es una contradicción al hecho de que $f(x) \subset V$. Por tanto, f es semicontinua superiormente.

Mostraremos que si $f : X \to 2^Y$ es una función semicontinua superiormente entonces $\Gamma(f)$ es cerrada en $X \times Y$. Sea $(p, q) \in X \times Y \setminus \Gamma(f)$. Entonces $q \in Y \setminus f(p)$. De donde, como Y es regular, existen dos abiertos ajenos V y W de Y tales que $q \in V$ y $f(p) \subset W$. Como f es una función semicontinua superiormente, existe un subconjunto abierto U de X tal que $p \in U$ y para todo $x \in U$, $f(x) \subset W$. De esta forma tenemos que $U \times V$ es un abierto de $X \times Y$ que tiene a (p, q) y que no intersecta a $\Gamma(f)$. Por tanto, $X \times Y \setminus \Gamma(f)$ es abierto y $\Gamma(f)$ es cerrada. $\square$

Definición 1.1.6. Sea X un espacio métrico. Una *descomposición* de X es una colección no vacía de subconjuntos no vacíos y ajenos dos a dos cuya unión es X.

Definición 1.1.7. Sean X un espacio métrico y $\mathcal{G}$ una descomposición de X. Definimos $X/\mathcal{G}$ como el conjunto cuyos elementos son los elementos de la descomposición $\mathcal{G}$. A $X/\mathcal{G}$ lo llamamos el *espacio cociente*. La función $q : X \to X/\mathcal{G}$ que asocia a cada punto $x \in X$ el único elemento G de $\mathcal{G}$ tal que $x \in G$, se llama la *función cociente*.

A continuación definiremos una topología para los espacios cociente.

Definición 1.1.8. Sean X un espacio métrico, $\mathcal{G}$ una descomposición de X y $q : X \to X/\mathcal{G}$ la función cociente. Entonces la topología:

$$\{\mathcal{U} \subset X/\mathcal{G} \mid q^{-1}(\mathcal{U}) \text{ es un abierto en } X\}$$

es llamada la *topología cociente* para $X/\mathcal{G}$.

Observación 1.1.9. Notemos que, si el espacio cociente tiene la topología cociente entonces la función cociente es continua. Además, un subconjunto $\mathcal{U}$ de $X/\mathcal{G}$ es abierto (cerrado) respectivamente en $X/\mathcal{G}$ si y sólo si $q^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto (cerrado) respectivamente en X.

Definición 1.1.10. Sean X un espacio métrico y $\mathcal{G}$ una descomposición para X. Denotemos por $q : X \to X/\mathcal{G}$ a la función cociente. Se dice que $A \subset X$ es *saturado* si cumple que $A = q^{-1}(q(A))$.

Observación 1.1.11. Sean X un espacio métrico y $\mathcal{G}$ una descomposicón para X. Denotemos por $q : X \to X/\mathcal{G}$ a la función cociente. $A \subset X$ es saturado si y sólo sí $A = \cup\{G_x \mid x \in A\}$.

Definición 1.1.12. Sean X un espacio métrico y $\mathcal{G}$ una descomposición de X. Decimos que $\mathcal{G}$ es una *descomposición semicontinua superiormente* si dados $G \in \mathcal{G}$ y un abierto U de X tales que $G \subset U$, existe un abierto V de X tal que $G \subset V$ y si $G' \in \mathcal{G}$ es tal que $G' \cap V \neq \emptyset$, entonces $G' \subset U$.

Definición 1.1.13. Sean X un espacio métrico y $\mathcal{G}$ una descomposición de X. Decimos que $\mathcal{G}$ es una *descomposición semicontinua inferiormente* si para cada $G \in \mathcal{G}$ y cualesquiera dos puntos $x, y \in G$ y cualquier abierto U de X con $x \in U$, existe un abierto V de X tal que $y \in V$ y si $G' \in \mathcal{G}$, $G' \cap V \neq \emptyset$ entonces $G' \cap U \neq \emptyset$.

Definición 1.1.14. Sean X un espacio métrico y $\mathcal{G}$ una descomposición de X. Decimos que $\mathcal{G}$ es una *descomposición continua*, si $\mathcal{G}$ es una descomposición semicontinua superiormente e inferiormente.

Presentaremos un ejemplo de una descomposición continua.

Ejemplo 1.1.15. Sean X y Y espacios métricos, compactos. Definimos $\mathcal{G} = \{X \times \{y\} \mid y \in Y\}$ una descomposición de $X \times Y$. Veamos que $\mathcal{G}$ es continua.

Para esto, primero probaremos que $\mathcal{G}$ es semicontinua inferiormente. Sean (x, y), $(a, y) \in X \times Y$ y $U \times V$ un abierto de $X \times Y$ tal que $(x, y) \in U \times V$. Sea $W = X \times V$ un abierto de $X \times Y$ tal que $(a, y) \in W$. Tomemos a $X \times \{z\} \in \mathcal{G}$ y supongamos que $(X \times \{z\}) \cap W \neq \emptyset$. Veamos que $(X \times \{z\}) \cap (U \times V) \neq \emptyset$. Entonces existe $(c, z) \in (X \times \{z\}) \cap (X \times V)$, lo que implica que $z \in V$. Sea $d \in U$, se sigue que $(d, z) \in U \times V$ y, además $(d, z) \in X \times \{z\}$. Así, $(X \times \{z\}) \cap (U \times V) \neq \emptyset$. Por tanto, $\mathcal{G}$ es semicontinua inferiormente.

Ahora, veamos que $\mathcal{G}$ es semicontinua superiormente. Sean $X \times \{y\} \in \mathcal{G}$ y W un abierto de $X \times Y$ tal que $X \times \{y\} \in W$. Veamos que existe un abierto de V de Y tal que $y \in V$, entonces $X \times \{y\} \subset X \times V \subset W$. Para cada $(x, y) \in X \times \{y\}$, existen abiertos básicos U_x y V_y^x de Y, donde V_y^x representa al abierto básico que tiene a y con respecto a una x fija, tales que $(x, y) \in U_x \times V_x^y \subset W$. Entonces, $X \times \{y\} \subset \bigcup_{x \in X}(U_x \times V_x^y) \subset W$. Como $X \times \{y\}$ es compacto, existen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ tal que $X \times \{y\} \subset \bigcup_{j=1}^{n}(U_{x_j} \times V_{x_j}^y) \subset W$. Sea $V = \bigcap_{j=1}^{n} V_{x_j}^y$ un abierto de Y tal que $y \in V$. Probemos que $X \times V \subset W$. Sea $(a, b) \in X \times V$, esto implica que, $a \in X$ y $b \in V_{x_j}^y$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Además, tenemos que $(a, y) \in X \times \{y\} \subset \bigcup_{j=1}^{n}(U_{x_j} \times V_{x_j}^y)$. Entonces existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $(a, y) \in (U_{x_k} \times V_{x_k}^y) \subset W$, lo cual implica que $(a, b) \in (U_{x_k} \times V_{x_k}^y) \subset W$. De esto se sigue que, $(X \times V) \subset W$. Sea $X \times \{z\} \in \mathcal{G}$ tal que

$(X\times\{z\})\cap(X\times V)\neq\emptyset$, entonces $z\in V$, lo que implica que $X\times\{z\}\subset(X\times V)\subset W$. Así, $X\times\{z\}\subset W$. Por tanto, $\mathcal{G}$ es semicontinua superiormente.

Proposición 1.1.16. *Si X es un espacio métrico y $\mathcal{G}$ es una descomposición semicontinua superiormente de X entonces los elementos de $\mathcal{G}$ son subconjuntos cerrados de X.*

Demostración. Sean $x\in X$, $G_x\in\mathcal{G}$ con $x\in G_x$. Como $\{x\}$ es cerrado en X y $q(\{x\})$ es cerrado en $X/\mathcal{G}$ ya que q es cerrada [8, 1.2.19]. Entonces $q^{-1}q(\{x\})=G_x$ es cerrado en X. □

El siguiente teorema nos da condiciones para saber cuando la función cociente es abierta y cerrada, una prueba de él se puede encontrar en [8, 1.2.24].

Teorema 1.1.17. *Sean X un espacio métrico y $\mathcal{G}$ una descomposición de X. Entonces, $\mathcal{G}$ es una descomposición continua si y sólo si la función cociente $q:X\to X/\mathcal{G}$ es abierta y cerrada.*

Definición 1.1.18. Sean X y Y espacios métricos y $f:X\to Y$ una función continua y suprayectiva. Denotamos $\mathcal{G}_f=\{f^{-1}(y)\mid y\in Y\}$ una descomposición de X. Definimos a la función $\varphi_f:X/\mathcal{G}_f\to Y$ dada por: $\varphi_f(q(x))=f(x)$, donde $q:X\to X/\mathcal{G}_f$ es la función cociente.

El siguiente resultado escapa de los objetivos de éste trabajo, una prueba de él se puede encontrar en [8, 1.2.10].

Teorema 1.1.19. *Sean X y Y espacios métricos y $f:X\to Y$ una función continua y suprayectiva. Si f es abierta o cerrada, entonces la función $\varphi_f:X/\mathcal{G}_f\to Y$ es un homeomorfismo.*

Observación 1.1.20. Sean X, Y espacios topológicos y $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ descomposiciones de X y Y respectivamente. Si $h:X\to Y$ es un homeomorfismo que se preserva bajo las descomposiciones $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, entonces la función inducida en los cocientes $\widehat{h}:X/\mathcal{D}_1\to Y/\mathcal{D}_2$ es un homeomorfismo.

1.2. Hiperespacios

En esta sección damos la definición de los hiperespacios y algunos resultados que nos servirán a lo largo de este trabajo, aunque es un poco extraño definir primero los hiperespacios y después los continuos, más adelante se verá por qué se hizo de esta manera.

Definición 1.2.1. Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Un *subcontinuo* es un continuo el cual está contenido en un espacio métrico. Diremos que un continuo es *no degenerado* si tiene más de un punto.

Ejemplo 1.2.2. Como ejemplos de continuos son: el arco, la circunferencia S^1, la curva sinoidal del topólogo, la n-celda.

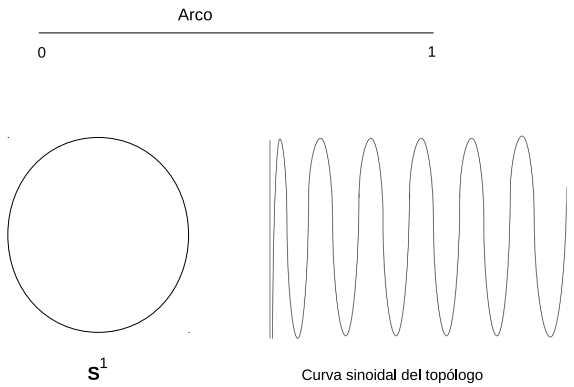

Figura 1.1: Continuos

Definición 1.2.3. Dado un continuo X, definimos sus *hiperespacios* como los siguientes conjuntos:

$$2^X = \big\{A \subset X \mid A \text{ es cerrado y no vacío}\big\};$$

$$C(X) = \big\{A \in 2^X \mid A \text{ es un subconjunto conexo de } X\big\};$$

$$F_1(X) = \big\{\{x\} \mid x \in X\big\}.$$

A $C(X)$ se le llama el *hiperespacio de subcontinuos de* X y a $F_1(X)$ se le llama el *hiperespacio de los singulares de* X.

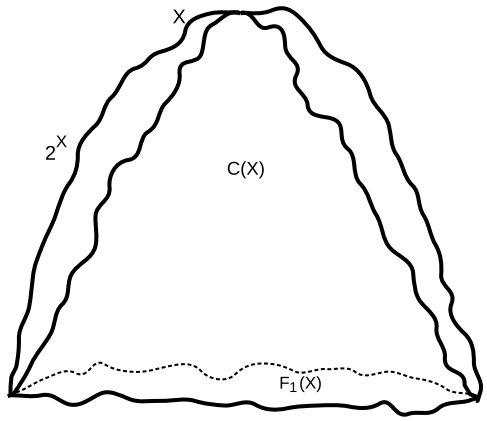

Figura 1.2: Hiperespacios

En el siguiente teorema definiremos una métrica para 2^X, así tendremos que los hiperespacios son espacios métricos.

Teorema 1.2.4. *Si X es un espacio métrico, con métrica d entonces la función $\mathcal{H} : 2^X \times 2^X \to [0, \infty)$ definida por:*

$$\mathcal{H}(A, B) = \text{ínf}\{\varepsilon > 0 \mid A \subset \mathcal{V}_\varepsilon^d(B) \ y \ B \subset \mathcal{V}_\varepsilon^d(A)\}$$

es una métrica para 2^X, la cual es llamada la métrica de Hausdorff.

Demostración. Para ver que $\mathcal{H}$ es una métrica, probaremos lo siguiente.
1. Veamos que $\mathcal{H}(A, B) = 0$ si y sólo si $A = B$.

Supongamos que $\mathcal{H}(A, B) = 0$. Sean $\varepsilon > 0$ y $a \in A$. Como $\mathcal{H}(A, B) < \varepsilon$, se tiene que $A \subset \mathcal{V}_\varepsilon^d(B)$. De donde se tiene que existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \varepsilon$. Esto implica que $a \in Cl_X(B)$. De donde, $a \in B$, pues B es cerrado. Análogamente si $b \in B$, entonces $b \in A$. Por tanto, $A = B$. Claramente si $A = B$ entonces $\mathcal{H}(A, B) = 0$.
2. El hecho $\mathcal{H}(A, B) = \mathcal{H}(B, A)$, es inmediato de la definición.
3. Mostraremos que $\mathcal{H}(A, C) \leqslant \mathcal{H}(A, B) + \mathcal{H}(B, C)$.

Sean A, B y $C \in 2^X$ y $\eta > 0$. Sean $M_A = \mathcal{H}(A, B) + \frac{\eta}{2}$ y $M_B = \mathcal{H}(B, C) + \frac{\eta}{2}$. Notemos que si $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \mathcal{H}(A, B) + \frac{\eta}{2}$ lo cual implica que $A \subset \mathcal{V}_{M_A}^d(B)$. De manera análoga, dado $b \in B$, existe $c \in C$ tal que $d(b, c) < \mathcal{H}(B, C) + \frac{\eta}{2}$. De lo anterior, resulta que $B \subset \mathcal{V}_{M_B}^d(C)$. De esto se sigue que $d(a, c) < \mathcal{H}(A, B) + \mathcal{H}(B, C) + \eta$. Definimos $N = \mathcal{H}(A, B) + \mathcal{H}(B, C) + \eta$, siguiendo el razonamiento anterior se tiene que $A \subset \mathcal{V}_N^d(C)$, de igual forma, tenemos que $C \subset \mathcal{V}_N^d(A)$. Lo cual implica que, $\mathcal{H}(A, C) \leqslant \mathcal{H}(A, B) + \mathcal{H}(B, C) + \eta$. Como η es arbitraria, se tiene que, $\mathcal{H}(A, C) \leqslant \mathcal{H}(A, B) + \mathcal{H}(B, C)$. $\square$

Los siguientes conjuntos se definen para la topología de Vietoris.

Definición 1.2.5. Sean X un continuo y $U \subset X$. Definimos los siguientes conjuntos:

$$\Lambda(U) = \{A \in 2^X |\ A \subset U\},$$

$$\Gamma(U) = \{A \in 2^X |\ A \cap U \neq \emptyset\}.$$

Proposición 1.2.6. *Sea X un continuo. Si U es un abierto de X entonces $\Lambda(U)$ es un abierto en 2^X.*

Demostración. Sea $A \in 2^X$, veremos que existe $\delta > 0$ tal que $\mathcal{V}_\delta^{\mathcal{H}}(A) \subset \Lambda(U)$.

Definimos $\delta = d(A, X \setminus U)$. Como A y $X \setminus U$ son cerrados, se sigue que, $\delta > 0$ pues es la distancia entre cerrados disjuntos.

Sea $B \in \mathcal{V}_\delta^{\mathcal{H}}(A)$. Entonces existe $\delta_1 > 0$ que satisface $\mathcal{H}(A, B) \leq \delta_1 < \delta$, tal que $B \subset \mathcal{V}_{\delta_1}^d(A)$.

Observemos que $\mathcal{V}_{\delta_1}^d(A) \subset U$. Para ver esto, sea $x \in \mathcal{V}_{\delta_1}^d(A)$. Entonces existe $a \in A$ tal que $d(x, a) < \delta_1 < \delta$. Como $\delta = d(A, X \setminus U)$, si $x \notin U$, se tiene que $d(x, a) \geq \delta$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $\mathcal{V}_{\delta_1}^d(A) \subset U$.

Como $B \subset \mathcal{V}_{\delta_1}^d(A)$, luego $B \subset U$, lo cual implica que $B \in \Lambda(U)$. Por tanto, $\Lambda(U)$ es abierto en 2^X. □

Corolario 1.2.7. *Sea X un continuo. Si U es un abierto de X entonces $\Lambda(U) \cap C(X)$ es un abierto en $C(X)$.*

Proposición 1.2.8. *Sea X un continuo. Si U es un abierto de X entonces $\Gamma(U)$ es un abierto en 2^X.*

Demostración. Sean $A \in 2^X$ tal que $A \cap U \neq \emptyset$ y $p \in A \cap U$. Como U es un abierto en X, existe $\delta > 0$ tal que $\mathcal{V}_\delta^d(\{p\}) \subset U$.

Veamos que $\mathcal{V}_\delta^{\mathcal{H}}(A) \subset \Gamma(U)$. Sea $B \in \mathcal{V}_\delta^{\mathcal{H}}(A)$. Entonces $\mathcal{H}(A, B) < \delta$. Así $A \subset \mathcal{V}_\delta^d(B)$. Como $p \in A$, existe $b \in B$ tal que $d(p, b) < \delta$. Lo que implica que $b \in U$. De donde $B \cap U \neq \emptyset$. Por tanto, $B \in \Gamma(U)$. □

Corolario 1.2.9. *Sea X un continuo. Si U es un abierto de X entonces $\Gamma(U) \cap C(X)$ es un abierto en $C(X)$.*

Definición 1.2.10. Sea X espacio métrico y compacto. Dado una colección finita de abierto de X, $U_1, U_2, \ldots, U_m$ definimos:

$$\langle U_1, \ldots, U_m \rangle = \{A \in 2^X \mid A \subset \cup_{k=1}^m U_k \text{ y } A \cap U_k \neq \emptyset \text{ para cada } k \in \{1, \ldots, m\}\}.$$

Una prueba del siguiente teorema puede ser encontrada en [9, (0.13)].

Teorema 1.2.11. *Sea X un espacio métrico y compacto. Si*

$$\mathcal{B} = \{\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \mid U_1, \ldots, U_n \text{ son abiertos y no vacíos de } X \text{ y } n \in \mathbb{N}\},$$

entonces $\mathcal{B}$ es una base para una topología de 2^X.

Definición 1.2.12. La topología para 2^X dada por el Teorema 1.6.2 es llamada la *topología de Vietoris.*

El siguiente teorema nos dice que la topología inducida por la métrica de Hausdorff y la topología de Vietoris coinciden, una prueba está en [9, (0.11)].

Teorema 1.2.13. *Si X es un continuo entonces la topología inducida por la métrica de Hausdorff en 2^X y la topología de Vietoris coinciden.*

Definición 1.2.14. Sean X un continuo y A y B dos elementos de 2^X. Un *arco de orden de A a B* es una función continua e inyectiva $\alpha : [0,1] \to 2^X$ tal que $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$ y para cualesquiera dos elementos t y s de $[0,1]$ tales que $s < t$, se tiene que $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$.

El siguiente resultado nos da condiciones necesarias y suficientes para que existan arcos de orden en 2^X [9, (1.8)].

Teorema 1.2.15. *Sean X un continuo y A y B dos elementos de 2^X. Entonces existe un arco de orden de A a B si y sólo si $A \subset B$ y toda componente de B intersecta a A.*

Como consecuencia del Teorema 1.2.15 tenemos:

Corolario 1.2.16. *Sean X un continuo y A y B dos elementos de $C(X)$. Entonces existe un arco de orden de A a B si y sólo si $A \subset B$.*

1.3. Continuos filamento

Definición 1.3.1. Sean X un continuo y K un subcontinuo de X. Decimos que K es un *subcontinuo filamento* si existe una vecindad U de K en X tal que la componente de U que contiene a K tiene interior vacío.

Notación 1.3.2. *La componente de U que contiene a K se denotará por $Cnt_U(K)$.*

Ejemplo 1.3.3. Sea X el cono sobre el conjunto de Cantor, con base B y llamemos $v = (\frac{1}{2}, 1)$ al vértice del cono. Sea K un subcontinuo de X tal que $v \notin K$.

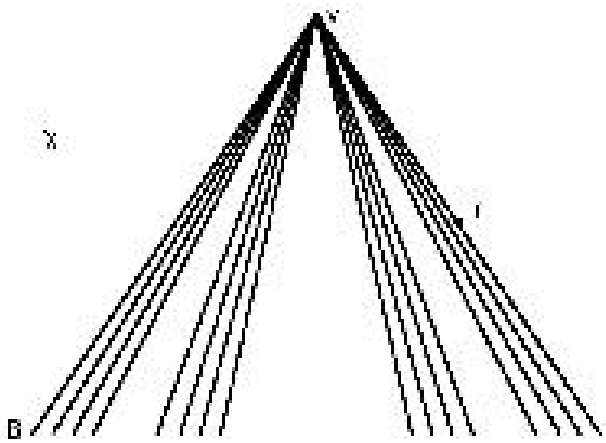

Figura 1.3: Cono sobre conjunto de Cantor

Veamos que K es filamento. Sea U un abierto de X tal que $K \subset U$ y consideremos $Cnt_U(K)$. Probaremos que $Int(Cnt_U(K)) = \emptyset$. Sean $r \in X \setminus K$, $r \neq v$ y $\varepsilon > 0$ tales que $\mathcal{V}_\varepsilon(r) \subset U$, lo cual implica que $\mathcal{V}_\varepsilon(r)$ no se queda totalmente contenida en $Cnt_U(K)$. Así, $Int(Cnt_U(K)) = \emptyset$. Por tanto, K es filamento.

Proposición 1.3.4. *Sean X un continuo y K un subcontinuo filamento de X. Entonces, existe un continuo filamento L tal que $K \subsetneq L$.*

Demostración. Sea U un abierto de X tal que $K \subset U$. Como X es normal, existe un abierto V de X tal que $K \subset Cl(V) \subset U$. Observemos que $L = Cnt_{Cl(V)}(K)$ es un continuo que contiene a K. Veamos que L es filamento. Como $Cnt_L(K) \subset Cnt_U(K)$ y K es filamento, se sigue que $Int(Cnt_U(K)) = \emptyset$. Así $Int(Cnt_L(K)) = \emptyset$. Entonces $Int(Cnt_U(L)) = \emptyset$. Por tanto, L es filamento. □

Definición 1.3.5. Decimos que un continuo X es *localmente conexo en x* si para todo abierto U de X tal que $x \in U$, existe un subconjunto abierto y conexo V de X tal que $x \in V \subset U$. Decimos que X es *localmente conexo* si lo es en cada uno de sus puntos.

Definición 1.3.6. Decimos que un continuo X es *conexo en pequeño en un punto* $x \in X$ si para cada conjunto abierto U de X tal que $x \in U$, existe un subconjunto conexo C de X tal que $x \in Int(C) \subset C \subset U$.

Notemos que sólo definimos la conexidad en pequeño puntualmente, la razón está dada por el siguiente teorema, una prueba de él se puede encontrar en [8, 1.7.12].

Teorema 1.3.7. *Un continuo X es localmente conexo si y sólo si X es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos.*

Proposición 1.3.8. *Sean X un continuo y K un subcontinuo filamento de X. Entonces X no es localmente conexo en ningún punto de K.*

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo en algún punto x de K. Como K es un subcontinuo filamento, existe un abierto U de X tal que $K \subset U$ e $Int(Cnt_U(K)) = \emptyset$. Como X es localmente en x, existe un abierto conexo V de X tal que $x \in V \subset U$.

Observemos que como $x \in K$ y V es un abierto conexo, se sigue que $V \subset Int(Cnt_U(K)$, esto implica que $Int(Cnt_U(K) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción al hecho de que K es un subcontinuo filamento. Por tanto, X no es localmente conexo en ningún punto de K. □

Definición 1.3.9. Sean X un continuo y $p \in X$. *La composante filamento* de p, denotada por $Fcs^1(p)$, es la unión de todos los continuos filamento que contienen a p, es decir:

$$Fcs^1(p) = \bigcup\{F \mid F \text{ es un subcontinuo filamento de } X \text{ tal que } p \in F\}.$$

De manera recursiva definimos:

$$Fcs^{n+1}(p) = Fcs(Fcs^n(p)).$$

Además, definimos:

$$Fcs^{\omega}(p) = \bigcup\{Fcs^n(p) \mid n \in \{1, 2, \ldots\}\}.$$

Observación 1.3.10. *Sea X un continuo y $x \in X$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $Fcs^n(p) \subset Fcs^{n+1}(p)$.*

Proposición 1.3.11. *Si X es un continuo y K es un subcontinuo de X tal que $Fcs^1(x) \subset K$, para alguna $x \in X$, entonces K no es un subcontinuo filamento.*

Demostración. Supongamos que K es un subcontinuo filamento de X. Por la Proposición 1.3.4, K es un subcontinuo propio de algún continuo filamento L. Sin embargo $L \subset Fcs^1(x)$, lo cual es una contradicción. Por tanto, K no es filamento. □

Lema 1.3.12. *Sean X un continuo y $x \in X$. Entonces $y \in Fcs^n(x)$ si y sólo si existen n subcontinuos $K_1, \ldots, K_n$ de X tales que $K_j \cap K_{j+1} \neq \emptyset$, para toda $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, $x \in K_1$ y $y \in K_n$.*

Demostración. La demostración se hará por inducción. Para $n = 2$. Si $y \in Fcs^2(x)$ esto implica que existe $p \in Fcs^1(x)$ tal que $y \in Fcs^1(p)$. Como $y \in Fcs^1(p)$, existe un subcontinuo filamento K_1 de X tal que $y \in K_1$. En particular $p \in K_1$. Así, p y y pertenecen a K_1. De manera análoga, existe un subcontinuo filamento K_2 de X tal que p y x están en K_2. Así, $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$. Por tanto, el resultado es válido para $n = 2$.

Supongamos que el lema es cierto para n. Veamos que se cumple para $n+1$. Si $y \in Fcs^{n+1}(x)$ entonces $y \in Fcs(Fcs^n(x))$. Esto implica que existe $p \in Fcs^n(x)$ tal que $y \in Fcs^1(p)$. Por hipótesis de inducción, sabemos que existen n subcontinuos filamento $K_1, \ldots, K_n$ de X tales que $K_j \cap K_{j+1} \neq \emptyset$ para todo $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, $x \in K_1$ y $p \in K_n$. Como $y \in Fcs^1(p)$, existe un subcontinuo filamento K_{n+1} de X tal que $y \in K_{n+1}$. Como $Fcs^1(p)$ es composante filamento de p, se tiene que $p \in K_{n+1}$. Además, $p \in K_n$. De todo lo anterior, resulta que $K_n \cap K_{n+1} \neq \emptyset$, $x \in K_1$ y $y \in K_{n+1}$. □

Corolario 1.3.13. *Sea X un continuo. Entonces $y \in Fcs^\omega(x)$ si y sólo si existe un numero finito de subcontinuos filamento, digamos $K_1, \ldots, K_n$ tales que $K_j \cap K_{j+1} \neq \emptyset$, para toda $j \in \{1, \ldots, n\}$, $x \in K_1$ y $y \in K_n$.*

Proposición 1.3.14. *Sean X un continuo y x y y dos puntos de X. Si $Fcs^\omega(x) \cap Fcs^\omega(y) \neq \emptyset$, entonces $Fcs^\omega(x) = Fcs^\omega(y)$.*

Demostración. Sean x, y y p tres puntos de X tales que $p \in Fcs^\omega(x) \cap Fcs^\omega(y)$. Veamos que $Fcs^\omega(x) \subset Fcs^\omega(y)$. Sea $z \in Fcs^\omega(x)$. Por el Corolario 1.3.13, existe un numero fnito de subcontinuos filamento K_1,...,K_n de X tales que $K_j \cap K_{j+1} \neq \emptyset$, para todo $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, $z \in K_1$ y $x \in K_n$.

Como $p \in Fcs^\omega(x) \cap Fcs^\omega(y)$, existe un numero finito de subcontinuos filamento F_1,...,F_m de X tales que $F_i \cap F_{i+1} \neq \emptyset$, para toda $i \in \{1, \ldots, m-1\}$, $x \in F_1$ y $p \in F_m$. Además, existe otro numero de subcontinuos filamento G_1,...,G_l de X tales que $G_t \cap G_{t+1} \neq \emptyset$, para toda $t \in \{1, \ldots, l-1\}$, $p \in G_1$ y $y \in G_l$.

Notemos que, $K_n \cap F_1 \neq \emptyset$, $F_m \cap G_1 \neq \emptyset$. Como $K_j \cap K_{j+1} \neq \emptyset$, para todo $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, $F_i \cap F_{i+1} \neq \emptyset$, para toda $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ y $G_t \cap G_{t+1} \neq \emptyset$, para toda $t \in \{1, \ldots, l-1\}$ y que $z \in K_1$, $y \in G_l$. De lo anterior concluimos que $z \in Fcs^\omega(y)$. Por tanto, $Fcs^\omega(x) \subset Fcs^\omega(y)$. De manera análoga se prueba que $Fcs^\omega(y) \subset Fcs^\omega(x)$. □

1.4. Continuos amplios

Definición 1.4.1. Sean X un continuo y L un subcontinuo de X. Decimos que L es un continuo *amplio* si para cada abierto U de X tal que $L \subset U$, existe un subcontinuo M de X tal que $L \subset Int(M) \subset M \subset U$.

Ejemplo 1.4.2. Sea X el abanico armónico, definido de la siguiente forma: Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos por L_n al segmento de recta en el plano euclidiano que tiene como puntos extremos a los puntos $v = (0,0)$ y $v_n = (1, \frac{1}{n})$ y sea $L_0 = [0,1] \times \{0\}$. Denotamos $X = \cup_{n=0}^{\infty} L_n$.

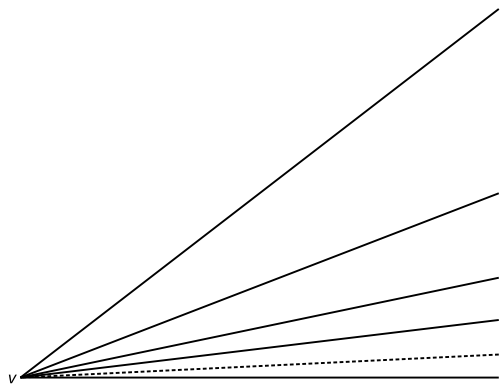

Figura 1.4: Abanico armónico

Veamos que L_0 es un subcontinuo amplio de X. Sea U un subconjunto abierto de X tal que $L_0 \subset U$. Notemos que $\Lambda(U) \cap C(X)$ es un abierto en $C(X)$, Corolario 1.2.7, tal que $L_0 \in \Lambda(U) \cap C(X)$, también notemos que $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(X)$ tal que $\lim_{n\to\infty} L_n = L_0$. Así, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$, $L_n \in \Lambda(U)$, es decir, $L_n \subset U$.

Por otra parte, como U es abierto y $v \in U \cap L_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \{1, \ldots, N-1\}$, podemos tomar un punto $a_n \in L_n$ tal que $a_n \neq v$ y el segmento de L_n con puntos extremos v y a_n, el cual denotaremos por l_n, está contenido en U. Denotemos $Y = (\bigcup_{n=1}^{N-1} l_n) \cup (\bigcup_{n=N}^{\infty} L_n) \cup L_0$. Es claro que Y es un subcontinuo de X y, además, $L_0 \subset Y \subset U$.

Para cada $n \in \{1, \ldots, N-1\}$ denotemos por J_n al segmento de L_n que tiene como puntos extremos a a_n y v_n. Observemos que $\cup_{n=1}^{N-1} J_n$ es un cerrado de X y sea $V = X \setminus \cup_{n=1}^{N-1} J_n$, V es un abierto de X y $L_0 \subset V \subset Y$. Por tanto, $L_0 \subset Int(Y)$.

Ejemplo 1.4.3. Consideremos $W = \left\{ \left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1 \right\}$ y $X = Cl_{\mathbb{R}^2}(W)$. X es conocido como la curva sinoidal del topólogo. Llamemos $M = \{0\} \times [0,1]$ a la barra límite.

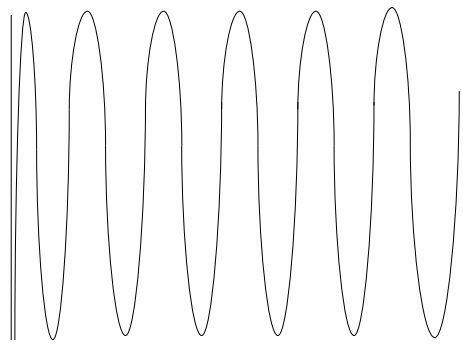

Figura 1.5: Curva sinoidal del topólogo

Veamos que M es amplio. Sea U un subconjunto abierto de X tal que $M \subset U$. Entonces existe $a \in (0,1)$ tal que $L_a = \{(x, \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) \mid 0 < x \leq a\} \subset U$. Definimos $L = Cl_{\mathbb{R}^2}(L_a)$. Observemos que L es un subcontinuo de X, además, $M \subset L \subset U$ y $X \setminus Int(L) \subset X \setminus M$. Por tanto, M amplio.

Observación 1.4.4. Considerando el Ejemplo 1.4.3, si A es un subcontinuo propio de M, A no es amplio.

El siguiente resultado nos da condiciones para tener otros subcontinuos amplios.

Proposición 1.4.5. *Sean X un continuo y W un subcontinuo de X. Si X es conexo en pequeño en x, para cada $x \in W$ entonces W es un subcontinuo amplio de X*

Demostración. Sean W subcontinuo de X y U un subconjunto abierto de X tal que $W \subset U$. Para cada $x \in W$, como X es conexo en pequeño en x, existe un subcontinuo A_x de X tal que $x \in Int(A_x) \subset A_x \subset U$. Observemos que la colección $\{Int(A_x) \mid x \in W\}$ es una cubierta abierta de W. Por compacidad, existe $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset W$ tal que $W \subset \cup_{j=1}^{n} Int(A_{x_j})$. Denotemos $L = \cup_{j=1}^{n}(A_{x_j})$. Observemos que $\cup_{j=1}^{n} Int(A_{x_j}) \subset Int(\cup_{j=1}^{n} A_{x_j})$. Así $W \subset Int(L)$. Por tanto, W es un subcontinuo amplio de X. $\square$

Lema 1.4.6. *Sean X un continuo y $h : X \to X$ un homeomorfismo. Si W es un subcontinuo amplio de X, entonces $h(W)$ es un subcontinuo amplio de X.*

Demostración. Sean W un subcontinuo amplio de X, $h : X \to X$ un homeomorfismo y U un abierto de X tal que $h(W) \subset U$. De esto se sigue que $h^{-1}(h(W)) \subset h^{-1}(U)$. Como h es homeomorfismo, se tiene $W \subset h^{-1}(U)$. Por hipótesis, W es un subcontinuo amplio de X. Entonces existe un subcontinuo L de X tal que $W \subset Int(L) \subset L \subset h^{-1}(U)$, lo cual implica $h(W) \subset h(Int(L)) \subset h(L) \subset h(h^{-1}(U))$. Así $h(W) \subset Int(h(L)) \subset h(L) \subset U$. Por tanto, $h(W)$ es un subcontinuo amplio de X. □

1.5. Continuos con la propiedad de Kelley

Definición 1.5.1. Sea X un continuo. Decimos que X tiene la *propiedad de Kelley en a* si para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda $b \in \mathcal{V}^d_\delta(a)$ y para todo $A \in C(X)$ con $a \in A$, existe $B \in C(X)$ tal que $b \in B$ y $\mathcal{H}(A, B) < \varepsilon$. A δ se le llama *el número de Kelley*. Decimos que X *tiene la propiedad de Kelley*, si la tiene en todos sus puntos.

Para ver algunos ejemplos de continuos con y sin la propiedad de Kelley, primero daremos un teorema que nos ayudará a determinar esto.

Teorema 1.5.2. *Sean X un continuo y $a \in X$. Si X es localmente conexo en a, entonces X tiene la propiedad de Kelley en a.*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $A \in C(X)$ tal que $a \in A$. Como X es localmente conexo en el punto a, existe un subconjunto abierto y conexo V de X tal que $a \in V \subset \mathcal{V}^d_{\frac{\varepsilon}{2}}(a)$, donde d es una métrica para X. Sea $\delta > 0$ tal que $\mathcal{V}^d_\delta(a) \subset V$. Sean $b \in \mathcal{V}^d_\delta(a)$. Denotemos $B = Cl_X(V) \cup A$. Es claro que $B \in C(X)$ y que $b \in B$. Como $A \subset B$, se tiene que $A \subset \mathcal{V}^d_\varepsilon(B)$. Además, puesto que $Cl_X(V) \subset \mathcal{V}^d_\varepsilon(a)$, se sigue que $B \subset \mathcal{V}^d_\varepsilon(A)$. Esto implica que $\mathcal{H}(A, B) < \varepsilon$. Por tanto, X tiene la propiedad de Kelley en a. □

Corolario 1.5.3. *Si X es un continuo localmente conexo, entonces X tiene la propiedad de Kelley.*

Ejemplo 1.5.4. Algunos ejemplos de continuos con la propiedad de Kelley son: un arco, una curva cerrada simple, un toro, las esferas, pues estos son localmente conexos.

Definición 1.5.5. Sea $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión en 2^X. Decimos que $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ converge a $A \in 2^X$, si dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$, $\mathcal{H}(A_n, A) < \varepsilon$.

El siguiente teorema nos da una forma alternativa para la propiedad de Kelley. Una prueba de él se puede ver en [1, 3.4].

Teorema 1.5.6. *Si X un continuo entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *X tiene la propiedad de Kelley.*
- *Para cada $x \in X$, cada subcontinuo K de X con $x \in K$ y cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, existe una sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subcontinuos de X tal que $\lim_{n\to\infty} K_n = K$ se tiene que $x_n \in K_n$.*

El siguiente ejemplo es un continuo que no tiene la propiedad de Kelley en p. Por tanto, X no tiene la propiedad de Kelley.

Ejemplo 1.5.7. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y para toda $m \in \mathbb{N}$ con $m > n$, $L_{n,m}$ denota el segmento de recta en el plano euclidiano con puntos extremos $(\frac{2^n-1}{2^n}, 0)$ y $(\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^m})$. Sea

$$X = \bigcup \{L_{n,m} \mid n, m \in \mathbb{N} \ \ m > n\} \cup ([0,1] \times \{0\})$$

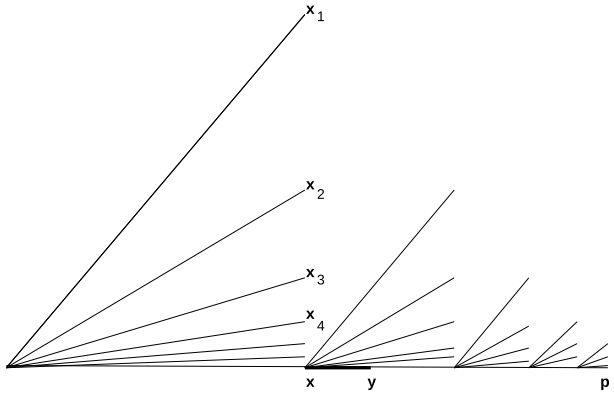

Figura 1.6: Continuo X

Denotemos al arco $A = [x, y] \times \{0\}$. Observemos que X no tiene la propiedad de Kelley en el punto x, porque podemos dar una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converga al punto x, como se muestra en la figura. Sin embargo no podemos dar una sucesión de continuos que converga al arco A y que contenga al correspondiente x_n. Por tanto, X no tiene la propiedad de Kelley.

Lema 1.5.8. *Sea X un continuo con la propiedad de Kelley. Si W es un subcontinuo de X tal que $Int(W) \neq \emptyset$ entonces W es un subcontinuo amplio de X.*

Demostración. Sean W un subcontinuo de X con interior no vacío y U un subconjunto abierto de X tal que $W \subset U$. Sean $p \in Int(W)$ y $\varepsilon > 0$ tales que $\mathcal{V}_\varepsilon(p) \subset W$ y $\varepsilon < \frac{d(W, X\setminus U)}{2}$, donde d es una métrica para X.

Sea δ un número de Kelley para la ε que tenemos y supongamos que $\delta < \varepsilon$. Como W es compacto, existen $w_1, \ldots, w_n \in W$ tales que:

$$W \subset \cup_{j=1}^{n} \mathcal{V}_\delta(w_j).$$

Sea $j \in \{1, \ldots, n\}$. Como X tiene la propiedad de Kelley, para cada $w \in \mathcal{V}_\delta(w_j)$, existe un subcontinuo K_w de X tal que $w \in K_w$ y $\mathcal{H}(K_w, W) < \delta$.

Sea $K_j = Cl_X(\cup\{K_w \cup W |\ w \in \mathcal{V}_\delta(w_j)\})$. Observemos que K_j es compacto. Por otro lado, como $\mathcal{H}(K_w, W) < \delta$, en particular, $K_w \cap \mathcal{V}_\varepsilon(p) \neq \emptyset$. De esta forma se tiene que $K_w \cap W \neq \emptyset$. Por [10, 1.8], $\cup\{K_w \cup W |\ w \in \mathcal{V}_\delta(w_j)\}$ es conexa, así K_j es conexo.

Sea $K = \cup_{j=1}^{n} K_j$. Observemos que, como cada K_j es compacto, K es compacto. Además, como $K_1, \ldots, K_n$ es una familia de conexos que intersectan al conexo W, de [10, 1.8] se tiene que K es conexo.

Notemos que $\mathcal{V}_\delta(w_j) \subset K_j$, así $\cup_{j=1}^{n} \mathcal{V}_\delta(w_j) \subset K$. Por esto, $W \subset Int_X(K)$.

Finalmente, probemos que $K \subset U$. Sea $x \in K$, entonces $x \in K_j$ para alguna $j \in \{1, \ldots, n\}$. De esto se sigue que $\mathcal{V}_\varepsilon(x) \cap (\cup\{K_w \cup W |\ w \in \mathcal{V}_\delta(w_j)\}) \neq \emptyset$. Entonces existe, $w \in \mathcal{V}_\delta(w_j)$ tal que $\mathcal{V}_\varepsilon(x) \cap (K_w \cup W) \neq \emptyset$. Con lo cual tenemos dos casos. Si $\mathcal{V}_\varepsilon(x) \cap K_w \neq \emptyset$. Sea $y \in \mathcal{V}_\varepsilon(x) \cap K_w$, como $y \in \mathcal{V}_\varepsilon(x)$ esto implica que $d(x, y) < \varepsilon$. Además, como $y \in K_w$ se tiene que $d(y, w) < \varepsilon$. Así, $d(x, w) \leq d(x, y) + d(y, w) < 2\varepsilon$, como $\varepsilon < \frac{d(W, X\setminus U)}{2}$. Entonces $x \in U$. Si $\mathcal{V}_\varepsilon(x) \cap W \neq \emptyset$, sea $z \in \mathcal{V}_\varepsilon(x) \cap W \neq \emptyset$ de esto se sigue que $d(x, z) < \varepsilon$, como $W \subset U$ implica que $x \in U$.

Por tanto, $W \subset Int(K) \subset K \subset U$. □

Definición 1.5.9. Sean X un continuo y A y B subconjuntos de X tales que $A \subset B$ y A es conexo. Definimos

$$\mathcal{C}(A, B) = \{T \subset B \mid T \text{ es un subcontinuo de } X \text{ tal que } T \cap A \neq \emptyset\}$$

y

$$Ctu_B(A) = \cup \mathcal{C}(A, B).$$

A continuación exponemos un resultado que implica que $Ctu_U(K)$ es un subconjunto abierto. Para esto, incluimos primero la siguiente proposición de la topología de espacios métricos.

Proposición 1.5.10. *Sean X un espacio métrico con métrica d y A un subconjunto de X tal que $x \in A$. Si para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$ se tiene que $x_n \in A$. Entonces $x \in Int(A)$.*

Demostración. Supongamos que $x \notin Int(A)$. Así para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos tomar un punto $x_n \in \mathcal{V}^d_{\frac{1}{n}}(x) \setminus A$. Claramente, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $X \setminus A$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Por hipótesis, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$, los puntos $x_n \in A$. Pero de la elección de estos x_n, se tiene que $x_n \in X \setminus A$, lo cual es una contradicción. Así, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{V}^d_{\frac{1}{m}}(x) \subset A$. Por tanto, $x \in Int(A)$. □

Lema 1.5.11. *Sean X un continuo con la propiedad de Kelley y K un subcontinuo de X que no es filamento. Entonces, para cada abierto U de X tal que $K \subset U$, se tiene que $Ctu_U(K)$ es un subconjunto abierto de X.*

Demostración. Sean $x \in Ctu_U(K)$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión que converge a x. Para ver que $Ctu_U(K)$ es abierto, por la Proposición 1.5.10, es suficiente probar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq \mathbb{N}$, $x_n \in Ctu_U(K)$.

De la normalidad de X, existe un subconjunto abierto V de X que contiene a K tal que $Cl(V) \subset U$. Como K no es un subcontinuo filamento de X, entonces la componente de V que contiene a K, $Cnt_V(K)$, tiene interior no vacío. Así $K \subset Cnt_V(K) \subset Cl(V) \subset U$. Lo cual implica que $Cl(Cnt_V(K)) \subset U$. Observemos que $Cl(Cnt_V(K))$ es un continuo y, además que $Cl(Cnt_V(K)) \cap K \neq \emptyset$. De esto se sigue que, $Cl(Cnt_V(K) \subset Ctu_U(K)$. Como $x \in Ctu_U(K)$, existe un subcontinuo L_1 de X tal que $L_1 \cap K \neq \emptyset$ y $x \in L_1$. Denotemos $L = Cl(Cnt_V(K)) \cup L_1$, el cual es un continuo que satisface que $L \in \mathcal{C}(K, U)$. En consecuencia, $x \in L$. Como $Int(Cnt_V(K) \neq \emptyset$ e $Int(Cnt_V(K)) \subset Cl(Cnt_V(K)) \subset L$, entonces $Int(L) \neq \emptyset$.

Como X tiene la propiedad de Kelley, existe una sucesión $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subcontinuos de X que converge a L tal que $x_n \in L_n$. Notemos que, $L \in \Lambda(U) \cap C(X)$. Entonces existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $\mathcal{V}^{\mathcal{H}}_{\varepsilon_1}(L) \subset \Lambda(U) \cap C(X)$. Como $\lim_{n\to\infty} L_n = L$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N_1$, $L_n \in \mathcal{V}^{\mathcal{H}}_{\varepsilon_1}(L)$. Lo cual implica que $L_n \in \Lambda(U) \cap C(X)$. De donde, $L_n \subset U$.

Además, como $Int(L) \neq \emptyset$, entonces $Int(L) \cap L \neq \emptyset$, es decir, $L \in \Gamma(Int(L)) \cap C(X)$. Como $Int(L)$ es abierto, por el Corolario 1.2.9, $\Gamma(Int(L)) \cap C(X)$ es abierto en $C(X)$. Así, existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que $\mathcal{V}^{\mathcal{H}}_{\varepsilon_2}(L) \subset \Gamma(Int(L)) \cap C(X)$. Como $\lim_{n\to\infty} L_n = L$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N_2$, $L_n \in \mathcal{V}^{\mathcal{H}}_{\varepsilon_2}(Int(L)) \subset \Gamma(Int_X(L)) \cap C(X)$. Es decir, para toda $n \geq N_2$, $L_n \cap Int(L) \neq \emptyset$.

Sea $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$. Para toda $n \geq \mathbb{N}$, $L_n \subset U$ y $Int(L) \cap L_n \neq \emptyset$. De esto tenemos que, si $n \geq \mathbb{N}$ entonces $L_n \cup L$ es un subcontinuo de U y $(L_n \cup L) \cap K \neq \emptyset$. Entonces para cada $n \geq N$, se tiene que $L_n \cup L \subset Ctu_U(K)$. Por tanto, para toda $n \geq \mathbb{N}$, $x_n \in Ctu_U(K)$. □

El siguiente resultado escapa de los objetivos de este trabajo una prueba de él se puede ver en [13, 1.11], pero nos ayudará en la prueba de la siguiente proposición.

Lema 1.5.12. *Sean X un continuo y K un subcontinuo de X. $C(X)$ es localmente conexo en K si y sólo si para todo subconjunto abierto U de X tal que $K \subset U$ y para toda sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(X)$ tal que $\lim_{n\to\infty} K_n = K$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$ se tiene que $K_n \subset Cnt_U(K)$.*

Proposición 1.5.13. *Sean X un continuo con la propiedad de Kelley y K un subcontinuo de X. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

a) K es amplio.

b) K no es filamento.

c) Para cada abierto U de X tal que $K \subset U$, se tiene que $Ctu_U(K)$ es abierto.

d) $C(X)$ es localmente conexo en K.

Demostración. Veamos que a) implica b). Sea U un abierto de X tal que $K \subset U$. Como K es un subcontinuo amplio, existe un subcontinuo L de X tal que $K \subset Int_X(L) \subset L \subset U$. Consideremos $Cnt_U(K)$ la componente de U que contiene a K. Observemos que $Cnt_U(K) \subset U$. Además, notemos que $L \subset Cnt_U(K)$ lo cual implica que $Int_X(L) \subset Int(Cnt_U(K))$, pero $Int(L) \neq \emptyset$, así $Int(Cnt_U(K)) \neq \emptyset$. Por tanto, K no es un subcontinuo filamento.

El hecho de que b) implica c) se sigue del Lema 1.5.11.

Supongamos c) para probar d). Usaremos la equivalencia del Lema 1.5.12. Sean U un subconjunto abierto de X tal que $K \subset U$ y $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $C(X)$ tal que $\lim_{n\to\infty} K_n = K$. Como $K \subset U$, se sigue que $K \in \Lambda(U) \cap C(X)$. Como $\Lambda(U) \cap C(X)$ es abierto, Corolario 1.2.7, existe $\delta > 0$ tal que $\mathcal{V}_\delta^{\mathcal{H}}(K) \subset \Lambda(U) \cap C(X)$. Por otro lado, sabemos que $\lim_{n\to\infty} K_n = K$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$, $K_n \in \mathcal{V}_\delta^{\mathcal{H}}(K)$. Lo cual implica que $\mathcal{H}(K, K_n) < \delta$. De esto se sigue que $K_n \subset \mathcal{V}_\delta(K)$ y, así $K_n \subset Ctu_U(K)$. Notemos que $Ctu_U(K) \subset Cnt_U(K)$. De donde, $K_n \subset Cnt_U(K)$. Por tanto, $C(X)$ es localmente conexo en K.

Finalmente, probemos a) suponiendo d). Sea U un subconjunto abierto de X tal que $K \subset U$. Por el Corolario 1.2.7, $\Lambda(U) \cap C(X)$ es un abierto de $C(X)$ y satisface que $K \in \Lambda(U) \cap C(X)$. Como $C(X)$ es localmente conexo en K, existe un abierto conexo $\mathcal{V}$ de $C(X)$ tal que $K \in \mathcal{V} \subset Cl_{C(X)}(\mathcal{V}) \subset \Lambda(U) \cap C(X)$. Sea $L = \cup\{A \mid A \in Cl_{C(X)}(\mathcal{V})\}$, el cual es un continuo, [10, 1.8]. Notemos que $K \subset L$, pues $K \in Cl_{C(X)}(\mathcal{V})$. Además, si $x \in L$ esto implica que existe $A \in Cl_{C(X)}(\mathcal{V})$ tal que $x \in A$. Como $Cl_{C(X)}(\mathcal{V}) \subset \Lambda(U) \cap C(X)$, se tiene que $A \in \Lambda(U) \cap C(X)$,

entonces $A \subset U$, De este modo, se sigue que $x \in U$. Luego, $K \subset L \subset U$. Veamos que $K \subset Int(L)$. Sean $x \in K$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Como X tiene la propiedad de Kelley, por la Proposición 1.5.6, existe una sucesión de continuos $\{K\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a K tal que $x_n \in K_n$. Así, como $K \subset \mathcal{V}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$, $K_n \subset \mathcal{V}$ lo que implica que $x_n \in \mathcal{V}$. En consecuencia, $x_n \in L$. De donde, $K \subset Int(L)$. Por tanto, K es un subcontinuo amplio de X. □

Corolario 1.5.14. *Sean X un continuo con la propiedad de Kelley y $p \in X$. Entonces X es conexo en pequeño en p si y sólo si el singular $\{p\}$ no es filamento.*

Demostración. Supongamos que X es conexo en pequeño en p. Sea U un abierto de X tal que $\{p\} \subset U$. Como X es normal, sea V un subconjuto abierto de X tal que $x \in V \subset Cl(V) \subset U$. Por hipótesis, existe un subconjunto conexo C de X tal que $x \in Int(C) \subset C \subset V$. Notemos que $Cl(C)$ es un subcontinuo de X tal que $x \in Int(Cl(C)) \subset Cl(C) \subset U$. Así, $\{p\}$ es un subcontinuo amplio de X. Luego, par la equivalencia entre a) y b) de la Proposición 1.5.13, se concluye que $\{p\}$ no es filamento.

Supongamos que $\{p\}$ no es filamento, por la Proposición 1.5.13, $\{p\}$ es amplio. Sea U un subconjunto abierto de X tal que $\{p\} \subset U$. Entonces existe un subcontinuo L de X tal que $\{p\} \subset Int(L) \subset L \subset U$. Lo cual implica que $p \in Int(L) \subset L \subset U$. Por tanto, X es conexo en pequeño en el punto p. □

Corolario 1.5.15. *Sea X un continuo con la propiedad de Kelley. Entonces para cada subcontinuo A de X, se tiene que A es un continuo filamento o amplio.*

Proposición 1.5.16. *Sean X un continuo con la propiedad de Kelley, $\mathcal{G}$ una descomposición monótona y semicontina superiormente de X, $q : X \to X/\mathcal{G}$ la función cociente, A un subcontinuo de X y $\widehat{A}$ un subcontinuo de $X/\mathcal{G}$. Si A es amplio en X, entonces $q(A)$ es amplio en $X/\mathcal{G}$. Si $\widehat{A}$ es amplio en $X/\mathcal{G}$, entonces $q^{-1}(\widehat{A})$ es amplio en X.*

Demostración. Sea A un continuo amplio de X. Afirmamos que $q^{-1}(q(A))$ es un subcontinuo amplio de X. Supongamos que $q^{-1}(q(A))$ no es un subcontinuo amplio de X. Entonces como X tiene la propiedad de Kelley, por el Corolario 1.5.15, $q^{-1}(q(A))$ es un subcontinuo filamento de X. Luego, existe un subconjunto abierto W de X tal que $q^{-1}(q(A)) \subset W$ e $Int(Cnt_W(q^{-1}(q(A)))) = \emptyset$. Como $A \subset q^{-1}(q(A))$, se tiene que $Cnt_W(A) = Cnt_W(q^{-1}(q(A)))$, lo cual implica que $Int(Cnt_W(A)) = \emptyset$. Entonces A es un subcontinuo filamento. Así A no es un subcontinuo amplio. Esto prueba la afirmación.

Sea $\widehat{U}$ un abierto de $X/\mathcal{G}$ tal que $q(A) \subset \widehat{U}$, como $q^{-1}(q(A))$ es amplio, existe un continuo D tal que $q^{-1}(q(A)) \subset Int(D) \subset D \subset q^{-1}(\widehat{U})$. Como $\mathcal{G}$ es semicontinua superiormente, existe un abierto saturado V tal que $q^{-1}(q(A)) \subset V \subset D$. Esto implica que $q(A) \subset q(V) \subset q(D)$. Así $q(D)$ es un subcontinuo de $X/\mathcal{G}$, el cual es una vecindad de $q(A)$ y, además, $q(D) \subset \widehat{U}$. Obsevemos que, como V es un abierto saturado de X, se sigue que $q(V)$ es un abierto de $X/\mathcal{G}$, entonces $q(A) \subset Int(q(D))$. Por tanto, $q(A)$ es un subcontinuo amplio de $X/\mathcal{G}$.

Supongamos que $\widehat{A}$ es un subcontinuo amplio de $X/\mathcal{G}$. Sea U un subconjunto abierto de X tal que $q^{-1}(\widehat{A}) \subset U$. Como $q^{-1}(\widehat{A})$ es saturado y $\mathcal{G}$ es semicontinua superiormente, existe un subconjunto abierto saturado V de X tal que $q^{-1}(\widehat{A}) \subset V \subset U$. Notemos que $V = q^{-1}(q(V))$. De esto se sigue que $q(V)$ es un abierto de $X/\mathcal{G}$ tal que $\widehat{A} \subset q(V)$. Como $\widehat{A}$ es amplio, existe un subcontinuo $\widehat{K}$ de $X/\mathcal{G}$ tal que $\widehat{A} \subset Int(\widehat{K}) \subset \widehat{K} \subset q(V)$. Como q es monótona, $q^{-1}(\widehat{K})$ un subcontinuo de X tal que $q^{-1}(\widehat{A}) \subset Int_X(q^{-1}(\widehat{K})) \subset q^{-1}(\widehat{K}) \subset V \subset U$. Por tanto, $q^{-1}(\widehat{A})$ es un subcontinuo amplio de X. □

1.6. Continuos homogéneos

Definición 1.6.1. Decimos que un continuo X es *homogéneo* si para cualesquiera dos puntos x, $y \in X$, existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(x) = y$.

Lema 1.6.2. *Si X es un continuo homogéneo entonces X no tiene puntos de corte.*

Demostración. Supongamos que x es un punto de corte de X. Sea $y \in X \setminus \{x\}$. Como X es homogéneo, existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(x) = y$. Como x es un punto de corte, existen dos subconjuntos abiertos no vacíos y ajenos U y V de X tales que $X \setminus \{x\} = U \cup V$. De lo anterior se sigue que $X \setminus \{y\} = h(X \setminus \{x\}) = h(U \cup V) = h(U) \cup h(V)$. Entonces, y es un punto de corte de X. Lo cual contradice el hecho de que todo continuo tiene, por lo menos, dos puntos de corte, [10, Prop. 6.6]. □

Proposición 1.6.3. *Sea X un continuo homogéneo. Si A es un subcontinuo propio de X con más de un punto. Entonces $|Fr(A)| \geq 2$.*

Demostración. Supongamos que $|Fr(A)| = 1$; esto es, $Fr(A) = \{p\}$. Notemos que $X \setminus \{p\} = (A \setminus \{p\}) \cup (X \setminus A)$. Observemos que $A \setminus \{p\} \neq \emptyset$ y $X \setminus A \neq \emptyset$ y, además, $A \setminus \{p\} = Int(A)$. Así, $A \setminus \{p\}$ y $X \setminus A$ son abiertos ajenos, lo cual es una contradicción porque X no tiene puntos de corte (Lema 1.6.2). Por tanto, $|Fr(A)| \geq 2$. □

Definición 1.6.4. Sea X un espacio métrico, decimos que X tiene *la propiedad de Effros* si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si x y y son dos puntos de X tales que $d(x, y) < \delta$ entonces existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(x) = y$ y $d(z, h(z)) < \varepsilon$ para todo $z \in X$. El número δ es llamado *un número de Effros para* ε.

Definición 1.6.5. Sean X un espacio métrico y $h : X \to X$ un homeomorfismo. Si para todo $z \in X$ se satisface que $d(z, h(z)) < \varepsilon$, entonces h es llamado un ε-*homeomorfismo.*

Lema 1.6.6. *Sea X un continuos con la propiedad de Effros. Entonces X tiene la propiedad de Kelley.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como X tiene la propiedad de Effros, existe un número de Effros, que llamaremos δ. Sin pérdida de generalidad, supondremos que $\delta < \varepsilon$. Sean x y y dos puntos de X tales que $d(x, y) < \delta$ y A un subcontinuo de X que contiene a x. Como δ es un número de Effros, existe un ε-homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(x) = y$. Notemos que $h(A)$ es un subcontinuo de X que tiene a y. Además, se tiene que $\mathcal{H}(A, h(A)) < \varepsilon$. Por tanto, X tiene la propiedad de Kelley. □

El siguiente resultado escapa de los objetivos de este trabajo, una prueba de él se puede encontrar en [8, 4.2.31 y 4.2.33]

Teorema 1.6.7. *Sea X un continuo. Entonces X es homogéneo si y sólo si X tiene la propiedad de Effros.*

Definición 1.6.8. Sean X un continuo y $\mathcal{G}$ una descomposición de X. Decimos que $\mathcal{G}$ es *respetada por el grupo de homeomorfismos*, si para todo homeomorfismo $h : X \to X$ y para todo $G \in \mathcal{G}$ se tiene que $h(G) \in \mathcal{G}$.

Teorema 1.6.9. *Sean X un continuo homogéneo, con métrica d y $\mathcal{G}$ una descomposición de X tal que los elementos de $\mathcal{G}$ son cerrados. Si $\mathcal{G}$ es respetada por el grupo de homeomorfismos de X, $\mathcal{H}(X)$. Entonces:*

a) $\mathcal{G}$ es una descomposición continua de X.

b) Los elementos de $\mathcal{G}$ son conjuntos homogéneos homeomorfos entre sí.

c) El espacio cociente $X/\mathcal{G}$ es un continuo homogéneo.

Demostración. Veamos que $\mathcal{G}$ es semicontinua superiormente. Sean $G \in \mathcal{G}$ y U un subconjunto abierto de X tales que $G \subset U$. Sea $\varepsilon = d(G, X \setminus U)$. Como G y $X \setminus U$ son cerrados ajenos, así compactos, se tiene que $\varepsilon > 0$. Como X es homogéneo, existe un

número de Effros $\delta > 0$ para la ε dada. Sin perdida de generalidad, supongamos que $\delta < \varepsilon$. Sea $V = \mathcal{V}_\delta^d(G)$. Entonces V es un subconjunto abierto de X que está contenido en U. Sea $G' \in \mathcal{G}$ tal que $G' \cap V \neq \emptyset$. Sean $y \in G' \cap V$ y $x \in G$ tales que $d(x, y) < \delta$. Como δ es un número de Effros, existe un ε-homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(x) = y$. Como $\mathcal{G}$ es respetada por $\mathcal{H}(X)$, $h(G) = G'$. Así, $G' \subset \mathcal{V}_\varepsilon^d(G)$. De esto se sigue que $G' \subset U$. Por tanto, $\mathcal{G}$ es semicontinua superiormente.

Veamos que $\mathcal{G}$ es semicontinua inferiormente. Sean $G \in \mathcal{G}$, x y y dos elementos de G y U un subconjunto abierto de X tal que $x \in U$. Sean $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{V}_\varepsilon^d(x) \subset U$ y δ un número de Effros para ε. Definimos $V = \mathcal{V}_\delta^d(y)$. Sea $G' \in \mathcal{G}$ tal que $G' \cap V \neq \emptyset$. Tomemos $z \in G' \cap V$, lo cual implica que $z \in G'$ y $z \in V$. Como $z \in V$, se sigue que $d(y, z) < \delta$. Como δ es un número de Effros, existe un ε-homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(y) = z$. En particular, $d(x, h(x)) < \varepsilon$, de esto se sigue que $h(x) \in U$. Como $\mathcal{G}$ es respetada por $\mathcal{H}(X)$, se tiene que $h(G) = G'$. Así, $G' \cap U \neq \emptyset$. Por tanto, $\mathcal{G}$ es semicontinua inferiormente y $\mathcal{G}$ es continua.

Veamos que los elementos de $\mathcal{G}$ son homegéneos. Sean $G \in \mathcal{G}$ y $x, y \in G$. Como X es homogéneo, existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(x) = y$. Como $\mathcal{G}$ es respetada por $\mathcal{H}(X)$ se tiene que $h(G) = G$. Entonces, consideremos $h\,|_G\colon G \to G$ es un homeomorfismo tal que $h_G(x) = y$. Por tanto, G es homogéneo.

Probemos que $X/\mathcal{G}$ es un continuo homogéneo. Por [8, 1.7.3], $X/\mathcal{G}$ es un continuo. Sean la función cociente $q : X \to X/\mathcal{G}$ y $\chi_1, \chi_2 \in X/\mathcal{G}$. Tomemos $x_1, x_2 \in X$ tales que $q(x_1) = \chi_1$, $q(x_2) = \chi_2$. Como X es homogéneo, existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(x_1) = x_2$. Sabemos que $\mathcal{G}$ es respetada por $\mathcal{H}(X)$, así $x_1 \in q^{-1}(\chi_1)$, $x_2 \in q^{-1}(\chi_2)$ y $h(x_1) = x_2$. De lo anterior se obtiene que $h(q^{-1}(\chi_1)) = q^{-1}(\chi_2)$. Definimos $f : X/\mathcal{G} \to X/\mathcal{G}$ dada por:

$$f(\chi) = q \circ h(q^{-1}(\chi)).$$

Notemos que f está bien definida, pues $\mathcal{G}$ respetada por $\mathcal{H}(X)$. Como $\mathcal{G}$ es una descomposición continua, entonces por el Teorema 1.1.17, q es abierta y, tenemos que h es continua, de esto se tiene que f es continua. Notemos que $f^{-1} : X/\mathcal{G} \to X/\mathcal{G}$ dada por: $f^{-1}(\chi) = q \circ h^{-1}(q^{-1}(\chi))$, es también continua. De este modo, f es un homeomorfismo. Por tanto, $X/\mathcal{G}$ es un continuo homogéneo. □

Definición 1.6.10. Sean X un continuo, $f : X \to \mathcal{P}(X)$ una función y $h : X \to X$ un homeomorfismo. Decimos que f *es respetada por el homeomorfismo* h, si para $x \in X$ se cumple que $h(f(x)) = f(h(x))$.

Proposición 1.6.11. *Sean X un continuo y $f : X \to \mathcal{P}(X)$ tal que f es respetada por los homeomorfismos de X. Entonces la función $g : X \to 2^X$ dada por $g(x) = Cl(f(x))$, también es respetada por los homeomorfismos de X.*

Demostración. Sean $h : X \to X$ un homeomorfismo y $x \in X$. Veamos que $h(g(x)) = g(h(x))$. Como f es respetada por los homeomorfismos de X, se tiene que $h(f(x)) = f(h(x))$. De la definición se sigue que, $h(g(x)) = h(Cl(f(x)))$. Como la cerradura se preserva bajo homeomorfismos, $h(g(x)) = h(Cl(f(x))) = Cl(h(f(x))) = Cl(f(h(x))) = g(h(x))$. □

Proposición 1.6.12. *Sea X un continuo homogéneo y $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos no vacíos de X, la cual es una descomposición de X, que es respetada por el grupo de homeomorfismos. Entonces $\{Cl(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ también es una descomposición de X.*

Demostración. Sean $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$. Supongamos que $Cl(A_1) \cap Cl(A_2) \neq \emptyset$. Sean $x_0 \in Cl(A_1) \cap Cl(A_2)$ y $A_0 \in \mathcal{A}$ tales que $x_0 \in A_0$. Sea $x_1 \in Cl(A_1)$. Como X es homogéneo, existe un homeomorfismo $h_1 : X \to X$ tal que $h_1(x_1) = x_0$. Como $\mathcal{A}$ es respetada por h_1, se tiene que $h_1(Cl(A_1)) = Cl(A_0)$.

Sea $x_2 \in Cl(A_2)$. Como X es homogéneo, existe un homeomorfismo $h_2 : X \to X$ tal que $h_2(x_0) = x_2$. Como $\mathcal{A}$ es respetada por h_2, se tiene que $h(Cl(A_0)) = Cl(A_2)$.

Por otro lado, como $x_1, x_0 \in Cl(A)$, se tiene que $h_1(Cl(A_1)) = Cl(A_1)$. Entonces $Cl(A_1) = Cl(A_0)$. De manera similar, $Cl(A_0) = Cl(A_2)$. Por tanto, $Cl(A_1) = Cl(A_2)$. □

Corolario 1.6.13. *Sean X un continuo homogéneo y $f\colon X \to \mathcal{P}(X)$ una función tal que $\{f(x) \mid x \in X\}$ es una descomposición de X. Si f es respetada por el grupo de homeomorfismos de X entonces $\{Cl(f(x)) \mid x \in X\}$ también es una descomposición de X.*

Lema 1.6.14. *Sean X un continuo homogéneo y $f : X \to 2^X$ una función que es respetada por los homeomorfismos de X. Entonces f es continua.*

Demostración. Sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Como X es homogéneo, existe un número de Effros $\delta > 0$ para la ε que tenemos. Sean y un punto de X tal que $d(x, y) < \delta$ y $h\colon X \to X$ un ε-homoemorfismo tal que $h(x) = y$. Como f es respetada por el grupo de homeomorfismos de X, $f(y) = h(f(x))$. De aquí se sigue que, para cada $y' \in f(y)$, existe $x' \in f(x)$ tal que $d(x', y') < \varepsilon$. Lo que implica que $f(y) \subset \mathcal{V}^d_\varepsilon(f(x))$. Análogamente, usando h^{-1}, se pruega que $f(x) \subset \mathcal{V}^d_\varepsilon(f(y))$. De donde, $\mathcal{H}(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Por tanto, f es continua. □

Definición 1.6.15. Sea X un continuo. Entonces para cada función $f : X \to 2^X$ definimos $\widehat{f} : X \to 2^X$ dada por: $\widehat{f}(x) = f^{-1}(f(x))$. Se tiene que, $\mathcal{G} = \{\widehat{f}(x) \mid x \in X\}$, es una descomposición de X en compactos.

Proposición 1.6.16. *Si X es un continuo homogéneo y $f : X \to 2^X$ una función que respetada por los homeomorfismos de X. Entonces la descomposición $\mathcal{G} = \{\widehat{f}(x) \mid x \in X\}$ es respetada por los homeomorfismos de X y satisface el Teorema 1.6.9.*

Demostración. Veamos que $\mathcal{G}$ es respetada por los homeomorfismos de X. Sean $h : X \to X$ un homeomorfismo y $x, y \in X$ tales que $h(x) = y$. Probaremos que dados $G_x, G_y \in \mathcal{G}$ los cuales satisfacen que $x \in G_x$ y $y \in G_y$, entonces $h(G_x) = G_y$. Sea $p \in G_x$. Esto implica que $p \in f^{-1}(f(x))$. Así $f(p) = f(x)$. Como la función f es respetada por los homeomorfismos de X, se sigue que $f(h(p)) = h(f(p)) = h(f(x)) = f(h(x)) = f(y)$. Así $h(p) \in G_y$. Por tanto, $h(G_x) \subset h(G_y)$.

Sea $q \in G_y$, como f es respetada por los homeomorfismos de X, $f(h^{-1}(q)) = h^{-1}(f(q)) = h^{-1}(f(y)) = f(h^{-1}(q)) = f(x)$. De esto se sigue que $h^{-1}(q) \in G_x$, lo cual implica que $q \in h(G_x)$. Por tanto, $G_y \subset h(G_x)$.

Como $\mathcal{G}$ es una descomposición en subconjuntos cerrados de X y es respetada por el grupo de homeomorfismos de X, se tienen las hipótesis del Teorema 1.6.9. Por tanto, se cumple lo requerido. □

Proposición 1.6.17. *Sea X un continuo homogéneo. Entonces $\mathcal{G} = \{Fcs^{\omega}(x) \mid x \in X\}$ es una descomposición de X.*

Demostración. Como X es homogéneo se tiene que $\mathcal{G} \neq \emptyset$. Por la Proposición 1.3.14, $\mathcal{G}$ es una descomposición. □

Proposición 1.6.18. *Sea X un continuo homogéneo. Entonces los elementos de $\mathcal{G} = \{Cl(Fcs^{\omega}(x)) \mid x \in X\}$ son subcontinuos amplios de X.*

Demostración. Sea $x \in X$. Notemos que $Fcs^n(x) \subset Fcs^{n+1}(x)$ para toda $n \in \{1, 2, \ldots\}$. Por la Proposición 1.3.11, se sigue $Cl(Fcs^n(x))$ no es filamento. Como X es homogéneo, por el Teorema 1.6.7 y el Lema 1.6.6, se sigue que X tiene la propiedad de Kelley. Por la Proposición 1.5.13, $Cl(Fcs^n(x))$ es un subcontinuo amplio de X. □

Teorema 1.6.19. *Sean X un continuo homogéneo que no es localmente conexo y $\mathcal{G} = \{Cl(Fcs^{\omega}(x)) \mid x \in X\}$. Entonces:*

1) *$\mathcal{G}$ es una descomposición continua de X.*

2) *Los elementos de $\mathcal{G}$ son homogéneos, amplios y homeomorfos entre sí.*

3) *El espacio cociente $X/\mathcal{G}$ es un continuo homogéneo.*

4) *El espacio cociente $X/\mathcal{G}$ es localmente conexo.*

Demostración. Sea $f : X \to 2^X$ una función dada por $f(x) = Fcs^{\omega}(x)$. Por Proposición 1.6.16, f es respetada por los homeomorfismos de X y, por la Proposición 1.6.11, la función $g : X \to 2^X$ dada por $g(x) = Cl(f(x))$ también es respetada por los homeomorfismos de X. Por la Proposición 1.6.17 y el Corolario 1.6.13, $\mathcal{G}$ es una descomposición de X. De esta forma, tenemos que se cumplen las hipótesis del Teorema 1.6.9. Por lo que se cumple 1) y 3). Además, se satisface que los elementos de $\mathcal{G}$ son homogéneos y homeomorfos entre sí. Por la Proposición 1.6.18, los elementos de $\mathcal{G}$ son amplios.

Veamos que se cumple 4). Por 3), $X/\mathcal{G}$ es homogéneo, en particular, $X/\mathcal{G}$ tiene la propiedad de Kelley. Sea $G \in X/\mathcal{G}$. Por 2), tenemos que G es un subcontinuo amplio de X. Notemos que si $q : X \to X/\mathcal{G}$ es la función cociente, entonces $q(G) = \{G\}$. Luego, por la Proposición 1.5.16, se tiene que $\{G\}$ es un subcontinuo amplio de $X/\mathcal{G}$. Así, por el Corolario 1.5.14, se obtiene que $X/\mathcal{G}$ es conexo en pequeño en G, Esto prueba que $X/\mathcal{G}$ es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos. Entonces, por el Teorema 1.3.7, se concluye que $X/\mathcal{G}$ es localmente conexo. □

Definición 1.6.20. Sean X un continuo y S un subcontinuo de X. Decimos que S es *semiterminal* si dados dos subcontinuos K_1 y K_2 de X tales que $K_1 \cap S \neq \emptyset \neq K_1 \cap (X \setminus S)$ y $K_2 \cap S \neq \emptyset \neq K_2 \cap (X \setminus S)$, se tiene que $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$.

Observación 1.6.21. *Si X es un arco con puntos extremos a y b y A es un subcontinuo de X. Entonces A es semiterminal si y sólo sí $\{a, b\} \cap A \neq \emptyset$.*

Observación 1.6.22. *Sean X un continuo homogéneo y S un subcontinuo semiterminal de X. Si $h : X \to X$ es un homeomorfismo, entonces $h(S)$ es un subcontinuo semiterminal de Y.*

Lema 1.6.23. *Sean X y Y continuos y $f : X \to Y$ una función monótona. Si A es subcontinuo semiterminal de X entonces $f(A)$ es un subcontinuo semiterminal de Y.*

Demostración. Sean A subcontinuo semiterminal de X y K_1 y K_2 subcontinuos de Y tales que $f(A) \cap K_j \neq \emptyset \neq (Y \setminus f(A)) \cap K_j$ con $j \in \{1, 2\}$. Entonces existen $a \in A$ y $x \in X \setminus A$ tales que $f(a) \in K_1$ y $f(x) \in K_1$. Esto implica que $a \in f^{-1}(f(a)) \subset f^{-1}(K_1)$ y $x \in f^{-1}(f(x)) \subset f^{-1}(K_1)$. Así, $f^{-1}(K_1) \cap A \neq \emptyset$ y $f^{-1}(K_1) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. Similarmente, $f^{-1}(K_2) \cap A \neq \emptyset$ y $f^{-1}(K_2) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. Como A es un subcontinuo semiterminal de X, $f^{-1}(K_1) \cap f^{-1}(K_2) \neq \emptyset$, luego $\emptyset \neq f(f^{-1}(K_1) \cap f^{-1}(K_2)) = K_1 \cap K_2$. Por tanto, $f(A)$ es un subcontinuo semiterminal de Y. □

Proposición 1.6.24. *Sea X un continuo homogéneo, localmente conexo. Entonces, los únicos subcontinuos semiterminales de X son los puntos y X.*

Demostración. Consideremos al conjunto $\{x\}$ tal que $x \in X$. Sean K_1 y K_2 subcontinuos de X tales que $K_1 \cap \{x\} \neq \emptyset \neq K_1 \cap (X \setminus \{x\})$ y $K_2 \cap \{x\} \neq \emptyset \neq K_2 \cap (X \setminus \{x\})$. De esto se sigue que $x \in K_1 \cap K_2$, entonces $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$. Por tanto, $\{x\}$ es un subcontinuo semiterminal de X.

Ahora, sea K un subcontinuo propio de X con más de un punto. Por la Proposición 1.6.3, podemos tomar dos puntos distintos a y b en $Fr(K)$. Sean U y V subconjuntos abiertos en X tales que $a \in U$, $b \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Como X es localmente conexo y de la normalidad de X, existen dos subconjuntos abiertos y conexos A y B de X tales que $a \in A \subset Cl(A) \subset U$, $b \in B \subset Cl(B) \subset V$. Observemos que, $A \cap K \neq \emptyset \neq A \cap (X \setminus K)$ y $B \cap K \neq \emptyset \neq B \cap (X \setminus K)$. Además, $Cl(A)$ y $Cl(B)$ son subcontinuos de X que tienen intersección no vacía con K y con $X \setminus K$. Como $Cl(A) \subset U$ y $Cl(B) \subset V$ se tiene que $Cl(A) \cap Cl(B) = \emptyset$. Esto demuestra que K no es un subcontinuo semiterminal en X. □

Lema 1.6.25. *Sean X un continuo homogéneo, S un subcontinuo semiterminal de X con interior no vacío y F un subcontinuo filamento de X. Si $F \cap S \neq \emptyset$, entonces $F \subset S$.*

Demostración. Sea U un subconjunto abierto de X tal que $F \subset U$. Como F es un subcontinuo filamento de X se tiene que $Int(Cnt_U(F)) = \emptyset$. Supongamos que $F \cap (X \setminus S) \neq \emptyset$ y sea $p \in F \setminus S$. Dado que $X \setminus S$ es un subconjunto abierto, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $\mathcal{V}_{\varepsilon_1}(p) \subset (X \setminus S)$. También, como $p \in U$, existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que $\mathcal{V}_{\varepsilon_2}(p) \subset U$. Sea $\varepsilon = \text{mín}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.

Fijemos $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{k_0} < \varepsilon$. Afirmamos que si $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{V}_{\frac{1}{k_0+n}}(p) \cap (U \setminus Cnt_U(F)) \neq \emptyset$. De lo contrario, $\mathcal{V}_{\frac{1}{k_0+n}}(p) \subset Cnt_U(F)$, esto es, $Int(Cnt_U(F) \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción al hecho de que F es un subcontinuo filamento de X.

Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, elijamos $p_n \in \mathcal{V}_{\frac{1}{k_0+n}}(p) \cap (U \setminus Cnt_U(F))$, lo cual implica que $\lim_{n\to\infty} p_n = p$. Como X tiene la propiedad de Effros, por el Teorema de Effros, [8, 4.2.31], existe una sucesión de homeomorfismos sobre X, $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{n\to\infty} h_n = Id_X$. Así, $\lim_{n\to\infty} h_n(F) = F$. Sea $y \in F \subset U$. Entonces existe $\varepsilon_y > 0$ tal que $\mathcal{V}_{\varepsilon_y}(y) \subset U$. De esta manera, la colección $\{\mathcal{V}_{\frac{\varepsilon_y}{2}}(y) \mid y \in F\}$ es una cubierta abierta de F en X. Como F es compacto, existen $y_1, \ldots, y_n$ en F tales que $F \subset \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{V}_{\frac{\varepsilon_{y_j}}{2}}(y_j)$. Sea $\varepsilon = \text{mín}\{\frac{\varepsilon_{y_j}}{2} \mid j = 1, \ldots, n\}$. Entonces, $F \subset \mathcal{V}_{\varepsilon}(F)$.

Afirmamos que, $\mathcal{V}_{\varepsilon}(F) \cap (X \setminus U) = \emptyset$. Si existe $x \in X \setminus U$ tal que $x \in \mathcal{V}_{\varepsilon}(F)$ entonces existe $y \in F$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$. Luego, existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $y \in \mathcal{V}_{\frac{\varepsilon_{y_i}}{2}}(y_i)$, así, $d(x, y_i) \leq d(x, y) + d(y, y_i) < \varepsilon + \frac{\varepsilon_{y_i}}{2} \leq \varepsilon_{y_i}$. Esto es, $x \in \mathcal{V}_{\varepsilon_{y_i}}(y_i) \subset U$, esto implica que $x \in U$, lo cual es una conradicción. Por tanto, $\mathcal{V}_{\varepsilon}(F) \cap (X \setminus U) = \emptyset$ y $\mathcal{V}_{\varepsilon}(F) \subset U$.

Como $\lim_{n\to\infty} h_n(F) = F$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N_1$, $\mathcal{H}(h_n(F), F) < \varepsilon$. Entonces existe $\delta > 0$, con $\delta < \varepsilon$, tal que $h_n(F) \subset \mathcal{V}_\delta(F)$. Así, para toda $n \geq N_1$, $h_n(F) \subset \mathcal{V}_\delta(F) \subset \mathcal{V}_\varepsilon(F) \subset U$.

Afirmamos que, para todo $n \geq N_1$, $h_n(F) \cap Cnt_U(F) = \emptyset$. Supongamos que $h_n(F) \cap Cnt_U(F) \neq \emptyset$. Entonces $h_n(F) \cup Cnt_U(F)$ es una componente distinta de $Cnt_U(F)$ contenida en U que contiene a F y a $Cnt_U(F)$, lo cual no es posible porque $Cnt_U(F)$ es la componente maximal. Por tanto, para toda $n \geq N_1$, se tiene que $h_n(F) \cap Cnt_U(F) = \emptyset$. De este modo, para toda $n \geq N_1$ se tiene que $h_n(F) \subset (U \setminus Cnt_U(F))$.

Por otro lado, como $Int(S) \neq \emptyset$, existen $s \in S$ y $\varepsilon > 0$ tales que $\mathcal{V}_\varepsilon(s) \subset S$. Del hecho de que $\lim_{n\to\infty} h_n = Id_X$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N_2$, $d(h_n(s), s) < \varepsilon$. Sea $N_3 = \text{máx}\{N_1, N_2\}$. Entonces para todo $n \geq N_3$, se tiene que $h_n(S) \cap S \neq \emptyset$ y $h_n(F) \subset (U \setminus Cnt_U(F))$.

Recordemos que, para toda $n \in \mathbb{N}$, $p_n \in X \setminus S$. Veamos que, $h_n(F) \cap (X \setminus S) \cap h_n(X \setminus S) \neq \emptyset$. Notemos que $p \in F \cap (X \setminus S)$, lo que implica que $h_n(p) \in h_n(F \cap (X \setminus S))$. De donde, $h_n(p) = p_n \in (X \setminus S)$. Así, $h_n(F \cap (X \setminus S)) \cap (X \setminus S) = h_n(F) \cap h_n(X \setminus S) \cap (X \setminus S) \neq \emptyset$. Esto es, $h_n(F) \setminus (S \cup h_n(S)) \neq \emptyset$.

Ahora probaremos que $F \setminus (S \cup h_n(S)) \neq \emptyset$ para algún $n \geq N_3$. Sabemos que $p \in F \setminus S$. Afirmamos que para $n \geq N_3$ se tiene que $p \notin h_n(S)$. Supongamos que no, así para cada $n \geq N_3$, existe $x_n \in S$ tal que $h_n(x_n) = p$. Consideremos a k_0, definida anteriormente, entonces si $\varepsilon = \frac{1}{k_0}$, existe $N_4 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N_4$ y para toda $x \in X$ se tiene que, $d(h_n(x), x) < \frac{1}{k_0}$. Sea $N = \text{máx}\{N_3, N_4\}$, entonces para toda $n \geq N$ y para toda $x \in X$, $d(h_n(x), x) < \frac{1}{k_0}$. En particular, para $x_n \in X$ se tiene que $d(h_n(x_n), x_n) < \frac{1}{k_0}$. Como $n \geq N$, entonces $h_n(x_n) = p$, lo que implica que $d(p, x_n) < \frac{1}{k_0}$, esto es, $x_n \in \mathcal{V}_{\frac{1}{k_0}}(p) \subset X \setminus S$, lo cual es una contradicción al hecho de que $x_n \in S$. Como $p \in F \setminus S$, se sigue que $p \in F \setminus (S \cup h_n(S))$.

Consideremos $N = \text{máx}\{N_1, N_2, N_3, N_4\}$, como $h_n(S) \cap S \neq \emptyset$ y de [11, Teorema 4.1a] se sigue que $h_n(S) \cup S$ es un subcontinuo semiterminal. Notemos que, F y $h_n(F)$ son subcontinuos disjuntos, que satisfacen que, $F \setminus (S \cup h_n(S)) \neq \emptyset$ y $h_n(F) \setminus (S \cup h_n(S)) \neq \emptyset$. Además, por hipótesis, $F \cap S \neq \emptyset$, lo que implica que $F \cap (S \cup h_n(S)) \neq \emptyset$. También, $h_n(F) \cap h_n(S) \neq \emptyset$, entonces $h_n(F) \cap S \neq \emptyset$. Así, $F \cap (S \cup h_n(S)) \neq \emptyset \neq F \setminus (S \cup h_n(S))$ y $h_n(F) \cap (S \cup h_n(S)) \neq \emptyset \neq \emptyset h_n(F) \setminus (S \cup h_n(S))$ lo cual contradice el hecho que $S \cup h_n(S)$ es un subcontinuo semiterminal. Por tanto, $F \subset S$. □

Teorema 1.6.26. *Si X es un continuo homogéneo, entonces cualquier subcontinuo propio semiterminal de X tiene interior vacío.*

Demostración. Sea S un subcontinuo propio semiterminal de X tal que $Int(S) \neq \emptyset$. Sea $x \in S$ y consideremos $Fcs^1(x)$. Así $S \cap Fcs^1(x) \neq \emptyset$. Por el Lema 1.6.25, se tiene

que $Fcs^1(x) \subset S$. En consecuecia, $Fcs^n(x) \subset S$ y, de esto se sigue que, $Fcs^\omega(x) \subset S$. Por la Proposición 1.6.17 y el Corolario 1.6.13, la colección $\mathcal{D} = \{Cl(Fcs^\omega(x) \mid x \in X\}$ es una descomposición de X. Por el Teorema 1.6.19, $X/\mathcal{D}$ es localmente conexo y homogéneo.

Sea $q : X \to X/\mathcal{D}$ la función cociente. En particular, $X/\mathcal{D}$ no puede ser un singular porque $S \neq X$. Como q es una función monótona, por el Lema 1.6.23, se sigue que $q(S)$ es un subcontinuo propio semiterminal de $X/\mathcal{D}$. Por la Proposición 1.6.24 se sigue que $q(S)$ es un punto, lo cual es una contradicción porque $Int(S) \neq \emptyset$ y q es abierta. $\square$

Capítulo 2

La función $\mathcal{J}$ y $\mathcal{T}$

En este capítulo veremos la definición y propiedades de la funciones $\mathcal{J}$ y $\mathcal{T}$, así como la comparación entre ambas.

2.1. Definición y ejemplos

Definición 2.1.1. Sea X espacio métrico y compacto. Definimos, $\mathcal{J} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ dado por:

$$\mathcal{J}(A) = \{x \in X \mid \text{cada subcontinuo amplio } W \text{ de } X \text{ tal que } x \in W \text{ y } W \cap A \neq \emptyset\}$$

para cada $A \subset X$.

Observación 2.1.2. En general, cuando trabajemos con la función $\mathcal{J}$ lo haremos con el complemento. Esto es, dado X espacio métrico, compacto y $A \subset X$ tenemos que:

$$\mathcal{J}(A) = X \setminus \{x \in X \mid \text{existe un subcontinuo amplio } W \text{ de } X \text{ tal que } x \in W \subset X \setminus A\}.$$

Observación 2.1.3. Si X es un espacio métrico compacto entonces para todo subconjunto A de X, se tiene que $A \subset \mathcal{J}(A)$.

Observación 2.1.4. Sean X un continuo y $A \subset X$. Si $K \in C(X)$, K es subcontinuo amplio de X y $K \cap A = \emptyset$, entonces $K \cap \mathcal{J}(A) = \emptyset$. Para ver esto, supongamos que $K \cap \mathcal{J}(A) \neq \emptyset$. Sea $p \in K \cap \mathcal{J}(A)$, como $p \in \mathcal{J}(A)$ notemos que:

$$p \notin \{x \in X \mid \text{existe un subcontinuo amplio } W \text{ de } X \text{ tal que } x \in W \subset X \setminus A\}.$$

Por otro lado, $p \in K$ y, por hipótesis, $K \cap A = \emptyset$. Además K es un subcontinuo amplio de X. Así, $p \in K \subset X \setminus A$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $K \cap \mathcal{J}(A) = \emptyset$.

Ejemplo 2.1.5. Sea X el cono sobre el conjunto de Cantor, definido de la siguiente forma. Sea $v = (\frac{1}{2}, 1)$ el vértice del cono y B la base que es el conjunto de Cantor. Para cada $(x, 0) \in B$ denotamos por L_x al segmento de recta en el plano que tiene como puntos extremos a $(x, 0)$ y v. Entonces:

$$X = \bigcup \{L_x |\ (x, 0) \in B\}.$$

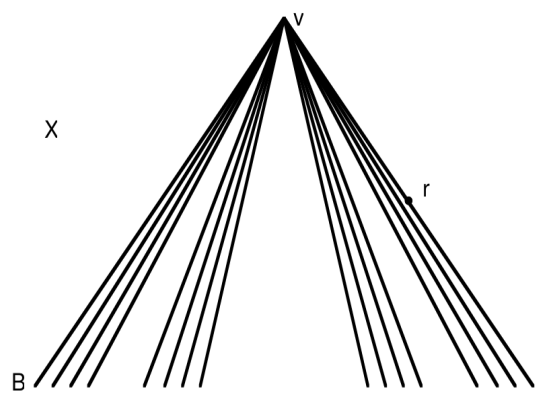

Figura 2.1: Abánico de Cantor

Veamos cómo se comporta $\mathcal{J}$ en X. Sea $A \subset X$, definimos $C = \{(x, 0) \in B |\ L_x \cap A \neq \emptyset\}$. Para cada $(x, 0) \in C$, denotamos por a_x al punto de $L_x \cap A$ tal que $d(v, L_x \cap A) = d(v, a_x)$. Además, denotemos l_x al segmento que tiene puntos extremos a $(x, 0)$ y a_x para cada $(x, 0) \in C$. Entonces se tiene que:

$$\mathcal{J}(A) = \bigcup \{l_x |\ (x, 0) \in B\}.$$

Notemos que si $v \in A$ entonces $L_x \cap A \neq \emptyset$ para todo $(x, 0) \in B$. Así $B = C$. Además, para todo $(x, 0) \in B$, se tiene que $a_x = v$, así $l_x = L_x$. Por tanto, si $v \in A$, $\mathcal{J}(A) = X$. Si $A \subset B$, observemos que $v = a_x$ y, además, $L_x \cap A = A$, de este modo se sigue que $\mathcal{J}(A) = A$.

Definición 2.1.6. Sea X espacio métrico y compacto. Definimos, $\mathcal{T} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ dado por:

$$\mathcal{T}(A) = \{x \in X \mid \text{para cada subcontinuo } W \text{ de } X \text{ tal que } x \in Int(W) \text{ y } W \cap A \neq \emptyset\},$$

para cada $A \in \mathcal{P}(X)$. La función $\mathcal{T}$ es llamada *la funcion* $\mathcal{T}$ *de Jones.*

Observación 2.1.7. En general, cuando se trabaja con la función $\mathcal{T}$ se hace con el complemento, esto es, sea X espacio métrico y compacto para cada $A \in \mathcal{P}(X)$ tenemos:

$$\mathcal{T}(A) = X \backslash \{x \in X | \text{ existe un subcontinuo } W \text{ de } X \text{ tal que } x \in Int(W) \subset W \subset X \backslash A\}.$$

El siguiente resultado nos dice quien es la imagen del conjunto vacío.

Proposición 2.1.8. *Sea X un espacio métrico y compacto. Entonces $\mathcal{T}(\emptyset) = \emptyset$ si y sólo si X tiene una cantidad finita de componentes.*

Demostración. Supongamos que X tiene una cantidad finita de componentes. Sean $x \in X$ y C la componente de X que contiene a x. Observemos que C es cerrado, así C es un subcontinuo de X. Por [8, 1.6.2], se sigue que $x \in Int(C)$. De este modo, para cada $x \in X$, x está contenido en el interior de un subcontinuo propio de X. Por tanto, $\mathcal{T}(\emptyset) = \emptyset$.

Probemos que X tiene una cantidad finita de componentes. Como $\mathcal{T}(\emptyset) = \emptyset$, entonces para cada $x \in X$, existe un subcontinuo W_x de X tal que $x \in Int(W_x) \subset W_x \subset X \setminus \emptyset$. Notemos que la familia $\{Int(W_x) \mid x \in X\}$ es una cubierta abierta de X. Como X es compacto, existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que $X \subset \bigcup_{j=1}^{n} Int(W_{x_j}) \subset \bigcup_{j=1}^{n} W_{x_j} \subset X$. Así, X es la unión de una cantidad finita de continuos. Por tanto, X tiene una cantidad finita de componentes. $\square$

Corolario 2.1.9. *Si X es un continuo, entonces $\mathcal{T}(\emptyset) = \emptyset$.*

Ejemplo 2.1.10. Retomemos el Ejemplo 1.4.3, la curva sinoidal del topólogo. Se puede ver que si $A \neq \emptyset$ y $A \subset M$ entonces se tiene que $\mathcal{T}(A) = M$. También si $a \in M$ entonces $\mathcal{T}(\{a\}) = M$. Por otra parte, si $b \in X \setminus M$ entonces, $\mathcal{T}(\{b\}) = \{b\}$

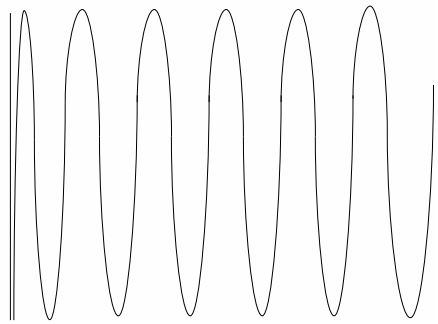

Figura 2.2: Curva sinoidal del topólogo

2.2. Propiedades y Comparación de las funciones $\mathcal{J}$ y $\mathcal{T}$

Proposición 2.2.1. *Sean X un continuo con la propiedad de Kelley y A subconjunto cerrado de X. Entonces se cumple que:*

(1). $\mathcal{J}$ es cerrado

(2). $\mathcal{J}$ es idempotente

Demostración. Veamos que $\mathcal{J}(A)$ es cerrado. Sea $x \in X \setminus \mathcal{J}(A)$. Entonces existe un subcontinuo amplio W de X tal que $x \in W \subset X \setminus A$. Como W es un subcontinuo amplio y $X \setminus A$ es un subconjunto abierto, existe un subcontinuo K de X tal que $W \subset Int(K) \subset K \subset X \setminus A$. Notemos que $Int(K)$ es un abierto que tiene a x y está contenido en $X \setminus \mathcal{J}(A)$. Por el Lema 1.5.8, K es amplio. Entonces, $X \setminus \mathcal{J}(A)$ es abierto. Por tanto, $\mathcal{J}(A)$ es cerrado.

Como $A \subset \mathcal{J}(A)$, resulta que $\mathcal{J}(A) \subset \mathcal{J}^2(A)$. Es suficiente probar que $\mathcal{J}^2(A) \subset \mathcal{J}(A)$. Sea $x \in X \setminus \mathcal{J}(A)$. Entonces existe un subcontinuo amplio W de X tal que $x \in W \subset X \setminus A$. Como W es un subcontinuo amplio y $X \setminus A$ es abierto, existe un subcontinuo K de X tal que $W \subset Int(K) \subset K \subset X \setminus A$. Por (1), $\mathcal{J}(A)$ es cerrado, lo cual implica que $Int(K) \subset X \setminus \mathcal{J}(A)$, de esto se sigue que $W \subset X \setminus \mathcal{J}(A)$. Entonces, $x \in X \setminus \mathcal{J}^2(A)$. □

Observemos que la Proposición 2.2.1 nos dice que si A es un subconjunto cerrado de X entonces $\mathcal{J}(A)$ es cerrado siempre que X tenga la propiedad de Kelley. El siguiente ejemplo nos muestra que si X no tiene la propiedad de Kelley entonces $\mathcal{J}(A)$ no es cerrado. Sin embargo para la función $\mathcal{T}$ eso no pasa.

Ejemplo 2.2.2. Tomemos al continuo del Ejemplo 1.5.7, el cual no tiene la propiedad de Kelley. Sea $A = \{p\}$, observemos que $\mathcal{J}(A) = \{p\}$ y $\mathcal{J}(\{0\}) = [0, 1) \times \{0\}$, el cual no es cerrado y el conjunto $\{0\}$ sí lo es.

Proposición 2.2.3. *Sea X un continuo. Si A es un subconjunto de X entonces $\mathcal{T}(A)$ siempre es un cerrado de X.*

Demostración. Probaremos que $X \setminus \mathcal{T}(A)$ es abierto en X. Sea $x \in X \setminus \mathcal{T}(A)$ entonces existe un subcontinuo W de X tal que $x \in Int(W) \subset W \subset X \setminus A$, de esto se sigue que $Int(W) \subset X \setminus \mathcal{T}(A)$. □

Proposición 2.2.4. *Sean X un continuo y A un subcontinuo de X. Entonces $\mathcal{T}(A)$ es un subcontinuo de X.*

Demostración. Por Proposición 2.2.3, $\mathcal{T}(A)$ es cerrado en X y, por tanto, compacto. Supongamos que $\mathcal{T}(A)$ no es conexo. Entonces $\mathcal{T}(A) = K \cup L$ donde K y L son cerrados ajenos y no vacíos. Sabemos que $A \subset \mathcal{T}(A)$. Como A es conexo, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $A \subset K$. Así, existe un subconjunto abierto U de X tal que $K \subset U$ y $Cl(U) \cap L = \emptyset$. Notemos que $Fr(U) \cap \mathcal{T}(A) = \emptyset$. Por tanto, para todo $z \in Fr(U)$, existe un subcontinuo M_z de X tal que $z \in Int(M_z) \subset M_z \subset X \setminus A$. Como $Fr(U)$ es compacta, existen $z_1, \ldots, z_n \in Fr(U)$ tales que $Fr(U) \subset \cup_{j=1}^{n} Int(M_{z_j}) \subset \cup_{j=1}^{n} M_{z_j}$. Sean $V = U \setminus (\cup_{j=1}^{n} M_{z_j})$ y $N = X \setminus V = (X \setminus U) \cup (\cup_{j=1}^{n} M_{z_j})$. Por [10, 5.4], se tiene que N tiene un número finito de componentes. Notemos que $L \subset X \setminus Cl(U) \subset X \setminus U \subset N$. Entonces, $L \subset Int(N)$. Sean $l \in L$ y C la componente de N tal que $l \in C$. Por [8, 1.6.2] $l \in Int(C)$. Además, por otra parte, $N \cap A = \emptyset$. De esto se sigue que $C \cap A = \emptyset$. De aquí se concluye que $l \in X \setminus \mathcal{T}(A)$ lo cual es una contradicción. Por tanto, $\mathcal{T}(A)$ es conexo. □

La siguiente proposición nos muestra una clase de continuos en los que coinciden las funciones $\mathcal{T}$ y $\mathcal{J}$.

Proposición 2.2.5. *Sean X un continuo con la propiedad de Kelley y A un subconjunto cerrado de X. Entonces $\mathcal{T}(A) = \mathcal{J}(A)$*

Demostración. Sea $x \in X \setminus \mathcal{J}(A)$. Entonces existe un subcontinuo amplio W de X tal que $x \in W \subset X \setminus A$. Como A es cerrado, tenemos que $X \setminus A$ es abierto. Como W es amplio, existe un subcontinuo B de X tal que $W \subset Int(B) \subset B \subset X \setminus A$. De esto se sigue que $x \in Int(B) \subset B \subset X \setminus A$. Por tanto, $x \in X \setminus \mathcal{T}(A)$.

Sea $x \in X \setminus \mathcal{T}(A)$, entonces, existe un subcontinuo W de X tal que $x \in Int(W) \subset W \subset X \setminus A$. Por el Lema 1.5.8, W es un subcontinuo amplio de X. Por tanto, $x \in X \setminus \mathcal{J}(A)$. □

Definición 2.2.6. Un continuo X es *descomponible*, si existen dos subcontinuos propios y no degenerados A y B de X tal que $X = A \cup B$. Si cada subcontinuo no degenerado de X es descomponible, entonces X es *hereditariamente descomponible.*

Definición 2.2.7. Si X no es un continuo descomponible, entonces X es *indescomponible.* Si cada subcontinuo de X es indescomponible, entonces X es *hereditariamente indescomponible.*

Los siguientes ejemplos son de continuos indescomponibles.

Ejemplo 2.2.8. *El arcoiris de Knaster*, [7, Ejemplo 1].

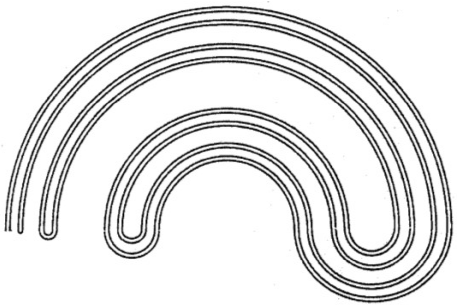

Figura 2.3: Arcoiris de Knaster

Ejemplo 2.2.9. *El solenoide diádico.* Consideremos un toro sólido X_1 y dentro de él, X_2 un toro sólido que le da dos vueltas a X_1; después, X_3 será un toro sólido que le da dos vueltas a X_2, es decir, que le da 2^2 vueltas a X_1. En general, X_n es un toro sólido, dentro de X_{n-1} que le da dos vueltas a éste, o bien, 2^{n-1} vueltas a X_1. Finalmente, el continuo $\cap_{n=1}^{\infty} X_n$ es denotado por Σ_2. Este ejemplo será utilizado en el siguiente capítulo.

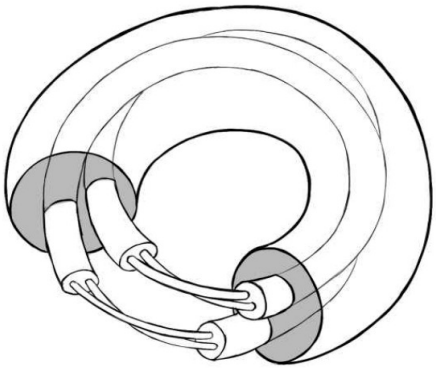

Figura 2.4: Solenoide diádico, primeros tres pasos

Si en vez de dar dos vueltas en cada paso, damos p vueltas, el continuo que se obtiene al intersectar esa familia de continuos se conoce como *solenoide p-ádico* y se denota por Σ_p.

Los siguientes ejemplos, en los cuales X no tiene la propiedad de Kelley, nos muestran que no podemos hacer una comparacion entre las funciones $\mathcal{J}$ y $\mathcal{T}$.

Ejemplo 2.2.10. Sean X_1 y X_2 dos continuos de Knaster y formamos un nuevo continuo $X = X_1 \cup X_2$ tal que $X_1 \cap X_2 = \{p\}$, donde p denota el punto extremo de X_1 y X_2, véase la figura. Notemos que el único subcontinuo amplio propio de X es X. Esto implica que, para todo $A \in \mathcal{P}(X) \setminus \emptyset$, $\mathcal{J}(A) = X$. Por otra parte, veamos que si $q \in X_1 \setminus \{p\}$, entonces $\mathcal{T}(\{q\}) = X_1$. Para esto, primero notemos que si $x \in X_2 \setminus \{p\}$, entonces X_2 es un subcontinuo de X tal que $x \in Int(X_2) \subset X_2 \subset X \setminus \{q\}$; por esto, $x \notin \mathcal{T}(\{q\})$, así $\mathcal{T}(\{q\}) \subset X_1$. Por otra parte, notemos que si $x \in X_1$ y W es un subcontinuo de X tal que $x \in Int(W)$, entonces, $X_1 \subset W$. Luego, $x \in q \in W$. De esto se sigue que, $x \in \mathcal{T}(\{q\})$. Así, $X_1 \subset \mathcal{T}(\{q\})$. Por tanto, $\mathcal{T}(\{q\}) = X_1$. Este ejemplo nos muestra que las funciones $\mathcal{T}$ y $\mathcal{J}$ no coinciden.

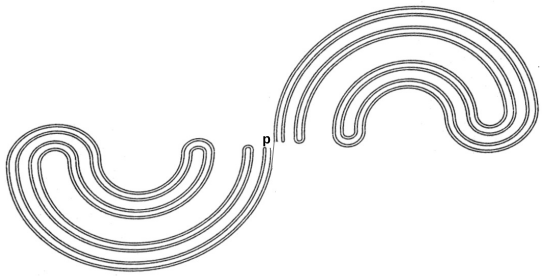

Figura 2.5: Continuo $X = X_1 \cup X_2$

Ejemplo 2.2.11. Consideremos el círculo de Varsovia. Sea $M = \{0\} \times [0, 1]$. Observemos que si $A \in 2^X$ y $A \cap M \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{T}(A) = A \cup M$. Similarmente $\mathcal{J}(A) = A \cup M$. Por otra parte, notemos que si $A \cap M = \emptyset$, entonces $\mathcal{T}(A) = A$. Similarmente $\mathcal{J}(A) = A$. Así, en este ejemplo vemos que las funciones $\mathcal{T}$ y $\mathcal{J}$ coinciden en los subconjuntos cerrados de X.

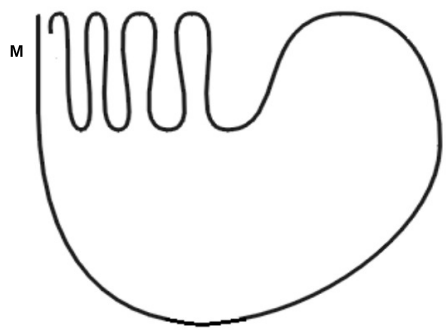

Figura 2.6: Círculo de Varsovia

Proposición 2.2.12. *Sea X un continuo con la propiedad de Kelley, si A es un subcontinuo de X, entonces $\mathcal{J}(A)$ es un continuo.*

Demostración. Como X tiene la propiedad de Kelley, por la Proposición 2.2.5, $\mathcal{T}(A) = \mathcal{J}(A)$. Por otro lado, ya que A es un subcontinuo de X, por la Proposición 2.2.4, $\mathcal{T}(A)$ es un continuo. De esto se sigue que $\mathcal{J}(A)$ es un continuo. □

Proposición 2.2.13. *Sea X un continuo con la propiedad de Kelley. Si A es un continuo amplio, entonces $\mathcal{J}(A)$ también lo es.*

Demostración. Como X tiene la propiedad de Kelley, por Corolario 1.5.15 sabemos que cualquier subcontinuo A de X es amplio o filamento.

Supongamos que $\mathcal{J}(A)$ es filamento. Entonces existe un abierto U de X tal que $Int(Cnt_U(\mathcal{J}(A))) = \emptyset$.

Consideremos $Cnt_U(\mathcal{J}(A))$, afirmamos que $Cnt_U(A) = Cnt_U(\mathcal{J}(A))$. Sabemos que $Cnt_U(\mathcal{J}(A))$ es un conexo maximal en U que contiene a $\mathcal{J}(A)$, en particular, $Cnt_U(\mathcal{J}(A))$ es un conexo de U que contiene a A. Entonces, como $Cnt_U(A)$ es un conexo maximal en U que contiene a A, se sigue que $Cnt_U(\mathcal{J}(A)) \subset Cnt_U(A)$. Como $Cnt_U(A)$ es un conexo de U y $Cnt_U(\mathcal{J}(A))$ es una componente de U, entonces $Cnt_U(A) \subset Cnt_U(\mathcal{J}(A))$.

Por otro lado, sabemos que $A \subset U$. De esto se sigue que $A \subset \mathcal{J}(A) \subset Cnt_U(A) \subset Cnt_U(\mathcal{J}(A)) \subset U$. Como $Int(Cnt_U(\mathcal{J}(A))) = \emptyset$, así $Int(Cnt_U(A)) = \emptyset$. Entonces A es filamento, lo cual es una contradicción. Por tanto, $\mathcal{J}(A)$ es amplio. □

Proposición 2.2.14. *Sea X un continuo con la propiedad de Kelley y A_1 y A_2 subcontinuos amplios, disjuntos de X. Entonces, $\mathcal{J}(A_1) \cap \mathcal{J}(A_2) = \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que el resultado no es cierto. Sea $p \in \mathcal{J}(A_1) \cap \mathcal{J}(A_2)$. Definimos $\alpha : [0,1] \to 2^X$ un arco de orden tal que $\alpha(0) = \{p\}$ y $\alpha(1) = X$. Sea $B = \{t \in [0,1] \mid \alpha(t) \cap (A_1 \cup A_2) \neq \emptyset\}$. Notemos que $B \neq \emptyset$ pues si $t = 1$, entonces $\alpha(1) = X$, así $X \cap (A_1 \cup A_2) = A_1 \cup A_2 \neq \emptyset$, pues A_1 y A_2 son subcontinuos amplios. Además, B es un conjunto acotado inferiormente, así B tiene ínfimo, llamémosle β. También, observemos que B es un conjunto cerrado, de esto se sigue que $\beta \in B$.

Entonces, para algún $i \in \{1,2\}$, se tiene que $\alpha(\beta) \cap A_i \neq \emptyset$. Sea $\{j\} = \{1,2\} - \{i\}$. Tenemos que $A_i \cap A_j = \emptyset$ y que A_j es cerrado. Así $A_i \subset X \setminus A_j$. Como A_i es amplio, existe un continuo B_i tal que $A_i \subset Int(B_i) \subset B_i \subset X \setminus A_j$. Entonces, para un numero $k \in [0, \beta)$. Se tiene que $\alpha(k) \in \Gamma(Int(B_i))$, así $\alpha(k) \cap B_i \neq \emptyset$. De esto se sigue que $\alpha(k) \cup B_i$ es un continuo. Como $k < \beta$, esto implica que $k \notin B$, pues β es el ínfimo, así $\alpha(k) \cap (A_i \cup A_j) = \emptyset$. De esto se sigue que $(\alpha(k) \cup B_i) \cap A_j = \emptyset$. Notemos que $Int(\alpha(k) \cup B_i) \neq \emptyset$, pues $Int(B_i) \neq \emptyset$. Como X tiene la propiedad de Kelley, $\alpha(k) \cup B_i$ es un continuo amplio. Como $p \in (\alpha(k) \cup B_i)$, esto implica que $p \notin \mathcal{J}(A_j)$ lo cual es una contradicción. Por tanto, $\mathcal{J}(A_1) \cap \mathcal{J}(A_2) = \emptyset$. $\square$

Capítulo 3

Descomposición de continuos

En este capítulo se dará la descomposición aposindética y el Teorema de Descomposición Aposindética de Jones. Por otra parte, veremos la construcción de la descomposición mutuamente aposindética para los continuos con la propiedad de Kelley, en particular para los continuos homogéneos.

3.1. Teorema de Jones

En esta sección se darán las definiciones previas y algunos resultados para poder enunciar el Teorema de Descomposición Aposindética de Jones.

Definición 3.1.1. Sea X un continuo, decimos que X es *aposindético en x respecto a y* si existe un subcontinuo K de X tal que $x \in Int(K) \subset X \setminus \{y\}$. X es *aposindético* si es aposindético en cada uno de sus puntos con respecto a los demás puntos.

El siguiente Teorema escapa de los objetivos de este trabajo, una prueba de él se puede encontrar en [8, 5.1.2].

Teorema 3.1.2. *Sea X un continuo homogéneo. La colección $\mathcal{G} = \{\mathcal{T}(\{x\}) \mid x \in X\}$ es una descomposición de X.*

Definición 3.1.3. La descomposición $\mathcal{G}$ es llamada la *Descomposición Aposindética de Jones.*

Definición 3.1.4. Sean X y Y continuos y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Decimos que f es *completamente regular* si dado $\varepsilon > 0$, para cada $y \in Y$, existe un abierto V de Y tal que $y \in V$ entonces dada $y' \in V$, existe un homeomorfismo $h : f^{-1}(y) \to f^{-1}(y')$ tal que para cada $x \in f^{-1}(y)$, $d(x, h(x)) < \varepsilon$.

Definición 3.1.5. Sean X un continuo y T un subcontinuo de X. Decimos que T es un *subcontinuo terminal* en X si para cada subcontinuo C de X tal que $C \cap T \neq \emptyset$, resulta que $C \subset T$ o $T \subset C$.

Definición 3.1.6. Una descomposición de X es una *descomposición terminal* si cada elemento de la descomposición es un subcontinuo terminal de X.

Lema 3.1.7. *Sea X un continuo. Si X es aposindético, entonces X no contiene subcontinuos propios terminales y no degenerados.*

Demostración. Supongamos que T es un subcontinuo propio terminal y no degenerado de X. Sea $t \in T$ y tomemos $r \in T \setminus \{t\}$. Como X es aposindético, existe un subconinuo W de X tal que $t \in Int(W) \subset W \subset X \setminus \{r\}$. Como T es un subcontinuo terminal y $T \setminus W \neq \emptyset$, obtenemos que $W \subset T$. Entonces t es un punto interior de T. Como fue para un punto arbitrario, se sigue que todos los puntos de T son interiores. Lo cual implica que T es un subconjunto abierto y cerrado de X. De donde obtenemos una contradicción porque X es conexo. Por tanto, X no contiene subcontinuos propios terminales y no degenerados. □

Definición 3.1.8. Sean X un continuo y A un retracto de vecindad absoluto. Decimos que X es *tipo celda* si dada una función $f : X \to A$, f es homótopica a una función constante, es decir, si existe una función continua $G : X \times [0,1] \to X$ tal que $G(x,0) = f(x)$ y $G(x,1) = k$ para todo $x \in X$ y k constante.

Definición 3.1.9. Sean X y Y continuos. Decimos que la función continua y suprayectiva $f : X \to Y$ es *tipo celda* si para cada $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ es un continuo tipo celda.

Una prueba del siguiente teorema se puede encontrar en [8, 5.1.17]

Teorema 3.1.10. *Sean X y Z continuos no degenerados. Supongamos que $g : X \to Z$ es una función continua, suprayectiva, monótona y completamente regular. Si $z_1 \in Z$ tal que $g^{-1}(z_1)$ es un continuo terminal de X entonces g es una función tipo celda.*

A continuación se enunciará el Teorema de Descomposición Aposindética de Jones, una prueba de él se puede encontrar en [8, 5.1.19]

Teorema 3.1.11. *Sea X un continuo homogéneo, descomponible que no es aposindético. Si $\mathcal{G} = \{\mathcal{T}(\{x\}) \mid x \in X\}$. Entonces:*

1. *$\mathcal{G}$ es una descomposición monótona, terminal y continua de X.*

2. *Los elementos de $\mathcal{G}$ son continuos indescomponibles, tipo celda, homogéneos, homeomorfos entre sí y con la misma dimensión de X.*

3. *La función cociente $q : X \to X/\mathcal{G}$ es completamente regular.*

4. *El espacio cociente $X/\mathcal{G}$ es un continuo homogéneo, aposindético de dimensión uno, el cual no contiene subcontinuos propios terminales.*

3.2. Descomposición mutuamente aposindética

En esta sección se dará la construcción de la descomposición mutuamente aposindética y el Teorema de descomposición mutuamente aposindética para continuos homogéneos.

Definición 3.2.1. Un continuo X es *mutuamente aposindético* en los puntos x y y si existen dos continuos disjuntos K y L tales que $x \in Int(K)$ y $y \in Int(L)$. Decimos que X es mutuamente aposindético si lo es en cada pareja de sus puntos.

Observación 3.2.2. Si X tiene la propiedad de Kelley, entonces la aposindesis mutua de X se puede expresar con continuos amplios. Esto es, X es mutuamente aposindético en x y y si y sólo si existen continuos amplios disjuntos K y L tales que $x \in K$ y $y \in L$. Supongamos que X es mutuamente aposindético en x y y. Entonces existen dos subcontinuos disjuntos K y L de X tales que $x \in Int(K)$ y $y \in Int(L)$. Como $Int(K) \neq \emptyset$ y $Int(L) \neq \emptyset$ y X tiene la propiedad de Kelley, por el Lema 1.5.8, se sigue que K y L son amplios. La otra implicación se sigue de la definición de continuo amplio.

Definición 3.2.3. Sean X un continuo y x y $y \in X$. Definimos una relación " $\sim$ " en X como sigue: Decimos que x está relacionado con y, denotado por $x \sim y$, si para cada par de continuos amplios A_x y A_y de X tales que $x \in A_x$ y $y \in A_y$ se tiene que $A_x \cap A_y \neq \emptyset$.

Observación 3.2.4. La relación $\sim$ es un subconjunto del producto $X \times X$, una forma de verlo es, $\sim := \{(x, y) \in X \times X \mid x \sim y\}$.

En adelante, la relación $\sim$, definida en 3.2.3 será la que utilizaremos.

Lema 3.2.5. *Sean X un continuo y x y $y \in X$. Si X no es mutuamente aposindético con respecto a x y y, entonces $x \sim y$.*

Demostración. Sean x y $y \in X$ supongamos que $x \nsim y$. Entonces existen dos subcontinuos amplios A_x y A_y de X tales que $x \in A_x$, $y \in A_y$ y $A_x \cap A_y = \emptyset$. Sean U_x y U_y abiertos ajenos tales que $A_x \subset U_x$, $A_y \subset U_y$. Como A_x y A_y son amplios, existen dos subcontinuos K y L de X tales que $A_x \subset Int(K) \subset K \subset U_x$, $A_y \subset Int(L) \subset L \subset U_y$. Como $U_x \cap U_y = \emptyset$ se tiene que $K \cap L = \emptyset$. Además $x \in A_x \subset Int(K)$ y $y \in A_y \subset Int(L)$. Por tanto, X es mutuamente aposindético con respecto a x y y. □

Lema 3.2.6. *Sean X un continuo con la propiedad de Kelley y x y $y \in X$. Si $x \sim y$ entonces X no es mutuamente aposindético con respecto a x y y.*

Demostración. Sean x y $y \in X$ tales que $x \sim y$. Sean A y B subcontinuos de X tales que $x \in Int(A)$, $y \in Int(B)$. Veamos que $A \cap B \neq \emptyset$. Notemos que $Int(A) \neq \emptyset$ y $Int(B) \neq \emptyset$. Como X tiene la propiedad de Kelley, por Lema 1.5.8, se sigue que A y B son continuos amplios. Como $x \sim y$ implica que $A \cap B \neq \emptyset$. Por tanto, X no es mutuamente aposindético con respecto a x y y. □

Corolario 3.2.7. *Sea X un continuo con la propiedad de Kelley. Entonces $x \sim y$ si y sólo sí X no es mutuamente aposindético con respecto a x y y.*

Proposición 3.2.8. *Sea X un continuo con la propiedad de Kelley. Entonces $\sim$ es una relación de equivalecia en X.*

Demostración. Para ver que $\sim$ es una relación de equivalencia, basta probar que $\sim$ es transitiva, pues las otras dos propiedades se siguen inmediatamente de la definición de $\sim$.

Sean x, y y $z \in X$. Supongamos que $x \sim y$ y $y \sim z$ pero $x \nsim z$. Entonces existen dos subcontinuos amplios A_x y A_z tales que $x \in A_x$, $z \in A_z$ y $A_x \cap A_z = \emptyset$. Por la Proposición 2.2.14, se sigue que $\mathcal{J}(A_x) \cap \mathcal{J}(A_z) = \emptyset$. Como $A_z \subset \mathcal{J}(A_z)$, se tiene que $\mathcal{J}(A_x) \cap A_z = \emptyset$.

Si $y \in \mathcal{J}(A_x)$, como $\mathcal{J}(A_x)$ y A_z son continuos amplios, Proposición 2.2.13, disjuntos tales que $y \in \mathcal{J}(A_x)$ y $z \in A_z$, implica que $y \nsim z$ lo cual es una contradicción.

Si $y \notin \mathcal{J}(A_x)$, entonces existe un continuo amplio A_y tal que $y \in A_y$ y $A_x \cap A_y = \emptyset$. De esto se sigue que $x \nsim y$, lo cual es una contradicción a la hipótesis. Por tanto, $x \sim z$. □

El siguiente ejemplo es de un continuo que no tiene la propiedad de Kelley y no se cumple que la relación "$\sim$"sea transitiva.

Ejemplo 3.2.9. Sea $X = A \cup B$, donde A y B son continuos homeomorfos al abanico armónico descrito en el Ejemplo 1.4.2, cuyos vértices son los puntos x y y,

respectivamente, y tales que $A \cap B = \{p\}$, como se muestra en la figura. Notemos que $x \sim p$ y $p \sim y$. Sin embargo, $x \nsim y$. Así, la relacion "$\sim$"no es transitiva.

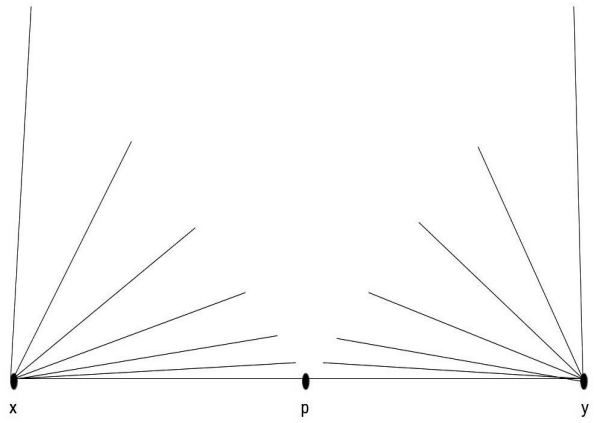

Figura 3.1: Continuo sin propiedad de Kelley

Definición 3.2.10. Sean X un continuo y x un punto de X. Definimos $Q_x = \{y \in X \mid x \sim y\}$.

En adelante, siempre que se refiera a Q_x se referirá a la de la Definición 3.2.10.

Proposición 3.2.11. *Para cada continuo X y cada $x \in X$:*

$$Q_x = \cap\{\mathcal{J}(A) \mid A \text{ es un subcontinuo amplio de } X \text{ y } x \in A\}.$$

Demostración. Sean $\mathcal{A}_x = \{A \subset X \mid A$ es un subcontinuo amplio y $x \in A\}$ y $y \notin Q_x$. Entonces $x \nsim y$. De donde existen dos continuos amplios A_x y A_y de X tales que $x \in A_x$, $y \in A_y$ y $A_x \cap A_y = \emptyset$. Notemos que $A_x \in \mathcal{A}_x$. Por otro lado, observemos que $y \notin \mathcal{J}(A_x)$. Esto implica que $y \notin \cap\{\mathcal{J}(A) \mid A \in \mathcal{A}_x\}$.

Si $y \notin \cap\{\mathcal{J}(A) \mid A \in \mathcal{A}_x\}$ entonces $y \notin \mathcal{J}(A)$ para alguna $A_x \in \mathcal{A}_x$ entonces existe un continuo amplio A_y tal que $y \in A_y$ y $A_x \cap A_y = \emptyset$, de esto se sigue que $y \notin Q_x$. $\square$

Proposición 3.2.12. *Sea X un continuo con la propiedad de Kelley. Entonces la relación $\sim$ es cerrada en $X \times X$. En particular, Q_x es cerrado y la función $f : X \to 2^X$ dada por $f(x) = Q_x$ es semicontinua superiormente.*

Demostración. Como la relación $\sim$ es un subconjunto de $X \times X$, Observación 3.2.4. Veamos que $X \times X \setminus \sim$ es un subconjunto abierto de $X \times X$. Sean x y $y \in X$ tales

que $x \nsim y$. Entonces existen subcontinuos amplios A_x y A_y de X tales que $x \in A_x$, $y \in A_y$ y $A_x \cap A_y = \emptyset$.

Sean U y V abiertos ajenos de X tales que $A_x \subset U$ y $A_y \subset V$. Como A_x y A_y son amplios, existen subcontinuos B_x y B_y de X tales que $A_x \subset Int_X(B_x) \subset B_x \subset U$, $A_y \subset Int_X(B_y) \subset B_y \subset V$. Notemos que $B_x \times B_y$ es una vecindad de (x, y), pues $(x, y) \in Int_X(B_x) \times Int_X(B_y) \subset B_x \times B_y$. Si tomamos $(x', y') \in Int_X(B_x) \times Int_X(B_y)$, como por hipótesis X tiene la propiedad de Kelley, así B_x y B_y son amplios. De esto se sigue que $x' \nsim y'$. Por tanto, $X \times X \setminus \sim$ es abierto, entonces $\sim$ es cerrado en $X \times X$.

Veamos que Q_x es cerrado. Consideremos a $\pi_1 : X \times X \to X$ y a $\pi_2 : X \times X \to X$ las funciones proyección. Sea x un punto de X. Notemos que $\pi_1^{-1}(x) \cap \sim$ es un cerrado de $X \times X$, por tanto, compacto. Entonces se tiene que $\pi_2(\pi_1^{-1}(x) \cap \sim)$ es compacto en X, por tanto, cerrado. Observemos que $Q_x = \pi_2(\pi_1^{-1}(x) \cap \sim)$.

Por el Teorema 1.1.5, existe una función semicontinua superiormente $f : X \to 2^X$ tal que $\Gamma(f) = \sim$. Esto es $\Gamma(f) = \{(x, y) \mid x \sim y\}$, es decir, $(x, y) \in \Gamma(f)$ si y sólo si $x \sim y$. Esto es, $y \in f(x)$ si y sólo si $x \in Q_x$, así $f(x) = Q_x$. $\square$

Definición 3.2.13. Sea X un continuo homogéno. Definimos a $\mathcal{Q} = \{Q_x \mid x \in X\}$ la cual es llamada la *descomposición mutuamente aposindética de X*.

Ahora, veamos que la descomposición $\mathcal{Q}$ es una descomposición continua de X. Para esto, presentaremos un resultado previo.

Proposición 3.2.14. *Sea X un continuo homogéneo. Entonces la descomposición $\mathcal{Q} = \{Q_x \mid x \in X\}$ es respetada por los homeomorfismos de X.*

Demostración. Sean $h : X \to X$ un homeomorfismo y $x \in X$. Veamos que $h(Q_x) = Q_{h(x)}$. Sea $y \in Q_x$. Tomemos A_x y A_y dos sucontinuos amplios de X tales que $h(x) \in A_x$ y $h(y) \in A_y$. Como h es un homeomorfismo, se sigue que $h^{-1}(A_x)$ y $h^{-1}(A_y)$ son continuos amplios tales que $x \in h^{-1}(A_x)$ y $y \in h^{-1}(A_y)$. Como $y \in Q_x$ se obtiene que $h^{-1}(A_x) \cap h^{-1}(A_y) \neq \emptyset$. Entonces $A_x \cap A_y \neq \emptyset$. Por tanto, $h(y) \in Q_{h(x)}$.

Sea $z \in Q_{h(x)}$. Consideremos dos subcontinuos amplios A_x y A_z de X tales que $x \in A_x$, $h^{-1}(z) \in A_z$. Por la Proposición 1.4.6, se tiene que $h(A_x)$ y $h(A_z)$ son continuos amplios tales que $h(x) \in h(A_x)$ y $z \in h(A_z)$. Como $z \in Q_{h(x)}$, $h(A_x) \cap h(A_z) \neq \emptyset$. Lo cual implica que $A_x \cap A_z \neq \emptyset$. En consecuencia, $h^{-1}(z) \in Q_x$. Por tanto, $z \in h(Q_x)$ $\square$

Proposición 3.2.15. *Sean X un continuo homogéneo con métrica d y $\mathcal{Q} = \{Q_x \mid x \in X\}$. Entonces $\mathcal{Q}$ es una descomposición continua de X.*

Demostración. Por la Proposición 3.2.14, se tiene que $\mathcal{Q}$ es respetada por el grupo de homeomorfismos de X. Además por la Proposición 3.2.12, los elementos de $\mathcal{Q}$ son cerrados. Así por el Teorema 1.6.9, se sigue que $\mathcal{Q}$ es una descomposición continua de X. □

Proposición 3.2.16. *Sean X un continuo con la propiedad de Kelley, $\mathcal{Q} = \{Q_x \mid x \in X\}$ y $q : X \to X/\mathcal{Q}$ la función cociente. Entonces para cada subcontinuo amplio A de X, el continuo $\mathcal{J}(A)$ es saturado con respecto a q.*

Demostración. Veamos que $q^{-1}(q(\mathcal{J}(A))) = \mathcal{J}(A)$. Para ello es suficiente probar que $q^{-1}(q(\mathcal{J}(A))) \subset \mathcal{J}(A)$. Sea $x \in \mathcal{J}(A)$. Observemos que $q^{-1}(q(x)) = Q_x$. Por la Proposición 3.2.11, $Q_x = \cap\{\mathcal{J}(B) \mid B$ es un subcontinuo amplio de X tal que $x \in B\}$. Así $Q_x \subset \mathcal{J}(\mathcal{J}(A))$. Como $\mathcal{J}$ es idempotente, Proposición 2.2.1, $Q_x \subset \mathcal{J}(A)$. De esto se sigue que $q^{-1}(q(\mathcal{J}(A))) \subset \mathcal{J}(A)$. □

Proposición 3.2.17. *Sean X un continuo con la propiedad de Kelley, $\mathcal{Q} = \{Q_x \mid x \in X\}$ y $q : X \to X/\mathcal{Q}$ la función cociente. Entonces para cada subcontinuo amplio A de X, el continuo $q(\mathcal{J}(A))$ es amplio en $X/\mathcal{Q}$.*

Demostración. Sea U abierto de $X/\mathcal{Q}$ tal que $q(\mathcal{J}(A)) \subset U$ entonces $q^{-1}(q(\mathcal{J}(A))) \subset q^{-1}(U)$. Como $\mathcal{J}$ es saturado respecto de q, Proposición 3.2.16, se sigue que $\mathcal{J}(A) \subset q^{-1}(U)$. Luego, puesto que $\mathcal{J}(A)$ es un subcontinuo amplio de X, existe un continuo B de X tal que $\mathcal{J}(A) \subset Int(B) \subset B \subset q^{-1}(U)$. Así, $q(B)$ es un subcontinuo de $X/\mathcal{Q}$ tal que $q(\mathcal{J}(A)) \subset q(B) \subset U$. Resta demostrar que $q(\mathcal{J}(A)) \subset Int(q(B))$.

Afirmamos que, para toda $x \in \mathcal{J}(A)$, $q(x) \in Int(q(B))$. Supongamos que existe $x \in \mathcal{J}(A)$ tal que $q(x) \notin Int(q(B))$. Entonces existe una sucesión $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $(X/\mathcal{Q})\setminus q(B)$ tal que $\lim_{n\to\infty} Q_n = q(x)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n \in X$ tal que $q(x_n) = Q_n$. Como X es compacto podemos suponer que existe $y \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = y$. Se sigue que $\lim_{n\to\infty} q(x_n) = q(y)$. Luego $q(x) = q(y)$. Así, $y \in q^{-1}(q(x))$. Como $q^{-1}(q(x)) \subset \mathcal{J}(A) \subset Int(B)$, se tiene que $y \in Int(B)$. Entonces, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_m \in Int(B) \subset B$. Esto implica que $q(x_m) \subset q(Int(B))$. Como $q(x_m) = Q_m$ y $q(Int(B)) \subset q(B)$, se obtiene que $Q_m \in q(B)$. Esto es una contradicción, pues $Q_m \in (X/\mathcal{Q}) \setminus q(B)$. Esta contradicción prueba que, $q(x) \in Int(q(B))$, para todo $x \in \mathcal{J}(A)$. De aquí se concluye que $q(\mathcal{J}(A)) \subset Int(q(B)$. Por tanto, $q(\mathcal{J}(A))$ es un continuo amplio. □

Proposición 3.2.18. *Sean X un continuo con la propiedad de Kelley y $\mathcal{Q} = \{Q_x \mid x \in X\}$. Entonces el cociente $X/\mathcal{Q}$ es un continuo mutuamente aposindético.*

Demostración. Sean $q : X \to X/\mathcal{Q}$ la función cociente y x y $y \in X$ tales que $Q_x \neq Q_y$. Como $x \nsim y$, existen subcontinuos amplios A_x y A_y de X tales que

$x \in A_x$, $y \in A_y$ y $A_x \cap A_y = \emptyset$. Por la Proposición 2.2.14, se tiene que los continuos $\mathcal{J}(A_x)$ y $\mathcal{J}(A_y)$ son disjuntos. Además, por la Proposición 3.2.16, $\mathcal{J}(A_x)$ y $\mathcal{J}(A_y)$ son saturados con respecto a q. Así $q(\mathcal{J}(A_x)) \cap q(\mathcal{J}(A_y)) = \emptyset$. Así, por la Proposición 3.2.17, tenemos que cada $q(\mathcal{J}(A_x))$ y $q(\mathcal{J}(A_x))$ son amplios y disjuntos que contienen a $q(x)$ y $q(y)$, respecivamente. Por tanto, $X/\mathcal{Q}$ es mutuamente aposindético. □

A continuación se enunciará el Teorema de descomposición mutuamente aposindética para continuos homogéneos, la prueba se hará con todos los resultados previos para continuos con la propiedad de Kelley, por el Lema 1.6.6, los resultados son aplicables a los continuos homogéneos.

Teorema 3.2.19. *Sean X un continuo homogéneo que no es mutuamente aposindético y $\mathcal{Q} = \{Q_x \mid x \in X\}$ la descomposición mutuamente aposindética para X. Entonces:*

1. *$\mathcal{Q}$ es una descomposición continua que es respetada por el grupo de homeomorfismos.*

2. *Los elementos de $\mathcal{Q}$ son conjuntos cerrados y homogéneos.*

3. *El espacio cociente $X/\mathcal{G}$ es un continuo homogéneo, mutuamente aposindético.*

Demostración. 1. Por la Proposición 3.2.15, $\mathcal{Q}$ es una descomposición continua y, por la Proposición 3.2.14, la descomposición $\mathcal{Q}$ es respetada por el grupo de homeomorfismos.

2. De la Proposición 3.2.12 se tiene que los elementos de $\mathcal{Q}$ son conjuntos cerrados. Veamos que los elementos de $\mathcal{Q}$ son homegéneos. Sean $Q \in \mathcal{Q}$ y x y $y \in Q$. Como X es homogéneo, existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(x) = y$. Como $\mathcal{Q}$ es respetada por el grupo de homeomorfismos de X, Proposición 3.2.14, se tiene que $h(Q) = Q$. Entonces consideremos $h\mid_Q$: $Q \to Q$ un homeomorfismo tal que $h\mid_Q(x) = y$. Por tanto, Q es homogéneo.

3. Por el Teorema 1.6.9, se cumple que el espacio cociente $X/\mathcal{G}$ es un continuo homogéneo y, por la Proposición 3.2.18, se sigue que $X/\mathcal{G}$ es un continuo mutuamente aposindético. □

Capítulo 4

Productos de continuos homogéneos

En este capítulo se utilizará el Teorema de Descomposición mutuamente Aposindética, presentado en el capítulo anterior, para estudiar algunas propiedades del producto de continuos homogéneos.

4.1. Construcciones de productos homogéneos

La descomposición $\mathcal{Q}$ es la presentada en la Definición 3.2.13.

Lema 4.1.1. *Sean X un continuo homogéneo y $\mathcal{D}$ una descomposición semicontinua superiormente tal que los elementos de $\mathcal{D}$ son subcontinuos de X. Si $X/\mathcal{D}$ es mutuamente aposindético, entonces para $\mathcal{Q}$, la descomposición mutuamente aposindética de X, si $Q \in \mathcal{Q}$, existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $Q \subset D$.*

Demostración. Sea $Q \in \mathcal{Q}$. Supongamos que existen dos elementos D_1 y D_2 de $\mathcal{D}$ distintos tales que $Q \cap D_1 \neq \emptyset$ y $Q \cap D_2 \neq \emptyset$. Sean $x \in Q \cap D_1$ y $y \in Q \cap D_2$. Esto implica que $x \in D_1$ y $y \in D_2$, pero $y \notin D_1$. Consideremos la función cociente $q : X \to X/\mathcal{D}$. Observemos que $q(x) \neq q(y)$. Como $X/\mathcal{D}$ es mutuamente aposindético, existen dos continuos disjuntos K y L de $X/\mathcal{D}$ tales que $q(x) \in Int(K)$ y $q(y) \in Int(L)$. Como los elementos de $\mathcal{D}$ son continuos, q es monótona. Se sigue que $q^{-1}(K)$ y $q^{-1}(L)$ son subcontinuos disjuntos de X. Así, $x \in q^{-1}(Int(K)) \subset q^{-1}(K)$ y $y \in q^{-1}(Int(L)) \subset q^{-1}(L)$. Como $q^{-1}(Int(K))$ y $q^{-1}(Int(L))$ son abiertos, se sigue que $x \in Int(q^{-1}(K))$ y $y \in Int(q^{-1}(K))$. Entonces X es mutuamente aposindético con respecto a x y y. El Corolario 3.2.7, implica que $x \nsim y$, lo cual es una contradicción al hecho de que x y y están en Q. Por tanto, existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $Q \subset D$. $\square$

Teorema 4.1.2. *Sean X un continuo homogéneo, mutuamente aposindético no degenerado y Y cualquier continuo. Entonces $X \times Y$ es mutuamente aposindético.*

Demostración. Si Y es un continuo degenerado, claramente $X \times Y$ es mutuamente aposindético. Supongamos que Y no es degenerado y sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) dos puntos distintos de $X \times Y$.

Caso 1: $x_1 \neq x_2$. Como X es mutuamente aposindético, existen dos subcontinuos disjuntos K_1 y K_2 de X tales que $x_1 \in Int(K_1)$ y $x_2 \in Int(K_2)$. Consideremos las funciones proyección $\pi_1 : X \times Y \to X$ y $\pi_2 : X \times Y \to Y$ para X y Y, respectivamente. Observemos que la función proyección sobre la primera coordenada es monótona. Denotemos, $C_1 = \pi_1^{-1}(K_1)$ y $C_2 = \pi_1^{-1}(K_2)$ los cuales son subcontinuos de $X \times Y$. También, $\pi_1^{-1}(Int(K_1)) \subset C_1$ y $\pi_1^{-1}(Int(K_2)) \subset C_2$. Como $\pi_1^{-1}(Int(K_1))$ y $\pi_1^{-1}(Int(K_2))$ son abiertos, se sigue que $(x_1, y_1) \in Int(C_1)$ y $(x_2, y_2) \in Int(C_2)$.

Caso 2: $x_1 = x_2$. Sea $x = x_1$. Como X es aposindético, existe un subcontinuo propio C de X tal que $x \in Int(C)$. Por hipótesis, X es un continuo homogéneo. Entonces, por el Teorema 1.6.26, C no es un subcontinuo semiterminal. Así, existen dos subcontinuos disjuntos K_1 y K_2 de X tales que K_1 y K_2 intersectan a C y a su complemento. Denotemos $A_1 = C \cup K_1$ y $A_2 = C \cup K_2$, los cuales son subcontinuos de X, $x \in Int(A_1)$ y $x \in Int(A_2)$. Sea $p_1 \in K_1 \setminus C$. Como K_1 y K_2 son disjuntos, se sigue que, $p_1 \in A_1 \setminus A_2$. De manera similar, tomemos $p_2 \in K_2 \setminus C$. Como K_1 y K_2 son disjuntos, implica que $p_2 \in A_2 \setminus A_1$. Notemos que $p_1 \neq p_2$. Como (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son distintos y $x_1 = x_2$, entonces $y_1 \neq y_2$. De esto se sigue que, existen dos subconjuntos abiertos U_1 y U_2 de Y que contienen a y_1 y y_2, respectivamente, tales que $Cl(U_1) \cap Cl(U_2) = \emptyset$. Tenemos que $x_1 \in Int(A_1)$ y $y_1 \in U_1$. Entonces $(x_1, y_1) \in Int(A_1) \times U_1 \subset A_1 \times Cl(U_1)$. Como $Int(A_1) \times U_1$ es un abierto, se sigue que $(x_1, y_1) \in Int(A_1 \times Cl(U_1))$. Además, $A_1 \times Cl(U_1)$ es un cerrado, así compacto. Análomente para (x_2, y_2), se tiene que $(x_2, y_2) \in Int(A_2 \times Cl(U_2))$ y $A_2 \times Cl(U_2)$ es compacto. Observemos que $A_1 \times Cl(U_1) = \cup\{A_1 \times \{y\} \mid y \in Cl(U_1)\}$ y $A_2 \times Cl(U_2) = \cup\{A_2 \times \{y\} \mid y \in Cl(U_2)\}$, los cuales son uniones de continuos. Denotemos $C_1 = (A_1 \times Cl(U_1)) \cup (\{p_1\} \times Y)$ y $C_2 = (A_2 \times Cl(U_2)) \cup (\{p_2\} \times Y)$. Veamos que C_1 es conexo. Para esto tomemos una componente M de $A_1 \times Cl(U_1)$. Como A_1 es conexo, notamos que existe una componente L de $Cl(U_1)$ tal que $M = A_1 \times L$. Fijemos un punto $l \in L$. Se tiene que $(p_1, l) \in M \cap (\{p_1\} \times Y)$. Así, $M \cap (\{p_1\} \times Y) \neq \emptyset$. Esto prueba que $M \cup (\{p_1\} \times Y) \neq \emptyset$ es conexo para toda componente M de $A_1 \times Cl(U_1)$, como $(A_1 \times Cl(U_1)) \cup (\{p_1\} \times Y) = \bigcup\{M \cup (\{p_1\} \times Y) \mid M \text{ es componente de } A_1 \times Cl(U_1)\}$, se concluye que C_1 es conexo. Similarmente se demuestra que C_2 es conexo. Con lo anterior hemos demostrado que C_1 y C_2 son subcontinuos de $X \times Y$ tales que $(x, y_1) \in Int(C_1)$ y $(x, y_2) \in Int(C_2)$. Ahora veamos que $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Notemos que $C_1 \cap C_2 = ([(A_1 \times Cl(U_1)) \cup (\{p_1\} \times Y)] \cap (A_2 \times Cl(U_2))) \bigcup ([(A_1 \times Cl(U_1)) \cup (\{p_1\} \times$

$Y)] \cap (\{p_2\} \times Y))$. Entonces $C_1 \cap C_2 = [(A_1 \times Cl(U_1)) \cap (A_2 \times Cl(U_2))] \cup [(\{p_1\} \times Y) \cap (A_2 \times Cl(U_2))] \cup [(A_1 \times Cl(U_1)) \cap (\{p_2\} \times Y)] \cup [(\{p_1\} \times Y) \cap (\{p_2\} \times Y)]$. Como $Cl(U_1) \cap Cl(U_2) = \emptyset$, se tiene que $(A_1 \times Cl(U_1)) \cap (A_2 \times Cl(U_2)) = \emptyset$. También se tiene que $\{p_i\} \cap A_j = \emptyset$, donde $i, j = \{1, 2\}$ e $i \neq j$. Entonces $(\{p_1\} \times Y) \cap (A_2 \times Cl(U_2)) = \emptyset$ y $(A_1 \times Cl(U_1)) \cap (\{p_2\} \times Y) = \emptyset$. Finalmente, $\{p_1\} \cap \{p_2\} = \emptyset$ implica que, $(\{p_1\} \times Y) \cap (\{p_2\} \times Y) = \emptyset$. Pot tanto, $C_1 \cap C_2 = \emptyset$.

Como en ambos casos existen subcontinuos disjuntos C_1 y C_2 de $X \times Y$ tales que $(x_1, y_1) \in Int(C_1)$ y $(x_2, y_2) \in Int(C_2)$, se sigue que $X \times Y$ es mutuamente aposindético en (x_1, y_1) y (x_2, y_2), pero éstos fueron elementos arbitrarios. Por tanto, $X \times Y$ es mutuamente aposindético. □

Definición 4.1.3. Un continuo X es *encadenable* si para cada $\varepsilon > 0$, existe una colección finita de conjuntos abiertos en X, $\{U_1, \ldots, U_n\}$ que cubre a X y tal que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| \leq 1$ y diám$(U_j) < \varepsilon$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Observación 4.1.4. Una colección de abiertos en un continuo X con las propiedades mencionadas en la Definición 4.1.3, se denomina una ε-cadena. Así, un continuo X es encadenable si para cada $\varepsilon > 0$, X puede ser cubierto por una ε-cadena.

Definición 4.1.5. Sean X y Y continuos y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva y $\varepsilon > 0$. Decimos que f es un *ε-función* si diám$(f^{-1}(y)) < \varepsilon$ para cada $y \in Y$.

El siguiente teorema escapa de los objetivos de este trabajo, una prueba de él se puede encontrar en [10, 12.11].

Teorema 4.1.6. *Un continuo X es encadenable si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$, existe una ε-función de X sobre el intervalo* $[0, 1]$.

Definición 4.1.7. Un *pseudoarco* es un continuo no degenerado, encadenable y hereditariamente indescomponible.

El siguiente ejemplo nos muestra que es necesario que X sea un continuo homogéneo, mutuamente aposindético para que se cumpla el Teorema 4.1.2. Aunque este ejemplo es Corolario de [14, Teorema 1], nos parece importante el ejemplo y, se presenta una demostración diferente a la del teorema.

Ejemplo 4.1.8. Sea P el pseudoarco. Consideremos el producto $[0, 1] \times P$. Veamos que $[0, 1] \times P$ no es mutuamente aposindético.

Sean p_1 y $p_2 \in P$ y K_1 y K_2 subcontinuos de $[0,1] \times P$ tales que $(0,p_1) \in Int(K_1)$ y $(0,p_2) \in Int(K_2)$. Supongamos que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Consideremos las proyecciones para el producto, esto es:

$$\pi_1 : [0,1] \times P \to [0,1],$$

$$\pi_2 : [0,1] \times P \to P.$$

Como K_1 y K_2 tienen interior no vacío, entonces $\pi_1(K_1)$ y $\pi_1(K_2)$ son subcontinuos no degenerados de $[0,1]$. De hecho $\pi_1(K_1)$ y $\pi_1(K_2)$ son subarcos de $[0,1]$ que contienen al cero, de esto se sigue que $\pi_1(K_1) \subset \pi_1(K_2)$ o $\pi_1(K_2) \subset \pi_1(K_1)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\pi_1(K_1) \subset \pi_1(K_2)$.

De la misma forma, como K_1 y K_2 tienen interior no vacío, entonces $\pi_2(K_1)$ y $\pi_2(K_2)$ son subcontinuos de P con interior no vacío. Como P es indescomponible, $\pi_2(K_1) = \pi_2(K_2) = P$, véase [8, 1.7.21].

Además, como K_1 y K_2 son disjuntos, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{V}_\varepsilon(K_1) \cap K_2 = \emptyset$. Sea d_P una métrica para P. Como P es encadenable, por el Teorema 4.1.6, existe una ε-función $g : P \to [0,1]$. Consideremos la función identidad de $[0,1]$, $I : [0,1] \to [0,1]$. Tomemos la siguiente métrica para el producto $I \times P$ como sigue: $d((s,x),(t,y)) = \text{máx}\{|s-t|, d_P(x,y)\}$, para toda s y $t \in I$ y x y $y \in P$. Observemos que $f = I \times g : [0,1] \times P \to [0,1] \times [0,1]$ es una ε-función. Sean:

$$\rho_1 : [0,1] \times [0,1] \to [0,1],$$

$$\rho_2 : [0,1] \times [0,1] \to [0,1],$$

las proyecciones sobre la primera y segunda coordenadas respectivamente. Notemos que $\rho_1(f(K_1)) = \pi_1(K_1)$ y $\rho_1(f(K_2)) = \pi_1(K_2)$ pero, por nuestra suposición, $\pi_1(K_1) \subset \pi_1(K_2)$. Así $f(K_1)$ y $f(K_2)$ son subcontinuos de $\pi_1(K_2) \times [0,1]$. También observemos que $\rho_2(f(K_1)) = g(\pi_2(K_1)) = g(P) = [0,1]$. Como $\rho_1(f(K_2)) = \pi_1(K_2) \subset [0,1]$ y $\rho_2(f(K_1)) = [0,1]$, $f(K_1)$ y $f(K_2)$ se intersectan, véase [3, 2.1]. Como f es una ε-función, existen $k_1 \in K_1$ y $k_2 \in K_2$ tales que $d(k_1,k_2) < \varepsilon$, lo cual es una contradicción pues $\mathcal{V}_\varepsilon(K_1) \cap K_2 = \emptyset$. Por tanto, $[0,1] \times P$ no es mutuamente aposindético.

Definición 4.1.9. Sean X un espacio métrico y A un subconjunto de X. Entonces A es una *arcocomponente* de X, si A es arcoconexo y para cualquier subconjunto arcoconexo B de X tal que $A \subset B$ se tiene que $B = A$.

Teorema 4.1.10. *Sean X y Y continuos homogéneos, donde X tiene arcocomponentes densas. Sea $\mathcal{A}$ una descomposición monótona y semicontinua superiormente de Y. Si $X \times (Y/\mathcal{A})$ es mutuamente aposindético, entonces $X \times Y$ es mutuamente aposindético.*

Demostración. Consideremos la función cociente $q : Y \to Y/\mathcal{A}$. Definimos:

$$\mathcal{D} = \{\{x\} \times q^{-1}(z) \mid (x, z) \in X \times (Y/\mathcal{A})\}.$$

Observemos que $\mathcal{D}$ es una descomposición de $X \times Y$, donde los elementos de $\mathcal{D}$ son subcontinuos de $X \times Y$. Notemos que $\mathcal{D} = \{(Id \times q)^{-1}((x, z)) \mid (x, z) \in X \times (Y/\mathcal{A})\}$. Por el Teorema 1.1.19, se tiene que, $(X \times Y)/\mathcal{D}$ es homeomorfo a $X \times (Y/\mathcal{A})$.

Como X y Y son continuos homogéneos, el producto $X \times Y$ es un continuo homogéneo. Por la Definición 3.2.13, consideramos a $\mathcal{Q}$ la descomposición mutuamente aposindética para $X \times Y$. Por el Lema 4.1.1, si $Q \in \mathcal{Q}$, existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $Q \subset D$. Sean $(x, y) \in X \times Y$ y $Q \in \mathcal{Q}$ tales que $(x, y) \in Q$. Sea P una arcocomponente de $X \times Y$ tal que $(x, y) \in P$. Como X tiene arcocomponentes densas, de esto se sigue que $X \times \{y\} \subset Cl_{X \times Y}(P)$. Si $X \times Y$ no es mutuamente aposindético, por [12, 4.7], se sigue que $X \times \{y\} \subset Q$, lo cual es una contradicción porque $X \times \{y\} \subset Q \subset D = \{x\} \times q^{-1}(q(y))$. Por tanto, $X \times Y$ es mutuamente aposindético. □

Teorema 4.1.11. *Sean X y Y continuos homogéneos, $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ descomposiciones monótonas y semicontinuas superiormente para X y Y, respectivamente, tales que $X/\mathcal{A}_1$ y $Y/\mathcal{A}_2$ son continuos homogéneos que tienen arcocomponentes densas y $(X/\mathcal{A}_1) \times (Y/\mathcal{A}_2)$ es mutuamente aposindético. Entonces $X \times Y$ es mutuamente aposindético.*

Demostración. Consideremos las funciones cociente:

$$q_1 : X \to X/\mathcal{A}_1,$$

$$q_2 : Y \to Y/\mathcal{A}_2.$$

Sean, $G_1 = X/\mathcal{A}_1$ y $G_2 = Y/\mathcal{A}_2$ y definimos:

$$\mathcal{D}_1 = \{\{x\} \times q_2^{-1}(z) \mid (x, z) \in X \times G_2\},$$

$$\mathcal{D}_2 = \{q_1^{-1}(z) \times \{y\} \mid (z, y) \in G_1 \times Y\}.$$

Como G_2 tiene arcocomponentes densas y $G_1 \times G_2$ es mutuamente aposindético, por el Teorema 4.1.10, $X \times G_2$ es mutuamente aposindético. Análogamente, $G_1 \times Y$ es mutuamente aposindético. Observemos que:

$$\mathcal{D}_1 = \{(Id \times q)^{-1}((x, z)) \mid (x, z) \in X \times G_2\},$$

$$\mathcal{D}_2 = \{(q \times Id)^{-1}((z, y)) \mid (z, y) \in G_1 \times Y\}.$$

Así, por el Teorema 1.1.19, se tiene que $(X \times Y)/\mathcal{D}_1$ es homeomorfo a $X \times G_2$ y $(X \times Y)/\mathcal{D}_2$ es homeomorfo a $G_1 \times Y$.

Como X y Y son continuos homogéneos, se sigue que el producto $X \times Y$ es un continuo homogéneo, así por la Definición 3.2.13, consideremos a $\mathcal{Q}$ la descomposición mutuamente aposindética para $X \times Y$. Por el Lema 4.1.1, si $Q \in \mathcal{Q}$, existen $D_1 \in \mathcal{D}_1$ y $D_2 \in \mathcal{D}_2$ tales que $Q \subset D_1$ y $Q \subset D_2$. Sean $(x, y) \in X \times Y$ y $Q \in \mathcal{Q}$ tales que $(x, y) \in Q$. Como $Q \subset D_1$ y $Q \subset D_2$, esto implica que, $Q \subset (\{x\} \times q_2^{-1}(q_2(y))) \cap (q_1^{-1}(q_1(x)) \times \{y\}) = \{(x, y)\}$, entonces los elementos de $\mathcal{Q}$ son degenerados, lo cual es una contradicción. Por tanto, $X \times Y$ es mutuamente aposindético. □

Observación 4.1.12. En [6], W. Lewis prueba que para cada continuo X de dimensión uno, existe un continuo $\widehat{X}$ de dimensión uno, el cual tiene una descomposición continua en pseudoarcos, tal que el espacio de descomposición es homeomorfo a X.

Notación 4.1.13. El continuo $\widehat{X}$, de la Observación 4.1.12, es llamado la *curva de pseudoarcos* de X.

La siguiente proposición escapa de los objetivos de este trabajo, una prueba de ella se puede encontrar en [11, 4.7].

Proposición 4.1.14. *Sean P un pseudoarco y A_1 y A_2 subcontinuos de $P \times P$. Si $\pi_1(A_1) = P$ y $\pi_2(A_2) = P$, entonces $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$.*

Corolario 4.1.15. *Sean X un continuo homogéneo con arcocomponentes densas, Y un continuo homogéneo de dimensión uno y $\widehat{Y}$ la curva de pseudoarcos de Y.*

1. *Si X o Y es mutuamente aposindético, entonces $X \times \widehat{Y}$ es mutuamente aposindético.*

2. *Si X y Y son aposindéticos, Y tiene arcocomponentes densas, X tiene dimensión uno y $\widehat{X}$ es la curva de pseudoarcos de X, entonces $\widehat{X} \times \widehat{Y}$ es mutuamente aposindético.*

Demostración. 1. Supongamos que X es mutuamente aposindético, por el Teorema 4.1.2, $X \times Y$ es mutuamente aposindético. Como Y es el cociente bajo $\widehat{Y}$, por el Teorema 4.1.10, se sigue que $X \times \widehat{Y}$ es mutuamente aposindético. De manera análoga, si Y es mutuamente aposindético, por el Teorema 4.1.2, $X \times Y$ es mutuamente aposindético. De este modo podemos aplicar el Teorema 4.1.10 y obtenemos que $X \times \widehat{Y}$ es mutuamente aposindético.

2. Sabemos que el producto de continuos aposindéticos es mutuamente aposindético, [4, Teorema 1], de esto se sigue que $X \times Y$ es mutuamente aposindético. Así por el Teorema 4.1.11, se tiene que $\widehat{X} \times \widehat{Y}$ es mutuamente aposindético. □

Corolario 4.1.16. *Sean S_1 y S_2 solenoides y $\widehat{S}_1$ y $\widehat{S}_2$ curvas de pseudoarcos de S_1 y S_2, respectivamente. Si $S_1 \times S_2$ es mutuamente aposindético, entonces $S_1 \times \widehat{S}_2$, $\widehat{S}_1 \times S_2$ y $\widehat{S}_1 \times \widehat{S}_2$ son mutuamente aposindéticos.*

Demostración. Por [10, 2.16], se tiene que todos los subcontinuos propios de un solenoide son arcos. Por esto, en un solenoide, las arcocomponentes coinciden con las composantes. Así, las arcocomponentes es un solenoide son densas. Luego, podemos aplicar el Corolario 4.1.15 para obtener la conclusión. □

El siguiente teorema es un resultado relacionado con continuos descomponibles.

Teorema 4.1.17. *Sean X y Y continuos homogéneos descomponibles. Entonces $X \times Y$ es mutuamente aposindético si al menos se cumple uno de los siguientes enunciados.*

(1) X o Y es mutuamente aposindético.

(2) X y Y son aposindéticos.

(3) X o Y es aposindético y tiene arcocomponentes densas.

(4) Sean $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ las descomposiciones aposindéticas de X y Y, respectivamente. Si $G_1 = X/\mathcal{D}_1$ y $G_2 = Y/\mathcal{D}_2$ son mutuamente aposindéticos o tienen arcocomponentes densas.

Demostración. Veamos (1). Si X y Y satisfacen la hipótesis, por el Teorema 4.1.2 se sigue que $X \times Y$ es mutuamente aposindético.

Si se satisface (2), por [4, Teorema 1], se tiene que $X \times Y$ es mutuamente aposindético.

Probemos (3). Sin perdida de generalidad, supongamos que X es aposindético con arcocomponentes densas.

Caso 1. Si Y es aposindético, entonces se satisface (2) y, se tiene que, $X \times Y$ es mutuamente aposindético.

Caso 2. Y no es aposindético. Por [8, Teorema 5.1.19], cosideremos a $\mathcal{D}$ la descomposición aposindética de Y, la cual es una descomposición continua en subcontinuos de Y. Así $Y/\mathcal{D}$ es homogéneo y aposindético. Entonces, de (2), se sigue que $X \times Y/\mathcal{D}$ es mutuamente aposindético. Por el Teorema 4.1.10, $X \times Y$ es mutuamente aposindético.

Supongamos (4). Supongamos que ni X ni Y son aposindéticos. Sean $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ las descomposiciones aposindéticas para X y Y, respectivamente, y consideremos las funciones cociente $q_1 : X \to X/\mathcal{D}_1$ y $q_2 : Y \to Y/\mathcal{D}_2$. Sean $G_1 = X/\mathcal{D}_1$ y $G_2 = Y/\mathcal{D}_2$. Por hipótesis, G_1 y G_2 son mutuamente aposindéticos o por el Teorema 3.1.11, G_1 y G_2 son continuos homogéneos y aposindéticos con arcocomponentes densas. Así, tanto X y G_2 como G_1 y Y satisfacen (1) y (3). Entonces $X \times G_2$ y $G_1 \times Y$ son mutuamente aposindéticos. Sean:

$$\mathcal{A}_1 = \{\{x\} \times q_2^{-1}(z) \mid (x, z) \in X \times G_2\},$$

$$\mathcal{A}_2 = \{q_1^{-1}(z) \times \{y\} \mid (z, y) \in G_1 \times Y\}.$$

Observemos que los elementos de $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ son continuos y, además, que los espacios $(X \times Y)/\mathcal{A}_1$ y $(X \times Y)/\mathcal{A}_2$ son mutuamente aposindéticos.

Como X y Y son continuos homogéneos, se sigue que el producto $X \times Y$ es homogéneo. Así, por la Definición 3.2.13, podemos considerar a la descomposición mutuamente aposindética, $\mathcal{Q}$, de $X \times Y$. Sean $(x, y) \in X \times Y$ y $Q \in \mathcal{Q}$. Por el Lema 4.1.1, existen $A_1 \in \mathcal{A}_1$ y $A_2 \in \mathcal{A}_2$ tales que $Q \subset A_1$ y $Q \subset A_2$. Si $(x, y) \in Q$, entonces $Q \subset [\{x\} \times q_2^{-1}(q_2(y))] \cap [q_1^{-1}(q_1(x)) \times \{y\}] = \{(x, y)\}$. Por tanto, $X \times Y$ es mutuamente aposindético. □

Lema 4.1.18. *Sea X un continuo homogéneo y supongamos que X tiene una descomposición continua y terminal en pseudoarcos, $\mathcal{D}$. Sean $q : X \to X/\mathcal{D}$ la función cociente, $G = X/\mathcal{D}$, P un pseudoarco y $\mathcal{G} = \{q^{-1}(z) \times \{p\} \mid (z, p) \in G \times P\}$. Entonces $X \times P$ no es mutuamente aposindético con respecto a ningún par de puntos que pertenezcan al mismo elemento de $\mathcal{G}$.*

Demostración. Sean (x_1, p) y (x_2, p) elementos distintos de $X \times P$ tales que $q(x_1) = q(x_2)$. Denotemos $y = q(x_1)$. Sean K_1 y K_2 dos subcontinuos de $X \times P$ tales que $(x_1, p) \in Int(K_1)$ y $(x_2, p) \in Int(K_2)$. Veamos que $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$. Consideremos a las proyecciones para el producto, esto es:

$$\pi_1 : X \times P \to X,$$

$$\pi_2 : X \times P \to P.$$

Sean C_1 la componente de $\pi_1^{-1}(q^{-1}(y)) \cap K_1$ que contiene al punto (x_1, p) y C_2 la componente de $\pi_1^{-1}(q^{-1}(y)) \cap K_2$ que contiene al punto (x_2, p). Como K_1 tiene interior no vacío y las funciones π y q son abiertas, se sigue que $q(\pi_1(K_1))$ contiene un subconjunto abierto de G. Por tanto, $q(\pi_1(K_1))$ es no degenerado. Por otra parte, notemos que $q(\pi_1(C_1)) = \{y\}$. Así, $q(\pi_1(C_1)) \neq q(\pi_1(K_1))$. Por esto, $C_1 \neq K_1$. Luego, C_1 es un subcontinuo propio de K_1.

Por [10, 5.5], se sigue que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un subcontinuo L_n de K_1 tal que $C_1 \subset L_n \subset \mathcal{V}_{\frac{1}{n}}(C_1)$ y $C_1 \neq L_n$. Notemos que $\pi_1(L_n)$ no es un subconjunto de $q^{-1}(y)$; pues en caso contrario, se seguiría que $L_n \subset \pi_1^{-1}(q^{-1}(y)) \cap K_1$, así $C_1 = L_n$, lo cual sería una contradicción. Luego, como $q^{-1}(y)$ es un subcontinuo terminal de X, entonces $q^{-1}(y) \subset \pi_1(L_n)$.

Veamos que $q^{-1}(y) = \pi_1(C_1)$. Como $C_1 \subset \pi_1^{-1}(q^{-1}(y))$, se tiene que $\pi_1(C_1) \subset q^{-1}(y)$. Por otra parte, como $q^{-1}(y) \subset \pi_1(L_n)$ y $C_1 \subset L_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $q^{-1}(y) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \pi_1(L_n) = \pi_1\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} L_n\right) = \pi_1(C_1)$.. Por tanto, $q^{-1}(y) = \pi_1(C_1)$. De manera similar, $q^{-1}(y) = \pi_1(C_2))$. Como $p \in \pi_2(C_1) \cap \pi_2(C_2)$ y P es hereditariamente indescomponible se sigue que $\pi_2(C_1) \subset \pi_2(C_2)$ o $\pi_2(C_2) \subset \pi_2(C_1)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\pi_2(C_1) \subset \pi_2(C_2)$.

Caso 1. Si $\pi_2(C_2) = \{p\}$ entonces $C_1 = q^{-1}(y) \times \{p\} = C_2$. Lo cual implica que $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$.

Caso 2. Si $\pi_2(C_2)$ es un pseudoarco. De lo anterior tenemos que $q^{-1}(y)$ es un pseudoarco. Entonces C_1 y C_2 son subcontinuos de $q^{-1}(y) \times \pi_2(C_2)$. Como $\pi_1(C_1) = q^{-1}(y)$. Por la Proposición 4.1.14, se sigue que $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$.

Así, para ambos casos, $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$. Entonces $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$. Por tanto, $X \times P$ no es mutuamente aposindético con respecto a (x_1, p) y a (x_2, p). □

Corolario 4.1.19. *Sean X un continuo homogéneo, descomponible que no es aposindético, $\mathcal{G}$ la descomposición aposindética de X. Denotemos $G = X/\mathcal{G}$, $q : X \to G$ la función cociente, P el pseudoarco y $\mathcal{D} = \{q^{-1}(y) \times \{p\} \mid (y, p) \in G \times P\}$. Si G es mutuamente aposindético, entonces cada elemento de la descomposición mutuamente aposindética de $X \times P$ está contenido en un elemento de $\mathcal{D}$. Además, si los elementos de $\mathcal{G}$ son pseudoarcos, entonces la descomposición mutuamente aposindética de $X \times P$ es $\mathcal{D}$.*

Demostración. Como G es mutuamente aposindético, por el Teorema 4.1.2, $G \times P$ es mutuamente aposindético. Por hipótesis, X es homogéneo y, además P también lo es. Así $X \times P$ es homogéneo. Entonces, por la Definición 3.2.13, podemos considerar la descomposición mutuamente aposindética, $\mathcal{Q}$, de $X \times P$. Observemos que $\mathcal{D}$ es una descomposición semicontinua superiormente de $X \times P$, donde los elementos de $\mathcal{D}$ son subcontinuos de $X \times P$. Por otra parte, observemos que $\mathcal{D} = \{(q \times Id)^{-1}((y, p)) \mid (y, p) \in G \times P\}$. Así, por el Teorema 1.1.19, $(X \times P)/\mathcal{D}$ es homeomorfo a $G \times P$. Entonces, $(X \times P)/\mathcal{D}$ es mutuamente aposindético. Luego, por el Lema 4.1.1, cada elemento de $\mathcal{Q}$ está contenido en un elemento de $\mathcal{D}$.

Si los elementos de $\mathcal{G}$ son pseudoarcos, por Lema 4.1.18, $X \times P$ no es mutuamente aposindético con respecto a ningún par de puntos que pertenezcan al mismo elemento de $\mathcal{D}$. Sean $D \in \mathcal{D}$ y $(x, p) \in D$. Consideremos que $(x, p) \in Q$, para $Q \in \mathcal{Q}$,

tal que $Q \subset D$. Tomemos $(x', p) \in D \setminus \{(x, p)\}$ entonces $X \times P$ no es mutuamente aposindético respecto de los puntos (x, p) y (x', p). Así, por el Corolario 3.2.7, $(x', p) \in Q$. Se sigue que $D \subset Q$, entonces $Q = D$. Por tanto, $\mathcal{D}$ es la descomposción mutuamente aposindética. $\square$

Definición 4.1.20. Decimos que un continuo X es *semiindescomponible* si dados dos subcontinuos K y L de X tales que $Int(K) \neq \emptyset$ e $Int(L) \neq \emptyset$, se tiene que $K \cap L \neq \emptyset$.

Lema 4.1.21. *Sean X un continuo homogéneo, $\mathcal{D}$ una descomposición continua tal que los elementos de $\mathcal{D}$ son subconjuntos cerrados y $X/\mathcal{D}$ es semiindescomponible. Si X no es mutuamente aposindético con respecto a ningún par de puntos que pertenezcan al mismo elemento de $\mathcal{D}$, entonces X es semiindescomponible.*

Demostración. Sean $q : X \to X/\mathcal{D}$ la función cociente y K_1 y K_2 dos subcontinuos de X tales que $Int(K_1) \neq \emptyset$ y $Int(K_2) \neq \emptyset$. Como q es abierta, véase el Teorema 1.1.17, $q(K_1)$ y $q(K_2)$ son subcontinuos de $X/\mathcal{D}$ con interiores no vacíos. Por hipótesis, $X/\mathcal{D}$ es semiindescomponible. Así $q(K_1) \cap q(K_2) \neq \emptyset$. Entonces existen $x_1 \in K_1$ y $x_2 \in K_2$ tales que $q(x_1) = q(x_2)$. De esta forma, X no es mutuamente aposindético con respecto a x_1 y x_2. Por otro lado, como X es homogéneo, del Lema 1.5.8, se sigue que K_1 y K_2 son subcontinuos amplios. Por la Observación 3.2.2, se tiene que $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$. Por tanto, X es semiindescomponible. $\square$

Lema 4.1.22. *Sean X un continuo homogéneo con arcocomponentes densas y Y un continuo homogéneo semiindescomponible. Entonces $X \times Y$ es mutuamente aposindético o semiindescomponible.*

Demostración. Supongamos que $X \times Y$ no es mutuamente aposindético. Por [12, 4.7], se tiene que la cerradura de cada arcocomponente de $X \times Y$ está contenida en un elemento de la descomposición mutuamente aposindética, $\mathcal{Q}$, de $X \times Y$.

Sea $\mathcal{D} = \{X \times \{y\} \mid y \in Y\}$. Del Ejemplo 1.1.15, se sigue que $\mathcal{D}$ es una descomposición continua de $X \times Y$. Además, la función $g : Y \to Y/\mathcal{D}$ definida por $g(y) = X \times \{y\}$ para toda $y \in Y$, es un homeomorfismo. Se sigue que $Y/\mathcal{D}$ es un continuo semiindescomponible, porque Y lo es por hipótesis.

Por otra parte, notemos que si A es una arcocomponente de X, entonces, para cada $y \in Y$, existe una única arcocomponente E_y del producto $X \times Y$ tal que $A \times \{y\} \subset E_y$. Como existe elemento Q_y de $\mathcal{Q}$ tal que $Cl(E_y) \subset Q_y$ y, como $Cl(A) = X$, se sigue que $X \times \{y\} \subset Q_y$. Esto implica que, para cualesquiera puntos x_1 y x_2 en X y para cualquier punto $y \in Y$, los puntos (x_1, y) y (x_2, y) pertenecen al mismo elemento de $\mathcal{Q}$. Así, $X \times Y$ no es mutuamente aposindético respecto a los

puntos (x_1, y) y (x_2, y). Entonces, por el Lema 4.1.21, se concluye que $X \times Y$ es semiindescomponible. $\square$

Corolario 4.1.23. *Sea X un continuo homogéneo de dimensión uno con arcocomponentes densas. Sean $\widehat{X}$ la curva de pseudoarcos de X y P el pseudoarco. Entonces $X \times P$ es mutuamente aposindético o semiindescomponible. Si $X \times P$ es semiindescomponible, entonces $\widehat{X} \times P$ es semiindescomponible. Si $X \times P$ es mutuamente aposindético y $q : \widehat{X} \to X$ es la función cociente para la descomposición de $\widehat{X}$ en pseudoarcos. Entonces $\{q^{-1}(x) \times \{p\} \mid (x, p) \in X \times P\}$ es la descomposición mutuamente aposindética de $\widehat{X} \times P$.*

Demostración. Como P es semiindescomponible y X tiene arcocomponentes densas, del Lema 4.1.22, se sigue que $X \times P$ es mutuamente aposindético o semiindescomponible.

Sea $\mathcal{D} = \{q^{-1}(x) \times \{p\} \mid (x, p) \in X \times P\}$. Como la descomposición de $\widehat{X}$ en pseudoarcos es una descomposición continua y terminal (véase [6]), podemos aplicar el Lema 4.1.18, para obtener que $\widehat{X} \times P$ no es mutuamente aposindético con respecto a cualquier par de puntos que pertenezcan al mismo elemento de $\mathcal{D}$. Observemos que, $\mathcal{D} = \{(q \times Id)^{-1}((x, p)) \mid (x, p) \in X \times P\}$. Entonces, por el Teorema 1.1.19, se sigue que $(\widehat{X} \times P)/\mathcal{D}$ es homeomorfo a $X \times P$.

Ahora, si $X \times P$ es semiindescomponible, entonces $(\widehat{X} \times P)/\mathcal{D}$ también es semiindescomponible. Luego, por el Lema 4.1.21 se obtiene que $\widehat{X} \times P$ es semiindescoponible.

Si $X \times P$ es mutuamente aposindético, como $(\widehat{X} \times P)/\mathcal{D}$ es homeomorfo a $X \times P$, se sigue que $(\widehat{X} \times P)/\mathcal{D}$ es mutuamente aposindética. También, podemos considerar, por la Definición 3.2.13, la descomposición mutuamente aposindética, $\mathcal{Q}$, para $\widehat{X} \times P$. Luego, por el Lema 4.1.1, se tiene que cada elemento de $\mathcal{Q}$ está contenido en un elemento de $\mathcal{D}$. Como los elementos de la descomposición de $\widehat{X}$ son pseudoarcos, se tiene que $\mathcal{D}$ es la descomposición mutuamente aposindética de $\widehat{X} \times P$. $\square$

Bibliografía

[1] G. Acosta, *Hiperespacios y la propiedad de Kelley*, Tesis de Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, Coahuila, México, 1994.

[2] J. J. Charatonik, *History of continuum theory*, Handbook of the History of General Topology, Volume 2, 703–786, 1998.

[3] R. Escobedo, *Quasi-span for continua*. Topology Proceedings, 23 (1998), 107–114.

[4] C. L. Hagopian, *Mutual aposyndesis*, Proc. Amer. Math. Soc. 23 (1969), 615–622.

[5] F. B. Jones, *Concerning Nonaposyndetic Continua*, Amer. Math. 70 (1948), 403–413.

[6] W. Lewis, *Continuous curves of pseudo-arcs*, Houston J. Math. 11 (1985), no. 1, 91–99.

[7] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. II, Academic Press, New York, N. Y., 1968.

[8] S. Macías, *Topics on Continua.* Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 275, Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore, 2005.

[9] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets*, Monographs Textbooks Pure Appl. Math., vol. 49, Marcel Dekker, New York, 1978. Reimpreso en aportaciones matemáticas, serie Textos No. 33, Sociedad Matemática Mexicana, 2006.

[10] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Monogrphs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1992.

[11] J. R. Prajs, *Semi-terminal continua in homogeneous spaces* Preprint.

[12] J. R. Prajs, *Mutually aposyndetic decomposition of homogeneous continua*, Canad. J. Math. 62 (2010), no. 1, 182–201.

[13] J. R. Prajs, K. Whittington, *Filament sets and homogeneous continua*, Topology and its applications, 154 (2007) 1581–1591.

[14] L. E. Rogers, *Mutually aposyndetic products of chainable continua*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 37, No. 3, 805–812, 1971.

[15] K. Villarreal, *Concerning the mutually aposyndetic descomposition of products of homogeneous continua*, Topology Proc. 42 (2013), 25-37.