

*Benemérita Universidad Autónoma de Puebla*

*Facultad de Ciencias Físico Matemáticas*

*Posgrado en Matemáticas*

COMPLEJOS CÚBICOS DIFUSOS E IMÁGENES  
DIGITALES  $n$ -DIMENSIONALES EN TONOS DE GRIS

TESIS

*que para obtener el grado de*

**Doctor en Ciencias Matemáticas**

presenta

**Adolfo Maceda Méndez**

Director de tesis

**Dr. Fernando Macías Romero**

Puebla, Puebla. Mayo de 2018



**BUAP**

**DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR**  
**SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y**  
**ESTUDIOS DE POSTGRADO, FCFM-BUAP**  
**P R E S E N T E:**

Por este medio le informo que el(la) C:

**ADOLFO MACEDA MÉNDEZ**

estudiante del Doctorado en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 27 de abril de 2018, con la tesis titulada:

***“COMPLEJOS CÚBICOS DIFUSOS E IMÁGENES DIGITALES  $n$ -  
DIMENSIONALES EN TONOS DE GRIS”***

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

**A T E N T A M E N T E.**  
H. Puebla de Z, a 21 de mayo de 2018.

**DR. FERNANDO MACÍAS ROMERO**  
**COORDINADOR DEL POSGRADO**  
**EN MATEMÁTICAS.**



DR.FMR/mrv

**Dedicado a:**

    Mi padre, Fausto, por todas la semillas que sembró en mí, incluida  
la del gusto por las matemáticas.

    Mi madre, Juana Aurelia, por todo el amor que me ha brindado.

**Agradecimientos:**

A mi amada esposa, Monitte, por todo su amor, por toda la paciencia que me ha tenido, por las enseñanzas que me ha proporcionado en todos los ámbitos de mi vida, incluido el académico, y por impulsarme para concluir este proyecto.

A mi querido hijo, Neftalí Adolfo, quien es uno de mis principales motivos para continuar superándome.

Al Dr. Fernando Macías Romero, porque me ha brindado todo su apoyo desde la Coordinación del Posgrado en Matemáticas para concluir este trabajo de investigación.

Al Comité Académico de Posgrado de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP, por haberme brindado la oportunidad de concluir este proyecto.

A la doctora Patricia Domínguez Soto y a los doctores Oleg Okunev, Alexander Bykov, David Herrera Carrasco y Francisco Javier Mendoza Torres, por el tiempo que dedicaron a la lectura de mi tesis y por sus comentarios durante el coloquio.

Al CONACYT, por el apoyo económico que me brindó durante el periodo en el que cursé las materias del doctorado.

Al Dr. Mario Aurelio Rodríguez Pineda, por haberme apoyado en el inicio de este proyecto.

# Índice general

<b>1. Complejos cúbicos</b>	<b>13</b>
1.1. Conceptos básicos . . . . .	14
1.2. Realización poliédrica . . . . .	22
1.3. Conexidad de complejos cúbicos . . . . .	31
1.4. Grupos de homología . . . . .	40
<b>2. Puntos lattice</b>	<b>53</b>
2.1. Adyacencias . . . . .	53
2.2. Realización geométrica . . . . .	57
2.3. Grupos de homología . . . . .	61
2.4. Imágenes digitales binarias . . . . .	62
<b>3. Complejos cúbicos difusos</b>	<b>68</b>
3.1. Conjuntos difusos . . . . .	69
3.2. Topología difusa . . . . .	71
3.3. Complejos difusos . . . . .	73
3.4. Realización poliédrica . . . . .	75
3.5. Conexidad . . . . .	77
3.6. Árboles . . . . .	82
3.7. Grupos de homología . . . . .	84
<b>4. Imágenes digitales <math>n</math>-dimensionales en tonos de gris</b>	<b>86</b>
4.1. Conceptos básicos . . . . .	87
4.2. Realización geométrica . . . . .	88
4.3. Grupos de homología . . . . .	92

# Índice de figuras

1.1.	Celdas en $\mathbb{R}^2$ : (a) 0-celda $s(x, \emptyset)$ , (b) 1-celda $s(x, \{1\})$ , (c) 1-celda $s(x, \{2\})$ , (d) 2-celda $s(x, \{1, 2\})$ , donde $x = (x_1, x_2)$ .	15
1.2.	Caras propias de la 2-celda $s = s((x_1, x_2), \{1, 2\})$ En (a) se muestran las cuatro 0-celdas que son caras propias de $s$ y en (b) las cuatro 1-celdas que son caras propias de $s$ .	48
1.3.	Celdas de la estrella de la 0-celda $s = s(x, \{1, 2\})$ , con $x = (x_1, x_2)$ . En (a), (b) y (c) se muestran las 0-celdas, 1-celdas y 2-celdas de $\text{str}(s)$ , respectivamente.	49
1.4.	Celdas de la estrella de la 1-celda $s = s((x_1, x_2), \{1\})$ . En (a) se muestra la única 1-celda y en (b) las dos 2-celdas de $\text{str}(s)$ .	50
1.5.	Celdas de la estrella de la 1-celda $s = s((x_1, x_2), \{2\})$	51
1.6.	Realización poliédrica de celdas en $\mathbb{R}^2$ . En (a) se muestra la realización poliédrica de la 0-celda $s((x_1, x_2), \emptyset)$ , en (b) la de la 1-celda $s((x_1, x_2), \{1\})$ , en (c) la de la 1-celda $s((x_1, x_2), \{2\})$ y en (d) la de la 2-celda $s((x_1, x_2), \{1, 2\})$	52
2.1.	Adyacencias en $\mathbb{Z}^2$ . (a) puntos 8-adyacentes a $x$ , (b) puntos 4-adyacentes a $x$ .	54
2.2.	8-componentes de un conjunto de puntos lattice.	56
2.3.	4-componentes de un conjunto de puntos lattice.	56
2.4.	Celdas de la realización geométrica del punto lattice $x = (x_1, x_2)$ .	65
2.5.	Realización poliédrica del complejo cúbico $G(x)$ , donde $x = (x_1, x_2)$ .	66
2.6.	Realización poliédrica de la realización geométrica cerrada del conjunto de puntos lattice de la figura 2.2.	66
2.7.	Realización poliédrica de la realización geométrica abierta del conjunto de puntos lattice de la figura 2.3.	67

# Introducción

## Planteamiento del problema

Una imagen en tonos de gris se puede definir como una función cuyo dominio es una región bidimensional y que toma valores no negativos en un rango acotado. Esta imagen puede digitalizarse haciendo un muestreo de sus valores en arreglos de puntos igualmente espaciados y cuantizándolos en un número finito de valores, dando lugar a una imagen digital bidimensional en tonos de gris. En el caso más simple, se obtiene una imagen en blanco y negro, conocida como imagen digital binaria. Estas imágenes digitales tienen muchas aplicaciones en áreas como el reconocimiento óptico de caracteres, la microscopía, la radiología, la percepción remota, las ciencias forenses y la física de altas energías. Las computadoras se pueden programar a fin de realizar tareas de *procesamiento* de estas imágenes (para modificarlas) y de *análisis* (para obtener información descriptiva de ellas) con propósitos de clasificación y reconocimiento de patrones [30].

En el procesamiento y análisis de una imagen digital es importante describir los objetos que se encuentran en ella, así como las relaciones entre estos. Posteriormente, en los objetos resultantes se requiere determinar diversas propiedades geométricas y topológicas, como sus componentes conexas. También es importante hallar los bordes de los objetos o realizar transformaciones de adelgazamiento de la imagen sin alterar sus propiedades topológicas, todo con el fin de obtener una representación más compacta de la información contenida en ella. Las relaciones de adyacencia entre los diferentes elementos de la imagen se pueden describir mediante grafos.

Con el fin de establecer los conceptos mencionados y de crear algoritmos que permitan realizar estas tareas, se ha desarrollado la topología digital [29, 13]. Entre los conceptos fundamentales de la topología digital

se encuentran los de adyacencia entre píxeles, conexidad, punto simple, árbol de adyacencia y característica de Euler. En el caso de esta última, a una imagen digital binaria se le asocia un poliedro llamado *análogo continuo* y la característica de Euler de la imagen digital es, por definición, la de su análogo continuo.

Además del poliedro propuesto por Kong y Rosenfeld en [13], el cual es un complejo simplicial, otros autores han empleado complejos cúbicos para calcular la característica de Euler, así como para estudiar propiedades topológicas de las imágenes digitales. Por ejemplo, en los trabajos de Bykoy y otros [3, 4, 5] se propone otro análogo continuo mediante complejos cúbicos y se emplean grupos de homología para establecer algoritmos que permiten determinar algunas de sus propiedades topológicas. Otros autores como Kaczynski, Mischaikow y Mrozek [10, 36] han desarrollado una teoría de complejos cúbicos *cerrados* en dimensión  $n$  y de sus grupos de homología con fines similares. En [23], Niethammer, Kalies, Mischaikow y Tanenbaum utilizan complejos cúbicos para encontrar condiciones bajo las cuáles la eliminación de un punto en una imagen digital de dimensión  $n$  no altera sus propiedades topológicas. En [36], Ziou y Allili describen una forma de generar complejos cúbicos a partir de puntos de coordenadas enteras para calcular su característica de Euler. En [12], Khachan muestra como asociar un complejo cúbico a una imagen binaria  $n$ -dimensional con adyacencia  $2n$  para los objetos y adyacencia  $3^n - 1$  para el fondo, a fin de estudiar propiedades de conexidad y el árbol de adyacencias.

Lo anterior es una muestra de algunos de los problemas relacionados con las imágenes digitales binarias que se han estudiado utilizando herramientas de la topología algebraica, asociándole a este tipo de imágenes un complejo cúbico.

En el caso de las imágenes digitales en tonos de gris, también se han aplicado diversas herramientas para definir y estudiar sus propiedades.

Por una parte, se pueden mencionar trabajos en los que a una imagen de este tipo se le asocia un conjunto de imágenes digitales de tipo binario construidas a partir de los puntos cuyo tono de gris es mayor o igual que un determinado valor. Esto permite utilizar los métodos descritos previamente para las imágenes binarias. Por ejemplo, Bertrand, Everat y Couprie, en [2], definen las secciones de una imagen en tonos de gris y, mediante diversos operadores topológicos, proponen algoritmos para segmentarla. En [37], Zomorodian y Carlsson proponen los llamados grupos de homología persistente, con los cuales se estudian los cambios en las secciones de una imagen en tonos de gris mediante complejos cúbicos



asociados a sus secciones. En [25], Robins, Wood y Sheppard muestran cómo construir un complejo de Morse discreto para estudiar propiedades topológicas de una imagen digital en tonos de gris en dimensión  $n$ .

Los extremos regionales y los árboles de componentes de una imagen en tonos de gris son importantes en diversas tareas del procesamiento de imágenes. Algunos trabajos en este sentido son el de Jones [9], los de Casells, Meinhardt y Monasse [6, 7] y el de Najman y Couprie [21].

Por otra parte, las imágenes en tonos de gris también se pueden estudiar empleando herramientas de una rama de la matemática conocida como *matemática difusa*, de la cuál se puede mencionar una gama amplia de aplicaciones, todas ellas basadas en el concepto de *conjunto difuso*, introducido por Zadeh en 1965 en su trabajo pionero [35].

Rosenfeld, en [27, 28, 22], presenta conceptos de topología digital utilizando matemática difusa y estudia algunas propiedades de las imágenes digitales bidimensionales en tonos de gris. Entre estas propiedades están los conceptos de *top* y *bottom*, que generalizan los de componente y agujero para imágenes binarias. También proporciona nociones de conexidad para estas imágenes y define el género de este tipo de imágenes, de forma análoga al género de una superficie. No presenta una definición de análogo continuo ni de la característica de Euler para esta clase de imágenes.

En la matemática difusa se han propuesto generalizaciones de diversos conceptos de la matemática tradicional, tales como los conjuntos afines y convexos [17], los conjuntos acotados [35], algunos tipos de estructuras algebraicas como los subgrupos subgrupos [26, 32] y los espacios vectoriales [19] y estructuras discretas como los grafos [34]. Una descripción más amplia de este tipo de extensiones y sus aplicaciones puede encontrarse en [11].

En el caso de la topología, una generalización mediante conjuntos difusos fue propuesta por Chang [8]. En el libro de Liu y Luo [15] se encuentra un estudio muy amplio de los diversos conceptos de topología que se han extendido mediante conjuntos difusos. En el caso de la topología algebraica también se han propuesto generalizaciones del concepto de homotopía, como en [31], mientras que los grupos de homología, utilizando conjuntos difusos se definen, con diferentes enfoques, en [14, 33, 1]. En estos trabajos se presentan diversas propiedades de los grupos de homología relacionadas con algún tipo de homotopía, pero no se relaciona el rango de los grupos de homología difusa con conceptos de conexidad.

A pesar del desarrollo de la teoría de espacios topológicos difusos, no hay aplicaciones de los mismos para estudiar propiedades topológicas

de las imágenes digitales en tonos de gris. Dado que la aplicación de la topología algebraica al caso de las imágenes digitales binarias ha dado una contribución importante para entender sus propiedades topológicas o incluso, en algunos casos, para definir dichas propiedades, en este trabajo de investigación se plantea el siguiente:

**Problema:** Generalizar algunos conceptos de topología algebraica mediante conjuntos difusos con el propósito de poder aplicarlos al estudio de las propiedades topológicas de las imágenes digitales en tonos de gris.

## Descripción general del trabajo

En este trabajo se desarrolla una teoría general de complejos cúbicos difusos en  $\mathbb{R}^n$  para aplicarla al estudio de propiedades topológicas de las imágenes digitales  $n$ -dimensionales en tonos de gris.

Se presenta, en primer lugar, una definición general de complejo cúbico en  $\mathbb{R}^n$  que incluye a los complejos cerrados y a los abiertos, se definen algunas propiedades topológicas de ellos y se les asocia un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  llamado realización poliédrica. Se estudia la relación entre algunas propiedades topológicas del complejo cúbico y las de su realización poliédrica. Además, se explica cómo asociar a un complejo cúbico sus grupos de homología y su característica de Euler a partir de su realización poliédrica.

Como una aplicación de esta teoría, se muestra cómo a un subconjunto de *puntos lattice* (puntos con coordenadas enteras) en el que se tiene definido un tipo de adyacencia, se le puede asociar un complejo cúbico para estudiar sus propiedades de conexidad.

Posteriormente se propone una definición de complejo cúbico difuso utilizando el concepto de conjunto difuso. Se definen también algunas propiedades topológicas de estos complejos, tales como sus extremos regionales y sus árboles superior e inferior, así como sus grupos de homología. A cada complejo cúbico difuso se le asocia un subconjunto difuso de  $\mathbb{R}^n$  llamado su realización poliédrica difusa y se estudian también las relaciones entre sus propiedades topológicas. Se definen los grupos de homología, los números de Betti y la característica de Euler por niveles para este tipo de complejos y se muestra el significado del 0-número de Betti correspondiente.

Por último, se propone una definición general de imagen en tonos de

gris, considerando dos tipos de adyacencia y se muestra como asociarle un complejo cúbico difuso, de tal forma que las propiedades topológicas de la imagen puedan estudiarse mediante las del complejo cúbico difuso correspondiente.

## Organización de la tesis y principales resultados

La tesis consta de cuatro capítulos.

En el capítulo 1 se presenta una teoría general de complejos cúbicos en  $\mathbb{R}^n$ . La sección 1.1 contiene la definición de celda  $k$ -dimensional en  $\mathbb{R}^n$  y algunas de sus propiedades que son empleadas frecuentemente en las demostraciones de la tesis. También contiene la definición de complejo cúbico general y la de frontera de un complejo cúbico. Utilizando el concepto de frontera, los complejos cúbicos se pueden clasificar en cerrados o abiertos. Estos complejos cúbicos se pueden considerar como estructuras discretas, pues sólo contienen un número finito de puntos. Esto permite desarrollar algoritmos para calcular algunas de sus propiedades numéricas.

En la sección 1.2 a un complejo cúbico se le asocia un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  llamado su realización poliédrica. Se demuestran algunas propiedades de esta realización poliédrica y se establecen relaciones fundamentales entre las propiedades del complejo cúbico y las de su realización poliédrica. En este sentido, destaca el teorema 1.11, en el que se demuestra que la realización poliédrica de la frontera de un complejo cúbico es igual a la frontera de su realización poliédrica respecto a la topología usual de  $\mathbb{R}^n$ . A partir de este teorema, se caracterizan los complejos cúbicos como abiertos o cerrados mediante su realización poliédrica.

En la sección 1.3 se define una relación de conexidad entre las celdas de un complejo cúbico y se demuestran los teoremas 1.18, 1.19, que establecen relaciones entre las propiedades de conexidad de un complejo cúbico y las de su realización poliédrica respecto a la topología usual de  $\mathbb{R}^n$ .

En la sección 1.4 se definen los grupos de homología de un complejo cúbico a partir de los grupos de homología singular de su realización poliédrica. Si estos grupos tienen rango finito, se definen los números de Betti y su característica de Euler y se proporcionan fórmulas para calcular esta última a partir del número de celdas de cada dimensión, haciendo la distinción en los casos en que el complejo cúbico es cerrado

o abierto.

El capítulo 2 contiene propiedades de conexidad de subconjuntos de  $\mathbb{Z}^n$ . Para este fin, en la sección 2.1 se definen dos tipos de adyacencia entre puntos de  $\mathbb{Z}^n$ . En la sección 2.2, a un subconjunto de  $\mathbb{Z}^n$  se le asocia un complejo cúbico llamado su realización geométrica, el cual es abierto o cerrado, dependiendo del tipo de adyacencia considerado. Destacan los teoremas 2.4 y 2.5, que relacionan las propiedades de conexidad de un subconjunto de  $\mathbb{Z}^n$  con las de su realización geométrica, según el tipo de adyacencia empleado. En la sección 2.3 se definen los grupos de homología de un subconjunto de  $\mathbb{Z}^n$ , así como sus números de Betti, también en función del tipo de adyacencia que se considere, y se discute brevemente su relación con algunas propiedades de conexidad.

El capítulo 3 contiene las contribuciones más importantes de la tesis. En las secciones 3.1 y 3.2 se incluyen definiciones y resultados de la matemática difusa que sirven como base para el desarrollo posterior de la teoría. El más importante es el teorema 3.1, que permite construir una topología difusa a partir de una topología ordinaria utilizando funciones semicontinuas inferiormente. La sección 3.3 contiene la definición propuesta de complejo cúbico difuso y su clasificación en abiertos o cerrados, dependiendo del comportamiento de sus conjuntos de nivel. En la sección 3.4, a un complejo cúbico difuso se le asocia un subconjunto difuso de  $\mathbb{R}^n$ , llamado su realización poliédrica y se demuestran algunas de sus propiedades. El teorema 3.3 permite caracterizar los complejos cúbicos difusos, cerrados o abiertos, mediante su realización poliédrica, a partir de la topología difusa en  $\mathbb{R}^n$  inducida por las funciones semicontinuas inferiormente. En la sección 3.5 se propone el concepto de conexidad y los conceptos de máximo y mínimo regional para complejos cúbicos difusos. Los teoremas 3.5, 3.6, 3.7 y 3.12 muestran que tanto los máximos como los mínimos regionales tienen propiedades similares a las de las componentes conexas de un subespacio de un espacio topológico, y por tanto se pueden considerar como una generalización de las mismas. El teorema 3.8 caracteriza los complejos cúbicos conexos a partir del número de máximos regionales. En la sección 3.6 se proponen definiciones de dos árboles asociados a un complejo cúbico difuso: uno construido a partir de los máximos regionales y otro a partir de sus mínimos regionales. Estos árboles contienen información sobre las relaciones de inclusión entre los extremos regionales del complejo cúbico difuso.

En la sección 3.7 se definen los grupos de homología de un complejo cúbico difuso, mediante los grupos de homología de sus conjuntos de nivel. El resultado principal de esta sección es el teorema 3.14, que esta-

blece que en un complejo cúbico difuso, el 0-número de Betti de un nivel dado es igual al número de máximos regionales de dicho nivel.

En el capítulo 4 se aplica la teoría desarrollada en el capítulo 3 para asociarle a una imagen digital en tonos de gris un complejo cúbico difuso. En la sección 4.1 se propone una definición general de imagen digital en tonos de gris en  $\mathbb{R}^n$  y se definen sus extremos regionales y sus árboles de extremos. Las definiciones generalizan las conocidas en el caso bidimensional. En la sección 4.2 se muestra cómo asociarle a una imagen digital en tonos de gris un complejo cúbico difuso, llamado su realización geométrica difusa y se establecen las relaciones principales entre los extremos regionales y los árboles de extremos de estos objetos. Por último, en la sección 4.3 se definen los grupos de homología y los números de Betti de una imagen digital en tonos de gris y se demuestra que el 0-número de Betti de un nivel dado es igual al número de máximos regionales de dicho nivel.

# Capítulo 1

## Complejos cúbicos

En este capítulo se presentan los conceptos principales relacionados con los complejos cúbicos generales en  $\mathbb{R}^n$  y algunas de sus propiedades más importantes. En la sección 1.1 se definen las celdas de dimensión  $k$  como subconjuntos especiales de  $\mathbb{R}^n$  con un número finito de puntos. También se propone una definición general de complejo cúbico y se introduce el concepto de frontera de un complejo cúbico. Mediante la frontera se pueden clasificar los complejos cúbicos en cerrados o abiertos y se pueden definir algunas propiedades topológicas de estos. En la sección 1.2 se muestra como asociar a cada complejo cúbico un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  llamado su realización poliédrica y se demuestran algunos teoremas que establecen relaciones entre las propiedades topológicas de un complejo cúbico y las de su realización poliédrica. En la sección 1.3 se define el concepto de conexidad para un complejo cúbico y se demuestran teoremas que relacionan esta con la conexidad de su realización poliédrica respecto a la topología usual de  $\mathbb{R}^n$ . En la sección 1.4 se definen los grupos de homología de un complejo cúbico a partir de los grupos de homología singular de su realización poliédrica. Esto permite definir también sus números de Betti y su característica de Euler. Se proporcionan fórmulas para calcular esta en función del número de celdas de cada dimensión

del complejo cúbico en los casos en que este sea abierto o cerrado.

## 1.1. Conceptos básicos

En esta sección se presentan las definiciones de celda y de complejo cúbico, así como algunas de sus propiedades básicas. También se presenta la definición de frontera de un complejo cúbico y de algunas propiedades relacionadas con esta.

La idea principal en la definición de celda es construir objetos que permitan definir grupos de homología no solo para complejos cúbicos cerrados, sino para complejos cúbicos más generales.

**Definición 1.1.** *Una  $k$ -celda o celda  $k$ -dimensional en  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto de la forma*

$$s(x, \Lambda) = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n \quad (1.1)$$

donde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ ,  $\Lambda$  es un subconjunto de  $\{1, 2, \dots, n\}$  con  $k$  elementos, e

$$I_\lambda = \begin{cases} \{x_\lambda - \frac{1}{2}, x_\lambda + \frac{1}{2}\} & \text{si } \lambda \in \Lambda, \\ \{x_\lambda + \frac{1}{2}\} & \text{si } \lambda \notin \Lambda. \end{cases}$$

Los  $2^k$  elementos que forman a una  $k$ -celda son sus vértices. Cuando no sea relevante indicar el elemento  $x$  ni el conjunto  $\Lambda$ , se escribirá simplemente  $s$ .

En la figura 1.1 se muestran celdas de dimensiones 0, 1 y 2 en  $\mathbb{R}^2$ .

De acuerdo con esta definición, la 0-celda  $s(x, \emptyset)$  está formada por el punto

$$\left(x_1 + \frac{1}{2}, \dots, x_n + \frac{1}{2}\right),$$

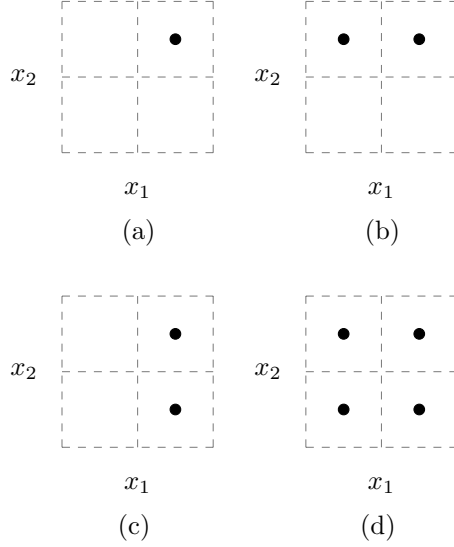


Figura 1.1: Celdas en  $\mathbb{R}^2$ : (a) 0-celda  $s(x, \emptyset)$ , (b) 1-celda  $s(x, \{1\})$ , (c) 1-celda  $s(x, \{2\})$ , (d) 2-celda  $s(x, \{1, 2\})$ , donde  $x = (x_1, x_2)$ .

mientras que los vértices de la 1-celda  $s(x, \{i\})$  son los puntos

$$\left(x_1 + \frac{1}{2}, \dots, x_i - \frac{1}{2}, \dots, x_n + \frac{1}{2}\right), \left(x_1 + \frac{1}{2}, \dots, x_i + \frac{1}{2}, \dots, x_n + \frac{1}{2}\right)\}.$$

**Definición 1.2.** Dado  $x \in \mathbb{Z}^n$ , la  $n$ -celda centrada en  $x$  se define como

$$s(x) = s(x; \{1, 2, \dots, n\}).$$

Nótese que los vértices de la  $n$ -celda centrada en  $x$  son los vértices del cubo unitario con centro en  $x$ . Además, cualquier  $k$ -celda  $s(x, \Lambda)$  está contenida en la  $n$ -celda  $s(x)$ .

Para estudiar diversas propiedades de las celdas es importante saber cuando una de ellas está contenida en otra. En el siguiente lema se dan condiciones necesarias y suficientes para esto.



**Lema 1.1.** Sean

$$\begin{aligned} s_1 &= s(x, \Lambda_1), \\ s_2 &= s(y, \Lambda_2), \end{aligned}$$

dos celdas en  $\mathbb{R}^n$ . Si  $s_1 \subset s_2$ , entonces:

1.  $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ ,
2.  $x_\lambda = y_\lambda$  si  $\lambda \in \Lambda_1$  o  $\lambda \notin \Lambda_2$ ,
3.  $x_\lambda \in \{y_\lambda - 1, y_\lambda\}$  si  $\lambda \in \Lambda_2 - \Lambda_1$ .

Recíprocamente, si se satisfacen estas tres condiciones, entonces  $s_1 \subset s_2$ .

*Demostración.* Supóngase que

$$\begin{aligned} s_1 &= I_1^{(1)} \times I_2^{(1)} \times \dots \times I_n^{(1)} \\ s_2 &= I_1^{(2)} \times I_2^{(2)} \times \dots \times I_n^{(2)}, \end{aligned}$$

donde

$$I_\lambda^{(1)} = \begin{cases} \{x_\lambda - \frac{1}{2}, x_\lambda + \frac{1}{2}\} & \text{si } \lambda \in \Lambda_1, \\ \{x_\lambda + \frac{1}{2}\} & \text{si } \lambda \notin \Lambda_1, \end{cases}$$

y

$$I_\lambda^{(2)} = \begin{cases} \{y_\lambda - \frac{1}{2}, y_\lambda + \frac{1}{2}\} & \text{si } \lambda \in \Lambda_2, \\ \{y_\lambda + \frac{1}{2}\} & \text{si } \lambda \notin \Lambda_2. \end{cases}$$

Si  $s_1 \subset s_2$ , entonces  $I_\lambda^{(1)} \subset I_\lambda^{(2)}$  para todo  $\lambda \in \{1, \dots, n\}$ .

Cuando  $\lambda \in \Lambda_1$ , el conjunto  $I_\lambda^{(1)}$  tiene dos elementos, por lo que  $I_\lambda^{(2)}$  también tiene dos elementos y por tanto son iguales. En consecuencia,  $\lambda \in \Lambda_2$ . Se deduce que  $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ . Además, como

$$\left\{x_\lambda - \frac{1}{2}, x_\lambda + \frac{1}{2}\right\} = I_\lambda^{(1)} = I_\lambda^{(2)} = \left\{y_\lambda - \frac{1}{2}, y_\lambda + \frac{1}{2}\right\},$$

es claro que  $x_\lambda = y_\lambda$ .

Si  $\lambda \notin \Lambda_2$ , el conjunto  $I_\lambda^{(2)}$  consta de un sólo elemento, por lo que  $I_\lambda^{(1)}$  también tiene un único elemento y  $x_\lambda = y_\lambda$ .

En el caso  $\lambda \in \Lambda_2 - \Lambda_1$ , se tiene la inclusión

$$\left\{ x_\lambda + \frac{1}{2} \right\} \subset \left\{ y_\lambda - \frac{1}{2}, y_\lambda + \frac{1}{2} \right\}$$

lo que implica  $x_\lambda = y_\lambda - 1$  o  $x_\lambda = y_\lambda$ .

Ahora supóngase que se satisfacen las condiciones 1, 2 y 3.

Si  $\lambda \notin \Lambda_2$ , entonces, por la condición 1,  $\lambda \notin \Lambda_1$  y, por la condición 2,  $x_\lambda = y_\lambda$ , lo que implica que  $I_\lambda^{(1)} = I_\lambda^{(2)}$ . Cuando  $\lambda \in \Lambda_1$ , se tiene que  $\lambda \in \Lambda_2$  y que  $x_\lambda = y_\lambda$ , por lo que  $I_\lambda^{(1)} = I_\lambda^{(2)}$ . Por último, si  $\lambda \in \Lambda_2 - \Lambda_1$ , entonces

$$x_\lambda + \frac{1}{2} \in \left\{ y_\lambda - \frac{1}{2}, y_\lambda + \frac{1}{2} \right\}$$

es decir,  $I_\lambda^{(1)} \subset I_\lambda^{(2)}$ . Se concluye que  $s_1 \subset s_2$ .  $\square$

Como consecuencia inmediata de este lema se obtiene la siguiente equivalencia para que dos celdas sean iguales.

**Corolario 1.1.** *Si  $s_1$  y  $s_2$  son como en el lema 1.1, entonces  $s_1 = s_2$  si, y sólo si,  $\Lambda_1 = \Lambda_2$  y  $x = y$ .*

Otra consecuencia del lema 1.1 es el siguiente resultado.

**Corolario 1.2.** *Si  $s$  es una  $n$ -celda y  $s'$  es una celda tal que  $s \subset s'$ , entonces  $s = s'$ .*

**Definición 1.3.** *Una celda  $s_1$  es una cara de una celda  $s_2$  si  $s_1 \subset s_2$ . Si además,  $s_1 \neq s_2$ , se dice que  $s_1$  es una cara propia de  $s_2$ .*

En la figura 1.2 se muestran las caras propias de la 2-celda  $s(x; \{1, 2\})$  en  $\mathbb{R}^2$ . Estas son

1. las cuatro 0-celdas

$$s(x - (1, 1), \emptyset), s(x - (1, 0), \emptyset), s(x - (0, 1), \emptyset), s(x, \emptyset),$$

2. las cuatro 1-celdas

$$s(x - (0, 1), \{1\}), s(x, \{1\}), s(x - (1, 0), \{2\}), s(x, \{2\}).$$

**Observación 1.1.** *Por el lema 1.1, es claro que si  $s(x) = s(y)$ , entonces  $x = y$ .*

Las celdas se utilizan para construir los complejos cúbicos, que tendrán un papel muy importante en el desarrollo de este trabajo. La siguiente definición es más general que las propuestas en, por ejemplo, [3, 5, 10, 36, 20, 23, 12], en las que sólo se han empleado complejos cúbicos cerrados.

**Definición 1.4.** *Un complejo cúbico en  $\mathbb{R}^n$  es cualquier colección de celdas en  $\mathbb{R}^n$ .*

En particular, el conjunto de todas las celdas en  $\mathbb{R}^n$  es un complejo cúbico que se denota por  $|\mathbb{Z}^n|$ . También el conjunto vacío es un complejo cúbico.

**Definición 1.5.** *Un complejo cúbico  $\mathbf{L}$  es un subcomplejo de un complejo cúbico  $\mathbf{K}$  si  $\mathbf{L} \subset \mathbf{K}$ .*

**Definición 1.6.** *El complemento de un complejo cúbico  $\mathbf{K}$  en  $\mathbb{R}^n$  es el conjunto de las celdas en  $\mathbb{R}^n$  que no pertenecen a  $\mathbf{K}$ . Se denota por  $\mathbf{K}^c$ .*

Es claro que  $(\mathbf{K}^c)^c = \mathbf{K}$ .

Además, la colección de complejos cúbicos es cerrada bajo uniones, intersecciones y complemento.

**Definición 1.7.** *Una celda  $s$  es una cara de un complejo cúbico  $\mathbf{K}$  si existe una celda  $s'$  en  $\mathbf{K}$  tal que  $s$  es cara de  $s'$ .*

De acuerdo con esta definición, puede ocurrir que una celda sea cara de un complejo cúbico sin pertenecer a él. Por ejemplo, un complejo cúbico formado únicamente por una 1-celda no contiene a las dos 0-celdas que son caras propias de dicha 1-celda.

En la colección de los complejos cúbicos se define un operador que permitirá estudiar ciertas propiedades de tipo topológico.

**Definición 1.8.** *Dado un complejo cúbico  $\mathbf{K}$  en  $\mathbb{R}^n$ , su frontera es el complejo cúbico cuyos elementos son las celdas en  $\mathbb{R}^n$  que son caras tanto de  $\mathbf{K}$  como de  $\mathbf{K}^c$ . Se denota por  $\delta(\mathbf{K})$ .*

Por ejemplo, la frontera de un complejo cúbico formado por una 0-celda es el mismo. La frontera de un complejo cúbico formado por una 1-celda consta de los dos vértices de la 1-celda. La frontera de un complejo cúbico formado por la  $n$ -celda centrada en  $x$  está integrada por las caras propias de dicha celda, mientras que la frontera de un complejo cúbico formado por una única celda de dimensión menor que  $n$  es el conjunto de las caras de dicha celda.

**Observación 1.2.** *Por el corolario 1.2, la frontera de cualquier complejo cúbico no contiene celdas de dimensión  $n$ .*

Una propiedad importante de la frontera de un complejo cúbico es la siguiente.

**Teorema 1.1.** *Si  $\mathbf{K}$  es un complejo cúbico, entonces  $\delta(\delta(\mathbf{K})) \subset \delta(\mathbf{K})$ .*

*Demostración.* Si  $s \in \delta(\delta(\mathbf{K}))$  entonces  $s$  es cara de  $\delta(\mathbf{K})$ , por lo que existe una celda  $s' \in \delta(\mathbf{K})$  tal que  $s$  es cara de  $s'$ . La celda  $s'$  es cara de dos celdas  $s''$  y  $s'''$  en  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{K}^c$ , respectivamente. Esto implica que  $s$  es cara de  $\mathbf{K}$  y de  $\mathbf{K}^c$  y, por tanto,  $s \in \delta(\mathbf{K})$ . □

**Definición 1.9.** *Sea  $\mathbf{K}$  un complejo cúbico.*

1. *La cerradura de  $\mathbf{K}$  es  $\overline{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \cup \delta(\mathbf{K})$ .*
2. *El interior de  $\mathbf{K}$  es  $\mathbf{K}^0 = \mathbf{K} - \delta(\mathbf{K})$ .*
3. *El complejo cúbico  $\mathbf{K}$  es cerrado si  $\delta(\mathbf{K}) \subset \mathbf{K}$ .*
4. *El complejo cúbico  $\mathbf{K}$  es abierto si  $\mathbf{K} \cap \delta(\mathbf{K}) = \emptyset$ .*

De acuerdo con esta definición, la cerradura de un complejo cúbico formado por una 0-celda es él mismo y por tanto es cerrado, mientras que su interior es vacío. Los complejos cúbicos  $\emptyset$  y  $|\mathbb{Z}^n|$  son cerrados y abiertos. Un complejo cúbico formado por una  $n$ -celda es abierto. La cerradura de un complejo cúbico formado por una única celda de dimensión menor que  $n$  es el complejo cúbico formado por todas sus caras.

En general, un complejo cúbico  $\mathbf{K}$  es cerrado si  $\overline{\mathbf{K}} = \mathbf{K}$  y  $\mathbf{K}$  es abierto si  $\mathbf{K} = \mathbf{K}^0$ .

**Observación 1.3.** *Por el teorema 1.1, la frontera de un complejo cúbico es un complejo cúbico cerrado.*

Los complejos cúbicos cerrados se caracterizan por la siguiente propiedad.

**Teorema 1.2.** *Un complejo cúbico es cerrado si, y sólo si, contiene todas las caras de sus celdas.*

*Demostración.* Si  $\mathbf{K}$  es un complejo cúbico cerrado y  $s$  es una cara de alguna celda de  $\mathbf{K}$  pero  $s \notin \mathbf{K}$ , entonces  $s$  es una cara de  $\mathbf{K}$  y de  $\mathbf{K}^c$ , lo que implica que  $s \in \delta(\mathbf{K}) \subset \mathbf{K}$ , contradiciendo que  $s \notin \mathbf{K}$ .

Ahora, si  $\mathbf{K}$  es un complejo cúbico que contiene a cualquier celda que sea cara de alguna de sus celdas y  $s \in \delta(\mathbf{K})$ , entonces existe una celda  $s' \in \mathbf{K}$  tal que  $s \subset s'$  y por tanto  $s \in \mathbf{K}$ .  $\square$

Un concepto que será útil en algunas demostraciones relacionadas con el interior de un complejo cúbico es el de estrella de una celda  $s$ .

**Definición 1.10.** *La estrella de una celda  $s$  en  $\mathbb{R}^n$  es el complejo cúbico*

$$\text{str}(s) = \{s' \in |\mathbb{Z}^n| : s \subset s'\}.$$

En  $\mathbb{R}^2$ , la estrella de la 0-celda  $s(x, \emptyset)$  (ver figura 1.3) es el complejo cúbico formado por

1. la 0-celda  $s(x, \emptyset)$ ,

2. las cuatro 1-celdas

$$s(x, \{1\}), s(x, \{2\}), s(x + (1, 0), \{1\}), s(x + (0, 1), \{2\})$$

3. las cuatro 2-celdas centradas en los puntos  $x$ ,  $x + (1, 0)$ ,  $x + (0, 1)$  y  $x + (1, 1)$ , respectivamente.

Por otra parte, la estrella de la 1-celda  $s(x, \{1\})$  (ver figura 1.4) está formada por esta celda y por las dos 2-celdas centradas en  $x$  y en  $x + (0, 1)$ , mientras que la estrella de la 1-celda  $s(x, \{2\})$  (ver figura 1.5) está formada por la 1-celda  $s(x, \{2\})$  y por las dos 2-celdas centradas en  $x$  y en  $x + (1, 0)$ .

Es claro que si  $s_1 \subset s_2$ , entonces  $\text{str}(s_2) \subset \text{str}(s_1)$ .

**Teorema 1.3.** Sean  $\mu \in \{1, 2, \dots, n\}$  y  $\Lambda = \{\lambda \in \{1, 2, \dots, n\} : \lambda \neq \mu\}$ . La estrella de la  $(n - 1)$ -celda  $s = s(x, \Lambda)$  es

$$\text{str}(s) = \{s, s(x), s(y)\},$$

donde  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , con  $y_\lambda = x_\lambda$  si  $\lambda \neq \mu$  y  $y_\mu = x_\mu + 1$ .

*Demostración.* Es claro que  $s$  es cara de  $s(x)$  y de  $s(y)$  por el lema 1.1.

Supóngase ahora que  $s' = s(z, \Lambda')$  es un elemento de  $\text{str}(s)$ . Como  $s \subset s'$ , por el lema 1.1,  $\Lambda \subset \Lambda'$  y  $x_\lambda = z_\lambda$  para cada  $\lambda \in \Lambda$ . Hay dos posibilidades:

1.  $\Lambda' = \{1, 2, \dots, n\}$
2.  $\Lambda' = \Lambda$

En el primer caso,  $\Lambda' - \Lambda = \{\mu\}$ , por lo que  $x_\mu = z_\mu - 1$  o  $x_\mu = z_\mu$ . Con esto,  $s' = s(y)$  o  $s' = s(x)$ , respectivamente.

En el segundo caso,  $x_\mu = z_\mu$ , y por tanto  $s' = s$ . □

Utilizando el concepto de estrella de una celda se pueden caracterizar las celdas que pertenecen al interior de un complejo cúbico.

**Teorema 1.4.** *Dado un complejo cúbico  $\mathbf{K}$ , una celda  $s$  pertenece a  $\mathbf{K}^0$  si, y sólo si,  $\text{str}(s) \subset \mathbf{K}$ .*

*Demostración.* Supóngase primero que  $s \in \mathbf{K}^0$  y sea  $s' \in \text{str}(s)$ . Si  $s' \notin \mathbf{K}$ , entonces, como  $s \subset s'$ , se deduce que  $s$  es cara de  $\mathbf{K}^c$ . Como  $s \in \mathbf{K}$ , entonces  $s \in \delta(\mathbf{K})$ , contradiciendo que  $s \in \mathbf{K}^0$ . Por tanto,  $s' \in \mathbf{K}$ .

Ahora, si  $\text{str}(s) \subset \mathbf{K}$  pero  $s \in \delta(\mathbf{K})$ , entonces existe  $s' \in \mathbf{K}^c$  tal que  $s \subset s'$ . Esto implica que  $s' \in \text{str}(s)$  y que  $s' \in \mathbf{K}$ , lo cual es una contradicción. En consecuencia,  $s \notin \delta(\mathbf{K})$  y  $s \in \mathbf{K}^0$ .  $\square$

**Corolario 1.3.** *Un complejo cúbico  $\mathbf{K}$  es abierto si, y sólo si, para cada  $s \in \mathbf{K}$ ,  $\text{str}(s) \subset \mathbf{K}$ .*

## 1.2. Realización poliédrica

Para establecer relaciones entre las propiedades topológicas de los complejos cúbicos y las de ciertos subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ , se propone una definición de su realización poliédrica.

En lo sucesivo, se considera  $\mathbb{R}^n$  con la topología usual.

En primer lugar se propone la definición de realización poliédrica de una celda.

**Definición 1.11.** *La realización poliédrica de la  $k$ -celda 1.1 es*

$$|s(x, \Lambda)| = J_1 \times J_2 \times \dots \times J_n,$$

donde

$$J_\lambda = \begin{cases} (x_\lambda - \frac{1}{2}, x_\lambda + \frac{1}{2}) & \text{si } \lambda \in \Lambda, \\ \{x_\lambda + \frac{1}{2}\} & \text{si } \lambda \notin \Lambda. \end{cases}$$

*Esta realización poliédrica se denota por  $|s|$ .*

Nótese que la realización poliédrica de una  $k$ -celda está definida como el producto cartesiano de  $k$  intervalos abiertos y de  $n - k$  puntos. En

particular, la realización poliédrica de una  $n$ -celda es un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^n$ .

En la figura 1.6 se muestra la realización poliédrica de celdas en  $\mathbb{R}^2$ .

A continuación se demuestran algunas propiedades de esta realización poliédrica.

El siguiente lema muestra la relación entre las realizaciones poliédricas de dos celdas cuando una de ellas es cara de la otra.

**Lema 1.2.** *Si  $s_1$  es una cara de  $s_2$ , entonces  $|s_1|$  es un subconjunto de la cerradura de  $|s_2|$ .*

*Demostración.* Si  $s_1$  y  $s_2$  son como en el lema 1.1, entonces

$$\begin{aligned} |s_1| &= J_1^{(1)} \times J_2^{(1)} \times \dots \times J_n^{(1)}, \\ |s_2| &= J_1^{(2)} \times J_2^{(2)} \times \dots \times J_n^{(2)}, \end{aligned}$$

donde

$$J_\lambda^{(1)} = \begin{cases} (x_\lambda - \frac{1}{2}, x_\lambda + \frac{1}{2}) & \text{si } \lambda \in \Lambda_1, \\ \{x_\lambda + \frac{1}{2}\} & \text{si } \lambda \notin \Lambda_1, \end{cases}$$

y

$$J_\lambda^{(2)} = \begin{cases} (y_\lambda - \frac{1}{2}, y_\lambda + \frac{1}{2}) & \text{si } \lambda \in \Lambda_2, \\ \{y_\lambda + \frac{1}{2}\} & \text{si } \lambda \notin \Lambda_2. \end{cases}$$

Supóngase que  $s_1 \subset s_2$ . Por el lema 1.1, si  $\lambda \in \Lambda_2 - \Lambda_1$ , entonces

$$x_\lambda + \frac{1}{2} \in \left\{ y_\lambda - \frac{1}{2}, y_\lambda + \frac{1}{2} \right\}$$

y por tanto  $J_\lambda^{(1)} \subset \overline{J_\lambda^{(2)}}$ . En el caso  $\lambda \in \Lambda_1$ ,  $J_\lambda^{(1)} = J_\lambda^{(2)} = (x_\lambda - 1/2, x_\lambda + 1/2)$  y por tanto,  $J_\lambda^{(1)} \subset \overline{J_\lambda^{(2)}}$ . Por último, si  $\lambda \notin \Lambda_2$ , entonces  $J_\lambda^{(1)} = J_\lambda^{(2)} = \{x_\lambda + 1/2\}$  y  $J_\lambda^{(1)} = \overline{J_\lambda^{(2)}}$ . En consecuencia,  $|s_1| \subset \overline{|s_2|}$ .  $\square$

**Corolario 1.4.** *Si  $s_1$  es una cara propia de  $s_2$ , entonces  $|s_1| \cap |s_2| = \emptyset$  y  $|s_1|$  es un subconjunto de la frontera de  $|s_2|$ .*



*Demostración.* Si  $s_1$  es cara propia de  $s_2$ , existe  $\mu$  tal que  $I_\mu^{(1)}$  es un subconjunto propio de  $I_\mu^{(2)}$ . Esto implica que

$$I_\mu^{(1)} = \{x_\mu + \frac{1}{2}\} \subset \{y_\mu - \frac{1}{2}, y_\mu + \frac{1}{2}\} = I_\mu^{(2)} = \text{Fr}(J_\mu^{(2)}).$$

Se deduce que  $J_\mu^{(1)} = I_\mu^{(1)}$  no tiene puntos en común con  $J_\mu^{(2)}$ , por lo que  $|s_1| \cap |s_2| = \emptyset$ . Además,

$$\begin{aligned} |s_1| &\subset \overline{J_1^{(2)}} \times \dots \times \text{Fr}(J_\mu^{(2)}) \times \dots \times \overline{J_n^{(2)}} \\ &\subset \text{Fr}(J_1^{(2)} \times \dots \times J_n^{(2)}) = \text{Fr}(|s_2|). \end{aligned}$$

□

Del siguiente resultado se deduce que el conjunto de las realizaciones poliédricas de todas las celdas en  $\mathbb{R}^n$  constituye una partición de  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 1.5.** *Para cada  $z \in \mathbb{R}^n$  existe una única celda  $s$  tal que  $z \in |s|$ .*

*Demostración.* Sea  $z = (z_1, \dots, z_n)$ . Para cada  $\lambda \in \{1, \dots, n\}$  existe un único  $x_\lambda \in \mathbb{Z}$  tal que

$$x_\lambda < z_\lambda + \frac{1}{2} \leq x_\lambda + 1.$$

Definiendo

$$\Lambda = \left\{ \lambda : z_\lambda + \frac{1}{2} < x_\lambda + 1 \right\},$$

se cumple que

$$\begin{aligned} x_\lambda - \frac{1}{2} < z_\lambda < x_\lambda + \frac{1}{2} & \quad \text{si } \lambda \in \Lambda \\ z_\lambda = x_\lambda + \frac{1}{2} & \quad \text{si } \lambda \notin \Lambda \end{aligned}$$

Es inmediato que  $z$  está en la realización poliédrica de la celda  $s(x, \Lambda)$ . La unicidad de la celda se deduce de la unicidad de los números  $x_\lambda$ . □

Como consecuencia, se obtiene el siguiente criterio para probar la igualdad de dos celdas a partir de la relación entre sus realizaciones

poliédricas.

**Corolario 1.5.** *Si  $s_1$  y  $s_2$  son dos celdas tales que  $|s_1| \cap |s_2| \neq \emptyset$ , entonces  $s_1 = s_2$ .*

En el siguiente teorema se expresa la adherencia de la realización poliédrica de una celda utilizando la realización poliédrica de sus caras.

**Teorema 1.6.** *Para toda celda  $s$  se cumple*

$$\overline{|s|} = \bigcup_{s_1 \subset s} |s_1|.$$

*Demostración.* Por el lema 1.2, es claro que el conjunto del lado derecho es subconjunto del conjunto del lado izquierdo. Ahora, si  $s = s(x, \Lambda)$  y  $z \in \overline{|s|}$ , entonces  $z_\lambda = x_\lambda + \frac{1}{2}$  cuando  $\lambda \notin \Lambda$ , mientras que  $z_\lambda \in [x_\lambda - \frac{1}{2}, x_\lambda + \frac{1}{2}]$  cuando  $\lambda \in \Lambda$ . Sean

$$\Lambda_1 = \left\{ \lambda : x_\lambda - \frac{1}{2} < z_\lambda < x_\lambda + \frac{1}{2} \right\}$$

y

$$y_\lambda = \begin{cases} x_\lambda & \text{si } x_\lambda - \frac{1}{2} < z_\lambda \leq x_\lambda + \frac{1}{2} \\ x_\lambda - 1 & \text{si } z_\lambda = x_\lambda - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Por construcción, si  $\lambda \notin \Lambda$ , entonces  $z_\lambda \notin (x_\lambda - \frac{1}{2}, x_\lambda + \frac{1}{2})$ , lo que implica que  $\lambda \notin \Lambda_1$ . Se deduce que  $\Lambda_1 \subset \Lambda$ . Además, cuando  $\lambda \in \Lambda_1$  o  $\lambda \notin \Lambda$ , es inmediato que  $y_\lambda = x_\lambda$ . Por último, si  $\lambda \in \Lambda - \Lambda_1$  entonces

$$z_\lambda \in \left[ x_\lambda - \frac{1}{2}, x_\lambda + \frac{1}{2} \right] - \left( x_\lambda - \frac{1}{2}, x_\lambda + \frac{1}{2} \right),$$

de donde  $y_\lambda \in \{x_\lambda - 1, x_\lambda\}$ . Por el lema 1.1, la celda  $s_1 = s(y, \Lambda_1)$  es una cara de  $s$ . Además, si  $\lambda \in \Lambda_1$  entonces  $y_\lambda = x_\lambda$  y  $z_\lambda \in (y_\lambda - \frac{1}{2}, y_\lambda + \frac{1}{2})$ , mientras que si  $\lambda \notin \Lambda_1$  entonces, cuando  $z_\lambda = x_\lambda + \frac{1}{2}$ , se cumple que  $z_\lambda = y_\lambda + \frac{1}{2}$ , mientras que si  $z_\lambda = x_\lambda - \frac{1}{2}$  entonces  $z_\lambda = y_\lambda + 1 - \frac{1}{2} = y_\lambda + \frac{1}{2}$ . En consecuencia,  $z \in |s_1|$ .  $\square$

El siguiente resultado proporciona una descripción explícita de la realización poliédrica de la estrella de una celda.

**Teorema 1.7.** *Si*

$$s = s(x, \Lambda)$$

*entonces*

$$|\text{str}(s)| = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

*con*

$$A_\lambda = \begin{cases} (x_\lambda - \frac{1}{2}, x_\lambda + \frac{1}{2}) & \text{si } \lambda \in \Lambda \\ (x_\lambda - \frac{1}{2}, x_\lambda + \frac{3}{2}) & \text{si } \lambda \notin \Lambda \end{cases}$$

*Demostración.* Dado  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in |\text{str}(s)|$ , existe una celda

$$s' = s(y, \Lambda')$$

tal que  $s \subset s'$  y  $z \in |s'|$ . Escribiendo

$$s' = I'_1 \times I'_2 \times \dots \times I'_n$$

con

$$I'_\lambda = \begin{cases} \{y_\lambda - \frac{1}{2}, y_\lambda + \frac{1}{2}\} & \text{si } \lambda \in \Lambda', \\ \{y_\lambda + \frac{1}{2}\} & \text{si } \lambda \notin \Lambda' \end{cases}$$

se deduce, por el lema 1.1, que si  $\lambda \notin \Lambda'$ , entonces  $z_\lambda = x_\lambda + \frac{1}{2}$ , mientras que si  $\lambda \in \Lambda$ , entonces  $x_\lambda = y_\lambda$  y  $z_\lambda \in (x_\lambda - \frac{1}{2}, x_\lambda + \frac{1}{2})$ . Por otra parte, si  $\lambda \in \Lambda' - \Lambda$  entonces  $x_\lambda \in \{y_\lambda - 1, y_\lambda\}$  y  $z_\lambda \in (y_\lambda - \frac{1}{2}, y_\lambda + \frac{1}{2})$ , lo que implica que  $z_\lambda \in (x_\lambda + \frac{1}{2}, x_\lambda + \frac{3}{2})$  o  $z_\lambda \in (x_\lambda - \frac{1}{2}, x_\lambda + \frac{1}{2})$ . En cualquier caso,  $z_\lambda \in A_\lambda$ .

Supóngase ahora que  $z \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ . Se define

$$\Lambda' = \left\{ \lambda : z_\lambda \in \left( x_\lambda - \frac{1}{2}, x_\lambda + \frac{3}{2} \right) \text{ y } z_\lambda \neq x_\lambda + \frac{1}{2} \right\}.$$

Además, sea

$$y_\lambda = \begin{cases} x_\lambda & \text{si } z_\lambda \in (x_\lambda - \frac{1}{2}, x_\lambda + \frac{1}{2}), \\ x_\lambda + 1 & \text{si } z_\lambda \in (x_\lambda + \frac{1}{2}, x_\lambda + \frac{3}{2}). \end{cases}$$

Si  $\lambda \in \Lambda$ , entonces, como  $z_\lambda \in (x_\lambda - \frac{1}{2}, x_\lambda + \frac{1}{2})$ , se tiene que  $\lambda \in \Lambda'$ , por lo que  $\Lambda \subset \Lambda'$ . También se deduce que  $x_\lambda = y_\lambda$  cuando  $\lambda \in \Lambda$ . En el caso  $\lambda \notin \Lambda'$ , se tiene que  $z_\lambda = x_\lambda + \frac{1}{2}$  y por tanto,  $x_\lambda = y_\lambda$ . Si  $\lambda \in \Lambda' - \Lambda$ , entonces  $z_\lambda \in (x_\lambda - \frac{1}{2}, x_\lambda + \frac{3}{2})$  y  $z_\lambda \neq x_\lambda + \frac{1}{2}$ ; cuando  $z_\lambda \in (x_\lambda - \frac{1}{2}, x_\lambda + \frac{1}{2}]$ ,  $x_\lambda = y_\lambda$ , mientras que si  $z_\lambda \in (x_\lambda + \frac{1}{2}, x_\lambda + \frac{3}{2})$ , entonces  $x_\lambda = y_\lambda - 1$ . Con esto queda probado que  $s$  es una cara de  $s'$  y por tanto,  $s' \in \text{str}(s)$ .

Para mostrar que  $z \in |s'|$ , nótese que si  $\lambda \in \Lambda'$  y  $z_\lambda \in (x_\lambda - \frac{1}{2}, x_\lambda + \frac{1}{2})$  entonces  $y_\lambda = x_\lambda$  y  $z_\lambda \in (y_\lambda - \frac{1}{2}, y_\lambda + \frac{1}{2})$ , mientras que si  $z_\lambda \in (x_\lambda + \frac{1}{2}, x_\lambda + \frac{3}{2})$ , entonces  $y_\lambda = x_\lambda + 1$  y  $z_\lambda \in (y_\lambda - \frac{1}{2}, y_\lambda + \frac{1}{2})$ . Además, si  $\lambda \notin \Lambda'$ , entonces  $z_\lambda = x_\lambda + \frac{1}{2} = y_\lambda + \frac{1}{2}$ .  $\square$

**Teorema 1.8.** *La colección*

$$\{|s| : s \text{ es una celda de } \mathbb{R}^n\}$$

*es localmente finita.*

*Demostración.* Dado  $z \in \mathbb{R}^n$ , por el teorema 1.5, existe una única celda  $s$  tal que  $z \in |s|$ . Por el teorema anterior, el conjunto  $U = |\text{str}(s)|$  es abierto y contiene a  $z$ . Si  $s'$  es una celda cuya realización poliédrica interseca a  $U$ , entonces hay una celda  $s'' \in \text{str}(s)$  tal que  $|s''| \cap |s'| \neq \emptyset$ . Por el corolario 1.5,  $s' = s'' \in \text{str}(s)$ . Como  $\text{str}(s)$  sólo tiene un número finito de elementos, se deduce que  $U$  interseca sólo a un número finito de elementos de la colección dada.  $\square$

Utilizando la realización poliédrica de una celda, a cada complejo cúbico se le asocia un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  que será muy importante para estudiar algunas de sus propiedades.

**Definición 1.12.** Dado un complejo cúbico no vacío  $\mathbf{K}$ , su realización poliédrica es el subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  dado por la unión de las realizaciones poliédricas de sus celdas. Se denota por  $|\mathbf{K}|$ .

Algunas propiedades de la realización poliédrica, relacionadas con las operaciones entre conjuntos, están dadas en el siguiente teorema.

**Teorema 1.9.** Sean  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{L}$  dos complejos cúbicos.

1.  $\mathbf{K} \subset \mathbf{L}$  si, y sólo si,  $|\mathbf{K}| \subset |\mathbf{L}|$ .
2.  $|\mathbf{K} \cup \mathbf{L}| = |\mathbf{K}| \cup |\mathbf{L}|$ .
3.  $|\mathbf{K} \cap \mathbf{L}| = |\mathbf{K}| \cap |\mathbf{L}|$ .
4.  $|\mathbf{K}^c| = |\mathbf{K}|^c$ .
5.  $|\mathbf{K} - \mathbf{L}| = |\mathbf{K}| - |\mathbf{L}|$ .

*Demostración.* 1. Es claro que  $\mathbf{K} \subset \mathbf{L}$  implica  $|\mathbf{K}| \subset |\mathbf{L}|$ . Ahora, si  $|\mathbf{K}| \subset |\mathbf{L}|$ , dada una celda  $s \in \mathbf{K}$ , si  $z \in |s|$ , entonces  $z \in |\mathbf{L}|$  y por tanto existe una celda  $s' \in \mathbf{L}$  tal que  $z \in |s'|$ . Por el teorema 1.5,  $s = s' \in \mathbf{L}$ .

2. Es claro.

3. Es claro.

4. Dado  $z \in |\mathbf{K}^c|$ , existe una celda  $s \in \mathbf{K}^c$  tal que  $z \in |s|$ . Si  $z \in |\mathbf{K}|$  entonces  $z \in |s'|$  para alguna celda  $s' \in \mathbf{K}$ . Con esto,  $s = s'$  por el corolario 1.5, lo cual no es posible. Por tanto,  $z \in |\mathbf{K}|^c$ .

También, si  $z \in |\mathbf{K}|^c$ , como  $z \in |s|$  para alguna celda  $s$  por el teorema 1.5, no es posible que  $s \in \mathbf{K}$ , pues ello implicaría  $z \in |\mathbf{K}|$ . Por tanto,  $z \in |\mathbf{K}^c|$ .

5. Se sigue de 3 y 4.

□

La adherencia de la realización poliédrica de un complejo cúbico se puede describir a partir de la adherencia de las realizaciones poliédricas de sus celdas.

**Teorema 1.10.** *Para cualquier complejo cúbico  $\mathbf{K}$*

$$\overline{|\mathbf{K}|} = \bigcup_{s \in \mathbf{K}} \overline{|s|}.$$

*Demostración.* Por el teorema 1.8,  $\{|s| : s \in \mathbf{K}\}$  es localmente finita. Así,

$$\begin{aligned} \overline{|\mathbf{K}|} &= \overline{\bigcup_{s \in \mathbf{K}} |s|} \\ &= \bigcup_{s \in \mathbf{K}} \overline{|s|} \end{aligned}$$

□

El siguiente teorema da una propiedad de la frontera de la realización poliédrica de un complejo cúbico que será fundamental para establecer propiedades de un complejo cúbico a partir de propiedades topológicas de su realización poliédrica.

**Teorema 1.11.** *Para todo complejo cúbico  $\mathbf{K}$ ,  $\text{Fr}(|\mathbf{K}|) = |\delta(\mathbf{K})|$ .*

*Demostración.* Nótese que

$$\begin{aligned} \text{Fr}(|\mathbf{K}|) &= \overline{|\mathbf{K}|} \cap \overline{|\mathbf{K}|}^c \\ &= \overline{|\mathbf{K}|} \cap \overline{|\mathbf{K}^c|} \\ &= \left( \bigcup_{s' \in \mathbf{K}} \overline{|s'|} \right) \cap \left( \bigcup_{s'' \in \mathbf{K}^c} \overline{|s''|} \right) \\ &= \bigcup_{(s', s'') \in \mathbf{K} \times \mathbf{K}^c} \left( \overline{|s'|} \cap \overline{|s''|} \right). \end{aligned}$$

Si  $s \in \delta(\mathbf{K})$ , hay dos celdas  $s' \in \mathbf{K}$  y  $s'' \in \mathbf{K}^c$  tales que  $s \subset s'$  y  $s \subset s''$ . Por el lema 1.2,  $|s| \subset \overline{|s'|} \cap \overline{|s''|} \subset \text{Fr}(|\mathbf{K}|)$ . Por tanto,  $|\delta(\mathbf{K})| \subset \text{Fr}(|\mathbf{K}|)$ .

Ahora, si  $z \in \text{Fr}(|\mathbf{K}|)$ , existen celdas  $s' \in \mathbf{K}$  y  $s'' \in \mathbf{K}^c$  tales que  $z \in \overline{|s'|} \cap \overline{|s''|}$ . Por el teorema 1.6, hay celdas  $s_1 \subset s'$ ,  $s_2 \subset s''$ , tales que  $z \in |s_1| \cap |s_2|$ . El teorema 1.5 implica que  $s_1 = s_2$  es una celda que es cara de  $\mathbf{K}$  y de  $\mathbf{K}^c$ , es decir,  $s_1 \in \delta(\mathbf{K})$ . Luego,  $z \in |\delta(\mathbf{K})|$ .  $\square$

De acuerdo con la definición 1.9 y el teorema 1.9 y utilizando este teorema, se deducen las siguientes equivalencias entre las propiedades de un complejo cúbico y las propiedades topológicas de su realización poliédrica.

**Teorema 1.12.** *Un complejo cúbico  $\mathbf{K}$  es cerrado si, y sólo si, su realización poliédrica  $|\mathbf{K}|$  es un subconjunto cerrado de  $\mathbb{R}^n$ .*

**Teorema 1.13.** *Un complejo cúbico  $\mathbf{K}$  es abierto si, y sólo si, su realización poliédrica  $|\mathbf{K}|$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ .*

En el siguiente teorema se muestra la relación estrecha entre las propiedades de la adherencia e interior de un complejo cúbico y las correspondientes de su realización poliédrica.

**Teorema 1.14.** *Para todo complejo cúbico  $\mathbf{K}$ :*

1.  $|\overline{\mathbf{K}}| = \overline{|\mathbf{K}|}$ .
2.  $|\mathbf{K}^0| = |\mathbf{K}|^0$ .

*Demostración.* 1.

$$\begin{aligned}
 |\overline{\mathbf{K}}| &= |\mathbf{K} \cup \delta(\mathbf{K})| \\
 &= |\mathbf{K}| \cup |\delta(\mathbf{K})| \\
 &= |\mathbf{K}| \cup \text{Fr}(|\mathbf{K}|) \\
 &= \overline{|\mathbf{K}|}.
 \end{aligned}$$

2.

$$|\mathbf{K}^0| = |\mathbf{K} - \delta(\mathbf{K})|$$

$$\begin{aligned}
&= |\mathbf{K}| - |\delta(\mathbf{K})| \\
&= |\mathbf{K}| - \text{Fr}(|\mathbf{K}|) \\
&= |\mathbf{K}|^0.
\end{aligned}$$

□

Como consecuencia de los teoremas 1.7 y 1.13 se obtiene la siguiente propiedad de la estrella de una celda.

**Teorema 1.15.** *Para toda celda  $s$ , el complejo cúbico  $\text{str}(s)$  es abierto.*

### 1.3. Conexidad de complejos cúbicos

Una propiedad topológica importante de los complejos cúbicos es la de conexidad, ya que es la base para definir diversas características de las imágenes digitales. A fin de definirla, primero se establece una relación de conexidad entre dos celdas de un complejo cúbico.

**Definición 1.13.** *Sea  $\mathbf{K}$  un complejo cúbico no vacío. Dos celdas  $s$  y  $s'$  en  $\mathbf{K}$  están en relación de conexidad en  $\mathbf{K}$  si existe una sucesión de celdas  $s_1 = s, s_2, \dots, s_m = s'$  en  $\mathbf{K}$  tal que  $s_i$  es cara de  $s_{i+1}$  o bien  $s_{i+1}$  es cara de  $s_i$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ .*

Es claro que esta es una relación de equivalencia en  $\mathbf{K}$ . Sus clases de equivalencia son las *componentes conexas* de  $\mathbf{K}$ . Se dice que el complejo cúbico  $\mathbf{K}$  es *conexo* si tiene una única componente conexa.

Para demostrar algunas relaciones entre las propiedades de conexidad de un complejo cúbico y las propiedades de conexidad de su realización poliédrica respecto a la topología usual de  $\mathbb{R}^n$ , se presentan a continuación algunos resultados auxiliares.

El siguiente resultado establece una relación entre dos celdas cuando la unión de sus realizaciones poliédricas es un conjunto conexo.

**Teorema 1.16.** *Si  $s_1$  y  $s_2$  son celdas tales que  $|s_1| \cup |s_2|$  es un conjunto conexo, entonces  $s_1$  es cara de  $s_2$ , o bien,  $s_2$  es cara de  $s_1$ .*



*Demostración.* Supóngase que  $s_1$  y  $s_2$  son como en el lema 1.1 y que  $|s_1| \cup |s_2|$  es conexo. Sea  $\pi_\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  la  $\lambda$ -ésima proyección. Como  $|s_1| \cup |s_2|$  es un conjunto conexo, entonces

$$\pi_\lambda(|s_1| \cup |s_2|) = \pi_\lambda(|s_1|) \cup \pi_\lambda(|s_2|)$$

también es un conjunto conexo.

Si  $\lambda \notin \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ , entonces  $\pi_\lambda(|s_1|) = \{x_\lambda + \frac{1}{2}\}$ ,  $\pi_\lambda(|s_2|) = \{y_\lambda + \frac{1}{2}\}$  y, por tanto, el conjunto  $\{x_\lambda + \frac{1}{2}\} \cup \{y_\lambda + \frac{1}{2}\}$  es conexo, lo cuál sólo es posible si  $x_\lambda = y_\lambda$ .

En el caso  $\lambda \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2$ , al ser

$$\pi_\lambda(|s_1|) \cup \pi_\lambda(|s_2|) = \left(x_\lambda - \frac{1}{2}, x_\lambda + \frac{1}{2}\right) \cup \left(y_\lambda - \frac{1}{2}, y_\lambda + \frac{1}{2}\right),$$

un conjunto conexo, debe cumplirse  $x_\lambda = y_\lambda$ , pues estos son números enteros.

Cuando  $\lambda \in \Lambda_1 - \Lambda_2$ , el conjunto

$$\pi_\lambda(|s_1|) \cup \pi_\lambda(|s_2|) = \left(x_\lambda - \frac{1}{2}, x_\lambda + \frac{1}{2}\right) \cup \left\{y_\lambda + \frac{1}{2}\right\}$$

es conexo, de donde, al ser  $x_\lambda, y_\lambda$  elementos de  $\mathbb{Z}$ , se deduce que  $y_\lambda + \frac{1}{2} = x_\lambda - \frac{1}{2}$  o  $y_\lambda + \frac{1}{2} = x_\lambda + \frac{1}{2}$ .

De forma similar, si  $\lambda \in \Lambda_2 - \Lambda_1$ , entonces  $x_\lambda + \frac{1}{2} = y_\lambda - \frac{1}{2}$  o  $x_\lambda + \frac{1}{2} = y_\lambda + \frac{1}{2}$ .

Supóngase que los conjuntos  $\Lambda_1 - \Lambda_2$  y  $\Lambda_2 - \Lambda_1$  son no vacíos, que  $\mu \in \Lambda_1 - \Lambda_2$  y que  $\nu \in \Lambda_2 - \Lambda_1$ . Nótese que

$$\text{si } z \in |s_1|, \text{ entonces } x_\mu - \frac{1}{2} < z_\mu < x_\mu + \frac{1}{2} \text{ y } z_\nu = x_\nu + \frac{1}{2},$$

mientras que

$$\text{si } z \in |s_2|, \text{ entonces } z_\mu = y_\mu + \frac{1}{2} \text{ y } y_\nu - \frac{1}{2} < z_\nu < y_\nu + \frac{1}{2}.$$

Hay cuatro posibles casos.

Caso 1:  $x_\mu - \frac{1}{2} = y_\mu + \frac{1}{2}$  y  $x_\nu + \frac{1}{2} = y_\nu - \frac{1}{2}$ .

Los conjuntos

$$\begin{aligned}U &= \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n : z_\nu - z_\mu < y_\nu - x_\mu\}, \\V &= \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n : z_\nu - z_\mu > y_\nu - x_\mu\},\end{aligned}$$

son abiertos ajenos no vacíos.

Si  $z \in |s_1|$ , entonces

$$\begin{aligned}z_\nu - z_\mu &< \left(x_\nu + \frac{1}{2}\right) - \left(x_\mu - \frac{1}{2}\right) \\&= y_\nu - \frac{1}{2} - x_\mu + \frac{1}{2} \\&= y_\nu - x_\mu,\end{aligned}$$

es decir,  $z \in U$ .

También, dado  $z \in |s_2|$

$$\begin{aligned}z_\nu - z_\mu &> \left(y_\nu - \frac{1}{2}\right) - \left(y_\mu + \frac{1}{2}\right) \\&= y_\nu - \frac{1}{2} - x_\mu + \frac{1}{2} \\&= y_\nu - x_\mu,\end{aligned}$$

es decir,  $z \in V$

Caso 2:  $x_\mu - \frac{1}{2} = y_\mu + \frac{1}{2}$  y  $x_\nu + \frac{1}{2} = y_\nu + \frac{1}{2}$ . Se consideran los conjuntos

$$\begin{aligned}U &= \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n : z_\nu + z_\mu > x_\mu + y_\nu\}, \\V &= \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n : z_\nu + z_\mu < x_\mu + y_\nu\}.\end{aligned}$$

Cuando  $z \in |s_1|$ ,

$$z_\nu + z_\mu > \left(x_\nu + \frac{1}{2}\right) + \left(x_\mu - \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= y_\nu + \frac{1}{2} + x_\mu - \frac{1}{2} \\
&= x_\mu + y_\nu,
\end{aligned}$$

Para  $z \in |s_2|$ ,

$$\begin{aligned}
z_\nu + z_\mu &< \left(y_\nu + \frac{1}{2}\right) + \left(y_\mu + \frac{1}{2}\right) \\
&= y_\nu + \frac{1}{2} + x_\mu - \frac{1}{2} \\
&= x_\mu + y_\nu,
\end{aligned}$$

Caso 3:  $x_\mu + \frac{1}{2} = y_\mu + \frac{1}{2}$  y  $x_\nu + \frac{1}{2} = y_\nu - \frac{1}{2}$ . Se definen los conjuntos

$$\begin{aligned}
U &= \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n : z_\nu + z_\mu < x_\mu + y_\nu\}, \\
V &= \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n : z_\nu + z_\mu > x_\mu + y_\nu\}.
\end{aligned}$$

Cuando  $z \in |s_1|$ ,

$$\begin{aligned}
z_\nu + z_\mu &< \left(x_\nu + \frac{1}{2}\right) + \left(x_\mu + \frac{1}{2}\right) \\
&= y_\nu - \frac{1}{2} + x_\mu + \frac{1}{2} \\
&= x_\mu + y_\nu,
\end{aligned}$$

Para  $z \in |s_2|$ ,

$$\begin{aligned}
z_\nu + z_\mu &> \left(y_\nu - \frac{1}{2}\right) + \left(y_\mu + \frac{1}{2}\right) \\
&= y_\nu - \frac{1}{2} + x_\mu + \frac{1}{2} \\
&= x_\mu + y_\nu,
\end{aligned}$$

Caso 4:  $x_\mu + \frac{1}{2} = y_\mu + \frac{1}{2}$  y  $x_\nu + \frac{1}{2} = y_\nu + \frac{1}{2}$ .

$$U = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n : z_\nu - z_\mu > y_\nu - x_\mu\},$$

$$V = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n : z_\nu - z_\mu < y_\nu - x_\mu\}.$$

Si  $z \in |s_1|$ , entonces

$$\begin{aligned} z_\nu - z_\mu &> \left(x_\nu + \frac{1}{2}\right) - \left(x_\mu + \frac{1}{2}\right) \\ &= y_\nu + \frac{1}{2} - x_\mu - \frac{1}{2} \\ &= y_\nu - x_\mu. \end{aligned}$$

También, dado  $z \in |s_2|$

$$\begin{aligned} z_\nu - z_\mu &< \left(y_\nu + \frac{1}{2}\right) - \left(y_\mu + \frac{1}{2}\right) \\ &= y_\nu + \frac{1}{2} - x_\mu - \frac{1}{2} \\ &= y_\nu - x_\mu. \end{aligned}$$

Lo anterior muestra que, en cualquiera de los casos,  $U$  y  $V$  son conjuntos abiertos ajenos tales que  $|s_1| \subset U$ ,  $|s_2| \subset V$ , contradiciendo la hipótesis de que  $|s_1| \cup |s_2|$  es conexo .

Se concluye que alguno de los conjuntos  $\Lambda_1 - \Lambda_2$  o  $\Lambda_2 - \Lambda_1$  debe ser vacío. Si  $\Lambda_1 - \Lambda_2 = \emptyset$ , entonces  $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$  y, por lo mostrado anteriormente,  $x_\lambda = y_\lambda$  si  $\lambda \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \Lambda_1$ ,  $x_\lambda = y_\lambda$  si  $\lambda \notin \Lambda_2$  y  $x_\lambda \in \{y_\lambda - 1, y_\lambda\}$  si  $\lambda \in \Lambda_2 - \Lambda_1$ . Esto muestra que  $s_1 \subset s_2$ .

De forma similar, si  $\Lambda_2 - \Lambda_1 = \emptyset$ , entonces  $s_2 \subset s_1$ .  $\square$

En el siguiente teorema se demuestra la convexidad de la realización poliédrica de la unión de dos celdas cuando una de ellas es cara de la otra.

**Teorema 1.17.** *Si  $s_1$  es cara de  $s_2$ , entonces  $|s_1| \cup |s_2|$  es un conjunto convejo.*

*Demostración.* La realización poliédrica de una celda está definida como un producto cartesiano de conjuntos convexos y por lo tanto es un

conjunto convexo. Basta demostrar que si  $u \in |s_1|$ ,  $v \in |s_2|$  y  $t \in (0, 1)$ , entonces

$$tu + (1 - t)v \in |s_1| \cup |s_2|.$$

Supóngase que  $s_1$  y  $s_2$  están definidas como en el lema 1.1. Escribiendo

$$u = (u_1, \dots, u_n), v = (v_1, \dots, v_n),$$

se tiene que, en el caso de  $u$

$$\begin{aligned} x_\lambda - \frac{1}{2} < u_\lambda < x_\lambda + \frac{1}{2} & \text{ si } \lambda \in \Lambda_1 \\ u_\lambda = x_\lambda + \frac{1}{2} & \text{ si } \lambda \notin \Lambda_1 \end{aligned}$$

y, en el caso de  $v$

$$\begin{aligned} y_\lambda - \frac{1}{2} < v_\lambda < y_\lambda + \frac{1}{2} & \text{ si } \lambda \in \Lambda_2 \\ v_\lambda = y_\lambda + \frac{1}{2} & \text{ si } \lambda \notin \Lambda_2 \end{aligned}$$

Cuando  $\lambda \in \Lambda_1$ , entonces  $\lambda \in \Lambda_2$ ,  $x_\lambda = y_\lambda$  y

$$tu_\lambda + (1 - t)v_\lambda \in \left(x_\lambda - \frac{1}{2}, x_\lambda + \frac{1}{2}\right) = \left(y_\lambda - \frac{1}{2}, y_\lambda + \frac{1}{2}\right).$$

En el caso  $\lambda \notin \Lambda_2$ , se tiene que  $\lambda \notin \Lambda_1$ ,  $x_\lambda = y_\lambda$  y, por tanto,

$$tu_\lambda + (1 - t)v_\lambda = x_\lambda + \frac{1}{2}.$$

Por último, si  $\lambda \in \Lambda_2 - \Lambda_1$ , entonces, dado que  $x_\lambda \in \{y_\lambda - 1, y_\lambda\}$ , se tiene que  $u_\lambda \in \{y_\lambda - \frac{1}{2}, y_\lambda + \frac{1}{2}\}$  y, como  $t \in (0, 1)$

$$tu_\lambda + (1 - t)v_\lambda \in \left(y_\lambda - \frac{1}{2}, y_\lambda + \frac{1}{2}\right).$$

Se concluye que  $tu + (1 - t)v \in |s_1| \cup |s_2|$ . □

Utilizando estos resultados, se obtienen relaciones entre la conexidad de un complejo cúbico y la conexidad de su realización poliédrica.

**Teorema 1.18.** *Si  $\mathbf{K}$  es un complejo cúbico conexo, entonces  $|\mathbf{K}|$  es un conjunto arco-conexo.*

*Demostración.* Dados  $x, y$  en  $|\mathbf{K}|$ , existen celdas  $s, s'$  en  $\mathbf{K}$  tales que  $x \in |s|$  y  $y \in |s'|$ . Como  $\mathbf{K}$  es conexo, hay una sucesión  $s_1 = s, s_2, \dots, s_m = s'$  de celdas en  $\mathbf{K}$  tales que  $s_i$  es cara de  $s_{i+1}$  o  $s_{i+1}$  es cara de  $s_i$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ . Por el teorema 1.17, el conjunto

$$|s_1| \cup |s_2| \cup \dots \cup |s_m|$$

es arco-conexo, está contenido en  $|\mathbf{K}|$  y los elementos  $x, y$  pertenecen a él. En consecuencia,  $|\mathbf{K}|$  es arco-conexo.  $\square$

También es posible demostrar la conexidad de un complejo cúbico a partir de la conexidad de su realización poliédrica.

**Teorema 1.19.** *Si  $\mathbf{K}$  es un complejo cúbico tal que  $|\mathbf{K}|$  es un conjunto conexo, entonces  $\mathbf{K}$  es conexo.*

*Demostración.* Dado  $x \in |\mathbf{K}|$ , sea  $A$  el conjunto de los elementos  $y \in |\mathbf{K}|$  para los cuales existen celdas  $s_1, \dots, s_m \in \mathbf{K}$  tales que  $x \in |s_1|$ ,  $y \in |s_m|$  y  $s_i$  es cara de  $s_{i+1}$  o  $s_{i+1}$  es cara de  $s_i$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ .

Para mostrar que  $A$  es abierto en  $|\mathbf{K}|$ , sea  $y \in A$ . Por el teorema 1.7, el conjunto  $U = |\text{str}(s_m)|$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$ . Si  $z \in U \cap |\mathbf{K}|$ , existe una celda  $s_{m+1}$  en  $\text{str}(s_m)$  tal que  $z \in |s_{m+1}|$  y hay una celda  $s'$  en  $\mathbf{K}$  con  $z \in |s'|$ . Por el teorema 1.5,  $s_{m+1} = s' \in \mathbf{K}$  y  $s_m$  es cara de  $s_{m+1}$ . Se concluye que  $z \in A$ . Así,  $A$  es un conjunto abierto en  $|\mathbf{K}|$ .

Ahora, si  $y \in |\mathbf{K}| - A$ , sea  $s \in \mathbf{K}$  tal que  $y \in |s|$ . El conjunto  $U = |\text{str}(s)|$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$ . Se afirma que  $U \cap |\mathbf{K}| \subset |\mathbf{K}| - A$ . En caso contrario, hay un elemento  $z$  que pertenece a  $U \cap |\mathbf{K}|$  y también pertenece al conjunto  $A$ . Por la definición de  $A$ , existe una sucesión de celdas  $s_1, \dots, s_m \in \mathbf{K}$  tales que  $x \in |s_1|$ ,  $z \in |s_m|$  y  $s_i$  es cara de  $s_{i+1}$  o  $s_{i+1}$  es cara de  $s_i$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ . Razonando como antes, hay una celda  $s' \in \mathbf{K} \cap \text{str}(s)$  tal que  $z \in |s'|$ . Se deduce que  $s_m = s' \in \mathbf{K}$  y  $s_m$  es cara de  $s$ . Definiendo  $s_{m+1} = s$ , se concluye que

$y \in A$ , contradiciendo la hipótesis inicial. En consecuencia,  $A$  es cerrado en  $|\mathbf{K}|$ .

Puesto que  $x \in A$ , por ser  $|\mathbf{K}|$  un conjunto conexo se deduce que  $A = |\mathbf{K}|$ . Luego,  $\mathbf{K}$  es conexo.  $\square$

**Teorema 1.20.** *Sea  $\mathbf{K}$  un complejo cúbico y  $\mathbf{L}$  una componente conexa de  $\mathbf{K}$ . Entonces  $|\mathbf{L}|$  es una componente arco-conexa de  $|\mathbf{K}|$ .*

*Demostración.* Por el teorema 1.18,  $|\mathbf{L}|$  es un subconjunto arco-conexo de  $|\mathbf{K}|$ . Sea  $C$  un subconjunto arco-conexo de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $|\mathbf{L}| \subset C \subset |\mathbf{K}|$ . Se define el complejo cúbico

$$\mathbf{K}' = \{s \in \mathbf{K} : |s| \cap C \neq \emptyset\}.$$

Es claro que  $\mathbf{L} \subset \mathbf{K}'$ . Además, si  $x \in C$ , entonces  $x \in |s|$  para alguna celda  $s \in \mathbf{K}$ , por lo que  $C \subset |\mathbf{K}'|$ . Se deduce que

$$|\mathbf{K}'| = C \cup |\mathbf{K}'| = \bigcup_{s \in \mathbf{K}'} (|s| \cup C).$$

Cada uno de los conjuntos en esta unión es arco-conexo y como

$$C \subset \bigcap_{s \in \mathbf{K}'} (|s| \cup C)$$

entonces  $|\mathbf{K}'|$  es un conjunto arco-conexo que contiene a  $C$ . Por el teorema 1.19,  $\mathbf{K}'$  es conexo. Puesto que  $\mathbf{L}$  es una componente conexa de  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{L} \subset \mathbf{K}' \subset \mathbf{K}$ , se concluye que  $\mathbf{K}' = \mathbf{L}$ . Como  $C \subset |\mathbf{K}'|$ , entonces  $C = |\mathbf{L}|$ . Luego,  $C$  es una componente arco-conexa de  $|\mathbf{K}|$ .  $\square$

Una consecuencia muy importante de estos resultados está dada en el siguiente teorema.

**Teorema 1.21.** *Sea  $\mathbf{K}$  un complejo cúbico y  $C$  una componente arco-conexa de  $|\mathbf{K}|$ . Existe un subcomplejo  $\mathbf{L}$  de  $\mathbf{K}$  tal que*

1.  $\mathbf{L}$  es una componente conexa de  $\mathbf{K}$ .

$$2. |\mathbf{L}| = C$$

*Demostración.* Dado  $x \in C$ , existe una celda  $s \in \mathbf{K}$  tal que  $x \in |s|$ . Hay una componente conexa  $\mathbf{L}$  de  $\mathbf{K}$  tal que  $s \in \mathbf{L}$ . Por el teorema anterior,  $|\mathbf{L}|$  es una componente arco-conexa de  $|\mathbf{K}|$  que contiene a  $x$  y por lo tanto  $|\mathbf{L}| = C$ .  $\square$

**Teorema 1.22.** *Si  $\mathbf{K}$  es un complejo cúbico y  $C$  es una componente conexa de  $|\mathbf{K}|$ , entonces existe un subcomplejo conexo  $\mathbf{L}$  de  $\mathbf{K}$  tal que  $|\mathbf{L}| = C$ .*

*Demostración.* Sea

$$\mathbf{L} = \{s \in \mathbf{K} : |s| \cap C \neq \emptyset\}.$$

Como  $C \subset |\mathbf{K}|$ , se tiene que

$$C \subset \bigcup_{s \in \mathbf{L}} |s|$$

y, por lo tanto,

$$|\mathbf{L}| = \bigcup_{s \in \mathbf{L}} (|s| \cup C).$$

Al ser  $|s| \cup C$  un conjunto conexo para cada  $s \in \mathbf{L}$ , se deduce que  $|\mathbf{L}|$  es un conjunto conexo. El teorema 1.19 implica que  $\mathbf{L}$  es conexo. Puesto que  $C$  es una componente conexa de  $|\mathbf{K}|$  y  $C \subset |\mathbf{L}|$ , se obtiene  $C = |\mathbf{L}|$ .  $\square$

**Corolario 1.6.** *En un complejo cúbico, las componentes conexas de su realización poliédrica coinciden con sus componentes arco-conexas.*

**Corolario 1.7.** *Dado un complejo cúbico  $\mathbf{K}$ , la función que a cada componente conexa  $\mathbf{L}$  de  $\mathbf{K}$  le asigna su realización poliédrica  $|\mathbf{L}|$  es una biyección entre el conjunto de componentes conexas de  $\mathbf{K}$  y el conjunto de componentes arco-conexas de  $|\mathbf{K}|$ .*

Este resultado permite determinar el número de componentes conexas de un complejo cúbico utilizando las componentes arco-conexas de



su realización poliédrica. Esto último puede hacerse empleando grupos de homología.

## 1.4. Grupos de homología

La realización poliédrica de un complejo cúbico es fundamental para establecer la siguiente definición de los grupos de homología y los números de Betti de un complejo cúbico arbitrario.

**Definición 1.14.** *Dado un complejo cúbico  $\mathbf{K}$ , su  $m$ -ésimo grupo de homología se define como*

$$H_m(\mathbf{K}) = H_m(|\mathbf{K}|)$$

donde  $H_m(|\mathbf{K}|)$  es el  $m$ -ésimo grupo de homología singular de la realización poliédrica de  $\mathbf{K}$ . Si estos grupos son finitamente generados, el  $m$ -ésimo número de Betti de  $\mathbf{K}$  es igual al rango de  $H_m(|\mathbf{K}|)$  y se denota por  $\beta_m(\mathbf{K})$ .

En el caso de que  $\mathbf{K}$  sea un complejo cúbico cerrado en  $\mathbb{R}^n$ , estos grupos coinciden con los grupos de homología cúbica.

Es sabido que el 0-número de Betti de  $|\mathbf{K}|$  es igual al número de componentes arco-conexas de este subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ . Utilizando el corolario 1.7 se deduce el siguiente resultado.

**Teorema 1.23.** *Para cualquier complejo cúbico  $\mathbf{K}$ , el 0-número de Betti  $\beta_0(\mathbf{K})$  coincide con el número de componentes conexas del complejo cúbico  $\mathbf{K}$ .*

**Definición 1.15.** *Dado un complejo cúbico  $\mathbf{K}$  cuyos grupos de homología sean finitamente generados, su característica de Euler se define como*

$$\chi(\mathbf{K}) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \beta_m(\mathbf{K}).$$

De acuerdo con las definiciones anteriores,

$$\chi(\mathbf{K}) = \chi(|\mathbf{K}|).$$

Se demuestra que si  $\alpha_k(\mathbf{K})$  es el número de  $k$ -celdas de  $\mathbf{K}$ , entonces, para un complejo cúbico cerrado

$$\chi(\mathbf{K}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \alpha_k(\mathbf{K}).$$

En el caso de que  $\mathbf{K}$  sea un complejo cúbico abierto, las demostraciones en [24] pueden generalizarse para cualquier valor de  $n$  a fin de obtener una fórmula para calcular su característica de Euler a partir del número de celdas de cada dimensión.

**Definición 1.16.** *Un complejo cúbico en  $\mathbb{R}^n$  es homogéneo  $k$ -dimensional si cualquiera de sus celdas es cara de alguna  $k$ -celda del complejo.*

Por ejemplo, si  $\mathbf{K}$  es un complejo cúbico abierto en  $\mathbb{R}^n$  entonces, dada una celda  $s = s(x, \Lambda) \in \mathbf{K}$ , por el corolario 1.3,  $\text{str}(s) \subset \mathbf{K}$ , de donde la  $n$ -celda  $s(x)$  pertenece a  $\mathbf{K}$ , pues  $s(x, \Lambda) \subset s(x)$ . Así,  $\mathbf{K}$  es homogéneo  $n$ -dimensional.

El siguiente teorema proporciona otros ejemplos de complejos cúbicos homogéneos.

**Teorema 1.24.** *Si  $\mathbf{K}$  es un complejo cúbico abierto distinto de  $\emptyset$  y de  $|\mathbb{Z}^n|$ , su adherencia es un complejo cúbico homogéneo  $n$ -dimensional y su frontera es un complejo cúbico homogéneo  $(n - 1)$ -dimensional.*

*Demostración.* Si  $s \in \overline{\mathbf{K}}$ , existe una celda  $s' \in \mathbf{K}$  tal que  $s$  es cara de  $s'$ . Al ser  $\mathbf{K}$  homogéneo  $n$ -dimensional,  $s'$  es cara de una  $n$ -celda en  $\mathbf{K}$ . Así,  $s$  es cara de una  $n$ -celda en  $\mathbf{K}$ .

Ahora, dada una celda  $s = s(x, \Lambda) \in \delta(\mathbf{K})$  hay una celda  $s' = s(y, \Lambda') \in \mathbf{K}$  tal que  $s \subset s'$ . Por la observación 1.2,  $\Lambda$  tiene a lo más  $n - 1$  elementos. Eligiendo  $\mu \notin \Lambda$ , el conjunto  $\Lambda'' = \{1, \dots, n\} - \{\mu\}$

tiene  $n - 1$  elementos y la  $(n - 1)$ -celda  $s(x, \Lambda'')$  contiene a  $s'$ . Al ser  $\mathbf{K}$  abierto,  $s(x, \Lambda'') \in \mathbf{K}$  y, por construcción,  $s$  es cara de  $s(x, \Lambda'')$ .  $\square$

**Definición 1.17.** *Un complejo cúbico  $\mathbf{L}$  es una pseudovariación  $k$ -dimensional si*

1.  $\mathbf{L}$  es homogéneo  $k$ -dimensional,
2. Cualquier  $(k - 1)$ -celda de  $\mathbf{L}$  es cara exactamente de dos  $k$ -celdas en  $\mathbf{L}$ ,
3. Para cualquier par de  $k$ -celdas  $s$  y  $s'$  pertenecientes a la misma componente conexa de  $\mathbf{L}$ , existe una sucesión  $s_1 = s, \dots, s_m = s'$  de  $k$ -celdas en  $\mathbf{L}$  tales que  $s_i$  y  $s_{i+1}$  tienen una  $(k - 1)$ -celda de  $\mathbf{L}$  como cara común, para  $i = 1, \dots, m - 1$ .

A fin de construir ejemplos de complejos cúbicos de este tipo, se probarán los siguientes resultados auxiliares.

**Lema 1.3.** *Sean  $x, y \in \mathbb{Z}^n$  dos elementos distintos. Son equivalentes*

1. Las  $n$ -celdas  $s(x)$  y  $s(y)$  tienen una  $(n - 1)$ -celda común.
2. Existe  $\mu \in \{1, \dots, n\}$  tal que

$$\begin{aligned} x_\lambda &= y_\lambda & \text{si } \lambda \neq \mu \\ y_\mu &\in \{x_\mu - 1, x_\mu + 1\}. \end{aligned}$$

*Demostración.* Supóngase primero que  $s(z, \Lambda)$  es una  $(n - 1)$ -celda contenida en  $s(x)$  y en  $s(y)$ . Existe  $\mu \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $\Lambda = \{1, \dots, n\} - \{\mu\}$ .

Por el lema 1.1

$$\begin{aligned} z_\lambda &= x_\lambda & \text{si } \lambda \neq \mu, \\ z_\lambda &= y_\lambda & \text{si } \lambda \neq \mu, \\ z_\mu &\in \{x_\mu - 1, x_\mu\}, \\ z_\mu &\in \{y_\mu - 1, y_\mu\}. \end{aligned}$$

Esto implica que  $x_\lambda = y_\lambda$  si  $\lambda \neq \mu$ . Como  $x \neq y$ , entonces  $x_\mu \neq y_\mu$ . Las condiciones anteriores sobre  $z_\mu$  implican, analizando los 4 posibles casos, que  $y_\mu \in \{x_\mu - 1, x_\mu + 1\}$ .

Ahora, si se cumplen las condiciones en (2), definiendo  $\Lambda = \{1, \dots, n\} - \{\mu\}$ , se deduce, por el lema 1.1, que  $s(y, \Lambda)$  es una  $(n-1)$ -celda contenida en  $s(x)$  y en  $s(y)$ .  $\square$

**Lema 1.4.** Sean  $x, y \in \mathbb{Z}^n$  distintos y tales que las  $n$ -celdas  $s(x)$  y  $s(y)$  contienen a una  $k$ -celda  $s(u, \Lambda)$ . Existe una sucesión de  $n$ -celdas

$$s_0 = s(x), \dots, s_m = s(y)$$

tal que

1.  $s(u, \Lambda) \subset s_i$  para todo  $i = 1, \dots, m$ ,
2.  $s_i$  y  $s_{i+1}$  tienen una  $(n-1)$ -celda como cara común, para  $i = 0, \dots, m-1$ .

*Demostración.* Como  $x \neq y$ ,  $k \leq n-1$ . Por el lema 1.1, se cumple

$$\begin{aligned} x_\lambda = u_\lambda = y_\lambda & \quad \text{si } \lambda \in \Lambda, \\ u_\lambda \in \{x_\lambda - 1, x_\lambda\} & \quad \text{si } \lambda \notin \Lambda, \\ u_\lambda \in \{y_\lambda - 1, y_\lambda\} & \quad \text{si } \lambda \notin \Lambda. \end{aligned}$$

Las dos últimas condiciones implican que

$$y_\lambda \in \{x_\lambda - 1, x_\lambda, x_\lambda + 1\} \quad \text{si } \lambda \notin \Lambda.$$

Se define

$$\Lambda' = \{\lambda : x_\lambda = y_\lambda\}.$$

Sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  los enteros entre 1 y  $n$  que no pertenecen a  $\Lambda'$ . Definiendo  $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ , con

$$\begin{aligned} x_\lambda^{(1)} &= x_\lambda \quad \text{si } \lambda \neq \lambda_1 \\ x_{\lambda_1}^{(1)} &= y_{\lambda_1} \end{aligned}$$

se cumple, por el lema anterior, que  $s_1 = s(x_1^{(1)})$  es una  $n$ -celda que tiene en común con  $s(x)$  una  $(n - 1)$ -celda. Además, dado que  $u_{\lambda_1} \in \{y_{\lambda_1} - 1, y_{\lambda_1}\}$ , también se tiene que  $s(u, \Lambda) \subset s_1$ .

De forma similar se define  $x^{(2)} = (x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)})$ , con

$$\begin{aligned} x_{\lambda}^{(2)} &= x_{\lambda}^{(1)} & \text{si } \lambda \neq \lambda_2 \\ x_{\lambda_2}^{(2)} &= y_{\lambda_2}. \end{aligned}$$

Nótese que  $x_{\lambda_1}^{(2)} = y_{\lambda_1}$ . La  $n$ -celda  $s_2 = s(x^{(2)})$  tiene una  $(n - 1)$ -celda como cara común con  $s_1$  y

$$x_{\lambda}^{(2)} = y_{\lambda} \text{ si } \lambda \in \Lambda' \cup \{\lambda_1, \lambda_2\}.$$

También se tiene que  $s(u, \Lambda) \subset s_2$ .

Continuando el procedimiento, se obtiene una sucesión de  $n$ -celdas  $\{s_i\}_{i=0}^m$ , en la que  $s_i = s(x^{(i)})$ , con

$$x_{\lambda}^{(i)} = y_{\lambda} \text{ si } \lambda \in \Lambda' \cup \{\lambda_1, \dots, \lambda_i\},$$

las celdas  $s_i$  y  $s_{i+1}$  tienen una  $(n - 1)$ -celda como cara común y  $s(u, \Lambda) \subset s_i$  para todo  $i$ . La prueba se concluye observando que  $x^{(m)} = y$ .  $\square$

**Teorema 1.25.** *Todo complejo cúbico abierto es una pseudovariedad  $n$ -dimensional.*

*Demostración.* Sea  $\mathbf{K}$  un complejo cúbico abierto. Ya se mostró que  $\mathbf{K}$  es homogéneo  $n$ -dimensional.

Si  $s$  es una  $(n - 1)$ -celda en  $\mathbf{K}$ , entonces, por el teorema 1.3, las dos  $n$ -celdas que están en  $\text{str}(s)$  son las únicas que contienen a  $s$  como cara común y, dado que  $\mathbf{K}$  es abierto, pertenecen a  $\mathbf{K}$ .

Ahora, si  $s$  y  $s'$  son dos  $n$ -celdas que están en la misma componente conexa de  $\mathbf{K}$ , existe una sucesión de celdas en  $\mathbf{K}$ , digamos  $s'_0 = s, s'_1, \dots, s'_p = s'$  tales que  $s'_i$  es cara de  $s'_{i+1}$  o  $s'_{i+1}$  es cara de  $s'_i$ . Para cada  $i$  hay una  $n$ -celda  $s_i$  que contiene a  $s'_i$ , y como  $\mathbf{K}$  es abierto,  $s_i \in \mathbf{K}$ .

Además,  $s_0 = s$  y  $s_m = s'$  y las  $n$ -celdas  $s_i$  y  $s_{i+1}$  tienen una cara común. Por el lema anterior, esta sucesión puede extenderse a una sucesión de  $n$ -celdas en  $\mathbf{K}$ , digamos  $s_0 = s, \dots, s_m = s'$ , en la que  $s_i$  y  $s_{i+1}$  tiene una  $(n-1)$ -celda como cara común.  $\square$

Utilizando un argumento similar se deduce el siguiente resultado.

**Teorema 1.26.** *Si  $\mathbf{K}$  es un complejo cúbico abierto, entonces  $\overline{\mathbf{K}}$  es una pseudovariación  $n$ -dimensional.*

**Teorema 1.27.** *Sea  $(\mathbf{K}, \mathbf{L})$  un par de complejos cúbicos cerrados finitos tales que el complejo  $\mathbf{K} - \mathbf{L}$  es una pseudovariación  $n$ -dimensional. Entonces*

$$\chi(|\mathbf{K} - \mathbf{L}|) = (-1)^n(\chi(\mathbf{K}) - \chi(\mathbf{L})).$$

*Demostración.* Las hipótesis implican que la realización poliédrica  $|\mathbf{K} - \mathbf{L}| = |\mathbf{K}| - |\mathbf{L}|$  es una  $n$ -variedad. Aplicando la dualidad de Poincaré-Lefschetz, se obtiene

$$H_q(|\mathbf{K}| - |\mathbf{L}|) = H^{n-q}(|\mathbf{K}|, |\mathbf{L}|)$$

para cada  $q$ . Puesto que  $\mathbf{K}$  es finito, los grupos  $H_i(|\mathbf{K}|, |\mathbf{L}|)$  tienen rango finito y, por la fórmula de los coeficientes universales, se tiene

$$\text{rank} H_i(|\mathbf{K}|, |\mathbf{L}|) = \text{rank} H^i(|\mathbf{K}|, |\mathbf{L}|).$$

Definiendo  $\beta_i = \text{rank} H_i(|\mathbf{K} - \mathbf{L}|)$  y  $\beta'_i = \text{rank} H_i(|\mathbf{K}|, |\mathbf{L}|)$ , se cumple que  $\beta_i = \beta'_{n-i}$  y por tanto

$$\begin{aligned} \chi(|\mathbf{K} - \mathbf{L}|) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \beta_i \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \beta'_{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \beta'_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^n \sum_{i=0}^n (-1)^i \beta'_i \\
&= (-1)^n \chi(|\mathbf{K}|, |\mathbf{L}|).
\end{aligned}$$

La prueba se concluye observando que

$$\chi(|\mathbf{K}|, |\mathbf{L}|) = \chi(|\mathbf{K}|) - \chi(|\mathbf{L}|) = \chi(\mathbf{K}) - \chi(\mathbf{L}),$$

puesto que  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{L}$  son complejos cúbicos cerrados.  $\square$

**Teorema 1.28.** *Sea  $\mathbf{M}$  un complejo cúbico que es una  $n$ -seudovariiedad finita y  $\mathbf{K}$  un subcomplejo de  $\mathbf{M}$  que es cerrado.*

1. *Si  $\mathbf{M}$  es un complejo cerrado, entonces*

$$\chi(|\mathbf{M} - \mathbf{K}|) = (-1)^n (\chi(\mathbf{M}) - \chi(\mathbf{K}))$$

2. *Si  $\mathbf{M}$  es un complejo abierto, entonces*

$$\chi(|\mathbf{M} - \mathbf{K}|) = \chi(\mathbf{M}) - (-1)^n \chi(\mathbf{K}).$$

*Demostración.* 1. En este caso, las hipótesis garantizan que  $\mathbf{M} - \mathbf{K}$  es una  $n$ -seudovariiedad y se aplica el teorema anterior.

2. Sea  $\mathbf{L} = \mathbf{K} \cup \delta(\mathbf{M})$ . Como  $\mathbf{M}$  es un complejo abierto,  $\overline{\mathbf{M}} - \mathbf{L} = \mathbf{M} - \mathbf{K}$ . Por el teorema anterior

$$\begin{aligned}
\chi(|\mathbf{M} - \mathbf{K}|) &= \chi(|\overline{\mathbf{M}} - \mathbf{L}|) \\
&= (-1)^n (\chi(\overline{\mathbf{M}}) - \chi(\mathbf{K} \cup \delta(\mathbf{M}))).
\end{aligned}$$

Puesto que  $\mathbf{K}$  y  $\delta(\mathbf{M})$  son cerrados y  $\mathbf{K} \cap \delta(\mathbf{M}) = \emptyset$ ,

$$\chi(\mathbf{K} \cup \delta(\mathbf{M})) = \chi(\mathbf{K}) + \chi(\delta(\mathbf{M})).$$

Por otra parte, al ser  $\mathbf{M}$  abierto,

$$\begin{aligned}\chi(\mathbf{M}) &= \chi(|\overline{\mathbf{M}} - \delta(\mathbf{M})|) \\ &= (-1)^n(\chi(\overline{\mathbf{M}}) - \chi(\delta(\mathbf{M}))).\end{aligned}$$

De estos resultados se deduce la igualdad deseada. □

**Teorema 1.29.** *Si  $\mathbf{K}$  es un complejo cúbico abierto finito*

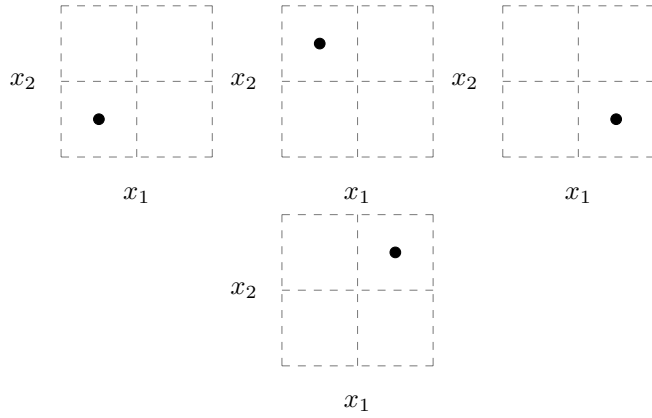
$$\chi(\mathbf{K}) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \alpha_{n-j}(\mathbf{K}).$$

*Demostración.* La hipótesis implica que  $\mathbf{K}$  es una  $n$ -seudovariedad, y como  $\mathbf{K} = \overline{\mathbf{K}} - \delta(\mathbf{K})$ ,

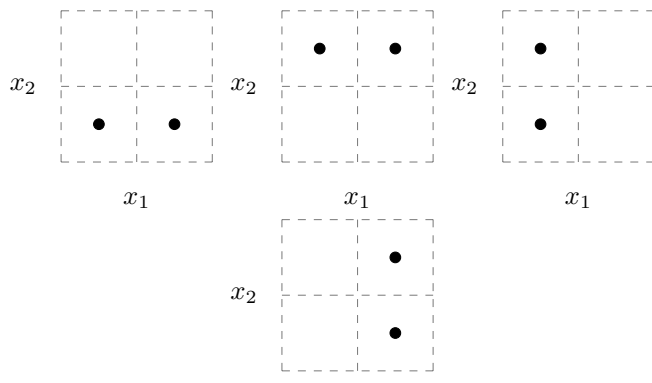
$$\begin{aligned}\chi(|\mathbf{K}|) &= (-1)^n(\chi(\overline{\mathbf{K}}) - \chi(\delta(\mathbf{K}))) \\ &= (-1)^n \sum_{i=0}^n (-1)^i \alpha_i(\mathbf{K}) \\ &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \alpha_{n-j}(\mathbf{K}).\end{aligned}$$

□



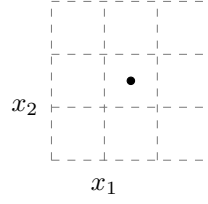


(a)

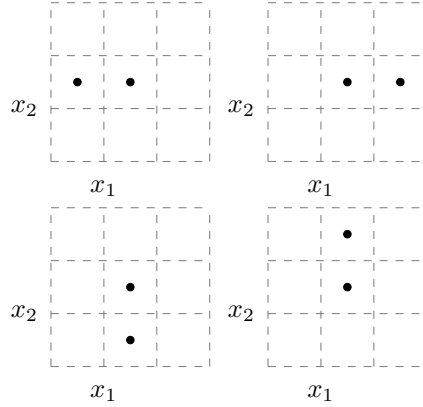


(b)

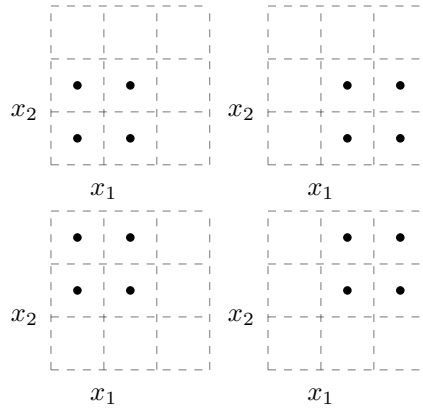
Figura 1.2: Caras propias de la 2-celda  $s = s((x_1, x_2), \{1, 2\})$  En (a) se muestran las cuatro 0-celdas que son caras propias de  $s$  y en (b) las cuatro 1-celdas que son caras propias de  $s$ .



(a)

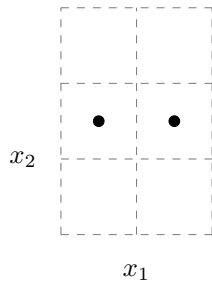


(b)

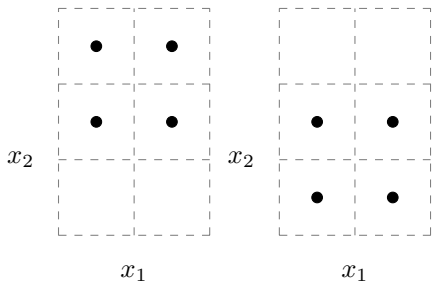


(c)

Figura 1.3: Celdas de la estrella de la 0-celda  $s = s(x, \{1, 2\})$ , con  $x = (x_1, x_2)$ . En (a), (b) y (c) se muestran las 0-celdas, 1-celdas y 2-celdas de  $\text{str}(s)$ , respectivamente.

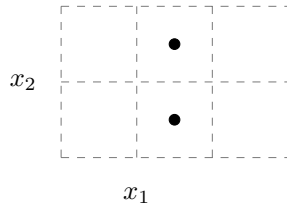


(a)

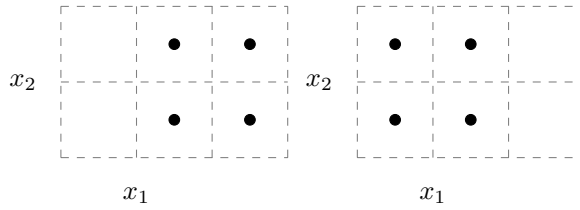


(b)

Figura 1.4: Celdas de la estrella de la 1-celda  $s = s((x_1, x_2), \{1\})$ . En (a) se muestra la única 1-celda y en (b) las dos 2-celdas de  $\text{str}(s)$ .

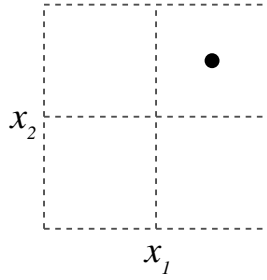


(a)

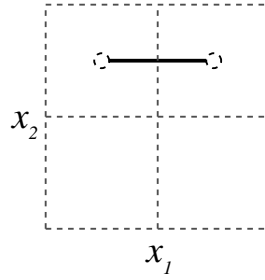


(b)

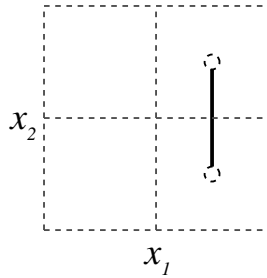
Figura 1.5: Celdas de la estrella de la 1-celda  $s = s((x_1, x_2), \{2\})$



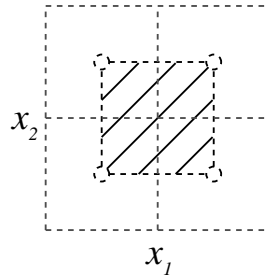
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 1.6: Realización poliédrica de celdas en  $\mathbb{R}^2$ . En (a) se muestra la realización poliédrica de la 0-celda  $s((x_1, x_2), \emptyset)$ , en (b) la de la 1-celda  $s((x_1, x_2), \{1\})$ , en (c) la de la 1-celda  $s((x_1, x_2), \{2\})$  y en (d) la de la 2-celda  $s((x_1, x_2), \{1, 2\})$

## Capítulo 2

# Puntos lattice

Las imágenes digitales se pueden describir utilizando puntos de  $\mathbb{R}^n$  con coordenadas en  $\mathbb{Z}$ . A estos elementos se les denomina puntos lattice. En la sección 2.1 se definen dos relaciones de adyacencia entre puntos lattice, la de tipo  $3^n - 1$  y la de tipo  $2n$ . Estas permiten definir dos tipos de conexidad entre puntos lattice. En la sección 2.2, a cada conjunto de puntos lattice se le asocian dos complejos cúbicos, los cuáles dependen del tipo de adyacencia considerado, y se establecen relaciones entre la conexidad del complejo cúbico y la del subconjunto de puntos lattice. A partir de estos complejos cúbicos, en la sección 2.3 se definen dos tipos los grupos de homología y de característica de Euler de un conjunto de puntos lattice. Por último, en la sección 2.4 se muestra cómo aplicar estos conceptos para definir y calcular propiedades topológicas de una imagen binaria.

### 2.1. Adyacencias

En este capítulo se adopta la siguiente terminología para referirse a los puntos con coordenadas enteras.

**Definición 2.1.** *Un punto lattice es cualquier elemento de  $\mathbb{Z}^n$ .*

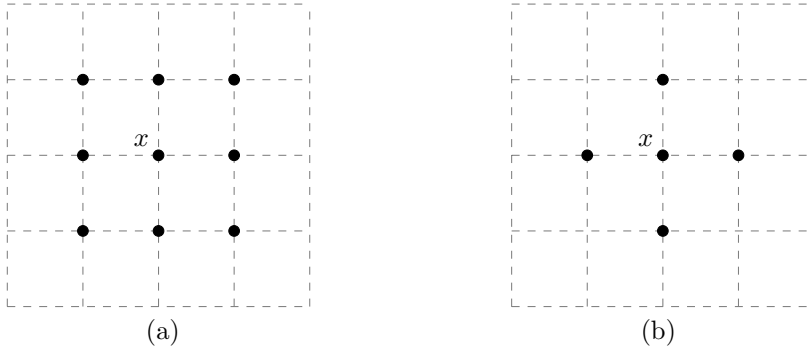


Figura 2.1: Adyacencias en  $\mathbb{Z}^2$ . (a) puntos 8-adyacentes a  $x$ , (b) puntos 4-adyacentes a  $x$ .

Dados dos puntos lattice, se pueden definir diferentes tipos de adyacencia entre ellos. En los casos  $n = 2$  y  $n = 3$ , estas definiciones son empleadas ampliamente en el estudio de imágenes digitales mediante conceptos de topología digital.

**Definición 2.2.** *Dados dos puntos lattice  $x, y$ , se dice que  $y$  es  $(3^n - 1)$ -adyacente a  $x$  si*

$$\text{máx}\{|y_\lambda - x_\lambda| : \lambda \in \{1, 2, \dots, n\}\} = 1.$$

Puesto que  $x_\lambda, y_\lambda$  son números enteros, esto ocurre si, y sólo si, para todo  $\lambda$

$$y_\lambda \in \{x_\lambda - 1, x_\lambda, x_\lambda + 1\}$$

y, para algún  $\mu$ ,  $y_\mu$  es distinto de  $x_\mu$ . Por lo tanto, hay exactamente  $3^n - 1$  elementos de  $\mathbb{Z}^n$  que son  $(3^n - 1)$ -adyacentes a  $x$ .

Esta definición coincide con las de 8-adyacencia del caso  $n = 2$  y de 26-adyacencia cuando  $n = 3$ , propuestas por Rosenfeld en, por ejemplo, [13].

Otro tipo de adyacencia se define de la siguiente manera.

**Definición 2.3.** *Dados dos puntos lattice  $x, y$ , se dice que  $y$  es  $2n$ -adyacente a  $x$  si*

$$\sum_{\lambda=1}^n |y_\lambda - x_\lambda| = 1.$$

Esto sucede si, y sólo si hay un único  $\mu$  tal que

$$y_\mu \in \{x_\mu - 1, x_\mu + 1\}$$

y  $x_\lambda = y_\lambda$  para todo  $\lambda \neq \mu$ . Se deduce que hay  $2n$  elementos que son  $2n$ -adyacentes a  $x$ .

Esto coincide con las definiciones de 4-adyacencia y de 6-adyacencia en los casos  $n = 2$  y  $n = 3$ , respectivamente.

En la figura 2.1 se ilustran estas adyacencias en  $\mathbb{Z}^2$ .

**Definición 2.4.** *Un conjunto de puntos lattice es cualquier subconjunto no vacío de  $\mathbb{Z}^n$ .*

Utilizando los dos tipos de adyacencia anteriores, se pueden definir dos relaciones de conexidad en un conjunto de puntos lattice.

**Definición 2.5.** *Dado un conjunto de puntos lattice  $B$ , se define la relación de  $m$ -conexidad en  $B$ , con  $m \in \{3^n - 1, 2n\}$  como sigue. Dos elementos  $x, y$  en  $B$  están en relación de  $m$ -conexidad si  $x = y$  o si existe una sucesión  $p_1 = x, p_2, \dots, p_k = y$  en  $B$  tal que, para todo  $i \in \{1, 2, \dots, k - 1\}$ ,  $p_{i+1}$  es  $m$ -adyacente a  $p_i$ .*

Es inmediato que esta es una relación de equivalencia en  $B$ . Sus clases de equivalencia son las  $m$ -componentes de  $B$ . El conjunto  $B$  se dice que es  $m$ -conexo, si tiene una única clase de equivalencia respecto a la relación de  $m$ -conexidad.

En la figura 2.2 se muestran las 8-componentes de un conjunto de puntos lattice y en la figura 2.3 se muestran las 4-componentes del mismo conjunto de puntos lattice.



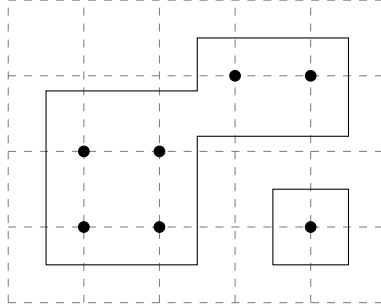


Figura 2.2: 8-componentes de un conjunto de puntos lattice.

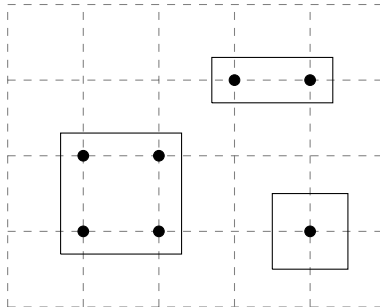


Figura 2.3: 4-componentes de un conjunto de puntos lattice.

## 2.2. Realización geométrica

Con el fin de estudiar propiedades de conexidad de conjuntos de puntos lattice mediante herramientas de la topología algebraica, se pueden construir dos complejos cúbicos a partir de este.

En primer lugar, a cada punto lattice se le asocia un complejo cúbico.

**Definición 2.6.** *Dado un punto lattice  $x$ , sea  $s(x)$  la  $n$ -celda centrada en  $x$ . La realización geométrica de  $x$  se define como el complejo cúbico*

$$G(x) = \{s' : s' \text{ es cara de } s(x)\}.$$

La realización geométrica de un punto lattice en  $\mathbb{Z}^2$  consta de cuatro 0-celdas, cuatro 1-celdas y una 2-celda. En la figura 2.4 se muestran estas celdas.

Es claro que este es un complejo cúbico cerrado. Además, si  $G(x) = G(y)$ , entonces  $s(x) = s(y)$  y, por tanto,  $x = y$ .

Escribiendo  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , la realización poliédrica de  $G(x)$  es

$$|G(x)| = J_1 \times J_2 \times \dots \times J_n$$

con  $J_\lambda = [x_\lambda - 1/2, x_\lambda + 1/2]$  para todo  $\lambda \in \{1, 2, \dots, n\}$ , es decir,  $|G(x)|$  es un cubo  $n$ -dimensional unitario centrado en  $x$  (ver figura 2.5).

**Definición 2.7.** *Dado  $B \subset \mathbb{Z}^n$ , su realización geométrica cerrada se define como el complejo cúbico*

$$GC(B) = \bigcup_{x \in B} G(x).$$

*La realización geométrica abierta de  $B$ , denotada por  $GO(B)$  es el interior de su realización geométrica cerrada.*

En la figura 2.6 se muestra la realización geométrica cerrada del conjunto de puntos lattice de la figura 2.2 y en la figura 2.7 se muestra la realización geométrica abierta del mismo conjunto de puntos lattice.

Se comprueba que el complejo cúbico  $GC(B)$  es  $n$ -homogéneo, que  $GO(B)$  es pseudovariedad  $n$ -dimensional, mientras que  $\delta(GC(B))$  es  $(n - 1)$ -homogéneo.

El siguiente teorema muestra una relación estrecha entre la realización geométrica cerrada de un conjunto de puntos lattice y la realización geométrica abierta de su complemento.

**Teorema 2.1.** *Para todo conjunto de  $B \subset \mathbb{Z}^n$ ,  $GC(B)^c = GO(B^c)$ , es decir, el complemento de la realización geométrica cerrada de  $B$  es la realización geométrica abierta del complemento de  $B$ .*

*Demostración.* Sea primero  $s \in GC(B)^c$ . Escribiendo  $s = s(y; \Lambda)$ , se tiene que  $s$  es cara de  $s(y)$  y por tanto,  $s \in G(y)$ . Como  $s \notin G(x)$  para todo  $x \in B$ , se deduce que  $y \notin B$  y, por tanto,  $s \in GC(B^c)$ . Ahora, si  $s \in \delta(GC(B^c))$  entonces  $s$  es cara de una celda  $s'$  en  $(GC(B^c))^c$ . La celda  $s'$  es cara de una celda  $s(z)$  para algún  $z \notin B^c$ , lo que implica que  $s$  es cara de  $s(z)$  para algún  $z \in B$ , contradiciendo que  $s \in GC(B)^c$ . Por tanto,  $s \in GO(B^c)$ .

Ahora, si  $s \in GO(B^c)$  pero  $s \in GC(B)$ , entonces  $s$  es cara de  $s(y)$  para algún  $y \in B^c$  y  $s$  es cara de  $s(x)$  para algún  $x \in B$ , por lo que  $s(x) \notin GC(B^c)$ . Con esto,  $s$  es cara de  $GC(B^c)$  y de  $GC(B^c)^c$ , lo que contradice que  $s \notin \delta(GC(B^c))$ . Por tanto,  $s \in GC(B)^c$ .  $\square$

Los siguientes teoremas muestran que la relación de adyacencia entre dos puntos lattice es equivalente a la conexidad de una de las realizaciones geométricas del conjunto formado por ellos dos, dependiendo del tipo de adyacencia considerado.

**Teorema 2.2.** *Un punto lattice  $y$  es  $(3^n - 1)$ -adyacente a un punto lattice  $x$  si, y sólo si la realización geométrica cerrada  $GC(\{x, y\})$  es un complejo cúbico conexo.*

*Demostración.* Supóngase primero que  $y$  es  $(3^n - 1)$ -adyacente a  $x$ . Para

todo  $\lambda$  se cumple que  $y_\lambda \in \{x_\lambda - 1, x_\lambda, x_\lambda + 1\}$ . Se define

$$z_\lambda = \begin{cases} y_\lambda & \text{si } y_\lambda \in \{x_\lambda - 1, x_\lambda\} \\ y_\lambda - 1 & \text{si } y_\lambda = x_\lambda + 1. \end{cases}$$

Como  $z_\lambda \in \{x_\lambda - 1, x_\lambda\}$  y  $z_\lambda \in \{y_\lambda - 1, y_\lambda\}$  para todo  $\lambda$ , por el lema 1.1, la 0-celda  $s(z, \emptyset)$  es cara de  $s(x)$  y de  $s(y)$ . Así,  $GC(\{x, y\})$  es conexo.

Ahora, si  $y$  no es  $(3^n - 1)$ -adyacente a  $x$ , existe  $\mu$  tal que  $|y_\mu - x_\mu| \geq 2$ . Sean  $a = (1/2)(x_\mu + y_\mu)$  y

$$\begin{aligned} U &= \{(u_1, u_2, \dots, u_n) : u_\mu < a\}, \\ V &= \{(u_1, u_2, \dots, u_n) : u_\mu > a\}. \end{aligned}$$

Nótese que

$$\begin{aligned} |a - x_\mu| &= \frac{1}{2}|y_\mu - x_\mu| \geq 1 \\ |a - y_\mu| &= \frac{1}{2}|x_\mu - y_\mu| \geq 1. \end{aligned}$$

En el caso  $x_\mu < y_\mu$ , se tiene que  $x_\mu < a < y_\mu$ . Dado  $u \in |G(x)|$ , se tiene que

$$u_\mu \leq x_\mu + \frac{1}{2} < x_\mu + 1 \leq a,$$

por lo que  $u \in U$ . Además, si  $u \in |G(y)|$ , entonces

$$u_\mu \geq y_\mu - \frac{1}{2} > y_\mu - 1 \geq a$$

de donde  $u \in V$ . Se deduce que  $|G(x)| \subset U$  y  $|G(y)| \subset V$ .

En el caso  $y_\mu < x_\mu$ , utilizando un razonamiento similar, se demuestra que  $|G(x)| \subset V$  y  $|G(y)| \subset U$ .

En ambos casos, queda probado que la realización poliédrica de  $GC(\{x, y\})$  es un conjunto disconexo y, por el teorema 1.18, el complejo cúbico  $GC(\{x, y\})$  es disconexo.  $\square$

Un argumento similar se aplica para demostrar el siguiente resultado.

**Teorema 2.3.** *Un punto lattice  $y$  es  $2n$ -adyacente a  $x$  si, y sólo si,  $GO(\{x, y\})$  es un complejo cúbico conexo.*

Utilizando estos teoremas se puede caracterizar la conexidad de un conjunto de puntos lattice mediante la conexidad de su realización geométrica.

**Teorema 2.4.** *Un conjunto de puntos lattice  $B$  es  $(3^n - 1)$ -conexo si, y sólo si, su realización geométrica cerrada  $GC(B)$  es un complejo cúbico conexo.*

*Demostración.* Supóngase primero que  $B$  es  $(3^n - 1)$ -conexo y sean  $s, s'$  elementos de  $GC(B)$ . Hay dos elementos  $x, y \in B$  tales que  $s$  es cara de  $s(x)$  y  $s'$  es cara de  $s(y)$ . Si  $x = y$ , definiendo  $s_1 = s, s_2 = s(x), s_3 = s'$ , se tiene que  $s_i \in GC(B)$  y que  $s_i$  es cara de  $s_{i+1}$  o  $s_{i+1}$  es cara de  $s_i$  para  $i \in \{1, 2\}$ . En cambio, si  $x \neq y$ , existen  $p_1 = x, p_2, \dots, p_k = y \in B$  tales que  $p_{i+1}$  es  $(3^n - 1)$ -adyacente a  $p_i$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, k - 1\}$ . El complejo cúbico

$$\bigcup_{i=1}^k G(p_i)$$

es conexo por el teorema 2.2, está contenido en  $GC(B)$  y contiene a las celdas  $s$  y  $s'$ . Se deduce que  $GC(B)$  es conexo.

Ahora supóngase que  $GC(B)$  es un complejo cúbico conexo y sean  $x, y \in B$  con  $x \neq y$ . Las celdas  $s(x), s(y)$  pertenecen a  $GC(B)$  y por tanto existen celdas  $s_1 = s(x), s_2, \dots, s_k = s(y)$  en  $GC(B)$  tales que  $s_i$  es cara de  $s_{i+1}$  o  $s_{i+1}$  es cara de  $s_i$ . Para cada  $i \in \{2, \dots, k - 1\}$  hay un elemento  $p_i \in B$  tal que  $s_i$  es cara de  $s(p_i)$ . Se definen, además,  $p_1 = x$  y  $p_k = y$ . El complejo cúbico  $GC(\{p_i, p_{i+1}\})$  es conexo, por construcción, y, por el teorema 2.2,  $p_{i+1}$  es  $(3^n - 1)$ -adyacente a  $p_i$ . En consecuencia,  $B$  es  $(3^n - 1)$ -conexo.  $\square$

De forma similar se demuestra el siguiente resultado.

**Teorema 2.5.** *Un conjunto  $B \subset \mathbb{Z}^n$  es  $2n$ -conexo si, y sólo si,  $GO(B)$  es un complejo cúbico conexo.*

Empleando estos resultados, se pueden establecer una relación entre el número de  $m$ -componentes de un conjunto de puntos lattice y el número de componentes conexas de la realización geométrica apropiada.

**Teorema 2.6.** *Sea  $B$  un conjunto de puntos lattice.*

1. *El número de  $(3^n - 1)$ -componentes de  $B$  es igual al número de componentes conexas del complejo cúbico cerrado  $GC(B)$ ,*
2. *El número de  $2n$ -componentes de  $B$  es igual al número de componentes conexas del complejo cúbico abierto  $GO(B)$ .*

### 2.3. Grupos de homología

A cada conjunto de puntos lattice se le pueden asociar dos tipos de grupos de homología, los cuáles dependen de la realización geométrica considerada.

**Definición 2.8.** *Dado un conjunto de puntos lattice  $B$ , su  $m$ -ésimo grupo de homología cerrado se define como*

$$\overline{H}_m(B) = H_m(GC(B))$$

*mientras que su  $m$ -ésimo grupo de homología abierto es*

$$H_m^0(B) = H_m(GO(B)).$$

*Si estos grupos son finitamente generados, su  $m$ -ésimo número de Betti cerrado  $\overline{\beta}_m(B)$  (abierto,  $\beta_m^0(B)$ ) se define como el rango del grupo  $\overline{H}_m(B)$  ( $H_m^0(B)$ ).*

Por el teorema 2.6 se cumple que el número de  $(3^n - 1)$ -componentes de  $B$  es  $\overline{\beta}_0(B)$  y el número de  $2n$ -componentes de  $B$  es  $\beta_0^0(B)$ .

A partir de estos números de Betti también se puede definir la característica de Euler de  $B$ , dependiendo del tipo de adyacencia que se considere.

**Definición 2.9.** Dado un conjunto finito  $B$  de puntos lattice, su característica de Euler cerrada se define como

$$\bar{\chi}(B) = \chi(GC(B)),$$

mientras que su característica de Euler abierta es

$$\chi^0(B) = \chi(GO(B)).$$

En estos casos, denotando por  $\bar{\alpha}_k(B)$  al número de  $k$ -celdas de  $GC(B)$  y por  $\alpha_k^0(B)$  al número de  $k$ -celdas de  $GO(B)$ , se cumple

$$\begin{aligned}\bar{\chi}(B) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \bar{\alpha}_k(B), \\ \chi^0(B) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \alpha_{n-k}^0(B).\end{aligned}$$

## 2.4. Imágenes digitales binarias

En esta sección se propone una definición de imagen digital binaria en dimensión  $n$ .

**Definición 2.10.** Una imagen digital binaria  $n$ -dimensional es una tetrada

$$P = (\mathbb{Z}^n, B, k, l)$$

en la que  $B \subset \mathbb{Z}^n$  y  $\{k, l\} = \{3^n - 1, 2n\}$ . Los elementos de  $B$  son los puntos negros de  $P$  y los de  $\mathbb{Z}^n - B$  son los puntos blancos de  $P$  y constituyen el fondo de  $P$ .

Con el fin de estudiar propiedades topológicas de una imagen binaria, en los casos  $n = 2$  y  $n = 3$  se han considerado diferentes tipos de adyacencia entre puntos negros y blancos, a fin de que se cumplan teoremas similares al de la curva de Jordan (ver, por ejemplo [13]). En la siguiente definición esta idea se generaliza para cualquier dimensión.

**Definición 2.11.** *Dada una imagen digital binaria  $n$ -dimensional*

$$P = (\mathbb{Z}^n, B, k, l),$$

*se dice que*

1. *un punto negro es adyacente a otro punto negro si es  $k$ -adyacente a él,*
2. *un punto blanco es adyacente a otro punto, negro o blanco, si es  $l$ -adyacente a él.*

*Una componente negra de  $P$  es cualquier  $k$ -componente de  $B$ , mientras que una componente blanca de  $P$  es cualquier  $l$ -componente del conjunto de puntos blancos.*

Nótese que a partir del mismo conjunto finito de puntos lattice se pueden construir dos imágenes digitales binarias. La diferencia entre ellas se encuentra en los tipos de adyacencia considerados.

A cada imagen digital binaria se le pueden asociar dos complejos cúbicos, uno de ellos construido a partir de sus puntos negros y el otro a partir de sus puntos blancos. Estos dependen de los valores de  $k$  y  $l$ . Mediante estos complejos cúbicos se pueden estudiar algunas propiedades topológicas de la imagen digital.

**Definición 2.12.** *Dada una imagen digital binaria  $P = (\mathbb{Z}^n, B, 3^n - 1, 2n)$ , la realización geométrica del conjunto de puntos negros es la realización geométrica cerrada de  $B$ , mientras que la realización geométrica del conjunto de puntos blancos es la realización geométrica abierta de  $\mathbb{Z}^n - B$ .*

**Definición 2.13.** *Dada una imagen digital binaria  $P = (\mathbb{Z}^n, B, 2n, 3^n - 1)$ , la realización geométrica del conjunto de puntos negros es la realización geométrica abierta de  $B$ , mientras que la realización geométrica del conjunto de puntos blancos es la realización geométrica cerrada de  $\mathbb{Z}^n - B$ .*



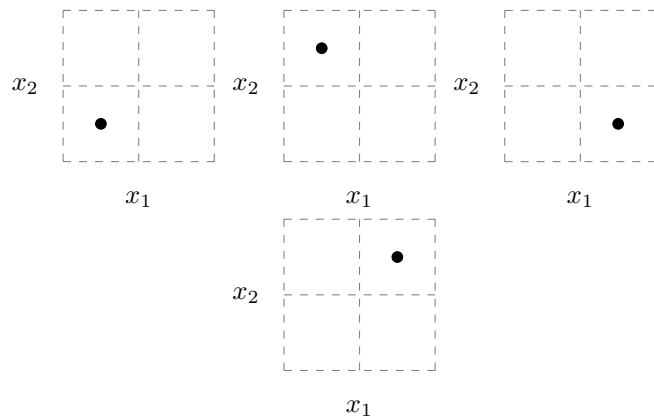
En ambos casos,  $G(B)$  denota a la realización geométrica de  $B$ , la cual puede ser un complejo cúbico abierto o cerrado, dependiendo del tipo de adyacencia considerado en la imagen.

A partir de esta realización geométrica, se pueden definir los grupos de homología de la imagen digital binaria.

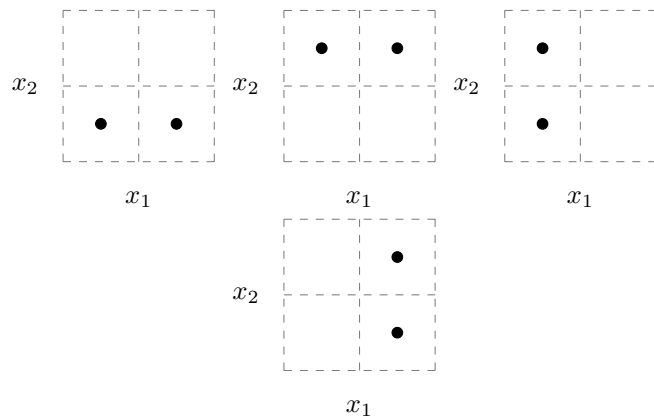
**Definición 2.14.** *Dada una imagen digital binaria  $P = (\mathbb{Z}^n, B, k, l)$ , su  $m$ -ésimo grupo de homología se define como el  $m$ -ésimo grupo de homología de la realización geométrica de sus puntos negros y se denota por  $H_m(P)$ . El  $m$ -ésimo número de Betti de  $P$  es, por definición, el rango de  $H_m(P)$ . La característica de Euler de  $P$ , denotada por  $\chi(P)$ , es igual a la característica de Euler de la realización poliédrica de  $G(B)$ .*

Aplicando las definiciones anteriores y el teorema 1.23, se obtiene el siguiente resultado.

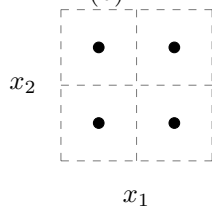
**Teorema 2.7.** *Dada una imagen digital binaria  $P = (\mathbb{Z}^n, B, k, l)$ , el 0-número de Betti de  $P$  es igual al número de componentes negras de  $P$ .*



(a)



(b)



(c)

Figura 2.4: Celdas de la realización geométrica del punto lattice  $x = (x_1, x_2)$ .

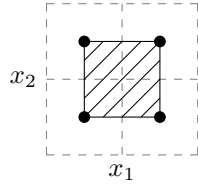


Figura 2.5: Realización poliédrica del complejo cúbico  $G(x)$ , donde  $x = (x_1, x_2)$ .

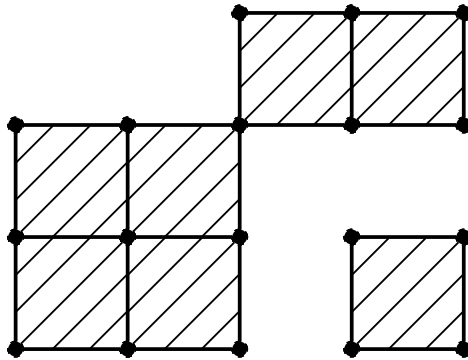


Figura 2.6: Realización poliédrica de la realización geométrica cerrada del conjunto de puntos lattice de la figura 2.2.

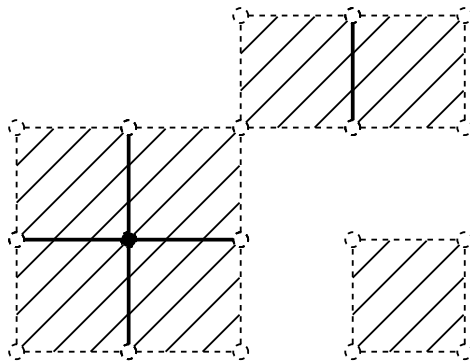


Figura 2.7: Realización poliédrica de la realización geométrica abierta del conjunto de puntos lattice de la figura 2.3.

## Capítulo 3

# Complejos cúbicos difusos

Este capítulo contiene los resultados principales de la tesis. En las secciones 3.1 y 3.2 se presentan los conceptos básicos de matemática difusa y topología difusa que se emplean para construir los complejos cúbicos difusos. Destaca el teorema 3.1, que permite construir una topología difusa a partir de una topología ordinaria. La definición propuesta de complejo cúbico difuso y sus propiedades básicas se presentan en la sección 3.3. Con el fin de estudiar otras propiedades de estos objetos, en la sección 3.4 se define la realización poliédrica de un complejo cúbico difuso y se caracterizan los complejos difusos abiertos o cerrados utilizando la topología difusa de  $\mathbb{R}^n$ . En la sección 3.5 se propone una definición de complejo difuso conexo utilizando sus conjuntos de nivel. También se presentan los conceptos de máximo regional y de mínimo regional. Se demuestra que estos extremos regionales tienen propiedades similares a las de las componentes conexas en espacios topológicos. En la sección 3.6 se definen dos grafos a partir de los extremos regionales de un complejo cúbico difuso y se demuestra que estos son árboles. Los extremos regionales corresponden a los llamados hijos de estos árboles. En la sec-

ción 3.7 se definen los grupos de homología por niveles de un complejo cúbico difuso a partir de sus secciones. También se definen sus números de Betti de cada nivel. El teorema 3.14 generaliza la conocida relación entre el 0-número de Betti y el número de componentes arco-conexas de un espacio topológico para este tipo de complejos cúbicos.

### 3.1. Conjuntos difusos

En la matemática difusa, el concepto principal es el de conjunto difuso. En este tipo de conjuntos, en lugar de indicar que un elemento pertenece o no pertenece a dicho conjunto, se asigna a cada elemento de un conjunto  $X$  un valor numérico que representa el grado de pertenencia de dicho elemento a un conjunto difuso. Si un elemento pertenece a  $X$ , este grado es 1, mientras que si no pertenece, el grado es 0. Se puede encontrar una explicación más amplia sobre el origen y aplicaciones estos conjuntos en [11].

A partir de esta sección,  $I$  denota al intervalo unitario  $[0, 1]$ .

**Definición 3.1.** *Dado un conjunto ordinario  $X$ , un conjunto difuso en  $X$  es una función  $A : X \rightarrow I$ . Al valor de  $A$  en un elemento  $x \in X$  se le llama el grado de pertenencia de  $x$  al conjunto difuso  $A$ .*

Cualquier subconjunto ordinario  $Y$  de  $X$  se puede identificar con un conjunto difuso en  $X$  mediante su función característica  $\chi_Y$ .

**Definición 3.2.** *Dado  $a \in I$ , se define  $\underline{a}$  como el conjunto difuso en  $X$  que tiene el valor constante  $a$ .*

En particular,  $\underline{0}$  es la función característica del conjunto vacío y  $\underline{1}$  es la función característica de  $X$ .

En el caso de los conjuntos ordinarios son conocidas las siguientes propiedades de las operaciones de unión, intersección y complemento:

$$\chi_{A \cup B} = \max\{\chi_A, \chi_B\}$$

$$\begin{aligned}
\chi_{A \cap B} &= \min \{ \chi_A, \chi_B \} \\
\chi_{A^c} &= 1 - \chi_A \\
\chi_{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda} &= \sup \{ \chi_{A_\lambda} : \lambda \in \Lambda \} \\
\chi_{\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda} &= \inf \{ \chi_{A_\lambda} : \lambda \in \Lambda \}
\end{aligned}$$

para cualesquiera  $A, B, A_\lambda \subset X$ .

Con  $I^X$  se denotará a la familia de todos los conjuntos difusos en  $X$ . En este conjunto se pueden definir operaciones de unión e intersección como sigue.

**Definición 3.3.** Sea  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  una colección de subconjuntos difusos en  $X$ . Se define la unión de esta colección como el conjunto difuso  $\bigvee_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$  cuya regla de correspondencia está dada por

$$\left( \bigvee_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) (x) = \sup \{ A_\lambda(x) : \lambda \in \Lambda \}, x \in X$$

y su intersección es el conjunto difuso  $\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$  con regla de correspondencia

$$\left( \bigwedge_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) (x) = \inf \{ A_\lambda(x) : \lambda \in \Lambda \}, x \in X.$$

El complemento de un conjunto difuso  $A$  en  $X$  es el conjunto difuso  $A^c$  con regla de correspondencia

$$A^c(x) = 1 - A(x).$$

Un conjunto difuso  $A$  es un subconjunto del conjunto difuso  $B$  si

$$A(x) \leq B(x) \text{ para todo } x \in X.$$

En este caso se escribe  $A \leq B$ .

Estas definiciones generalizan las definiciones usuales de unión, inter-

sección complemento e inclusión entre conjuntos ordinarios si se considera su función característica. Además, estas operaciones son conmutativas, asociativas, distributivas y satisfacen las leyes de De Morgan. No se cumple, en general, que  $A \vee A^c = \underline{1}$  o  $A \wedge A^c = \underline{0}$ .

Algunas propiedades de los conjuntos difusos se pueden estudiar utilizando los conjuntos ordinarios llamados niveles. Además, estos conjuntos se utilizan para generalizar diversos conceptos de la matemática tradicional a conjuntos difusos.

**Definición 3.4.** *Dado  $A \in I^X$  y  $a \in I$ , se define el  $a$ -nivel superior cerrado de  $A$  como el conjunto ordinario  $A_{[a]} = \{x \in X : A(x) \geq a\}$ . De manera similar se denotan*

$$\begin{aligned} A_{(a)} &= \{x \in X : A(x) > a\}, \\ A^{[a]} &= \{x \in X : A(x) \leq a\}, \\ A^{(a)} &= \{x \in X : A(x) < a\}. \end{aligned}$$

*El conjunto  $A_{(0)}$  es el soporte de  $A$  y se denota por  $\text{supp}(A)$ .*

**Definición 3.5.** *El rango de un conjunto difuso  $A$  es*

$$\text{rank}(A) = \{a \in I : a = A(x) \text{ para algún } x \in X\}.$$

## 3.2. Topología difusa

Con el fin de utilizar los conjuntos difusos en el estudio de propiedades topológicas de imágenes en tonos de gris, se utilizará la siguiente definición de espacio topológico difuso, propuesta en [8].

**Definición 3.6.** *A una colección  $\tau$  de conjuntos difusos en  $X$  que satisface las condiciones:*

1.  $\underline{0}, \underline{1} \in \tau$ ;
2.  $A, B \in \tau$  implica  $A \wedge B \in \tau$ ;



3.  $A_\lambda \in \tau, \lambda \in \Lambda$  implica  $\bigvee_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \tau$ ;

se le llama una topología difusa en  $X$  y  $(X, \tau)$  es un espacio topológico difuso. Los elementos de  $\tau$  son los conjuntos abiertos. Un conjunto difuso en  $X$  es cerrado si su complemento es abierto respecto a esta topología.

Aunque hay diversos métodos para construir este tipo de topologías, para los fines de esta tesis la construcción más importante hace uso de un tipo especial de funciones definidas sobre un espacio topológico ordinario  $(X, T)$  llamadas funciones semicontinuas inferiormente (ver, por ejemplo, [16]).

**Definición 3.7.** Dado un espacio topológico ordinario  $(X, T)$ , una función  $f : X \rightarrow I$  es semicontinua inferiormente si  $f^{[a]} = \{x \in X : f(x) \leq a\}$  es un conjunto cerrado en  $X$ , para todo  $a \in I$ .

Se verifica que un subconjunto  $A$  de  $X$  es abierto si y sólo si su función característica es semicontinua inferiormente.

Una propiedad importante de estas funciones está dada en el siguiente teorema.

**Teorema 3.1.** Dado un espacio topológico  $(X, T)$ , la colección de las funciones de  $X$  en  $I$  que son semicontinuas inferiormente constituye una topología difusa en  $X$

La función característica de un conjunto cerrado es un conjunto difuso cerrado respecto a esta topología. Además, un conjunto difuso  $A$  en  $X$  es abierto si, y sólo si, cada conjunto  $A^{[a]}$  es cerrado. Equivalentemente, cada  $A_{(a)}$  debe ser un conjunto abierto para que  $A$  sea un conjunto abierto. También, el conjunto difuso  $A$  es cerrado si cada conjunto  $A_{[a]}$  es cerrado, es decir, si cada  $A^{(a)}$  es abierto.

A la topología del teorema anterior se le denota por  $\omega(T)$ . Al par  $(X, \omega(T))$  se le considera la copia difusa del espacio topológico  $(X, T)$ . Cuando no haya lugar a confusión, se escribirá  $\omega(X)$  en lugar de  $\omega(T)$ . La topología difusa  $\omega(X)$  tiene un papel muy importante, dado que se

utiliza para indicar si alguna extensión de un concepto de la topología tradicional es buena [18].

### 3.3. Complejos difusos

En esta sección se proponen definiciones de celda difusa y de complejo cúbico difuso.

Una celda difusa se define como un conjunto difuso cuyas propiedades se relacionan con las de las celdas ordinarias definidas en la sección 1.1.

**Definición 3.8.** *Una  $k$ -celda difusa en  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto difuso  $\mathbf{s}$  en  $\mathbb{R}^n$  cuyo soporte es una  $k$ -celda y que es constante en dicho soporte. El valor de  $k$  es la dimensión de la celda difusa y el valor constante mencionado es el grado de la celda, denotado por  $\text{deg}(\mathbf{s})$ . Los elementos de su soporte son sus vértices. El conjunto de todas las celdas difusas se denota por  $|\mathbb{Z}^n|_I$ .*

En el caso particular de que la celda tenga grado 1, esta definición coincide con la de función característica de una celda ordinaria.

A partir de estas celdas difusas se definen los complejos cúbicos difusos.

**Definición 3.9.** *Un complejo cúbico difuso  $\mathbb{K}$  es cualquier colección de elementos de  $|\mathbb{Z}^n|_I$  tal que celdas difusas diferentes tienen distintos soportes.*

En el caso de que todas las celdas del complejo cúbico difuso tengan grado de pertenencia 1, esta definición coincide con la de complejo cúbico ordinario, identificando cada celda con su función característica.

**Observación 3.1.** *La última condición de esta definición implica, por el corolario 1.5, que si  $\mathbf{s}$  y  $\mathbf{s}'$  son celdas difusas distintas del complejo cúbico difuso  $\mathbb{K}$ , entonces las realizaciones poliédricas de sus soportes no tienen puntos en común.*

Para los complejos cúbicos difusos se definen su soporte y sus secciones de forma similar al caso de los conjuntos difusos. La diferencia principal es que estos objetos son complejos cúbicos ordinarios.

**Definición 3.10.** *Dado un complejo cúbico difuso  $\mathbb{K}$ , su soporte es el complejo cúbico ordinario definido por*

$$\text{supp}(\mathbb{K}) = \{\text{supp}(\mathbf{s}) : \mathbf{s} \in \mathbb{K}\},$$

*y su fondo, denotado por  $\text{Bk}(\mathbb{K})$  es el complejo complemento de su soporte.*

**Definición 3.11.** *Si  $\mathbb{K}$  es un complejo cúbico difuso, para cada  $a \in I - \{0\}$ , su  $a$ -nivel  $\mathbb{K}_{[a]}$  es la colección de los soportes de sus celdas difusas de grado  $\geq a$ . El conjunto  $\mathbb{K}_{[0]}$  es, por definición, el complejo cúbico  $|\mathbb{Z}^n|$ . De manera similar, para  $a \neq 0$  se define*

$$\mathbb{K}^{(a)} = \{\text{supp}(\mathbf{s}) : \mathbf{s} \in \mathbb{K}, \text{deg}(\mathbf{s}) < a\} \cup \text{Bk}(\mathbb{K})$$

*mientras que  $\mathbb{K}^{(0)}$  es el complejo cúbico vacío. Para todo  $a \in I$  se definen*

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{(a)} &= \{\text{supp}(\mathbf{s}) : \mathbf{s} \in \mathbb{K}, \text{deg}(\mathbf{s}) > a\}, \\ \mathbb{K}^{[a]} &= \{\text{supp}(\mathbf{s}) : \mathbf{s} \in \mathbb{K}, \text{deg}(\mathbf{s}) \leq a\} \cup \text{Bk}(\mathbb{K}). \end{aligned}$$

Nótese que  $\mathbb{K}_{(0)} = \text{supp}(\mathbb{K})$ ,  $\mathbb{K}^{[0]} = \text{Bk}(\mathbb{K})$ ,  $\mathbb{K}_{(1)} = \emptyset$  y  $\mathbb{K}^{[1]} = |\mathbb{Z}^n|$ .

**Observación 3.2.** *Los conjuntos de nivel satisfacen*

$$\mathbb{K}_{[a]} = (\mathbb{K}^{(a)})^c$$

*y*

$$\mathbb{K}^{[a]} = (\mathbb{K}_{(a)})^c.$$

Los complejos cúbicos difusos se clasifican en cerrados o abiertos, dependiendo de las propiedades de sus conjuntos de nivel, de forma similar

a la caracterización de los conjuntos abiertos o cerrados respecto a la topología difusa de las funciones semicontinuas inferiormente mencionada en la sección 3.2.

**Definición 3.12.** *Un complejo cúbico difuso  $\mathbb{K}$  es:*

1. *cerrado si  $\mathbb{K}_{[a]}$  es un complejo cúbico cerrado para todo  $a \in I$ .*
2. *abierto si  $\mathbb{K}^{[a]}$  es un complejo cúbico cerrado para cada  $a \in I$ .*

Si las celdas del complejo cúbico difuso tienen grado igual a 1, estas definiciones coinciden con las de complejo cúbico cerrado y complejo cúbico abierto, respectivamente.

Por la observación 3.2, es claro que un complejo cúbico difuso  $\mathbb{K}$  es:

1. *cerrado si, y sólo si,  $\mathbb{K}^{(a)}$  es un complejo cúbico abierto para cada  $a \in I$ .*
2. *abierto si, y sólo si,  $\mathbb{K}_{(a)}$  es un complejo cúbico abierto para todo  $a \in I$ .*

Para algunas discusiones posteriores, relacionadas con conceptos de conexidad, será útil la siguiente definición.

**Definición 3.13.** *El rango de un complejo cúbico difuso  $\mathbb{K}$  cuyo fondo es vacío, denotado por  $\text{rank}(\mathbb{K})$ , es el conjunto de elementos  $a \in I$  para los cuales existe una celda difusa  $\mathbf{s} \in \mathbb{K}$  tal que  $\text{deg}(\mathbf{s}) = a$ . Si el fondo de  $\mathbb{K}$  es no vacío, se agrega el elemento 0 al conjunto anterior.*

Puesto que el conjunto de celdas en  $\mathbb{R}^n$  es numerable, se deduce que el rango de un complejo cúbico difuso es un subconjunto numerable de  $I$ .

### 3.4. Realización poliédrica

**Definición 3.14.** *Si  $\mathbf{s}$  es una celda difusa, su realización poliédrica es el conjunto difuso en  $\mathbb{R}^n$ ,  $|\mathbf{s}| : \mathbb{R}^n \rightarrow I$  cuyo soporte es la realización*

poliédrica del soporte de  $\mathbf{s}$  y cuyo grado de pertenencia en los puntos de su soporte es  $\deg(\mathbf{s})$ . La realización poliédrica de un complejo cúbico difuso  $\mathbb{K}$  se define como el conjunto difuso en  $\mathbb{R}^n$  dado por

$$|\mathbb{K}| = \bigvee_{\mathbf{s} \in \mathbb{K}} |\mathbf{s}|.$$

En el caso de una celda de grado 1, esta definición coincide con la de función característica de la realización poliédrica de su soporte. Si las celdas del complejo cúbico son de grado 1, esta definición coincide con la de función característica de la realización poliédrica del soporte del complejo cúbico difuso.

Una propiedad importante de la realización poliédrica de un complejo cúbico difuso está dada en el siguiente lema.

**Lema 3.1.** *Sea  $\mathbb{K}$  un complejo cúbico difuso y  $x \in \mathbb{R}^n$ . Si  $|\mathbb{K}|(x) > 0$ , entonces existe una única celda difusa  $\mathbf{s} \in \mathbb{K}$  tal que  $|\mathbb{K}|(x) = |\mathbf{s}|(x)$ .*

*Demostración.* Si  $|\mathbb{K}|(x) > 0$ , entonces  $\sup_{\mathbf{s} \in \mathbb{K}} |\mathbf{s}|(x) > 0$  y por tanto existe una celda difusa  $\mathbf{s} \in \mathbb{K}$  tal que  $|\mathbf{s}|(x) > 0$ . Esto indica que  $x$  pertenece al soporte de  $|\mathbf{s}|$  y, por la observación 3.1,  $|\mathbf{s}'|(x) = 0$  para cualquier otra celda difusa  $\mathbf{s}' \in \mathbb{K}$ . En consecuencia,  $|\mathbb{K}|(x) = |\mathbf{s}|(x)$ .  $\square$

Algunas relaciones entre los  $\alpha$ -niveles de un complejo cúbico difuso y los de su realización poliédrica se presentan en el siguiente teorema. Estas permiten demostrar propiedades del complejo cúbico difuso a partir de propiedades de su realización poliédrica

**Teorema 3.2.** *Sea  $\mathbb{K}$  un complejo cúbico difuso. Para todo  $\alpha \in I$ :*

1.  $|\mathbb{K}_{[\alpha]}| = |\mathbb{K}|_{[\alpha]}$
2.  $|\mathbb{K}_{(\alpha)}| = |\mathbb{K}|_{(\alpha)}$
3.  $|\mathbb{K}^{[\alpha]}| = |\mathbb{K}|^{[\alpha]}$
4.  $|\mathbb{K}^{(\alpha)}| = |\mathbb{K}|^{(\alpha)}$

*Demostración.* Sólo se demostrará 1. Si  $a \neq 0$ , dado  $x \in |\mathbb{K}|_{[a]}$ , por el lema 3.1 se cumple  $|s|(x) \geq a$  para una única celda difusa  $s \in \mathbb{K}$ . Con esto,  $x \in \text{supp}(s)$  y  $\deg(s) \geq a$ , de donde  $\text{supp}(s) \in \mathbb{K}_{[a]}$  y  $x \in |\mathbb{K}|_{[a]}$ .

Ahora, si  $x \in |\mathbb{K}|_{[a]}$ , entonces  $x \in |s|$  para alguna celda  $s \in \mathbb{K}_{[a]}$ . Como  $s = \text{supp}(s')$  para alguna celda difusa  $s' \in \mathbb{K}$  con  $\deg(s') \geq a$ , entonces  $|\mathbb{K}|(x) = |s'|(x) \geq a$ , con lo que  $x \in |\mathbb{K}|_{[a]}$ .

Cuando  $a = 0$ , es clara la igualdad. □

Utilizando el teorema 3.2 se obtiene la siguiente caracterización importante de los complejos cúbicos difusos cerrados (abiertos) en terminos de la copia difusa de  $\mathbb{R}^n$ . Este resultado es una generalización de los teoremas 1.12 y 1.13.

**Teorema 3.3.** *Un complejo cúbico difuso es cerrado (abierto) si, y sólo si, su realización poliédrica es un conjunto difuso cerrado (abierto) en  $\mathbb{R}^n$  con respecto a la topología difusa  $\omega(\mathbb{R}^n)$ .*

## 3.5. Conexidad

En esta sección se presentan definiciones relacionadas con el concepto de conexidad para complejos cúbicos difusos y se demuestran algunas de sus propiedades.

La conexidad de un complejo cúbico difuso se define a partir de la conexidad de sus  $a$ -niveles superiores cerrados.

**Definición 3.15.** *Un complejo cúbico difuso  $\mathbb{K}$  es conexo si todo  $a$ -nivel superior cerrado  $\mathbb{K}_{[a]}$  es un complejo cúbico conexo.*

En el caso de los complejos cúbicos difusos que no son conexos, se propone el concepto de máximo regional. Se demostrará que este tiene, en varios sentidos, propiedades similares al de componente conexa.

**Definición 3.16.** *Sea  $\mathbb{K}$  un complejo cúbico difuso. Un máximo regional de  $\mathbb{K}$  de nivel  $a > 0$  es un complejo cúbico ordinario  $\mathbf{L}$  que satisface:*

1.  $\mathbf{L}$  es una componente conexa del complejo cúbico  $\mathbb{K}_{[a]}$ ,
2. Para todo  $b > a$ ,  $\mathbf{L} \cap \mathbb{K}_{[b]} = \emptyset$ .

En el caso de que las celdas del complejo cúbico difuso sean de grado 1, esta definición coincide con la de componente conexa de un complejo cúbico.

De manera análoga, los mínimos regionales tienen un papel similar al de las componentes conexas del complemento de un subconjunto del plano.

**Definición 3.17.** *Un mínimo regional de nivel  $a$ ,  $0 < a < 1$ , de  $\mathbb{K}$  es un complejo cúbico ordinario  $\mathbf{L}$  tal que*

1.  $\mathbf{L}$  es una componente conexa del complejo cúbico  $\mathbb{K}^{[a]}$ .
2. Para todo  $b < a$ ,  $\mathbf{L} \cap \mathbb{K}^{[b]} = \emptyset$ .

Si el fondo de  $\mathbb{K}$  es no vacío, un mínimo regional de nivel 0 de  $\mathbb{K}$  es una componente conexa de  $\text{Bk}(\mathbb{K})$ .

**Definición 3.18.** *Dado  $a \in I$ , un extremo regional de nivel  $a$  de  $\mathbb{K}$  es cualquier complejo cúbico ordinario que es un máximo o un mínimo regional de nivel  $a$  de  $\mathbb{K}$ .*

Aunque los extremos regionales están definidos a partir de las secciones del complejo cúbico difuso, sus celdas están estrechamente relacionadas con las celdas difusas de dicho complejo cúbico difuso, como se muestra en el siguiente teorema.

**Teorema 3.4.** *Sea  $\mathbb{K}$  un complejo cúbico difuso y  $\mathbf{L}$  un complejo cúbico ordinario.*

1. Si  $\mathbf{L}$  es un máximo regional de  $\mathbb{K}$  de nivel  $a$ , entonces, para cada celda  $s \in \mathbf{L}$  existe una única celda difusa  $\mathbf{s}' \in \mathbb{K}$  tal que  $\text{supp}(\mathbf{s}') = s$  y  $\text{deg}(\mathbf{s}') = a$ .

2. Si  $\mathbf{L}$  es un mínimo regional de  $\mathbb{K}$  de nivel  $a$ ,  $0 < a < 1$ , entonces, para cada celda  $s \in \mathbf{L}$  existe una única celda difusa  $\mathbf{s}' \in \mathbb{K}$  con  $\text{supp}(\mathbf{s}') = s$  y  $\text{deg}(\mathbf{s}') = a$ .

*Demostración.* Sólo se probará 1. Dada una celda  $s \in \mathbf{L}$ , existe una única celda difusa  $\mathbf{s}' \in \mathbb{K}$  con  $s = \text{supp}(\mathbf{s}')$  y  $\text{deg}(\mathbf{s}') \geq a$ . Si  $\text{deg}(\mathbf{s}') > a$ , definiendo  $b = \text{deg}(\mathbf{s}')$  se tiene que  $s \in \mathbf{L} \cap \mathbb{K}_{[b]}$  con  $b > a$ , contradiciendo la definición de máximo regional. Por tanto,  $\text{deg}(\mathbf{s}') = a$ .  $\square$

Las componentes conexas de los  $a$ -niveles superiores cerrados de un complejo cúbico difuso tienen propiedades similares a las de las componentes conexas de un complejo cúbico ordinario.

**Teorema 3.5.** Si  $\mathbb{K}$  es un complejo cúbico difuso y  $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$  son componentes conexas de  $\mathbb{K}_{[a_1]}$  y de  $\mathbb{K}_{[a_2]}$ , respectivamente, con  $a_1 > a_2$ , entonces  $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2 = \emptyset$  o  $\mathbf{L}_1 \subset \mathbf{L}_2$ .

*Demostración.* Es claro que  $\mathbb{K}_{[a_1]} \subset \mathbb{K}_{[a_2]}$ . Como  $\mathbf{L}_1$  es un subcomplejo conexo de  $\mathbb{K}_{[a_2]}$  y  $\mathbf{L}_2$  es una componente conexa de  $\mathbb{K}_{[a_2]}$ , la condición  $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2 \neq \emptyset$  implica  $\mathbf{L}_1 \subset \mathbf{L}_2$ .  $\square$

**Teorema 3.6.** Si  $\mathbb{K}$  es un complejo cúbico difuso cerrado entonces sus máximos regionales son complejos cúbicos cerrados.

*Demostración.* Si  $\mathbf{L}$  es un máximo regional de nivel  $a$  de  $\mathbb{K}$ , entonces su realización poliédrica  $|\mathbf{L}|$  es, por el corolario 1.6, una componente conexa del conjunto cerrado  $|\mathbb{K}_{[a]}|$  en  $\mathbb{R}^n$  y, por tanto, es un conjunto cerrado. Así,  $\mathbf{L}$  es un complejo cúbico cerrado.  $\square$

Este resultado es similar al correspondiente para las componentes conexas de un conjunto cerrado en un espacio topológico.

En el caso de los mínimos regionales se tiene el siguiente resultado análogo.

**Teorema 3.7.** Los mínimos regionales de un complejo cúbico difuso abierto son complejos cúbicos cerrados.



El siguiente teorema muestra la relación entre conexidad y máximos regionales de un complejo cúbico difuso.

**Teorema 3.8.** *Un complejo cúbico difuso  $\mathbb{K}$  con rango finito es conexo si, y sólo si, tiene un único máximo regional.*

*Demostración.* Sean  $a_1 < a_2 \dots < a_k$  los elementos del rango de  $\mathbb{K}$ . Si  $\mathbb{K}$  es conexo, entonces  $\mathbb{K}_{[a_k]}$  es un máximo regional de nivel  $a_k$ . Además, para todo  $a < a_k$ ,  $\mathbb{K}_{[a]}$  es conexo y contiene a  $\mathbb{K}_{[a_k]}$ , por lo que no hay máximos regionales de nivel  $a$  de  $\mathbb{K}$ .

Ahora, si  $\mathbb{K}$  tiene un único máximo regional, como cualquier componente conexa de  $\mathbb{K}_{[a_k]}$  es un máximo regional de nivel  $a_k$  de  $\mathbb{K}$ , se deduce que  $\mathbb{K}_{[a_k]}$  es conexo y corresponde al único máximo regional de  $\mathbb{K}$ . Además, una componente conexa  $\mathbf{L}$  de  $\mathbb{K}_{[a_{k-1}]}$  no es un máximo regional de  $\mathbb{K}$ , por lo que  $\mathbf{L} \cap \mathbb{K}_{[a_k]} \neq \emptyset$  y  $\mathbf{L} \cup \mathbb{K}_{[a_k]}$  es un complejo cúbico conexo contenido en  $\mathbb{K}_{[a_{k-1}]}$  y por tanto  $\mathbf{L} = \mathbf{L} \cup \mathbb{K}_{[a_k]}$ . Así,  $\mathbb{K}_{[a_k]} \subset \mathbf{L}$ . Se deduce que  $\mathbb{K}_{[a_{k-1}]}$  tiene una única componente conexa y en consecuencia es conexo. El mismo razonamiento se puede aplicar a los complejos cúbicos  $\mathbb{K}_{[a]}$  para los elementos restantes  $a$  en el rango de  $\mathbb{K}$ . Por tanto,  $\mathbb{K}$  es conexo.  $\square$

El resultado de este teorema no se cumple sin la hipótesis de que el rango sea finito.

**Ejemplo 3.1.** *Considérese el complejo cúbico difuso  $\mathbb{K}$  en  $\mathbb{R}$ , formado por*

1. las 0-celdas cuyo soporte es  $\{n + 1/2\}$  y cuyo grado es  $1 - 1/n$
2. Las 1-celdas con soporte  $\{n - 1/2, n + 1/2\}$  y grado  $1 - 1/n$

para  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 2$ .

*El complejo cúbico  $\mathbb{K}_{[a]}$  es conexo para todo  $a \in I$ , pero  $\mathbb{K}$  no tiene máximos regionales.*

*Además, si se agrega la 0-celda difusa con soporte  $\{3/2\}$  y grado 1, se obtiene un complejo cúbico difuso con un único máximo regional, pero en el que los complejos cúbicos  $\mathbb{K}_{[a]}$  no son conexos.*

En el caso de que el rango de un complejo cúbico difuso sea finito, se puede dar una caracterización más simple de sus máximos regionales.

**Teorema 3.9.** *Sea  $\mathbb{K}$  un complejo cúbico difuso con rango finito y sean*

$$a_1 < \dots < a_k,$$

*sus elementos no nulos.*

1. *Las componentes conexas de  $\mathbb{K}_{[a_k]}$  son máximos regionales de nivel  $a_k$  de  $\mathbb{K}$ .*
2. *Si  $l < k$ , una componente conexa de  $\mathbb{K}_{[a_l]}$  es un máximo regional de nivel  $a_l$  de  $\mathbb{K}$  si, y sólo si,  $\mathbf{L} \cap \mathbb{K}_{[a_{l+1}]} = \emptyset$ .*

Para los mínimos regionales se tiene una caracterización similar en el caso de que el fondo de  $\mathbb{K}$  sea vacío.

**Teorema 3.10.** *Dado un complejo cúbico difuso  $\mathbb{K}$ , sean*

$$a_1 < \dots < a_k,$$

*los elementos no nulos de su rango y sea  $a_0 = 0$ . Para  $1 \leq l < k$ , una componente conexa de  $\mathbb{K}^{[a_l]}$  es un mínimo regional de  $\mathbb{K}$  de nivel  $a_l$  si, y sólo si,  $\mathbf{L} \cap \mathbb{K}^{[a_{l-1}]} = \emptyset$ .*

Los mínimos regionales tienen una estrecha relación con el complemento de las secciones del complejo cúbico difuso, como se muestra en el siguiente teorema.

**Teorema 3.11.** *Sea  $\mathbb{K}$  un complejo cúbico difuso con  $\text{rank}(\mathbb{K}) = \{a_0, \dots, a_k\}$ , donde  $a_0 < \dots < a_k$ . Si  $\mathbf{L}$  es un mínimo regional de nivel  $a_i$  de  $\mathbb{K}$  para algún  $i < k$  y  $a_i \neq 0$ , entonces es una componente conexa de  $(\mathbb{K}_{[a_{i+1}]})^c$ .*

*Demostración.* Basta observar que  $(\mathbb{K}_{[a_{i+1}]})^c = \mathbb{K}^{(a_{i+1})} = \mathbb{K}^{[a_i]}$  si  $i < k$  y  $a_i \neq 0$ . □

De forma similar se demuestra que si  $\mathbf{L}$  es un máximo regional de nivel  $a_i$  del complejo cúbico difuso  $\mathbb{K}$ , entonces es una componente conexa de  $(\mathbb{K}^{[a_{i-1}]})^c$ .

Utilizando este resultado, se deducen las siguientes propiedades de los extremos regionales.

**Teorema 3.12.** *Sea  $\mathbb{K}$  un complejo cúbico difuso con rango finito.*

1. *Si  $\mathbb{K}$  es cerrado, sus mínimos regionales son complejos cúbicos abiertos.*
2. *Si  $\mathbb{K}$  es abierto, sus máximos regionales son complejos cúbicos abiertos.*

### 3.6. Árboles

Con el fin de estudiar la forma en la que se relacionan entre sí los extremos regionales de un complejo cúbico difuso, se pueden construir dos grafos a partir de dichos extremos, siguiendo la idea utilizada en [9].

Un grafo no dirigido es una pareja  $G = (V, E)$  en la que  $V$  es un conjunto no vacío cuyos elementos son los vértices del grafo y los elementos de  $E$ , llamados aristas, son conjuntos de la forma  $\{u, v\}$  con  $u, v \in V$  y  $u \neq v$ . Dos vértices  $u, v$  son adyacentes si  $\{u, v\} \in E$ . El grafo  $G$  es conexo si para cualesquiera dos vértices  $u, v$  existe una sucesión de vértices  $v_0 = u, v_1, \dots, v_n = v$  tales que  $\{v_{i-1}, v_i\} \in E$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Un ciclo en  $G$  es una sucesión de al menos tres vértices  $v_0, v_1, \dots, v_n$  tal que  $v_0 = v_n$  y para cada  $i = 0, \dots, n - 2$  los vértices  $v_i, v_{i+1}$  y  $v_{i+2}$  son distintos entre sí. Este ciclo es simple si los vértices  $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$  son distintos. Un grafo conexo que no tiene ciclos simples es un árbol.

Sea  $T = (V, E)$  un árbol en el que  $V$  es finito y sea  $r$  uno de sus vértices, llamado raíz. A cada vértice  $v$  se le asigna un número natural  $l(v)$ , llamado su nivel, de la siguiente forma. La raíz  $r$  tiene nivel 0. Cada vértice que sea adyacente a la raíz tiene nivel 1. Dos vértices de nivel 1 no pueden ser adyacentes porque en ese caso se tendría un ciclo simple

utilizando la raíz y estos vértices. A cada vértice que sea adyacente a un vértice de nivel 1 y que no sea la raíz se le asigna el nivel 2. Este proceso se puede continuar de forma inductiva. Así, cada arista del árbol tiene vértices  $\{u, v\}$ , y se puede suponer que  $l(v) = l(u) + 1$ ; el vértice  $u$  es el inicio y el vértice  $v$  es el final de la arista y se dice que  $u$  es antecesor de  $v$  o que  $v$  es sucesor de  $u$ . De acuerdo con esto, cada vértice puede tener 0 o varios sucesores y cada vértice, excepto la raíz, tiene un único antecesor. Un vértice que no tiene sucesores se le llama una hoja. Con esto  $(V, E, r)$  es un árbol dirigido.

Utilizando las componentes conexas de los  $a$ -niveles de un complejo cúbico difuso se pueden construir dos grafos.

**Definición 3.19.** *Sea  $\mathbb{K}$  un complejo cúbico difuso con soporte finito y con rango finito  $\text{rank}(\mathbb{K}) = \{a_0 = 0, \dots, a_k\}$ . Se construye un grafo no dirigido, denotado por  $T^{\mathbb{K}}$ , de la siguiente manera. Los vértices del grafo son parejas ordenadas de la forma  $(\mathbf{L}, i)$  donde  $\mathbf{L}$  es una componente conexa del complejo  $\mathbb{K}_{[a_i]}$ . Sus aristas son los conjuntos  $\{(\mathbf{L}_1, i), (\mathbf{L}_2, i + 1)\}$  donde  $\mathbf{L}_1$  es una componente conexa de  $\mathbb{K}_{[a_i]}$ ,  $\mathbf{L}_2$  es una componente conexa de  $\mathbb{K}_{[a_{i+1}]}$  y  $\mathbf{L}_2 \subset \mathbf{L}_1$ , para  $i \geq 0$ .*

Una propiedad importante de este grafo está dada en el siguiente teorema.

**Teorema 3.13.** *El grafo  $T^{\mathbb{K}}$  es un árbol.*

*Demostración.* Para demostrar que  $T^{\mathbb{K}}$  es conexo, nótese que, dado cualquier vértice  $(\mathbf{L}_0, i + 1)$  de  $T^{\mathbb{K}}$ , al ser  $\mathbf{L}_0$  un complejo conexo contenido en  $\mathbb{K}_{[a_i]}$ , hay una componente conexa  $\mathbf{L}_1$  de  $\mathbb{K}_{[a_i]}$  que lo contiene. Por inducción, se obtiene una sucesión

$$(\mathbf{L}_0, i + 1), (\mathbf{L}_1, i), \dots, (\mathbf{L}_{i+1}, 0)$$

en la que vértices consecutivos forman una arista del grafo. Como  $\mathbb{K}_{[a_0]} = |\mathbb{Z}^n|$ , se deduce que el grafo es conexo.

Supóngase ahora que  $(\mathbf{L}_0, i_0), \dots, (\mathbf{L}_m, i_m)$  es un ciclo simple de  $T^{\mathbb{K}}$ . Hay dos posibilidades:  $i_1 = i_0 + 1$  o  $i_0 = i_1 + 1$ .

Supóngase primero que  $i_1 = i_0 + 1$ . En este caso,  $\mathbf{L}_1 \subset \mathbf{L}_0$ . Si además  $i_1 = i_2 + 1$  entonces  $i_0 = i_2$ ,  $\mathbf{L}_1 \subset \mathbf{L}_2$  y  $\mathbf{L}_2$  es una componente conexa de  $\mathbb{K}_{[a_{i_0}]}$  cuya intersección con  $\mathbf{L}_0$  es no vacía y por tanto  $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_2$ , lo que contradice la definición de ciclo. En consecuencia,  $i_2 = i_1 + 1$  y  $\mathbf{L}_2 \subset \mathbf{L}_1$ . Por inducción, se deduce que

$$\mathbf{L}_0 \subset \mathbf{L}_{m-1} \dots \subset \mathbf{L}_1 \subset \mathbf{L}_0$$

lo que contradice la definición de ciclo.

En el caso  $i_0 = i_1 + 1$  se aplica un razonamiento similar.  $\square$

Este árbol puede hacerse un árbol dirigido tomando como raíz  $\mathbb{K}_{[a_0]} = |\mathbb{Z}^n|$ . En este caso el vértice  $(\mathbf{L}, i)$  es una hoja si, y sólo si,  $\mathbf{L}$  es un máximo regional de nivel  $a_i$ .

De forma similar se define un grafo  $T_{\mathbb{K}}$  considerando las componentes conexas de los complejos  $\mathbb{K}^{[a_i]}$ . Este grafo también es un árbol y, tomando como raíz a  $\mathbb{K}^{[a_k]} = |\mathbb{Z}^n|$ , los mínimos regionales corresponde a sus hojas.

### 3.7. Grupos de homología

A cada complejo cúbico difuso se le pueden asociar grupos de homología utilizando sus  $a$ -niveles.

**Definición 3.20.** *Dado un complejo cúbico difuso  $\mathbb{K}$  con soporte finito y rango  $\text{rank}(\mathbb{K}) = \{a_0, \dots, a_k\}$ , su  $m$ -ésimo grupo de homología de nivel  $a_i$  se define como*

$$H_m(\mathbb{K}, a_i) = H_m(|\mathbb{K}_{[a_i]}|, |\mathbb{K}_{[a_{i+1}]}|).$$

donde el lado derecho es el  $m$ -ésimo grupo de homología singular del par topológico  $(|\mathbb{K}_{[a_i]}|, |\mathbb{K}_{[a_{i+1}]}|)$ . El rango de este grupo, cuando es finito, es

el  $m$ -ésimo número de Betti de nivel  $a_i$  y se denota por  $\beta_m(\mathbb{K}, a_i)$ . La característica de Euler de nivel  $a_i$  se define como

$$\chi(\mathbb{K}, a_i) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \beta_m(\mathbb{K}, a_i).$$

En el caso de que  $\mathbb{K}$  sea un complejo difuso cerrado, denotando por  $\alpha_k(\mathbb{K}, a_i)$  el número de  $k$ -celdas de  $\mathbb{K}_{[a_i]}$  que no pertenecen a  $\mathbb{K}_{[a_{i+1}]}$ , se demuestra que

$$\chi(\mathbb{K}, a_i) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \alpha_k(\mathbb{K}, a_i).$$

Es sabido que si  $X$  es un espacio topológico arco-conexo y  $A$  es cualquier subconjunto no vacío de  $X$ , entonces el 0-grupo de homología singular  $H_0(X, A)$  es trivial. También se sabe que  $H_0(X, \emptyset)$  es isomorfo a  $H_0(X)$  para cualquier espacio topológico  $X$ . De esto se deduce que, en general, si  $X$  tienen un número finito de componentes arco-conexas, entonces el rango de  $H_0(X, A)$  es igual al número de componentes arco-conexas de  $X$  que no tienen elementos de  $A$ . Por esto, el 0-número de Betti del par  $(|\mathbb{K}_{[a_i]}|, |\mathbb{K}_{[a_{i+1}]}|)$  es igual al número de componentes de  $|\mathbb{K}_{[a_i]}|$  que no contienen elementos de  $|\mathbb{K}_{[a_{i+1}]}|$ . Aplicando el teorema 3.9, se obtiene el siguiente resultado.

**Teorema 3.14.** *El número de máximos regionales de nivel  $a_i$  de un complejo cúbico difuso  $\mathbb{K}$  es  $\beta_0(\mathbb{K}, a_i)$ .*

Cuando todas las celdas de  $\mathbb{K}$  tienen grado 1,  $\beta_0(\mathbb{K}, 1)$  es igual al número de componentes arco-conexas del soporte de  $\mathbb{K}$  y por lo tanto este teorema es una generalización del teorema 1.23.

## Capítulo 4

# Imágenes digitales $n$ -dimensionales en tonos de gris

En este capítulo se muestra cómo se pueden aplicar los conceptos desarrollados en el capítulo 3 para estudiar propiedades topológicas de una imagen digital  $n$ -dimensional en tonos de gris.

La sección 4.1 contiene la definición y conceptos básicos asociados a una imagen digital  $n$ -dimensional en tonos de gris. A este tipo de imágenes se les asocian dos tipos de adyacencia, a partir de los cuales se definen sus extremos regionales y sus árboles de componentes. En la sección 4.2 se muestra cómo asociar a una imagen del tipo considerado un complejo cúbico difuso, llamado su realización geométrica, y se establecen relaciones entre las propiedades de conexidad de la imagen digital y las del complejo cúbico difuso correspondiente. En la sección 4.3 se definen grupos de homología y números de Betti de una imagen digital  $n$ -dimensional en tonos de gris a partir de su realización geométrica y se demuestra que el 0-número de Betti de un nivel dado es igual al número

de máximos regionales de dicho nivel.

## 4.1. Conceptos básicos

En esta sección se propone una definición de imagen digital  $n$ -dimensional en tonos de gris, la cual considera dos tipos de adyacencia para establecer, de forma apropiada, algunos conceptos relacionados con ella, tales como sus extremos regionales y sus árboles de componentes.

**Definición 4.1.** *Una imagen digital  $n$ -dimensional en tonos de gris es una tetrada  $P = (\mathbb{Z}^n, F, k, l)$  en la que  $F$  es un subconjunto difuso de  $\mathbb{Z}^n$  cuyo soporte es finito y  $\{k, l\} = \{3^n - 1, 2n\}$ . El rango de  $F$  se representa por  $\text{rank}(F) = \{a_0 = 0, a_1, \dots, a_m\}$ .*

Una imagen binaria es un tipo particular de imagen en tonos de gris, en la que  $\text{rank}(F) = \{0, 1\}$ ,  $F(p) = 0$  si  $p$  es un punto blanco y  $F(p) = 1$  si  $p$  es un punto negro.

En el caso de las imágenes en tonos de gris, los valores de  $k$  y  $l$  se utilizan para definir sus máximos y sus mínimos regionales. Además, los conjuntos de nivel  $a_i$  de  $F$  están formados por puntos lattice y en consecuencia se pueden aplicar los conceptos definidos en el capítulo 2.

**Definición 4.2.** *Un máximo regional de nivel  $a_i > 0$  de una imagen en tonos de gris  $P = (\mathbb{Z}^n, F, k, l)$  es una  $k$ -componente de  $F_{[a_i]}$  que no contiene elementos de  $F_{[a_{i+1}]}$ . Un mínimo regional de nivel  $a_i \in (0, 1)$  de esta imagen es una  $l$ -componente finita de  $F^{[a_i]}$  que no tiene elementos de  $F^{[a_{i-1}]}$ .*

Estas definiciones generalizan las de componente y agujero de una imagen binaria, respectivamente.

**Definición 4.3.** *Dada una imagen en tonos de gris  $P = (\mathbb{Z}^n, F, k, l)$ , se construye un grafo no dirigido, denotado por  $T^P$ , de la siguiente forma. Sus vértices son parejas ordenadas de la forma  $(B, i)$ , donde  $B$  es una  $k$ -componente de  $F_{[a_i]}$ . Sus aristas son los conjuntos de la forma*



$\{(B_1, i), (B_2, i + 1)\}$ , donde  $B_1$  es una  $k$ -componente de  $F_{[a_i]}$ ,  $B_2$  es una  $k$ -componente de  $F_{[a_{i+1}]}$  y  $B_2 \subset B_1$ , para  $i \geq 0$ .

Siguiendo un razonamiento similar al de la demostración del teorema 3.13, se prueba que este grafo también es un árbol, que puede hacerse dirigido tomando como raíz a  $F_{[a_0]} = \mathbb{Z}^n$ . En este caso, un vértice  $(B, i)$  es una hoja si, y sólo si,  $B$  es un máximo regional de  $P$ .

De forma similar, se puede definir un grafo  $T_P$  considerando las  $l$ -componentes de  $F^{[a_i]}$ . Este es un árbol y, considerando como raíz al conjunto  $F^{[a_m]} = \mathbb{Z}^n$ , los mínimos regionales corresponden a sus hojas.

## 4.2. Realización geométrica

A partir de una imagen digital en tonos de gris se puede construir un complejo cúbico difuso llamado realización geométrica de la imagen en tonos de gris. La construcción depende del tipo de adyacencia empleado.

**Definición 4.4.** *Dada una imagen en tonos de gris  $P = (\mathbb{Z}^n, F, 3^n - 1, 2n)$  se construye un complejo cúbico difuso de la siguiente manera. Si  $s$  es una celda en  $|\mathbb{Z}^n|$ , se define:*

$$U_P(s) = \text{máx} \{F(p) : s \in G(p)\}.$$

*A cada celda  $s$  con  $U_P(s) \neq 0$  se le asocia una celda difusa  $s'$  cuyo soporte es  $s$  y cuyo grado de pertenencia es  $U_P(s)$ . El conjunto de las celdas difusas  $s'$  construidas de esta forma es un complejo cúbico difuso llamado la realización geométrica de la imagen  $P$  y se denota por  $|P|$ .*

Nótese que, de acuerdo con esta definición,  $U_P(s) = F(p)$  para algún  $p$  tal que  $s \in G(p)$ . Además, si  $s = s(x, \Lambda)$  entonces  $U_P(s) \geq F(x)$  porque  $s$  es una cara de la  $n$ -celda  $s(x)$ .

De acuerdo con esta definición, para calcular  $U_P(s)$  se considera el valor de  $F$  en los puntos lattice  $p$  para los cuales  $s$  es una cara de la  $n$ -celda  $s(p)$ .

**Definición 4.5.** Dada una imagen en tonos de gris  $P = (\mathbb{Z}^n, F, 2n, 3^n - 1)$  se construye un complejo cúbico difuso de la siguiente manera. Si  $s$  es una celda en  $|\mathbb{Z}^n|$ , se define:

$$L_P(s) = \text{mín} \{F(p) : s \in G(p)\}.$$

A cada celda  $s$  con  $L_P(s) \neq 0$  se le asocia una celda difusa  $\mathbf{s}'$  cuyo soporte es  $s$  y cuyo grado de pertenencia es  $L_P(s)$ . El conjunto de las celdas difusas  $\mathbf{s}'$  construidas de esta forma es un complejo cúbico difuso llamado la realización geométrica de la imagen  $P$  y se denota por  $|P|$ .

En este caso también se cumple que  $L_P(s) = F(p)$  para algún  $p$  tal que  $s \in G(p)$ . Cuando  $s = s(x, \Lambda)$ ,  $L_P(s) \leq F(x)$ .

Los siguientes dos teoremas muestran la relación que existe entre los conjuntos de nivel de una imagen en tonos de gris y los de su realización geométrica.

**Teorema 4.1.** Sea  $P = (\mathbb{Z}^n, F, 3^n - 1, 2n)$  una imagen en tonos de gris. Para cada  $a \in I$  se cumple

$$GC(F_{[a]}) = |P|_{[a]},$$

es decir, la realización geométrica cerrada del conjunto de puntos lattice correspondientes al  $a$ -nivel superior cerrado del conjunto difuso  $F$  es igual al  $a$ -nivel superior cerrado de la realización geométrica de la imagen  $P$ .

*Demostración.* Supóngase primero que  $a > 0$  y que  $s$  es una celda de  $GC(F_{[a]})$ . Existe  $p \in \mathbb{Z}^n$  tal que  $F(p) \geq a$  y  $s \in G(p)$ . Por la definición de  $U_P$ , esto implica que  $U_P(s) \geq a$ . Así, la celda difusa  $\mathbf{s}'$  cuyo soporte es  $s$  y cuyo grado de pertenencia es  $U_P(s)$  pertenece a  $|P|$  y, en consecuencia  $s \in |P|_{[a]}$ .

Ahora, si  $s \in |P|_{[a]}$ , entonces  $s = \text{supp}(\mathbf{s}')$  para alguna celda difusa  $\mathbf{s}' \in |P|$  con  $\text{deg}(\mathbf{s}') \geq a$ . De acuerdo con la definición de  $|P|$ ,  $\text{deg}(\mathbf{s}') = F(p)$  para algún  $p \in \mathbb{Z}^n$ , con  $F(p) \geq a$ , es decir,  $s \in GC(F_{[a]})$ .

Cuando  $a = 0$ , es claro el resultado. □

**Teorema 4.2.** *Sea  $P = (\mathbb{Z}^n, F, 2n, 3^n - 1)$  una imagen en tonos de gris. Para cada  $a \in I$  se cumple*

$$GC(F^{[a]}) = |P|^{[a]}.$$

*Demostración.* Si  $s$  es una celda en  $GC(F^{[a]})$ , entonces existe  $p \in \mathbb{Z}^n$  tal que  $F(p) \leq a$  y  $s \in G(p)$ . De forma similar a la demostración del teorema anterior, se prueba que  $L(s) \leq F(p)$ . En el caso  $L_P(s) = 0$ , se deduce que  $s \in \text{Bk}(|P|)$ , mientras que si  $L_P(s) > 0$ , la celda difusa  $s'$  con soporte  $s$  y grado de pertenencia igual a  $L_P(s)$  está en  $|P|$ . En ambos casos, se concluye que  $s \in |P|^{[a]}$ .

Ahora, si  $s \in |P|^{[a]}$  y  $s \notin \text{Bk}(|P|)$ , entonces  $s = \text{supp}(s')$  para algún  $s' \in |P|$  con  $\text{deg}(s') \leq a$ . Esto implica, razonando como en la demostración del teorema previo, que  $s \in G(p)$  para algún  $p$  con  $F(p) \leq a$ , por lo que  $s \in GC(F^{[a]})$ . En el caso  $s \in \text{Bk}(|P|)$ , es claro que  $s \in |P|^{[a]}$ . □

Utilizando los resultados anteriores y los teoremas 1.12, 1.13, se deduce la siguiente propiedad de la realización geométrica de una imagen en tonos de gris, de acuerdo con el tipo de adyacencia correspondiente.

**Teorema 4.3.** *La realización geométrica de una imagen  $P = (\mathbb{Z}^n, F, 3^n - 1, 2n)$  es un complejo cúbico difuso cerrado.*

**Teorema 4.4.** *La realización geométrica de una imagen  $P = (\mathbb{Z}^n, F, 2n, 3^n - 1)$  es un complejo cúbico difuso abierto.*

Estos dos resultados muestran que las definiciones propuestas de realización geométrica para imágenes en tonos de gris generalizan las de realización geométrica para imágenes binarias, de acuerdo con las definiciones 2.12 y 2.13.

En los siguientes teoremas se muestra la estrecha relación que hay entre los extremos regionales de una imagen y los de su realización geométrica como complejo cúbico difuso.

**Teorema 4.5.** *Sea  $P = (\mathbb{Z}^n, F, 3^n - 1, 2n)$  una imagen en tonos de gris y  $M \subset \mathbb{Z}^n$ . El conjunto  $M$  es un máximo regional de  $P$  si, y sólo si, su realización geométrica cerrada  $GC(M)$  es un máximo regional de la realización geométrica  $|P|$  de  $P$ .*

*Demostración.* Supóngase que  $M$  es un máximo regional de nivel  $a_i$  de  $P$ . Esto implica que  $M$  es una  $(3^n - 1)$ -componente de  $F_{[a_i]}$ , con  $a_i = F(x)$  para algún  $x$  en  $M$  y, por el teorema 2.4, su realización geométrica cerrada  $GC(M)$  es un subcomplejo conexo de  $|P|_{[a_i]}$ . Si  $s$  es cualquier celda en  $|P|_{[a_i]}$  tal que  $GC(M) \cup \{s\}$  es conexo, entonces existe  $p \in \mathbb{Z}^n$  tal que  $s \in G(p)$  y  $F(p) \geq a_i$ . Con esto,  $GC(M \cup \{p\}) = GC(M) \cup G(p)$  también es un complejo cúbico conexo, por lo que, de acuerdo nuevamente con el teorema 2.4,  $M \cup \{p\}$  es un conjunto  $(3^n - 1)$ -conexo contenido en  $F_{[a_i]}$ . Esto implica que  $p \in M$  y por tanto  $s \in GC(M)$ . Así,  $GC(M)$  es una componente conexa de  $|P|_{[a_i]}$ .

Ahora, si  $GC(M)$  contiene algún elemento de  $|P|_{[a_{i+1}]}$ , entonces existe una celda  $s$  tal que  $s \in G(p)$  para algún  $p \in M$  y  $s$  es el soporte de una celda difusa  $\mathbf{s}'$  en  $|P|$  con  $\deg(\mathbf{s}') \geq a_{i+1}$ . Como  $\deg(\mathbf{s}') = F(q)$  para algún  $q$  tal que  $s \in G(q)$ , el complejo cúbico  $GC(M) \cup G(q)$  es conexo, lo que implica que  $M \cup \{q\}$  es  $(3^n - 1)$ -conexo y por tanto  $q \in M$ , con  $F(q) = \deg(\mathbf{s}') \geq a_{i+1}$ , contradiciendo que  $M$  es un máximo regional de nivel  $a_i$ .

Supóngase ahora que  $GC(M)$  es un máximo regional de nivel  $a_i$  de  $|P|$ . Hay que probar que  $M$  es máximo regional de nivel  $a_i$  de  $F$ . Como  $GC(M)$  es conexo,  $M$  es  $(3^n - 1)$ -conexo. Además, para cada  $p \in M$ , la  $n$ -celda  $s(p)$  es el soporte de una celda difusa  $\mathbf{s}'$  en  $|P|$ , con grado de pertenencia  $F(p) \geq a_i$ . Así,  $M \subset F_{[a_i]}$ .

Si  $p$  es  $(3^n - 1)$ -adyacente a  $M$  y  $p \in F_{[a_i]}$ , entonces  $GC(M) \cup G(p)$  es un complejo cúbico conexo contenido en  $|P|_{[a_i]}$ , por lo que  $G(p) \subset GC(M)$ . Por tanto,  $p \in M$  y  $M$  es una  $(3^n - 1)$ -componente de  $F_{[a_i]}$ . Además, si  $M$  contiene algún elemento  $p$  de  $F_{[a_{i+1}]}$  entonces la  $n$ -celda  $s = s(x)$  es el soporte de una celda difusa  $\mathbf{s}'$  de  $|P|$  con  $\deg(\mathbf{s}') \geq a_{i+1}$  y  $s \in GC(M)$ , contradiciendo que  $GC(M)$  es un máximo regional de nivel

$a_i$  de  $|P|$ .

□

De forma similar se demuestra el siguiente resultado

**Teorema 4.6.** *Sea  $P = (\mathbb{Z}^n, F, 2n, 3^n - 1)$  una imagen en tonos de gris y  $M \subset \mathbb{Z}^n$ . El conjunto  $M$  es un máximo regional de  $P$  si, y sólo si, su realización geométrica abierta  $GO(M)$  es un máximo regional de la realización geométrica  $|P|$  de  $P$ .*

Como consecuencia de este teorema se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 4.7.** *Para una imagen en tonos de gris  $P = (\mathbb{Z}^n, F, k, l)$ , su árbol superior es isomorfo al de su realización geométrica.*

Resultados similares se obtienen en el caso de los mínimos regionales.

**Teorema 4.8.** *Sea  $P = (\mathbb{Z}^n, F, 3^n - 1, 2n)$  una imagen en tonos de gris y  $M$  un subconjunto de  $\mathbb{Z}^n$ . El conjunto  $M$  es un mínimo regional de  $P$  si, y sólo si, su realización geométrica abierta  $GO(M)$  es un mínimo regional de la realización geométrica de  $P$ .*

**Teorema 4.9.** *Sea  $P = (\mathbb{Z}^n, F, 2n, 3^n - 1)$  una imagen en tonos de gris y  $M$  un subconjunto finito de  $\mathbb{Z}^n$ . El conjunto  $M$  es un mínimo regional de  $P$  si, y sólo si, su realización geométrica cerrada  $GC(M)$  es un mínimo regional de la realización geométrica de  $P$ .*

**Teorema 4.10.** *Para una imagen en tonos de gris  $P = (\mathbb{Z}^n, F, k, l)$ , su árbol inferior es isomorfo al de su realización geométrica.*

### 4.3. Grupos de homología

En esta sección se definen los grupos de homología y la característica de Euler por niveles de una imagen en tonos de gris y se muestra la relación de uno de estos grupos con una propiedad de conexidad de la imagen.

**Definición 4.6.** Dada una imagen digital en tonos de gris  $P = (\mathbb{Z}^n, F, k, l)$  con  $\text{rank}(F) = \{a_0 = 0, a_1, \dots, a_n\}$ , su  $m$ -ésimo grupo de homología de nivel  $a_i$  se define como

$$H_m(P, a_i) = H_m(|P|, a_i).$$

El rango de este grupo, cuando es finito, se le llama el  $m$ -ésimo número de Betti de  $P$  de nivel  $a_i$  y se representa por  $\beta_m(P, a_i)$ . La característica de Euler de nivel  $a_i$  de  $P$  se define como

$$\chi(P, a_i) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \beta_m(P, a_i).$$

Una propiedad importante de estos grupos de homología es la siguiente.

**Teorema 4.11.** El número de máximos regionales de nivel  $a_i$  de una imagen digital en tonos de gris  $P = (\mathbb{Z}^n, F, k, l)$  es  $\beta_0(P, a_i)$ .

*Demostración.* Por los teoremas 4.5 y 4.6,  $P$  y  $|P|$  tienen el mismo número de máximos regionales de nivel  $a_i$ . Por el teorema 3.14, este número es igual a  $\beta_0(|P|, a_i)$ .  $\square$

# Conclusiones y trabajo futuro

En esta tesis se ha mostrado cómo se puede generalizar el concepto de complejo cúbico utilizando elementos de matemática difusa y se han demostrado algunas de sus propiedades básicas. También se ha establecido su relación con los complejos cúbicos ordinarios, se han definido los conceptos de extremo regional y de árbol de componentes, que generalizan los correspondientes para complejos cúbicos. A cada complejo cúbico difuso se le han asociado grupos de homología y se ha demostrado que el 0-número de Betti de un nivel dado es igual al número de máximos regionales de dicho nivel. También se ha presentado una definición de imagen digital en tonos de gris considerando diferentes tipos de adyacencia y se han definido los conceptos de extremos regionales y de árboles de componentes. Como una aplicación de la teoría de complejos cúbicos difusos desarrollada se ha mostrado cómo se puede construir un complejo cúbico difuso a partir de una imagen digital  $n$ -dimensional en tonos de gris de tal manera que sus propiedades topológicas estén estrechamente relacionadas.

El resultado principal de este trabajo es el teorema 4.11, en el cuál se demuestra que, independientemente del tipo de adyacencia de una imagen digital  $n$ -dimensional en tonos de gris, la teoría desarrollada en este trabajo en torno a los conceptos de complejo cúbico difuso y de

realización geométrica difusa de dicha imagen permite expresar propiedades de un objeto discreto en términos de objetos en los que se pueden aplicar herramientas de la topología algebraica a fin de estudiar dichas propiedades.

Como trabajo futuro se plantea investigar el significado de los grupos de homología de órdenes superiores de estos complejos cúbicos difusos y sus implicaciones en el estudio de las imágenes digitales en tonos de gris. También se plantea el trabajo de desarrollar métodos que faciliten el cálculo de los rangos de los grupos de homología de los complejos cúbicos difusos. Otra posible línea de investigación es definir transformaciones topológicas en las imágenes en tonos de gris y estudiar el efecto de estas en los grupos de homología definidos en este trabajo. Se puede investigar también, la existencia de invariantes topológicos similares a la característica de Euler para los complejos cúbicos difusos, además de determinar su utilidad en el estudio de las imágenes digitales en tonos de gris.



# Bibliografía

- [1] Bayramov, S. y Gunduz, C., *The Čech homology theory in the category of Šostak fuzzy topological spaces*, International Journal of Contemporary Mathematical Sciences **5** (2010), no. 9, 433–448.
- [2] Bertrand, G., Everat, J. y Couprie, M., *Image segmentation through operators based upon topology*, Journal of Electronic Imaging **6**, no. 04, 395–405.
- [3] Bykov, A. I. y Zerkalov, L. G., *Algorithms for homotopy classification of binary images*, Pattern Recognition **29** (1996), no. 4, 565–574.
- [4] Bykov, A. I., Zerkalov, L. G., Albores-Velasco, F.J. y Rodríguez-Pineda, M. A., *New connected components algorithms and invariant transformations of digital images*, Pattern Recognition **31** (1998), no. 8, 1089–1098.
- [5] Bykov, A. I., Zerkalov, L.G. y Rodríguez-Pineda, M. A., *Index of a point of 3-d digital binary image and algorithm for computing its Euler characteristic*, Pattern Recognition **32** (1999), no. 5, 845–850.
- [6] Caselles, V., Meinhardt, E. y Monasse, P., *Constructing the tree of shapes of an image by fusion of the trees of connected components of upper and lower level sets*, Positivity **12** (2008), 55–73.
- [7] Caselles, V. y Monasse, P., *Geometric description of images as topographic maps*, Springer, 2010.
- [8] Chang, C. L., *Fuzzy topological spaces*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **24** (1968), no. 1, 182–190.

- [9] Jones, R., *Component tree for image filtering and segmentation*, Computer Vision and Image Understanding (1997).
- [10] Kaczynski, T., Mischaikow, K. y Mrozek, M., *Computing homology*, Homology, Homotopy and Applications **5** (2003), no. 2, 233–256.
- [11] Kerre, E. E., *A historical overview of fuzzy mathematics*, New Mathematics and Natural Computation **1** (2005), no. 1, 1–26.
- [12] Khachan, A., *Polyhedral representation and adjacency graph in  $n$ -dimensional digital images*, Computer Vision and Image Understanding **79** (2000), no. 3, 428 – 441.
- [13] Kong, T. Y. y Rosenfeld, A., *Digital topology: Introduction and survey*, Computer Vision and Image Processing **48** (1989), 357–393.
- [14] Liu, W. J. y Zheng, C. Y. *Singular homology groups of fuzzy topological spaces*, Fuzzy Sets and Systems **15** (1985), no. 2, 199–207.
- [15] Liu, Y. M. y Luo, M. K. *Fuzzy topology*, Advances in Fuzzy Systems-Applications and Theory, vol. 9, World Scientific, Singapore, 1997.
- [16] Lowen, R. *Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **56** (1976), 621–633.
- [17] Lowen, R. , *Convex fuzzy sets*, Fuzzy Sets and Systems **3** (1980), no. 3, 291–310.
- [18] Lowen, R. , *Connectedness in fuzzy topological spaces*, Rocky Mountain Journal of Mathematics **11** (1981), 427–433.
- [19] Lubczonok, P., *Fuzzy vector spaces*, Fuzzy Sets and Systems **38** (1990), no. 3, 329–343.
- [20] Mrozek M. y Batko, B., *Coreduction homology algorithm*, Discrete Computational Geometry **41** (2009), 96–118.
- [21] Najman, L. y Couprie, M., *Quasi-linear algorithm for the component tree*, Proceedings SPIE Vision Geomtry XII, vol. 5300, 2004, 98–107.
- [22] Nakamura, A. y Aizawa, K., *Some results concerning connected fuzzy digital pictures*, Pattern Recognition Letters **12** (1991), 335–341.

- [23] Niethammer, M., Kalies, W. D., Mischaikow, K. y Tannenbaum, A., *On the detection of simple points in higher dimensions using cubical homology*, IEEE Transactions on Image Processing **15** (2006), no. 8, 2462–2469.
- [24] Rodríguez Pineda, M. A., *El concepto de índice de un punto lattice en el análisis homotópico de 2d y 3d imágenes y su realización algorítmica*, tesis de doctorado, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 1997.
- [25] Robins, V., Wood, P. J. y Sheppard, A. P., *Theory and algorithms for constructing discrete morse complexes from grayscale digital images*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence **33** (2011), no. 8, 1646–1658.
- [26] Rosenfeld, A., *Fuzzy groups*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **35** (1971), no. 3, 512–517.
- [27] Rosenfeld, A., *Fuzzy digital topology*, Information and Control **40** (1979), no. 1, 76–87.
- [28] Rosenfeld, A., *On connectivity properties of grayscale pictures*, Pattern Recognition **6** (1983), no. 1, 47–50.
- [29] Rosenfeld, A., *Digital topology*, The American Mathematical Monthly **86** (1979), no. 8, 621–630.
- [30] Rosenfeld, A., *From image analysis to computer vision: An annotated bibliography, 1955-1979*, Computer Vision and Image Understanding **84** (2001), 298–324.
- [31] Salleh, A. R., *The homotopy property of the induced homomorphisms on homology groups of fuzzy topological spaces*, Fuzzy Sets and Systems **56** (1993), 111–116.
- [32] Sidky, F. I. y Mishref, M. A., *Fuzzy cosets and cyclic and abelian fuzzy subgroups*, Fuzzy Sets and Systems **43** (1991), no. 2, 243–250.
- [33] Wang J. L. y Chong, Z.Y., *Singular homology groups of fuzzy topological spaces*, Fuzzy Sets and Systems **15** (1985), 199–207.
- [34] Zadeh, L. A., Fu, K. S., Tanaka, K. y Shimura, M., *Fuzzy sets and their applications to cognitive and decision processes*, Academic Press, New York, 1975.

- [35] Zadeh, L. A., *Fuzzy sets*, Information and Control **8** (1965), no. 3, 238–353.
- [36] Ziou, D. y Allili, M., *Generating cubical complexes from image data and computation of the euler number*, Pattern Recognition **35** (2002), no. 12, 2833–2839.
- [37] Zomorodian, A. y Carlsson, G., *Computing persistent homology*, Discrete and Computational Geometry **33** (2005), no. 2, 249–274.