Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Estudio de independencia de la norma en la polarización del vacío.

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Melissa Ledesma Olmos

Asesorada por

Dr. J. Jesús Toscano Chávez

Dr. Oscar Vázquez Hernández

Puebla Pue.
6 de noviembre de 2023

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Estudio de independencia de la norma en la polarización del vacío.

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Melissa Ledesma Olmos

Asesorada por

Dr. J. Jesús Toscano Chávez

Dr. Oscar Vázquez Hernández

Puebla Pue.
6 de noviembre de 2023

Título: Estudio de independencia de la norma en la polarización del vacío.
Estudiante: Melissa Ledesma Olmos

COMITÉ

Dr. Gilberto Silva Ortigoza
Presidente

Dr. Héctor Novalez Sánchez
Secretario

Dra. Ana Aurelia Avilez López
Vocal

Dr. Roberto Cartas Fuentevilla
Vocal

Dr. J. Jesús Toscano Chávez

Dr. Oscar Vázquez Hernández
Asesor

Índice general

1. Electrodinámica escalar **5**
- 1.1. Derivada covariante . . . 6
- 1.2. Reglas de Feynman . . . 8
  - 1.2.1. Propagadores . . . 8
  - 1.2.2. Funciones vértice . . . 10
- 1.3. Lagrangiana renormalizada y de contratérminos . . . 10
- 1.4. Polarización del vacío en la electrodinámica escalar . . . 12

2. Polarización del vacío en la electrodinámica espinorial **15**
- 2.1. Propagador de los campos ψ y la función vértice $A\psi\overline{\psi}$ . . . 16
- 2.2. Lagrangiana renormalizada y de contratérminos . . . 18
- 2.3. Polarización del vacío . . . 18
- 2.4. Efecto de apantallamiento. . . . 20

3. Efectos de un campo de norma sobre la polarización del vacío **23**
- 3.1. Propagadores de los campos vectoriales . . . 24
- 3.2. Electrodinámica vectorial . . . 24
- 3.3. Seudobosones de Goldstone y campos fantasma . . . 25
- 3.4. Correcciones a la polarización del vacío en el contexto de la electrodinámica vectorial 29

4. Conclusiones **33**

A. La función escalar B_0 **35**

Bibliografía **37**

Resumen

Se realiza un estudio de la función de la polarización del vacío la cual está relacionada con el fenómeno del apantallamiento. Se calcula esta función dentro de tres contextos, donde cada uno de ellos está caracterizado por sus contribuciones, a un lazo, de partículas cargadas y espín $0, \frac{1}{2}$ y 1, respectivamente. En el primer caso se estudia la polarización del vacío bajo la electrodinámica escalar, la cual contiene interacciones entre el campo del fotón y campos escalares cargados. En un segundo caso se estudia dicha función bajo la electrodinámica espinorial, la cual genera interacciones entre el fotón y los fermiones cargados. Finalmente se estudia la función de polarización del vacío bajo los efectos de un campo vectorial de norma masivo, correspondiente al bosón de norma $W_{\mu}^{\pm}$. Este último cálculo tiene como propósito estudiar la dependencia o independencia de norma de la función de polarización del vacío.

Introducción

El estudio de fenómenos electromagnéticos ha sido ampliamente desarrollado desde el siglo XVII, estos avances en la materia fueron sintetizados en lo que hoy se conoce como las ecuaciones de Maxwell. Con el nacimiento de la mecánica cuántica, surgieron interrogantes respecto a la naturaleza de los fenómenos electromagnéticos en estas escalas. En 1928 Dirac se propuso responder esta pregunta, dando origen a lo que hoy conocemos como electrodinámica cuántica. En esta nueva formulación se describen fenómenos electromagnéticos a escalas muy pequeñas o de manera equivalente a energías muy grandes. En las unidades fundamentales ($\hbar = 1 = c$), podemos ver una relación clara entre la variación de la energía y la distancia ya que en este sistema la distancia y energía son cantidades recíprocas. Por ejemplo, en una interacción entre cargas eléctricas proyectadas a cargas de prueba, conforme mayor energía es aplicada, nos encontraremos cada vez más cerca de las cargas de prueba. Dicho de otra manera, entre más energía tenga la partícula proyectil, más cerca se estará de las partículas blanco. Este interesante fenómeno es explicado de forma precisa por la Teoría Cuántica de Campos, formulación que incorpora los principios de la teoría cuántica con los fundamentos de la relatividad especial [1]. El estudio de las partículas que componen la materia, llamadas fermiones dio origen a la ecuación de Dirac y paralelamente con el estudio de la fuerza electromagnética surgió lo que hoy en día se conoce como teorías de norma [2]. El desarrollo de esta rama de la física llevó a la creación del Modelo Estándar de las partículas elementales [3, 4, 5], el cual es el modelo más preciso que se tiene actualmente para el estudio de las interacciones fundamentales, exceptuando gravedad.

Por otro lado, la interacción electromagnética está determinada por la carga eléctrica que poseen las partículas interactuantes, sin embargo, la teoría muestra que el valor de esta carga depende de la energía del sistema, esto ha sido verificado arduamente de manera experimental. La constante de estructura fina, definida como $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$, permite cuantificar a la carga eléctrica, la cual tiene un valor aproximado de $\alpha = \frac{1}{137}$ a muy bajas energías (con un fotón emitido o absorbido de energía casi igual a cero) y un valor de $\alpha = \frac{1}{128}$ a energías del orden de la masa del bosón de norma débil $W^{\pm}$ [6]. La dependencia del valor de la carga eléctrica con la energía es explicada por el fenómeno de la polarización del vacío, el cual surge como consecuencia directa del principio de incertidumbre. Este principio explica que toda partícula que posea carga eléctrica, en particular el electrón, emite y reabsorbe constantemente fotones virtuales, lo cual ocurre como consecuencia de una violación momentánea del principio de la conservación de la energía. Los fotones virtuales emitidos desaparecen en pares electrón-positrón que a su vez se recombinan para generar nuevamente en un fotón virtual, creándose así una nube de partículas virtuales cargadas que generan un efecto de apantallamiento sobre el contenido de carga que posee la partícula real. Estas fluctuaciones cuánticas de partículas cargadas generan un efectos cuantificables en el propagador del fotón virtual emitido, lo cual tiene como consecuencia un efecto de polarización similar al que se da en un material dieléctrico cuando se introduce en su interior una carga eléctrica, razón por la cual se le ha dado el nombre de polarización del vacío. Toda partícula cargada afecta el propagador del fotón y, por lo tanto, contribuye a la polarización del vacío. Clasificándolas de acuerdo con su espín, podemos tener la contribución de partículas cargadas de espín 0, mejor conocidas como partículas escalares; la contribución de partículas de espín $\frac{1}{2}$, como el electrón mismo, a las que en general se les llama fermiones y partículas de espín 1, como es el caso del bosón de norma débil $W^{\pm}$.

En este trabajo de tesis, se revisa la contribución a la polarización del vacío generada por un campo escalar cargado, el campo fermiónico y el campo vectorial cargado. El contenido original de esta tesis es el estudio de la contribución del campo vectorial de norma del bosón $W^{\pm}$. El objetivo central de este estudio es determinar si la contribución a la función de polarización debida

a este campo es dependiente o independiente de la norma, es decir, deducir si esta depende del procedimiento usado para fijar la norma asociada al grupo de la interacción débil $SU_L(2)$ al cual está asociado el campo $W^{\pm}$.

El contenido de la tesis ha sido organizado de la siguiente manera: En el Capítulo 1 se estudia la contribución a la polarización del vacío de un escalar cargado, en el contexto de la electrodinámica escalar (SQED) por sus siglas en inglés; el Capítulo 2 está dedicado al estudio de la contribución a la función de polarización de un campo fermiónico, como el electrón, en el contexto de la electrodinámica espinorial (QED), y su relación con el efecto de apantallamiento; en el Capítulo 3 en el que se determina la contribución original de este trabajo, en el que se presenta el estudio de la contribución del bosón de norma $W^{\pm}$ a la función de polarización del vacío. Finalmente, en el Capítulo 4 se establecen las conclusiones del trabajo.

Capítulo 1

Electrodinámica escalar

En este capítulo se introducen las generalidades de la electrodinámica escalar. Se establecen la lagrangiana renormalizada y la lagrangiana de contratérminos, así como las respectivas reglas de Feynman. Se estudia la contribución a orden de un lazo a la polarización del vacío y posteriormente su renormalización.

Un campo escalar real $\phi(x)$, o campo de Klein-Gordon, es aquel que, bajo una transformación de Lorentz Λ del grupo $SO(1,3)$:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \,, \tag{1.1}$$

se transforma como

$$\phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1} x) \,. \tag{1.2}$$

Usando campos reales, podemos definir a los campos complejos ϕ^+ y ϕ^- de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \phi^+(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_1(x) + i\phi_2(x)] \,, \\ \phi^-(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_1(x) - i\phi_2(x)] \,, \end{aligned} \tag{1.3}$$

donde estos campos complejos son mutuamente conjugados. El término $\frac{1}{\sqrt{2}}$ es un factor de normalización. La lagrangiana libre de Klein-Gordon con campos complejos está definida de la siguiente forma

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^+)(\partial^\mu \phi^-) - m^2(\phi^+)\phi^- . \tag{1.4}$$

Este lagrangiano es invariante bajo transformaciones globales del grupo unitario $U(1)$,

$$\phi'^{\pm}(x) = e^{\pm i\alpha}\phi^{\pm}(x), \tag{1.5}$$

siendo α el parámetro de transformación, el cual es constante. Por otro lado, una transformación se llama local si el parámetro de transformación depende de los puntos del espacio tiempo $\alpha = \alpha(x)$, en este sentido, una transformación local de los campos cargados luce como

$$\phi'^{\pm}(x) = e^{\pm i\alpha(x)}\phi^{\pm}(x). \tag{1.6}$$

Se puede observar que el lagrangiano (1.4) no es invariante bajo transformaciones locales ya que el término cinético no se transforma covariantemente,

$$\begin{aligned} [\partial_\mu \phi(x)]' &= \partial_\mu [e^{i\alpha(x)}\phi(x)] \\ &= e^{i\alpha(x)}\partial_\mu \phi(x) + ie^{i\alpha(x)}\partial_\mu \alpha(x). \end{aligned} \tag{1.7}$$

El último término de la expresión anterior impide considerar que la derivada sobre un campo se transforma de manera covariante. Es necesario definir un nuevo objeto que reemplace a la derivada ordinaria ∂_μ, de tal forma que, al actuar sobre el campo, nos de un objeto que se transforme de manera covariante como lo hace el campo $\phi^{\pm}$. Esto se estudiará en la siguiente sección.

1.1. Derivada covariante

Se busca generalizar el lagrangiano (1.4), de forma que permanezca invariante bajo el grupo unitario local $U(1)$. Este grupo caracteriza a la electrodinámica, en la literatura se denota al grupo electromagnético $U_Q(1)$ como el grupo unitario de transformaciones

$$U_Q(1) \; : \; e^{ie\alpha(x)} \tag{1.8}$$

donde la e del argumento del exponente es la carga eléctrica. Para establecer una ley de transformación covariante sobre la derivada, se analiza a la derivada de un campo ϕ en la dirección del vector n^μ de $SO(1,3)$,

$$n^\mu \partial_\mu \phi(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}[\phi(x+\varepsilon n) - \phi(x)]. \tag{1.9}$$

Es importante notar que ambos campos $\phi(x+\varepsilon n)$ y $\phi(x)$ se transforman en dos espacios lineales diferentes ya que hay un grupo unitario $U_Q(1)$, definido en cada punto x del espacio-tiempo, con lo cual se verifica claramente que $\partial_\mu \phi$ no tiene un sentido covariante bajo el grupo electromagnético.

Para comparar dos campos definidos en espacios diferentes, es necesario introducir un factor que compense la diferencia de las fases $i\alpha(x)$ y $i\alpha(x+\varepsilon n)$ de las transformaciones de un punto a otro. Este efecto compensatorio requiere introducir un nuevo grado de libertad, o campo, mismo que será el responsable de la interacción electromagnética.

En primer lugar, introducimos al objeto $U(y,x)$, también llamado *comparador*, que está definido como una fase pura con dependencia en dos puntos arbitrarios del espacio-tiempo, x e y. Dicho objeto tiene la siguiente regla de transformación:

$$U'(y,x) = e^{ie\,\alpha(y)} U(y,x) e^{-ie\,\alpha(x)}, \tag{1.10}$$

donde $U(y,x) = e^{i\omega(y,x)}$. Note que para $x = y$ se tiene la transformación identidad, $U(x,x) = 1$; por otro, lado se puede ver que el objeto $U(y,x)\phi(x)$ tiene la misma ley de transformación que $\phi(y)$, lo que quiere decir que ambos objetos se transforman en el espacio definido en el punto y. Con lo anterior, se puede notar que es posible sustraer $U(y,x)\phi(x)$ de $\phi(y)$ de forma que dicha diferencia se transforma bajo el mismo grupo unitario $U_e(1)$. Ahora es posible, definir una derivada con sentido geométrico comparando dos puntos separados infinitesimalmente por $\Delta x = \varepsilon n$, esta tiene la siguiente forma:

$$n^\mu D_\mu \phi(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}[U(x, x+\varepsilon n)\phi(x+\varepsilon n) - \phi(x)], \tag{1.11}$$

donde a D_μ se le conoce como la derivada covariante. Dado que ε es infinitesimal, se puede hacer el siguiente desarrollo en serie hasta orden ε:

$$\begin{aligned} U(x+\varepsilon n, x) &= U(x+\varepsilon n, x)|_{\epsilon=0} + n^\mu \partial\mu U|_{\epsilon=0} + O(\varepsilon^2) \\ &= U(x,x) + ie\,\varepsilon n^\mu A_\mu(x) + O(\varepsilon^2) \\ &= 1 + ie\,\varepsilon n^\mu A_\mu(x) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{1.12}$$

donde el término $A_\mu(x)$ es una conexión. De modo que, en el límite $\varepsilon \to 0$, $n^\mu D_\mu \phi(x)$ es igual a:

$$n^\mu [\partial_\mu - ieA_\mu(x)]\phi(x), \tag{1.13}$$

lo que conduce a la definición usual de la derivada covariante:

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu. \tag{1.14}$$

El campo vectorial $A_\mu(x)$ introduce nuevos grados de libertad, cuya ley de transformación puede ser obtenida al explorar la ley de transformación de $U(x+\varepsilon n, x)$. Considere la siguiente transformación:

$$\begin{aligned} U'(x+\varepsilon n, x) &= e^{i\alpha(x+\varepsilon n)} U(x+\varepsilon n, x) e^{-i\alpha(x)} \\ 1 + ie\varepsilon n^\mu A'_\mu(x) + O(\varepsilon^2) &= e^{i\alpha(x)}[1 + i\varepsilon n^\mu \partial_\mu \alpha(x) + O(\varepsilon^2)][1 + ie\varepsilon n^\mu A_\mu(x) + O(\varepsilon^2)]e^{-i\alpha(x)} \\ &= 1 + ie\varepsilon n^\mu A_\mu(x) + i\varepsilon n^\mu \partial_\mu \alpha(x) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{1.15}$$

donde ε es un parámetro infinitesimal. En la ecuación 1.15, comparando orden a orden en ε, se encuentra la ley de transformación del campo $A_\mu(x)$:

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x), \tag{1.16}$$

la cual recibe el nombre de transformación de norma, misma que se puede escribir como:

$$\delta A_\mu(x) = \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x). \tag{1.17}$$

El término $D_\mu\phi(x)$ se transforma de manera covariante bajo una transformación de norma, en efecto:

$$\begin{aligned}
[D_\mu\phi]'(x) = D'_\mu\phi'(x) &= (\partial_\mu - ieA'_\mu)e^{i\alpha(x)}\phi(x) \\
&= e^{i\alpha(x)}\partial_\mu\phi(x) + e^{i\alpha(x)}\phi(x)i\partial_\mu\alpha(x) - ieA_\mu e^{i\alpha(x)}\phi(x) - i\left[\partial_\mu\alpha(x)\right]e^{i\alpha(x)}\phi(x) \\
&= e^{i\alpha(x)}(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi(x) \\
&= e^{i\alpha(x)}(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi(x) \\
&= e^{i\alpha(x)}D_\mu\phi(x).
\end{aligned} \tag{1.18}$$

De acuerdo con esto, se puede construir un lagrangiano libre para los campos $\phi^\pm$, invariante de Lorentz y de norma dado por:

$$\mathcal{L} = (D_\mu\phi^+(x))(D^\mu\phi^-(x)) - m^2\phi^+\phi^-. \tag{1.19}$$

Se debe añadir a la teoría un sector que caracterice a los campos $A_\mu(x)$. Se necesita introducir objetos que contengan a estos campos y que se transformen covariantemente bajo transformaciones de norma. Para ello, considere el conmutador de la derivada covariante aplicado a un campo ϕ.

$$\begin{aligned}
[D_\mu, D_\nu]\phi(x) &= D_\mu(D_\nu\phi) - D_\nu(D_\mu\phi) \\
&= (\partial_\mu - ieA_\mu)(\partial_\nu\phi - ieA_\nu\phi) - (\partial_\nu - ieA_\nu)(\partial_\mu\phi - ieA_\mu\phi) \\
&= -ie(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\phi \\
&= -ieF_{\mu\nu}\phi,
\end{aligned} \tag{1.20}$$

donde, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ es el tensor de curvatura, el cual es invariante bajo transformaciones de norma:

$$\begin{aligned}
F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu \\
&= \partial_\mu(A_\nu + \frac{1}{e}\partial_\nu\alpha) - \partial_\nu(A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha) \\
&= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \frac{1}{e}(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu)\alpha \\
&= F_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Podemos definir a partir de $F_{\mu\nu}$ un escalar invariante de Lorentz y de norma, el cual nos proporcione información de la física de los campos $A_\mu(x)$, a saber $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. El campo $A_\mu(x)$ caracteriza al fotón, por otra parte, $F_{\mu\nu}$ es el tensor de curvatura de Maxwell. Así, el lagrangiano que determina la electrodinámica escalar queda dado por:

$$\mathcal{L}_{SQED} = (D_\mu\phi^-)(D^\mu\phi^+) - m^2\phi^+\phi^- - \frac{\lambda}{4}(\phi^+\phi^-)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2, \tag{1.22}$$

Se ha introducido un potencial escalar caracterizado por el parámetro real, positivo adimensional λ. Es posible introducir este término debido al criterio de Dyson [1], el cual establece que una lagrangiana es renormalizable si está compuesta por términos de dimensión de masa de orden menor o igual a cuatro, es decir que los términos que componen a dicha lagrangiana son suficientes para eliminar las divergencias que surgen en los cálculos con loops. Además, para cuantizar teorías de norma es necesario agregar un sector que fije la norma, para esto se introduce el término $-\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2$; un estudio detallado del sector que fija la norma puede ser consultado en [1]. El

parámetro ξ se conoce como parámetro de norma, su elección es arbitraria por lo que existe una infinidad de formas de fijar la norma. En este sentido, es esencial que cualquier predicción teórica relacionada con una observable física, con posibilidades de ser medida en un laboratorio, no dependa de la elección del parámetro de norma ξ. Este hecho es fundamental en la teoría cuántica de campos, ya que es importante determinar la dependencia o independencia de la norma de las correcciones cuánticas sobre las observables, si estas correcciones dependen de la norma, entonces no pueden considerarse como físicas. Esto es el punto central de este trabajo de tesis.

En la siguiente sección se determinan las expresiones de los propagadores de los campos $\phi^{\pm}$ y A_{μ}, así como sus interacciones.

1.2. Reglas de Feynman

En esta sección se calculan los propagadores de los campos $\phi^{\pm}$ y A_{μ} y las respectivas reglas de Feynman de las funciones vértice de la electrodinámica escalar.

1.2.1. Propagadores

En el caso del campo escalar, el propagador corresponde a la función de Green de la ecuación de Klein-Gordon, dada por $(\Box + m^2)\phi(x) = 0$, con $\Box = \partial^2$. El propagador libre satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$(\Box + m^2) i\Delta_F(x-y) = \delta^4(x-y), \tag{1.23}$$

donde el término que se encuentra a la derecha representa una fuente puntual. Pasando la ecuación anterior al espacio de los momentos a través de la transformada de Fourier, se encuentra que:

$$\Delta_F = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \overline{\Delta}_F(p) e^{-ip(x-y)}\,, \tag{1.24}$$

$$\delta^4(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)}. \tag{1.25}$$

Sustituyendo (1.24) y (1.25) en (1.23) se tiene:

$$\begin{aligned}
(\Box + m^2) i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \overline{\Delta}_F(p) e^{-ip(x-y)} &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \\
\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} i\overline{\Delta}_F(p)(-p^2+m^2) e^{-ip(x-y)} &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \\
\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} [i\overline{\Delta}_F(p)(-p^2+m^2) - 1] &= 0.
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Con $\overline{\Delta}_F(p)$, la transformada de Fourier de $\Delta_F(x-y)$. La ecuación (1.26) es nula para todo punto x e y sólo si

$$\overline{\Delta}_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2}, \tag{1.27}$$

este es el propagador de Feynman para el campo escalar, el cual es representado gráficamente por el siguiente diagrama:

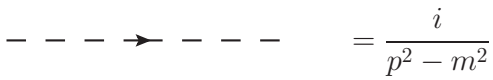


Figura 1.1: Propagador del campo escalar.

Por otro lado, el propagador del campo de norma A_μ se construye a partir de los términos cuadráticos de este campo en el lagrangiano, los cuales se encuentran en el término $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ y el término de fijación de la norma. Hasta una derivada total, podemos escribir esos dos sectores de la siguiente forma:

$$-\left[\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2\right]=\frac{1}{2}A^\mu\left[g_{\mu\nu}\Box+\left(\frac{1}{\xi}-1\right)\partial_\mu\partial_\nu\right]A^\nu+\partial_\mu Z^\mu\,, \tag{1.28}$$

donde el último término es denóminado término de superficie, debido a su naturaleza, pues este no realiza ningún aporte a la acción del sistema. En este caso,

$$Z^\mu=-\frac{1}{2}\partial_\mu(A_\nu\partial^\mu A^\nu-A_\nu\partial^\nu A_\mu+\frac{1}{\xi}A^\mu\partial_\nu A^\nu). \tag{1.29}$$

Pasando al espacio de momentos a través de la transformada de Fourier, se tiene que:

$$g_{\mu\nu}\Box+\left(\frac{1}{\xi}-1\right)\partial_\mu\partial_\nu\rightarrow-\left[g_{\mu\nu}k^2+\left(\frac{1}{\xi}-1\right)k_\mu k_\nu\right]. \tag{1.30}$$

El propagador del campo A_μ es el inverso del tensor de (1.30). Para poder definirlo se propone otro tensor con la siguiente estructura:

$$D^{\nu\lambda}=Ag^{\nu\lambda}+Bk^\nu k^\lambda. \tag{1.31}$$

Al contraer este tensor (1.31) con (1.30) se encuentra lo siguiente:

$$\delta^\lambda_\mu=\left[-g_{\mu\nu}k^2+\left(1-\frac{1}{\xi}\right)k_\mu k_\nu\right]\left[Ag^{\nu\lambda}+Bk^\nu k^\lambda\right], \tag{1.32}$$

$$\delta^\lambda_\mu=-Ak^2\delta^\lambda_\mu-\frac{1}{\xi}Bk^2k_\mu k^\lambda-\left(\frac{1}{\xi}-1\right)Ak_\mu k^\lambda\,. \tag{1.33}$$

Con las ecuaciones (1.32) y (1.33) se encuentran las dos condiciones

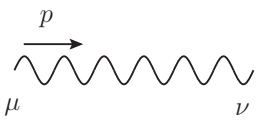
$$A=-\frac{1}{k^2}\,, \tag{1.34}$$

$$0=-\left(\frac{1}{\xi}-1\right)\frac{1}{k^2}-\frac{1}{\xi}Bk^2\,, \tag{1.35}$$

con lo cual se obtienen los valores de A y B de la expresión (1.31). Finalmente, multiplicando por un factor de i se tiene el propagador del fotón:

$$D_{\mu\nu}=-\frac{i}{k^2}\left[g_{\mu\nu}-(1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right]. \tag{1.36}$$

La regla de Feynman de este propagador se muestra en la siguiente figura:

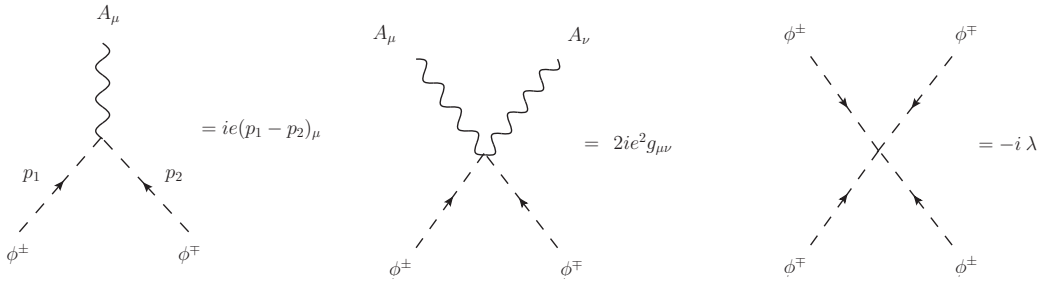


$$=-\frac{i}{p^2}\left[g^{\mu\nu}-(1-\xi)\frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right]$$

Figura 1.2: Propagador del fotón.

1.2.2. Funciones vértice

Las interacciones entre los campos A_μ y $\phi^\pm$ están caracterizadas por las funciones vértice, las cuales corresponden a la transformada de Fourier de los términos lagrangianos asociados al producto de los campos. Las reglas de Feynman de dichas interacciones están dadas en la siguiente figura:



(a) (b) (c)

Figura 1.3: Reglas de Feynman para la: (a) Función vértice de tres puntos $A_\mu\phi^\pm\phi^\pm$. (b) Función vértice de cuatro puntos $A_\mu A_\nu\phi^\pm\phi^\pm$. (c) Función vértice de cuatro puntos $\phi^\pm\phi^\mp\phi^\pm\phi^\mp$.

Las funciones vértice de la (1.3) caracterizan la interacción entre los campos cargados $\phi^\pm$ con el fotón A_μ (b) y (c), o entre únicamente campos cargados (c).

1.3. Lagrangiana renormalizada y de contratérminos

En la teoría cuántica de campos las interacciones y fluctuaciones cuánticas generan de manera ocasional, resultados matemáticos infinitos a los que denominamos como divergencias. Debido al principio de superposición, es necesario considerar la contribución de toda partícula virtual contenida en lazos. Este aporte se ve matemáticamente como integrales que suelen ser divergentes al sumar niveles cada vez más altos de energía. Estas divergencias son denominadas ultravioleta (UV), y no tienen ningún significado físico, por lo que para realizar predicciones que puedan ser verificadas experimentalmente, es necesario eliminarlas. Esto puede realizarse a través de un proceso llamado *renormalización*. De manera general este método introduce aditivamente términos adicionales en las amplitudes de un lazo, estos términos son divergentes y se eligen de tal forma que contrarresten a las divergencias UV y se obtengan amplitudes finitas.

La lagrangiana desnuda de la SQED toma la forma:

$$\mathcal{L}_{BSQED} = (D_{B\mu}\phi_B^+)^\dagger(D_B^\mu\phi_B^+) - m_B^2(\phi_B^-\phi_B^+) - \frac{\lambda_B}{4}(\phi_B^-\phi_B^+)^2 - \frac{1}{4}F_{B\mu\nu}F_B^{\mu\nu}, \tag{1.37}$$

donde $D_B^\mu = \partial^\mu - ie_B A_B^\mu$. Observe que no se introduce la parte desnuda para el término que fija la norma, no es necesario para la renormalización a orden de un lazo. Los términos divergentes, nombrados desnudos e identificados por una B (bare, como desnudo en inglés) están relacionados con las correspondientes cantidades renormalizadas o finitas a través de los factores de renormalización Z_ϕ y Z_A como:

$$\phi_B^\pm = \sqrt{Z_\phi}\phi^\pm \quad , \quad A_{B\mu} = \sqrt{Z_A}A_\mu\,; \tag{1.38}$$

con $\phi^\pm$ y A_μ los campos renormalizados. Utilizando (1.38), la lagrangiana desnuda toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{BSQED} =& Z_\phi(\partial_\mu\phi^+)^\dagger(\partial^\mu\phi^+) + ie_B Z_\phi Z_A^{\frac{1}{2}}A_\mu(\phi^-\partial^\mu\phi^+ - \phi^+\partial^\mu\phi^-) \\ &+e_B^2 Z_\phi Z_A A_\mu A^\mu(\phi^-\phi^+) - m_B^2 Z_\phi(\phi^-\phi^+) - \frac{\lambda_B Z_\phi^2}{4} - \frac{Z_A}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.\end{aligned} \tag{1.39}$$

La carga desnuda, e_B, se relaciona con la carga renormalizada e de la siguiente manera

$$e_B Z_\phi Z_A^{1/2} = eZ_e\,, \tag{1.40}$$

donde $Z_e = Z_\phi Z_A^{1/2}$. Agrupando de manera apropiada a los términos de la lagrangiana (1.39), esta se puede reescribir como la suma de la lagrangiana renormalizada y la lagrangiana de contratérminos

$$\mathcal{L}_{BSQED} = \mathcal{L}_{SQED} + \mathcal{L}_{c.t.}^{SQED}, \tag{1.41}$$

donde $\mathcal{L}_{SQED}$ es la lagrangiana renormalizada, la cual es una copia de (1.37) pero definida con los campos y el parámetro renormalizados $\phi^\pm$, A_μ y e, respectivamente. Por otro lado, la lagrangiana de contratérminos está dada por:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{c.t.}^{SQUED} =& \delta_\phi(\partial_\mu\phi^+)^\dagger(\partial_\mu\phi^+) + ie\delta_e A_\mu(\phi^-\partial^\mu\phi^+ - \phi^+\partial^\mu\phi^-) \\ &+ e^2\left(\frac{Z_e^2}{Z_\phi} - 1\right)A_\mu A^\mu(\phi^-\phi^+)^2 \\ &- \delta_m^2(\phi^-\phi^+) - \frac{\delta_\lambda}{4}(\phi^-\phi^+)^2 - \frac{\delta_A}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},\end{aligned} \tag{1.42}$$

donde se ha definido:

$$\begin{aligned}&\delta_A = Z_A - 1 \quad , \quad \delta_e = Z_e - 1 \quad , \quad \delta_m^2 = m_B^2 Z_\phi - m^2\,, \\ &\delta_\phi = Z_\phi - 1 \quad , \quad \lambda_B Z_\phi^2 - \lambda\,.\end{aligned} \tag{1.43}$$

Hasta este punto la lagrangiana de contratérminos no es manifiestamente invariante de norma término a término, como sí lo es la lagrangiana renormalizada, cuya única excepción es el término que fija la norma. Sin embargo, la invariancia de norma requiere que la lagrangiana de contratérminos también sea invariante de norma, para lograr esto, es necesario que $\delta_e = \delta_\phi$, como consecuencia $Z_e = Z_\phi$. Estas relaciones se pueden establecer de manera explícita orden a orden en la serie perturbativa, pero nosotros la supondremos como verdadera desde su introducción, de modo que podemos escribir:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{c.t.}^{SQUED} =& \delta_\phi(D_\mu\phi^+)^\dagger(D^\mu\phi^+) - \delta_m^2(\phi^-\phi^+) \\ &- \frac{\delta_\lambda}{4}(\phi^-\phi^+)^2 - \frac{\delta_A}{4}(\phi^-\phi^+)^2 - \frac{\delta_A}{4}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}).\end{aligned} \tag{1.44}$$

Las reglas de Feynman de los contratérminos se muestran en las siguientes figuras:

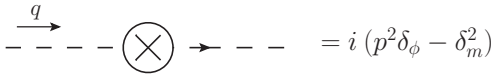


Figura 1.4: Contratérmino de la función vértice de dos puntos $\phi^\pm\phi^\pm$.

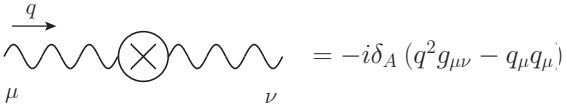
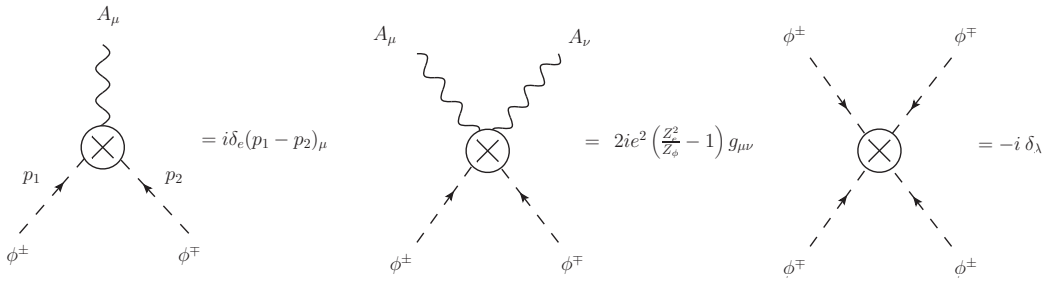


Figura 1.5: Contratérmino de la función vértice de dos puntos $A^\mu A^\mu$.



(a) (b) (c)

Figura 1.6: (a) Contratérmino de la función vértice de tres puntos $A_\mu\phi^\pm\phi^\pm$. (b) Contratérmino de la función vértice de cuatro puntos $A_\mu A_\nu\phi^\pm\phi^\pm$. (c) Contratérmino de la función vértice de cuatro puntos $\phi^\pm\phi^\mp\phi^\pm\phi^\mp$.

El fenómeno de polarización del vacío es generado por correcciones radiativas al propagador del fotón, lo cual está determinado por la función vértice $A_\mu A_\nu$. El contratérmino que renormaliza a esta función vértice, y por ende a la polarización del vacío, es el correspondiente al de la (1.5). El factor de renormalización correspondiente es δ_A. En adelante se sumará dicho contratérmino de los cálculos de un lazo de esta tesis.

1.4. Polarización del vacío en la electrodinámica escalar

A un lazo, la función vértice de dos puntos del campo $A_\mu A_\nu$ recibe contribuciones de los campos de la SQED a través de las amplitudes representadas diagramáticamente a continuación.

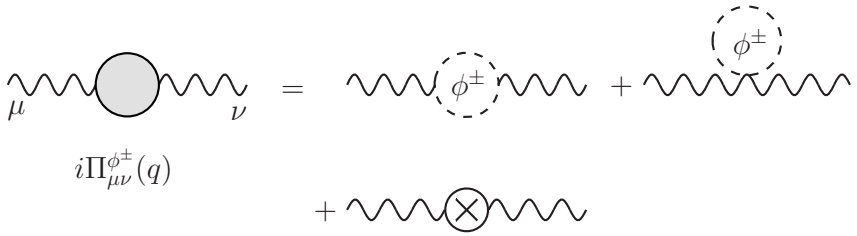


Figura 1.7: Función vértice de dos puntos $A_\mu A_\nu$ a un lazo con correcciones de la electrodinámica escalar.

Usando las reglas de Feynman encontradas en la sección anterior, y trabajando en el esquema de regularización dimensional [1], la amplitud de los diagramas de la Figura (1.7), denotada por $i\Pi^{\phi^\pm(1)}_{\mu\nu}$, está dada por la siguiente expresión:

$$i\Pi^{\phi^\pm}_{\mu\nu}(q) = e^2(\hat{\mu}^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi^D)} \left\{ \frac{(2k+q)_\mu (2k+q)_\nu}{[k^2-m^2][(k+q)^2-m^2]} + \frac{2g_{\mu\nu}[(k+q)^2-m^2]}{[k^2-m^2][(k+q)^2-m^2]} \right\} - \delta_A P_{\mu\nu}(q), \tag{1.45}$$

donde $\hat{\mu}$ es la escala de regularización dimensional y $D = 4 - 2\epsilon$ con $\epsilon \to 0$. Note que se ha agregado el contratérmino $A_\mu A_\nu$ a la amplitud. Para determinar las integrales sobre el espacio de momentos, empleamos el método de Passarino-Veltman (PV) [15], el cálculo se realizó con la paquetería FeynCalc [16]. Se encuentra que la amplitud (1.45) toma la siguiente forma

$$i\Pi^{\phi^\pm}_{\mu\nu}(q) = i\Pi^{\phi^\pm}(q^2) P_{\mu\nu}(q) \qquad \text{con} \qquad P_{\mu\nu}(q) = q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu \,, \tag{1.46}$$

donde $\Pi^{\phi^\pm}(q^2)$ es la función de polarización del vacío con correcciones provenientes de la electrodinámica escalar, con

$$\Pi^{\phi^\pm}(q^2) = \frac{\alpha}{4\pi}\left[s_0 + s_1 \left(\frac{m^2}{q^2}\right)\right] - \delta_A \,, \tag{1.47}$$

donde $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ es la constante de estructura fina, además

$$s_0 = -\frac{1}{D-1} B_0\left(q^2, m^2, m^2\right) , \tag{1.48}$$

$$s_1 = \frac{1}{D-1}\left[4B_0\left(q^2, m^2, m^2\right) - 2(D-2)B_0\left(0, m^2, m^2\right) - 2(D-2)\right] . \tag{1.49}$$

Las funciones B_0, conocidas en la literatura como funciones escalares de Passarino Veltman, son divergentes UV, estas divergencias surgen de la integral $\int d^D k$ al considerar componentes de momento k cada vez más grandes en la integral, o de manera equivalente, al considerar efectos de muy altas energías. Las funciones B_0 tiene la virtud de tener la misma parte divergente, estas se pueden escribir como

$$B_0(q^2, m_0^2, m_1^2) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \log(4\pi) - \int_0^1 dx \log\left[\frac{x(x-1)q^2 + x(m_1^2 - m_0^2) + m_0^2 - i\varepsilon}{\mu^2}\right] , \tag{1.50}$$

donde $\frac{1}{\epsilon}$ parametriza a la divergencia UV, la cual surge al tomar el límite $\epsilon \to 0$, por otra parte γ_E es la constante de Euler-Mascheroni. En el Apéndice A se muestra cómo se llega a esta expresión. Por otro lado, el tensor $P_{\mu\nu}(q)$ es una estructura de norma, pues satisface la identidad de Ward [1]

$$q^\mu P_{\mu\nu}(q) = q^\mu(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\mu) = 0 , \tag{1.51}$$

$$q^\nu P_{\mu\nu}(q) = q^\nu(q^2 g^{\mu\nu} - q^\nu q^\mu) = 0 . \tag{1.52}$$

Para poder establecer una amplitud renormalizada, es decir, que no contenga divergencias UV se debe escoger al parámetro δ_A de tal forma que la amplitud resultante sea finita. Para determinar este contratérmino, usaremos la siguiente condición de renormalización:

$$\Pi^{\phi^\pm}(q^2 = 0) = 0, \tag{1.53}$$

Se debe tener cuidado al evaluar $q^2 = 0$ en (1.47) ya que esta amplitud depende de $1/q^2$, esta evaluación debe implementarse en un proceso de límite, a saber

$$\delta_A = \frac{\alpha}{4\pi} \lim_{q^2 \to 0}\left[s_0 + s_1\left(\frac{m^2}{q^2}\right)\right] . \tag{1.54}$$

Note que, usando la definición $D \to 4 - 2\epsilon$ vemos que

$$\begin{aligned} s_1|_{q^2=0} &= \frac{4}{3}\left[B_0(q^2, m^2, m^2)|_{q^2=0} - B_0\left(0, m^2, m^2\right) - 1\right] \\ &\quad + \frac{4}{9}\epsilon\left[2B_0(q^2, m^2, m^2)|_{q^2=0} + B_0\left(0, m^2, m^2\right) + 1\right] \\ &= -\frac{4}{3} + \frac{4}{9}\epsilon\left[3B_0\left(0, m^2, m^2\right) + 1\right] \\ &= -\frac{4}{3} + \frac{4}{9}\epsilon\left[3\frac{1}{\epsilon} + \tilde{s}_1 + 1\right] , \\ &= 0, \end{aligned} \tag{1.55}$$

con $\tilde{s}_1$la parte finita de $B_0\left(0, m^2, m^2\right)$.

Esto demuestra que el término $s_1\left(\frac{m^2}{q^2}\right)$ es cero en el límite $q^2 \to 0$:

$$\lim_{q^2 \to 0} s_1\left(\frac{m^2}{q^2}\right) = 0 , \tag{1.56}$$

pues es un límite de la forma $\frac{0}{0}$, el cual se calcula usando la regla de L'Hopital. Este límite también puede ser verificado sustituyendo directamente en s_1 la solución de las funciones B_0 de la ecuación (1.50). El factor de forma δ_A queda determinado como:

$$\delta_A = \frac{\alpha}{4\pi} s_0(0) \tag{1.57}$$

Con esto, sustituyendo δ_A en la ecuación (1.47), se tiene la función de polarización del vacío renormalizada, dada por

$$\Pi_R^{\phi^\pm}(q^2) = \frac{\alpha}{4\pi}\left[(s_0 - s_0(0)) + m^2\left(\frac{s_1}{q^2}\right)\right] . \tag{1.58}$$

Esta es la contribución a la polarización del vacío generada por una partícula cargada de espín cero. Se puede notar que $\Pi_R^{\phi^\pm}(q^2)$ está dada en términos de diferencias de funciones B_0, por lo que no contiene divergencias UV.

Capítulo 2

Polarización del vacío en la electrodinámica espinorial

Se presentan las bases de la electrodinámica espinorial. Se determinan las reglas de Feynman, se calcula la contribución a la polarización del vacío y su renormalización. Se presenta el efecto que genera la polarización del vacío sobre la carga eléctrica e en el fenómeno conocido como apantallamiento.

Dada una transformación de Lorentz

$$x' = \Lambda x \,, \tag{2.1}$$

la representación espinorial del grupo está compuesta por las transformaciones $L(\Lambda)$ tales que:

$$L(\overline{\Lambda})L(\Lambda) = L(\overline{\Lambda}\Lambda) \,, \tag{2.2}$$

con

$$L(\Lambda) = e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}} \,, \tag{2.3}$$

donde $\overline{\Lambda}$ y Λ representan a dos transformaciones de Lorentz. El campo de Dirac se transforma bajo la representación espinorial del grupo de Lorentz $SO(1,3)$. Esta representación utiliza cuatro matrices γ_μ,

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \,,\ \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \,, \tag{2.4}$$

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \,,\ \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \,. \tag{2.5}$$

Los generadores de esta representaación se definen por

$$\mathcal{S}_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu \,,\, \gamma_\nu]. \tag{2.6}$$

El término $\omega_{\mu\nu}$ corresponde a los parámetros de las transformaciones de Lorentz en esta representación. Tanto los generadores $S^{\mu\nu}$ como los parámetros $\omega_{\mu\nu}$ son antisimétricos en sus índices. El grupo actúa sobre objetos de 4 componentes:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix} \,, \tag{2.7}$$

los cuales son conocidos como espinores, y estos se transforman bajo el grupo electromagnético $U_Q(1)$ de la siguiente manera:

$$\psi' = e^{i\alpha}\psi(x) \,. \tag{2.8}$$

Por otro lado, para construír una lagrangiana con estos campos es necesario formar un escalar de $SO(1,3)$, una propuesta natural sería el producto $\psi^\dagger(x)\psi(x)$, donde $\psi^\dagger(x)$ es el transpuesto conjugado de $\psi(x)$. Bajo una transformación de Lorentz, este escalar se transforma como:

$$\begin{aligned}\psi'^\dagger\psi' &= (L(\Lambda)\psi)^\dagger(L(\Lambda)\psi)\\ &= \psi^\dagger L^\dagger(\Lambda)L(\Lambda)\psi\,.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Sin embargo, se puede ver que este sólo es invariante si $\Lambda = \mathcal{O}$, con $\mathcal{O}$ un elemento del subgrupo SO(1,3) correspondiente al grupo de las rotaciones. Para construir un invariante de Lorentz con el campo espinorial, se introduce el siguiente espinor:

$$\overline{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x)\gamma^0\,, \tag{2.10}$$

para comprobar esta propuesta, observamos al campo espinorial bajo una transformación infinitesimal

$$\overline{\psi}'(x) = \left[I + \left(\tfrac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\mu\nu}\right)\psi\right]^\dagger(\gamma^0)^\dagger \tag{2.11}$$

$$= \overline{\psi}^\dagger\left[I - \tfrac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\left(\mathcal{S}^{\mu\nu}\right)^\dagger\right]\gamma^0\,, \tag{2.12}$$

note que cuando ambos índices son espaciales

$$\left(\mathcal{S}^{\mu\nu}\right)^\dagger\gamma^0 = \mathcal{S}^{\mu\nu}\gamma^0 = \gamma^0\mathcal{S}^{\mu\nu}; \tag{2.13}$$

mientras que, en caso de que uno de los índices sea temporal,

$$\left(\mathcal{S}^{\mu\nu}\right)^\dagger\gamma^0 = -\mathcal{S}^{\mu\nu}\gamma^0 = \gamma^0\mathcal{S}^{\mu\nu}. \tag{2.14}$$

La lagrangiana que describe al campo espinorial libre, misma que conduce a la ecuación de Dirac está dada por

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\not{\partial} - m_\psi)\psi\,, \tag{2.15}$$

donde m_ψ es la masa del fermión asociado al espinor ψ y $\not{\partial}$ está dada por

$$\not{\partial} = \partial_\mu\gamma^\mu\,. \tag{2.16}$$

Esta es la expresión más general con invariancia bajo el grupo electromagnético $U_Q(1)$ que permite el criterio de renormalización de Dyson, esto es debido a que el campo espinorial tiene unidades de masa a la $\frac{3}{2}$. De la misma forma que en el capítulo anterior, nos interesa estudiar la dinámica que surge a partir de demandar invariancia bajo transformaciones locales, es decir, al introducir interacciones con el campo electromagnético. Se propone a la derivada covariante de la teoría como

$$\not{D} = \gamma^\mu D_\mu\,, \tag{2.17}$$

donde $D_\mu = \partial_\mu + ieQ_\psi A_\mu$, Q_ψ corresponde a la carga de la partícula en consideración, por ejemplo, para un electrón $Q_e = -1$. Con esto, se establece la lagrangiana de la electrodinámica espinorial dada como:

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\not{D} - m_\psi)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2\,. \tag{2.18}$$

Esta lagrangiana describe la interacción entre el campo electromagnético y los campos espinoriales que caracterizan a las partículas fermiónicas cargadas como lo son los leptones y los quarks. De esta lagrangiana se determinan el propagador de los campos ψ y las interacciones entre los fermiones y el campo A_μ. Esto se describe en la siguiente sección.

2.1. Propagador de los campos ψ y la función vértice $A\psi\overline{\psi}$

Para encontrar el propagador libre de los campos fermiónicos, considere la ecuación de Dirac

$$(i\not{\partial} - m_\psi)\psi = 0, \tag{2.19}$$

la función de Green correspondiente satisface

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_\psi)i\Delta_F(x-y) = -\delta^4(x-y). \tag{2.20}$$

Pasando al espacio de los momentos

$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4}{(2\pi)^4}\overline{\Delta}_F(p)e^{-ip\dot{(}x-y)} \tag{2.21}$$

$$\delta^4(x-y) = \int \frac{d^4}{(2\pi)^4}e^{-ip\dot{(}x-y)}, \tag{2.22}$$

sustituyendo (2.21) y (2.22) en (2.20), se encuentra que

$$\begin{aligned}&(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_\psi)\int \frac{d^4}{(2\pi)^4}\overline{\Delta}_F(p)e^{-ip\dot{(}x-y)} = -\int \frac{d^4}{(2\pi)^4}e^{-ip\dot{(}x-y)}\\ &\int \frac{d^4}{(2\pi)^4}e^{-ip\dot{(}x-y)}[i\overline{\Delta}_F(p)(\not{p} - m_\psi) + 1] = 0,\end{aligned} \tag{2.23}$$

de modo que,

$$\overline{\Delta}_F(p) = i\frac{(\not{p} + m_\psi)}{p^2 - m_\psi^2}\,, \tag{2.24}$$

donde $\not{p} = p_\mu\gamma^\mu$, y $\overline{\Delta}_F(p)$ es el propagador de los campos espinoriales en el espacio de momentos, por otro lado, la regla de Feynman de la interacción $A_\mu\psi\bar{\psi}$. Esto se puede ver en las siguientes figuras:

Figura 2.1: Propagador del campo fermiónico.

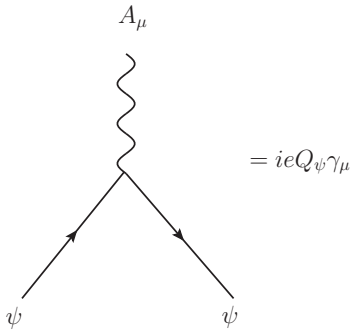


Figura 2.2: Vértice de 3 puntos $A^\mu\psi\overline{\psi}$.

2.2. Lagrangiana renormalizada y de contratérminos

Para renormalizar a las correcciones divergentes a la función de polarización del vacío en el contexto de la QED, al igual que en la teoría de la SQED, se define la lagrangiana desnuda para esta teoría, la cual está dada como:

$$\mathcal{L}_B^{QED} = \overline{\psi}_B(iD_B - m_{\psi B})\psi_B - \frac{1}{4}F_{B\mu\nu}\frac{1}{4}F_B^{\mu\nu}\,, \tag{2.25}$$

los campos y parámetros desnudos y renormalizados están relacionados de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \psi_B &= \sqrt{Z_2}\psi\,, \\ A_{\mu B} &= \sqrt{Z_3}A_\mu\,, \\ e_B &= \left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) Z_3^{\frac{-1}{2}} e\,, \end{aligned} \tag{2.26}$$

donde Z_1, Z_2, y Z_3 son las constantes de renormalización. Se puede expresar a (2.25) como la suma de una lagrangiana renormalizada y una lagrangiana de contratérminos,

$$\mathcal{L}_B^{QED} = \mathcal{L}_{QED} + \mathcal{L}_{c.t.}^{QED}\,, \tag{2.27}$$

donde $\mathcal{L}_{QED}$ es la lagrangiana de QED constituida por campos y parámetros renormalizados A_μ, ψ, $\bar{\psi}$, e y m. Por otro lado, la lagrangiana $\mathcal{L}_{c.t.}^{QED}$ se encuentra dada de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}_{c.t.}^{QED} = -\frac{1}{4}\delta_3 F_{\mu\nu}\frac{1}{4}F^{\mu\nu} + \overline{\psi}(i\delta_2\partial\!\!\!/ - \delta_m)\psi + +e\delta_1\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu\,, \tag{2.28}$$

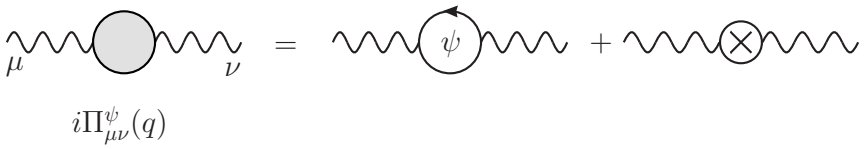
donde

$$\begin{aligned} \delta_1 &= Z_1 - 1, \qquad \delta_2 = Z_2 - 1\,, \\ \delta_3 &= Z_3 - 1, \qquad \delta_m = Z_2 m_{\psi B} - m_\psi\,. \end{aligned} \tag{2.29}$$

En la siguiente sección se determina la corrección de un lazo a la polarización del vacío generada por los campos fermiónicos, posteriormente se establece su renormalización. La regla de Feynman del contratérmino tiene la misma forma que la definida en el capítulo anterior, Fig. (1.5).

2.3. Polarización del vacío

La función vértice de 2 puntos $A_\mu A_\nu$ con correcciones a un lazo generadas en el contexto de la QED está dada por la suma de los diagramas de la siguiente figura:



$i\Pi^\psi_{\mu\nu}(q)$

Figura 2.3: Polarización del vacío en el contexto de la QED.

Note que se ha sumado el contratérmino. Usando las reglas de Feynman encontradas en la sección anterior, se encuentra que esta amplitud toma la siguiente forma

$$i\Pi^\psi_{\mu\nu}(q) = (-1)e^2Q_\psi^2(\mu^2)^{2-\frac{D}{2}}\int\frac{d^Dp}{(2\pi)^D}\frac{\mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu(k\!\!\!/ + m_\psi)\gamma_\nu((k\!\!\!/ + q\!\!\!/ + m_\psi)\right]}{[k^2 - m_\psi^2][(k+q)^2 - m_\psi^2]}\,. \tag{2.30}$$

Una vez implementado el método de PV, se tiene que la amplitud anterior está estructurada de la siguiente manera:

$$i\Pi^\psi_{\mu\nu}(q) = i\Pi^\psi(q^2)P_{\mu\nu}(q)\,, \tag{2.31}$$

donde $\Pi^{\psi}(q^2)$ es la polarización del vacío con correcciones provenientes de la electrodinámica espinorial, con

$$\Pi^{\psi}(q^2) = \frac{\alpha}{4\pi}\left[r_0 + r_1\ \left(\frac{m_{\psi}^2}{q^2}\right)\right] - \delta_A\ , \tag{2.32}$$

donde

$$r_0 = -\frac{2(D-2)}{D-1}B_0\left(q^2, m_{\psi}^2, m_{\psi}^2\right)\ , \tag{2.33}$$

$$r_1 = -\frac{8}{D-1}\left[B_0\left(q^2, m_{\psi}^2, m_{\psi}^2\right) - B_0\left(0, m_{\psi}^2, m_{\psi}^2\right)\right]\ . \tag{2.34}$$

Note que $\Pi^{\psi}_{\mu\nu}(q)$ es invariante de norma, ya que es proporcional al tensor $P_{\mu\nu}(q)$. Para determinar a la función de polarización renormalizada se implementa la condición de renormalización:

$$\Pi^{\psi}(q^2 = 0) = 0\ . \tag{2.35}$$

De manera similar a la renormalización de $\Pi^{\phi}(q^2)$ en el capítulo anterior, se debe evaluar $q^2 = 0$ a través de un límite, con esto el factor de renormalización δ_A queda determinado como

$$\delta_A = \frac{\alpha}{4\pi}\lim_{q^2\to 0}\left[r_0 + r_1\ \left(\frac{m_{\psi}^2}{q^2}\right)\right]\ , \tag{2.36}$$

para evaluar el límite de $\frac{r_1}{q^2}$ se toma la solución de las funciones B_0 (1.50), denotando como $\hat{r}_1$ a este límite se tiene:

$$\begin{aligned}
\hat{r}_1 &\equiv \lim_{q^2\to 0}\frac{r_1}{q^2}\ , \\
&= -\frac{8}{D-1}\lim_{q^2\to 0}\frac{1}{q^2}\int_0^1\ \left[\log\left(\frac{m_{\psi}^2 + q^2x(x-1) - i\varepsilon}{\mu^2}\right) - \log\left(\frac{m_{\psi}^2}{\mu^2}\right)\right]dx\ , \\
&= -\frac{4}{3(D-1)m_{\psi}^2}\ ,
\end{aligned} \tag{2.37}$$

con esto el contratérmino δ_A toma la forma

$$\delta_A = \frac{\alpha}{4\pi}\left[r_0(0) + m_{\psi}^2\hat{r}_1\right]\ , \tag{2.38}$$

donde

$$r_0(0) = -\frac{2(D-2)}{D-1}B_0\left(0, m_{\psi}^2, m_{\psi}^2\right)\ . \tag{2.39}$$

Finalmente, se tiene la función de polarización del vacío renormalizada dada por

$$\Pi^{\psi}_R(q^2) = \frac{\alpha}{4\pi}\left[r_0 - r_0(0) + m_{\psi}^2\ \left(\frac{r_1}{q^2} - \hat{r}_1\right)\right]\ , \tag{2.40}$$

esta es la contribución a la polarización del vacío generada por una partícula cargada de espín 1/2. Sustituyendo los valores de r_0, $\hat{r}_0$, r_1, $\hat{r}_1$ en términos de las funciones de PV y posteriormente tomando el valor $D = 4$, se tiene que, la función de polarización del vacío renormallizada toma la siguiente forma

$$\Pi^{\psi}_R(q^2) = -\frac{\alpha}{3\pi}\left\{\left[B_0\left(q^2, m_{\psi}^2, m_{\psi}^2\right) - B_0\left(0, m_{\psi}^2, m_{\psi}^2\right)\right]\left(1 + 2\frac{m_{\psi}^2}{q^2}\right) - \frac{1}{3}\right\}\ , \tag{2.41}$$

la cual satisface la condición de renormalización $\Pi^{\psi}_R(q^2 = 0) = 0$.

Figura 2.4: Correcciones al propagador del fotón

2.4. Efecto de apantallamiento.

En esta sección se muestra la relación que existe entre la función de polarización del vacío y el fenómeno denominado como apantallamiento. El propagador completo del fotón, a todo orden en la serie perturbativa, se calcula a través de la suma de los diagramas de la siguiente figura:
Los términos $1PI$ representan todas las contribuciones generadas por los diagramas irreducibles de una partícula. Estos son en realidad las funciones vértice de dos puntos, por ejemplo, las estudiadas en el Capítulo 1 y en la sección anterior. Como se ha visto, invariancia de norma establece que los vértices $1PI$ tienen la estructura tensorial:

$$i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)\Pi(q^2)\,, \tag{2.42}$$

con $\Pi(q^2)$ la función de polarización del vacío. Al sustituir esta estructura en la serie de diagramas de la Figura 2.4 se tiene que

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu} =& \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2}\left[i(q^2 g^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma)\Pi(q^2)\right]\frac{-ig_{\sigma\nu}}{q^2} \\ &+ \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2}\left[i(q^2 g^{\rho\beta} - q^\rho q^\beta)\Pi(q^2)\right]\frac{-ig_{\beta\sigma}}{q^2}\left[i(q^2 g^{\sigma\lambda} - q^\sigma q^\lambda)\Pi(q^2)\right]\frac{-ig_{\lambda\nu}}{q^2} + \dots\,, \\ =& \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2}\Delta^\rho_\nu\Pi(q^2) + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2}\Delta^\rho_\sigma\Delta^\sigma_\nu\Pi^2(q^2) + \dots\,, \end{aligned} \tag{2.43}$$

donde $\Delta^\rho_\nu = \delta^\rho_\nu - \frac{q^\rho q_\nu}{q^2}$, observe que

$$\Delta^\rho_\sigma\Delta^\sigma_\nu = \left(\delta^\rho_\sigma - \frac{q^\rho q_\sigma}{q^2}\right)\left(\delta^\sigma_\nu - \frac{q^\sigma q_\nu}{q^2}\right)\,, \tag{2.44}$$

$$= \delta^\rho_\sigma\delta^\sigma_\nu - \frac{q^\sigma q_\nu}{q^2}\delta^\rho_\sigma - \frac{q^\rho q_\sigma}{q^2}\delta^\sigma_\nu + \frac{q^\rho q_\sigma q^\sigma q_\nu}{q^2 q^2}\,, \tag{2.45}$$

$$= \Delta^\rho_\nu\,, \tag{2.46}$$

con esto la ecuación (2.43) toma la forma

$$D_{\mu\nu} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2}\left(\delta^\rho_\nu - \frac{q^\rho q_\nu}{q^2}\right)\left(\Pi(q^2) + \Pi^2(q^2) + ...\right)\,, \tag{2.47}$$

$$= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2}\left(1 + \Pi(q^2) + \Pi^2(q^2) + ... - 1)\right)\,, \tag{2.48}$$

$$= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\Pi^n(q^2)\right) - \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2}\left(\delta^\rho_\nu - \frac{q^\rho q_\nu}{q^2}\right)\,, \tag{2.49}$$

$$= \frac{-i}{q^2[1-\Pi(q^2)]}\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) + \frac{-i}{q^2}\left(\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)\,. \tag{2.50}$$

A nivel de procesos de dispersión, el propagador del fotón se puede conectar con una línea fermiónica, como por ejemplo en el proceso $ee \to ee$, donde e representa electrones o positrones. Debido a la ecuación de Dirac, los términos longitudinales, aquellos proporcionales a q_μ y q_ν, desaparecen ya que siempre aparecerán contraídos como

$$\bar{u}(x)\gamma^\mu q_\nu u(x) = \bar{u}(x)\gamma^\mu(p_\mu - p'_\mu)u(x) = \bar{u}(x)(m_\psi - m_\psi)u(x) = 0 \tag{2.51}$$

donde $q = p - p'$, con p y p' los cuadrimomentos de cualquiera de los dos fermiones al inicio y al final de la dispersión, respectivamente. En este caso, el proceso de dispersión sólo se ve afectado

por la parte transversal del propagador del fotón. Por lo que, sin perdida de generalidad, para este proceso podemos tomar al propagador del fotón como:

$$D_{\mu\nu} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{1-\Pi(q^2)} \,. \tag{2.52}$$

Hasta orden de un lazo, el proceso de dispersión $ee \to ee$ está dado por los diagramas de la siguiente Figura:

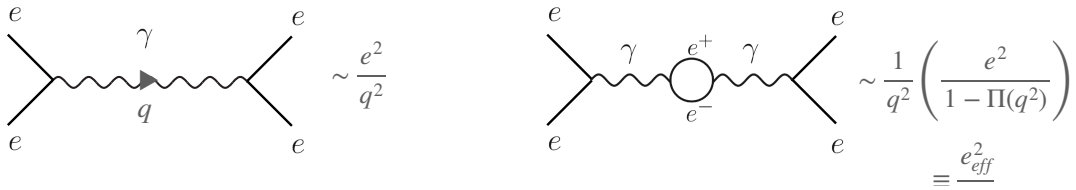


Figura 2.5: Proceso $ee \to ee$. Izquierda, proceso a nivel árbol. Derecha, proceso con correcciones de un lazo en el propagador del fotón.

Por un lado la contribución de nivel árbol, correspondiente al diagrama izquierdo de la Figura 2.5, consta solamente del intercambio de un fotón; por otro lado el diagrama derecho de la Figura 2.5 contiene la contribución a la amplitud con corrección a un lazo sobre el propagador del fotón. La presencia de fluctuaciones cuánticas en el propagador del fotón lo modifican de acuerdo a la Ec.(2.52), pero esto es equivalente a pensar que el valor de la carga toma un valor efectivo que depende de la cantidad de momento transferido dado como:

$$e^2_{eff} = \frac{e^2}{1-\Pi(q^2)} \,, \tag{2.53}$$

por ejemplo, con $\Pi(q^2) = \Pi^{\psi}_R$ en el caso de la electrodinámica espinorial Ec. (2.41), o Π^{ϕ}_R en el caso de la electrodinámica escalar Ec.(1.45). Es decir, la magnitud de la carga depende de la energía del proceso, $\sqrt{-q^2}$. Las fluctuaciones cuánticas generan una nube de pares virtuales de partículas y antipartículas cargadas que rodean a los fermiones cargados, por ejemplo, el electrón. Esto es análogo a la polarización de un medio dieléctrico debido a la presencia de una partícula cargada. En el proceso $ee \to ee$, cuando los dos fermiones se acercan, sus nubes de partículas virtuales interaccionan entre sí, puede ocurrir que ambos intercambien un fotón, como ocurre en el diagrama de nivel árbol de la Figura 2.5 o bien que la interacción se de a través de un fotón cuyo propagador se vio afectado por la creación de un par partícula-antipartícula, como en el caso del segundo diagrama, lo que genera un efecto que modifica la intensidad de esta interacción a través de la carga efectiva e_{eff} .

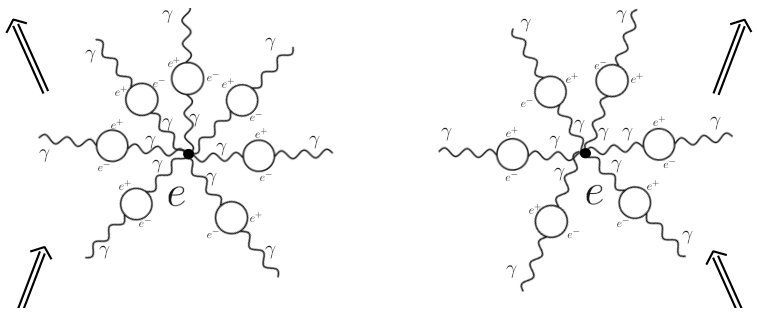


Figura 2.6: Efecto de apantallamiento.

A este fenómeno se le conoce como *apantallamiento*, para valores de energía $\sqrt{-q^2}$ cada vez más grandes, o equivalentemente interacciones a distancias cada vez más cortas, la magnitud de la carga eléctrica aumenta, es decir, la fuerza electromagnética se hace más intensa. El valor medido experimentalmente de la constante de estructura fina para un momento transferido $q^2 = 0$ está dado por [6]:

$$\alpha(q^2 = 0) = \frac{1}{137{,}035999084} \,, \tag{2.54}$$

mientras que, para energías del orden de la masa del bosón $W^{\pm}$, está dada por

$$\alpha(m_W^2) = \frac{1}{128}\,. \tag{2.55}$$

Al hacer la razón entre los valores de la constante de estructura para estos dos valores de energía se encuentra que:

$$\frac{\alpha({m_W}^2)}{\alpha(0)} = 1{,}07\,, \tag{2.56}$$

es decir, la magnitud de la carga eléctrica aumenta cuando se incrementa la energía del proceso.

Capítulo 3

Efectos de un campo de norma sobre la polarización del vacío

En la naturaleza, además de la interacción electromagnética, existen la interacción fuerte, la cual describe las interaciones entre quarks y gluones, y por otro lado la interacción débil. Esta última es responsable de diversos procesos nucleares interesantes como por ejemplo el decaimiento β. Esta fuerza está caracterizada por un bosón vectorial masivo, por lo que tiene espín igual a 1. En el estudio de las interacciones con campos vectoriales masivos, surgen ciertas sutilezas que indican que estos campos no pueden ser físicos, a menos que provengan de una teoría de norma. De hecho, en el siglo pasado, se encontró que la interacción electrodébil está caracterizada por los campos de norma $W_\mu^\pm$ y Z_μ, los cuales reciben su masa a través del mecanismo de Higgs [7]; todo esto se sintetizó en lo que actualmente se conoce como la teoría electrodébil del Modelo Estándar [3, 4, 5]. En la siguiente sección se mostrarán las implicaciones que tiene el considerar una lagrangiana de campos vectoriales masivos (sin considerarlos de norma) y en una sección siguiente se mostrará el lagrangiano que se encuentra cuando se considera al campo vectorial como campo de norma. Se calcularán las reglas de Feynman de la teoría de norma, denominada como electrodinámica vectorial y posteriormente se determinará su contribución a la función de polarización del vacío.

Sea el campo vectorial complejo $W_\mu^\pm$ de $SO(1,3)$ definido por

$$\begin{aligned} W_\mu^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 - iW_\mu^2)\,, \\ W_\mu^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^2 + iW_\mu^2)\,, \end{aligned} \tag{3.1}$$

con $W_\mu^i (i = 1, 2)$ vectores reales de $SO(1,3)$. Usando la siguiente definición:

$$W_{\mu\nu}^\pm = \partial_\mu W_\nu^\pm - \partial_\nu W_\mu^\pm, \tag{3.2}$$

y apelando al criterio de renormalización de Dyson, se puede escribir la siguiente lagrangiana invariante bajo $U_Q(1)$ global:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = &-\frac{1}{2}W_{\mu\nu}^- W^{+\mu\nu} + m_W^2 W_\mu^- W^{+\mu} \\ &+ \lambda_W (W_\mu^- W_\nu^+ - W_\mu^+ W_\nu^-)(W^{-\mu}W^{+\nu} - W^{+\mu}W^{-\nu})\,, \end{aligned} \tag{3.3}$$

con λ_w un número real positivo y m_W la masa del campo $W^\pm$. Esta teoría es invariante bajo $U_Q(1)$ global:

$$W_\nu'^\pm(x) = e^{\pm i\alpha} W_\mu^\pm(x)\,, \tag{3.4}$$

$$W_{\mu\nu}'^\pm(x) = e^{\pm\alpha} W_{\mu\nu}^\pm(x)\,. \tag{3.5}$$

3.1. Propagadores de los campos vectoriales

Se estudia el propagador del campo $W_\mu^\pm$, este surge de los términos cuadráticos

$$-\frac{1}{2}W^-_{\mu\nu}W^{+\mu\nu} + m_W^2 W^-_\mu W^{+\mu}\,, \tag{3.6}$$

que, hasta un término de superficie se pueden escribir como

$$W^{-\nu}[g_{\mu\nu}(\Box + m_W^2) - \partial_\mu\partial_\nu]W^{+\mu}\,. \tag{3.7}$$

El propagador es el inverso del siguiente operador

$$g_{\mu\nu}(\Box + m_W^2) - \partial_\mu\partial_\nu\,, \tag{3.8}$$

dicho operador toma la siguiente forma en el espacio de momentos:

$$g_{\mu\nu}(-k^2 + m_W^2) + k_\mu k_\nu\,. \tag{3.9}$$

Se propone la siguiente estructura para el inverso del operador (3.9):

$$D^{\mu\nu} = Ag^{\mu\nu} + Bk^\mu k^\nu\,, \tag{3.10}$$

con A y B escalares de Lorentz a determinar. Luego, por definición, los tensores (3.9) y (3.10) satisfacen:

$$[g_{\mu\nu}(-k^2 + m_W^2) + k_\mu k_\nu][Ag^{\lambda\nu} + Bk^\lambda k^\nu] = \delta_\mu^\lambda\,, \tag{3.11}$$

lo cual conduce a que

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{k^2 - m_W^2}\,, \\ B &= \frac{1}{m_W^2(k^2 - m_W^2)}\,. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Así, el propagador del campo $W_\mu^\pm$ está dado por

$$D^{\mu\nu} = \frac{-i}{k^2 - m_W^2}\left[g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{m_W^2}\right]\,. \tag{3.13}$$

Este propagador es conocido en la literatura como propagador unitario, y este es el propagador del campo de Proca. Un campo de Proca es un campo vectorial que no es de norma. Este propagador tiene un mal comportamiento a muy altas energías, ya que

$$\lim_{k\to\infty}\frac{-i}{k^2 - m_W^2}\left[g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{m_W^2}\right] \to C\,, \tag{3.14}$$

con C una constante. Este comportamiento puede tener consecuencias desastrosas en correcciones radiativas ya que puede violar unitariedad, es decir que las amplitudes cuadráticas puedan ser mayores a la unidad. Una teoría renormalizable de campos requiere propagadores bien comportados a altas energías, por lo que un campo vectorial masivo de Proca no puede considerarse como físico. En la siguiente sección se muestra cómo se resuelve esta inconsistencia de la teoría al considerar a este campo como uno de norma.

3.2. Electrodinámica vectorial

Para poder definir una teoría vectorial de norma invariante bajo el grupo electromagnético $U_Q(1)$ se necesita reemplazar a la derivada ordinaria ∂_μ por la derivada covariante D_μ, de modo que

$$W^\pm_{\mu\nu} = D_\mu W^\pm_\nu - D_\nu W^\pm_\mu, \tag{3.15}$$

con $D_\mu = \partial_\mu - ie\,A_\mu$. De forma que la ecuación (3.3) se transforma en:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 = &-\frac{1}{2}(D_\mu W^+_\nu - D_\nu W^+_\nu)^\dagger(D^\mu W^{+\nu} - D^\nu W^{+\mu}) \\ &+ m_W^2 W^-_\mu W^{+\mu} + \lambda_W(W^-_\mu W^+_\nu - W^+_\mu W^-_\nu)(W^{-\mu}W^+ - W^{+\mu}W^{-\nu}) \\ &- \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Ahora, de acuerdo con el criterio de Dyson, es posible añadir otro término que es invariante bajo $U_Q(1)$ local dado por

$$i\kappa F_{\mu\nu}W^{-\nu}W^{+\nu}\,, \tag{3.17}$$

con κ un parámetro adimensional positivo, en la siguiente sección se determinará su valor. Así, el lagrangiano invariante bajo $SO(1,3)$ y $U_Q(1)$, local, toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2 =& -\frac{1}{2}(D_\mu W^+_\nu - D_\nu W^+_\mu)^\dagger(D^\mu W^{+\nu} - D^\nu W^{+\mu}) \\ &+ m_W^2 W^-_\mu W^{+\mu} + \lambda_W(W^-_\mu W^+_\nu - W^+_\mu W^-_\nu)(W^{-\mu}W^{+\nu} - W^{+\mu}W^{-\nu}) \\ &+ i\kappa F_{\mu\nu}W^{-\nu}W^{+\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,.\end{aligned} \tag{3.18}$$

Sin embargo, el propagador del campo $W^\pm_\mu$ aún contiene el comportamiento (3.14) a altas energías. Debido a las inconsistencias en la definición del propagador $W^\pm_\mu$ planteadas anteriormente se deduce que, una partícula de espín 1 con masa en reposo no puede ser descrita por un campo de Proca. Dicho de manera más compacta, un campo de Proca no es físico. La única alternativa al problema es suponer que $W^\pm_\mu$ es un campo de norma. Sin embargo, un campo de norma, sólo puede ser dotado de masa a través del mecanismo de Higgs. Si $W^\pm_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(W^1_\mu \mp iW^2_\mu)$ es de norma, debe de formar parte de un grupo de norma más grande que $U_Q(1)$, es decir, los campos W^1_μ y W^2_μ deben ser conexiones de un grupo de norma no Abeliano dado que este tipo de grupos tienen más de una conexión. Identificamos a $W^\pm_\mu$ con el bosón mediador de la interacción débil del grupo $SU_L(2)$, de este grupo subyacen las 3 conexiones: W^1_μ, W^2_μ y W^3_μ [1, 3, 4, 5].

3.3. Seudobosones de Goldstone y campos fantasma

La cuantización de un campo de norma exige la adición de nuevos campos. Por un lado, el mecanismo de Higgs [7] introduce campos escalares cargados $G^\pm_W$, conocidos como seudobosones de Goldstone; por otro lado se debe agregar un sector compuesto por campos anticonmutantes $C^\pm_W$ y $\bar{C}^\pm_W$ llamados campos fantasma o en inglés, ghost. Una discusión completa de la cuantización de una teoría de norma puede ser consultada en detalle en [1].

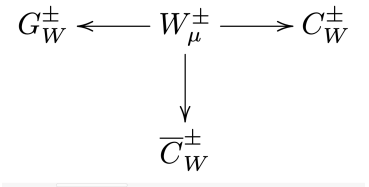


Figura 3.1: Campos asociados al campo de norma $W^\pm_\mu$.

La teoría invariante bajo $U_Q(1)$ no puede desvincularse de estos campos, cualquier estudio que involucre $W^\pm_\mu$ en lazos debe estar acompañado de los campos ghost y de los seudobosones de Goldstone.

En este sentido, dado que $W^\pm_\mu$ es un campo de norma, se debe de agregar a la lagrangiana un sector que fije la norma. Una manera muy conveniente de hacerlo es de tal forma que sea covariante bajo el grupo electromagnético $U_Q(1)$ [14], esto es, que el término que fija la norma, dado por:

$$-\frac{1}{\xi}f^-f^+\,, \tag{3.19}$$

sea invariante bajo $U_Q(1)$. Para ello definimos funciones que fijan la norma con el siguiente formato

$$f^\pm = D_\mu W^{\pm\mu} - i\xi m_W G^\pm_W\,, \tag{3.20}$$

donde $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ y ξ es el paramétro de norma. Por otro lado, se puede ver que, las funciones que fijan la norma son covariantes bajo el grupo $U_Q(1)$:

$$f'^\pm(x) = e^{\pm i\alpha(x)}f^\pm(x)\,. \tag{3.21}$$

Este procedimiento de fijación de la norma conduce a lagrangianas para los campos $G_W^{\pm}$ y $C_W^{\pm}$, que son invariantes bajo $U_Q(1)$ de manera manifiesta:

$$\mathcal{L}_{G_W} = (D_\mu G_W^+)^\dagger (D^\mu G_W^+) - \xi m_W^2 G_W^- G_W^+ - \lambda (G_W^- G_W)^2 \,, \tag{3.22}$$

donde λ es el parámetro que aparece en el potencial de Higgs de la teoría electrodébil. Por otra parte, la lagrangiana del sector ghost es:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Ghost} =& D_\mu^\dagger \overline{C}_W^- D^\mu C_W^+ + D_\mu \overline{C}_W^+ D^{\dagger\mu} C^- - \xi m_W^2 (\overline{C}_W^- C_W^+ \\ &+ \overline{C}_W^+ C_W^-) + 2\left(1 - \frac{2}{\xi}\right) \overline{C}_W^+ \overline{C}_W^- C_W^+ C_W^- \,,\end{aligned} \tag{3.23}$$

con $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$, $D_\mu^\dagger = \partial_\mu + ieA_\mu$. Además, que $W_\mu^{\pm}$ provenga del sector de norma del grupo $SU_L(2)$ implica que los parámetros λ_W y κ estén debidamente especificados. El sector de Yang-Mills del grupo $SU_L(2)$ nos dice que:

$$\begin{aligned}\lambda_W &= \frac{g^2}{4} \,, \\ \kappa &= -e \,,\end{aligned} \tag{3.24}$$

donde g es la constante de acoplamiento del grupo $SU_L(2)$. Todo lo anterior mencionado conduce a la siguiente lagrangiana total gobernada por $U_Q(1)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{VQED} =& -\frac{1}{2}(D_\mu W_\nu^+ - D_\nu W_\mu^+)^\dagger (D^\mu W^{+\nu} - D^\nu W^{+\mu}) \\ &- ieF_{\mu\nu} W^{-\mu} W^{+\nu} + m_W^2 W_\mu^- W^{+\mu} \\ &+ \frac{g^2}{4}(W_\mu^- W_\nu^+ - W_\nu^+ W_\nu^-)(W^{-\mu} W^{+\nu} - W^{+\mu} W^{-\nu}) \\ &- \frac{1}{\xi}(D_\mu W^{+\mu})^\dagger (D_\mu W^{+\mu}) \\ &+ (D_\mu G_W^+)^\dagger (D^\mu G_W^+) - \xi m_W^2 G_W^- G_W^+ - \lambda (G_W^- G_W^+)^2 \\ &+ D_\mu^\dagger \overline{C}_W^- D^\mu C_W^+ + D_\mu \overline{C}_W^+ D^{\dagger\mu} C_W^- - \xi m_W^2 (\overline{C}_W^- C_W^+ + \overline{C}_W^+ C_W^-) \\ &+ \left(1 - \frac{2}{\xi}\right) \overline{C}_W^+ \overline{C}_W^- C_W^+ C_W^- \,.\end{aligned} \tag{3.25}$$

Es importante notar que cada sector $(W^{\pm}, G_W^{\pm}, \overline{C}_W^{\pm}, C_W^{\pm})$ es invariante bajo $U_Q(1)$ de manera individual. Al mismo tiempo, es importante resaltar que este tipo de norma, también llamada *no lineal* R_ξ, modifica de manera no trivial a los acoplamientos $W^-W^+\gamma$ y $W^-W^+\gamma\gamma$. La norma originalmente definida por t'Hooft está dada como

$$f^{\pm} = \partial_\mu W_\mu^{\pm} \mp i\xi m_W G_W^{\pm} \,, \tag{3.26}$$

lo cual es lineal en los campos, pero no es covariante bajo $U_Q(1)$.

Para definir los propagadores de $W_\mu^{\pm}$, $G_W^{\pm}$, $C_W^{\pm}$, $\bar{C}_W^{\pm}$ se requiere de los términos lagrangianos cuadráticos en los campos, estos están dados en el siguiente subsector de (3.25):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{WW} =& -\frac{1}{2} W_{\mu\nu}^- W^{+\mu\nu} + m_W^2 W_\mu^- W^{+\mu} - \frac{1}{\xi}(\partial_\mu W^{-\mu})(\partial_\mu W^{+\mu}) \,, \\ &(\partial_\mu G_W^-)(\partial^\mu G_W^+) + \partial_\mu \overline{C}_W^- \partial^\mu C_W^+ + \partial_\mu \overline{C}_W^+ \partial^\mu C_W^- - \xi m_W^2 (\overline{C}_W^- C_W^+ + \overline{C}_W^+ C_W^-) \,.\end{aligned} \tag{3.27}$$

La expresión de los propagadores se encuentra en la siguiente figura:

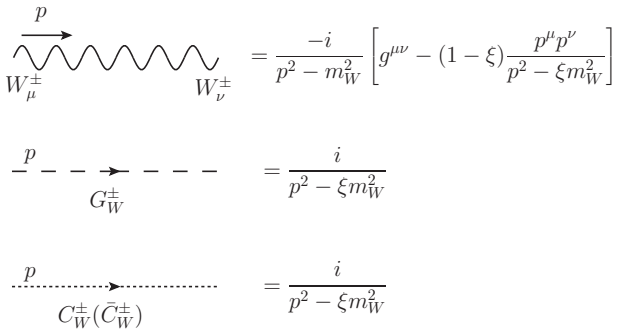


Figura 3.2: Propagadores de los campos $W_\mu^\pm$, $G_W^\pm$, $C_W^\pm$ y $\bar{C}_W^\pm$.

Note que, en la denominada norma unitaria, correspondiente a $\xi \to \infty$, el propagador del bosón $W^\pm$ se transforma en el propagador del campo de Proca.

$$\frac{-i}{k^2 - m_W^2}\left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{m_W^2}\right) . \tag{3.28}$$

En la norma unitaria los campos $G_W^\pm$, $\bar{C}_W^\pm$ y $C_W^\pm$ pueden ser removidos de la lagrangiana mediante una transformación de norma específica. La norma unitaria es útil en cálculos de un lazo que involucran elementos de matriz S que son finitos, pero no es útil en cálculos donde las amplitudes están plagadas de divergencias.

En el esquema de fijación de norma no lineal implementado en esta sección, se encuentra que el campo electromagnético interacciona con los campos $W_\mu^\pm$ a través del siguiente término:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{WW\gamma} =& ie[(W^-_{\mu\nu}W^{+\nu} - W^+_{\mu\nu}W^{-\nu})A^\nu - F_{\mu\nu}W^{-\mu}W^{+\nu}] \\ &+ \frac{ie}{\xi}A_\mu(W^{-\mu}\partial_\nu W^{+\nu} - W^{+\mu}\partial_\nu W^{-\nu}) ,\end{aligned} \tag{3.29}$$

de donde se deduce la regla de Feynman del vértice de tres puntos AWW , la cual está dada en la siguiente figura:

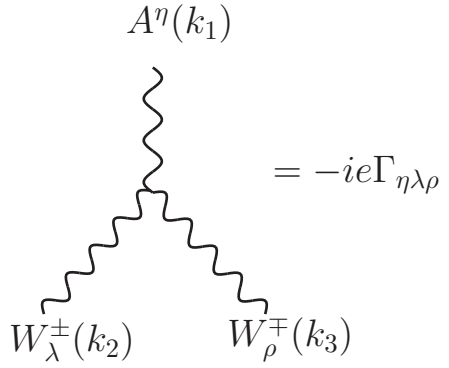


Figura 3.3: Regla del Feynman de la función vértice de nivel árbol $A_\mu W_\lambda^\pm W_\rho^\pm$ en el contexto de la norma no lineal R_ξ.

los momentos se toman ingresando al vértice. Donde

$$\Gamma_{\eta\lambda\rho} =(k_3 - k_2)_\eta g_{\lambda\rho} + \left(k_1 - k_3 - \frac{k_2}{\xi}\right)_\lambda g_{\rho\eta} + \left(k_2 - k_1 + \frac{k_3}{\xi}\right)_\rho g_{\lambda\eta} . \tag{3.30}$$

Note que se tienen identidades de Ward similares para el caso de partículas cargadas con espín 0 y espín $\frac{1}{2}$. En el caso de SQED se tiene la identidad:

$$\begin{aligned} q\cdot(p_1-p_2) &= (p_2^2-m^2)-(p_1^2-m^2)\,, \\ &= \Gamma^{\phi\phi}(p_2)-\Gamma^{\phi\phi}(p_1)\,, \end{aligned} \tag{3.31}$$

mientras que, para el caso de QED se tiene:

$$\begin{aligned} q^\mu\gamma_\mu =& (\not{p}_1-m)-(\not{p}_2-m)\,, \\ =& \Gamma^{\psi\psi}(p_1)-\Gamma^{\psi\psi}(p_2)\,. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Por otro lado, note que $\Gamma_{\lambda\rho\eta}$ satisface la siguiente identidad de Ward

$$k_1^\eta\Gamma_{\lambda\rho\eta} = \Gamma^{WW}_{\lambda\rho}(k_3)-\Gamma^{WW}_{\lambda\rho}(k_2)\,, \tag{3.33}$$

donde $\Gamma^{WW}_{\lambda\rho}(k)$ es la función vértice de dos puntos, dada por

$$\Gamma^{WW}_{\lambda\rho}(k) = \left(1-\frac{1}{\xi}\right)k_\lambda k_\rho-(k^2-m_W^2)g_{\lambda\rho}\,, \tag{3.34}$$

la cual surge de la lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}W^-_{\mu\nu}W^{+\mu\nu}+m_W^2W^-_\mu W^{+\mu}-\frac{1}{\xi}(\partial_\mu W^{-\mu})(\partial_\nu W^{+\nu}). \tag{3.35}$$

El vértice $WW\gamma\gamma$ también es afectado por la norma no lineal. Este vértice surge de la siguiente lagrangiana,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{WW\gamma\gamma} = &-e^2[(W^-_\beta A_\alpha-W^-_\alpha A_\beta)(W^{+\beta}A^\alpha-W^{+\alpha}A^\beta) \\ &+\frac{1}{\xi}(A_\alpha W^{-\alpha})(A_\beta W^{+\beta})]. \end{aligned} \tag{3.36}$$

La regla de Feynman asociada al vértice $AAWW$ se muestra a continuación:

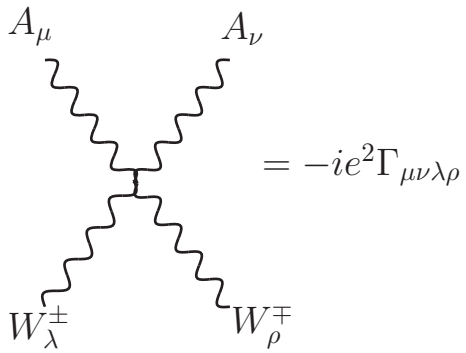


Figura 3.4: Función vértice de cuatro puntos $A_\mu A_\nu W^\pm_\lambda W^\pm_\rho$.

donde el tensor que aparece en la Figura 3.4, está dado por

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda\rho} = 2g_{\lambda\rho}g_{\mu\nu}-\left(1-\frac{1}{\xi}\right)(g_{\lambda\mu}g_{\rho\nu}+g_{\rho\mu}g_{\lambda\nu}). \tag{3.37}$$

Las reglas de Feynman para el seudobosón de Goldstone $G_W^\pm$ son exactamente iguales a las encontradas para los campos escalares $\phi^\pm$ definidas en el capítulo anterior, de modo que no será necesario definirlas de nuevo, con la única diferencia que el propagador del seudobosón de Goldstone tiene la misma forma que el propagador del campo escalar $\phi^\pm$ Fig. 1.1, pero con masa

$m^2 \to \xi m_W^2$.

En lo que respecta al lagrangiano de los campos fantasma, resulta que, en la norma no lineal, este sector también es gobernado de manera manifiesta por el grupo $U_Q(1)$, con una lagrangiana dada por:

$$\mathcal{L}^{\overline{C}_W C_W} = (D_\mu \overline{C}_W^+)^\dagger (D_\mu C_W^+) + (D_\mu \overline{C}_W^-)^\dagger (D^\mu C_W^-) - \xi m_W^2 \overline{C}_W^- C_W^+ - \xi m_W^2 \overline{C}_W^+ C_W^-. \tag{3.38}$$

En este esquema de norma las reglas de Feynman del sector de ghost son iguales a las de los acoplamientos con el campo $G_W^\pm$, esto incluye a su propagador.

3.4. Correcciones a la polarización del vacío en el contexto de la electrodinámica vectorial

Como hemos visto en los capítulos anteriores, la polarización del vacío se determina calculando la autoenergía o función vértice de dos puntos del fotón. En esta tesis nos interesa analizar las correcciones provenientes de la electrodinámica vectorial estudiada en la sección anterior. En esta sección se calcula la contribución del bosón de norma $W^\pm$ a orden de un lazo. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, la presencia de un campo de norma como el $W_\mu^\pm$ viene acompañada de la presencia de los campos escalares $G_W^\pm$, y los campos ghost y antighost $C_W^\pm$ y $\bar{C}_W^\pm$, respectivamente, por lo que deben de considerarse estos campos dentro de los lazos. La norma no lineal tiene como virtud que, dentro de los lazos sólo circulan partículas cargadas de la misma especie. Además de esto, las contribuciones del seudobosón de Goldstone y de los campos ghost $C_W^\pm(\bar{C}_W^\pm)$ se comportan de manera idéntica a las encontradas en la electrodinámica escalar ya que tienen los mismos vértices.

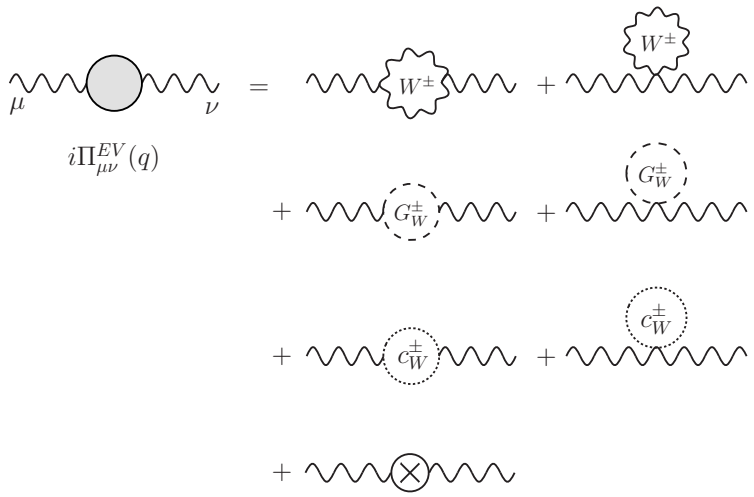


Figura 3.5: Función vértice de dos puntos $A_\mu A_\nu$ en el contexto de la electrodinámica vectorial bajo un esquema de fijación no lineal R_ξ.

La contribución de la electrodinámica vectorial a la función vértice de dos puntos $A_\mu A_\nu$ está dada por la suma de los diagramas de la Figura (3.5). Esta puede ser escrita como

$$i\Pi_{\mu\nu}^{EV} = i\Pi_{\mu\nu}^{W} + i\Pi_{\mu\nu}^{G_W} + i\Pi_{\mu\nu}^{C_W} - \delta_A P_{\mu\nu}(q)\,, \tag{3.39}$$

las amplitudes, $\Pi_{\mu\nu}^{W}$, $\Pi_{\mu\nu}^{G_W}$ y $\Pi_{\mu\nu}^{C_W}$ contienen únicamente a los campos $W_\mu^\pm$, $G_W^\pm$ y $C_W^\pm$ dentro del lazo, respectivamente. En la amplitud $\Pi_{\mu\nu}^{C_W}$ se considera la contribución de los campos ghost y la de los campos antighost. Note que se ha incorporado el contratérmino de $A_\mu A_\nu$. En este trabajo de tesis se han calculado cada una de estas amplitudes utilizando las reglas de Feynman de la teoría vectorial, bajo la norma no lineal. A continuación, se presentan los resultados individuales y posteriormente la contribución total.

Contribución de los campos de norma $W_\mu^\pm$

La amplitud generada únicamente por los campos de norma $W_\mu^\pm$ de los diagramas de la Figura (3.5) está dada por

$$i\Pi^W_{\mu\nu} = e^2(\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \left[\frac{\bar{\Gamma}_{\alpha\beta\mu}\Gamma_{\lambda\rho\nu}P^{\alpha\lambda}P^{\beta\rho}}{(k^2-m_w^2)[(k-q)^2-m_w^2]} - \frac{\Gamma_{\mu\nu\lambda\rho}P^{\lambda\rho}}{k^2-m_w^2} \right] . \tag{3.40}$$

Con $\Gamma_{\mu\nu\lambda\rho}$ definida en la ecuación (3.37), mientras que

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta\mu} = -(2k-q)_\mu g_{\alpha\beta} + \left[\left(1-\frac{1}{\xi}\right)k + \left(1+\frac{1}{\xi}\right)q\right]_\beta g_{\alpha\mu} + \left[\left(1-\frac{1}{\xi}\right)k - 2q\right]_\alpha g_{\beta\mu}, \tag{3.41}$$

$$\Gamma_{\lambda\rho\nu} = -(2k-q)_\nu g_{\lambda\rho} + \left[\left(1-\frac{1}{\xi}\right)k - 2q\right]_\lambda g_{\rho\nu} + \left[\left(1-\frac{1}{\xi}\right)k + \left(1+\frac{1}{\xi}\right)q\right]_\rho g_{\lambda\nu} , \tag{3.42}$$

$$\tag{3.43}$$

a su vez,

$$P^{\alpha\lambda} = \frac{1}{k^2-\xi m_W^2}\left(g^{\alpha\lambda} - (1-\xi)\frac{k^\alpha k^\lambda}{(k^2-\xi m_W^2)}\right) , \tag{3.44}$$

$$P^{\beta\rho} = \frac{1}{(k-q)^2-\xi m_W^2}\left(g^{\beta\rho} - (1-\xi)\frac{(k-q)^\beta(k-q)^\rho}{[(k-q)^2-\xi m_W^2]}\right) , \tag{3.45}$$

$$P^{\lambda\rho} = \frac{1}{k^2-\xi m_W^2}\left(g^{\lambda\rho} - (1-\xi)\frac{k^\lambda k^\rho}{(k^2-\xi m_W^2)}\right) . \tag{3.46}$$

Implementando el método de PV, se encuentra que esta amplitud se puede escribir como

$$i\Pi^W_{\mu\nu}(q) = i\Pi^W(q^2)P_{\mu\nu} , \tag{3.47}$$

donde

$$\Pi^W(q^2) = \frac{\alpha}{4\pi}\left[f_0 + f_1\left(\frac{q^2}{m_W^2}\right) + f_2\left(\frac{q^2}{m_W^2}\right)^2 + f_3\left(\frac{m_W^2}{q^2}\right)\right] , \tag{3.48}$$

es la corrección a la polarización del vacío generada por los campos de norma $W_\mu^\pm$. Esta amplitud es proporcional al tensor $P_{\mu\nu}(q)$ por lo que es invariante de norma. Por otro lado,

$$\begin{aligned} f_0 =& \frac{1}{2(D-1)}\left[2(7D-11)B_0(1) + (1-\xi)^2B_0(2) + 2(4\xi-1)B_0(3)\right. \\ &\left. +(4D+\xi-9)B_0(4) - \xi(4D+\xi-9)B_0(5) - (\xi-1)(4D+\xi-9)\right] , \end{aligned} \tag{3.49}$$

$$f_1 = -\frac{1}{D-1}\left[2(D-2)B_0(1) - (2D-\xi-3)B_0(2) + (1-\xi)B_0(3)\right] , \tag{3.50}$$

$$f_2 = \frac{1}{4(D-1)}\left[-B_0(1) + 2B_0(2) - B_0(3)\right] , \tag{3.51}$$

$$\begin{aligned} f_3 =& \frac{1}{D-1}\left[4(D-1)B_0(1) + 4\xi B_0(3) + 2(2-D)(D-1)B_0(4)\right. \\ &\left. -2(D-2)\xi B_0(5) - 2(D-2)(D+\xi-1)\right] . \end{aligned} \tag{3.52}$$

donde se han definido

$$B_0(1) = B_0(q^2, m_W^2, m_W^2) , \tag{3.53}$$

$$B_0(2) = B_0(q^2, m_W^2, \xi m_W^2) , \tag{3.54}$$

$$B_0(3) = B_0(q^2, \xi m_W^2, \xi m_W^2) , \tag{3.55}$$

$$B_0(4) = B_0(0, m_W^2, m_W^2) , \tag{3.56}$$

$$B_0(5) = B_0(0, \xi m_W^2, \xi m_W^2) . \tag{3.57}$$

Los términos f_1, f_2 y f_3 están dados como diferencias de funciones B_0 por lo que el polo ultravioleta ϵ^{-1} se cancela en estos términos, estos factores son finitos por lo que podemos tomar $D = 4$ en

ellos, así

$$f_1 = \frac{1}{3}\{-4B_0(1) + 5B_0(2) - B_0(3) + \xi[B_0(3) - B_0(2)]\}\,, \tag{3.58}$$

$$f_2 = \frac{1}{12}[-B_0(1) + 2B_0(2) - B_0(3)]\,, \tag{3.59}$$

$$f_3 = 4[B_0(1) - B_0(4) - 1] + \frac{4}{3}\xi[B_0(3) - B_0(5) - 1]\,. \tag{3.60}$$

Contribución de los seudobosones de Goldstone $G_W^{\pm}$ y de los campos ghost $C_W^{\pm}(\overline{C}_W^{\pm})$

La contribución generada por los campos G_W es idéntica a la encontrada en la teoría de la electrodinámica escalar, Ecs. (1.46) y (1.47), salvo el cambio $m \to \sqrt{\xi}m_W$ debido a la masa que aparece en el propagador de los campos $G_W^{\pm}$. Se tiene así que

$$i\Pi_{\mu\nu}^{G_W}(q) = i\Pi^{G_W}(q^2)P_{\mu\nu}\,, \tag{3.61}$$

donde

$$\Pi^{G_W}(q^2) = \frac{\alpha}{4\pi}\left[g_0 + g_1\left(\frac{m_W^2}{q^2}\right)\right]\,. \tag{3.62}$$

Esta amplitud es proporcional a la estructura de norma $P_{\mu\nu}(q)$ por lo que, la amplitud generada por los seudobosones de Goldstone es invariante de norma. En el caso de los campos fantasma se tienen las mismas reglas de Feynman que para los campos $G_W^{\pm}$ por lo que generan amplitudes similares a las generadas por los seudobosones de Goldstone. La diferencia entre estas amplitudes radica en que los campos ghost son campos anticonmutantes, por lo que las amplitudes generadas por estos campos dentro del lazo debe multiplicarse por un factor de (-1), justo como ocurre en el caso de la contribución de un espinor (QED). Además, debe considerarse que tenemos la contribución de dos campos, a saber, el campo fantasma, $C_W^{\pm}$, y el correspondiente campo antifantasma $\bar{C}_W^{\pm}$. Al considerar ambas contribuciones se encuentra que las amplitudes generadas por los campos fantasma (con sus respectivos anticampos) es igual a -2 veces la amplitud generada por los seudobosones de Goldstone, es decir

$$i\Pi_{\mu\nu}^{C_W}(q) = -2i\Pi_{\mu\nu}^{G_W}(q)\,, \tag{3.63}$$

$$= -2i\Pi^{G_W}(q^2)P_{\mu\nu}\,. \tag{3.64}$$

Contribución total de la electrodinámica vectorial

Es importante destacar que, en la norma no lineal, de manera individual, los campos $W_{\mu}^{\pm}$, $G_W^{\pm}$ y $\bar{C}_W^{\pm}(C_W^{\pm})$ generan correcciones a la función vértice de dos puntos $A_\mu A_\nu$ que son invariantes de norma bajo el grupo electromagnético $U_Q(1)$. La consecuencia más importante del uso de esta norma es que cada sector conduce a un resultado que es invariante de norma. De este modo, la contribución total de la electrodinámica vectorial Ec. (3.39) puede ser escrita como

$$i\Pi_{\mu\nu}^{EV}(q) = i\Pi^{EV}(q^2,\xi)P_{\mu\nu}\,, \tag{3.65}$$

donde

$$\begin{aligned}\Pi^{EV}(q^2,\xi) \equiv& \Pi^{W}(q^2) + \Pi^{G_W}(q^2) + \Pi^{C_W}(q^2) - \delta_A\,,\\ =& \Pi^{W}(q^2) - \Pi^{G_W}(q^2) - \delta_A\,.\end{aligned} \tag{3.66}$$

En términos de las expresiones (3.48) y (3.62) la ecuación anterior toma la forma,

$$\Pi^{EV}(q^2,\xi) = \frac{\alpha}{4\pi}\left[(f_0 - g_0) + f_1\left(\frac{q^2}{m_W^2}\right) + f_2\left(\frac{q^2}{m_W^2}\right)^2 + (f_3 - g_1)\left(\frac{m_W^2}{q^2}\right)\right] - \delta_A\,. \tag{3.67}$$

Esta amplitud es divergente UV a través del término $f_0 - g_0$. Para poder determinar la amplitud renormalizada, se establece al contratérmino δ_A a través de la condición de renormalización:

$$\Pi^{EV}(q^2 = 0,\xi) = 0\,. \tag{3.68}$$

Dado que el resultado depende del parámetro de norma ξ, se concluye que la contribución del vacío es dependiente de la norma. Entonces,

$$\delta_A = \frac{1}{2(D-1)} \quad \Big[2(7D-11)B_0(4) + (1-\xi)^2\hat{B}_0(4) + 4(2\xi-1)B_0(5) \\ +(4D+\xi-9)(B_0(4) - \xi B_0(5) + 1 - \xi)] \tag{3.69}$$

donde $\hat{B}_0(4) = B_0(0, m_W^2, \xi m_W^2)$. Por lo tanto la contribución a la polariación del vacío del bosón de norma $W^\pm$ está dada por:

$$\Pi_R^{EV}(q^2) = \quad \frac{\alpha}{4\pi}\left[\frac{1}{2(D-1)}[2(7D-11)(B_0(1) - B_0(4)) + 4(2\xi-1)(B_0(3) - B_0(5))] \right. \\ \left. +f_1\left(\frac{q^2}{m_W^2}\right) + f_2\left(\frac{q^2}{m_W^2}\right)^2 + \hat{f}_3\left(\frac{m_W^2}{q^2}\right)\right], \tag{3.70}$$

donde $\hat{f}_3 = f_3 - g_1$. Notando que en el primer término se cancela el polo $\frac{2}{\varepsilon}$ en $B_0(1) - B_0(4)$, podemos definir $D = 4$ en el coeficiente de este factor. Eston conduce al resultado final,

$$\Pi_R^{EV}(q^2) = \quad \frac{\alpha}{4\pi}\left[\frac{17}{3}(B_0(1) - B_0(4)) + \frac{2}{3}(2\xi-1)(B_0(3) - B_5(0)) \right. \\ \left. +f_1\left(\frac{q^2}{m_W^2}\right) + f_2\left(\frac{q^2}{m_W^2}\right)^2 + \hat{f}_3\left(\frac{m_W^2}{q^2}\right)\right] \tag{3.71}$$

Dado que el resultado depende del parámetro de norma ξ, concluímos que la contribución de una partícula de norma a la polarización del vacío es dependiente de la norma. Este es el resultado más importante de esta tesis.

Capítulo 4

Conclusiones

El fenómeno conocido con el nombre de polarización del vacío se produce como una consecuencia de la violación momentánea de la conservación de la energía permitida por el principio de incertidumbre. Una partícula cargada, tal como el electrón, emite y reabsorbe constantemente fotones virtuales, los cuales crean pares partícula-antipartícula que a su vez se recombinan nuevamente como un fotón, formándose así una nube virtual que crea un efecto de apantallamiento. Resulta entonces que la carga eléctrica que se mide depende de la energía a la cual se haga el experimento. La carga eléctrica es una función de la energía. En esta tesis se revisó este fenómeno a orden de un lazo en el contexto de la electrodinámica escalar y de la electrodinámica espinorial, es decir se revisaron los resultados ya conocidos de los efectos a la polarización del vacío de partículas cargadas de espín 0 y $\frac{1}{2}$. El resultado original de esta tesis fue el cálculo de la función de polarización del vacío con correcciones provenientes de la electrodinámica escalar, esta teoría está caracterizada por el bosón de norma débil $W^{\pm}$. El propósito de este análisis fue investigar la dependencia o independencia de norma de la función de polarización del vacío correspondiente. La presencia de un campo de norma requiere de introducir a los seudobosones de Goldstone y a los campos fantasma, este es un hecho inherente de las teorías cuánticas de norma. Por otro lado, se usó un esquema no lineal de fijación de la norma, este análisis también es un aporte de este trabajo de tesis. En este esquema se encontró que de manera individual, las correcciones a la polarización del vacío generadas por los campos $W^{\pm}$, G_W y C_W son invariantes de norma ya que satisfacen la identidad de Ward. Se encuentra también que en esta norma las contribuciones de los campos G_W y C_W son análogas a las calculadas en el caso de la SQED, donde la contribución de los campos fantasma es -2 veces la contribución generada por los seudobosones de Goldstone, el 2 es debido a que se consideran los campos y anticampos fantasma y el signo negativo es debido la estadística. Finalmente, y de manera destacable, el resultado principal de esta tesis fue mostrar que la contribución total de la electrodinámica vectorial a la función de polarización del vacío es dependiente de la norma, ya que depende del parámetro de ξ, por lo que dicha amplitud no puede considerarse como física, por lo que no puede considerarse directamente en el fenómeno de apantallamiento como sí ocurre en el caso de las correcciones generadas por campos fermiónicos.

Apéndice A

La función escalar B_0

La función B_0 se define como

$$B_0(q^2, m_0^2, m_1^2) = -i(4\pi)^2(\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - m_0^2 + i\varepsilon)[(k+q)^2 - m_1^2 + i\varepsilon]}, \tag{A.1}$$

donde nombraremos a los términos $(k^2 - m_0^2 + i\varepsilon)$ y $[(k+q)^2 - m_1^2 + i\varepsilon]$, como A y B respectivamente, de modo que B_0 toma la forma

$$B_0(q^2, m_0^2, m_1^2) = -i(4\pi)^2(\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{AB}. \tag{A.2}$$

Usando Parametrización a la Feynman, encontramos

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{\Gamma(2)}{[xA + (1-x)B]^2}, \tag{A.3}$$

donde,

$$\begin{aligned} xA + (1-x)B &= x(k^2 - m_0^2 + i\varepsilon) + (1-x)[(k+q)^2 - m_1^2 + i\varepsilon], \\ &= k^2 + 2xk \cdot q + xm_0^2 - m_0^2 - m_1^2 x + xq^2 + i\varepsilon], \\ &= (k + xq)^2 - [x^2 q^2 - xm_0^2 + m_0^2 + m_1^2 x - xq^2 - i\varepsilon], \\ &= (k + xq)^2 - \Delta_B. \end{aligned} \tag{A.4}$$

Siendo $\Delta_B = [x^2 q^2 + x(m_1^2 - m_0^2 - q^2) + m_0^2 - i\varepsilon]$, de manera que (A.4) puede ser reescrito como

$$xA + (1-x)B = (k + xq)^2 - \Delta_B, \tag{A.5}$$

así,

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2)}{[(k + xq)^2 - \Delta_B]^2}. \tag{A.6}$$

Sustituyendo (A.6) en la ecuación (A.2),

$$\begin{aligned} B_0(q^2, m_0^2, m_1^2) &= -i(4\pi)^2(\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2)}{[(k + xq)^2 - \Delta_B]^2} \\ &= -i(4\pi)^2(\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int_0^1 dx \Gamma(2) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(k + xq)^2 - \Delta_B]^2}, \end{aligned} \tag{A.7}$$

Hacemos la traslación $k \to k - xq$

$$B_0(q^2, m_0^2, m_1^2) = -i(4\pi)^2(\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - \Delta_B)^2}, \tag{A.8}$$

donde,

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[k^2 - \Delta]^n} = \frac{(-1)^n i}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(n - \frac{D}{2})}{\Gamma(2)} \Delta^{-(n-\frac{D}{2})}. \tag{A.9}$$

Para $n = 2$ y $\Delta_B = 2$, tenemos

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - \Delta_B)^2} = \frac{i}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{\Gamma(2)} \Delta_B^{n - \frac{D}{2}} \,. \tag{A.10}$$

Sustituyendo la ecueación (A.10) en (A.8), obtenemos

$$B_0(q^2, m_0^2, m_1^2) = (\mu^2)^{2 - \frac{D}{2}} \int_0^1 dx \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \left(\frac{\Delta_B}{4\pi}\right)^{-(2 - \frac{D}{2})} \,. \tag{A.11}$$

Tomando $D = 4 - 2\epsilon$:

$$B_0(q^2, m_0^2, m_1^2) = \int_0^1 dx \Gamma(\epsilon) \left(\frac{\Delta_B}{(2\pi\mu)^2}\right)^{-\epsilon} . \tag{A.12}$$

Note que para valores pequeños de ϵ

$$\begin{aligned} \Gamma(\epsilon) A^{-\epsilon} &= \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E - \log(A) \\ &= \int_0^1 dx \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E - \log\left(\frac{\Delta_B}{4\pi\mu^2}\right)\right] \,, \end{aligned} \tag{A.13}$$

con γ_E la constante de Euler-Mascheroni. Finalmente, llegamos al siguiente resultado:

$$B_0(q^2, m_0^2, m_1^2) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E - \int_0^1 dx \log\left(\frac{\Delta_B}{4\pi\mu^2}\right) . \tag{A.14}$$

Bibliografía

[1] Peskin, M. E. (2018). An introduction to quantum field theory. CRC Press.

[2] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics* (Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, 1964).

[3] Glashow, S. L. , Partial-symmetries of weak interactions. Nuclear Physics, 22(4), 579-588 (1961).

[4] Weinberg, S., A model of leptons. Phys. Rev. Lett.,19, 1264-1266 (1967).

[5] A. Salam . N. Svartholm, ed. *Elementary Particle Physics: Relativistic Groups and Analyticity.* Eighth Nobel Symposium. Stockholm: Almquvist and Wiksell. p. 367. (1968)

[6] P.A. Zyla et al. (Particle Data Group), Prog. Theor. Exp. Phys. 2020, 083C01 (2020)

[7] P. W. Higgs, Phys. Rev. Lett. **13**, 508 (1964).

[8] F. Englert and R. Brout, Phys. Rev. Lett. **13**, 321 (1964).

[9] F. J. Dyson, *The radiation theories of Tomonaga, Schwinger, and Feynman*, Phys. Rev. D **75**, 486 (1947).

[10] K. Wilson, *The renormalization group: Critical phenomena and the Kondo problem*, Rev. Mod. Phys. **47**, 773 (1975).

[11] D. Gross and F. Wilczek, *Ultraviolet behaviour of non-ableian gauge theories*, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973).

[12] S. Weinberg, *The Quantum Theory of the Fields, Vol. II*, Cambridge Universy Press (1996).

[13] J. Butterfield, *Reduction, Emergence and Renormalization*, The Journal of Philosophy, Volume 111, 5 (2014), arXiv:1406.4354 [physics.hist-ph].

[14] C. G. Honorato, J. J. Toscano. $U_e(1)$-covariant R_ξ gauge for the two-Higgs doublet model, Pramana volume 73, Article number: 1023 (2009)

[15] G. Passarino and M. J. Veltman, Nucl. Phys. B 160 (1979) 151

[16] V. Shtabovenko, R. Mertig and F. Orellana, Comput.Phys.Commun. 256 (2020) 107478, arXiv:2001.04407.