

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla



BUAP

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Caracterización geométrica y potencial de Bohm de haces estructurados

**Tesis presentada para obtener el grado
de Maestra en Ciencias
(Física Aplicada)**

Por:

Lic. Jessica Ortiz Flores

Asesorada por:

**Dr. Gilberto Silva
Ortigoza
(FCFM-BUAP)**

**Dra. Citlalli Teresa
Sosa Sánchez
(CICESE-Unidad
Monterrey)**

Puebla, Pue.
Julio 2023

FCFM

Título: Caracterización geométrica y potencial de Bohm de haces estructurados

Tesista: Jessica Ortiz Flores

COMITÉ

Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo
(FCFM-BUAP)
Presidente

Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco
(FCFM-BUAP)
Secretario

Dra. Maribel Marcela Mendez Otero
(FCFM-BUAP)
Vocal

Dra. Georgina Beltrán Pérez
(FCFM-BUAP)
Suplente

Dr. Gilberto Silva Ortigoza
(FCFM-BUAP)
Asesor

Dra. Citlalli Teresa Sosa Sánchez
(CICESE-Unidad Monterrey)
Asesor

Capítulo I

Agradecimientos

Queridos:

Papás Alejandra y Adolfo, Luis Armando, Mario, asesores Drs. Gilberto y Citlalli, sinodales Drs. Gerardo, Maximino, Maribel y Georgina y no menos importantes, mis amigos.

Ustedes han sido una parte muy importante en esta etapa que ha concluido, quiero agradecerles a todos ustedes su gran apoyo, consejos, ánimo, tolerancia.

Gracias familia porque son una invaluable parte de mi vida.

A mis asesores en especial por hacerme parte de sus proyectos y guiarme profesionalmente.

Con todo mi cariño y gratitud a todos ustedes.

Jessica Ortiz Flores
2023

Capítulo II

Resumen

En la primera parte de este trabajo, mostramos que cualquier solución de la ecuación escalar paraxial de onda $(1 + 1)D$, en el vacío determina un sistema Hamiltoniano con un grado de libertad para una partícula de masa $m = 1$, bajo la interacción del denominado potencial cuántico, o alternativamente una fuerza cuántica, determinados por la amplitud de la solución paraxial. Mostramos que las curvas integrales del vector de Poynting conforman un subconjunto de soluciones de las ecuaciones de Hamilton correspondientes o de la segunda ley de Newton. Además, las líneas tangentes a las curvas integrales del vector de Poynting en los ceros del potencial cuántico determinan una familia particular de soluciones a las ecuaciones de Hamilton para una partícula libre de masa $m = 1$. Estos resultados generales son aplicados al haz de Airy y encontramos que la partícula asociada evoluciona bajo la influencia de una fuerza constante, así que las trayectorias son parabólicas, las curvas integrales del vector de Poynting son determinadas por las soluciones tales que su momento inicial correspondiente es cero, los ceros del potencial cuántico conforman una curva integral del vector de Poynting. Los rayos de luz geométricos asociados con el haz de Airy están dados por las líneas tangentes a la solución de las ecuaciones de Hamilton correspondientes en los ceros del potencial cuántico. Finalmente, en esta primera parte, mostramos que la cáustica asociada con esta familia de rayos de luz coincide con los ceros del potencial cuántico. En la segunda parte de este trabajo, se encuentran resultados análogos para la familia de haces Laguerre-Gauss.

Índice general

1. Agradecimientos	III
2. Resumen	V
Índice general	VII
Índice de figuras	IX
1. Introducción	1
2. El haz de Airy	5
2.1. Soluciones a la ecuación escalar paraxial de onda en el vacío a partir de integrales completas a la ecuación de Hamilton-Jacobi en el vacío	5
2.2. Sistema hamiltoniano asociado a una solución de la ecuación escalar paraxial de onda $(1 + 1)D$ en el vacío	7
2.3. El haz de Airy	9
2.4. Una derivación del haz de Airy desde el punto de vista del potencial cuántico	16
3. El haz de Laguerre-Gauss	19
3.1. La ecuación paraxial de onda y el potencial cuántico	19
3.2. Los haces de Laguerre-Gauss	22
3.3. Rayos de luz geométricos determinados por los haces de Laguerre-Gauss	27
4. Conclusiones	29

Índice de Figuras

2.1.	<i>En (a) Se muestra el gráfico de intensidad $R^2(x, z)$ en el plano xz del haz de Airy y en (b) la intensidad del haz de Airy en $z = 0$. En estos gráficos tomamos $B = 1$ y $k = 1$.</i>	10
2.2.	<i>Se muestra la fase del haz de Airy para $B = 1$ y $k = 1$.</i>	10
2.3.	<i>El potencial cuántico, Q (morado) determinado por el haz de Airy y sus ceros (rojo), con $B = 1$ y $k = 1$.</i>	11
2.4.	<i>(a) Se muestran algunas soluciones a las ecuaciones de Hamilton en el espacio de configuraciones para $x_0 = -10, -5, 0, 5, 10$, p_0 toma diferentes valores, en (b) se muestran algunas curvas integrales del vector de Poynting determinadas por el haz de Airy (morado), para $x_0 = -10, -5, 0, 5, 10$ y $p_0 = 0$ y en (c) se muestra una superposición de (a) y (b), además se muestran los ceros del potencial cuántico (rojo).</i>	12
2.5.	<i>Se muestran algunas líneas tangentes (azul) a los ceros del potencial cuántico (rojo) para el haz de Airy con $B = 1$.</i>	13
2.6.	<i>(a) Se muestran algunos frentes de onda geométricos dados por $\tilde{S}_{\pm} = C$ (verde). La curva roja corresponde a los ceros del potencial cuántico para el haz de Airy con $B = 1$ y $k = 1$. (b) Se muestran algunos frentes de onda físicos dados por $\Phi = C$ (morado). La curva roja corresponde a los ceros del potencial cuántico para el haz de Airy con $B = 1$ y $k = 1$.</i>	15
3.1.	<i>Gráfico de los ceros del potencial cuántico con $l = 1$, $k = 1$ y $w_0 = 1$.</i>	23
3.2.	<i>Gráfico los ceros de la fuerza cuántica con $l = 1$, $k = 1$ y $w_0 = 1$.</i>	23
3.3.	<i>Se grafican algunas trayectorias de las soluciones dadas por (3.42) con $k = 1$, $w_0 = 1$, $\rho_0 = 1/2$, $z_0 = 0$ y $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$, para (a) $l = 1$, (b) $l = 2$, (c) $l = 4$ y (d) $l = 6$.</i>	25
3.4.	<i>En este gráfico se muestran los ceros del potencial cuántico (3.34) con signo negativo (superficie morada) y las trayectorias de energía del vector de Poynting (curvas verdes) con $l = 1$, $n = 0$, $k = 1$ y $w_0 = 1$.</i>	26
3.5.	<i>Se grafican los ceros de la fuerza cuántica (rojo) dados por $\rho = w_z \sqrt{ l /2}$ y algunas curvas integrales del vector de Poynting (azul), las cuales son líneas rectas, con $l = 1$, $n = 0$, $k = 1$ y $w_0 = 1$.</i>	26
3.6.	<i>En este gráfico se muestran los ceros del potencial cuántico, dada por (3.34) con signo positivo (superficie morada) y las trayectorias de energía del vector de Poynting (curvas verdes) con $l = 1$, $n = 0$, $k = 1$ y $w_0 = 1$.</i>	27
3.7.	<i>Se muestra la primera rama de los ceros del potencial cuántico (morado) dado por la Ec. (3.34) con el signo negativo y algunos rayos de luz geométricos (naranja) dados por la Ec. (3.49), los cuales son tangentes a las curvas integrales del vector de Poynting en los puntos $(\rho_-, \varphi_0, z_0 = \pi)$ (negro), para el haz de Laguerre-Gauss con $l = 1$, $n = 0$, $k = 1$ y $w_0 = 1$.</i>	28

Capítulo 1

Introducción

En 1952, Bohm introdujo una nueva formulación de la mecánica cuántica. Para este propósito, parte de la ecuación de Schrödinger para una partícula de masa m bajo la influencia de un potencial clásico, $U(\mathbf{r})$, después expresando la función de onda en su forma polar, encuentra un sistema acoplado de dos ecuaciones, en derivadas parciales, que gobiernan la evolución de la amplitud y la fase de la función de onda. Una de estas ecuaciones expresa la conservación de la probabilidad, y la otra, formalmente corresponde a la ecuación de Hamilton-Jacobi para la partícula de masa m bajo la influencia de la interacción descrita por el potencial clásico $U(\mathbf{r})$, más una interacción adicional dada por un potencial al que Bohm definió como: **potencial cuántico**. En esta formulación, con cada solución a la ecuación de Schrödinger, se encuentra asociado un conjunto de trayectorias determinado por la fase de la función de onda. Estas trayectorias, corresponden a las curvas integrales del campo vectorial de la densidad de corriente de probabilidad. Bohm establece que este conjunto de trayectorias son las trayectorias permitidas para la partícula de masa m que evoluciona bajo la acción de los potenciales clásico y cuántico [1].

En la formulación de Bohm para la mecánica cuántica, la partícula tiene asociada un conjunto de trayectorias, a diferencia de la teoría cuántica habitual en la cual la posición y el momento son cantidades que están relacionadas entre sí por medio del principio de incertidumbre. Es relevante mencionar que aunque la formulación de la mecánica cuántica habitual es la que se estudia actualmente, existen grupos de investigación que trabajan en el estudio de la mecánica bohmiana, dado que hay algunas inconsistencias que la mecánica cuántica no ha podido resolver como se establece en [2], por ejemplo para el cálculo del tiempo de vuelo de las partículas que se producen en los grandes colisionadores de hadrones. Medir el tiempo que tarda una partícula en viajar del punto donde se produjo al detector, no es fácil, por lo que se ha propuesto un arreglo experimental que podría determinar si la mecánica bohmiana es acertada. Este experimento consiste en un electrón confinado dentro de un potencial en su estado de mínima energía, un detector es colocado lejos de la barrera de potencial y cuando ésta se quita, se mide el tiempo que el electrón tarda en llegar al detector, las predicciones de la mecánica cuántica y la mecánica bohmiana difieren por lo que cuando este experimento pueda ser llevado a cabo, será posible determinar cuál teoría describe mejor el tiempo de vuelo de una partícula y con ello se revolucionaría nuevamente la mecánica del mundo microscópico.

En 1979, Berry y Balazs encontraron una solución exacta a la ecuación de Schrödinger unidimensional para una partícula libre de masa m . Esta solución, está escrita en términos de la función de Airy, cuya densidad de probabilidad se propaga en el espacio-tiempo sin distorsión y con una aceleración constante. Berry y Balazs, encontraron que desde el punto de vista clásico, esta propiedad de

no distorsión está determinada por una familia de trayectorias representadas por una parábola en el espacio fase, esta parábola se traslada rígidamente conforme la densidad de probabilidad evoluciona. También mostraron que la aceleración está relacionada con la curvatura de la cáustica en el espacio-tiempo, asociada con esta solución. Es decir, la cáustica es la envolvente de las trayectorias clásicas determinadas por esta solución a la ecuación de Schrödinger. Debido a que esta solución está dada en términos de la función de Airy, normalmente se le conoce con el nombre de haz de Airy [3].

En 1987, Durnin demostró teóricamente la existencia de haces adifraccionales que satisfacen la ecuación escalar de onda [4]. Poco después, Durnin, Miceli y Eberly, presentaron el primer reporte experimental de un haz adifraccional dado por la función de Bessel de orden cero [5].

Más adelante, Gutiérrez-Vega, Iturbe-Castillo y Chávez-Cerda reportaron la generación de haces adifraccionales, los cuales se conocen con el nombre de haces de Mathieu, asociados a soluciones de la ecuación escalar de onda en el vacío en coordenadas cilíndrico elípticas [6, 7]. Luego, en 2004, Bandres, Gutiérrez-Vega y Chávez-Cerda reportaron los haces adifraccionales parabólicos [8, 9].

En 2007, Siviloglou y Christodoulides notaron que la ecuación de Schrödinger unidimensional dependiente del tiempo para una partícula libre de masa m , es matemáticamente equivalente a la ecuación escalar paraxial de onda unidimensional en el vacío. De esta manera, introdujeron, en el contexto de la óptica geométrica, el haz de Airy de energía finita. Estos autores, reportaron la primera observación de los haces de Airy y mostraron que este haz, mientras se propaga en cierta región, se comporta como adifraccional. Además, demostraron que los haces de Airy tienen un comportamiento balístico. Es decir, se comportan como un haz de partículas bajo la influencia de la fuerza gravitacional, lo cual significa que su energía fluye a lo largo de trayectorias parabólicas. Más adelante, Broky, Siviloglou, Dogariu y Christodoulides demostraron que los haces de Airy tienen la propiedad de auto-reconstrucción. [10, 11, 12].

En 2007, Bandres estudió las propiedades de los haces de Airy bidimensionales y demostró que los haces acelerados están determinados por una función compleja de onda definida en una recta real [13].

Por otro lado, los haces de Laguerre-Gauss son una familia de soluciones exactas a la ecuación escalar paraxial de onda en el espacio vacío con momento angular, mantienen su forma durante su propagación, a la vez que presenta difracción, por esta razón, se le conoce como haz pseudo-adifraccional [14, 15].

Cabe mencionar que se han reportado las caracterizaciones geométricas de los haces de Bessel [16], de Mathieu [17] y los parabólicos [18]. Además, se han estudiado las trayectorias de energía exactas y geométricas de los haces de Laguerre-Gauss por Berry y McDonald [19]. Es decir, estos autores, presentaron las curvas integrales del vector de Poynting para los haces de Laguerre-Gauss, en forma exacta y en forma aproximada suponiendo que la longitud de onda de estos haces tiende a cero.

El objetivo de este trabajo es determinar las curvas integrales del vector de Poynting, los rayos de luz geométricos y la cáustica determinados por los haces de Airy y Laguerre-Gauss, usando el método del potencial cuántico introducido por Bohm en el contexto de la ecuación de Schrödinger.

Para este propósito, en el Capítulo 2, mostramos que cualquier solución a la ecuación de Hamilton-Jacobi que describe la evolución de una partícula libre con masa $m = 1$, la cual también es solución de la ecuación de Laplace en una dimensión, da origen a una solución exacta de la ecuación escalar paraxial de onda en el vacío. Usando el principio de superposición, mostramos que la solución general a la ecuación escalar paraxial de onda en el vacío es determinada por dos funciones reales

arbitrarias. Posteriormente, nos restringimos al estudio de un subconjunto particular de soluciones, las cuales desde el punto de vista geométrico están caracterizadas por: una familia de frentes de onda, una familia de rayos de luz y una región cóustica, que son determinadas por una solución especial a la ecuación de Hamilton-Jacobi para una partícula libre de masa $m = 1$. Además, mostramos que con cada solución a la ecuación escalar paraxial de onda en el vacío se puede asociar, en forma natural, un sistema Hamiltoniano de un grado de libertad que describe la evolución de una partícula de masa $m = 1$ bajo la interacción del denominado potencial cuántico producido por la función de onda. La evolución de esta partícula está dada por las ecuaciones de Hamilton correspondientes o segunda ley de Newton. En este capítulo, remarcamos que las curvas integrales del vector de Poynting conforman un subconjunto de soluciones a las ecuaciones de Hamilton. Si el potencial cuántico no es idénticamente cero, mostramos que entonces existe un subconjunto de puntos determinado por los ceros del potencial cuántico. En tal caso, con cada solución de la ecuación escalar paraxial de onda en el vacío asociamos una familia de líneas rectas determinadas por las rectas tangentes a las curvas integrales del vector de Poynting en los ceros del potencial cuántico. Es importante destacar que en general este conjunto de líneas rectas no corresponde a los rayos de luz geométricos determinados por la solución paraxial. En el capítulo 2, estos resultados generales son aplicados al haz de Airy. Demostramos que para este haz, la fuerza cuántica determinada por el potencial cuántico es constante de tal forma que las curvas integrales del vector de Poynting son trayectorias parabólicas y las rectas tangentes a las curvas integrales del vector de Poynting en los ceros del potencial cuántico sí corresponden a los rayos geométricos. Finalmente, remarcamos que para el haz de Airy, los ceros del potencial cuántico coinciden con la cóustica asociada a los rayos de luz geométricos. En el Capítulo 3, presentamos resultados análogos para los haces de Laguerre-Gauss. Finalmente, presentamos nuestras conclusiones.

Capítulo 2

El haz de Airy

2.1. Soluciones a la ecuación escalar paraxial de onda en el vacío a partir de integrales completas a la ecuación de Hamilton-Jacobi en el vacío

En esta sección, mostramos que la solución general de la ecuación escalar paraxial de onda $(1+1)D$ en el vacío es determinada por dos funciones reales $O(P)$ y $S(x, P, z)$. La primera función está definida en el espacio de los momentos y la segunda, es una integral completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi en el vacío, que describe la evolución de una partícula libre con masa $m = 1$ y que además satisface la ecuación unidimensional de Laplace. Para ello, partimos de la ecuación escalar paraxial de onda [20] en el vacío dada por:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + ik \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad (2.1)$$

donde k es el número de onda. Estamos interesados en soluciones de la forma dada por

$$\psi(x, z) = e^{ikS(x,z)}. \quad (2.2)$$

Entonces, utilizando las Ecs. (2.1) y (2.2), un cálculo directo muestra que la función $S(x, z)$ debe ser tal que

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial S}{\partial z} = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = 0. \quad (2.4)$$

Es decir, la función $S(x, z)$ debe ser una solución tanto de la ecuación unidimensional de Hamilton-Jacobi en el vacío, para una partícula de masa $m = 1$, como de la ecuación unidimensional de Laplace. Además, otro cálculo directo muestra que la solución general de la ecuación de Laplace ecuación (2.4) viene dada por

$$S(x, z) = f_1(z) + x f_2(z), \quad (2.5)$$

donde $f_1(z)$ y $f_2(z)$ son funciones solamente de la coordenada z . Así, a partir de las Ecs. (2.3) y (2.5) encontramos que una integral completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi, la cual también es una

solución de la ecuación de Laplace, viene dada por

$$S(x, P, z) = xP - \frac{z}{2}P^2 + \alpha(P), \quad (2.6)$$

donde $\alpha(P)$ es una función arbitraria del parámetro P . De acuerdo con la teoría de Hamilton-Jacobi, la función $S(x, P, z)$ dada por la Ec. (2.6), es la función generadora de una transformación canónica de las coordenadas locales del espacio de fase (x, p) a las nuevas coordenadas locales (β, P) explícitamente dada por:

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial P} = x - zP + \frac{d\alpha}{dP}, \quad (2.7)$$

$$p = \frac{\partial S}{\partial x} = P. \quad (2.8)$$

Dado que la ecuación escalar paraxial de onda (2.1) es una ecuación lineal, entonces admite el principio de superposición. Por lo tanto, la solución general de esta ecuación viene dada por

$$\Psi(x, z) \equiv \int_{\mathcal{D}} O(P) e^{ik[xP - \frac{z}{2}P^2 + \alpha(P)]} dP, \quad (2.9)$$

donde \mathcal{D} es una variedad diferenciable unidimensional. Para el caso particular, cuando $O(P)$ es una constante, la solución (2.9) viene determinada por las propiedades de la integral completa (2.6) y entonces, existe una solución particular $\tilde{S}(x, z)$ a la ecuación unidimensional de Hamilton-Jacobi (2.3), que proporciona la caracterización geométrica de la onda $\Psi(x, z)$. Dicha solución se obtiene de la siguiente manera: la Ec. (2.7) se iguala a cero, es decir, $\beta = 0$ y se resuelve para $P(x, z)$, de esta forma se encuentra que

$$P = \Gamma(x, z), \quad (2.10)$$

y $\tilde{S}(x, z)$ se obtiene sustituyendo la Ec. (2.10) en la Ec. (2.6). Por lo tanto,

$$\tilde{S}(x, z) = x\Gamma(x, z) - \frac{z}{2}[\Gamma(x, z)]^2 + \alpha(\Gamma(x, z)). \quad (2.11)$$

Los frentes de onda geométricos asociados con la función de onda (2.2) están definidos por la familia de curvas en el plano xz dada por

$$\tilde{S}(x, z) = x\Gamma(x, z) - \frac{z}{2}[\Gamma(x, z)]^2 + \alpha(\Gamma(x, z)) = C, \quad (2.12)$$

donde C es una constante real que etiqueta los frentes de onda geométricos. Además, los rayos de luz geométricos asociados a esta familia de frentes de onda vienen dados por la Ec. (2.7) con $\beta = 0$. Es decir, vienen dados por

$$x - zP + \frac{d\alpha}{dP} = 0. \quad (2.13)$$

Y la cáustica, que se define como la envolvente de los rayos de luz geométricos (2.13), está dada por todos los puntos (x, z) del plano tales que, además de cumplir con la Ec. (2.13), deben cumplir con la siguiente condición:

$$-z + \frac{d^2\alpha}{dP^2} = 0. \quad (2.14)$$

Es decir, la cáustica puede escribirse en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x_c &= P \frac{d^2\alpha}{dP^2} - \frac{d\alpha}{dP}, \\ z_c &= \frac{d^2\alpha}{dP^2}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

En esta sección, hemos demostrado que cualquier solución de la ecuación escalar paraxial de onda en el vacío, de la forma (2.2), define de manera natural, un sistema hamiltoniano unidimensional para una partícula libre de masa $m = 1$. Además, utilizando el principio de superposición hemos definido una solución más general para la ecuación escalar paraxial de onda en el vacío dada por (2.9), que está determinada por las dos funciones arbitrarias $O(P)$ y $\alpha(P)$. Para el caso particular en el que $O(P)$ sea una constante, la solución resultante $\psi(x, z)$, en el límite geométrico o aproximación de mecánica clásica, tiene asociada una nueva solución (2.11) a la ecuación de Hamilton-Jacobi en el vacío (2.3). Así, esta onda tiene asociado un conjunto de frentes de onda (2.12) y la cáustica dada por las Ecs. (2.15). Concluimos esta sección remarcando que $\tilde{S}(x, z)$, solución a la ecuación de Hamilton-Jacobi (2.3), no es una solución de la ecuación unidimensional de Laplace (2.4). De hecho, utilizando las Ecs. (2.11) y (2.13), un cálculo directo muestra que

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial x^2} = \frac{\partial \Gamma}{\partial x} = \frac{1}{z - \frac{d^2\alpha}{dP^2}}. \quad (2.16)$$

Así, a partir de las Ecs. (2.10) y (2.15), tenemos que en la región cáustica, el lado derecho de esta ecuación, diverge.

2.2. Sistema hamiltoniano asociado a una solución de la ecuación escalar paraxial de onda $(1 + 1)D$ en el vacío

En esta sección, mostramos que cualquier solución de la ecuación escalar paraxial de onda $(1 + 1)D$ en el espacio vacío determina un sistema hamiltoniano que describe la evolución de una partícula, con masa $m = 1$, bajo la interacción del llamado potencial cuántico, que es producido por la función de onda, tal y como lo ha mostrado Bohm en el contexto de la ecuación de Schrödinger. Para esto, comenzamos escribiendo la solución dada por (2.9) en su forma polar, es decir,

$$\psi(x, z) = R(x, z) e^{ik\Phi(x, z)}, \quad (2.17)$$

donde $R(x, z)$ y $\Phi(x, z)$ son dos funciones reales. Ahora, sustituyendo esta expresión en la ecuación escalar paraxial de onda en el vacío (2.1), un cálculo directo muestra que las funciones R y Φ deben satisfacer las siguientes ecuaciones acopladas

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[R^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial R^2}{\partial z} = 0, \quad (2.18)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + Q(x, z) + \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0. \quad (2.19)$$

Formalmente, la Ec. (2.19) es la ecuación de Hamilton-Jacobi para una partícula de masa $m = 1$ bajo la interacción producida por el potencial cuántico

$$Q \equiv -\frac{1}{2k^2R} \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}, \quad (2.20)$$

donde la coordenada z está tomando el lugar del tiempo t , y el momento lineal de la partícula se define por:

$$\mathbf{p} \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial x} \hat{x}. \quad (2.21)$$

Con estas identificaciones la Ec. (2.18) establece el análogo de la conservación de la probabilidad; es decir

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{x} \right) \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial R^2}{\partial z} = 0, \quad (2.22)$$

donde

$$\mathbf{J} \equiv R^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \hat{x} = R^2 \mathbf{p}, \quad (2.23)$$

es la corriente de densidad de probabilidad. Por lo tanto, a partir de la Ec. (2.19), vemos que con cualquier solución de la ecuación escalar paraxial de onda en el vacío se puede asociar, de forma natural, un sistema Hamiltoniano, para una partícula de masa $m = 1$, con un grado de libertad, bajo la influencia del potencial cuántico (2.20). El Hamiltoniano de este sistema está dado por:

$$H = \frac{p^2}{2} + Q(x, z). \quad (2.24)$$

Entonces las ecuaciones de Hamilton correspondiente son:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\partial H}{\partial p} = p, \quad (2.25)$$

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (2.26)$$

Así, la segunda ley de Newton que describe la evolución de esta partícula se puede escribir en la siguiente forma

$$\frac{d^2 x}{dz^2} = F(x, z), \quad (2.27)$$

donde F es la denominada fuerza cuántica, definida por

$$F(x, z) \equiv -\frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (2.28)$$

A partir de estos resultados, queda claro que con cualquier solución (2.17) de la ecuación escalar paraxial de onda en el vacío (2.1) podemos asociar una partícula de masa $m = 1$ evolucionando bajo la interacción dada por el potencial cuántico (2.20). Es decir, la evolución de esta partícula viene dada por las ecuaciones de Hamilton (2.25) y (2.26) o equivalentemente por la segunda ley de Newton (2.27). Desde el punto de vista geométrico o desde el punto de vista de la mecánica clásica a esta onda le podemos asociar una solución particular, $\tilde{S}(x, z)$, de la ecuación de Hamilton-Jacobi en el vacío dada

por la Ec. (2.11). Por otro lado, tenemos que el vector de Poynting asociado a la solución (2.17) está dado por

$$\mathbf{S} = R^2(\mathbf{p} + \hat{z}), \quad (2.29)$$

donde \mathbf{p} está dado por la Ec. (2.21). Por lo tanto, a partir de las Ecs. (2.21), (2.25), (2.26) y (2.29) concluimos que las curvas integrales del vector de Poynting (2.29), en general, conforman un subconjunto de soluciones a las ecuaciones de Hamilton (2.25) y (2.26). Así que, la Ec. (2.18) o equivalentemente la Ec. (2.22) implica que el flujo del vector Poynting, determinado por la onda escalar paraxial en el vacío, a través de una curva cerrada en el plano xz es cero.

En este trabajo suponemos que la solución $\psi(x, z)$ es dada, entonces su potencial cuántico y fuerza cuántica están dadas por (2.20) y (2.28), respectivamente. Obsérvese que el potencial cuántico (2.20) determinado a partir de una solución dada a la ecuación escalar paraxial de onda, en general, será una función de las coordenadas x y z . Si éste no es idénticamente cero, entonces existirá un subconjunto del plano xz determinado por los ceros del potencial cuántico. Dependiendo de las propiedades de la solución de onda, los ceros del potencial cuántico pueden ser puntos aislados o curvas. Esta región es importante porque como podemos ver de las Ecs. (2.3) y (2.19) las soluciones a ambas ecuaciones de Hamilton-Jacobi coincidirán. Esto a su vez significa que a partir de las soluciones a las ecuaciones de Hamilton (2.25) y (2.26) determinadas por la fase Φ de la función de onda conocida; es decir, las curvas integrales del vector de Poynting, y los ceros del potencial cuántico correspondiente, podemos introducir un subconjunto de soluciones de las ecuaciones de Hamilton que describen la evolución de una partícula libre con un grado de libertad y masa $m = 1$, que definimos como la familia de rectas asociadas con los ceros del potencial cuántico. Este subconjunto está definido por la familia de rectas tangentes a las soluciones de las ecuaciones de Hamilton (2.25) y (2.26), determinadas por la solución a la ecuación escalar paraxial de onda en el vacío, en los ceros del potencial cuántico correspondiente. Este subconjunto particular de rectas, en general, no coincide con los rayos de luz geométricos asociados con la solución escalar paraxial de onda. Sin embargo, como veremos, para el haz de Airy, estas rectas tangentes son los rayos de luz geométricos determinados por este haz en su aproximación de óptica geométrica.

2.3. El haz de Airy

El haz de Airy es una solución exacta de la ecuación escalar paraxial de onda (2.1) en el vacío dada por

$$\Psi(x, z) = Ai \left[Bk^{2/3} \left(x - \frac{B^3 z^2}{4} \right) \right] e^{ik \left(\frac{B^3 xz}{2} - \frac{B^6 z^3}{12} \right)}, \quad (2.30)$$

donde B es una constante, tal que B^3 tiene unidades de uno sobre longitud, y $Ai(\cdot)$ es la función de Airy. Es decir, para este haz

$$R(x, z) = Ai \left[Bk^{2/3} \left(x - \frac{B^3 z^2}{4} \right) \right], \quad (2.31)$$

$$\Phi(x, z) = \frac{B^3 xz}{2} - \frac{B^6 z^3}{12}. \quad (2.32)$$

En la Figura 2.1, presentamos en (a) el gráfico de la intensidad, $R^2(x, z)$, del haz de Airy y en (b) la intensidad del haz de Airy en $z = 0$. En la Figura 2.2, mostramos la fase, $\Phi(x, z)$, del haz de Airy.

Por lo tanto, a partir de las Ecs. (2.20), (2.28) y (2.31) se muestra que el potencial cuántico y la fuerza cuántica determinados por el haz de Airy pueden escribirse de la siguiente manera

$$Q = -\frac{B^3}{2} \left(x - \frac{B^3 z^2}{4} \right), \quad (2.33)$$

$$F = \frac{B^3}{2}. \quad (2.34)$$

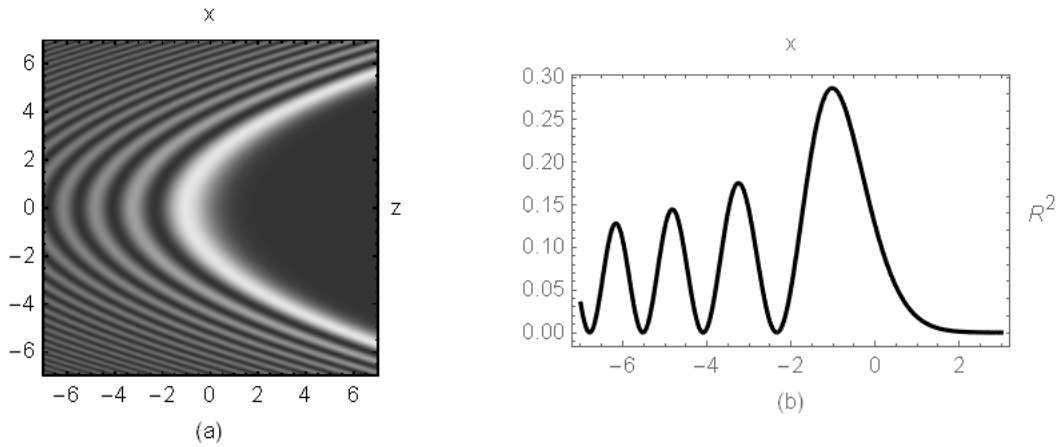


Figura 2.1: En (a) Se muestra el gráfico de intensidad $R^2(x, z)$ en el plano xz del haz de Airy y en (b) la intensidad del haz de Airy en $z = 0$. En estos gráficos tomamos $B = 1$ y $k = 1$.

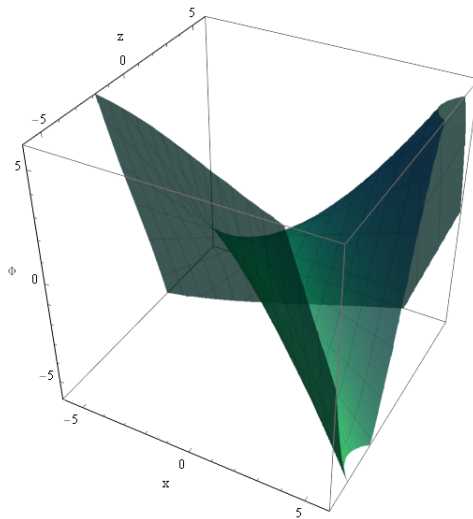


Figura 2.2: Se muestra la fase del haz de Airy para $B = 1$ y $k = 1$.

Es decir, el potencial cuántico es: lineal en x , cuadrático en z , negativo para $4x > B^3 z^2$, positivo para $4x < B^3 z^2$ y cero en la curva parabólica

$$x = \frac{B^3 z^2}{4}. \quad (2.35)$$

La fuerza cuántica es constante. En la Figura 2.3, mostramos una gráfica del potencial cuántico (2.33) (morado) y sus ceros (2.35) (rojo) determinados por el haz de Airy. Así, a partir de las Ecs. (2.24) y (2.33), encontramos que el Hamiltoniano determinado por el haz de Airy es

$$H = \frac{p^2}{2} - \frac{B^3}{2} \left(x - \frac{B^3 z^2}{4} \right). \quad (2.36)$$

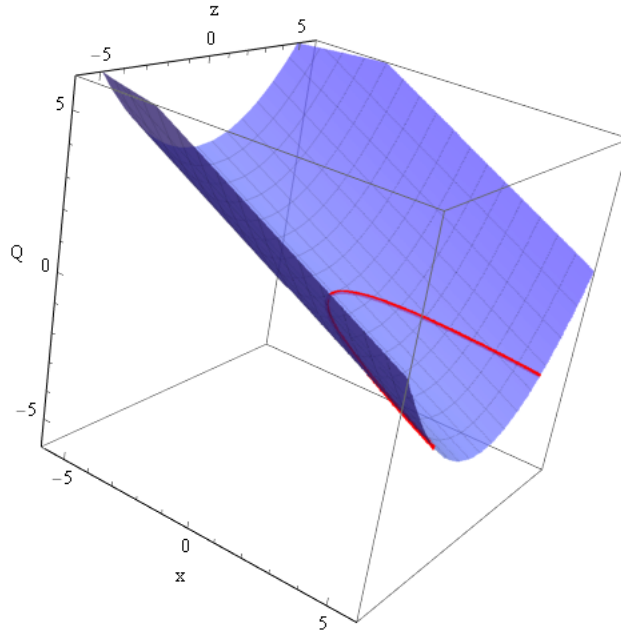


Figura 2.3: El potencial cuántico, Q (morado) determinado por el haz de Airy y sus ceros (rojo), con $B = 1$ y $k = 1$.

Esto significa que las ecuaciones de Hamilton que describen la evolución de la partícula de masa $m = 1$ asociada al haz de Airy pueden escribirse de la siguiente manera

$$\frac{dx}{dz} = p, \quad \frac{dp}{dz} = \frac{B^3}{2}. \quad (2.37)$$

Y la segunda ley de Newton que rige la evolución de la partícula asociada al haz de Airy esta dada por

$$\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{B^3}{2}. \quad (2.38)$$

De esta ecuación se deduce que la partícula de masa $m = 1$ asociada al haz de Airy está evolucionando bajo la interacción de una fuerza constante dada por la Ec. (2.34). En otras palabras, la aceleración de esta partícula es constante y, por lo tanto, sus posibles trayectorias en el plano xz son parabólicas. Este hecho puede observarse calculando la solución general de las ecuaciones de Hamilton (2.37), que pueden escribirse de la siguiente manera

$$x = x_0 + p_0 z + \frac{B^3 z^2}{4}, \quad (2.39)$$

$$p = p_0 + \frac{B^3 z}{2}, \quad (2.40)$$

donde x_0 y p_0 son los valores de $x(z)$ y $p(z)$ en $z = 0$. Por tanto, en el espacio de configuraciones extendido con coordenadas locales (x, z) , las soluciones (2.39) conforman una familia de trayectorias parabólicas de dos parámetros. Estos parámetros son x_0 y p_0 . Esto significa que para cada valor de x_0 en cada punto del plano xz pasan tantas trayectorias parabólicas como valores distintos puede tomar el parámetro p_0 . Sin embargo, el haz de Airy no determina todas estas soluciones de las ecuaciones de Hamilton (2.37). Es decir, entre todas las soluciones (2.39) y (2.40) el haz de Airy determina el subconjunto tal que

$$p = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{B^3 z}{2}. \quad (2.41)$$

Por lo tanto, a partir de las Ecs. (2.39)-(2.41) concluimos que el subconjunto de soluciones a las ecuaciones de Hamilton (2.37) determinadas por el haz de Airy están dadas por las Ecs. (2.39) y (2.40) con $p_0 = 0$. Esto significa que la partícula con masa $m = 1$ asociada al haz de Airy es tal que parte del reposo en la posición x_0 . Por lo tanto, en el espacio de configuraciones extendido, en nuestro caso, el plano xz , las trayectorias de la partícula asociada al haz de Airy vienen dadas por

$$x = x_0 + \frac{B^3 z^2}{4}, \quad (2.42)$$

que también son conocidos como los rayos de luz físicos asociados al haz de Airy. Es decir, son las curvas integrales del vector de Poynting determinadas por el haz de Airy. En otras palabras, son las trayectorias a lo largo de las cuales fluye la energía. Para el haz de Airy, los ceros de su potencial cuántico (2.35) corresponden a una solución particular de las ecuaciones de Hamilton (2.37), dadas por $x_0 = 0$ y $p_0 = 0$. En la Figura 2.4(a) mostramos algunas curvas, que son soluciones de las ecuaciones de Hamilton. En la Figura 2.4(b) mostramos algunas soluciones a las ecuaciones de Hamilton determinadas por el haz de Airy con $B = 1$. Mientras que en 2.4(c) se muestra una superposición de 2.4(a) y 2.4(b), se observa que las trayectorias determinadas por el haz de Airy son soluciones de las ecuaciones de Hamilton, además, la curva determinada por los ceros del potencial cuántico (rojo) coincide con una de estas soluciones.

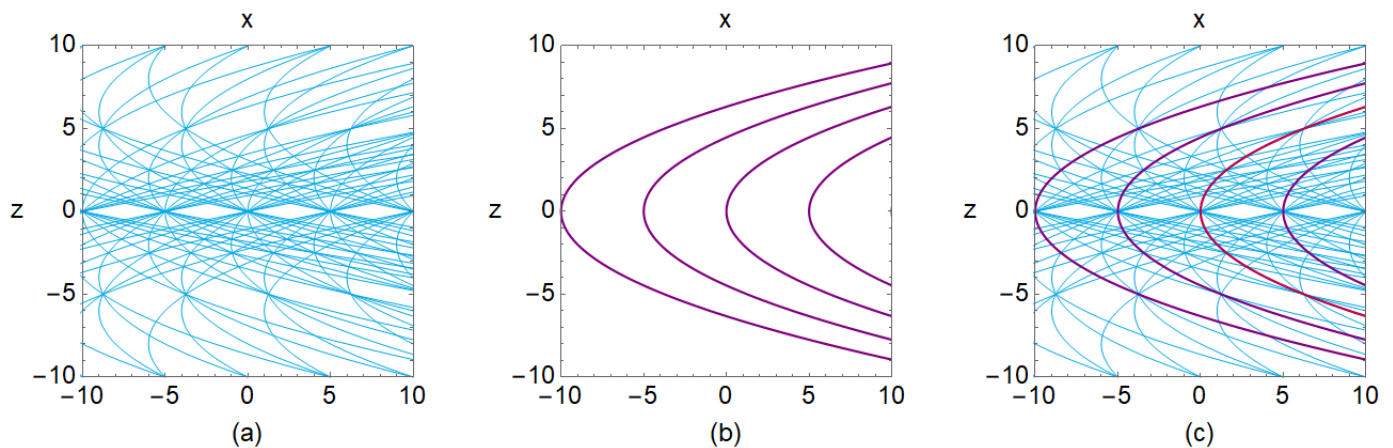


Figura 2.4: (a) Se muestran algunas soluciones a las ecuaciones de Hamilton en el espacio de configuraciones para $x_0 = -10, -5, 0, 5, 10$, p_0 toma diferentes valores, en (b) se muestran algunas curvas integrales del vector de Poynting determinadas por el haz de Airy (morado), para $x_0 = -10, -5, 0, 5, 10$ y $p_0 = 0$ y en (c) se muestra una superposición de (a) y (b), además se muestran los ceros del potencial cuántico (rojo).

Ahora, calculamos las rectas tangentes a los ceros del potencial cuántico, que conforman una curva integral particular del vector de Poynting determinada por el haz de Airy. Para ello, calculamos el campo vectorial tangente a los ceros del potencial cuántico para el haz de Airy dado por la Ec. (2.33). Un cálculo directo muestra que este campo vectorial puede escribirse de la siguiente manera

$$\mathbf{t} = \left(\frac{B^3 z}{2} \right) \hat{x} + \hat{z}. \quad (2.43)$$

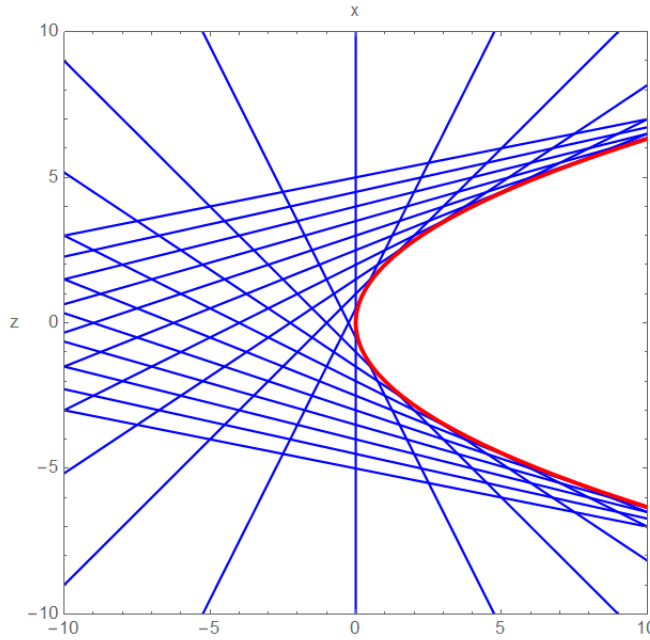


Figura 2.5: Se muestran algunas líneas tangentes (azul) a los ceros del potencial cuántico (rojo) para el haz de Airy con $B = 1$.

Por lo tanto, si etiquetamos los puntos correspondientes a los ceros del potencial cuántico para el haz de Airy con el parámetro z_0 , entonces un cálculo directo muestra que los puntos de las rectas tangentes a los ceros del potencial cuántico para el haz de Airy están dadas por

$$\mathbf{r} = \frac{B^3 z_0}{2} \left(\frac{z_0}{2} + \tau \right) \hat{x} + (z_0 + \tau) \hat{z}, \quad (2.44)$$

donde τ etiqueta los puntos en cada recta. En la Figura 2.5, presentamos algunas líneas tangentes a la curva parabólica correspondiente a los ceros del potencial cuántico del haz de Airy con $B = 1$. A continuación, mostramos que esta familia de rectas son los rayos de luz geométricos determinados por el haz de Airy y que los ceros del potencial cuántico coinciden con la región cóustica correspondiente. Para ello, utilizamos la representación integral de la función de Airy $Ai(u)$, un cálculo directo muestra que

$$\Psi(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik \left[xP - \frac{P^2 z}{2} + \frac{P^3}{3B^3} \right]} dP. \quad (2.45)$$

Así, a partir de las Ecs. (2.9) y (2.45) tenemos que para el haz de Airy

$$\mathcal{D} = \mathcal{R}, \quad (2.46)$$

$$O(P) = \frac{k^{1/3}}{2\pi B}, \quad (2.47)$$

$$S(x, z, P) = xP - \frac{P^2 z}{2} + \frac{P^3}{3B^3}. \quad (2.48)$$

Es decir, para este haz

$$\alpha(P) = \frac{P^3}{3B^3}. \quad (2.49)$$

A partir de las Ecs. (2.7) y (2.8) tenemos que la transformación canónica generada por la integral completa (2.48) puede escribirse de la siguiente manera

$$\beta = x - zP + \frac{P^2}{B^3}, \quad (2.50)$$

$$p = P. \quad (2.51)$$

Por lo tanto, los rayos de luz geométricos determinados por el haz de Airy vienen dados por todos los puntos del plano xz tales que $\beta = 0$; es decir, por todos los puntos tales que

$$x = zP - \frac{P^2}{B^3}, \quad (2.52)$$

$-\infty < P < \infty$, que conforman una familia de rectas en el plano xz . De hecho, un cálculo directo demuestra que estos rayos de luz geométricos son las rectas tangentes a los ceros del potencial cuántico dado por la Ec. (2.43). La relación entre los parámetros P y z_0 viene dada por $z_0 = 2P/B^3$. Finalmente, mostramos que los ceros del potencial cuántico, para el haz de Airy, coinciden con la cáustica determinada por los rayos de luz geométricos (2.52). Para ello introducimos la siguiente definición:

Definición: Sea $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ un mapeo diferenciable, con \mathcal{M} y \mathcal{N} diferenciables. El conjunto de puntos en \mathcal{M} donde h no es localmente uno a uno se denomina como su conjunto crítico y la imagen del conjunto crítico se denomina conjunto cáustico de h [21, 22].

Observe que desde un punto de vista matemático, los rayos de luz geométricos determinados por el haz de Airy (2.52), se describen mediante un mapeo entre dos subconjuntos de \mathcal{R}^2 donde (P, z) son coordenadas locales que etiquetan los puntos en su espacio dominio y (x, z) son coordenadas locales en su espacio imagen. Por lo tanto, un cálculo directo muestra que el conjunto crítico del mapeo (2.52) viene dado por $z = (2P)/B^3$ y su conjunto cáustico viene dado por todos los puntos (x_c, z_c) del plano xz dados por

$$x_c = \frac{P^2}{B^3}, \quad z_c = \frac{2P}{B^3}. \quad (2.53)$$

Es decir, la forma no paramétrica de la cáustica, asociada al haz de Airy, es una curva parabólica dada por

$$x_c = \frac{B^3 z_c^2}{4}, \quad (2.54)$$

que es la ecuación que describe los ceros del potencial cuántico (2.35). Además, a partir de las Ecs. (2.39) y (2.54) concluimos que la cáustica asociada al haz de Airy es una curva integral particular del vector

de Poynting dada por las condiciones iniciales $x_0 = 0$ y $p_0 = 0$. Por último, estudiamos las soluciones, \tilde{S} , de la ecuación de Hamilton-Jacobi en el vacío asociadas a los rayos de luz geométricos determinados por el haz de Airy. Para ello resolvemos para P de la Ec. (2.50) con $\beta = 0$, y obtenemos que

$$P = \Gamma_{\pm}(x, z) = \frac{B^3}{2} \left(z \pm \sqrt{z^2 - \frac{4x}{B^3}} \right). \quad (2.55)$$

Es decir, para el haz de Airy tenemos dos soluciones para P , las correspondientes soluciones \tilde{S} se obtienen sustituyendo la Ec. (2.55) en la Ec. (2.48), y así encontramos que

$$\tilde{S}_{\pm}(x, z) = \frac{B^3 x z}{2} - \frac{B^6 z^3}{12} \mp \frac{B^6}{12} \left(z^2 - \frac{4x}{B^3} \right)^{3/2}. \quad (2.56)$$

Por lo tanto, los frentes de onda geométricos que caracterizan el haz de Airy vienen dados por todos los puntos del plano xz tales que

$$\frac{B^3 x z}{2} - \frac{B^6 z^3}{12} \mp \frac{B^6}{12} \left(z^2 - \frac{4x}{B^3} \right)^{3/2} = C, \quad (2.57)$$

donde, C es una constante real. Es decir, los frentes de onda geométricos asociados al haz de Airy tienen dos ramas. En la Figura 2.6 (a) mostramos algunos frentes de onda geométricos dados por $\tilde{S}_{\pm} = C$ (verde), también mostramos los ceros del potencial cuántico, que a su vez, coinciden con la región cáustica (rojo) para el haz de Airy. En la Figura 2.6 (b) mostramos algunos frentes de onda físicos dados por $\Phi = C$ (morado), la curva roja corresponde a los ceros del potencial cuántico para el haz de Airy con $B = 1$ y $k = 1$.

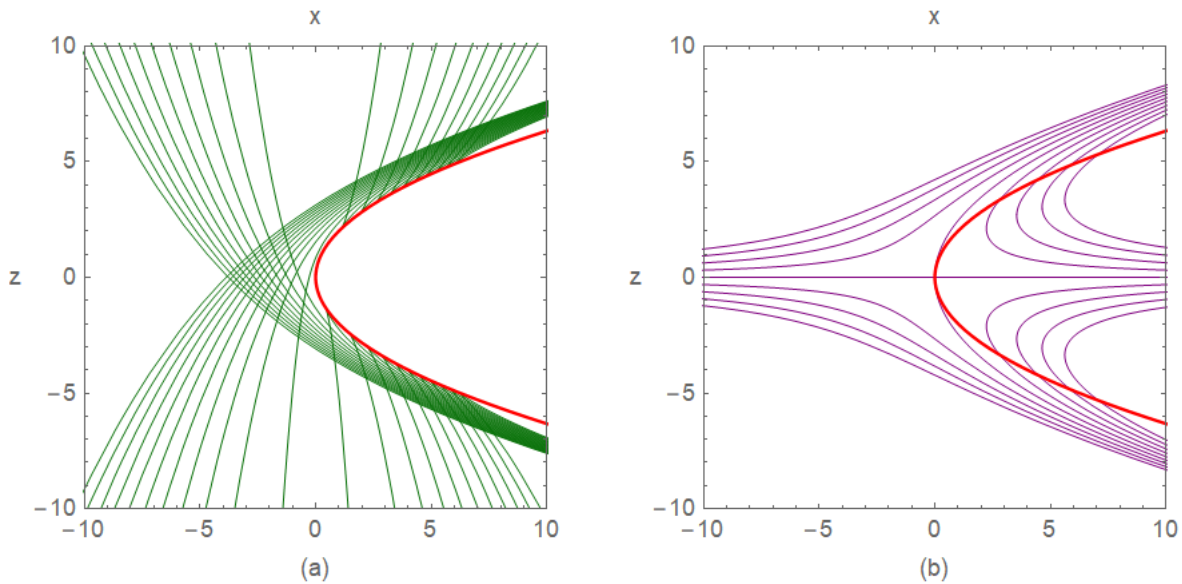


Figura 2.6: (a) Se muestran algunos frentes de onda geométricos dados por $\tilde{S}_{\pm} = C$ (verde). La curva roja corresponde a los ceros del potencial cuántico para el haz de Airy con $B = 1$ y $k = 1$. (b) Se muestran algunos frentes de onda físicos dados por $\Phi = C$ (morado). La curva roja corresponde a los ceros del potencial cuántico para el haz de Airy con $B = 1$ y $k = 1$.

2.4. Una derivación del haz de Airy desde el punto de vista del potencial cuántico

En esta sección presentamos una derivación del haz de Airy utilizando el enfoque del potencial cuántico. Es decir, utilizando las Ecs. (2.18)-(2.28). Para ello, de acuerdo con los resultados de Berry y Balazs [3], sabemos que la densidad de probabilidad del haz de Airy se propaga sin distorsión y con aceleración constante. La condición de aceleración constante sugiere buscar un potencial cuántico tal que su fuerza cuántica asociada sea una constante. Si esta fuerza constante se denota por F_0 , entonces a partir de la Ec. (2.28) tenemos que el potencial cuántico correspondiente es

$$Q(x, z) = -xF_0 + g(z) \quad (2.58)$$

donde $g(z)$ es una función solo de z . Ahora, utilizando el potencial cuántico dado por la Ec. (2.20), se tiene que R debe ser una solución de la ecuación de Airy; es decir

$$\frac{\partial^2 R(u)}{\partial u^2} - uR(u) = 0, \quad (2.59)$$

donde

$$u = (2k^2 F_0)^{1/3} \left[x - \frac{g(z)}{F_0} \right] \quad (2.60)$$

La solución general de esta ecuación diferencial ordinaria de segundo orden está dada por una combinación lineal de las funciones de Airy de primer y segundo tipo $Ai(u)$ y $Bi(u)$. Por lo tanto, para obtener el haz de Airy, debemos tomar

$$R(u) = Ai(u). \quad (2.61)$$

Ahora usamos el hecho de que la fuerza está dada, entonces a partir de la segunda ley de Newton (2.27) tenemos que las trayectorias de la partícula están dadas por

$$x(z) = c_1 + c_2 z + \frac{1}{2} F_0 z^2, \quad (2.62)$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes. Entonces de las Ecs. (2.21), (2.25) y (2.62) tenemos que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = p = \frac{dx}{dz} = c_2 + F_0 z, \quad (2.63)$$

Entonces

$$\Phi(x, z) = (c_2 + F_0 z)x + h(z), \quad (2.64)$$

donde $h(z)$ es función únicamente de z . Finalmente, determinamos la función $g(z)$ que aparece en el potencial cuántico (2.58) y la función $h(z)$ que aparece en la Ec. (2.64). Estas dos funciones se determinan exigiendo que las Ecs. (2.61) y (2.64) sean solución de las Ecs. (2.18) y (2.19). Es decir, deben determinarse a partir de las condiciones

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ [Ai(u)]^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right\} + \frac{\partial [Ai(u)]^2}{\partial z} = 0, \quad (2.65)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 - xF_0 + g(z) + \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0. \quad (2.66)$$

Usando las Eqs. (2.60) y (2.64), la condición (2.65) implica que

$$g(z) = \frac{1}{2}F_0^2 z^2 + F_0 c_2 z + c_3, \quad (2.67)$$

donde c_3 es otra constante. Finalmente, usamos las Eqs. (2.64) y (2.67), la condición (2.66) implica que

$$h(z) = -\frac{1}{3}F_0^2 z^3 - F_0 c_2 z - \left(c_3 + \frac{1}{2}c_2^2\right) z + c_4, \quad (2.68)$$

donde c_4 es una constante. Por lo tanto, suponemos que la fuerza es una constante, el enfoque del potencial cuántico proporciona la siguiente solución

$$\Psi(x, z) = Ai \left\{ (2k^2 F_0)^{\frac{1}{3}} \left[x - \frac{1}{2}F_0 z^2 - c_2 z - \frac{c_3}{F_0} \right] \right\} e^{ik\Phi(x, z)}, \quad (2.69)$$

$$\Phi(x, z) = (c_2 + F_0 z)x - \frac{1}{3}F_0^2 z^3 - F_0 c_2 z - \left(c_3 + \frac{1}{2}c_2^2\right) z + c_4. \quad (2.70)$$

donde c_2 , c_3 y c_4 son constantes reales arbitrarias. El potencial cuántico asociado a esta solución tiene la siguiente expresión

$$Q(x, z) = -xF_0 + \frac{1}{2}F_0^2 z^2 + F_0 c_2 z + c_3. \quad (2.71)$$

De las Eqs. (2.30) y (2.70) se deduce que el haz de Airy corresponde al caso en que $c_2 = 0$, $c_3 = 0$, $c_4 = 0$ y $F_0 = B^3/2$.

Capítulo 3

El haz de Laguerre-Gauss

3.1. La ecuación paraxial de onda y el potencial cuántico

Si el vector de posición \mathbf{r} de un punto en el espacio tridimensional está dado por

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_\perp + z\hat{z}, \quad (3.1)$$

entonces la ecuación paraxial de onda puede escribirse de la siguiente manera [20]

$$\nabla_\perp^2 \psi + 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad (3.2)$$

donde $\nabla_\perp^2 \psi$ es el laplaciano transversal y ψ es un campo escalar eléctrico complejo. Tomando la función de onda en su forma polar

$$\psi(\mathbf{r}) = R(\mathbf{r})e^{ik\Phi(\mathbf{r})}, \quad (3.3)$$

donde $k = 2\pi/\lambda$ es el número de onda, al proponer esta solución a la ecuación paraxial de onda (3.2), se observa que esto implica que las funciones R y Φ satisfacen el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\nabla_\perp \cdot (R^2 \nabla_\perp \Phi) + \frac{\partial R^2}{\partial z} = 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{2}(\nabla_\perp \Phi)^2 + Q + \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad (3.5)$$

donde

$$Q(\mathbf{r}) \equiv -\frac{\nabla_\perp^2 R}{2k^2 R}, \quad (3.6)$$

es el llamado potencial cuántico. Observe que si en la Ec. (3.4) sustituimos la coordenada z por el tiempo t y si identificamos a R^2 con la densidad de probabilidad, entonces $\mathbf{v}_\perp = \nabla_\perp \Phi$ puede identificarse con la velocidad de una partícula de masa $m = 1$ y densidad de corriente de probabilidad dada por

$$\mathbf{J}_\perp \equiv R^2 \nabla_\perp \Phi, \quad (3.7)$$

de esta manera, la Ec. (3.4) representa la conservación de probabilidad. Por otro lado, la Ec. (3.5) es la ecuación de Hamilton-Jacobi para una partícula de masa $m = 1$ con dos grados de libertad y función hamiltoniana

$$H \equiv \frac{\mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{p}_\perp}{2} + Q(\mathbf{r}), \quad (3.8)$$

donde

$$\mathbf{p}_\perp = \nabla_\perp \Phi. \quad (3.9)$$

Esto indica que las curvas integrales del vector \mathbf{J}_\perp (3.7) son soluciones de las ecuaciones de Hamilton

$$\frac{d\mathbf{r}_\perp}{dz} = \mathbf{p}_\perp, \quad \frac{d\mathbf{p}_\perp}{dz} = -\nabla_\perp Q(\mathbf{r}). \quad (3.10)$$

Además, observamos que también son soluciones

$$\frac{d^2\mathbf{r}_\perp}{dz^2} = \mathbf{F}_\perp, \quad (3.11)$$

donde \mathbf{F}_\perp es la fuerza cuántica y se define por

$$\mathbf{F}_\perp \equiv -\nabla_\perp Q(\mathbf{r}) = \nabla_\perp \left(\frac{\nabla_\perp^2 R}{2k^2 R} \right). \quad (3.12)$$

Por lo tanto, cualquier solución ψ , de la ecuación escalar paraxial de onda en el vacío de la forma (3.2), se le puede asociar un sistema hamiltoniano con dos grados de libertad, la función hamiltoniana está dada por la Ec. (3.8) y momento dado por la Ec. (3.9). Es decir, a cualquier solución de la ecuación paraxial de onda (3.2), se le puede asociar un potencial cuántico y una fuerza cuántica que determinan las curvas integrales del campo vectorial (3.7). Tenemos que, una vez encontrada una solución particular ψ , de la ecuación paraxial de onda en el vacío, podemos asociarle una partícula de masa $m = 1$ con dos grados de libertad bajo la acción del potencial cuántico, tal que el momento lineal de esta partícula, está dado por la Ec. (3.9). Así, el momento angular de esta partícula viene dado por

$$\mathbf{L}_\perp \equiv \mathbf{r}_\perp \times \mathbf{p}_\perp. \quad (3.13)$$

A partir de las Ecs. (3.9)-(3.13):

$$\frac{d\mathbf{L}_\perp}{dz} = \mathbf{N}_\perp, \quad (3.14)$$

$$\mathbf{N}_\perp \equiv \mathbf{r}_\perp \times \mathbf{F}_\perp, \quad (3.15)$$

donde \mathbf{N}_\perp es la torca sobre la partícula. Además, la velocidad areolar \mathbf{A}_\perp , se define como el área barrida por el radio vector por unidad de tiempo [23, 24]. En este caso, está dada por:

$$\frac{d\mathbf{A}_\perp}{dz} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{r}_\perp \times \frac{d\mathbf{r}_\perp}{dz} \right) = \frac{\mathbf{L}_\perp}{2}. \quad (3.16)$$

Utilizando coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) , la función hamiltoniana (3.17) puede escribirse de la siguiente manera:

$$H = \frac{1}{2} \left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} \right) + Q(\rho, \varphi, z) \quad (3.17)$$

y las correspondientes ecuaciones de Hamilton (3.10) son:

$$\frac{d\rho}{dz} = p_\rho, \quad \frac{d\varphi}{dz} = \frac{p_\varphi}{\rho^2}, \quad (3.18)$$

$$\frac{dp_\rho}{dz} = \frac{p_\varphi^2}{\rho^3} - \frac{\partial Q}{\partial \rho}, \quad \frac{dp_\varphi}{dz} = -\frac{\partial Q}{\partial \varphi}. \quad (3.19)$$

La ecuación de Hamilton-Jacobi determinada por la función Hamiltoniana (3.17) esta dada por

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 \right] + Q(\rho, \varphi, z) + \frac{\partial S}{\partial z} = 0 \quad (3.20)$$

De la teoría de Hamilton-Jacobi, se sabe que la solución general de las ecuaciones de Hamilton está dada por una integral completa, S , a la ecuación de Hamilton-Jacobi. Es decir, una solución $S(\rho, \varphi, P_1, P_2, z)$ donde P_1 y P_2 son dos parámetros constantes tales que

$$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial P_1 \partial \rho} \right) \left(\frac{\partial^2 S}{\partial P_2 \partial \varphi} \right) - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial P_2 \partial \rho} \right) \left(\frac{\partial^2 S}{\partial P_1 \partial \varphi} \right) \neq 0. \quad (3.21)$$

Por lo tanto, siguiendo el punto de vista del potencial cuántico, cualquier solución de la ecuación paraxial de onda en el vacío determina un sistema hamiltoniano que describe la evolución de una partícula con dos grados de libertad y masa $m = 1$ bajo la influencia del potencial cuántico (3.6), de tal manera que las curvas integrales del vector (3.7) conforman un subconjunto particular de soluciones de las ecuaciones de Hamilton (3.18) y (3.19). Este subconjunto está determinado por $S = \Phi$ en la ecuación de Hamilton-Jacobi (3.20).

Es importante destacar que la Ec. (3.4) implica que

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = 0, \quad (3.22)$$

donde

$$\mathbf{P} \equiv k(R^2 \nabla_{\perp} \Phi + R^2 \hat{z}) = kR^2(\mathbf{p}_{\perp} + \hat{z}), \quad (3.23)$$

es el vector de Poynting determinado por la solución ψ de la ecuación paraxial de onda en el vacío.

En este trabajo se suponen conocidos R y Φ , entonces el potencial cuántico, la fuerza cuántica y las trayectorias de la partícula determinadas por esa solución de la ecuación paraxial de onda en el espacio vacío se calculan utilizando las Ecs. (3.6), (3.12), (3.18) y (3.19) con la condición (3.9). Además, es importante señalar que en general el potencial cuántico (3.6) es una función de las coordenadas locales (ρ, φ, z) . Por lo que, si el potencial cuántico no es idénticamente cero, entonces podría haber una región en el espacio determinada por los ceros del potencial cuántico. Dependiendo de las propiedades de la solución de la ecuación paraxial de onda, esta región está constituida por superficies bidimensionales, curvas o puntos. En esta región, la ecuación de Hamilton-Jacobi (3.20) se reduce a la de una partícula libre, esto significa que podemos asociar una familia de rectas a la ecuación paraxial de onda en el vacío. Una vez obtenido el potencial cuántico el conjunto de rectas correspondiente, viene definido por las rectas tangentes a las curvas integrales del campo vectorial \mathbf{J}_{\perp} , las cuales de acuerdo con la Ec. (3.23), corresponden a las rectas que son tangentes a las curvas integrales del vector de Poynting en los ceros del potencial cuántico. Por construcción, estas rectas son soluciones de las ecuaciones de Hamilton para una partícula de masa $m = 1$ con dos grados de libertad en el vacío.

En general, esta familia de rectas, no corresponden a los rayos de luz geométricos asociados a la onda paraxial [25]. Sin embargo, para los haces de Laguerre-Gauss, las rectas tangentes a las curvas integrales del vector de Poynting, en los ceros del potencial cuántico, sí son los rayos de luz geométricos.

3.2. Los haces de Laguerre-Gauss

En esta sección, aplicamos los resultados generales a los haces de Laguerre-Gauss. En este caso, usando coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) tenemos que

$$R(\mathbf{r}) = \frac{A_n}{w_z} \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w_z} \right)^{|l|} L_n^{|l|} \left(\frac{2\rho^2}{w_z^2} \right) e^{-\frac{\rho^2}{w_z^2}}, \quad (3.24)$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{l\varphi}{k} + \frac{\rho^2}{2R_z} - (2n + |l| + 1) \left(\frac{\phi_g}{k} \right), \quad (3.25)$$

$$A_n = \sqrt{\frac{2n!}{\pi(n + |l|)!}}, \quad (3.26)$$

donde n y l son los números cuánticos que caracterizan a la solución, y l corresponde a la magnitud del momento angular orbital asociado con el haz, $L_n^{|l|}$ es el polinomio asociado de Laguerre de orden n y grado $|l|$. Las funciones w_z , R_z y ϕ_g son la cintura del haz, el radio de curvatura y la fase de Gouy, respectivamente, y vienen dadas por las siguientes ecuaciones:

$$w_z = w_0 \sqrt{1 + \frac{4z^2}{k^2 w_0^4}}, \quad (3.27)$$

$$R_z = z + \frac{k^2 w_0^4}{4z}, \quad (3.28)$$

$$\phi_g = \arctan \left(\frac{2z}{k w_0^2} \right). \quad (3.29)$$

El haz se define completamente por cuatro números n , l , k y w_0 . De las Ecs. (3.6), (3.12) y (3.24), un cálculo directo muestra que el potencial cuántico y la fuerza cuántica para estos haces, están dados por

$$Q_{LG}(\mathbf{r}) = \frac{2}{k^2 w_z^2} \left(1 + |l| + 2n - \frac{\rho^2}{w_z^2} - \frac{|l|^2 w_z^2}{4\rho^2} \right), \quad (3.30)$$

$$\mathbf{F}_{\perp LG}(\mathbf{r}) = \frac{4}{k^2 w_z^2} \left(\frac{\rho}{w_z^2} - \frac{|l|^2 w_z^2}{4\rho^3} \right) \hat{\rho}. \quad (3.31)$$

El potencial cuántico se puede escribir en la siguiente forma

$$Q_{LG}(\mathbf{r}) = \frac{2(\rho^2 - \rho_-^2)(\rho^2 - \rho_+^2)}{k^2 w_z^4 \rho^2}, \quad (3.32)$$

$$\frac{2\rho_{\pm}^2(z)}{w_z^2} = 1 + |l| + 2n \pm \sqrt{(1 + 2n)(1 + 2|l| + 2n)}. \quad (3.33)$$

Por consiguiente, para $0 < \rho < \rho_-$ el potencial es negativo y tiende a menos infinito a medida que ρ tiende a cero. Para $\rho_- < \rho < \rho_+$ el potencial es positivo, mientras que para $\rho > \rho_+$, es negativo. Los ceros del potencial cuántico para el haz de Laguerre-Gauss vienen dados por las dos superficies:

$$\frac{2(x^2 + y^2)}{\left[1 + |l| + 2n \pm \sqrt{(1 + 2n)(1 + 2|l| + 2n)} \right] w_0^2} - \frac{4z^2}{k^2 w_0^4} = 1. \quad (3.34)$$

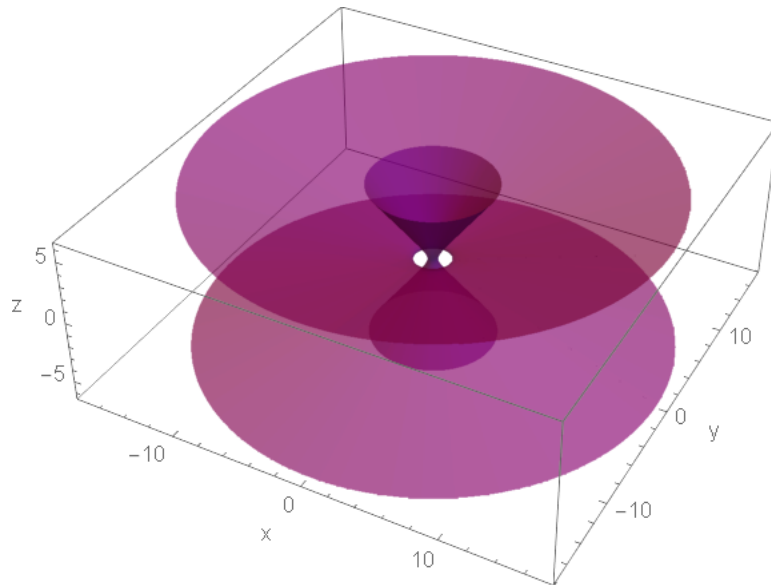


Figura 3.1: Gráfico de los ceros del potencial cuántico con $l = 1$, $k = 1$ y $w_0 = 1$.

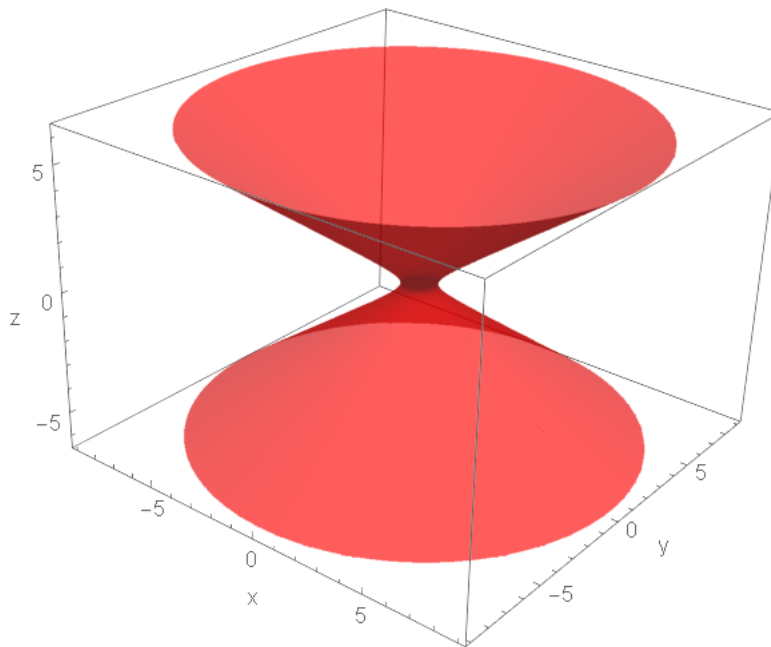


Figura 3.2: Gráfico los ceros de la fuerza cuántica con $l = 1$, $k = 1$ y $w_0 = 1$.

Por otro lado, se observa que la fuerza $\mathbf{F}_{\perp LG}(\mathbf{r})$ no depende del número cuántico n . Para, $0 < \rho < w_z \sqrt{|l|/2}$, la fuerza es atractiva, para $\rho > w_z \sqrt{|l|/2}$, la fuerza es repulsiva y para, $\rho = w_z \sqrt{|l|/2}$, la fuerza es cero. Es importante destacar que cuando $l = 0$, la fuerza se reduce a la producida por un haz Gaussiano. En la Figura (3.1), mostramos los ceros del potencial cuántico (morado) para $l = 1$, $n = 0$, $k = 1$ y $w_0 = 1$. En la Figura (3.2), mostramos los ceros de la fuerza cuántica (rojo) del haz de Laguerre-Gauss con $l = 1$, $n = 0$, $k = 1$ y $w_0 = 1$.

De las ecuaciones (3.18), (3.19) y (3.30) se deduce que las ecuaciones de Hamilton para los haces de Laguerre-Gauss vienen dadas por

$$\frac{d\rho}{dz} = p_\rho, \quad \frac{d\varphi}{dz} = \frac{p_\varphi}{\rho^2}, \quad (3.35)$$

$$\frac{dp_\rho}{dz} = \frac{p_\varphi^2}{\rho^3} + \frac{4}{k^2 w_z^2} \left(\frac{\rho}{w_z^2} - \frac{|l|^2 w_z^2}{4\rho^3} \right), \quad \frac{dp_\varphi}{dz} = 0. \quad (3.36)$$

Utilizando las Ecs. (3.11), (3.12) y (3.31), la segunda ley de Newton determinada por los haces de Laguerre-Gauss está dada por

$$\frac{d^2\rho}{dz^2} - \rho \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 = \frac{4}{k^2 w_z^2} \left(\frac{\rho}{w_z^2} - \frac{|l|^2 w_z^2}{4\rho^3} \right), \quad (3.37)$$

$$\frac{d}{dz} \left(\rho^2 \frac{d\varphi}{dz} \right) = 0. \quad (3.38)$$

Entre todas las soluciones a las ecuaciones de Hamilton y a su vez, de la segunda ley de Newton, se encuentran aquellas que son determinadas por los haces de Laguerre-Gauss, tales que

$$p_\rho(z) = \frac{\rho}{R_z}, \quad p_\varphi(z) = \frac{1}{k}. \quad (3.39)$$

Usando estas ecuaciones en las ecuaciones de Hamilton (3.35), se tiene

$$\rho(z) = \rho_0 \sqrt{\frac{4z^2 + k^2 w_0^4}{4z_0^2 + k^2 w_0^4}}, \quad (3.40)$$

$$\varphi(z) = \varphi_0 + \left[\frac{l(4z_0^2 + k^2 w_0^4)}{2k^2 w_0^2 \rho_0^2} \right] \left[\arctan \left(\frac{2z}{k w_0^2} \right) - \arctan \left(\frac{2z_0}{k w_0^2} \right) \right], \quad (3.41)$$

ρ_0 , φ_0 son los valores de $\rho(z)$ y $\varphi(z)$ en $z = z_0$. Por lo tanto, la trayectoria, el momento lineal y el momento angular de la partícula determinada por los haces de Laguerre-Gauss vienen dados por

$$\mathbf{r}_\perp = \rho \hat{\rho}, \quad (3.42)$$

$$\mathbf{p}_\perp = \frac{\rho \hat{\rho}}{R_z} + \frac{l \hat{\varphi}}{k \rho}, \quad (3.43)$$

$$\mathbf{L}_\perp = \frac{l \hat{z}}{k}, \quad (3.44)$$

donde $\hat{\rho} = \cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y}$ y $\hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}$. Es importante señalar que el momento angular \mathbf{L}_\perp es una constante de movimiento así como la velocidad areal $d\mathbf{A}_\perp/dz$. En la Figura (3.3), se muestran algunas trayectorias descritas por la Ec. (3.42) con $k = 1$, $w_0 = 1$, $\rho_0 = 1/2$, $z_0 = 0$ y $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$, para (a) $l = 1$, (b) $l = 2$, (c) $l = 4$ y (d) $l = 6$.

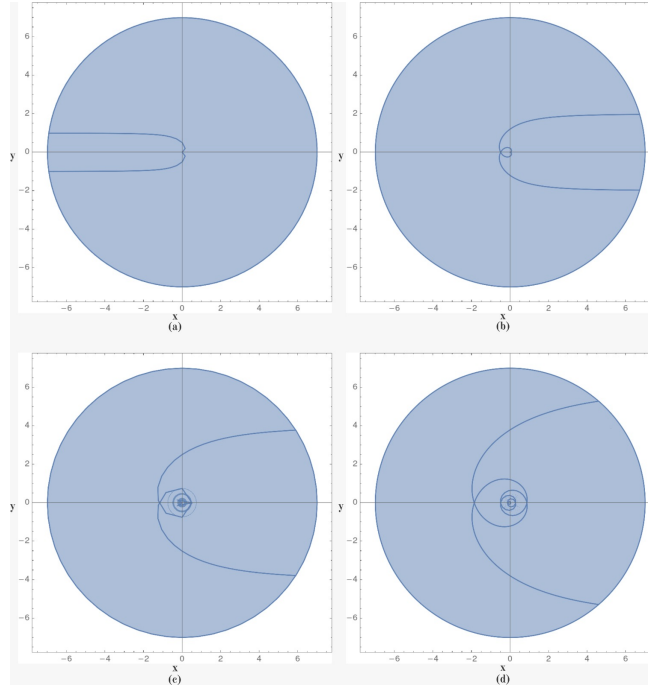


Figura 3.3: Se grafican algunas trayectorias de las soluciones dadas por (3.42) con $k = 1$, $w_0 = 1$, $\rho_0 = 1/2$, $z_0 = 0$ y $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$, para (a) $l = 1$, (b) $l = 2$, (c) $l = 4$ y (d) $l = 6$.

Por otra parte, las propiedades mecánicas asociadas a las curvas integrales del vector de Poynting para los haces de Laguerre-Gauss vienen dadas por

$$\mathbf{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{z}, \quad (3.45)$$

$$\mathbf{p} = \frac{\rho \hat{\rho}}{R_z} + \frac{l \hat{\phi}}{k \rho} + \hat{z}, \quad (3.46)$$

$$\mathbf{L} = - \left(\frac{lz}{k\rho} \right) \hat{\rho} + \rho \left(\frac{z}{R_z} - 1 \right) \hat{\phi} + \left(\frac{l}{k} \right) \hat{z}. \quad (3.47)$$

Además

$$\frac{d\mathbf{L}}{dz} = \frac{4z\rho}{k^2 w_z^4} \left(1 - \frac{|l|^2 w_z^4}{4\rho^4} \right) \hat{\phi}. \quad (3.48)$$

De este último resultado, observamos que el momento angular asociado con la partícula que evoluciona a lo largo de las curvas integrales del vector de Poynting no es una constante de movimiento. Sin embargo, cuando la trayectoria se encuentra sobre la superficie $\rho = w_z \sqrt{|l|/2}$, el momento angular \mathbf{L} es una constante de movimiento. Es importante destacar que esta superficie corresponde a los ceros de la fuerza cuántica, y por lo tanto, este tipo de trayectorias son líneas rectas.

En la Figura (3.4), se muestra la superficie (morada) que representa a los ceros del potencial cuántico (3.34) con signo negativo, y algunas curvas integrales del vector de Poynting (curvas verdes) del haz de Laguerre-Gauss, con $l = 1$, $n = 0$, $k = 1$ y $w_0 = 1$.

En la Figura (3.5), mostramos los ceros de la fuerza cuántica dados por $\rho = w_z \sqrt{|l|/2}$ y algunas curvas integrales del vector de Poynting, las cuales son líneas rectas. Por otro lado, en la Figura (3.6), se

muestra la superficie correspondiente a los ceros del potencial cuántico (3.34) con signo positivo (superficie morada) y algunas curvas integrales del vector de Poynting (curvas verdes) con $l = 1$, $n = 0$, $k = 1$ y $\omega_0 = 1$.

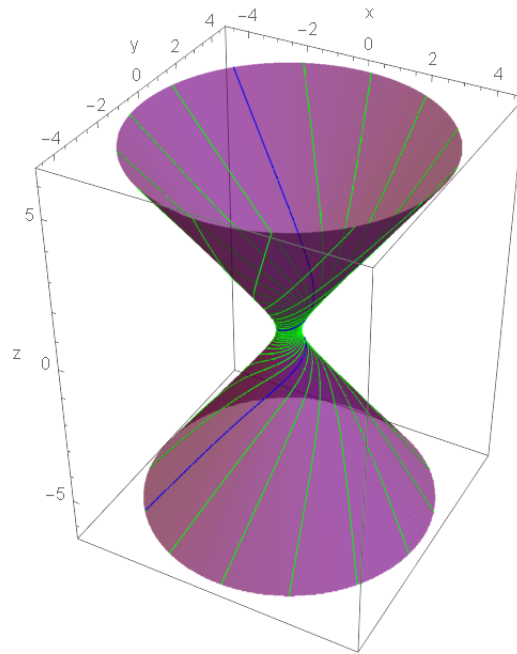


Figura 3.4: En este gráfico se muestran los ceros del potencial cuántico (3.34) con signo negativo (superficie morada) y las trayectorias de energía del vector de Poynting (curvas verdes) con $l = 1$, $n = 0$, $k = 1$ y $\omega_0 = 1$.

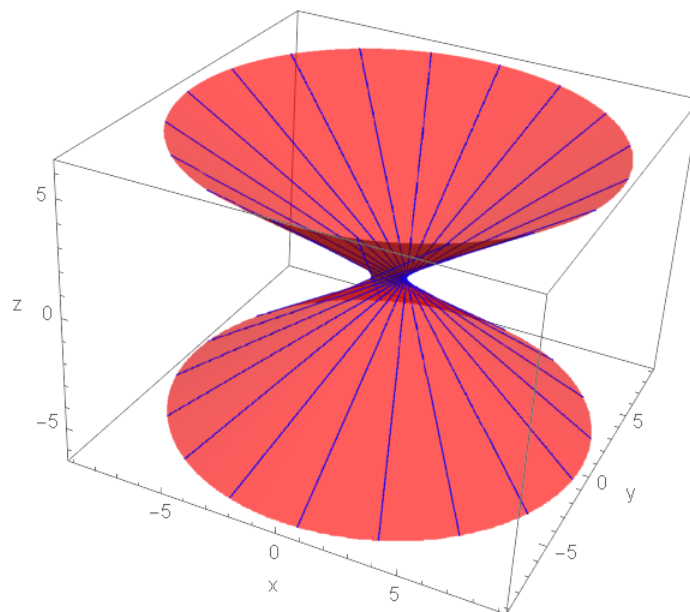


Figura 3.5: Se grafican los ceros de la fuerza cuántica (rojo) dados por $\rho = w_z \sqrt{|l|/2}$ y algunas curvas integrales del vector de Poynting (azul), las cuales son líneas rectas, con $l = 1$, $n = 0$, $k = 1$ y $\omega_0 = 1$.

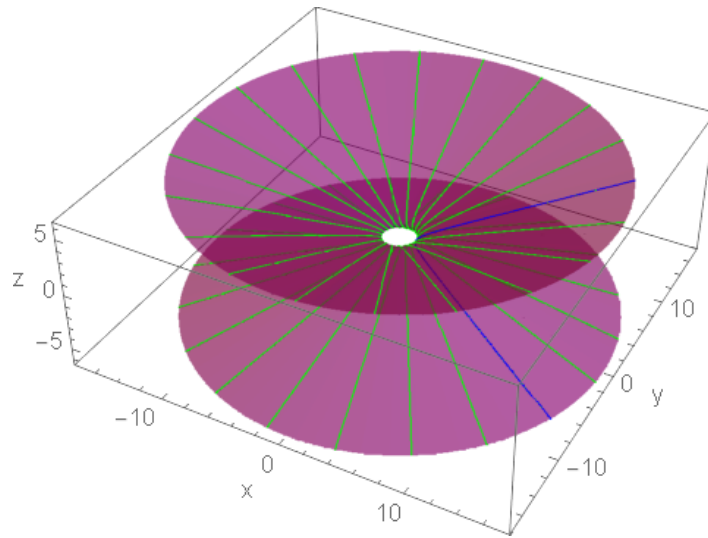


Figura 3.6: En este gráfico se muestran los ceros del potencial cuántico, dada por (3.34) con signo positivo (superficie morada) y las trayectorias de energía del vector de Poynting (curvas verdes) con $l = 1$, $n = 0$, $k = 1$ y $\omega_0 = 1$.

3.3. Rayos de luz geométricos determinados por los haces de Laguerre-Gauss

De la Ec. (3.33) vemos que para l y n distintos de cero, los ceros del potencial cuántico para los haces Laguerre-Gauss son dos superficies bidimensionales que corresponden a hiperboloides. En esos puntos la ecuación de Hamilton-Jacobi determinada por el potencial cuántico se reduce a la de una partícula libre. Esto significa que en esos puntos podemos introducir una familia de líneas en el vacío determinadas por los haces de Laguerre-Gauss. Esta familia está definida por las rectas tangentes a las curvas integrales al vector de Poynting en los ceros del potencial cuántico dado por la Ec. (3.33). Un cálculo directo muestra que esta familia de líneas rectas son los rayos de luz geométricos asociados con los haces de Laguerre-Gauss, determinados por Berry y McDonald [19], usando otro procedimiento. Estos rayos geométricos se pueden escribir de la siguiente manera

$$\mathbf{r}_{\pm}(\varphi_0, z_0, \tau) = \rho_{\pm 0} \left(1 + \frac{\tau}{R_{z_0}} \right) \hat{\rho}_0 + \frac{l\tau}{k\rho_{\pm 0}} \hat{\varphi}_0 + (z_0 + \tau) \hat{z}, \quad (3.49)$$

donde $\rho_{\pm 0}$ y R_{z_0} están dados por las Ecs. (3.33) y (3.28) con z_0 en lugar de z y τ etiqueta los puntos de las rectas. Los puntos en las superficies correspondientes a los ceros del potencial cuántico están dados por $\tau = 0$. Cuando $l \neq 0$ el conjunto crítico de (3.49) está dado por $\tau = 0$, como resultado, el conjunto cáustico está dado por:

$$\mathbf{r}_{\pm cau}(\varphi_0, z_0) = \rho_{\pm 0} \hat{\rho}_0 + z_0 \hat{z}. \quad (3.50)$$

Es decir, la cáustica asociada a los rayos de luz geométricos determinados por los haces de Laguerre-Gauss coincide con los ceros del potencial cuántico correspondiente.

En la Figura (3.7), mostramos la primera rama de los ceros del potencial cuántico (morado) dado por la Ec. (3.34) con el signo negativo, y algunos rayos de luz geométricos (naranja) dados por la Ec. (3.49),

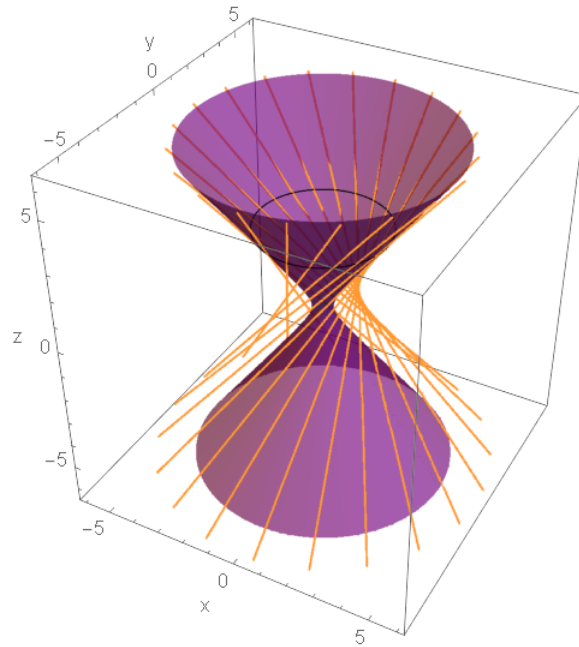


Figura 3.7: Se muestra la primera rama de los ceros del potencial cuántico (morado) dado por la Ec. (3.34) con el signo negativo y algunos rayos de luz geométricos (naranja) dados por la Ec. (3.49), los cuales son tangentes a las curvas integrales del vector de Poynting en los puntos $(\rho_-, \varphi_0, z_0 = \pi)$ (negro), para el haz de Laguerre-Gauss con $l = 1$, $n = 0$, $k = 1$ y $w_0 = 1$.

los cuales son tangentes a las curvas integrales del vector de Poynting en los puntos $(\rho_-, \varphi_0, z_0 = \pi)$ (negro) para el haz de Laguerre-Gauss con $l = 1$, $n = 0$, $k = 1$ y $w_0 = 1$.

Capítulo 4

Conclusiones

En este trabajo hemos demostrado que con cualquier solución de la ecuación escalar paraxial de onda $(1 + 1)D$ en el vacío podemos asociar, de forma natural, una partícula de masa $m = 1$, con un grado de libertad, evolucionando bajo la influencia de un potencial cuántico, o equivalentemente una fuerza cuántica. Las curvas integrales del vector de Poynting, conforman un subconjunto de soluciones de las ecuaciones de Hamilton, o segunda ley de Newton correspondientes. Además, las líneas tangentes a las curvas integrales del vector de Poynting en los ceros del potencial cuántico determinan una familia particular de soluciones de las ecuaciones de Hamilton para una partícula libre de masa $m = 1$ en el vacío. Esta familia de líneas tangentes es importante porque coincide con las curvas integrales del vector de Poynting en los ceros del potencial cuántico. Estos resultados generales se aplicaron al haz de Airy.

Encontramos que la partícula asociada al haz de Airy evoluciona bajo la influencia de una fuerza constante, por lo que las trayectorias son parabólicas. Las curvas integrales del vector de Poynting están determinadas por aquellas soluciones de las ecuaciones de Hamilton tales que su momento inicial es cero. Los ceros del potencial cuántico forman una curva integral particular del vector de Poynting. Los rayos de luz geométricos asociados al haz de Airy, vienen dados por las rectas tangentes a la solución de las ecuaciones de Hamilton correspondientes en los ceros del potencial cuántico. Hemos demostrado que para el haz de Airy, la cáustica coincide con los ceros del potencial cuántico y es una curva integral del vector de Poynting. De los resultados obtenidos, se observa el comportamiento balístico similar a un haz de partículas bajo la influencia de la fuerza gravitacional, esto se debe al hecho de que la fuerza cuántica asociada, es constante.

A continuación, hemos estudiado la solución del haz de Airy de energía infinita dada en la Ec. (2.30). Se pueden realizar estudios similares para cualquier solución de la ecuación escalar de onda y para cualquier solución de la ecuación paraxial de onda. Por último, señalamos que de acuerdo con los resultados presentados en sección 2.4, para el haz de Airy de energía infinita, la aproximación del potencial cuántico puede servir para diseñar haces con propiedades predeterminadas.

En este trabajo, también hemos demostrado que a cualquier solución de la ecuación escalar paraxial de onda en el vacío, se le puede asociar un sistema hamiltoniano de dos grados de libertad que describe a una partícula de masa $m = 1$ bajo la influencia del llamado potencial cuántico. Las curvas integrales del vector de Poynting conforman un subconjunto particular de soluciones a las ecuaciones de Hamilton correspondientes y esto es así porque la fase de la onda paraxial no es una integral completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi (3.20). Hemos utilizado la formulación hamiltoniana para determinar: la velocidad, el momento lineal, el momento angular, la torca y la velocidad areolar que

caracterizan a la partícula asociada a la onda paraxial. Además, utilizando las curvas integrales del vector de Poynting en los ceros del potencial cuántico, hemos introducido un conjunto de rectas con cualquier solución de la ecuación paraxial de onda. En el caso general, estas rectas no son los rayos de luz geométricos determinados por la solución. Sin embargo, para los haces de Laguerre-Gauss son los rayos de luz geométricos determinados por esta familia de soluciones paraxiales.

Estos resultados generales, fueron aplicados a los haces de Laguerre-Gauss. Encontramos que el potencial cuántico para el haz de Laguerre-Gauss, con $l \neq 0$, es singular en $\rho = 0$ y sus ceros son dos superficies hiperboloides. La fuerza cuántica es atractiva para $\rho < w_z \sqrt{|l|/2}$, cero en la superficie hiperboloidal $\rho = w_z \sqrt{|l|/2}$, repulsiva para $\rho > w_z \sqrt{|l|/2}$, y singular en $\rho = 0$. Además, calculando las rectas tangentes a las curvas integrales del vector de Poynting en los ceros del potencial cuántico, hemos obtenido las trayectorias de energía geométricas para los haces de Laguerre-Gauss, es decir, los rayos de luz geométricos determinados por esta familia de soluciones. Las expresiones que hemos obtenido para los rayos geométricos, son equivalentes a las obtenidas por Berry y McDonald [19].

Finalmente, señalamos que podría ser importante calcular la solución general de las ecuaciones de Hamilton (3.35) y (3.36) asociadas a los haces de Laguerre-Gauss, porque podría desempeñar un papel importante para dar una explicación, desde el punto de vista del potencial cuántico, de la propiedad de auto-reconstrucción de los haces de Laguerre-Gauss.

Es importante destacar que los resultados obtenidos para los haces de Laguerre-Gauss los hemos reportado en la referencia [26]. Además, los resultados correspondientes al haz de Airy han sido enviados recientemente para su publicación [27].

Referencias

- [1] D. Bohm. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables. i. *Physical Review*, 85(2):166–179, jan 1952.
- [2] A. Ananthaswamy. El tiempo de la mecánica bohminana. *Investigación y Ciencia*, Marzo 2022.
- [3] M. V. Berry and N. L. Balazs. Nonspreading wave packets. *American Journal of Physics*, 47(3):264–267, mar 1979.
- [4] J. Durnin, J. J. Miceli, and J. H. Eberly. Diffraction-free beams. *Physical Review Letters*, 58(15):1499–1501, apr 1987.
- [5] J. Durnin. Exact solutions for nondiffracting beams in the scalar theory. *Journal of the Optical Society of America A*, 4(4):651, apr 1987.
- [6] J. C. Gutiérrez-Vega, M. D. Iturbe-Castillo, and S. Chávez-Cerda. Alternative formulation for invariant optical fields: Mathieu beams. *Optics Letters*, 25(20):1493, oct 2000.
- [7] J.C. Gutiérrez-Vega, M.D. Iturbe-Castillo, G.A. Ramírez, E. Tepichín, R.M. Rodríguez-Dagnino, S. Chávez-Cerda, and G.H.C. New. Experimental demonstration of optical Mathieu beams. *Optics Communications*, 195(1-4):35–40, aug 2001.
- [8] M. A. Bandres, J. C. Gutiérrez-Vega, and S. Chávez-Cerda. Parabolic nondiffracting optical wave fields. *Optics Letters*, 29(1):44, jan 2004.
- [9] C. López-Mariscal, M. A. Bandres, J. C. Gutiérrez-Vega, and S. Chávez-Cerda. Observation of parabolic nondiffracting optical fields. *Optics Express*, 13(7):2364, 2005.
- [10] G. A. Siviloglou and D. N. Christodoulides. Accelerating finite energy Airy beams. *Optics Letters*, 32(8):979, mar 2007.
- [11] G. A. Siviloglou, J. Broky, A. Dogariu, and D. N. Christodoulides. Observation of accelerating Airy beams. *Physical Review Letters*, 99(21):213901, nov 2007.
- [12] G. A. Siviloglou, J. Broky, A. Dogariu, and D. N. Christodoulides. Ballistic dynamics of Airy beams. *Optics Letters*, 33(3):207, jan 2008.
- [13] Miguel A. Bandres. Accelerating beams. *Optics Letters*, 34(24):3791, dec 2009.
- [14] L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw, and J. P. Woerdman. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes. *Physical Review A*, 45(11):8185–8189, jun 1992.
- [15] M.J. Padgett and L. Allen. The poynting vector in Laguerre-Gaussian laser modes. *Optics Communications*, 121(1-3):36–40, nov 1995.

- [16] O. de J. Cabrera-Rosas, E. Espíndola-Ramos, S. A. Juárez-Reyes, I. Julián-Macías, P. Ortega-Vidals, G. Silva-Ortigoza, R. Silva-Ortigoza, and C. T. Sosa-Sánchez. Wavefronts and caustic associated with Durnin's beams. *Journal of Optics*, 19(1):015603, dec 2016.
- [17] I. Julián-Macías, C. Rickenstorff-Parrao, O. de J. Cabrera-Rosas, E. Espíndola-Ramos, S. A. Juárez-Reyes, P. Ortega-Vidals, G. Silva-Ortigoza, and C. T. Sosa-Sánchez. Wavefronts and caustics associated with Mathieu beams. *Journal of the Optical Society of America A*, 35(2):267, jan 2018.
- [18] C. T. Sosa-Sánchez, G. Silva-Ortigoza, S. A. Juárez-Reyes, O. de J. Cabrera-Rosas, E. Espíndola-Ramos, I. Julián-Macías, and P. Ortega-Vidals. Parabolic non-diffracting beams: geometrical approach. *Journal of Optics*, 19(8):085604, jul 2017.
- [19] M. V. Berry and K. T. McDonald. Exact and geometrical optics energy trajectories in twisted beams. *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, 10(3):035005, feb 2008.
- [20] B E. A. Saleh and M.C. Teich. *Fundamentals of photonics*. Wiley, 1991.
- [21] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer, 1980.
- [22] V. I. Arnold. *Singularities of Differentiable Maps, Volume 1 Classification of Critical Points, Caustics and Wave Fronts*. Birkhäuser Boston, 2012.
- [23] H. Goldstein. *Classical mechanics*. Addison-Wesley Pub. Co., 1980.
- [24] J. Casey. Areal velocity and angular momentum for non-planar problems in particle mechanics. *American Journal of Physics*, 75(8):677–685, aug 2007.
- [25] E. Espíndola-Ramos, G. Silva-Ortigoza, C. T. Sosa-Sánchez, I. Julián-Macías, A. González-Juárez, O. de J. Cabrera-Rosas, P. Ortega-Vidals, C. Rickenstorff-Parrao, and R. Silva-Ortigoza. Classical characterization of quantum waves: comparison between the caustic and the zeros of the Madelung–Bohm potential. *Journal of the Optical Society of America A*, 38(3):303, feb 2021.
- [26] G. Silva-Ortigoza, J. Ortiz-Flores, C. T. Sosa-Sánchez, and R. Silva-Ortigoza. Mechanical properties of the particle associated with the Laguerre–Gauss beams via the quantum potential point of view. *Journal of the Optical Society of America B*, 40(1):215, dec 2022.
- [27] Gilberto Silva-Ortigoza and Jessica Ortiz-Flores. Properties of the Airy beam by means of the quantum potential approach. *Physica Scripta*, 98(8):085106, jul 2023.