



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Entropía del disco gris en colisiones pp en el límite de alta
energía

Tesis presentada al:

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de:

LICENCIADA EN FÍSICA

por

Deisy Casas Sánchez

Asesorada por:

Dra. Iraís Bautista Guzmán, Dr. Enrique Varela Carlos

Puebla Pue.
Junio de 2023

Título: Entropía del disco gris en colisiones pp en el límite de alta energía

Estudiante: DEISY CASAS SÁNCHEZ

COMITÉ

Humberto A. Salazar Ibargën
Presidente

Marco Antonio Arroyo Ureña
Secretario

Jhovanny Mejia Guissao
Vocal

Vocal

Dra. Iraís Bautista Guzmán, Dr. Enrique Varela Carlos
Asesor

Índice general

Agradecimientos	IV
Resumen	V
1. Fundamentos Teóricos	1
1.1. Modelo Estándar	1
1.2. Electrodinámica Cuántica (QED).	3
1.3. Cronodinámica Cuántica (QCD).	4
1.3.1. Libertad Asintótica	5
1.3.2. Confinamiento de color	7
1.4. Colisiones a velocidades relativistas.	7
2. Saturación de QCD(Sección eficaz elástica)	10
2.1. La sección eficaz	10
2.2. Teorema Óptico	11
2.3. Amplitud de Dispersión Elástica	11
2.3.1. Unitaridad	13
2.4. Función de perfil y representación Eikonal	13
3. Modelo de Escalamiento Geométrico y Modelo de Disco Gris	15
3.1. Reglas de suma asintótica para la amplitud de dispersión elástica	15
3.2. Modelo de Escalamiento Geométrico	16
3.3. Modelo de disco gris	16
3.4. Límite del Disco Negro	17
4. Entropía de entrelazamiento en el disco gris	19
5. Conclusiones	23
Bibliografía	24

Agradecimientos

Primero que nada, quiero agradecer a la persona que me ha apoyado más en esta travesía, a mi mamá, gracias por siempre darme ánimos para continuar, por acompañarme en mis desvelos, por todo los sacrificios que tuvo que hacer y motivarme a seguir adelante. También quiero agradecer a mis sobrinos: *Marshall, Nasly, Nathaly, Orlando* y a mi hermana, en especial a mi sobrino Gustavo, quien me escuchó atentamente y ayudó en momentos difíciles, a pesar de que aún no poseía los conocimientos que hoy en día está adquiriendo. Todos han jugado parte en el alcance de ésta meta.

A la Dra. Irais Bautista, por creer en mí, y brindarme la oportunidad de trabajar con ella, por su gran comprensión, paciencia, y apoyo brindados a lo largo de todo éste tiempo.

Y por último, pero no menos importante, a Rodolfo, quién me ha brindado siempre su comprensión, y ha estado en los momentos difíciles, quién me ayudó a levantarme cuando pensé que ya no lo lograría, quien me brindó su cariño siendo mi fan 1.

Gracias a todos por creer en mí.

Resumen

Se presenta la determinación de la entropía de entrelazamiento para colisiones pp a altas energías, utilizando los resultados del formalismo de la matriz-S y el modelo de escalamiento geométrico con la parametrización del disco gris, que describe la dependencia de la sección eficaz total respecto a la energía en el centro de masa de la colisión. Ésta propuesta que es basada en una extrapolación del pico de difracción, y la cual considera el límite de saturación asintótico a altas energías.

Capítulo 1

Fundamentos Teóricos

La Física de Partículas, es el campo de la Física en el cual se estudian las partículas elementales y su interacción entre éstas, de ello se deriva el *Modelo Estándar*, siendo la visión más aceptada en la actualidad, que une la Cronodinámica Cuántica (QCD), además de la Teoría Electrodébil.

1.1. Modelo Estándar

El Modelo Estándar de las partículas e interacciones elementales, describe la fenomenología de los experimentos de la física de partículas, además de la teoría cuántica-relativista, siendo un modelo resultado de la combinación de la teoría electrodébil y la cronodinámica cuántica. Se encuentra basado en el principio de invarianza de norma, bajo el grupo de $SU_C(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$, los cuales a su vez, se dividen en los subgrupos:

- $SU_L(2)$: Con tres campos electrodébiles W_μ^i .
- $SU_C(3)$: Con ocho campos gluónicos A_μ^a .
- $U_Y(1)$: Con campo de hipercarga B_μ .

Las partículas elementales se dividen en fermiones y bosones, las cuales son descritas a continuación:

Fermiones

Son las partículas de materia que respetan el principio de exclusión de Pauli, asimismo cuentan con spin $\frac{1}{2}$, son definidos por la estadística de Fermi. Su regla de cuantización:

$$(\psi(\mathbf{r}), \Pi(\mathbf{r}')) = i\hbar\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad (1.1)$$

en el que su momento conjugado es : $\Pi_\mu = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\psi)}$.

Los fermiones están categorizados como:

- **Quarks:**

Son partículas fundamentales, los cuales se encuentran cargadas fraccionariamente, una de sus propiedades es el color, el cual es un número cuántico, existen dos tipos de quarks:

- Up: Con carga de $\frac{2}{3}e$; up (u), top (t) y charm(c).

- Bottom: Con carga $-\frac{1}{3}e$; down(d), bottom (b) y strange (s).

▪ **Leptones:**

Son partículas ligeras, ya que la fuerza débil y la electromagnética, son las que dominan en ellas, se clasifican en:

- Neutros: son eléctricamente neutros, son los neutrinos correspondientes del electrón (ν_e), tau (ν_τ) y el muón (ν_μ).
- Cargados: el electrón e , el tau (τ) y el muón (μ), con carga $-e$.

De las partículas anteriores, están clasificadas a su vez en tres generaciones, en la que cada generación contiene dos quarks y dos leptones. La primera generación, contiene: (u, d) y (e, ν_e), la segunda: (c, b) y (μ, ν_μ) y la última: (t, b) y (τ, ν_τ).

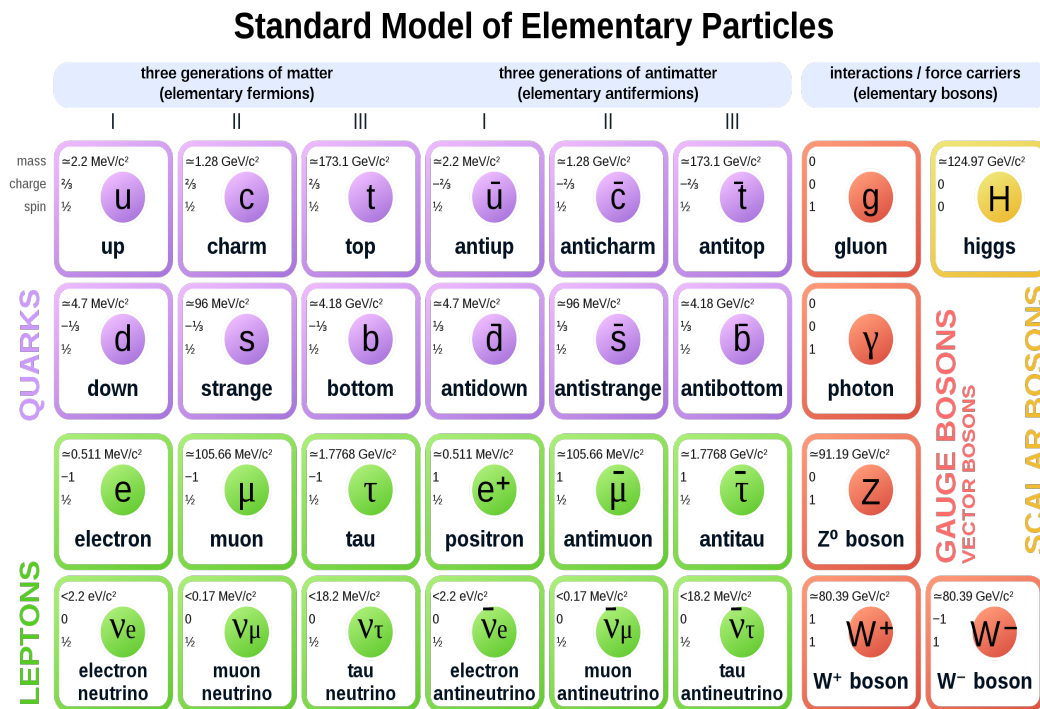


Figura 1.1: Familia de fermiones, bosones, con sus respectivas antipartículas.[3]

A las partículas compuestas de quarks se les conoce como *hadrones*, en los que la fuerza fuerte es la que los rige. estados estables ligados de quarks, además, es de importancia mencionar que para cada partícula existe su antipartícula.

¹ $e = 1,602176.X10_{-19}C$ la carga eléctrica fundamental, en unidades del SI.

Bosones

Son las partículas mediadoras de las interacciones, obedecen el principio de Bose-Einstein, además de poseer spin cero o entero $z = 1, 2, \dots$, a diferencia de los fermiones, éstos no cambian de signo con una interacción, se dividen en boson de campo (siendo único el Boson de Higgs) y de norma. Su regla de cuantización:

$$(\phi(\mathbf{r}), \pi(\mathbf{r}')) = i\hbar\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.2)$$

en el que su momento conjugado es: $\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}$

1.2. Electrodinámica Cuántica (QED).

Para empezar a hablar de la Cronodinámica Cuántica, es importante primero conocer la Electrodinámica Cuántica o también conocida como QED.

QED es una Teoría de Gauge, cuyo grupo es el $U(1)$ el cual es isomórfico, constituye una teoría cuántica de campo de los electrones e^- , positrones e^+ y fotones γ , que explica la interacción de la luz con las partículas cargadas (aplicando también para los leptones τ y μ) siendo una de las teorías más precisas en la Física, además de constituir la primera teoría en la cual la relatividad especial y la mecánica cuántica están en total acuerdo. Uno de los exponentes y considerado "padre" de ésta teoría es Richard Feynman, que hizo uso del formalismo de la *propagación*. La partícula mediadora es el fotón, donde su interacción potencial está dada por:

$$V(r) \sim -\frac{e^2}{r} \quad (1.3)$$

por lo que su potencial decrece continuamente si se va incrementando la distancia.

En tanto que su Lagrangiano:

$$L = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + D_\mu\phi^*D^\mu\phi - V(\phi\phi^*) \quad (1.4)$$

donde su estructura está dada por la misma simetría del grupo, perteneciendo a un grupo abeliano, además de ser para un sistema dinámico cerrado. Está determinado por:

- ϕ y ϕ^* siendo un campo complejo.
- $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ que representa el campo de fuerza, siendo invariante ante las transformaciones de Gauge, con A^μ con 4 grados de libertad.
- D_μ como la derivada covariante.

La constante de acoplamiento para QED está dada de la forma:

$$\alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi} \quad (1.5)$$

donde la interacción en el vacío, está dado por:

$$F = \frac{\alpha_{em}}{r^2} \quad (1.6)$$

Añadiendo, que en tanto que para un medio con constante dieléctrica ϵ :

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{e^2}{r^2} \quad (1.7)$$

El vacío es señalado como el estado en el que la energía negativa de Dirac está llena de electrones.

El fenómeno de la polarización del vacío en el que un fotón a través del vacío puede inducir que un electrón pase de un estado de energía negativa a un estado positivo, agregando el hecho de que debido a las fluctuaciones en el medio, se pueden crear pares virtuales de e^+ y de e^- , donde éstas cargas pueden filtrar una carga de prueba, un evento mejor conocido como: *fluctuación del vacío* o *polarización del vacío*, con una contribución de los diagramas de bucle, que conducen a la *divergencia ultravioleta*.

1.3. Cronodinámica Cuántica (QCD).

La cronodinámica cuántica o mejor conocida como QCD, es un esquema teórico de campo, el cual describe la interacción fuerte, asimismo, la correlación de los quarks que forman hadrones, los bariones si la interacción entre tres quarks, adicionalmente de los mesones si la interacción es de un quark con un antiquark.

En el año de 1964, Murray Gell-Mann y de forma independiente, George Zweig postularon la existencia de los quarks, QCD, es de gran consideración en la sección eficaz, ya que en altas energías, el comportamiento de la sección eficaz total es dominado por los efectos de grandes distancias, lo cual corresponde a una cantidad pequeña de momento.

Ésta importante teoría está constituida principalmente por los conceptos de: 1) *Quarks de color*, 2) *La simetría local de Gauge* y 3) *Los gluones*.

1. *Quarks de color*:

Los quarks, son las partículas fundamentales de las cuales se constituye la materia, éstos poseen propiedades intrínsecas tales como: el spin, la masa, la carga eléctrica, la carga de color, entre otras.

Se encuentran agrupados por tres generaciones, en las que comparten propiedades a excepción de la masa. En la Cronodinámica cuántica, a cada quark se le asigna un estado de color, que es conservado a pesar de las interacciones que tiene. Ésta propiedad fue introducida por Greenberg para reestablecer *el Principio de Pauli*, de modo que se ordena de tal forma en la que cada quark tiene uno de tres posibles valores.

2. *Gluones*:

Se definen como las partículas mediadoras de la interacción fuerte, son bosones que no tienen masa y tienen dos polarizaciones diferentes: izquierda y derecha. Existen ocho tipos de gluones, ya que, solo pueden ser combinados de ocho formas de acuerdo a sus estados de color.

En resumen, el rol de los fotones en QED lo cumplen los gluones en QCD, a diferencia que los últimos pueden interaccionar entre sí mismos, de forma que conducen a dos propiedades importantes:

- La libertad asintótica, y
- El cautiverio infrarrojo.

3. *Simetría local de Gauge:*

Con esto se refiere a que el Lagrangiano, es invariante dentro de un grupo continuo de transformaciones locales de gauge de la interacción de color, el grupo de Gauge correspondiente a la cronodinámica cuántica es el grupo no abeliano SU(3), que nos ayuda a describir teóricamente el comportamiento de las variables de acoplamiento.[1]

$$L_{QCD} = \sum_{N_f}^{f=1} \bar{\psi}_f [i\gamma^\mu D_\mu - m_f] \psi_f - \frac{1}{4} F_{\alpha}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^{\alpha} \quad (1.8)$$

Donde:

- $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a \frac{\lambda_a}{2}$ representa la derivada covariante asociada al grupo;
- A_μ^a , los ocho estados asociados a cada gluón (a=1,2,...8), representa el campo gluónico.
- m_f es la masa del quark, y g la constante de acoplamiento.
- ψ_f los tripletes de la representación en SU(3), siendo las distintas cargas de color. Los componentes representan las direcciones independientes en el espacio de color
- γ^μ son las matrices de Dirac, las cuales unen la representación espinorial con la representación del grupo de Loretz.
- $F_{\alpha}^{\mu\nu}$ es el tensor de campo gluónico:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c \quad (1.9)$$

Para que el Lagrangiano de la ecuación (1.8) sea invariante bajo transformaciones de norma.

1.3.1. Libertad Asintótica

En el año de 1973 David J. Gross, Frank A. Wilczek y Hugh D. Politzer descubrieron la libertad asintótica, de la cual es importante mencionar los hizo acreedores del premio Nobel del 2004.

Ésta es una propiedad de la que su mismo nombre menciona, donde la interacción entre partículas se va haciendo más débil de forma asintótica conforme se disminuye la escala de longitud y se aumenta la escala de energía.

La intensidad de interacción entre dos quarks se establece con la constante de acoplamiento g , la fuerza de interacción en QCD, se da como: $\alpha_s(\mu) = \frac{g_s^2}{4\pi}$, siendo un comportamiento a causa de la presencia de autointeracciones de bosones de norma.

La libertad asintótica nos permite utilizar técnicas perturbativas para la resolución de algunos problemas en QCD, en los cuales involucra *la propagación de momento de gran escala, además de procesos de distancias pequeñas,* por lo que la sección eficaz para esos procesos se puede expandir en términos de la constante de acoplamiento, donde la magnitud de acoplamiento es pequeña, en la que solo algunos términos contribuyen a la sección eficaz total:

$$\sigma(P) = \sum_k A_k(P) \alpha_s^k \quad (1.10)$$

La constante de acoplamiento para QCD "corre" la constante de acoplamiento es la que otorga la medida de fuerza de la interacción fuerte (la que mantiene a los quarks juntos), su valor está dado con la energía de "marcha", la cual es la base de las fluctuaciones cuánticas.

la interacción en QCD formalmente está definida como:

$$\alpha_s(\mu) = \frac{g_s^2}{4\pi} = \frac{a_s(\mu_0)}{1 + \frac{a_s(\mu_0)}{4\pi} \left(11 - \frac{2N_f}{3}\right) \ln \frac{\mu^2}{\mu_0^2}} \quad (1.11)$$

en donde $N_f < 17$, nuestra constante tendrá un decrecimiento asintótico hasta llegar al 0, con $\mu \rightarrow \infty$, mientras que en una distancia corta los quarks se comportarán como partículas libres, además nos da a conocer la propiedad del *cautiverio infrarrojo*.

Para la ecuación anterior, se puede reescribir incluyendo parámetros dimensionales:

$$(\Lambda)_{QCD}^2 = \frac{(\mu_0)^2}{e^{\frac{1}{b_0 \alpha_s(\mu_0)}}} \quad (1.12)$$

el cual nos representa el parámetro de escala de QCD, siendo el momento mínimo permitido, donde QCD se vuelve no perturbativo, $\Lambda_{QCD}^2 \approx 200 MeV$ (siendo un parámetro obtenido experimentalmente);

y con:

$$b_0 = \frac{1}{4\pi} \left(11 - \frac{2}{3} N_f\right) \quad (1.13)$$

en el que N_f es el número de los sabores activos en las partículas correspondientes, ahora, haciendo uso de los anteriores, nos queda de la siguiente manera:

$$a_s = \frac{1}{b_0 \ln \frac{\mu^2}{\Lambda_{QCD}^2}} \quad (1.14)$$

Así de ésta forma tenemos la ecuación de la interacción de forma mejor resestructurada.

Es de relevancia mencionar que en el caso de un protón, a una energía de $1TeV$, la constante de acoplamiento tiene un valor aproximado de $\approx 100 MeV$, que también es una muestra de la *libertad asintótica*.

Por último, es de relevancia mencionar a otra propiedad asociada a QCD, la cual es el *cautiverio infrarrojo*, en donde los procesos que tienen una escala de *momento* bajo o que se dan a distancias largas, la constante de acoplamiento de la ecuación (1.11), tienda a divergir a infinito.

1.3.2. Confinamiento de color

A partir de lo anterior se puede postular otra propiedad de importancia en QCD, conocida como: *confinamiento de color*. Los quarks y los gluones están confinados dentro de los hadrones, de lo cual se puede definir que si se tiene una escala de longitud mayor entre dos partículas (específicamente quarks) éstas sufren un incremento en su interacción a tal grado en el que no se pueden separar la una de la otra, además de que éste comportamiento se deduce de aproximaciones.

Es fundamental agregar que más del 95% de la masa de los hadrones es resultado de la interacción fuerte, a pesar de que se esperaría que fuese consecuencia de la misma masa de los quarks.

Si se pretende entender haciendo una analogía con QED, se toma el vacío de QCD como el condensado de quark-antiquark, siendo una especie de un dieléctrico perfecto, con una constante dieléctrica de color $\chi = 0$, mientras que en QED tiene un comportamiento similar a los pares de electrones en un superconductor.

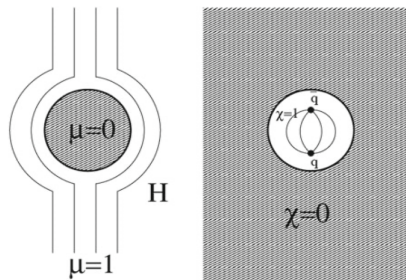


Figura 1.2: Imagen del superconductor dual.[5]

El campo cromoelectrónico en QCD cumple el mismo papel que el campo eléctrico en QED, en tanto que el superconductor en QED es el vacío en QCD y el vacío en QED es el interior del hadrón en QCD, en consecuencia se tiene la *imagen del superconductor dual*. Del mismo modo en que el campo magnético en QED es repelido, en QCD el *confinamiento de color*, ocurre cuando el campo cromoelectrónico es repelido del vacío y éste empuja hacia el interior del hadrón.

1.4. Colisiones a velocidades relativistas.

La cinemática nos permite estudiar el movimiento de los cuerpos; por tanto para describir las colisiones de las partículas, introduciremos algunas variables de la cinemática, en las que se emplea el formalismo de la Relatividad Especial.

Es conveniente representar la posición y el momento en términos de cuadvectores. La posición se simboliza como x^μ , con $\mu = 0, \dots, 3$, en consecuencia, $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$; en el cual x^0 es la coordenada temporal y el resto de las coordenadas son las espaciales. La ecuación anterior puede ser escrita como: $x^\mu = (t, x_T, z)$, donde:

$x_T = \sqrt{x^2 + y^2}$. El cuadvimomento es similar, con: $p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = (\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z)$ con $c = 1$ y E , es la energía de la partícula.

Análogamente, $p^\mu = (E, p_T, p_z)$; $p_T = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$ que es el momento transversal.

De acuerdo al sistema, se emplean los cuadvectores en el espacio de Minkowski que es un espacio

métrico.

$$\mathbf{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

también se puede ver como: $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, 1)$.

El producto escalar de cuadvectores, en el que a y b es cualquier par de cuadvectores, \vec{a} y \vec{b} representa a un vector en tres dimensiones:

$$a \cdot b = a^\mu b_\mu = a_0 b_0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 = a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b} \quad (1.16)$$

Es de relevancia mencionar que la colisión ocurre en el eje z , ya que es la dirección del haz en los aceleradores de partículas (por esa razón se toman las componentes transversas). Las diagonales donde $t^2 - z^2 = 0$ definen el cono de luz. La colisión ocurre en $t = 0 = z$ que representa la línea luminosa, en el que $t^2 - z^2 > 0$ de la parte superior del cono de luz es la región temporal, mientras que la zona fuera del cono de luz donde $t^2 - z^2 < 0$ simboliza la región espacial.

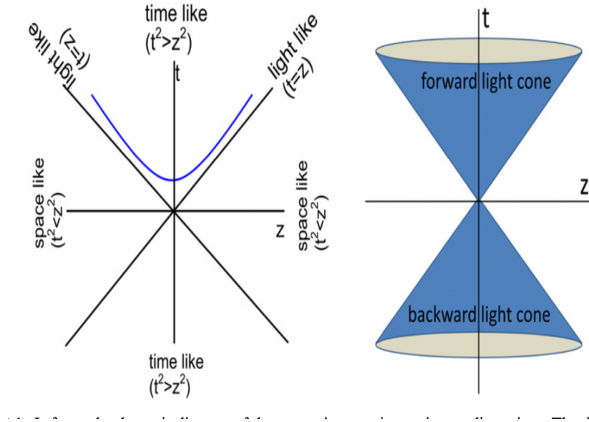


Figura 1.3: Diagrama del espacio-tiempo continuo. El eje z es la coordenada espacial y t la coordenada temporal.[1]

Representaremos en términos de la energía:

$$\mathbf{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

Las variables que son convenientes para describir la cinemática de las partículas es la masa transversal m_T , la rapidez y y la pseudorapidez η . La masa transversal es invariante ante las transformaciones de Lorentz, es escalar.

$$m_T = \sqrt{m_T^2 + p_T^2} \quad (1.17)$$

La rapidez está representada como:

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{E + p_z}{E - p_z} \quad (1.18)$$

la cual es un análogo relativista de la velocidad no relativista.

Cuando $p \gg m$, la pseudorapidez se puede relacionar con un ángulo θ donde esta determina, que es conveniente para los experimentos.

$$Y = \frac{1}{2} \ln \frac{p + \cos\theta}{p - \cos\theta} \equiv \eta \quad (1.19)$$

Con η que representa la pseudo-rapidez, donde el θ nos determina la variable, que es más fácil de conocer en ciertos experimentos.

Capítulo 2

Saturación de QCD (Sección eficaz elástica)

2.1. La sección eficaz

Las partículas de forma natural y por medio de experimentos sufren varios fenómenos, uno de ellos es la colisión entre dos o varias partículas entre sí mismas, lo cual a su vez, da pie a la formación de otras partículas, al cambio de su momento e inclusive pueden no tener ningún cambio significativo entre ellas. Es importante mencionar que en cualquiera de ambos escenarios que se describirán a continuación, se cumplen las leyes de la conservación tanto en su energía, carga, etc.

Primeramente se dará énfasis en el proceso de una colisión donde existe transferencia de energía, partiendo de un estado inicial donde se tiene cierta energía a un estado final, al que finalmente son producidas otras partículas, éste proceso también es conocido como una colisión inelástica.

Por otro lado, las colisiones elásticas se dan cuando a partir de una colisión no hay un cambio en el aspecto de que no son producidas nuevas partículas, pero existe un cambio en significativo en su momento.

A partir de los dos procesos anteriores de colisión, se precisa la sección eficaz total, donde se caracteriza el comportamiento de las partículas en términos de las variables del momento transversal además de la rapidez.

La sección eficaz total (σ) es invariante ante las transformaciones de Lorentz, y es denotada en dimensiones de área "b", dada generalmente en unidades de mb .

Es importante agregar que cuando una sección eficaz está dada en función de una variable de un estado final, por ejemplo el ángulo de dispersión de las partículas, a ésta sección eficaz se le llama *sección eficaz diferencial*, mientras que si se integra la sección eficaz sobre los ángulos de dispersión además de potencialmente algunas otras variables involucradas, y se obtendrá la *sección eficaz total*.

La sección eficaz es proporcional a la probabilidad de que suceda una respuesta en el proceso, así tenemos el promedio que nos indica la probabilidad de que ocurra un evento específico de dispersión, siendo de gran importancia tanto la sección eficaz total como la de dispersión diferencial.

2.2. Teorema Óptico

El Teorema Óptico corresponde a la relación que existe entre la sección eficaz total de forma lineal a la parte imaginaria de la amplitud de dispersión elástica (delantera).

Para obtener el teorema óptico, primero se introduce la definición de sección eficaz total, empleando la probabilidad, en la que dadas dos partículas, con estado inicial $|i\rangle$ que se dispersa en un estado(ó estados) final $|f\rangle$; donde la suma se efectúa en todos los estados finales y todos los números cuánticos α . S es la matriz S(dispersión) y S_{if} los elementos de la misma, y dado que la matriz S , debe contener la posibilidad de que nada suceda, debe estar escrita en términos de la matriz T :

$$\sum_f P_{fi} = \sum_{f\alpha} \int \left[\prod_{n=1}^{N_f} \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3 E_n} (S_{fi}^\dagger S_{if}) \right] \quad (2.1)$$

A continuación, disponiendo de la definición de la matriz S, en términos de la matriz T;

$$\sum_f P_{fi} = \sum_{f\alpha} \int \prod_{n=1}^{N_f} \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3 E_n} (S_{fi}^\dagger \times |T_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i)) \quad (2.2)$$

$(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i)$ figura la dispersión de volumen VT en cuatro dimensiones, así que la probabilidad quedará en éstos términos.

El estado inicial conformado por la partícula objetivo(T) y el proyectil (P), donde la σ_{tot} , es la probabilidad por partícula objetivo por unidad de tiempo sobre el flujo de partículas entrantes.

$$\sigma_{tot} = \frac{(2\pi)^4}{4E_T E_P v_{Plab}} \sum_{f\alpha} \int \prod_{n=1}^{N_f} \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3 E_n} |T_{if}|^2 \delta^4(P_f - P_i) \quad (2.3)$$

Para una σ_{total} en el marco del centro de masa, que asocia la sección eficaz total a la parte imaginaria de la *amplitud de dispersión*:

$$\sigma_{total} = \frac{Im T_{ii}}{\sqrt{s} 2k} \quad (2.4)$$

con \sqrt{s} la energía del centro de masa, y k es el momento del centro de masa de las partículas entrantes.

2.3. Amplitud de Dispersión Elástica

Nos ayuda a comprender el Teorema de Martin-Froissart y asocia la expansión de Regge, siendo que la expansión de Regge fue relevante entre los años 60-70's para describir la fenomenología de las secciones eficaces totales e inclusivas.

Los siguientes conceptos nos ayudan a explicar la amplitud de dispersión elástica, los cuales son la base de la Teoría Cuántica de Campos.

- Analicidad: Relacionada a la causalidad, en el enfoque del análisis complejo, donde las amplitudes son funciones analíticas.
- Simétrica cruzada: Relacionada a la naturaleza relativista de las interacciones, a la que la amplitud corresponde a la descripción de los canales s, u y t .

- Unitaridad: Relacionado a la conservación de la probabilidad de los procesos de dispersión, donde la matriz S debe ser un operador hermitiano.

De manera que, la Amplitud de Dispersión Elástica, se escribe mediante las variables de Mandelstam (s, t) , siendo una función compleja F , siendo $F = F(s, t)$.

Enseguida, se puede establecer las respectivas definiciones de secciones eficaces partiendo de la función de amplitud de dispersión:

- *Sección Eficaz Total*: Teniendo la parte imaginaria de la Amplitud de Dispersión Elástica con la Sección Eficaz Total.

$$\sigma_{total}(s) = \frac{ImF(s, 0)}{s} \quad (2.5)$$

- *Sección Eficaz Inelástica*: La cual está relacionada a la cantidad total de partículas en los eventos elásticos tanto como en los inelásticos. Establecida de la siguiente forma:

$$\sigma(inelastic) = \sigma_{total} - \sigma_{elastic} \quad (2.6)$$

- *Sección Eficaz Elástica (Diferencial)*: Está asociada a la amplitud de dispersión.

$$\frac{d\sigma}{dt}(s, t) = \frac{1}{16\pi s^2} |F(s, t)|^2 \quad (2.7)$$

- *Sección Eficaz Elástica (Integral)*: De ésta forma, si se integra sobre la variable t , que depende de la energía s .

$$\sigma_{elastic}(s) = \int_{-\infty}^0 \frac{d\sigma}{dt} dt \quad (2.8)$$

Con los conceptos y ecuaciones de las secciones eficaces, se deriva *el punto óptico*, donde se calcula la sección eficaz diferencial con $t = 0$. Con ρ como la fase, que contiene a la parte imaginaria y real de la amplitud de dispersión:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt}|_{t=0} &= \frac{1}{16\pi s^2} |ReF(s, 0) + iImF(s, 0)|^2 \\ &= \frac{(ImF(s, 0))^2}{16\pi s^2} \left[\frac{(ReF(s, 0))^2}{(ImF(s, 0))^2} + 1 \right] \\ &= \frac{\sigma_{total}(1 + \rho^2)}{16\pi} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Añadiendo *parámetro de pendiente*, que de acuerdo a la sección eficaz diferencial, éste tiene un llamado: *pico de difracción*, que se muestra en el tratamiento de los datos cuando se aplica el logaritmo, con B como la pendiente de la curva.

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} \Big|_{t=0} e^{-B|t|} \quad (2.10)$$

2.3.1. Unitaridad

Para realizar la medición de las secciones eficaces totales, se puede justificar mediante la probabilidad de conservación, o también conocida como *unitaridad*. La unitaridad nos dice que la intensidad de una onda saliente no puede exceder la intensidad de una onda entrante. Este fundamento, se ajusta a la propiedad de unitaridad de la matriz S ; donde: $SS^\dagger = \mathbf{1}$ específicamente, en términos de la matriz:

$$(SS^\dagger)_{fi} = \sum_n S_{fn} S_{ni}^* = \delta_{fi} \quad (2.11)$$

del cual, n funciona en todos los estados intermediarios posibles, lo que garantiza la ortogonalidad y normalización de éstos estados. En el caso en el que $f=i$, la ecuación anterior nos da la certeza de que la suma de todas las transiciones de un estado $|i\rangle$ es 1. Por lo que la unitaridad corresponde a:

$$\sum_n |S_{ni}|^2 = 1 \quad (2.12)$$

Usando S_{if} si se tiene una matriz T que puede ser expandida en un parámetro pequeño nos garantiza que los elementos de la matriz T son hermitianos, y de lo cual, Ésta probabilidad es empleada para derivar el Teorema Óptico.

La analicidad y unitaridad tienen un papel fundamental en la dispersión de partículas como lo son los hadrones y los mesones

2.4. Función de perfil y representación Eikonal

Con los conceptos anteriores, podemos describir la representación Eikonal de la sección eficaz total. La representación Eikonal, es el formalismo más significativo hasta la fecha, donde encajan los modelos de QCD para el comportamiento de la energía de la sección eficaz total.

Dado el límite en una s , con una t fija; $t < 0$, la imagen Eikonal emerge bajo la hipótesis en la que se identifica la zona del parámetro de impacto b ; $(l + \frac{1}{2}) \rightarrow b(\frac{\sqrt{s}}{2})$ Para la amplitud de dispersión elástica se puede representar en la función de perfil $\Gamma(s, b)$ el parámetro de impacto con b , por consiguiente para tener una correlación entre la amplitud de dispersión elástica y la función de perfil, mediante la Transformada de Fourier-Bessel, dada de la siguiente forma:

$$F(s, t) = 4\pi s i \int_0^\infty b J_0(b\sqrt{-t}) \Gamma(s, b) db$$

con J_0 , como la 0 función de Bessel de 1er tipo.

Saturación de QCD(Sección eficaz elástica)
2.4 Función de perfil y representación Eikonal

para tomar en términos de la función de perfil, tomamos las secciones eficaces:

$$\sigma_{total}(s) = 4\pi \int_0^{\infty} b \operatorname{Re} \Gamma(s, b) db \quad (2.13)$$

además de la sección eficaz elástica:

$$\sigma_{elast}(s) = 2\pi \int_0^{\infty} b |\Gamma(s, b)|^2 db \quad (2.14)$$

Mientras que para la sección eficaz inelástica, y de acuerdo a la condición de *unitaridad*:

$$\sigma_{inelastic}(s) = 2\pi \int_0^{\infty} b G_{inelastic}(s, b) db \quad (2.15)$$

con $G_{inelastic}$:

$$G_{inelastic}(s, b) = 2 \operatorname{Re} \Gamma(s, b) - |\Gamma(s, b)|^2 \quad (2.16)$$

De este modo, se puede simbolizar la Función de Perfil en la representación Eikonal como:

$$\Gamma(s, b) \equiv 1 - e^{i\chi(s, b)} \quad (2.17)$$

con $\chi(s, b)$ como la función Eikonal.

Con $G_{inelastic}(s, b) \leq 1$, se puede obtener un análisis de la probabilidad de acuerdo a la superposición inelástica, por lo que nos da la probabilidad de que suceda un evento inelástico. Agregando a ello, la parte imaginaria de $\chi(s, b)$ está vinculado al proceso de dispersión.

Respecto a lo anterior, damos la función de opacidad:

$$\Omega(s, b) \equiv \operatorname{Im} \chi(s, b) \quad (2.18)$$

La relación entre la función de opacidad y la función de perfil, siendo una función de valores reales, desconsiderando la parte real de la amplitud elástica:

$$\Gamma(s, b) = 1 - e^{-\omega(s, b)}$$

Capítulo 3

Modelo de Escalamiento Geométrico y Modelo de Disco Gris

3.1. Reglas de suma asintótica para la amplitud de dispersión elástica

Primeramente, se definirán dos reglas de suma asintótica para trabajar con el modelo de escalamiento geométrico.

Se derivan dos integrales sobre el momento transferido para las partes reales e imaginarias de la amplitud elástica, con la función $F(s, t)$ compleja, que se procede a normalizar:

$$\sigma_{tot}(s) = ImF(s, 0)4\pi; \quad \frac{d\sigma}{dt} = |F(s, t)|^2\pi \quad (3.1)$$

La amplitud elástica en términos de la fase de desplazamiento $\delta(s, b)$;

$$F(s, t) = i \int J_o(b\sqrt{-t})(bdb)(1 - e^{i2\delta_R(s,b)}e^{i2\delta_I(s,b)}) \quad (3.2)$$

Con el inverso:

$$(1 - e^{i2\delta_R(s,b)}e^{i2\delta_I(s,b)}) = -i\frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 (J_o)(b\sqrt{-t})F(s, t)dt \quad (3.3)$$

Reescribiendo la ecuación 4., y de acorde a cada término, obtenemos:

$$1 - (\cos 2\delta_R(s, b) + i \operatorname{sen} 2\delta_R(s, b)e^{-2\delta_I(s, b)}) = -i\frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 (J_o)(b\sqrt{-t})[ReF(s, t) + iImF(s, t)]dt \quad (3.4)$$

Con la hipótesis en la cual en la región central $b = 0$, sucede una absorción total, y el límite de disco negro δ_I con $(s, 0) \rightarrow \infty$, y tenemos las reglas asintóticas de suma; ambas con las condiciones de $s \rightarrow \infty$:

$$S_R = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 ReF(s, t)dt \rightarrow 0 \quad (3.5)$$

$$S_I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 ImF(s, t)dt \rightarrow 1 \quad (3.6)$$

Si $ReF(s, t)$ se construye bajo la fórmula de Froissart-Martin, la regla de suma de S_R , se cumple de igual manera que la de S_I .

3.2. Modelo de Escalamiento Geométrico

El modelo de escalamiento geométrico propuesto por Días de Deus [8], se aplica para la amplitud elástica y la posición del hueco como función de la energía, la cual es de importancia para los datos de colisiones elásticas de pp .

El límite del disco negro se alcanza hasta $\sqrt{s} = 57TeV$; y la estructura del hueco de escalamiento geométrico infringe esto al ser anclada al límite anterior. El promedio de escalamiento geométrico que se basa en dos escalas, funciona para determinar la posición del “dip” vs la energía.

La amplitud elástica $F(s, t)$ tiene una parte real y una imaginaria, en el que la parte imaginaria, con $t = 0$, está ajustada a la sección total eficaz, siendo positivo, además de obedecer el límite (bound) de Froissart-Martin.

$$ImF(s, 0) = \frac{\sigma_{tot}(s)}{4\pi} \quad (3.7)$$

Aunque para t distinto de 0, no existen resultados generales. Se deben satisfacer las siguientes reglas de suma, con $s \rightarrow \infty$:

$$S_R = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 ReF(s, t) dt \rightarrow 0 \quad S_I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 ImF(s, t) dt \rightarrow 1 \quad (3.8)$$

El escalamiento geométrico, con una $s \rightarrow \infty$

$$T_{dip}(s)\sigma_s \rightarrow constante \quad (3.9)$$

3.3. Modelo de disco gris

Para este modelo se toma primeramente la contribución de la $R(s)$ que nos otorga el radio del protón en función de la energía, y $f(s)$ que da la relación de la densidad de la materia gluónica de igual forma en función de la energía, ambas contribuciones presentes en el crecimiento de la sección eficaz.

En un modelo de disco la amplitud de dispersión elástica a una energía del centro de masa de la colisión se define en el espacio del parámetro de impacto b igual a una constante positiva real Ω que representa la opacidad del disco para cualquier valor menor que el radio del disco R .

A diferencia del límite del disco negro, lo que sucede en este límite es describir el comportamiento de las secciones eficaces en el intervalo que va de bajas energías hasta el punto de saturación en que se alcanza el disco negro, que se hace mediante una parametrización de las secciones eficaces.

$$\sigma_{total} = 2\pi R^2(s)f(s) \quad (3.10)$$

$$\sigma_{elastic} = 2\pi R^2(s)f(s)^2 \quad (3.11)$$

Donde $R(s)$ es el radio aparente del protón y $f(s)$ la densidad de materia gluónica, y ambas funciones son dependientes de la energía s . Con $R(s)$ como una función de dependencia logarítmica.

$$R(s) = R_0 + \beta \log \frac{s}{s_0} \quad (3.12)$$

Con $\sqrt{s_0} = 2,216 \times 10^{-9} GeV$ un parámetro mínimo dependiente de la energía, $R_0 = 9,36 \times 10^{-2} mb^{1/2}$ una constante relacionada a los quarks de valencia del proyectil y de la distribución inicial del objetivo. Para la función $f(s)$ se espera que al acercarse al límite de altas energías su valor sea 1, por lo que se propone una ley de potencias en $\ln(s)$ de la forma[14]:

$$f(s) = \bar{\Omega}(s) \tag{3.13}$$

El término $\bar{\Omega}(s)$ se conoce como la *opacidad* y cuya forma es:

$$\bar{\Omega}(s) = 2(\gamma_1 + \gamma_2 \ln(s) + \gamma_3 \ln^2(s)) \tag{3.14}$$

Con $\gamma_1 = 0,2563, \gamma_2 = -0,0218, \gamma_3 = 0,00264$.
 Reescribiendo $f(s)$ llegamos a:

$$f(s) = 2(\gamma_1 + \gamma_2 \ln(s) + \gamma_3 \ln^2(s)) \tag{3.15}$$

Por lo que para el límite del disco negro, la sección eficaz será:

$$\frac{\sigma_{tot}^2}{2\sigma_{el}} = 2\pi R^2(s) \equiv \sigma_{BD} \tag{3.16}$$

3.4. Límite del Disco Negro

El límite del Disco Negro es un modelo que representa una perspectiva fenomenológica, basado en la representación Eikonal. Para establecer el límite, se propone desde la condición de unitaridad con:

$$\frac{\sigma_{elastic}}{\sigma_{total}} + \frac{\sigma_{inelastic}}{\sigma_{total}} = 1 \tag{3.17}$$

con una cota para $A = 1$.

Por consiguiente, de acuerdo al límite de Froissart-Martin (LFM) para la sección eficaz total debe ocurrir que [13]:

$$\sigma_{tot}(s) \leq B_{FLM} \ln^2(s/s_0) \tag{3.18}$$

Con s_0 que es una escala de energía, y el coeficiente B_{FLM} que también está acotado por [15]:

$$B_{FLM} \leq \frac{\pi}{m_\pi^2} \approx 60mb \tag{3.19}$$

Para el caso de la sección inelástica al aplicar el LFM tenemos [16] que:

$$\sigma_{\text{inel}}(s) \leq \frac{1}{4} \frac{\pi}{m_{\pi}^2} \ln^2(s/s_0), \quad (s \rightarrow \infty) \quad (3.20)$$

el cociente entre ellas también deberá estar acotado por el LFM mediante [17] :

$$\sigma_{\text{elastic}} / \sigma_{\text{total}} \leq 1/2 \quad (3.21)$$

sustituyendo lo expresado en la ecuaciones (3.1) y (3.3):

$$\sigma_{\text{elastic}} / \sigma_{\text{total}} \leq 3/4 \quad (3.22)$$

Lo que nos describe la sección eficaz total, derivado de la sección elástica en el límite de las altas energías.

Capítulo 4

Entropía de entrelazamiento en el disco gris

Antes que nada, es importante definir el panorama de la Entropía de Entrelazamiento, se define como una Teoría Cuántica de campos (QFT), de la cual a una región del espacio V siempre se le puede asignar una entropía, siendo una entropía térmica o que esté producida por fluctuaciones del vacío. Tomando el caso de las fluctuaciones del vacío, la entropía puede obtenerse a partir de la entropía de von Neumann, de acuerdo a la matriz densidad ρ_V reducida de la región determinada V , de modo que:

$$S = -Tr(\rho_V \log \rho_V) \quad (4.1)$$

La entropía actúa como una medida de las correlaciones del sistema dado, y tomando en cuenta a un estado enteramente puro, por lo que a esta magnitud se le conoce como entropía de entrelazamiento (EE) y que puede ser considerada como una medición del entrelazamiento entre la región y el complemento de la misma.

Las teorías cuánticas de campos continuas cuentan con un álgebra de von Neumann de tipo III. Dado lo anterior, las regiones no pueden definirse a partir de una factorización del espacio de Hilbert como se hace en los sistemas localmente finitos. Más físicamente, este problema puede entenderse debido a la existencia de grados de libertad adyacentes arbitrariamente cerca dentro del UV.

Para definir a la región, se puede tomar álgebra de observables con un soporte en la región V indicada, de la cual conmuten con operadores y del que su apoyo esté en regiones espacialmente separadas.

La entropía de Entrelazamiento para ser usado en Teoría de Gauge, debe ser fijado para poder escribirse en función de las invariantes de Gauge en la región determinada V .

El flujo del grupo de renormalización de QCD en términos del modelo partónico puede ser reescrito en términos de la dispersión partónica, llevando así a la evolución de las densidades partónicas en la x de Bjorken y la virtualidad Q^2 .

Dentro de este formalismo se puede describir el hadrón en el sistema de referencia en reposo descrito por un estado puramente cuántico $|\Psi\rangle$ con la densidad de matriz $\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ y

además de la entropía “cero” de Von Neumann $S = \text{tr}[\hat{\rho} \ln \hat{\rho}] = 0$. Sin embargo sigue abierta la pregunta de cómo evoluciona éste estado al set de partones *quasilibres* en el marco de referencia de momento infinito.

El caso de que los partones fueran totalmente libres e incoherentes se caracterizarían por una entropía no-cero, y dado que la transformación de Lorentz no puede transformar un estado puro a un estado mixto no se tiene claro el significado de *quasilibre* y la evolución de la entropía de von Neumann.

En las dispersiones inelásticas profundas (DIS) a la escala de Bjorken x con momento transferido $q^2 = -Q^2$ prueba parte de la función del protón y es útil para explorar en este estado la evolución de la entropía de entrelazamiento a el estado *quasilibre*.

Se han realizado estudios en un modelo *juguete* de (1+1) dimensional de evolución de QCD no-lineal, además de no-lineal (3+1). En las ecuaciones de evolución dimensionales se calcula la entropía de von Neumann de los partones $S(x)$ para una x y una Q^2 dados, que se mencionaron anteriormente.

De acuerdo a los resultados tomados de *Particle Data Group*, se obtuvo que la relación entre la entropía de von Neumann $S(x)$ y la distribución gluónica $xG(x)$ a la que se accede en la dispersión inelástica profunda se convierte en:

$$S(x) = \ln xG(x) \tag{4.2}$$

Lo que implica que los micro estados del sistema son igualmente equiprobables y la entropía es maximizada por la saturación partónica. La determinación de la entropía de entrelazamiento para datos fue recientemente hecha en la referencia [9].

Para las DIS (Dispersiones Inelásticas Profundas) en protones a bajo x a las energías correspondientes de DESY-HERA el resultado muestra que la entropía hadrónica S_h del estado inicial obedece la inequidad $S_h \leq S_{EE}(Y)$ cumpliendo la segunda ley de la termodinámica. Aunque por otro lado tenemos que:

$$S_{EE} = \ln(N_{gluon}) \tag{4.3}$$

donde se puede calcular el número de gluones por unidad de rapidez, después de la integración de la función de distribución partónica sobre una rapidez dada a un Q^2 fijo.

$$N_{gluon} = \int_{x_1}^{x_2} [xG(x, Q_s^2)/x] dx \tag{4.4}$$

$$S_{EE} = \ln(N_{gluon}) \tag{4.5}$$

Tomando $Q^2 = Q_s^2$:

$$S_{EE}(Q^2 = Q_s^2) = \ln[Q_s^2(x)] + S_0 \tag{4.6}$$

con $S_0 = \ln[3(e2)R_p^2/4e\pi\alpha_s] \simeq 2$ para $\alpha_s = 0,2$.

La sección eficaz elástica está dada como una integral de la sección eficaz diferencial de dispersión elástica.

$$\sigma_{elastic}(s) = \int_0^\infty d|t| \frac{d\sigma(s,t)}{dt} \quad (4.7)$$

$$\frac{d\sigma(s,t)}{dt} = \frac{1}{4\pi} |T_{elast}(s, \Delta)|^2, \quad (4.8)$$

$$\Delta = \sqrt{|t|} \quad (4.9)$$

El parámetro de la pendiente t-dependiente $B(s,t)$ está definido como:

$$B(s,t) = \frac{d}{dt} \ln \frac{d\sigma(s,t)}{dt} \quad (4.10)$$

y considerando:

$$B(s) \equiv B_0(s) = \lim_{t \rightarrow 0} B(s,t) \quad (4.11)$$

$$B(s,t) \approx -\pi^2 \beta \frac{s_0}{s} f^2(s) ds - \pi R_0^2 4\gamma \ln\left(\frac{s}{s_1} + O(S)\right) \quad (4.12)$$

Para la aproximación del pico de difracción, la sección eficaz diferencial y la sección eficaz elástica están dadas por:

$$\frac{d\sigma_{elastic}}{dt} = \frac{\sigma_{total}^2}{16\pi} e^{-B_{elastic}|t|} \quad (4.13)$$

$$\sigma_{elastic} = \int_0^\infty d|t| \frac{d\sigma_{elastic}}{dt} = \frac{\sigma_{total}^2}{16\pi B_{elastic}} \quad (4.14)$$

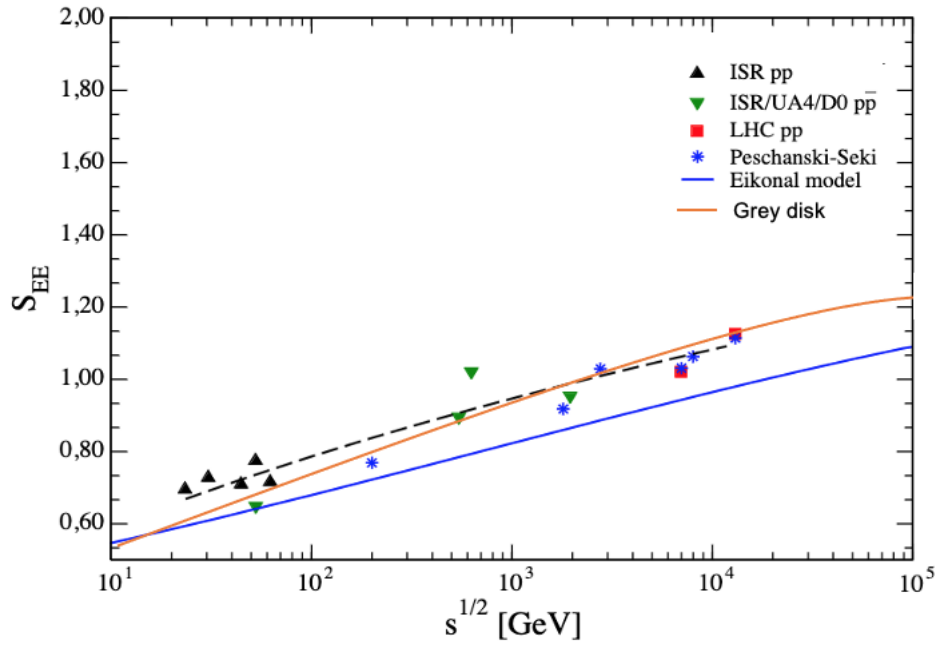
Y además, tenemos que en el Límite del Disco Negro:

$$S_{EE}(\sqrt{s} \rightarrow \infty) = 1 + \ln(2) \approx 1,693 \quad (4.15)$$

Así:

$$S_{EE} = f(s) + f(s)(2\ln 2 + \ln \frac{\sigma_{elastic}}{\sigma_{total}}) \quad (4.16)$$

Se obtiene la entropía de entrelazamiento correspondiente al modelo de disco gris como función de la energía en el centro de masa y se compara con los resultados del modelo Eikonal y el modelo de Peschanski Seki [10] y los valores extraídos de LHC y Tevatrón [9].



Capítulo 5

Conclusiones

Los resultados obtenidos de la entropía de entrelazamiento correspondiente al modelo de disco gris como función de la energía en el centro de masa son compatibles con los valores extraídos de LHC y Tevatrón[9] y están por arriba de la cota del modelo Eikonal y el modelo de Peschanki Seki [10]. Por lo tanto, esto nos dice que éste es un modelo que podría ser candidato para explicar la evolución de la entropía de entrelazamiento para la evolución partónica en DIS en pp.

Bibliografía

1. A. K. Chaudhuri, doi:10.1088/978-0-750-31060-4 arXiv:1207.7028 [nucl-th].
2. F. Herzog, B. Ruijl, T. Ueda, J. A. M. Vermaseren and A. Vogt, JHEP 1702 (2017) 090 doi:10.1007/JHEP02(2017)090 [arXiv:1701.01404 [hep-ph]].
3. Tomado de: https://en.wikipedia.org/wiki/Quark/media/File:Standard_Model_of_Elementary_Particles
4. M. Froissart, Phys. Rev. 123 (1961) 1053. doi:10.1103/PhysRev.123.1053
5. Armesto, N., Pajares, C. (2014). Quantum Chromodynamics. Lectures on Particle Physics, Astrophysics and Cosmology, 48–96. doi:10.1007/978-3-319-12238-0₂
6. R. Vogt, “Ultrarelativistic heavy-ion collisions”, (2007).
7. Greiner, W., Reinhart, J. Quantum Electrodynamics(2009) 4thEdition, Springer.
8. J. Dias de Deus, Nucl. Phys. B 59 (1973) 231. 1112.4704
9. G. S. Ramos and M. V. T. Machado. PhysRevD.102.034019
10. R. Peschanski and S. Seki, Phys. Rev. D 100, 076012 (2019).
11. G. Pancheri, D. A. Fagundes, A. Grau, S. Pacetti and Y. N. Srivastava [arXiv:1301.2925].
12. I. Bautista and J. Dias de Deus, Phys. Lett. B 718 (2013) 1571
13. C. Patrignani et al. (Particle Data Group), Chin. Phys. C, 40, 100001
14. D. A. Fagundes, M. J. Menon and P. V. R. G. Silva, J. Phys. G 40, 065005 (2013).
15. L. Frankfurt and M. Strikman, Czech. J. Phys. 56 (2006) A63.
16. I. P. Ivanov, N. N. Nikolaev and A. A. Savin, Phys. Part. Nucl. 37 (2006)
17. R. Conceicao, J. Dias de Deus and M. Pimenta, Nucl. Phys. A 888 (2012) 58
18. A. J. Buras and J. Dias de Deus, Nucl. Phys. B 71 (1974) 481.
19. Tomado de: https://www.physicsmasterclasses.org/exercises/keyhole/en/projects/running_alphas.html

20. V. Barone and E. Predazzi, “High-Energy Particle Diffraction”, 2002.

21. M. Tanabashi et al. [Particle Data Group], Phys. Rev. D 98 (2018) no.3, 030001. doi:10.1103/PhysRevD.98.030001