



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico
Matemáticas

PROBLEMA BIDIMENSIONAL DE
IDENTIFICACIÓN DE LA FRONTERA
DE CONTACTO ENTRE UN MEDIO
CONDUCTOR Y UN CONDUCTOR
IDEAL.

TESIS

Que para obtener el grado de:

Maestra en Ciencias Matemáticas

presenta:

Lic. Tishbe Pilarh Herrera Ramírez

Director de tesis:

Dr. Andrés Fraguela Collar

Puebla, Julio 2016



DR. JOSÉ ENRIQUE BARRADAS GUEVARA
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSTGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el(la) C:

TISHBE PILARH HERRERA RAMÍREZ

estudiante de la Maestría en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 30 de junio de 2016, con la tesis titulada:

Problema bidimensional de identificación de la frontera de contacto entre un medio conductor y un conductor ideal

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

ATENTAMENTE.
H. Puebla de Z. a 1 de julio de 2016


DR. FERNANBO MACÍAS ROMERO
COORDINADOR DEL POSTGRADO
EN MATEMÁTICAS.



Cop Archivo:
DR. BURGOS



Facultad de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 sur, edif. 111 A,
Ciudad Universitaria, Col. San
Hernán, Puebla, Pue., C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Dedicado a mi familia:

Mis papás:

María del Pilar Ramírez Juárez y José Alberto Herrera Escutia

Mis hermanos:

José Guillermo y Angel Alberto Herrera Ramírez

Mi compañero de vida:

Dagoberto Rodríguez Romero

Agradecimientos

A mi familia, mis papás y hermanos por siempre apoyar mis metas y acompañarme a culminarlas exitosamente. Ustedes son mi ejemplo y me dan la fuerza para seguir. Por ello estaré eternamente agradecida.

A Dago mi amigo y compañero de vida, por apoyar con paciencia y amor la culminación de esta meta. Juntos lograremos muchas más.

A mi asesor el Dr. Andrés Fraguela por permitirme trabajar bajo su tutela, compartirme sus conocimientos, y brindarme el apoyo necesario para desarrollar exitosamente este trabajo y durante cada momento en la maestría.

A quienes tomaron su tiempo para ayudarme a resolver dudas, revisar y corregir este trabajo.

A mi comité revisor y jurado el Dr. Alexandre Grebennikov, el M.C. Francisco Estrada y el Dr. Jacobo Oliveros, por sus observaciones para mejorar de este trabajo durante cada revisión y hasta el final de la misma. También al Dr. Julio Conde quien agregó valiosas correcciones para mejorarlo y obtener el resultado final.

A todos aquellos que acompañaron esta etapa de mi vida, esos amigos incondicionales que brindaron aliento, alegría, consejos y regaños. Gracias niñas, fisiconautas y mateloticos.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico brindado durante el periodo en que realicé mis estudios de Maestría.

Índice de figuras

1. Región acotada 2D: círculo con una inclusión.	2
2. Región no acotada 2D: semiplano con una inclusión.	2
3. Planteamiento del problema.	3
4. Sinopsis de las transformaciones requeridas para llevar una región rectangular de altura a , a una región circular que contiene en su interior una inclusión conductora ideal con una frontera irregular.	4
1. Descripción de la frontera de Ω_a .	7
1. Grafica del funcional f para un dato admisible y un dato con error.	31
2. Función B para un dato admisible y para una perturbación de él.	33
3. Función B y B' para g_1 y $\beta = \delta$.	34
4. Función B y B' para g_2 y $\beta = \delta$.	34
5. Comparación funcional f y B' para g_1 .	34
6. Comparación funcional f y B' para g_2 .	35
7. Solución del problema de contorno en un rectángulo de altura 10 y la solución para el problema de contorno en la banda.	37
8. Gráfica de la norma de la solución como función de la altura de la banda.	38

Índice general

Agradecimientos	VII
Índice de figuras	IX
Introducción	1
Capítulo 1. PLANTEAMIENTO OPERACIONAL DEL PROBLEMA DE IDENTIFICACIÓN	5
1. Problema de contorno	6
2. Formulación operacional del problema de identificación	11
Capítulo 2. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE IDENTIFICACIÓN PARA DATOS ADMISIBLES UTILIZANDO EL PLANTEAMIENTO OPERACIONAL	15
1. Unicidad del problema de identificación	15
2. Representación en Serie	17
Capítulo 3. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE IDENTIFICACIÓN PARA DATOS CON ERROR. UNA NUEVA ESTRATEGIA DE REGULARIZACIÓN.	25
1. Planteamiento del problema de identificación para datos con error	26
2. MÉTODOS DE REGULARIZACIÓN	26
Conclusiones	39
Apéndice A. Propiedades del espacio H^*	43
Apéndice B. Resultados utilizados	45
Bibliografía	49

Introducción

La investigación sobre métodos no invasivos de identificación de características desconocidas de un sistema al cual no se tiene acceso está generando un gran número de problemáticas a resolver. La modelación matemática, en particular la teoría general de problemas inversos constituye una base teórica para la realización de dichas investigaciones no destructivas. En las regiones conductoras eléctricas estos métodos permiten la visualización en su interior, sólo utilizando mediciones no invasivas de potencial y corriente en una parte accesible de la frontera.

La problemática de identificar en medios conductores regiones interiores a partir de mediciones en una parte de la frontera, puede formularse como un problema con condiciones de frontera para la ecuación de Laplace y de la cual se pueden distinguir tres tipos de problemas según sus condiciones de contorno: dos de ellos corresponden a determinar una inclusión desconocida¹, ya sea de un conductor ideal o de un aislante ideal, los que se modelan como problemas con condiciones en el contorno de Dirichlet y Neumann respectivamente; mientras que el tercer problema, correspondiente a una inclusión que tiene una conductividad diferente de la conductividad del medio circundante y que conduce a un problema inverso de transmisión (como el Problema de Calderón).

La importancia del planteamiento de los problemas para identificar inclusiones surgen en las ciencias aplicadas por ejemplo: en Neurociencias se desea determinar en el cerebro anomalías eléctricas, como calcificaciones a partir de mediciones electroencefalográficas. En Geofísica si se envía una onda eléctrica desde la superficie de la tierra y se recolectan mediciones sobre la superficie para varias posiciones, el problema es identificar la estructura del subsuelo

¹subregión que se desea encontrar y que se encuentra incluida en una región

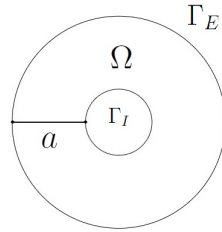


FIGURA 1. Región acotada 2D: círculo con una inclusión.

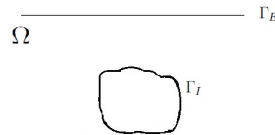


FIGURA 2. Región no acotada 2D: semiplano con una inclusión.

o determinar la superficie donde aparece un yacimiento de metales.

En las aplicaciones para identificar una inclusión desconocida en un medio conductor, las mediciones que caracterizan el sistema se pueden obtener aplicando una corriente en el medio y midiendo el potencial resultante. Cabe mencionar, que es posible hacer una equivalencia de dichos problemas para geometrías más simples como una esfera (cerebro) y un semiespacio (suelo) que simplifiquen su modelación matemática; sin embargo con el objeto de simplificar aun más los problemas de identificación antes dichos, por analogía se plantean problemas en dos dimensiones, pues para resolverlos se pueden usar métodos conocidos fundamentalmente de la variable compleja. Los nuevos plantemientos consisten en:

a) Identificar en una región circular la frontera de una inclusión circular, no necesariamente concéntrica, de un conductor o aislante ideal. (ver Figura 1).

b) Identificar en un semiplano la frontera de una inclusión de un conductor o un aislante ideal. (ver Figura 2).

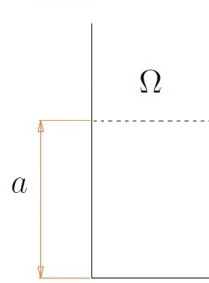


FIGURA 3. Planteamiento del problema.

De lo antes mencionado nos interesa resolver dos tipos de problemáticas; una es recuperar el valor de la corriente esperada en la región desconocida ([1], [5],[10]) y determinar la frontera de la inclusión ([5],[12], [13]). En [13] se demuestra además que dados los datos en la frontera, la inclusión es única.

En el presente trabajo se plantea un problema más simple para dar la solución a los problemas de identificación generales en dos dimensiones.

El planteamiento principal consiste en: dada una semibanda compuesta hasta una cierta altura a por un medio conductor con alguna conductividad finita (Figura 3) y a partir dicha altura la banda se comporta como un conductor ideal, se desea determinar dicha altura conociendo los datos de potencial y corriente en la base de la banda; reduciendo así, el problema de identificar de la frontera interior al problema de determinar la altura de una sección transversal que hace contacto con el conductor ideal.

El problema de identificación se formula como un problema de Cauchy ([6], [18]), el cual se sabe es mal planteado; por lo que se requiere definir una estrategia de regularización ([14]) para dar un algoritmo efectivo y localizar la altura teniendo en cuenta los errores de mediciones en la base. La importancia del presente trabajo es determinar las características que debe cumplir el dato de Cauchy que asegure la existencia de la solución al problema de identificación pues a partir de ellos se desarrolla una estrategia

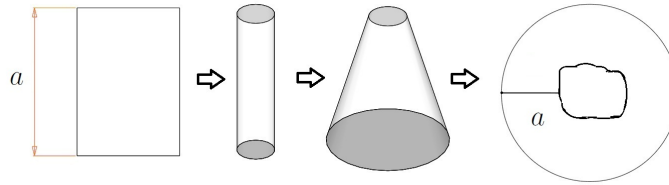


FIGURA 4. Sinopsis de las transformaciones requeridas para llevar una región rectangular de altura a , a una región circular que contiene en su interior una inclusión conductora ideal con una frontera irregular.

novedosa de regularización.

Como el presente trabajo pretende establecer las bases para resolver el problema de identificación de la la frontera interior que corresponde a un conductor ideal en un círculo; impondremos a la semibanda condiciones de periodicidad en los costados laterales, tales que al “cerrarla” formando un cilindro, éste tenga una conductividad homogénea a cualquier altura.

Realizando lo anterior, surge un nuevo problema que consiste en determinar la altura a la que la tapa del cilindro represente un conductor ideal, que corresponde a la sección transversal en el rectángulo de altura a , en donde se anula su potencial; transformando el cilindro en un cono truncado y que al proyectar su tapa sobre la base del cono, se genere en el círculo una región interior correspondiente a un conductor ideal; pues, la sección transversal con potencial nulo en el rectángulo será la frontera de dicha inclusión. (ver Figura 4)

Por último, se determinará la altura en la banda a partir de la cual existe un conductor ideal que permita caracterizar la frontera con un conductor ideal en el interior del círculo.

PLANTEAMIENTO OPERACIONAL DEL PROBLEMA DE IDENTIFICACIÓN

Dada una banda conductora en la que no existen fuentes que modifiquen su conductividad y que cumple con ciertas condiciones de periodicidad en los costados laterales, supondremos que existe una altura a partir de la cual la banda se comporta como un conductor ideal (Figura 3). El problema de identificación a resolver en el presente trabajo consiste en determinar dicha altura a partir de mediciones de potencial y corriente en la base de la misma.

Si aplicamos una corriente en la base de la banda, se generará en una subregión acotada (un rectángulo) un potencial eléctrico que deseamos se anule a alguna altura. Este potencial en la región rectangular, se comportará como la solución a un problema de tipo Cauchy para la ecuación de Laplace, donde los datos de Cauchy corresponden a la medición en la base, del potencial y la corriente. Esto es: para el rectángulo en el que se asumen dos condiciones de periodicidad, la corriente aplicada a la base da una condición de Neumann, en la cara superior del rectángulo el potencial nulo genera una condición de Dirichlet y la medición en la base del potencial, que se recupera del sistema al aplicar la corriente, da una condición de Dirichlet adicional al problema.

Todo problema de Cauchy con lleva un mal planteamiento inherente de la definición debido al sobrecondicionamiento del mismo, por ello es importante caracterizar cuándo existe solución al problema descrito antes; es decir, cuándo para datos de potencial y corriente en la base de la banda, el potencial (la solución del problema) existe y se extiende hasta alguna altura dada donde se anula.

Para resolver el problema, vamos a suponer que para mediciones de potencial y corriente en la base, estas son suficientes para determinar la altura donde la banda anula su potencial. En este capítulo daremos las características que deben cumplir los datos de Cauchy cuando es posible dar solución al problema de identificación.

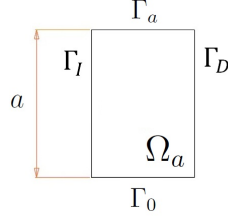
Esto se formulará con un planteamiento operacional que sea equivalente al problema de frontera y que nos permitirá dar una relación funcional de los datos para los cuales existe solución al problema de identificación de la altura donde se anula el potencial.

Siguiendo la idea de [10] para la Formulación Operacional se plantea un problema de contorno sobre el rectángulo con las condiciones de frontera antes mencionadas. En base a la teoría desarrollada en [17] para operadores elípticos se construye la solución en sentido débil del problema de contorno y se demuestra su existencia y unicidad. Después de ello se dará un operador que relacione el dato de Neumann en la base con el potencial en toda la región. Puesto que es de interés que dicho potencial coincida en la base con la medición del potencial (el dato de Dirichlet), se agregará una condición extra que caracterice en forma operacional una relación entre los datos de Cauchy para los que existe solución de este problema.

Al finalizar este capítulo se describen los datos de potencial y corriente para los que es posible reproducir un potencial nulo a cierta altura. Estos datos son los que llamaremos *datos admisibles* que en este trabajo serán útiles pues entorno a ellos se plantean los métodos de regularización para resolver el problema de identificación.

1. Problema de contorno

El trabajo central de este capítulo es determinar las características que deben satisfacer los datos de Cauchy, para que exista la solución al problema de identificación. Suponiendo que existe una altura desde la cual la banda se comportará como un conductor ideal se plantea el siguiente problema de contorno auxiliar, que

FIGURA 1. Descripción de la frontera de Ω_a .

tomará la corriente aplicada en la base de la región como una condición de Neumann, además de las condiciones de periodicidad en los costados.

Para $a > 0$ se define la región rectangular $\Omega_a := (0, 1) \times (0, a)$ (ver Figura 1); cuya frontera se descompone en $\Gamma_0 := (0, 1) \times \{0\}$, $\Gamma_I := \{0\} \times (0, a)$, $\Gamma_D := \{1\} \times (0, a)$, y $\Gamma_a := (0, 1) \times \{a\}$; donde se cumple:

- (1) $\Delta u = 0$ en Ω_a ,
- (2) $u(0, y) = u(1, y) \quad y \in [0, a]$,
- (3) $u_x(0, y) = u_x(1, y) \quad y \in [0, a]$,
- (4) $u(x, a) = 0$ en Γ_a ,
- (5) $u_y(x, 0) = \psi(x)$ en Γ_0 ,

En el desarrollo de este trabajo u representa el potencial en ahora la región acotada Ω_a . Las condiciones (2)-(5) se entienden en el sentido de trazas a $\partial\Omega_a$, en adelante se entenderá esta notación como la traza de u en la base, tapa o costados según corresponda. Las condiciones (2) y (3) son las condiciones de periodicidad antes mencionadas.

Para hacer una equivalencia de dicho problema a su forma operacional es de interés construir la solución débil del mismo. Para ello suponemos que existe u , solución clásica del problema de contorno (1)-(5) si $v \in C_1(\overline{\Omega_a})$, entonces, por la Fórmula de Green de la divergencia sobre Ω_a tenemos:

$$(6) \quad \int_{\Omega_a} \Delta u v + \int_{\Omega_a} \nabla u \nabla v = \int_{\Omega_a} \operatorname{div}(v \nabla u),$$

pero u verifica (1), por lo que (6) se reescribe como

$$(7) \quad \int_{\Omega_a} \nabla u \nabla v = \int_{\partial\Omega_a} v \frac{\partial u}{\partial \eta} ds.$$

donde η denota la normal exterior unitaria a $\partial\Gamma$ y $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u \cdot \eta$ es la derivada normal. Desarrollando la integral sobre la frontera como una integral sobre la longitud de arco para α una parametrización de $\partial\Omega_a$, recorrida en el sentido de las manecillas del reloj¹, definida como sigue:

$$(8) \quad \alpha : (0, 2 + 2a) \rightarrow \partial\Omega_a$$

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_{\Gamma_0} = (1 - t, 0), & t \in [0, 1]; \\ \alpha_{\Gamma_I} = (0, t - 1), & t \in [1, 1 + a]; \\ \alpha_{\Gamma_a} = (t - 1 + a, 0), & t \in [1 + a, 2 + a]; \\ \alpha_{\Gamma_D} = (1, 2a + a - t), & t \in [2 + a, 2 + 2a]. \end{cases}$$

tenemos

$$\int_{\partial\Omega_a} v \frac{\partial u}{\partial \eta} ds = - \int_0^1 v(x, 0) u_y(x, 0) dx - \int_0^a v(0, y) u_x(0, y) dy$$

$$+ \int_0^1 v(x, a) u_y(x, a) dx + \int_0^a v(1, y) u_x(1, y) dy$$

y como u cumple las condiciones de periodicidad (2)- (3) en los costados de Ω_a y la condición de Neumann en la base (5), tenemos que para todo $v \in C_1(\overline{\Omega_a})$ (7) queda dada por:

$$(9) \quad \int \int_{\Omega_a} \nabla u \nabla v dx dy = - \int_0^1 \psi(x) v(x, 0) dx$$

$$+ \int_0^a u_x(0, y) (v(1, y) - v(0, y)) dy$$

$$+ \int_0^1 v(x, a) u_y(x, a) dx.$$

Como $C_1(\overline{\Omega_a})$ es denso en $H^1(\Omega_a)$ la ecuación (9) se cumple para todo $v \in H^1(\Omega_a)$. Siguiendo la idea de [17] para la construcción

¹según la regla de la mano derecha al recorrer las curvas en este sentido el pulgar apunta hacia la dirección de la normal exterior a la frontera de Ω_a

de soluciones débiles deseamos hacer un planteamiento donde las condiciones de frontera esten de forma implícita en el espacio de las funciones de prueba y la integral que representa la solución. Así definimos el espacio de Hilbert $H^*(\Omega_a)$ como espacio de las funciones en $H^1(\Omega_a)$ tales que cumplen en el sentido de trazas (3) y (4), y en virtud que se cumple la desigualdad de Poincaré ¹(B.3) H^* tiene por producto interior a $\langle u, v \rangle_{H^*} = \langle \nabla u, \nabla v \rangle$. Con dichas condiciones sobre el espacio de las funciones de prueba se tiene la siguiente definición:

DEFINICIÓN 1.1. *La función $u_a \in H^*(\Omega_a)$, se dice que es solución débil del problema de contorno (1)-(5), si para cada $v \in H^*(\Omega_a)$ se cumple que:*

$$(10) \quad \int_{\Omega_a} \nabla u \nabla v dx dy = - \int_0^1 \psi(x) v(x, 0) dx.$$

Por simplicidad denotaremos u_a solución débil del problema (1)-(5) en Ω_a .

TEOREMA 1.1. *Para $\psi \in L_2(\Gamma_0)$, y cada $a > 0$, existe una única u_a en $H^*(\Omega_a)$ que es solución débil del problema (1)-(5). Además se verifica la existencia de $K > 0$ que depende de a tal que*

$$(11) \quad \| u \|_{H^*(\Omega_a)} \leq K \| \psi \|_{L_2(\Gamma_0)} .$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\psi \in L_2(\Gamma_0)$, llamaremos $\ell_\psi(v)$ al funcional lineal de $H^*(\Omega_a)$ a \mathbb{R} definido por:

$$\ell_\psi(v) = - \int_0^1 \psi(x) v(x, 0) dx = \langle \psi(x), v(x, 0) \rangle_{L_2(\Gamma_0)},$$

el cual es acotado en $H^*(\Omega_a)$, pues por la desigualdad de Hölder, el Teorema 3 ([17], MIJAILOV, pág. 237) y la Desigualdad de Poincaré B.3, tenemos que:

$$\begin{aligned} |\ell_\psi(v)| &\leq \| \psi \|_{L_2(0,1)} \| v \|_{L_2(0,1)} \\ &\leq \| \psi \|_{L_2(0,1)} \| v \|_{H^1(\Omega_a)} \\ &\leq \| \psi \|_{L_2(0,1)} K \| v \|_{H^*(\Omega_a)}, \end{aligned}$$

¹por B.1 la desigualdad de Poincaré se cumple en H^* pues la única constante en el espacio es el cero (ver A.1).

así

$$(12) \quad |\ell_\psi(v)| \leq K \|\psi\|_{L_2(0,1)}.$$

Aplicando el Teorema de Riesz al funcional $\ell_\psi(v)$, este funcional se representa de forma única en $H^*(\Omega_a)$, es decir, existe un único $u \in H^*(\Omega_a)$, tal que:

$$(13) \quad \langle u, v \rangle_{H^*(\Omega_a)} = \ell_\psi(v) \quad \text{para cada } v \in H^*(\Omega_a)$$

de (13) es inmediato que u es solución débil del problema contorno (1)-(5). Notemos que de (13) y (12) se tiene (11) ■

OBSERVACIÓN 1.1. *El Teorema 1.1 nos dice que u , solución del problema (1)-(5), depende continuamente de ψ .*

LEMA 1.1. *Si $\Lambda_a : L_2(\Gamma_0) \rightarrow H^*(\Omega_a)$*

$$\Lambda_a \psi = u_a,$$

es el operador que hace corresponder a cada ψ con u_a solución débil de (1)-(5) en Ω_a , entonces Λ_a es lineal y continuo.

DEMOSTRACIÓN. Para $\psi \in L_2(\Gamma_0)$, por el Teorema 1.1 tenemos que existe un único $u \in H^*(\Omega_a)$ tal que

$$(14) \quad \langle u, v \rangle_{H^*(\Omega_a)} = - \langle \psi, v \rangle_{L_2(\Gamma_0)}.$$

Así Λ_a está bien definido; de (14) se verifica que Λ_a es lineal pues

$$\begin{aligned} \langle \beta\psi_1 + \gamma\psi_2, v \rangle_{L_2(\Gamma_0)} &= \beta \langle \psi_1, v \rangle_{L_2(\Gamma_0)} + \gamma \langle \psi_2, v \rangle_{L_2(\Gamma_0)} \\ &= \langle u_1, v \rangle_{H^*(\Omega_a)} + \langle u_2, v \rangle_{H^*(\Omega_a)} = \langle u_1 + u_2, v \rangle_{H^*(\Omega_a)}; \end{aligned}$$

ahora veamos que Λ_a es un operador acotado de $L_2(\Gamma_0)$ en $H^*(\Omega_a)$, en efecto, por el Teorema 1.1 tenemos que

$$|\Lambda_a \psi| = \|u\|_{H^*(\Omega_a)} \leq K \|\psi\|_{L_2(\Gamma_0)}.$$

Donde K es la constante de la Desigualdad de Pioncaré que se cumple en $H^*(\Omega_a)$ por lo tanto Λ_a es continuo de $L_2(\Gamma_0)$ en $H^*(\Omega_a)$ y (14) queda dado por:

$$\langle \Lambda \psi, v \rangle_{H^*(\Omega_a)} = - \langle \psi, v \rangle_{L_2(\Gamma_0)} \cdot \blacksquare$$

Luego la solución del problema de contorno está dada por la ecuación operacional

$$(15) \quad \Lambda_a \psi = u_a,$$

donde Λ_a es el operador continuo que a cada $\psi \in L_2(\Gamma_0)$ lo envía a la solución del problema (1)-(5).

2. Formulación operacional del problema de identificación

Recordemos que resulta importante caracterizar cuando existe solución del problema de identificación, para ello, deseamos que la traza de la solución al problema de contorno (1)-(5) coincida con el dato de Dirichlet. Agregando esta condición tenemos:

Dado $(\varphi, \psi) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0) \times L_2(\Gamma_0)$ se desea determinar, si existe, $a^\dagger > 0$ tal que la solución u del problema de contorno (1)-(5) en Ω_a con $a = a^\dagger$ exista y además cumpla

$$(16) \quad u(x, 0) = \varphi(x) \text{ en } \Gamma_0.$$

DEFINICIÓN 1.2. *Si existe $a^\dagger > 0$ tal que cumple las condiciones dadas arriba, se dice que a^\dagger es la solución débil del **problema de identificación** caracterizado por (1)-(5) y (16).*

En esta sección deseamos encontrar los datos para los cuales es posible determinar a^\dagger solución del problema identificación caracterizado por (1)-(5) y (16). En este sentido daremos en términos de la altura, donde el potencial se anula, la relación que deben guardar los datos (φ, ψ) para los que sabemos que existe dicha altura. La relación que se desea encontrar será en términos la formulación operacional de la solución del problema de contorno (1)-(5). Para ello, definimos el operador

$$T_a : L_2(\Gamma_0) \times L_2(\Gamma_0)$$

$$(17) \quad T_a(\psi) := \Lambda_a \psi|_{\Gamma_0},$$

es decir, T_a ponen correspondencia a cada $\psi \in L_2(\Gamma_0)$ con la traza en Γ_0 de la solución débil del problema de contorno (1)-(5).

OBSERVACIÓN 1.2. T_a es un operador lineal y compacto de $L_2(\Gamma_0)$ en $L_2(\Gamma_0)$. En efecto, pues T_a es la composición de un operador continuo y el operador de traza que es compacto. Además T_a es lineal por la linealidad de Λ_a y del operador traza.

LEMA 1.2. T_a es un operador inyectivo y autoadjunto.

DEMOSTRACIÓN. Sustituyendo v por u en la definición de solución débil (1.1) se cumple:

$$(18) \quad \|\nabla u\|^2 = - \int_0^1 \psi T_a(\psi).$$

Ahora si $T_a(\psi) = 0$, entonces por definición de $\Gamma_a \psi \in H^*(\Omega_a)$ luego

$$\|\nabla u\|^2 = \int_{\Omega_a} \nabla u \nabla v d(x, y) = \text{int}_{\Gamma_0} \psi T_a \psi = 0$$

y finalmente

$$\|\nabla u\|^2 = 0,$$

por lo tanto $\psi = 0$ y el $\text{Ker}(T_a) = 0$ y T_a es inyectivo.

Como T_a está definido de $L_2(\Gamma_0)$ en $L_2(\Gamma_0)$ para verificar que es autoadjunto bastará con demostrar que es simétrico. Para ψ_1 y ψ_2 en $L_2(\Gamma_0)$, existen u_1 , y u_2 en $H^*(\Gamma_0)$ tal que $\Lambda \psi_1 = u_1$ y $\Lambda \psi_2 = u_2$, luego por la Definición 1.1 se tienen las siguientes identidades:

$$\int_{\Omega_a} \nabla u_1 \nabla u_2 = - \int_0^1 \psi_1 u_2|_{\Gamma_0} \quad \text{y} \quad \int_{\Omega_a} \nabla u_2 \nabla u_1 = - \int_0^1 \psi_2 u_1|_{\Gamma_0}$$

veamos que $T_a(\psi_1) = u_1|_{\Gamma_0}$ y $T_a(\psi_2) = u_2|_{\Gamma_0}$ entonces

$$\int_0^1 \psi_1 T_a(\psi_2) = \int_0^1 \psi_2 T_a(\psi_1)$$

por lo tanto T_a es autoadjunto. ■

Veamos que la definición de T_a permite caracterizar la solución del problema de identificación.

TEOREMA 1.2. Dado $(\varphi, \psi) \in L_2(\Gamma_0) \times L_2(\Gamma_0)$, existe solución débil a^\dagger del problema de identificación caracterizado por (1)-(5) y (16), si y sólo si $(\varphi, \psi, a^\dagger)$ satisface la ecuación operacional

$$(19) \quad T_{a^\dagger} \psi = \varphi,$$

para T_a definido en (17).

DEMOSTRACIÓN. Para la condición de necesidad sabemos que para a^\dagger la solución del problema de indentificación y dado $\psi \in L_2(\Gamma_0)$ existe u_{a^\dagger} que corresponde a la solución del problema (1)-(5) esto es, se cumple que $\Lambda_a \psi = u_{a^\dagger}$ para $\Lambda_a = \Lambda_{a^\dagger}$ por otro lado como $u_{a^\dagger}|_{\Gamma_0} = \varphi$ entonces por definición de T_{a^\dagger} se tiene (19).

Ahora, para la suficiencia tenemos (ψ, φ) tales que se cumple (19), se satisface:

$$\int_{\Gamma_0} \varphi g = \int_{\Gamma_0} T_a \psi g \quad \text{para cada } g \in L_2(\Gamma_0)$$

luego recurriendo a la Fórmula de integración por partes

$$\int_{\Gamma_0} \varphi g = \int_{\Omega_a} \nabla \Lambda \psi \nabla g \quad \text{para cada } g \in L_2(\Gamma_0)$$

por la definición de solución débil (Definición 1.1), tenemos

$$\int_{\Omega_a} \nabla \Lambda \psi \nabla g = \int_{\Gamma_0} u|_{\Gamma_0} g \quad \text{para cada } g \in L_2(\Gamma_0),$$

por lo tanto, podemos concluir que

$$\int_{\Omega_a} (u|_{\Gamma_0} - \varphi) g = 0 \quad \text{para cada } g \in L_2(\Gamma_0),$$

esto es,

$$u|_{\Gamma_0} = \varphi,$$

es decir u es solución de (1)-(5) .■

DEFINICIÓN 1.3. Se denota a M_a al grafo de T_a , definido en (17), es decir,

$$M_a := \{(\varphi, \psi) \in H_{\frac{1}{2}}(\Gamma_0) \times L_2(\Gamma_0) : T_a \psi = \varphi\},$$

y son todos los pares de Cauchy para los cuales existe la solución u_a del problema de contorno (1)-(5) en Ω_a , donde u_a estará dada por $\Lambda_a \psi = u_a$ y es tal que

$$u_a(x, 0) = \varphi.$$

Dada la definición anterior introducimos **la clase de datos admisibles** como el conjunto de datos (φ, ψ) para los cuales existe solución del problema de identificación caracterizado por (1)-(5) y (16) esto es:

DEFINICIÓN 1.4. *El conjunto de datos admisiblesse define como el conjunto de los pares (φ, ψ) en \mathfrak{M} donde*

$$(20) \quad \mathfrak{M} := \bigcup_a M_a = \bigcup_a \{(\varphi, \psi) \in L_2(\Gamma_0) \times L_2(\Gamma_0) : T_a \psi = \varphi\},$$

para el operador T_a definido en (17).

El conjunto de *datos admisibles* importante para el objetivo central de este trabajo, pues a partir de él, se desarrolla una nueva metodología para generar un algoritmo de regularización, que permita, a partir de mediciones cualesquiera en la base de la banda, dar solución al problema de identificación de la altura donde se anula el potencial. En este capítulo se vio que para *datos admisibles* existe solución al problema de identificación. Vimos además que para que exista solución, las mediciones de potencial y corriente en la base de la región deben estar relacionadas a través del operador T_a para algún $a > 0$.

Con todo lo anterior surgen las siguientes preguntas ¿Es posible dar el valor exacto de la(s) solución(es) al problema de identificación para *datos admisibles*?, ¿La solución del problema de identificación es única?, ¿Es posible determinar la solución para mediciones que no corresponden a *datos admisibles*?. Estas respuestas se resolverán en los siguientes capítulos.

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE IDENTIFICACIÓN PARA DATOS ADMISIBLES UTILIZANDO EL PLANTEAMIENTO OPERACIONAL

Para el problema de Cauchy en una semibanda conductora con condiciones de periodicidad en las paredes laterales; son *datos admisibles*, los datos en la base tales que, se puede reproducir un potencial nulo a alguna altura a . Por definición los *datos admisibles* cumplen una relación operacional que tiene de forma implícita el valor de a , la solución al problema de identificación. Ahora que sabemos cuando existe solución al problema de identificación es de interés determinar su unicidad y la solución explícita.

En este capítulo después de demostrar la unicidad de la solución se demuestra que la solución del problema de contorno (1)-(5) se puede descomponer en forma de serie, de la misma manera se descompone el operador T_a que relaciona el dato de Neumann y el dato de Dirichlet para *datos admisibles*. Con ello caracterizar en terminos de los coeficientes de Fourier la relación que deben satisfacer los datos de Cauchy para que exista solución al problema de identificación. Para finalizar se determina el valor de la altura en el rectángulo a la que se anula el potencial para *datos admisibles*.

1. Unicidad del problema de identificación

LEMA 2.1. *Dado un dato admisible no nulo $(\varphi, \psi) \in H^{\frac{1}{2}} \times L_2(\Gamma_0)$, existe un único $a > 0$ de forma que (φ, ψ) pertenece al grafo del operador T_a .*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\Omega_{a_i} = (0, 1) \times (0, a_i)$, supongamos que existen $a_1 > 0$ y $a_2 > 0$ tales que la intersección de los grafos de T_{a_1} y T_{a_2} es no trivial; es decir, existe un dato admisible (φ, ψ) no nulo tal que $T_{a_1}\psi = \varphi = T_{a_2}\psi$, sin pérdida de generalidad

tomemos $a_2 > a_1$ luego, existen u_{a_1} y u_{a_2} soluciones débiles del problema de contorno (1)-(5). Así u_{a_1} y u_{a_2} cumplen (10) y debido a que la solución débil es única tenemos

$$(21) \quad \int_{\Omega_{a_1}} \nabla(u_{a_1} - u_{a_2}) \nabla v = 0 \quad \text{para todo } v \in H^*(\Omega_{a_1}).$$

La ecuación (21) establece que u_{a_2} es una extensión de u_{a_1} ; es decir

$$(22) \quad u_{a_2} = \tilde{u}_{a_1} + u_2.$$

donde

$$\tilde{u}_{a_1}(x, y) := \begin{cases} u_{a_1}(x, y) & \text{si } a \in y \in (0, a_1) \vee (x, y) \in \Omega_{a_1}, \\ 0 & \text{si } a \in y \in (a_1, \infty) \vee (x, y) \in \Omega_{a_2} \setminus \Omega_{a_1}, \end{cases}$$

y

$$u_2(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{si } a \in y \in (0, a_1) \vee (x, y) \in \Omega_{a_1}, \\ u_{a_2}(x, y) & \text{si } a \in y \in (a_1, \infty) \vee (x, y) \in \Omega_{a_2} \setminus \Omega_{a_1}, \end{cases}$$

entonces se cumple:

$$(23) \quad \|\nabla u_{a_2}\|^2 - \|\nabla \tilde{u}_{a_1}\|^2 = \|\nabla u_2\|^2,$$

pero por (18) el lado izquierdo de (23) se anula, pues

$$(24) \quad \|\nabla u_{a_2}\|^2 = \int_{\Gamma_0} T_{a_2} \psi \varphi dx = \int_{\Gamma_0} T_{a_1} \psi \varphi dx = \|\nabla u_{a_1}\|^2.$$

Así (24) implica que $u_{a_2} = \tilde{u}_{a_1}$, y puesto que u_{a_2} es armónica en sentido clásico ([17], pág. 250), por el Lema B.2 en u_{a_2} es analítica, así, $u_{a_2} = 0$. pues tiene un conjunto no numerable de ceros, entonces $u_{a_2} = 0$. Luego, por (18) se debe cumplir que $\psi = 0 = \varphi$; sin embargo, partimos de que eso no sucedía, por lo tanto $a_1 = a_2$ ■

El Lema 2.1 asegura que la intersección de los M_a es el par $(0, 0)$ y con ello se asegura la unicidad de la solución al problema de identificación para un dato admisible.

2. Representación en Serie

Sea Ω_a como el capítulo anterior, definimos $\Gamma_y := \{(x, y) : x \in (0, 1)\}$ para cada $y \in (0, a)$. Vemos que si $u \in H^1(\Omega_a)$, entonces $u|_{\Gamma_y}$ es una función en $L_2(\Gamma_y)$, por lo tanto para $\{v_k\}$ un sistema ortonormal de $L_2(\Gamma_y)$ existen $\{w_n(y)\}$ Coeficientes de Fourier tales que:

$$(25) \quad u|_{\Gamma_y} = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(y)v_k, \quad w_k(y) = \int_0^1 u|_{\Gamma_y} v_k dx.$$

LEMA 2.2. Si $u \in H^1(\Omega_a)$, entonces los w_k definidos en (25) pertenecen a $L_2(0, a)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $u \in C_0^\infty(\Omega_a)$, u^2 verifica el Teorema de Fubini ([17], MIJAILOV, pág.66) entonces:

$$\begin{aligned} \int \int_{\Omega_a} u^2 dx dy &= \int_0^a \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} w_k v_k \right)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^a w_j w_i \int_0^1 v_i v_j \right) \\ &= \int_0^a \sum_{k=1}^{\infty} w_j^2 \\ &\geq \int_0^a (w_j)^2 dy, \end{aligned}$$

por lo tanto, para $u \in H^1(\Omega_a)$, $\int_{\Omega_a} u^2$ existe, luego $w_k \in L_2(0, a)$, y por la densidad de $C_0^\infty(\Omega_a)$ en $L_2(\Omega_a)$ se tiene el resultado. ■

LEMA 2.3. Si $u \in H^2(\Omega_a) \cap H^*(\Omega_a)$, entonces los w_k definidos en (25) pertenecen a $H^1(0, a)$,

$$\frac{du}{dy}|_{\Gamma_y} = \frac{dw_k}{dy}.$$

DEMOSTRACIÓN. Si $u \in H^2(\Omega_a)$ entonces $\frac{du}{dy} \in H^1(\Omega_a)$ y, por el Lema 2.2, existen $\zeta_n \in L_2[0, a]$ tales que

$$\frac{du}{dy}|_{\Gamma_y} = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k v_k.$$

Sabemos por definición de la derivada en sentido de sobolev como $v \in H^*(\Omega_a) \cap \{v : v|_{\Gamma_y} = 0\}$ se cumple:

$$\int_{\Omega_a} u \frac{dv}{dy} = - \int_{\Omega_a} \frac{du}{dy} v,$$

luego, si tomamos $v = \zeta v_j$ para $j \in \mathbb{N}$, $\zeta \in C_0^\infty(0, a)$, y $u \in H^*(\Omega_a)$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_a} u v dx dy &= \int_0^h \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} (w_k v_k) \zeta v_j dx dy = - \int_0^a \int_0^1 \frac{du}{dy} \zeta v_j dx dy \\ \int_0^a \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} (w_k v_k) \zeta v_j dx dy &= - \int_0^a \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} (\zeta_k v_k) \zeta v_j \\ \int_0^a w_j \frac{\partial \zeta}{\partial y} &= \int_0^a \zeta_j \zeta \quad \text{para cada } \zeta \in C_0^\infty(0, a). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \zeta_j$$

en el sentido generalizado, luego $w_k \in H^1(0, a)$. ■

LEMA 2.4. *Toda función generalizada propia del operador de Laplace en algún intervalo $(0, a)$ es una función propia en el sentido clásico.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $w \in H^1(0, a)$ una función propia generalizada del operador $\frac{d^2}{dy^2}$ para λ , luego

$$\int_0^a \frac{dw}{dy} \frac{dv}{dy} dy = -\lambda^2 \int_0^a w v, \quad \text{para cada } v \in H_0^1(0, a).$$

Si $g = \lambda^2 w$ y $h = \frac{dw}{dy}$

$$\int h \frac{dv}{dy} = - \int g v \quad \text{para cada } v \in H_0^1(0, a).$$

Por la definición de derivada en el sentido de sobolev, entonces $w \in H^2(0, a)$ y se tiene que

$$\frac{d^2 w}{dy^2} = \frac{dh}{dy} = g = \lambda^2 w$$

siempre que v cumpla la condición de que $\frac{dv}{dy} = v$. Esto nos dice que v es múltiplo de funciones exponenciales. Entonces w es una

función propia en el sentido clásico del operador $\frac{d^2}{dy^2}$. ■

OBSERVACIÓN 2.1. *Se sabe que*

$$(26) \quad \{v_k = \sqrt{2}\cos(\lambda_k x), v_{-k}\sqrt{2}\sen(\lambda_{-k}x)\} \quad \text{para cada } k > 0 \in \mathbb{N}$$

es una sistema ortonormal de $L_2(\Gamma_0)$ formada con funciones propias del operador $-\frac{d^2}{dx^2}$ para un problema de contorno sobre la región Γ_0 que cumple condiciones de periodicidad en Γ_I y Γ_D para $\lambda_k = 2k\pi$.

TEOREMA 2.1. *Dados $\psi \in L_2(\Gamma_0)$, y $u \in H^*(\Omega_a)$ la solución débil del problema contorno (1)-(5), u es de la forma*

$$(27) \quad u(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\psi_n \senh(\lambda_n(a-y))}{\lambda_n \cosh(a\lambda_n)} \right) v_n(x),$$

donde $\{\psi_n\}$ son los coeficientes de Fourier de ψ en el sistema (26)

DEMOSTRACIÓN. Si u es solución débil del problema contorno entonces está en $H^1(\Omega_a)$, por el Lema 2.3 se tiene que

$$u(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(y) v_n(y)$$

y además cumple (10) para cada $v \in C_0^\infty(\Omega_a)$, así

$$\int_{\Omega_a} \nabla \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(y) v_n(x) \right) \nabla v(x, y) = 0,$$

en particular $v = wv_j$ para $w \in C_0^\infty(\Omega_a)$

$$\int_{\Omega_a} \nabla \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n v_n \right) \nabla (wv_j) = 0,$$

entonces

$$0 = \int_{\Omega_a} \nabla \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n v_n \right) \nabla (wv_j) = \int_{\Omega_a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\nabla v_n v_n) \nabla w v_j$$

$$\int_{\nabla} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\nabla(c_n v_n) \nabla(wv_j)) = \int_{\Omega_a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\nabla c_n \nabla w (v_k v_j) + (c_n w) \nabla v_n \nabla v_j)$$

como $C_0^\infty(\Omega_a)$ es denso en $H^1(\Omega_a)$ y puesto que las funciones propias son ortonormales tenemos:

$$0 = \int_0^a \frac{dc_j}{dy} \frac{dw}{dy} + \lambda_j^2 \int_0^a c_j w.$$

Así c_n es valor propio generalizado del operador de segunda derivada y, por la observación 2.1, c_n cumple

$$\frac{d^2 c_n}{dy^2} = \lambda_n^2 c_n, \quad \lambda_n^2 > 0.$$

Por lo tanto, c_n para cada n es de la forma

$$c_n = A_n e^{\lambda_n y} + B_n e^{-\lambda_n y}$$

y, por la observación 2.1, u queda dada por

$$(28) \quad u(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\lambda_n y} (\alpha_n v_n(x)) + e^{-\lambda_n y} (\beta_n v_n(x)).$$

Luego, como $\psi \in L_2(\Gamma_0)$

$$\psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n v_n(x).$$

Como $u \in H^2(\Omega_a)$, entonces $u_y(x, 0) = \psi$; luego

$$(29) \quad \psi_n = \frac{\partial(e^{\lambda_n y} \alpha_n)}{\partial y} \Big|_{y=0} + \frac{\partial(e^{-\lambda_n y} \beta_n)}{\partial y} \Big|_{y=0} = \lambda_n (\alpha_n - \beta_n),$$

esto es, el coeficiente de Fourier de ψ con respecto a (26) debe corresponder con el coeficiente de Fourier de $u_y|_{y=0}$.

Por otro lado, $u(x, a) = 0$, entonces

$$(30) \quad 0 = e^{\lambda_n a} \alpha_n + e^{-\lambda_n a} \beta_n.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (29)-(30), tenemos

$$\alpha_n = \frac{\psi_n e^{-\lambda_n a}}{\lambda_n \cosh(\lambda_n a)},$$

así

$$e^{\lambda_n a} \alpha_n + e^{-\lambda_n a} \beta_n = \frac{\psi_n \sinh(\lambda_n (y - a))}{\lambda_n \cosh(\lambda_n a)},$$

sustituyendo en (28)

$$(31) \quad u(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\psi_n \operatorname{senh}(\lambda_n(a-y))}{\lambda_n \operatorname{cosh}(\lambda_n a)} v(x)$$

y el resultado se obtiene de la observación 2.1 ya que $\lambda_n = 2n\pi$ para que u cumpla las condiciones de periodicidad (2) y (3). ■

LEMA 2.5. Si $\psi \in L_2(\Gamma_0)$, entonces T_a definido en (17) se expresa en forma de serie como:

$$T_a(\psi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\psi_n \operatorname{senh}(\lambda_n a)}{\lambda_n \operatorname{cosh}(\lambda_n a)} v_n(x),$$

donde $\{\psi_n\}$ son los Coeficientes de Fourier de ψ en el sistema (26).

DEMOSTRACIÓN. Sea $\psi \in L_2(\Gamma_0)$ talque $\psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n v_n$. Para u solución del problema contorno (1)-(5), dada por (31), y por la definición de T_a (17), por la continuidad de la traza en H^* se tiene que

$$(32) \quad T_a(\psi) = u(x, 0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\psi_n \operatorname{senh}(\lambda_n a)}{\lambda_n \operatorname{cosh}(\lambda_n a)} v_n(x).$$

Así que de (32) podemos concluir que

$$T_a(\psi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\psi_n \operatorname{senh}(\lambda_n a)}{\lambda_n \operatorname{cosh}(\lambda_n a)} v(x). \blacksquare$$

COROLARIO 2.1. Sean $\varphi \in L_2[0, 1]$ y $\psi \in L_2(\Gamma_0)$ tales que

$$\psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n v_n(x) \quad y$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n v_n(x),$$

entonces $(\varphi, \psi) \in M_a$ si y sólo si

$$\varphi_n = \frac{\psi_n \operatorname{senh}(\lambda_n a)}{\lambda_n \operatorname{cosh}(\lambda_n a)} \quad \text{para cada } n,$$

En efecto: (suficiencia) Para $(\varphi, \psi) \in M_a$, se cumple (19) $T_a \psi = \varphi$, así que por el Teorema 2.5 tenemos el resultado.

(necesidad) Sabemos que para $\psi \in L_2[0, 1]$ existe solución u del problema contorno y podemos ver que

$$u(x, 0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\psi_n \sinh(\lambda_n a)}{\lambda_n \cosh(\lambda_n a)} v_n(x),$$

luego, por hipótesis se tiene que $u(x, 0) = \varphi(x)$. Por lo tanto se cumple $T_a \psi = \varphi$, esto es, $(\varphi, \psi) \in M_a$.

En adelante por brevedad en la notación llamaremos

$$\alpha_n(a) = \frac{\sinh(\lambda_n a)}{\cosh(\lambda_n a)}.$$

Así un dato exacto en M_a que está determinado sólo por ψ . El operador queda dado por:

$$(33) \quad T_a(\psi) = \sum \frac{\alpha_n(a)}{\lambda_n} (\psi_n v_n).$$

TEOREMA 2.2. Sea $(\varphi^\dagger \psi^\dagger)$ un dato admisible para el parámetro a^\dagger , entonces:

$$(34) \quad a^\dagger = \frac{1}{2\pi} \tanh^{-1} \left(\frac{2\pi \varphi_1}{\psi_1} \right)$$

donde φ_1 y ψ_1 son los primeros coeficientes de Fourier de las funciones φ y ψ respectivamente en la base (2.1)

DEMOSTRACIÓN. Como $(\varphi^\dagger \psi^\dagger)$ es un dato admisible entonces por el Teorema 1.2 y el Lema 2.1 existe una única solución a_0 al problema de identificación caracterizado por (1)-(5) y (16) esto es: Para a_0 se cumple que $T_{a_0} \psi = \varphi$; es decir, $\sum \frac{\alpha_n(a_0)}{\lambda_n} \psi_n = \sum \varphi_n$. Luego, para cada $n \in Z \setminus 0$, se verifica:

$$\frac{\alpha_n(a^\dagger)}{\lambda_n} \psi_n = \varphi_n$$

esto es:

$$(35) \quad \frac{\sinh(a^\dagger \lambda_n) \psi_n}{\lambda_n \cosh(a^\dagger \lambda_n)} = \varphi_n,$$

despejando a^\dagger tenemos que para todo $n \in Z \setminus 0$

$$(36) \quad a^\dagger = \frac{1}{\lambda_n} \tanh^{-1} \left(\frac{\lambda_n \varphi_n}{\psi_n} \right).$$

En particular para $n = 1$ se debe cumplir dicha relación luego:

$$(37) \quad a^\dagger = \frac{1}{\lambda_1} \tanh^{-1}\left(\frac{\lambda_1 \varphi_1}{\psi_1}\right).$$

Así de las ecuaciones (36) y (37) tenemos que para cada $n \in \mathbb{Z} \setminus 0$ (35) queda dada por:

$$\frac{\operatorname{senh}(a^\dagger \lambda_n) \psi_n}{\lambda_n \operatorname{cosh}(a^\dagger \lambda_n)} = \frac{\operatorname{senh}(n \tanh^{-1} \frac{2\pi\varphi_1}{\psi_1}) \psi_n}{\lambda_n \operatorname{cosh}(n \tanh^{-1} \frac{2\pi\varphi_1}{\psi_1})}$$

y finalmente

$$(38) \quad \varphi^\dagger = \sum_{-\infty}^{\infty} \varphi_n v_n = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \tanh(n \tanh^{-1} \frac{2\pi\varphi_1}{\psi_1}) \psi_n v_n. \blacksquare$$

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE IDENTIFICACIÓN PARA DATOS CON ERROR. UNA NUEVA ESTRATEGIA DE REGULARIZACIÓN.

Recordemos que este trabajo pretende dar las bases para resolver el problema de identificar en un medio conductor la frontera interior con conductor ideal, a partir de mediciones de potencial y corriente en una región asequible de la frontera de la región; así que, el problema de interés implica errores inherentes de las mediciones de los datos. Esta es la razón por la que es importante determinar la solución del problema de identificación planteado antes para cualquier par de mediciones.

El problema de determinar la altura de la sección transversal conductora ideal en un rectángulo conductor se puede identificar como un problema de Cauchy, lo que implica un mal planteamiento pues el potencial podría no existir en toda la región o la solución del problema de identificación podría no depender continuamente de los datos, esto lleva a resolver este problema por algún algoritmo de regularización que nos de una aproximación de la solución para cualquier par de datos (φ, ψ) . Es por ello que este último capítulo se dedica en demostrar primero el mal planteamiento del mismo y después dar tres algoritmos de Regularización que da una solución para cualquier par de datos (φ, ψ) . El método que se propone depende del concepto de *dato admisible* pues ya se demostró la existencia y unicidad de la solución para este tipo de datos en la frontera de la región.

1. Planteamiento del problema de identificación para datos con error

Sea $(\varphi^\dagger, \psi^\dagger)$ un dato admisible para el parámetro a^\dagger , ambos desconocidos. El problema de identificación consiste en recuperar una aproximación a^\dagger a partir de datos $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ tales que: Para $\delta > 0$ se cumple $\|\tilde{\varphi} - \varphi^\dagger\| < \delta$ y $\|\tilde{\psi} - \psi^\dagger\| < \delta$.

En adelante llamaremos a los datos $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ como datos con error, donde δ es el “error en las mediciones”.

El problema de aproximar a^\dagger es un problema **mal planteado en el sentido de Hadamard B.1** pues no depende continuamente de los datos. En efecto, sean (φ, ψ) tales que $T_a\psi = \varphi$, ahora si definimos $\tilde{\psi} = \psi$ y $\tilde{\varphi} = T_{\tilde{a}}\psi$ para $\tilde{a} \neq a$ tenemos que:

$$\|\varphi - \tilde{\varphi}\|^2 = \sum \frac{\alpha_n(a) - \alpha_n(\tilde{a})}{\lambda_n^2} \psi_n^2 \leq \frac{4}{\lambda_1} \sum \frac{e^{2\lambda_n a}}{\cosh(\lambda_n)} \psi_n^2 \leq \frac{8}{\lambda_1} e^{3\lambda_n a} \|\psi\|^2.$$

Si hacemos $\delta < \frac{8}{\lambda_1} e^{3\lambda_n a} \|\psi\|^2$ tenemos que si

$$\tilde{a} = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{8}{\delta^2 \lambda_1} \|\psi\|^2\right),$$

se cumple que $\|a - \tilde{a}\|^2$ crece para δ muy pequeño, sin embargo $\|T_a\psi - \tilde{\varphi}\|^2 + \|\psi - \tilde{\psi}\|^2 < \delta$, es decir, la variación de los datos puede ser muy pequeña y el valor que deseamos identificar \tilde{a} sea muy lejano al valor real a .

2. MÉTODOS DE REGULARIZACIÓN

En esta sección se plantean tres algoritmos de regularización para recuperar a^\dagger . Cabe destacar que el primer algoritmo es considerado el resultado más importante de este trabajo, pues se recupera un valor aproximado de a^\dagger para datos con error a partir de la solución del problema de identificación para el dato admisible “cercano” y los otros dos se plantean debido a consideraciones sobre información a priori.

2.1. Primer esquema. El primer esquema pretende dar la solución de identificar a^\dagger para un dato $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ a través de una aproximación a la solución para el dato admisible más “cercano” a él. De alguna manera se busca hacer una proyección a los datos para los que existe solución del problema (1)-(5) y (16), así, la solución para los datos con error $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ será la solución de para un dato admisible, asegurando cuando sea posible la existencia de dicha altura pues, si los datos no están cercanos al conjunto \mathfrak{M} para una tolerancia dada, entonces inmediatamente sabremos que dichas mediciones no representan una banda que a alguna altura se comienza a comportar como un conductor ideal cosa que no es posible determinar mediante otros métodos de regularización.

El método consiste en determinar la mínima distancia de $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ al conjunto \mathfrak{M} . Nuestro trabajo entonces se centra en buscar el dato admisible más cercano a $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$. Como el conjunto de *datos admisibles* es la unión, parametrizada por a , de los grafos de los operadores T_a , calcularemos primero la proyección ortogonal a cada grafo, y después tomaremos el dato que corresponda a la mínima de esas distancias y la aproximación a la solución será la obtenida:

$$\operatorname{argmin}_a \{d((\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}), M_a)\}.$$

TEOREMA 3.1. *La proyección de los pares $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ a cada M_a esta dada por:*

$$\psi_a := \operatorname{argmin}_\psi \|T_a\psi - \tilde{\varphi}\|^2 + \|\psi - \tilde{\psi}\|^2.$$

DEMOSTRACIÓN. Como cada M_a es el grafo del operador continuo T_a , por el Teorema del Grafo Cerrado y como M_a es un subespacio cerrado la proyección a él esta bien definida es única y depende continuamente de los datos $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$.

Notemos que $D_a = \|T_a\psi - \tilde{\varphi}\|^2 + \|\psi - \tilde{\psi}\|^2$ es diferenciable como función de ψ y convexo tiene un mínimo global así que basta con encontrar el dato ψ para el cuál su derivada es cero, como M_a es un subespacio de $L_2 \times L_2$, ψ_a verifica las ecuaciones normales, así

$$\frac{dD_a}{d\psi} = 2 \langle T_a^*(T_a\psi - \tilde{\varphi}) + \psi - \tilde{\psi}, \epsilon \rangle = 0 \quad \text{para cada } \epsilon,$$

entonces

$$(T_a^* T_a + I)\psi_a - T_a^* \tilde{\varphi} + \tilde{\psi} = 0 \quad \text{para cada } a$$

si y sólo si

$$(T_a^* T_a + I)\psi_a = T_a^* \tilde{\varphi} + \tilde{\psi}.$$

Finalmente

$$\psi_a = (T_a^* T_a + I)^{-1}(T_a^* \tilde{\varphi} + \tilde{\psi})$$

y ψ_a será la proyección a cada M_a que depende del valor de a .

Como el operador T_a definido en 17 y por 1.2 sabemos que es autoadjunto entonces tenemos:

$$(39) \quad \psi_a := \sum \lambda \left(\frac{\alpha_n \tilde{\varphi}_n + \lambda_n \tilde{\psi}_n}{\alpha_n^2 + \lambda_n^2} \right). \blacksquare$$

DEFINICIÓN 3.1. La distancia de $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ a su proyección $(T_a \psi_a, \psi_a)$ en cada M_a se define como:

$$f_{(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})}(a) := \| T_a \psi_a - \tilde{\varphi} \|^2 + \| \psi_a - \tilde{\psi} \|^2$$

la cual es posible expresar como función de los valores propios del operador de laplace y los coeficientes de fourier de los datos con error $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$:

$$f_{(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})}(a) := \sum \frac{(\lambda_n \tilde{\varphi}_n - \alpha_n(a) \tilde{\psi}_n)^2}{\alpha_n^2(a) + \lambda_n^2}.$$

Notemos que $f_{(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})}(a)$ converge a una constante positiva cuando $a \rightarrow \infty$. En efecto:

puesto que $\alpha_n(a) \rightarrow 1$ si $a \rightarrow \infty$ luego

$$\sum \frac{(\lambda_n \tilde{\psi}_n - \alpha_n(a) \tilde{\varphi}_n)^2}{\lambda_n^2 + 1} \leq f_{(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})}(a) = \sum \frac{(\lambda_n \tilde{\psi}_n - \alpha_n(a) \tilde{\varphi}_n)^2}{\alpha_n(a) + \lambda_n^2}.$$

Puesto que

$$\sum \frac{(\lambda_n \tilde{\psi}_n - \alpha_n(a) \tilde{\varphi}_n)^2}{\lambda_n^2 + 1} \geq 0$$

y es cero si y sólo si

$$\sum (\lambda_n \tilde{\psi}_n - \alpha_n(a) \tilde{\varphi}_n)^2 = 0$$

si y sólo si

$$\lambda_n \tilde{\psi}_n = \alpha_n(a) \tilde{\varphi}_n \quad \text{para cada } a.$$

Así $\sum \frac{(\lambda_n \tilde{\psi}_n - \alpha_n(a) \tilde{\varphi}_n)^2}{\lambda_n^2 + 1} > 0$ pues de lo contrario $\tilde{\psi}_n = T_a \tilde{\varphi} = \frac{\alpha_n(a) \tilde{\varphi}_n}{\lambda_n}$ para cada a ; es decir, sería un dato exacto para cualquier valor de a lo cual no es posible debido a la unicidad de los datos exactos. Puesto que para a existe $M_0 > 0$ tal que para cada $a > M_0$, $\alpha_n(a) = 1$, entonces $f_{(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})}(a) = \sum \frac{(\lambda_n \tilde{\psi}_n - \tilde{\varphi}_n)^2}{1 + \lambda_n^2} > 0$ si $a > M_0$.

Dar el argumento que minimiza dicho funcional dará el argumento que minimiza la distancia de $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ a \mathfrak{M} . Así que basta con estudiar el comportamiento de f como función de a para dar una aproximación a a^\dagger .

Primero veamos que a perturbaciones pequeñas en los datos (φ, ψ) el comportamiento de $f_{(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})}(a)$ no varía mucho esto es, $f_{(\varphi, \psi)}(a)$ depende continuamente de los datos:

LEMA 3.1.

$$\|f_{(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})}(a) - f_{(\varphi^\dagger, \psi^\dagger)}(a)\|_\infty \rightarrow 0,$$

si $\delta \rightarrow 0$.

DEMOSTRACIÓN. Para cada $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ denotemos $\psi^\delta = \tilde{\psi} - \psi^\dagger$ y $\varphi^\delta = \tilde{\varphi} - \varphi^\dagger$ de tal forma que $\|\varphi^\delta\| \leq \delta$ y $\|\psi^\delta\| \leq \delta$.

Veamos que

$$\begin{aligned} f_{(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})}(a) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_n \tilde{\psi}_n - \alpha_n(a) \tilde{\varphi}_n)^2}{\alpha_n(a)^2 + \lambda_n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda(T_{a^\dagger} \psi^\dagger + \varphi^\delta) - \alpha(a)(\psi^\dagger + \psi^\delta))^2}{\alpha(a)^2 + \lambda^2} \\ &= \sum \frac{([\alpha_n(a^\dagger) + \alpha_n(a)]\psi^\dagger + \lambda_n \varphi^\delta - \alpha_n(a)\psi_n^\delta)^2}{\alpha(a)^2 + \lambda^2} \\ &= f_{(\varphi^\dagger, \psi^\dagger)}(a) + f_{(\varphi^\delta, \psi^\delta)}(a) + 2 \sum \frac{\alpha_n(a^\dagger) + \alpha_n(a)}{\alpha(a)^2 + \lambda^2} (\lambda_n \psi_n^\delta - \alpha_n \psi^\delta) \psi^\dagger. \end{aligned}$$

Si definimos el operador acotado

$$G_a(\varphi) := \sum \frac{\lambda_n^2 \alpha_n(a) + \lambda_n \alpha_n(a)}{\alpha(a)^2 + \lambda^2} \varphi_n$$

tal que $\|G_a\| \leq 1$

$$f_{(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})}(a) = f_{(\varphi^\dagger, \psi^\dagger)}(a) + f_{(\varphi^\delta, \psi^\delta)}(a) + 2G_a(\psi_n^\delta - \alpha_n \lambda_n \psi^\delta) \sum \psi^\dagger,$$

$|f_{(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})}(a) - f_{(\varphi^\dagger, \psi^\dagger)}(a)| = |f_{(\varphi^\delta, \psi^\delta)}(a) + 2G_a(\psi_n^\delta - \alpha_n \lambda_n \psi_n^\delta) \sum \psi^\dagger| \leq 4\delta^2(1 + 2\|\psi^\dagger\|)$
pues

$$\sqrt{f_{(\varphi^\delta, \psi^\delta)}(a)} \leq \sqrt{\sum \frac{\lambda_n^2}{\lambda_n^2 + \alpha_n^2}} + \sqrt{\sum \frac{\alpha_n^2}{\lambda_n^2 + \alpha_n^2}} \leq \|\varphi^\delta\| + \|\psi^\delta\| \leq 2\delta.$$

Así

$$f_{(\varphi^\delta, \psi^\delta)}(a) \leq 4\delta^2.$$

Además

$$\begin{aligned} G_a(\psi_n^\delta - \alpha_n \lambda_n \psi^\delta) &\leq \sum \frac{\lambda_n^2 \alpha_n(a^\dagger) + \lambda_n \alpha_n(a)}{\alpha(a)^2 + \lambda^2} (\varphi_n^\delta)^2 - \sum \frac{(\lambda_n^2 \alpha_n(a^\dagger) + \lambda_n \alpha_n(a)) \alpha_n^2(a)}{(\alpha(a)^2 + \lambda^2) \lambda_n^2} (\psi_n^\delta)^2. \\ &\leq \|\varphi^\delta\|^2 - \|\psi^\delta\|^2 \leq 4\delta^2. \end{aligned}$$

Sea $K = 4(1 + 2 \|\psi^\dagger\|)$ entonces

$$\|f_{(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})}(a) - f_{(\varphi^\dagger, \psi^\dagger)}(a)\|_\infty < K\delta^2,$$

haciendo $\delta \rightarrow 0$ se tiene el resultado.

Ahora bien la propuesta de regularización es:

DEFINICIÓN 3.2. *Cualquier $a \in H_\delta$ será un valor regularizado para a^\dagger , donde*

$$H_\delta(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}_n) = \{a > 0 : f_{(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})}(a) \leq 2\delta^2\}.$$

En seguida se presentan dos lemas que nos permiten definir la aproximación de la solución como antes.

LEMA 3.2. *El conjunto H_δ es cerrado no vacío.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $(\varphi^\dagger, \psi^\dagger)$ los datos exactos correspondientes a a^\dagger , que cumplen $T_{a^\dagger} \psi^\dagger = \varphi^\dagger$, y denotaremos por $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ al dato con error tal que para $\delta > 0$:

$$\|\tilde{\psi} - \psi^\dagger\|^2 \leq \delta, \quad \text{y} \quad \|\tilde{\varphi} - \varphi^\dagger\|^2 \leq \delta$$

entonces

$$f_{(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})}(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_n \tilde{\psi}_n - \alpha(a)_n \tilde{\varphi}_n)^2}{\alpha(a)_n^2 + \lambda_n^2} = \|\tilde{\varphi} - T_a \psi_a\|^2 + \|\tilde{\psi} - \psi_a\|^2$$

$$\leq \|\tilde{\psi} - \psi\|^2 + \|\tilde{\varphi} - T_a \psi\|^2 \quad \text{para cada } \psi$$

para ψ_a dada en (39). En particular si tomamos ψ^\dagger tenemos:

$$\|\tilde{\psi} - \psi_+ \|^2 + \|\tilde{\varphi} - T_a \varphi_+ \|^2 \leq 2\delta^2,$$

esto es $a^\dagger \in H_\delta$.

Resta verificar que es cerrado; en efecto: Sea $a_0 \notin H_\delta$ luego $f_{(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})}(a_0) > 2\delta^2$, puesto que $f_{(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})}(a)$ es continua para $0 < \epsilon < f(a_0) - 2\delta^2$ existe $\delta_\epsilon > 0$ tal que $|f(a_0) - f(a)| < \epsilon$ para cada a tal que $d(a_0, a) < \delta_\epsilon$

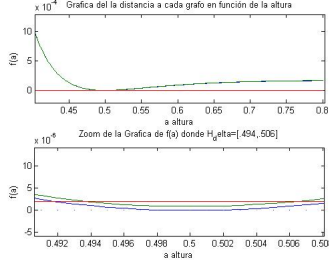


FIGURA 1. Grafica del funcional f para un dato admisible y un dato con error.

entonces $f(a_0) - f(a) < f(a_0) - 2\delta^2$, así $f(a) > 2\delta^2$. Luego para a_0 existe δ_ϵ tal que $B(\delta_\epsilon, a_0) \not\subseteq H_\delta$, esto es H_δ es cerrado, pues su complemento es abierto. ■

LEMA 3.3. *El diámetro de H_δ converge a cero si δ converge a cero.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que diámetro de H_δ no converge a cero cuando $\delta \rightarrow 0$. Entonces para $\epsilon > 0$, existe $\{\delta_n\}$ tal que $\delta \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, luego es posible construir una sucesión de datos $(\varphi^{\delta_n}, \psi^{\delta_n})$, tales que

$$\|\varphi^{\delta_n} - \varphi^\dagger\| < \delta_n, \quad y \quad \|\psi^{\delta_n} - \psi^\dagger\| < \delta_n.$$

donde cada par depende de $\{a_n\} \subset R^+ \setminus B(a^\dagger, \epsilon)$ con $a_n \in H_\delta$ como

$$|f_{(\varphi^{\delta_n}, \psi^{\delta_n})}(a_n) - f_{(\varphi^\dagger, \psi^\dagger)}(a_n)| < K\delta_n \rightarrow 0,$$

puesto que $\delta_n \rightarrow 0$. Como $f_{(\varphi^\dagger, \psi^\dagger)}(a)$ es continuo en R , y $f_{(\varphi^\dagger, \psi^\dagger)}(0) = \|\varphi^\dagger\|$ y $f_{(\varphi^\dagger, \psi^\dagger)}(a^\dagger) = 0$, entonces existe

$$m = \min_{a \leq a^\dagger - \epsilon} f_{(\varphi^\dagger, \psi^\dagger)} > 0.$$

Notar que para cada $m \in N$, existe $n \in N$ tal que $m \leq 2\delta_n$, luego como $f_{(\varphi^\delta, \psi^\delta)}(a_n) \leq 2\delta_n$ entonces $f_{(\varphi^{\delta_n}, \psi^{\delta_n})}(a_n) - f_{(\varphi^\dagger, \psi^\dagger)}(a_n) > m - 2\delta_n^2$ lo cual es una contradicción pues $F(\varphi, \psi; \cdot)$ depende continuamente de los datos (φ, ψ) , por lo tanto, el diámetro tiene a cero cuando δ tiende a cero. ■

En la Figura 1 se gráfica el funcional $f_{(\varphi^\dagger, \psi^\dagger)}(a)$ en función de la altura para un par de *datos admisibles* con $a^\dagger = 0,5$ y el funcional $f_{(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})}(a)$, es posible ver que el comportamiento es similar en

la primera imagen y en la segunda además la recta $a = 2\delta^2$, así es posible ver que el intervalo H_δ contiene a a^\dagger y el valor regularizado es cercano al valor exacto siempre que este en dicho intervalo.

2.2. Segundo Esquema. El segundo esquema se desarrolló pensando en las aplicaciones pues para tomar las mediciones en la frontera lo que se hace usualmente es aplicar una corriente controlada y medir el efecto que esta tiene sobre el potencial en la frontera de la misma, es por ello que nuestro trabajo ahora es: conociendo el valor exacto de la corriente en la frontera de la región deseo determinar la solución al problema de identificación minimizando la distancia de la medición del potencial a un dato admisible que es el generado por la medición de la corriente. De este método solo se tiene una aproximación numérica pues consideramos de alguna manera es un caso particular del método anterior pero con la ventaja de ser numéricamente más sencillo, sin embargo, se tiene una dificultad que se explicara durante el desarrollo del mismo.

En este esquema se parte de un dato de Neumann controlando ψ , deseamos encontrar el valor de a^\dagger a partir del valor de a tal que la condición de Dirichlet es cercana al dato admisible generado por ψ .

Debido al control sobre la corriente se cumple $\tilde{\psi} = \psi$ es fácil ver que

$$\|\tilde{\varphi} - T_{a^\dagger}\tilde{\psi}\| = \|\tilde{\varphi} - T_{a^\dagger}\psi\| \leq \|\tilde{\varphi} - \varphi^\dagger\| + \|\varphi^\dagger - T_{a^\dagger}\psi\| < \delta,$$

luego el dato admisible

$$(T_{a^\dagger}\tilde{\psi}, \psi)$$

es un dato admisible que corresponde a una buena aproximación de $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$, como ya sabemos a^\dagger será la solución al problema de identificación, luego buscaremos el valor de a tal que minimice el siguiente funcional

$$B(a) = \|\tilde{\varphi} - T_a\psi\|^2,$$

sin embargo, esta función de a no es convexa en la Figura 2 se muestra el comportamiento de este funcional primero para $(\varphi^\dagger, \psi^\dagger)$ donde alcanza el cero en un valor que corresponde al valor de a^\dagger y

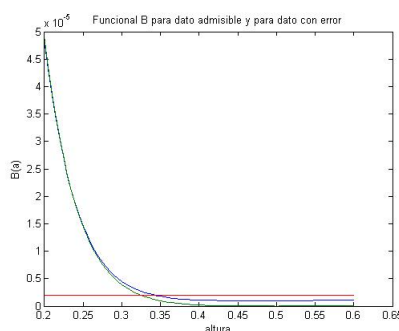


FIGURA 2. Función B para un dato admisible y para una perturbación de él.

el comportamiento de este funcional cuando hay error en la medición sólo del potencial y se controla la corriente aplicada, $(\tilde{\varphi}, \psi)$.

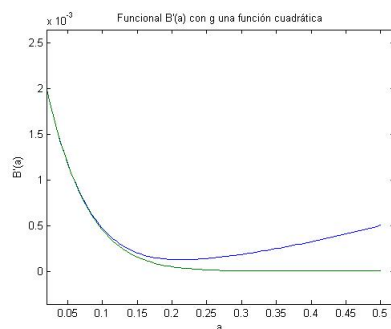
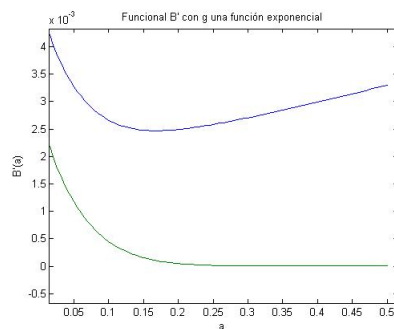
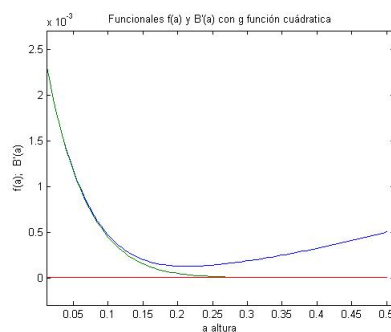
Por ello se propone agregar una función $g_\beta(a)$ tal que el funcional

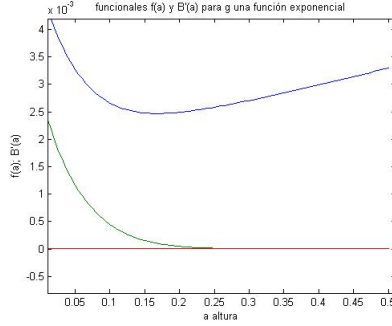
$$B'(a) = \|\tilde{\varphi} - T_a \tilde{\psi}\|^2 + g_\beta(a)$$

sea convexa y que sea posible minimizar de tal manera que su mínimo sea una aproximación del mínimo de $B(a)$. En nuestros ejemplos numéricos trabajamos con dos funciones $g1(a) = \beta a^2$ y $g2(a) = \beta e^a$ la Figura 3 se muestra el comportamiento de B y B' para una función cuadrática de a con parámetro β y en la Figura 4 se muestra el comportamiento de B y B' para una función exponencial de a con parámetro β . Notemos que tanto para $g1$ como $g2$ el comportamiento de B' se convexifica y es posible elegir el valor mínimo como una aproximación de a^\dagger .

Como mencionamos que este esquema podría considerarse un caso particular del método anterior, hicimos una comparación del funcional f para ver que como la aproximación con este segundo método puede darnos un valor aproximado para a^\dagger similar al valor encontrado con el método anterior para valores de β del orden de δ^2 . La Figuras 5 y 6 corresponden a $g1$ y $g2$, respectivamente.

2.3. Tercer Esquema. Y finalmente el tercer esquema surge pensando en el problema de identificación caracterizado por (1)-(5) y (16) como una familia de problemas de contorno para

FIGURA 3. Función B y B' para g_1 y $\beta = \delta$.FIGURA 4. Función B y B' para g_2 y $\beta = \delta$.FIGURA 5. Comparación funcional f y B' para g_1 .

FIGURA 6. Comparación funcional f y B' para g_2 .

Ω_a donde las soluciones se dan en dominios encajados (si $a_1 > a_2$, $\Omega_{a_2} \subset \Omega_{a_1}$) y donde las soluciones generan una familia de soluciones en H^* de la banda. Se prueba en el desarrollo de este esquema que la familia de soluciones converge en H^1 a la solución en el dominio no acotado. Se plantea este esquema con la idea de que si no se alcanza a anular el potencial a ninguna altura se tome la altura donde el potencial sea casi cero con alguna tolerancia permitida pues se sabe que la solución en la banda tiende a cero cuando valores grandes de y de la banda crece.

Sea $\Omega = (0, 1) \times (0, \infty)$ definimos en para $(x, y) \in \Omega$ la función

$$(40) \quad u(x, y) = \sum \frac{\psi_n}{\lambda_n} e^{-\lambda_n y} v(x).$$

Notemos que

$$\sum \int_0^\infty e^{-\lambda_n y} dy < \infty$$

y para cada $n \in N$

$$\int_0^\infty \psi_n^2 e^{\lambda_n y} dy = \frac{\psi_n^2}{2\lambda_n} e^{-\lambda_n y} \Big|_0^\infty = \frac{\psi_n^2}{2\lambda_n},$$

entonces se sigue que

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1}^2 &= \sum \int_0^\infty \int_0^1 \psi_n^2 e^{\lambda_n y} v(x) dy dx + \int_0^\infty \int_0^1 \psi_n^2 e^{\lambda_n y} v(x) dy dx \\ &\leq 4 \sum \frac{\psi_n^2}{2\lambda_n} \leq 2K \|\psi\|^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $u \in H^1$.

Por el método de separación de variables se puede resolver el problema de determinar el potencial en una banda con condiciones de periodicidad en las paredes laterales y la condición de Neuman en la base como la función u descrita en (40).

El siguiente Teorema muestra que las soluciones de la familia de problemas parametrizados por a , cuando a crece converge en H^1 a la solución en la banda. Para ello tomaremos una extensión de la solución en el rectángulo a la banda haciendo cero en el resto.

$$(41) \quad \tilde{u}_a(x, y) = \begin{cases} \sum \frac{\psi_n}{2\lambda_n} e^{-\lambda_n y} \frac{1 - e^{-\lambda(a-y)}}{1 + e^{-2\lambda a}} v(x) & \text{si } y \leq a, \\ 0 & \text{si } y > a, \end{cases}$$

como

$$\frac{1 - e^{-\lambda(a-y)}}{1 + e^{-2\lambda a}} \rightarrow 1,$$

cuando $a \rightarrow \infty$ para cada $y \in (0, \infty)$ tenemos

$$\| \tilde{u}_a \|_{H^1}^2 \leq \| u \|_{H^1}^2.$$

Así $\tilde{u}_a \in H^1(\Omega)$.

TEOREMA 3.2. *Sea $\tilde{u}_a(x, y)$ y u definidas en (40) y (41) entonces existe*

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \tilde{u}_a(x, y)$$

en $H_1(\Omega)$ y además

$$\tilde{u}_a(x, y) \rightarrow u \text{ en } H^1(\Omega),$$

cuando $a \rightarrow \infty$.

DEMOSTRACIÓN. Como

$$\| \tilde{u}_a(x, y) - u(x, y) \|_{H_1(\Omega)}^2 = \| u(x, y) \|_{H_1(\Omega \setminus \Omega_a)}^2 + \| \tilde{u}_a(x, y) - u(x, y) \|_{H_1(\Omega_a)}^2.$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} \| u(x, y) \|_{H_1(\Omega \setminus \Omega_a)}^2 &= \sum \int_a^\infty \int_0^1 \frac{\psi_n^2}{2\lambda_n} e^{-2\lambda_n^2 y} \\ &+ 2\psi_n^2 e^{-2\lambda_n y} v(x) dx dy = \sum \psi_n^2 \left(\frac{1}{2\lambda_n^2} + 2 \right) \int_a^\infty e^{-2\lambda_n y} dy \\ &= \sum \psi_n^2 \left(\frac{1}{2\lambda_n^2} + 2 \right) \int_a^\infty \frac{1}{2\lambda} e^{-2\lambda_n a} dy \leq \left(\frac{1}{2\lambda_n^3} \right) \end{aligned}$$

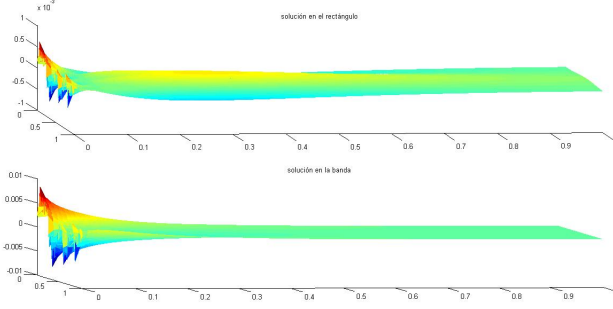


FIGURA 7. Solución del problema de contorno en un rectángulo de altura 10 y la solución para el problema de contorno en la banda.

$$+\frac{1}{\lambda_n}e^{-2\lambda_n a} \|\psi\|^2.$$

Así $\|u(x, y)\|_{H_1(\Omega \setminus \Omega_a)}^2 \rightarrow 0$, cuando $a \rightarrow \infty$.

Luego en Ω_a

$$\tilde{u}_a(x, y) - u(x, y) = \sum f_n(a)(1 + e^{-2\lambda_n a}) \frac{\psi_n}{\lambda_n} v(x),$$

donde $f_n(a) = \frac{e^{-2a\lambda_n}}{1 + e^{-2a\lambda_n}}$ entonces

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_a(x, y) - u(x, y)\|_{H_1(\Omega_a)}^2 &= \sum \int_0^a \frac{\psi_n^2}{\lambda_n^2} f_n^2(a)(1 + e^{-2\lambda_n a})^2 dy \int_0^1 v_n(x) dx \\ &+ \int_0^a 4\psi_n^2 f_n^2(a)(e^{-4\lambda_n a}) dy \int_0^1 v_n(x) dx + \int_0^\infty \frac{\psi_n^2}{\lambda_n^2} f_n^2(a)(1 + e^{-2\lambda_n a})^2 dy \int_0^1 v_n(x) dx \\ &= \sum \psi_n^2 f_n^2(a) \int_0^a [(1 + \frac{1}{\lambda_n^2})(1 + e^{-2\lambda_n a})^2 + 4e^{-4\lambda_n a}] \leq 4 \sum \psi_n^2 f_n^2(a) \int_0^a [(1 + e^{-2\lambda_n a})^2 + e^{-4\lambda_n a}] dy \\ &\leq 4 \sum \psi_n^2 f_n^2(a) \int_0^a [1 + 2e^{-2\lambda_n a} + 2e^{-4\lambda_n a}] dy \leq 4 \sum \psi_n^2 f_n^2(a) \int_0^a 5 dy \leq 20a f_1^2(a) \|\psi\|^2, \end{aligned}$$

que tiende a cero si $a \rightarrow 0$, pues $f_n(a) \rightarrow 0$. ■

Diremos que una aproximación a a^\dagger si $\|\tilde{\varphi} - u|_{\Gamma_0}\| < \delta$ estará dada por

$$\tilde{a} = \min\{a > 0 : \|u|_{\Gamma_a}\| < \delta\}.$$

En la Figura 7 se muestra el comportamiento de una solución en el rectángulo y la solución en la banda.

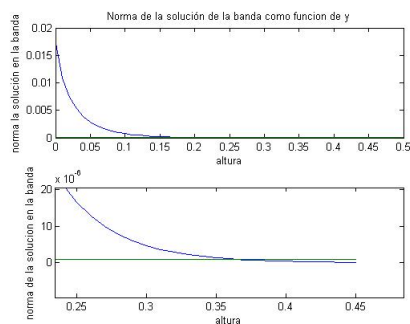


FIGURA 8. Gráfica de la norma de la solución como función de la altura de la banda.

En la Figura 8 se muestra el comportamiento de la norma de la solución en la banda como función de la altura de la banda.

Así que, si nosotros tenemos una tolerancia $\delta > 0$ podemos determinar una aproximación de a^\dagger a partir de la altura en la banda tal que

$$\|u|_{\Gamma_a}\| < \delta,$$

siempre que el dato en la base se asemeje al valor de u en la base, de otra manera es posible decir que las mediciones no corresponden a una banda que cumple esa característica.

Conclusiones

Para una banda conductora homogénea tal que a partir de alguna altura se comporta como un conductor ideal y sobre la que se conoce el potencial y la corriente en la base, se demuestra que existe una única solución al problema de identificar dicha altura siempre que los datos en la base estén relacionados a través del operador T_a dado en (17) para algún valor de a .

Se da la relación que debe existir entre los datos de potencial y corriente en la base de la región para que exista una altura donde la banda haga frontera con un conductor ideal, situación que permite dar la definición más importante de este trabajo correspondiente a caracterizar los *datos admisibles*; datos para los cuales, tiene sentido plantear el problema de identificación pues corresponden a datos que sí reproducen una región con las características deseadas. Para *datos admisibles* se demuestra que en la región rectangular restringida a dicha altura, el potencial se comporta como la solución al problema 1-5 se puede obtener por el método de separación de variables y está dada por:

$$u(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\psi_n \operatorname{senh}(\lambda_n(a-y))}{\lambda_n \operatorname{cosh}(a\lambda_n)} \right) v_n(x),$$

donde $v_n(x)$ es la base

$$\{v_k = \sqrt{2}\cos(\lambda_k x), v_{-k} = \sqrt{2}\operatorname{sen}(\lambda_{-k} x)\} \quad \text{para cada } k > 0 \in \mathbb{N},$$

para $\lambda = 2n\pi$. De igual forma es posible caracterizar al operador T_a en términos de los coeficientes de Fourier y la base como:

$$T_a(\psi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\psi_n \operatorname{senh}(\lambda_n a)}{\lambda_n \operatorname{cosh}(\lambda_n a)} v_n(x).$$

Vimos que cuando existe la solución al problema de identificación, los datos en la base guardan una relación funcional que

depende del operador T_a . Por la ecuación anterior fue posible dar un valor exacto para la altura en el rectángulo donde el potencial se anula dada por:

$$a^\dagger = \frac{1}{2\pi} \tanh^{-1} \left(\frac{2\pi\varphi_1}{\psi_1} \right).$$

Por último, en este trabajo se dan tres formas de aproximar el valor de la solución al problema de identificación para cualquier par de datos $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$:

La primera corresponde en minimizar la distancia de la medición $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ al conjunto de *datos admisibles* haciendo la proyección a cada grafo de la familia de operadores T_a . Se demostró que dicha proyección estaba bien definida, depende continuamente de los datos y está dada en cada grafo por $(T_a\psi_a, \psi_a)$ donde

$$\psi_a := \operatorname{argmin}_\psi \| T_a\psi - \tilde{\varphi} \|^2 + \| \psi - \tilde{\psi} \|^2 .$$

Luego se construyó la función $f_{(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})}(a)$ correspondiente a distancia de $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ al grafo del operador T_a para cada a , se demostró que a pequeñas perturbaciones de los datos en la base, el comportamiento de f no varía mucho y se dio una aproximación a la solución como algún elemento del conjunto H_δ el cual se demostró es cerrado y que su diámetro disminuye a medida que disminuye el error en la medición de los datos, haciendo converger la solución aproximada para los datos $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ a la solución correspondiente a el dato admisible más cercano.

El segundo método corresponde a plantear el problema de identificar el valor de la altura donde el potencial se anula cuando es posible controlar el valor de la corriente en la base de la región. Con el método planteado, se da una aproximación a la solución del problema de identificación, como el valor que minimiza la distancia del dato de Dirichlet en la base con un dato admisible, generado por el potencial que se impone (controla) en la base de la región; es decir, deseamos minimizar el siguiente funcional:

$$B(a) = \| \tilde{\varphi} - T_a\psi \|^2 .$$

Puesto que dicho funcional no es convexo se procede a construir un funcional convexo tal que el punto donde alcanza su mínimo sea

cercano al mínimo correspondiente del funcional que nos interesa. Dicho funcional es:

$$B'(a) = \| \tilde{\varphi} - T_a \tilde{\psi} \|^2 + g_\beta(a).$$

Donde la función g_β , en nuestros ejemplos fue dada por βa^2 y βe^a . Es posible notar en las gráficas, que dichas funciones convexifican el funcional de interés; sin embargo, consideramos que para dar una buena aproximación de la solución se debe hacer un estudio más detallado sobre la forma de g_β y el valor de β . En esta tesis no se trabajó en este problema con tanta profundidad, pues simplemente se deseaba mostrar una solución particular de una "proyección a los *datos admisibles*" pero con mayor simplicidad numérica que el método anterior. Esta idea fue tomada de los métodos usuales de regularización agregando términos al funcional de interés. También se hizo una comparación con el funcional del método anterior. Se plantea como trabajo a futuro realizar este método con más detalle.

El tercer método consiste en ver para una familia de rectángulos parametrizada por su altura; el problema de determinar el potencial en cada región y compararlo con la solución del problema en la banda con las mismas condiciones de frontera. Se demostró que cuando crece el valor de altura en el rectángulo la solución del problema en la región acotada converge a la solución en la banda; dando así, una forma de caracterizar la solución al problema de identificación a partir de la altura, donde la solución en la banda sea casi cero para algún nivel de tolerancia dado, pues se sabe, que la solución en la banda converge a cero cuando la altura de la banda crece.

Recordemos que es importante que el potencial además de anularse a alguna altura también, sea cercano a la medición del potencial en la base de la región; así que, se toma como condición adicional para que exista solución al problema de identificación que la distancia entre la medición del potencial en la base $\tilde{\varphi}$ y la traza en la base de la solución en la banda sea menor que algún valor dado.

Como trabajo a futuro y con el que se pretende escribir un artículo, se planteará el problema general en una región circular

con una región interior conductora ideal desconocida y determinar la frontera de la misma a través de una transformación conforme de la banda completa en el plano que transforme la banda en una región anular.

Propiedades del espacio H^*

A lo largo de este trabajo consideraremos el subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$, definido por

$$H^*(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : v(0, y) = v(1, y), v(x, h) = 0\},$$

el hecho de que $H^*(\Omega)$ sea cerrado en $H^1(\Omega)$ es una consecuencia de la continuidad del operador traza de $H^1(\Omega)$ en $L_2(\partial\Omega)$.

LEMA A.1. *En $H^*(\Omega)$ la única función constante es la idénticamente nula.*

DEMOSTRACIÓN Veamos que $f \equiv 1$ en Ω no es elemento de $H^*(\Omega)$, en efecto, sea $f \equiv 1 \in H^1(\Omega)$, y supongamos que existe f^* extensión continua f a $\bar{\Omega}$, tal que f^* está en $H^*(\Omega)$, notemos que $f^*|_{\Gamma_I} = f^*|_{\Gamma_D} = 1$ pero $f^*|_{\Gamma_a} = 0$, así que para w en la base de Ω , existe una vecindad U de w , tal que $|f^*| < \frac{1}{2}$ para cualquier valor en U , así que hay elementos en $U \cap \Omega$, tal que en su imagen bajo f es estrictamente menor que $\frac{1}{2}$, lo cual claramente no puede suceder. Por lo tanto, como no existe extensión de f en $H^*(\Omega)$, $f \equiv 1$ no pertenece a $H^*(\Omega)$, análogamente para cualquier constante no cero. ■

Se puede ver que

$$(42) \quad \langle u, v \rangle_{H^*} = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v = \sum_{i=1}^2 \int \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

define un producto interior en $H^*(\Omega)$. En efecto de la relación $\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} = \langle \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \rangle_{L_2}$, se tiene que para que (42) defina un producto interior sólo hace falta demostrar que $\langle u, u \rangle = 0$ si $u = 0$, ya que las demás propiedades se verifican por la definición de producto interior en $L_2(\Omega)$.

Sea $\langle u, u \rangle_{H^*(\Omega)} = 0$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u = \int_{\Omega} |\nabla u|^2, \end{aligned}$$

y como el integrando es no negativo, $|\nabla u|^2 = 0$ si y sólo si $\nabla u \equiv 0$, entonces $u = Cte$ y, por el Lema A.1 $u \equiv 0$.

Así tenemos que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^*(\Omega)}$ es un producto interior en $H^*(\Omega)$; en adelante denotaremos por $\|f\|_{H^*(\Omega)}$ a la norma inducida por (42).

Se sabe que $H^*(\Omega)$ está inmerso compactamente en $L_2(\Omega)$, pues la inmersión de $H^*(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$ es continua¹, entonces por el Lema B.1 se cumple la desigualdad de Poincaré, esto es, existe $K > 0$ tal que para todo $f \in H^*(\Omega)$ se verifica:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|f\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq (K^2 - 1) \|\nabla f\|^2, \\ (43) \quad \|f\|_{H^*(\Omega)}^2 &\leq \|f\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq K^2 \|f\|_{H^*(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

así podemos concluir que en $H^*(\Omega)$ las normas $\|f\|_{H^1(\Omega)}$ y $\|f\|_{H^*(\Omega)}$ son equivalentes (ver B.2).

Veamos que $\|f\|_{H^*(\Omega)} = \|\nabla f\|$; en adelante utilizaremos indistintamente cualquiera de estas notaciones.

Consideraremos también $H_0^*(\Omega) = \{v \in H^*(\Omega) : v(0, y) = 0, v(1, y) = 0\}$, donde $H_0^1 \subset H_0^*(\Omega) \subset L_2(\Omega)$.

OBSERVACIÓN A.1. *Notar que $H^*(\Omega_a)$ contiene a las funciones infinitamente diferenciables y de soporte compacto luego en B.4 se demuestra que la solución débil del problema de contorno (1)-(5) es armónica en sentido clásico en el interior de (Ω_a) .*

¹ya que H^* es subespacio de H^1

Resultados utilizados

En esta sección se dan algunos resultados que fueron utilizados en esta tesis para construir las demostraciones presentadas. Es importante decir que se presentan de forma más general a la que son utilizados nos centramos en $p = 2$ y $N = 2$.

DEFINICIÓN B.1. ([14], KIRSCH, pág. 10) Sean X y Y espacios normados y $\mathfrak{A} : X \rightarrow Y$ un operador (lineal o no lineal), se dice que el problema $\mathfrak{A}x = y$ es **bien planteado** en el sentido de Hadamard si \mathfrak{A} si se cumple:

- Para cada $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $\mathfrak{A}x = y$ (existencia de la solución).
- Para cada $y \in Y$ existe un único $x \in X$ tal que $\mathfrak{A}x = y$ (unicidad de la solución).
- La solución x depende continuamente de y es decir para cada sucesión $\{x_n\}$ en X , si $\mathfrak{A}x_n \rightarrow \mathfrak{A}x$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces $x_n \rightarrow x$ cuando $n \rightarrow \infty$ (estabilidad de la solución).

Si alguna de las condiciones no se satisface entonces se dice que el problema $\mathfrak{A}x = y$ es **mal planteado**.

DEFINICIÓN B.2. ([15], KOLMOGOROV, pág. 152) Dos normas $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ en un espacio vectorial V son equivalentes, si existen k_1, k_2 positivas tales que

$$k_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq k_2 \|x\|_1 \quad \text{para cada } x \in V.$$

DEFINICIÓN B.3. ([20], TARTAR, pág.50) **Desigualdad de Poincaré**. Si $1 \leq p \leq \infty$ y Γ es un subconjunto abierto no vacío de \mathbb{R}^N se dice que se verifica la desigualdad de Poincaré en V subespacio de H^1 , si existe una constante K tal que $\|u\|_p \leq K \|\nabla u\|_p$.

LEMA B.1. ([20], TARTAR, pág.50) Sean $1 \leq p \leq \infty$, V subespacio de H^1 y Γ subconjunto abierto no vacío de \mathbb{R}^N , si es compacta la inmersión de V en $L^p(\Gamma)$, entonces la desigualdad de Poincaré se verifica en el subespacio V si y sólo si la constante 1 no es elemento de V .

DEFINICIÓN B.4. ([17], MIJAILOV pág. 254) u es una **función armónica** en el dominio Γ de \mathbb{R}^N , si cumple cualquiera de las siguientes condiciones:

1. u dos veces continuamente diferenciable en Γ y en todo $x \in \Gamma$ satisface la Ecuación de Laplace

$$\Delta u = 0.$$

2. $u \in H_{loc}^1(\Gamma)$, Γ dominio de \mathbb{R}^N y si satisface la identidad integral

$$\int_{\Gamma} \nabla u \nabla v dx = 0 \text{ para cada } v \in H^1(\Gamma),$$

terminales en Γ (es decir son iguales a cero casi siempre en $\Gamma \setminus \Gamma'$ para todo $\Gamma' \subseteq \Gamma$).

LEMA B.2. ([17], MIJAILOV ág. 261) Una función armónica en un dominio Ω es analítica en Ω

DEFINICIÓN B.5. Una función v de cuadrado integrable en Γ , se llama **derivada generalizada** de orden $|\alpha|$ (derivada en el sentido de Sobolev) de la función de cuadrado integrable u en el dominio Γ , si para cualquier función $\phi \in C_0^\infty(\Gamma)$ se satisface

$$\int_{\Gamma} u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Gamma} v \phi dx$$

donde $C_0^\infty(\Gamma)$ denomina la clase de las funciones de prueba.

DEFINICIÓN B.6. Sea $v \in H^2(\Gamma) \cap H_0^1(\Gamma)$ no nula, v es función propia del operador de Laplace si existe λ tal que

$$\Delta v = \lambda v,$$

donde λ es el valor propio de Δ asociado a v .

OBSERVACIÓN B.1. La función propia v del operador Δ para el valor propio λ también es solución del problema

$$\Delta v = \lambda v$$

$$v|_{\partial\Gamma} = 0.$$

DEFINICIÓN B.7. *Se dice que $v \in H_0^1(\Gamma)$ es una función generalizada propia del problema de Dirichlet homogéneo para el operador de Laplace, si existe λ tal que*

$$\int_{\Gamma} \nabla u \cdot \nabla g = -\lambda^2 \int_{\Gamma} u g \quad \text{para cada } g \in H_0^1(\Gamma).$$

Bibliografía

- [1] ABDA A., HENRY y j., JDAY F. "Boundary data completion: the method of boundary value problem factorization" *Inverse Problems* 27 055014, 2011.
- [2] APOSTOL, T.M.; *Calculus*; Vol.I. (Nueva York, 1967). Edit. J. Wiley.
- [3] BREZIS, H.; *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*; (Nueva York, 2011). Edit. Springer-Verlag.
- [4] BUGROV, S.Y.; NIKOLSKI, S.M.; *Matemáticas Superiores, Ecuaciones Diferenciales, Integrales Múltiples, Series de funciones de Variable Compleja*; (Moscú, 1981). Edit. Mir.
- [5] CORTES, M.; (Puebla, 2013). *Análisis del problema de identificación de curvas interiores usando potenciales de superficie*; Tesis de Doctorado, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, B.U.A.P.
- [6] CORTES, M., FRAGUELA A., GREBENNIKOV A., Morín M., Oliveros J. *Solución estable del problema de Cauchy para la ecuación de Laplace usando potenciales de superficie* Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. *Lecturas Matemáticas Volumen 32* (2011), páginas 61-77
- [7] FRAGUELA, C.A.; *Análisis Matemático Avanzado*; (Puebla, 2004). Edit. Siena.
- [8] FRAGUELA, COLLAR ANDRÉS; (México, 1991). *Teoría espectral de Operadores Diferenciales*; VII Coloquio del Departamento de Matemáticas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N.
- [9] FRAGUELA, COLLAR ANDRÉS; (México, 2008). *Teoría Matemática de Problemas Inversos*; Curso CADI, Tecnológico de Monterrey.
- [10] HERNÁNDEZ, MONTERO EDUARDO; (Puebla, 2014). *Regularización del problema de Cauchy para la ecuación de Laplace en un cilindro*; Tesis de Maestría, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, B.U.A.P.
- [11] ISAKOV, V.; *Inverse Problems for Partial Differential Equations*; (Nueva York, 1998). Edit. Springer-Verlag.
- [12] IVANYSHYN, O., KRESS, R. "Nonlinear integral Equations for solving inverse boundary value problems for inclusions and cracks". *JOURNAL OF INTEGRAL EQUATIONS AND APPLICATIONS* Volume 18, Number 1, Spring 2006

- [13] KRESS,R. “Inverse Dirichlet Problem and Conformal Mapping”. *Mathematics and Computers in Simulation, Inverse Obstacle Problems*. 66(4):255-265 2004.
- [14] KIRSCH,A.;*An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*;(Nueva York, 1996). Edit. Springer-Verlag.
- [15] KOLMOGOROV,A.N.; FOMIN,S.V.;*Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*;(Moscú, 1975). Edit. Mir.
- [16] MARSDEN,J.E.; TOMBA,A.J.;*Cálculo Vectorial*;(Madrid, 2004). Edit. Pearson Educación, S.A.
- [17] MIJÁILOV,V.P.; FOMIN,S.V.;*Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales*;(URSS, 1978). Edit. Mir.
- [18] MORÍN M., Cortes M., Oliveros J. y Fraguera A. *Planteamiento Operacional del Problema de Cauchy utilizando Potenciales de Superficie*;(Puebla 2009). Tópicos de la Teoría de Aproximación III, Textos Científicos. BUAP. Pp. 89-106.
- [19] MYINT-U,T.;DEBNATH, L.;*Linear Partial Differential Equation for Scientists and Engineers*;(Boston, 2007). Edit. Birkhausa.
- [20] TARTAR,L.;*An Introduction to Sobolev Spaces and Interpolation Spaces*;(Berlin, 2007). Edit. Springer-Verlag.