



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
POSGRADO EN OPTOELECTRÓNICA



**ESTUDIO DE LA PROPAGACIÓN DE PAQUETES DE ONDA
GAUSSIANOS EN MEDIOS ESTRATIFICADOS NO LINEALES**

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS

(OPTOELECTRÓNICA)

PRESENTA:

M.C. CLEMENTE AGUILAR GALICIA

DIRECTORA:

DRA. MARTHA ALICIA PALOMINO OVANDO

FCFM, BUAP

ASESOR:

DR. FELIPE RAMOS MENDIETA

DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIÓN EN FÍSICA, UNIVERSIDAD DE SONORA

MAYO DE 2009

CONTENIDO

RESUMEN	4
INTRODUCCIÓN	5
CAPÍTULO 1. PROPAGACIÓN DE PAQUETES DE ONDAS GAUSSIANOS EN MEDIOS ESTRATIFICADOS NO LINEALES	8
1.1 CRISTALES FOTÓNICOS Y EMISIÓN ESPONTÁNEA INHIBIDA	9
1.2 VELOCIDAD DE GRUPO EN LA PROPAGACIÓN DE UN PULSO RESONANTE	10
1.3 PULSOS ÓPTICOS A TRAVÉS DE BANDAS FOTÓNICAS PROHIBIDAS	12
1.4 TIEMPOS DE RETARDO NO LINEALES PARA PULSOS ÓPTICOS	14
CAPÍTULO 2. TEORÍA BÁSICA DE LA ÓPTICA NO LINEAL, PARA EL PRIMERO, SEGUNDO Y TERCER ARMÓNICOS	17
2.1 CONVENIO DE NOTACIÓN EMPLEADA PARA UNA SUMATORIA	18
2.2 LA ECUACIÓN DE ONDA	18
2.3 UNA SOLUCIÓN PARA LA ECUACIÓN DE ONDA: EL CAMPO ELÉCTRICO COMO LA SUMA DE LOS TRES PRIMEROS ARMÓNICOS	21
2.4 ECUACIONES ACOPLADAS PARA UN ELEMENTO DE UNA ESTRUCTURA MULTICAPAS: CAPA DE MATERIAL NO LINEAL	25
2.5 EL PROMEDIO TEMPORAL DEL TEOREMA DE POYNTING	28
2.6 SIMPLIFICACIÓN DEL PROMEDIO TEMPORAL DEL TEOREMA DE POYNTING	31
CAPÍTULO 3. PAQUETES DE ONDAS DE PRIMEROS, SEGUNDOS Y TERCEROS ARMÓNICOS, EN LA APROXIMACIÓN “NO-DEPLETION”	33
3.1 SOLUCIÓN GENERAL PARA CUALQUIER CAPA DE MATERIAL NO LINEAL	35
3.2 CONDICIONES DE FRONTERA PARA LOS CAMPOS DE SEGUNDO Y TERCER ORDENES	44
3.3 TEOREMA DE POYNTING Y CONDICIONES DE FRONTERA PARA LOS CAMPOS DE PRIMER ORDEN	51
3.4 PAQUETES DE ONDAS GAUSSIANOS. APROXIMACIÓN DE SUMATORIA SIMPLE	55
3.5 TIEMPO DE RETARDO	61

CAPÍTULO 4. RESULTADOS NUMÉRICOS	63
4.1 CONSIDERACIONES NUMÉRICAS PRELIMINARES	64
4.2 ESTUDIOS SOBRE EL COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN	71
4.3 TIEMPOS DE RETARDO	74
4.4 TRANSMISIÓN DE PAQUETES GAUSSIANOS EN LA ESTRUCTURA PERIÓDICA AIAs/GaAs	80
CONCLUSIONES	89
APÉNDICE	92
A.1 POLARIZACIONES DE SEGUNDO Y TERCER ORDENES	92
A.2 EL PROMEDIO TEMPORAL DEL TEOREMA DE POYNTING	95
A.3 DESCRIPCIÓN CUÁNTICA DE LAS SUSCEPTIBILIDADES	101
REFERENCIAS	108

RESUMEN

En este trabajo se presenta inicialmente la formulación para el estudio de la propagación de una onda monocromática (primer armónico) electromagnética a través de un medio material no lineal con un índice de refracción isotrópico (escalar), donde se generan simultáneamente el segundo y tercer armónicos. Mediante las ecuaciones de Maxwell se deducen las ecuaciones acopladas exactas que relacionan estas tres ondas monocromáticas, con el único fin de entender el aspecto conceptual del formalismo asociado al problema básico que será objeto de la simplificación “no-depletion” y posteriormente de la generalización aproximada llamada binomial.

La formulación binomial desarrollada en este trabajo, toma como punto de partida la aproximación “no-depletion”, y es un caso intermedio entre las ondas monocromáticas y los paquetes de ondas correspondientes a todas las posibles sumas múltiples, de un mismo orden, de las frecuencias de un paquete Gaussiano de primeros armónicos. Con esta formulación se presentan resultados numéricos para una superred construida con placas alternadas de AlAs y GaAs de grosor respectivo fijo. Se hicieron cálculos sobre coeficientes de transmisión, tiempos de retardo y paquetes de ondas, para los primeros tres órdenes. De los resultados obtenidos puede destacarse que para estructuras de un gran número de capas, las intensidades del segundo y tercer armónicos pueden ser más grandes que la intensidad del haz fundamental en la región de frecuencias donde la estructura soporta una banda de energía fotónica prohibida para la solución lineal. También se observó que las mejores condiciones para la aproximación binomial ocurren cuando la frecuencia central del paquete incidente se ubica a la mitad del gap fotónico de primer orden. La aproximación binomial (de integral simple) sobre paquetes de ondas no lineales de cualquier orden presentada aquí, admite en su formulación el caso lineal y en el límite adecuado reproduce el caso de ondas monocromáticas, por lo que es una contribución importante al conocimiento de la propagación de ondas electromagnéticas en medios (periódicos o no) no lineales.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se considera inicialmente la formulación completa de un problema de óptica no lineal, tal formulación se reducirá a una simplificación conocida que en una segunda etapa será generalizada: la incidencia de una onda electromagnética plana sobre un material no lineal de índice de refracción isotrópico (escalar), con la generación simultánea del segundo y tercer armónicos. Empleando las ecuaciones de Maxwell se deducen las ecuaciones acopladas exactas que relacionan estas tres ondas, con el único fin de tener una idea conceptual de todo el aspecto físico y matemático que deberíamos tomar en cuenta para el caso muchísimo más complejo de incidencia de paquetes de ondas y su interacción con la materia a través de susceptibilidades hasta de tercer orden o mayores. Una manifestación física de la validez del proceso seguido para obtener el sistema de ecuaciones acopladas, es que ellas satisfacen el teorema de Poynting. La demostración de este teorema nos permite captar el sentido de la aproximación “no-depletion”, bajo la cual los armónicos no lineales se desacoplan entre sí, aunque dependen de la solución lineal en el interior del material. La aproximación “no-depletion” se emplea cuando las ondas incidentes no son afectadas esencialmente por los procesos no lineales pero dan origen a ondas de salida de otras frecuencias, en otras palabras, prácticamente no hay transferencia de energía electromagnética, de las ondas de incidencia a las ondas no lineales.

Se considera que las energías de los fotones involucrados son menores que el “gap electrónico”, por lo que el material no absorberá energía del campo electromagnético.

Apoyados en la aproximación “no-depletion” se discute un problema de transición en el sentido de que a partir de él se efectúa una simplificación adicional: la incidencia de un paquete de ondas (primeros armónicos) sobre el material no lineal y la construcción de paquetes de ondas no lineales de un mismo orden. Todos estos paquetes no deben traslapar sus correspondientes dominios efectivos de frecuencia.

Desde un enfoque discreto tiene sentido la construcción de paquetes (simples) de armónicos de un mismo orden no lineal n , generados por las correspondientes frecuencias del paquete de primeros armónicos que se propagan a través del material no lineal. Desde el punto de vista de las sumas infinitesimales de una integral, tales paquetes (simples) no lineales no tienen sentido matemático (por $d^n \omega$) o en el mejor de los casos se anulan en el límite. Lo que es diferente de cero es el paquete (múltiple) de ondas relacionadas con todas las

posibles sumas múltiples (sumas de dos en dos frecuencias, tres,..., n) de un mismo orden no lineal n , de las frecuencias del paquete de primeros armónicos.

El paquete (múltiple) asociado a todas las posibles sumas múltiples de frecuencias, en principio se obtiene mediante una integral de la misma multiplicidad, pero puede expresarse como una integral (paquete) simple de correspondientes armónicos, “modificados” por lo que hemos llamado la aproximación o corrección binomial.

Debe distinguirse un armónico no lineal “cuasinormal” generado esencialmente por el integrando del paquete de primeros armónicos, del armónico no lineal “modificado” por la corrección binomial para tomar en cuenta la contribución de todas las correspondientes sumas múltiples equivalentes de frecuencias. Una integral simple de armónicos no lineales “cuasnormales” es diferente de cero, pero no tiene correspondencia física directa.

Bajo la hipótesis de un paquete Gaussiano incidente que al propagarse a través del material no lineal se mantiene aproximadamente Gaussiano y que puede considerarse estrecho en el dominio de frecuencias, demostramos que la aproximación binomial es aplicable a cualquier orden no lineal. La hipótesis se cumple muy bien, por ejemplo, dentro de un gap fotónico de primer orden.

La aproximación binomial requiere que el paquete transmitido de primeros armónicos debe ser aproximadamente Gaussiano, aunque no lo sean los paquetes transmitidos de armónicos no lineales “modificados”. Claro si el paquete transmitido de primer orden es lo suficientemente estrecho en el dominio de frecuencias, en el correspondiente dominio los paquetes transmitidos de ordenes superiores también emergen del material no lineal con forma aproximadamente Gaussiana.

La derivada con respecto a la frecuencia angular de la fase de la amplitud de transmisión del primer armónico, tiene la interpretación conocida de un tiempo de retardo (de la propagación en el material con respecto a la propagación en el vacío) para un paquete de ondas de primeros armónicos, “estrecho” en el dominio de frecuencias. La aproximación binomial permite extender inmediatamente la interpretación para los órdenes superiores.

La derivada con respecto a la frecuencia angular de la fase de la amplitud de transmisión de un armónico no lineal “modificado”, es el tiempo de retardo para el correspondiente paquete de armónicos “modificados”, estrecho en el dominio de frecuencias.

El tiempo de retardo físicamente es la diferencia de tiempos en que ocuparían la misma posición el pico aproximadamente Gaussiano, de orden lineal o no, que emerge del material y el pico Gaussiano incidente moviéndose en el vacío.

Si establecemos que un armónico “modificado” de primer orden y un armónico “cuasinormal” (de hecho normal) del mismo orden son iguales, entonces podemos hablar en general de paquetes de ondas y de tiempos de retardo de todos los ordenes en la formulación binomial. Esta es la contribución sobresaliente de este trabajo de investigación. La formulación binomial produce ondas planas en el límite.

La incidencia de una onda electromagnética plana sobre un material no lineal de índice de refracción isotrópico, con la generación simultánea del segundo y tercer armónicos en la aproximación “no-depletion”; así como la formulación binomial de paquetes de ondas se aplican al caso de una superred construida con placas alternadas de AlAs y GaAs de grosor respectivo fijo.

Se presentan resultados numéricos sobre coeficientes de transmisión, tiempos de retardo y paquetes de ondas, del primero hasta el tercer orden debido a que demostramos que la aproximación binomial no afecta el tiempo de retardo de un segundo armónico “modificado” con respecto a un segundo armónico “cuasinormal”. En el mismo sentido, la aproximación binomial puede llegar a variar notablemente el tiempo de retardo de tercer orden.

CAPÍTULO 1

PROPAGACIÓN DE PAQUETES DE ONDAS GAUSSIANOS EN MEDIOS ESTRATIFICADOS NO LINEALES

La propagación de ondas electromagnéticas en medios con una distribución periódica del índice de refracción (photonic crystals: PC's) ha ido adquiriendo un creciente interés por sus propiedades físicas y posibles aplicaciones. En este contexto, fenómenos tales como la emisión espontánea inhibida, diseño de fibras ópticas, velocidades superluminales y una amplia gama de dispositivos optoelectrónicos han sido motivo de recientes y relevantes investigaciones.

Las propiedades no lineales de cristales fotónicos se han vuelto una nueva y apasionante área de investigación en óptica no lineal [1.1]. La confección de estados fotónicos y de sus relaciones de dispersión debidas a la variación espacial de la constante dieléctrica ofrecen extraordinarias posibilidades para la existencia de no linealidades importantes, condiciones de igualdad de fase (phase-matching), procesos de difracción y anisotropía, efectos resonantes, etc.

En cuanto a las no linealidades cuadráticas, la generación del segundo armónico (SHG) con igualdad de fase debida a un “molde” de birrefringencia [1.2] fue demostrada primero en superredes de GaAs/Al_xO_y [1.3] y más recientemente en silicio nanoestructurado [1.4]. Difracción no lineal en PC's bidimensionales (2D) con $\chi^{(2)}$ espacialmente variable fue predicha [1.5] y observada en “postes” de niobato de litio arreglados periódicamente [1.6]. Varias ideas para obtener una SHG intensa debida a igualdad de fase y a un incremento en la densidad de estados fotónicos han sido propuestas en microcavidades 1D [1.7] y sistemas periódicos [1.8]. La igualdad de fase fue también demostrada en PC's 3D coloidales [1.9].

Dentro de esta gran combinación de posibilidades, los paquetes de ondas electromagnéticas y los estudios correspondientes sobre tiempos de transmisión, en PC's 1D que presentan no linealidades de segundo y tercer orden, son objeto de este trabajo de investigación.

1.1 CRISTALES FOTÓNICOS Y EMISIÓN ESPONTÁNEA INHIBIDA

Se ha reconocido desde hace bastante tiempo [1.10] que la emisión espontánea por átomos no es necesariamente una propiedad inmutable y fija del acoplamiento entre materia y espacio, sino que puede controlarse por modificación de las propiedades del campo de radiación. Ha habido experimentos en los cuales la emisión espontánea por átomos de Rydberg [1.11] y por electrones atrapados de Penning [1.12] ha sido inhibida en una cavidad de microonda en la cual no hubo modos electromagnéticos a la frecuencia de transición. Tal capacidad no es menos importante en el estado sólido donde la emisión espontánea en la forma de recombinación radiativa electrón-hueco juega un papel decisivo. Para semiconductores de brecha directa es común [1.13] que la eficiencia cuántica de la emisión espontánea interna de recombinación electrón-hueco exceda el 90% aún a temperatura ambiente.

Por lo tanto Yablonovitch [1.14] sugirió que los semiconductores de brecha directa son un sistema físico natural para el estudio de la emisión espontánea inhibida. Esto es importante puesto que las cualidades técnicas de láseres semiconductores, transistores de heterounión bipolar y celdas solares están todas limitadas por la emisión espontánea.

Einstein predijo que la emisión espontánea debe inevitablemente coexistir con la absorción y la emisión estimulada. No sería ni factible ni deseable eliminar la emisión espontánea únicamente si ocurre que la función del semiconductor es la emisión o la absorción de la luz misma. Ejemplos de esto serían el láser semiconductor y la celda solar, respectivamente. En esos casos el objetivo sería restringir la emisión espontánea a solamente aquellos modos que son absolutamente necesarios. En otras funciones tales como el transistor de heterounión bipolar, donde el campo de radiación preferiblemente no tiene que estar, toda la emisión espontánea debe suprimirse si es posible.

Estructuras periódicas han venido jugando un papel cada vez más importante en láseres semiconductores. Por ejemplo, en láseres de realimentación clasificada [1.15] el índice de refracción es modulado periódicamente a lo largo del eje del láser. En óptica ondulatoria, estructuras de capas en las cuales el índice de refracción se alterna entre dos valores distintos y contrastantes cada cuarto de longitud de onda $\{n_{a,b}d_{a,b} = \lambda/4$ [1.16]} también se han vuelto indispensables. La modulación espacial periódica abre un intervalo prohibido en la relación de dispersión electromagnética, al menos para luz que se propaga

perpendicularmente a las capas. La prohibición de propagación ondulatoria en la brecha prohibida hace valiosas estas estructuras dieléctricas periódicas como espejos reflectores sumamente ideales, por ejemplo, para usarlos en resonadores de Fabry-Perot.

Periodicidad espacial tridimensional completa [*cubos de arista* $= \lambda/2(n_a + n_b)$] de $\lambda/2$ en el índice de refracción puede resultar en una brecha prohibida en el espectro electromagnético cerca de la longitud de onda λ sin tener en cuenta la dirección de propagación, justo como el espectro electrónico tiene una banda prohibida en cristales [1.14]. Si la banda prohibida electromagnética se traslapa con el borde de la banda electrónica por al menos unos cuantos kT de energía, entonces la recombinación radiativa electrón-hueco estará severamente inhibida. Tal inhibición puede ser mucho más completa que en una guía de onda metálica [1.11] puesto que las estructuras dieléctricas pueden en principio no tener pérdidas.

En general, estructuras dieléctricas periódicas de una, dos y tres dimensiones han llamado mucho la atención en la comunidad científica [1.14][1.17]. En tales materiales, la propagación del campo electromagnético está prohibida para una gama de frecuencias, y permitida para otras. La ausencia casi completa de algunas frecuencias en el espectro transmitido es referida como una banda fotónica prohibida (photonic band gap: PBG), en analogía con bandas semiconductoras prohibidas [1.18]. Este fenómeno está basado en la interferencia de la luz; para frecuencias dentro de la banda prohibida, las ondas que se propagan hacia adelante y hacia atrás pueden interferir destructivamente dentro de la estructura, conduciendo a reflexión completa (transmisión nula).

1.2 VELOCIDAD DE GRUPO EN LA PROPAGACIÓN DE UN PULSO RESONANTE

Los libros de texto introducen el concepto de la velocidad de grupo de un pulso electromagnético como un parámetro útil en la descripción de la propagación de un paquete de onda que es construido a partir de una banda estrecha de frecuencias [1.19]. Si la dispersión no es muy grande, tal pulso se propagará a la velocidad de grupo sin distorsión significativa. No obstante, si un medio es muy dispersivo, el pulso será muy distorsionado y el concepto de velocidad de grupo ya no es significativo.

Cuando una cierta frecuencia del pulso cae en una región de dispersión anómala, es posible que la velocidad de grupo sea más grande que la velocidad de la luz en el vacío (efecto superluminal). Durante los primeros años siguientes a la publicación de Einstein de la teoría especial de la relatividad, este comportamiento fue difícil de conciliar con el postulado que requiere que no existan señales que se propaguen a una velocidad más grande que la velocidad de la luz en el vacío, c . La contradicción aparente fue disipada cuando Sommerfeld [1.20] demostró que ninguna señal pudo propagarse más rápido que c y, de hecho, el frente de onda avanzó con una velocidad igual a c en todos los medios. Sommerfeld consideró el problema de un haz de luz que tiene amplitud cero hasta que se pone en marcha y después tiene una amplitud constante diferente de cero. Un estudio posterior de los detalles transitorios de la propagación de tal pulso de luz de función escalón fue realizado por Brillouin [1.21].

En 1970 Garrett y McCumber [1.22] han señalado que los pulsos que se obtienen a partir de algunos láseres de modo cerrado tienen envolventes que son aproximadamente de forma Gaussiana. Ellos entonces procedieron a estudiar analítica y numéricamente la propagación de un pulso en forma de Gaussiana en un medio resonantemente absorbente. Se encontró que bajo ciertas condiciones los pulsos se propagan de verdad con velocidades más grandes que c sin cambio de forma. Ellos explicaron sus resultados recordando que un pulso de luz que tiene una envolvente de la forma $E = E_0 e^{-4t^2/\tau^2}$ se extiende infinitamente en ambas direcciones a lo largo del eje temporal y por lo tanto no tiene principio o fin. Se argumentó entonces que la observación del pulso Gaussiano a una profundidad z en el medio en un tiempo $t < z/c$ una vez que el pulso penetró en el medio absorbente es un resultado de “la acción del medio dispersivo sobre las débiles primeras componentes de la envolvente” [1.23]. En el mismo año de 1970, Faxvog *et al* [1.24], han medido la velocidad de los pulsos láser de modo cerrado He-Ne que pasan a través de una celda de absorción resonante Ne. Las velocidades medidas fueron más grandes que c por unas pocas partes en 10^4 , confirmando los cálculos de Garrett y McCumber. La verificación experimental de tal predicción llamó a un análisis cuidadoso de la dinámica de la propagación del pulso para entender como los resultados de Garrett y McCumber pueden conciliarse con el análisis de Sommerfeld-Brillouin.

Crisp [1.25] demostró en 1971 que la predicción de Garrett y McCumber es debida a la absorción asimétrica de energía a partir del pulso de luz. Más energía es absorbida desde la mitad de la cola del pulso que desde la mitad del frente, causando que el centro de gravedad del pulso se mueva a una velocidad más grande que la velocidad de fase de la luz.

1.3 PULSOS ÓPTICOS A TRAVÉS DE BANDAS FOTÓNICAS PROHIBIDAS

El tunelamiento de una partícula a través de una barrera de potencial que es absolutamente opaca clásicamente es una de las características más impresionantes de la mecánica cuántica. En tanto que coeficientes de tunelamiento estacionario han sido calculados y experimentalmente verificados para una cantidad de sistemas diferentes, hasta 1994 solamente muy pocos experimentos habían proporcionado alguna información (indirecta) de la dinámica temporal del tunelamiento de una partícula. En sistemas de estado sólido la mayor dificultad se deriva del hecho de que los tiempos a través de la barrera de los electrones son del orden de $10^{-14} - 10^{-15} s$ [1.26], es decir, órdenes de magnitud más pequeños que el mejor tiempo de resolución realizable en electrónica.

Estudios experimentales interpretables claramente y sin ambigüedad de los aspectos temporales del tunelamiento son importantes no solamente para física de dispositivos semiconductores sino también desde un punto de vista físico fundamental a causa de que aún quedan algunos sorprendentes y hasta ahora sin verificar hallazgos teóricos del pasado. El primer estudio teórico de la dinámica del tunelamiento del electrón se remonta a los primeros años (1932) de la mecánica cuántica [1.27] y llevó a la conclusión de que “no hay retraso apreciable en la transmisión del paquete (de onda) a través de la barrera...” Más tarde, una investigación más cuantitativa por Hartman [1.28] produjo un tiempo de tunelamiento finito el cual, no obstante, llegó a ser independiente del espesor de la barrera para barreras gruesas (opacas). Esto implica que la velocidad de tunelamiento efectiva puede, en principio, aumentar infinitamente con barreras de espesor creciente, en aparente contradicción con la causalidad de Einstein.

Steinberg, Kwiat y Chiao reportaron en 1993 tunelamiento superluminal de fotones individuales a través de una barrera de banda fotónica prohibida 1D transmitiendo $T \approx 1\%$ de la radiación incidente [1.29]. En 1994 Spielmann *et al* extendieron el estudio a barreras

de $T \approx 10^{-4}$ usando paquetes de onda clásicos. Más de tres décadas después de la predicción de Hartman, en este trabajo se ofrecieron los primeros experimentos directos en el dominio del tiempo que confirman dicha predicción de la falta de dependencia del tiempo de tunelamiento del espesor de la barrera [1.30]. La relación de los resultados de tal experimento óptico con el tunelamiento del electrón es justificada por la analogía formal entre la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo y la ecuación de onda de Helmholtz que describe la propagación de ondas electromagnéticas monocromáticas [1.31]. Más allá de las dificultades mencionadas anteriormente asociadas a los experimentos de tunelamiento del electrón, la conveniencia del retraso de grupo o tiempo de fase (la derivada con respecto a la energía del cambio de fase de la transmisión) deducido a partir del enfoque de la propagación del paquete de onda [1.27][1.28], como una medida precisa físicamente significativa para el tiempo a través de la barrera, ha sido cuestionada [1.32]. Los mayores problemas en la medición del tiempo de fase se originan de (i) una distorsión de la forma del paquete de onda transmitido y (ii) un espectro de energía cambiado, haciendo diferente la velocidad de propagación sobre los dos lados de la barrera [1.33]. Estos efectos deterioran severamente la precisión de las mediciones del tiempo de “vuelo”.

En 1991 fue establecida una estrecha analogía entre el tunelamiento del electrón a través de una barrera de potencial rectangular y la propagación de un pulso electromagnético (EM) clásico a través de una guía de onda con una región evanescente (frecuencia de corte más grande que aquella de la onda EM) [1.34], seguida por una serie de reportes sobre tunelamiento superluminal de microondas [1.35]. Sin embargo, a causa de la estrecha correspondencia entre la función energía versus momento para el electrón en la barrera y la función frecuencia versus número de onda para la onda EM en la región de corte, los problemas asociados con una distorsión espectral en la barrera son aquí en existencia de la misma extensión como en el tunelamiento del electrón.

En contraste, usar materiales de banda fotónica prohibida 1D como la barrera óptica suministra condiciones ideales para los experimentos de tunelamiento a causa de (i) las velocidades de grupo de los paquetes de onda incidente y transmitido son iguales y conocidas, y (ii) las curvas de dispersión y transmisión son lentamente variables sobre una gama ancha de frecuencias alrededor del centro de la banda fotónica prohibida. La importante implicación de (i) es que la evaluación del tiempo de tunelamiento a partir de

las mediciones del tiempo de “vuelo” entre algunos puntos de referencia x_1 y x_2 externos a la barrera se vuelve independiente de la elección específica de x_1 y x_2 así como de los cambios en el espectro del paquete de onda tras el tunelamiento, mientras que (ii) permite transmitir paquetes de onda de banda ancha con pequeña distorsión, es decir, para mejores tiempos de resolución [1.30].

Velocidades de grupo superluminales de pulsos EM han sido previamente predichas [1.22] y observadas [1.36] en un medio absorbente y atribuidas al tiempo de respuesta finito de la polarización atómica resonante al campo aplicado [1.25]. De una manera análoga, la propagación de pulsos superluminales en un material de banda fotónica prohibida se relaciona con el tiempo de respuesta finito tomado por la reflectividad del sistema para llegar a su valor de estado estacionario. Estas observaciones han sido explicadas en 1993, sobre la base de argumentos generales [1.37]. Puede demostrarse, no obstante, que pese a las velocidades de grupo paradójicamente altas, el pico de amplitud del pulso que emerge de la muestra es siempre más bajo que la amplitud que el pulso tendría en el mismo instante si estuviera justamente propagándose a c sin atenuación, es decir, la velocidad de energía no excede c y por lo tanto la causalidad no es violada [1.30].

1.4 TIEMPOS DE RETARDO NO LINEALES PARA PULSOS ÓPTICOS

En este trabajo, retomamos el estudio del tiempo de retardo o tiempo de fase para la respuesta lineal, extendiéndolo a la respuesta no lineal de propagación ondulatoria en un análogo unidimensional del material PBG: una estructura de multicapas que consiste de material dieléctrico alternado. Estas estructuras, comúnmente conocidas como reflectores de Bragg, muestran regiones prohibidas de transmisión ondulatoria EM en la dirección de acodadura, conocidas como bandas de pausa (stop bands). Específicamente, empleamos un sistema periódico binario AlAs/GaAs.

El tiempo de retardo para paquetes que son estrechos en frecuencia, es la diferencia entre el tiempo en que el paquete transmitido tiene determinado plano de amplitud máxima y el tiempo en el que el paquete incidente tiene el mismo plano de amplitud máxima.

Nuestros cálculos fueron hechos considerando que el paquete de primer orden no se reduce sustancialmente por su interacción con los de órdenes superiores (aproximación “no-depletion”).

En la aproximación “no-depletion” y para un paquete de onda incidente, estableceremos la manera de obtener los paquetes de onda correspondientes a las sumas de frecuencias de segundo y tercer orden, aunque la idea puede fácilmente extenderse a órdenes superiores. Sin embargo podríamos tener problemas con el tiempo de cálculo numérico, de hecho el orden nos indica el número de sumatorias que deben efectuarse para construir un paquete. El paquete de suma de frecuencias de orden no lineal n es algo más que una simple superposición de los armónicos correspondientes.

No obstante si consideramos un paquete de onda incidente de forma Gaussiana construido a partir de una banda estrecha de frecuencias y algunos parámetros de ajuste, los paquetes transmitidos no lineales de cualquier orden, pueden expresarse de manera muy similar a una simple superposición de los armónicos correspondientes. A esta simplificación adicional le hemos llamado la aproximación de sumatoria simple. Bajo esta situación la generalización del tiempo de fase para los paquetes de enésimo orden es inmediata (la enésima parte de la derivada con respecto a la frecuencia angular de la fase de la amplitud de transmisión).

Con el fin de abordar los temas aquí propuestos esta tesis se desarrolla de la siguiente manera:

En el Capítulo 2 partiendo de las ecuaciones de Maxwell se presenta la teoría básica de la óptica no lineal, relacionada con las ondas de primer, segundo y tercer armónico.

En el Capítulo 3 se discute sobre la construcción de paquetes de ondas tipo Gaussiano para el primer, segundo y tercer ordenes, en la aproximación “no-depletion”, presentando al final del capítulo la definición del tiempo de retardo usado en los cálculos.

En el Capítulo 4 se presentan los resultados del trabajo que incluyen los cálculos del tiempo de fase para cada uno de los armónicos, así como la discusión de la propagación del paquete de ondas en la estructura periódica compuesta de los materiales que presentan una respuesta no lineal ante la incidencia de ondas electromagnéticas en el rango de frecuencias elegido.

Finalmente se presentan las conclusiones y la bibliografía usada en este trabajo. Se anexan los trabajos y las publicaciones asociadas a los resultados de la Tesis.

CAPÍTULO 2

TEORÍA BÁSICA DE LA ÓPTICA NO LINEAL, PARA EL PRIMERO, SEGUNDO Y TERCER ARMÓNICOS

En este Capítulo se considera la formulación completa del problema de óptica no lineal, que será la base para el tratamiento de simplificaciones y generalizaciones en el Capítulo 3, esto es, se tratará la incidencia de una onda (primer armónico) electromagnética plana sobre un material no lineal de índice de refracción isotrópico (escalar), con la generación simultánea del segundo y tercer armónico.

En otras palabras, queremos conocer las relaciones que resultan cuando se propone a $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ como la suma de tres ondas con frecuencias respectivas ω_0 , $2\omega_0$ y $3\omega_0$, en las ecuaciones de Maxwell, para un material donde la aproximación hasta tercer orden en la serie de Taylor, es tomada en cuenta en el desarrollo del momento dipolar por unidad de volumen $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$. Aunque la expansión de $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ en serie de potencias de $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ puede tratarse de manera más realista que mediante al simple desarrollo de Taylor [2.1], esta aportación también se incorpora al análisis correspondiente.

Una manifestación física de la validez del proceso seguido para obtener el sistema de ecuaciones acopladas exactas que relacionan los tres primeros armónicos, es que ellas satisfacen el teorema de Poynting.

Nos daremos cuenta de que la solución exacta de las ecuaciones acopladas que resultan es una empresa complicada que no llevaremos a cabo. En este Capítulo ni siquiera planteamos la solución simple “no-depletion”. Sin embargo el método formal seguido para la formulación completa del problema no lineal planteado utiliza ideas generales, por lo que representa el antecedente teórico de los paquetes de ondas cuasiindependientes que trataremos en el siguiente Capítulo, paquetes que en el límite adecuado deberán poder reproducir las soluciones monocromáticas “no-depletion” relacionadas con el análisis presente.

2.1 CONVENIO DE NOTACIÓN EMPLEADA PARA UNA SUMATORIA

Con el fin de usar una notación más simplificada en las repetidas sumas que aparecerán a lo largo de este trabajo se expresará por ejemplo para dos vectores de orden n , $\mathbf{A}_n \cdot \mathbf{B}_n = \sum_{i=1}^{i=3} A_{ni} B_{ni} = \delta_i^i A_{ni} B_{ni} = \delta_\alpha^\alpha A_{n\alpha} B_{n\alpha} = A_{n\alpha} B_{n\alpha} \neq \delta_n^n \delta_\alpha^\alpha A_{n\alpha} B_{n\alpha}$. En otras palabras, el símbolo típico de sumatoria \sum_i^i será remplazado por $\delta_i^i = \delta_{ii} \neq 1$, además adoptaremos el convenio de suma implícita solamente sobre índices griegos repetidos. Esto último a causa de que podemos tener índices repetidos sin que esto signifique necesariamente la suma correspondiente.

Si distinguimos un símbolo general de sumatoria tal como $\delta_{ii} \neq 1$, de los términos particulares de ella a los que puede aplicarse la definición de la delta de Kronecker, entonces podemos hacer la siguiente reinterpretación para el ejemplo anterior $\delta_{ii} A_{ni} B_{ni} = \delta_{11} A_{n1} B_{n1} + \delta_{22} A_{n2} B_{n2} + \delta_{33} A_{n3} B_{n3} = A_{n1} B_{n1} + A_{n2} B_{n2} + A_{n3} B_{n3}$, lo que implica que a un símbolo de sumatoria le podemos atribuir la propiedad de “conmutatividad” $\delta_{ii} A_{ni} B_{ni} = A_{nj} \delta_{jj} B_{nj} = A_{n\alpha} B_{n\alpha} \delta_{\alpha\alpha} = A_{n\alpha} B_{n\alpha}$.

De acuerdo con esto la notación usada en los siguientes desarrollos emplea la convención de “suma explícita modificada y conmutativa” y solamente con índices griegos repetidos recurriremos a la convención de suma implícita.

2.2 LA ECUACIÓN DE ONDA

La formulación teórica de la que se parte consiste en las relaciones constitutivas junto a las ecuaciones de Maxwell, que se expresan a través de

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D} &= \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \\
 \mathbf{B} &= \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M} = \mathbf{H}, & \mathbf{M} &= 0 \\
 \nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho = 0, & \rho &= 0 \\
 \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\
 \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\
 \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & \mathbf{J} &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Mediante las relaciones (2.1) se obtienen la ecuación de onda y el teorema de Poynting que en orden respectivo son

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \nabla[\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + 4\pi \mathbf{P}^{(L)}(\mathbf{r}, t)] &= \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}^{(NL)}(\mathbf{r}, t) \\ \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)] &= -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} [E^2(\mathbf{r}, t) + H^2(\mathbf{r}, t)] - \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{P}^{(L)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}^{(NL)}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{P}^{(L)}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{P}^{(NL)}(\mathbf{r}, t) &= \delta_m \mathbf{P}^{(n)}(\mathbf{r}, t), \quad n \geq 2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Para un medio homogéneo, tenemos [2.1]

$$\begin{aligned} P_\alpha^{(n)}(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{\alpha\beta_1 \dots \beta_n}^{(n)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, t - t_1; \dots; \mathbf{r} - \mathbf{r}_n, t - t_n) \\ &\quad \times E_{\beta_1}(\mathbf{r}_1, t_1) \dots E_{\beta_n}(\mathbf{r}_n, t_n) d^3 r_1 dt_1 \dots d^3 r_n dt_n \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3 k_1 d\omega_1 \dots d^3 k_n d\omega_n}{(2\pi)^{4n}} \chi_{\alpha\beta_1 \dots \beta_n}^{(n)}(\mathbf{k}_1, \omega_1; \dots; \mathbf{k}_n, \omega_n) \right. \\ &\quad \left. \times e^{i\mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)} e^{-i\omega_1(t - t_1)} \dots e^{i\mathbf{k}_n \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_n)} e^{-i\omega_n(t - t_n)} \right. \\ &\quad \left. \times E_{\beta_1}(\mathbf{r}_1, t_1) \dots E_{\beta_n}(\mathbf{r}_n, t_n) d^3 r_1 dt_1 \dots d^3 r_n dt_n \right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3 k_1 d\omega_1 \dots d^3 k_n d\omega_n}{(2\pi)^{4n}} \left[\chi_{\alpha\beta_1 \dots \beta_n}^{(n)}(\mathbf{k}_1, \omega_1; \dots; \mathbf{k}_n, \omega_n) \right. \\ &\quad \left. \times E_{\beta_1}(\mathbf{k}_1, \omega_1) \dots E_{\beta_n}(\mathbf{k}_n, \omega_n) \right] \\ &\quad \times e^{i(\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_n) \cdot \mathbf{r}} e^{-i(\omega_1 + \dots + \omega_n)t}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde la primera parte de la ecuación (2.4) es una relación entre cantidades reales exclusivamente, en particular $\chi_{\alpha\beta_1 \dots \beta_n}^{(n)}(\mathbf{r}_1, t_1; \dots; \mathbf{r}_n, t_n)$ es real. Para la segunda y tercera parte de la ecuación (2.4), hemos hecho las sustituciones

$$\begin{aligned}
& \chi_{\alpha\beta_1 \dots \beta_n}^{(n)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1, t-t_1; \dots; \mathbf{r}-\mathbf{r}_n, t-t_n) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3k_1 d\omega_1 \dots d^3k_n d\omega_n}{(2\pi)^{4n}} \chi_{\alpha\beta_1 \dots \beta_n}^{(n)}(\mathbf{k}_1, \omega_1; \dots; \mathbf{k}_n, \omega_n) \\
&\quad \times e^{i\mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)} e^{-i\omega_1(t-t_1)} \dots e^{i\mathbf{k}_n \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}_n)} e^{-i\omega_n(t-t_n)} \\
& \int_{-\infty}^{+\infty} d^3r_1 dt_1 \dots d^3r_n dt_n E_{\beta_1}(\mathbf{r}_1, t_1) \dots E_{\beta_n}(\mathbf{r}_n, t_n) e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1} e^{i\omega_1 t_1} \dots e^{-i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}_n} e^{i\omega_n t_n} \\
&= E_{\beta_1}(\mathbf{k}_1, \omega_1) \dots E_{\beta_n}(\mathbf{k}_n, \omega_n),
\end{aligned} \tag{2.5}$$

que son generalizaciones del par de transformadas de Fourier

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3k d\omega}{(2\pi)^4} f(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega t} \\
f(\mathbf{k}, \omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d^3r dt f(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{i\omega t}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

La extensión espacial de $\chi_{\alpha\beta_1 \dots \beta_n}^{(n)}(\mathbf{r}_1, t_1; \dots; \mathbf{r}_n, t_n)$ es microscópica [2.1], la cual está confinada a unos pocos diámetros moleculares. Así, las longitudes de onda de las ondas ópticas de interés para nosotros serán muy grandes comparadas con el alcance de $\chi_{\alpha\beta_1 \dots \beta_n}^{(n)}(\mathbf{r}_1, t_1; \dots; \mathbf{r}_n, t_n)$. La longitud de onda de la luz visible, 5000Å (0.5 micrones), es unas pocas miles de veces más grande que las longitudes de enlace intermolecular o separaciones (2-3Å); y las longitudes de onda infrarrojas son de muchos micrones. Bajo estas circunstancias, podemos frecuentemente no hacer caso de la influencia de la dependencia del vector de onda.

Específicamente, para este trabajo tenemos como referencia las siguientes longitudes de onda: $3\mu m$ (30000Å para el primer armónico), $1.5\mu m$ (15000Å para el segundo armónico), $1\mu m$ (10000Å para el tercer armónico). Luego entonces, estamos dentro de los límites que nos permiten hacer la siguiente aproximación

$$\begin{aligned}
\chi_{\alpha\beta_1 \dots \beta_n}^{(n)}(\mathbf{k}_1, \omega_1; \dots; \mathbf{k}_n, \omega_n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d^3 r_1 dt_1 \dots d^3 r_n dt_n \chi_{\alpha\beta_1 \dots \beta_n}^{(n)}(\mathbf{r}_1, t_1; \dots; \mathbf{r}_n, t_n) \\
&\quad \times e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1} e^{i\omega_1 t_1} \dots e^{-i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}_n} e^{i\omega_n t_n} \\
&\simeq \int_{-\infty}^{+\infty} d^3 r_1 dt_1 \dots d^3 r_n dt_n \chi_{\alpha\beta_1 \dots \beta_n}^{(n)}(\mathbf{r}_1, t_1; \dots; \mathbf{r}_n, t_n) \\
&\quad \times e^{i\omega_1 t_1} \dots e^{i\omega_n t_n} \\
&= \chi_{\alpha\beta_1 \dots \beta_n}^{(n)}(0, \omega_1; \dots; 0, \omega_n) \equiv \chi_{\alpha\beta_1 \dots \beta_n}^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_n).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Observemos que $\chi_{\alpha\beta_1 \dots \beta_n}^{(n)*}(\omega_1, \dots, \omega_n) = \chi_{\alpha\beta_1 \dots \beta_n}^{(n)}(-\omega_1, \dots, -\omega_n)$.

Con la aproximación (2.7), se tiene para (2.4)

$$\begin{aligned}
P_\alpha^{(n)}(\mathbf{r}, t) &\simeq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3 k_1 d\omega_1 \dots d^3 k_n d\omega_n}{(2\pi)^{4n}} \left[\chi_{\alpha\beta_1 \dots \beta_n}^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_n) \right. \\
&\quad \left. \times E_{\beta_1}(\mathbf{k}_1, \omega_1) \dots E_{\beta_n}(\mathbf{k}_n, \omega_n) \right] \\
&\quad \times e^{i(\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_n) \cdot \mathbf{r}} e^{-i(\omega_1 + \dots + \omega_n)t} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega_1 \dots d\omega_n}{(2\pi)^n} \left[\chi_{\alpha\beta_1 \dots \beta_n}^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_n) \right. \\
&\quad \left. \times E_{\beta_1}(\mathbf{r}, \omega_1) \dots E_{\beta_n}(\mathbf{r}, \omega_n) \right] e^{-i(\omega_1 + \dots + \omega_n)t}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

2.3 UNA SOLUCIÓN PARA LA ECUACIÓN DE ONDA: EL CAMPO ELÉCTRICO COMO LA SUMA DE LOS TRES PRIMEROS ARMÓNICOS

Tomando en cuenta el requisito de que $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ sean reales, ahora proponemos la forma siguiente para las componentes del campo eléctrico

$$\begin{aligned}
E_\beta(\mathbf{r}, t) &= \delta_{mn} E_{\beta_n}(\mathbf{r}) e^{-in\omega_0 t} = \delta_{mn} E_{\beta_n}(\mathbf{r}, t) \\
n &= -3, -2, -1, +1, +2, +3 \\
E_{\beta(-n)}(\mathbf{r}) &= E_{\beta_n}^*(\mathbf{r}).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

A través de la versión unidimensional de la segunda transformada de Fourier (2.6), tenemos para el campo (2.9)

$$E_\beta(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt E_\beta(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} = \delta_{mn} E_{\beta n}(\mathbf{r}) \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i(\omega - n\omega_0)t} = 2\pi \delta_{mn} E_{\beta n}(\mathbf{r}) \delta(\omega - n\omega_0). \quad (2.10)$$

Por (2.10) las polarizaciones de primer, segundo y tercer órdenes (2.8) se escriben como

$$\begin{aligned} P_\alpha^{(1)}(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \chi_{\alpha\beta}^{(1)}(\omega) \left[2\pi \delta_{mn} E_{\beta n}(\mathbf{r}) \delta(\omega - n\omega_0) \right] e^{-i\omega t} = \delta_{mn} \chi_{\alpha\beta}^{(1)}(n\omega_0) E_{\beta n}(\mathbf{r}) e^{-in\omega_0 t} \\ &= \delta_{mn} \delta_{\alpha\beta} \chi(n\omega_0) E_{\beta n}(\mathbf{r}) e^{-in\omega_0 t} = \delta_{mn} \chi(n\omega_0) E_{\alpha n}(\mathbf{r}) e^{-in\omega_0 t} \\ P_\alpha^{(2)}(\mathbf{r}, t) &= \delta_{n_1 n_1} \delta_{n_2 n_2} \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(n_1\omega_0, n_2\omega_0) E_{\beta n_1}(\mathbf{r}) E_{\gamma n_2}(\mathbf{r}) e^{-i(n_1+n_2)\omega_0 t} \\ P_\alpha^{(3)}(\mathbf{r}, t) &= \delta_{n_1 n_1} \delta_{n_2 n_2} \delta_{n_3 n_3} \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(n_1\omega_0, n_2\omega_0, n_3\omega_0) E_{\beta n_1}(\mathbf{r}) E_{\gamma n_2}(\mathbf{r}) E_{\delta n_3}(\mathbf{r}) e^{-i(n_1+n_2+n_3)\omega_0 t}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde hemos tomado en cuenta que el tensor de susceptibilidad de primer orden se reduce a un escalar.

Limitándonos a la polarización no lineal para $n_1 + n_2, n_1 + n_2 + n_3 = n$, entonces (2.11) se reduce a

$$\begin{aligned} P_\alpha^{(1)}(\mathbf{r}, t) &= \delta_{mn} \chi(n\omega_0) E_{\alpha n}(\mathbf{r}) e^{-in\omega_0 t} = \delta_{mn} P_{\alpha n}^{(1)}(\mathbf{r}) e^{-in\omega_0 t} = \delta_{mn} P_{\alpha n}^{(1)}(\mathbf{r}, t) \\ P_\alpha^{(2)}(\mathbf{r}, t) &= \delta_{mn} \delta_{n_1+n_2}^n \delta_{n_1 n_1} \delta_{n_2 n_2} \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(n_1\omega_0, n_2\omega_0) E_{\beta n_1}(\mathbf{r}) E_{\gamma n_2}(\mathbf{r}) e^{-in\omega_0 t} \\ &= \delta_{mn} P_{\alpha n}^{(2)}(\mathbf{r}) e^{-in\omega_0 t} = \delta_{mn} P_{\alpha n}^{(2)}(\mathbf{r}, t) \\ P_\alpha^{(3)}(\mathbf{r}, t) &= \delta_{mn} \delta_{n_1+n_2+n_3}^n \delta_{n_1 n_1} \delta_{n_2 n_2} \delta_{n_3 n_3} \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(n_1\omega_0, n_2\omega_0, n_3\omega_0) E_{\beta n_1}(\mathbf{r}) E_{\gamma n_2}(\mathbf{r}) E_{\delta n_3}(\mathbf{r}) e^{-in\omega_0 t} \\ &= \delta_{mn} P_{\alpha n}^{(3)}(\mathbf{r}) e^{-in\omega_0 t} = \delta_{mn} P_{\alpha n}^{(3)}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (2.12)$$

De acuerdo con el campo eléctrico de (2.9), las polarizaciones de (2.12) y reconociendo una igualdad para cada valor de n , entonces la ecuación de onda en (2.2) se expresa como

$$\begin{aligned}
& \left[\nabla^2 - \nabla(\nabla \cdot) + \frac{(n\omega_0)^2}{c^2} \varepsilon(n\omega_0) \right] \mathbf{E}_n(\mathbf{r}, t) = -4\pi \frac{(n\omega_0)^2}{c^2} \mathbf{P}_n^{(2,3)}(\mathbf{r}, t) \\
& \mathbf{P}_n^{(2,3)}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{e}}_\alpha \left[\begin{aligned} & \delta_{n_1+n_2}^n \delta_{n_1 n_1} \delta_{n_2 n_2} \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(n_1\omega_0, n_2\omega_0) E_{\beta n_1}(\mathbf{r}, t) E_{\gamma n_2}(\mathbf{r}, t) \\ & + \delta_{n_1+n_2+n_3}^n \delta_{n_1 n_1} \delta_{n_2 n_2} \delta_{n_3 n_3} \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(n_1\omega_0, n_2\omega_0, n_3\omega_0) \\ & \quad \times E_{\beta n_1}(\mathbf{r}, t) E_{\gamma n_2}(\mathbf{r}, t) E_{\delta n_3}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \right], \quad (2.13)
\end{aligned}$$

donde por construcción la dependencia del tiempo puede suprimirse y

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}_n^{(2,3)}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}_n^{(2)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}_n^{(3)}(\mathbf{r}, t) \\
& \varepsilon(n\omega_0) = 1 + 4\pi\chi(n\omega_0) \\
& \varepsilon^*(n\omega_0) = 1 + 4\pi\chi(-n\omega_0) = \varepsilon(-n\omega_0). \quad (2.14)
\end{aligned}$$

Con (2.13) podemos establecer ecuaciones para los casos de $n = +1, +2, +3$. Las situaciones donde $n = -1, -2, -3$, son equivalentes a la obtención de las respectivas conjugaciones complejas de las primeras ecuaciones. Las ecuaciones (A.4)-(A.7) del Apéndice, nos indican que

$$\begin{aligned}
& \left[\nabla^2 - \nabla(\nabla \cdot) + \frac{\omega_0^2}{c^2} \varepsilon(\omega_0) \right] \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = -4\pi \frac{\omega_0^2}{c^2} \mathbf{P}_1^{(2,3)}(\mathbf{r}, t) \\
& \mathbf{P}_1^{(2,3)}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{e}}_\alpha \left[\begin{aligned} & 2\chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(-2\omega_0 + 3\omega_0) E_{\beta 2}^*(\mathbf{r}, t) E_{\gamma 3}(\mathbf{r}, t) \\ & + 2\chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(-1\omega_0 + 2\omega_0) E_{\beta 1}^*(\mathbf{r}, t) E_{\gamma 2}(\mathbf{r}, t) \\ & + 6\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(-3\omega_0 + 1\omega_0 + 3\omega_0) E_{\beta 3}^*(\mathbf{r}, t) E_{\gamma 1}(\mathbf{r}, t) E_{\delta 3}(\mathbf{r}, t) \\ & + 3\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(-3\omega_0 + 2\omega_0 + 2\omega_0) E_{\beta 3}^*(\mathbf{r}, t) E_{\gamma 2}(\mathbf{r}, t) E_{\delta 2}(\mathbf{r}, t) \\ & + 6\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(-2\omega_0 + 1\omega_0 + 2\omega_0) E_{\beta 2}^*(\mathbf{r}, t) E_{\gamma 1}(\mathbf{r}, t) E_{\delta 2}(\mathbf{r}, t) \\ & + 3\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(-1\omega_0 - 1\omega_0 + 3\omega_0) E_{\beta 1}^*(\mathbf{r}, t) E_{\gamma 1}^*(\mathbf{r}, t) E_{\delta 3}(\mathbf{r}, t) \\ & + 3\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(-1\omega_0 + 1\omega_0 + 1\omega_0) E_{\beta 1}^*(\mathbf{r}, t) E_{\gamma 1}(\mathbf{r}, t) E_{\delta 1}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \right], \quad (2.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\nabla^2 - \nabla(\nabla \cdot) + \frac{(2\omega_0)^2}{c^2} \varepsilon(2\omega_0) \right] \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = -4\pi \frac{(2\omega_0)^2}{c^2} \mathbf{P}_2^{(2,3)}(\mathbf{r}, t) \\
& \mathbf{P}_2^{(2,3)}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{e}}_\alpha \left[\begin{array}{l} 2\chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(-1\omega_0 + 3\omega_0)E_{\beta 1}^*(\mathbf{r}, t)E_{\gamma 3}(\mathbf{r}, t) \\ +1\chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(+1\omega_0 + 1\omega_0)E_{\beta 1}(\mathbf{r}, t)E_{\gamma 1}(\mathbf{r}, t) \\ +6\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(-3\omega_0 + 2\omega_0 + 3\omega_0)E_{\beta 3}^*(\mathbf{r}, t)E_{\gamma 2}(\mathbf{r}, t)E_{\delta 3}(\mathbf{r}, t) \\ +6\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(-2\omega_0 + 1\omega_0 + 3\omega_0)E_{\beta 2}^*(\mathbf{r}, t)E_{\gamma 1}(\mathbf{r}, t)E_{\delta 3}(\mathbf{r}, t) \\ +3\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(-2\omega_0 + 2\omega_0 + 2\omega_0)E_{\beta 2}^*(\mathbf{r}, t)E_{\gamma 2}(\mathbf{r}, t)E_{\delta 2}(\mathbf{r}, t) \\ +6\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(-1\omega_0 + 1\omega_0 + 2\omega_0)E_{\beta 1}^*(\mathbf{r}, t)E_{\gamma 1}(\mathbf{r}, t)E_{\delta 2}(\mathbf{r}, t) \end{array} \right], \quad (2.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\nabla^2 - \nabla(\nabla \cdot) + \frac{(3\omega_0)^2}{c^2} \varepsilon(3\omega_0) \right] \mathbf{E}_3(\mathbf{r}, t) = -4\pi \frac{(3\omega_0)^2}{c^2} \mathbf{P}_3^{(2,3)}(\mathbf{r}, t) \\
& \mathbf{P}_3^{(2,3)}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{e}}_\alpha \left[\begin{array}{l} 2\chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(+1\omega_0 + 2\omega_0)E_{\beta 1}(\mathbf{r}, t)E_{\gamma 2}(\mathbf{r}, t) \\ +3\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(-3\omega_0 + 3\omega_0 + 3\omega_0)E_{\beta 3}^*(\mathbf{r}, t)E_{\gamma 3}(\mathbf{r}, t)E_{\delta 3}(\mathbf{r}, t) \\ +6\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(-2\omega_0 + 2\omega_0 + 3\omega_0)E_{\beta 2}^*(\mathbf{r}, t)E_{\gamma 2}(\mathbf{r}, t)E_{\delta 3}(\mathbf{r}, t) \\ +6\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(-1\omega_0 + 1\omega_0 + 3\omega_0)E_{\beta 1}^*(\mathbf{r}, t)E_{\gamma 1}(\mathbf{r}, t)E_{\delta 3}(\mathbf{r}, t) \\ +3\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(-1\omega_0 + 2\omega_0 + 2\omega_0)E_{\beta 1}^*(\mathbf{r}, t)E_{\gamma 2}(\mathbf{r}, t)E_{\delta 2}(\mathbf{r}, t) \\ +1\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(+1\omega_0 + 1\omega_0 + 1\omega_0)E_{\beta 1}(\mathbf{r}, t)E_{\gamma 1}(\mathbf{r}, t)E_{\delta 1}(\mathbf{r}, t) \end{array} \right]. \quad (2.17)
\end{aligned}$$

A través de la convención de suma implícita se tiene, en coordenadas rectangulares

$$\begin{aligned}
& \nabla^2 \mathbf{E}_n(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{e}}_\alpha \nabla^2 E_{\alpha n}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{e}}_\alpha \frac{\partial}{\partial \gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} E_{\alpha n}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{e}}_\alpha \frac{\partial}{\partial \gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \delta_{\alpha\beta} E_{\beta n}(\mathbf{r}, t) \\
& \nabla[\nabla \cdot \mathbf{E}_n(\mathbf{r}, t)] = \hat{\mathbf{e}}_\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} E_{\beta n}(\mathbf{r}, t) \right], \quad (2.18)
\end{aligned}$$

por lo que la componente α de la ecuación de onda (2.13) puede expresarse como

$$\left[\frac{\partial}{\partial \gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \delta_{\alpha\beta} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{(n\omega_0)^2}{c^2} \varepsilon(n\omega_0) \delta_{\alpha\beta} \right] E_{\beta n}(\mathbf{r}, t) = -4\pi \frac{(n\omega_0)^2}{c^2} P_{\alpha n}^{(2,3)}(\mathbf{r}, t). \quad (2.19)$$

2.4 ECUACIONES ACOPLADAS DE LOS CAMPOS, PARA UN ELEMENTO DE UNA ESTRUCTURA MULTICAPAS: CAPA DE MATERIAL NO LINEAL

Consideremos una capa de material no lineal, de área $A = x_0 y_0$ centrada en el origen de coordenadas y grosor $l = z_0$. Si $x_0, y_0 \gg z_0$ y evitando los efectos de “orilla”, podemos tomar la aproximación de área infinita y en consecuencia suponer que las amplitudes de los campos dentro del material dependen sólo de la coordenada z .

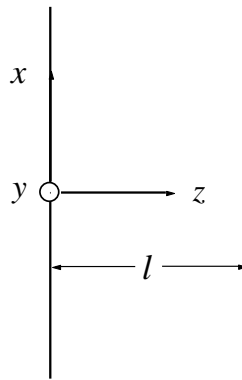


FIGURA 2.1. Capa de material no lineal de área infinita sobre el plano xy .

Retomando la ecuación (2.9) para las componentes del campo eléctrico, escribimos

$$\begin{aligned}
 E_{an}(\mathbf{r}) &= E_{an}(z)e^{ik_n \cdot \mathbf{r}} \\
 E_{a(-n)}(z) &= E_{an}^*(z) \\
 \mathbf{k}_n &= \hat{\mathbf{e}}_x k_{xn} = \hat{\mathbf{e}}_x nk_{x1} + \hat{\mathbf{e}}_y nk_{y1} + \hat{\mathbf{e}}_z k_{zn} \\
 k_n^2 &= \frac{(n\omega_0)^2}{c^2} \varepsilon(n\omega_0).
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

La relación (2.20) aún es lo suficientemente general para admitir la situación del Capítulo 3, en donde se considerará una estructura multicapas. Para ello sólo habrá que considerar

$$\begin{aligned}
E_{an}(\mathbf{r}) &= E_{an}^+(z)e^{i(nk_{x1}x+nk_{y1}y+k_{zn}z)} + E_{an}^-(z)e^{i(nk_{x1}x+nk_{y1}y-k_{zn}z)} \\
&= \left[E_{an}^+(z) + E_{an}^-(z)e^{-i2k_{zn}z} \right] e^{i(nk_{x1}x+nk_{y1}y+k_{zn}z)} = E_{an}(z)e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}}.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Las ecuaciones propuestas (2.9) y (2.20) tienen como consecuencia

$$\begin{aligned}
k_{x1} &= k_{x1}^* = \text{real} \\
k_{y1} &= k_{y1}^* = \text{real} \\
k_{z(-n)} &= -k_{zn}^*.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Si de acuerdo con (2.20) desarrollamos (2.19) [ver (A.8)-(A.9) del Apéndice]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \delta_{\alpha\beta} E_{\beta n}(\mathbf{r}) &= \left[\left(\frac{d^2}{dz^2} + 2ik_{zn} \frac{d}{dz} - k_n^2 \right) E_{an}(z) \right] e^{in(k_{x1}x+k_{y1}y)} e^{ik_{zn}z}, \\
-\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} E_{\beta n}(\mathbf{r}) &= - \left\{ \left(\delta_{\alpha z} \frac{d}{dz} + ik_{an} \right) \left[\frac{dE_{zn}(z)}{dz} + i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{E}_n(z) \right] \right\} e^{in(k_{x1}x+k_{y1}y)} e^{ik_{zn}z}, \\
\frac{(n\omega_0)^2}{c^2} \varepsilon(n\omega_0) \delta_{\alpha\beta} E_{\beta n}(\mathbf{r}) &= k_n^2 E_{an}(z) e^{in(k_{x1}x+k_{y1}y)} e^{ik_{zn}z},
\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}
P_{an}^{(2,3)}(\mathbf{r}) &= P_{an}^{(2,3)}(z) e^{in(k_{x1}x+k_{y1}y)} \\
P_{an}^{(2,3)}(z) &= \left[\begin{aligned} &\delta_{n_1+n_2}^n \delta_{n_1 n_1} \delta_{n_2 n_2} \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(n_1, n_2) E_{\beta n_1}(z) E_{\gamma n_2}(z) e^{i(k_{zn_1}+k_{zn_2})z} \\ &+ \delta_{n_1+n_2+n_3}^n \delta_{n_1 n_1} \delta_{n_2 n_2} \delta_{n_3 n_3} \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(n_1, n_2, n_3) E_{\beta n_1}(z) E_{\gamma n_2}(z) E_{\delta n_3}(z) \\ &\times e^{i(k_{zn_1}+k_{zn_2}+k_{zn_3})z} \end{aligned} \right] \\
\chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(n_1, n_2) &= \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(n_1\omega_0, n_2\omega_0) \\
\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(n_1, n_2, n_3) &= \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(n_1\omega_0, n_2\omega_0, n_3\omega_0).
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Empleando (2.23) y (2.24) entonces la ecuación de onda (2.19) se puede describir como

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left(\frac{d^2}{dz^2} + 2ik_{zn} \frac{d}{dz} \right) E_{an}(z) - \left(\delta_{az} \frac{d}{dz} + ik_{an} \right) \left[\frac{dE_{zn}(z)}{dz} + i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{E}_n(z) \right] \right\} e^{ik_{zn}z} \\
& = -4\pi \frac{(n\omega_0)^2}{c^2} P_{an}^{(2,3)}(z).
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Para $n = +1, +2, +3$, los segundos miembros respectivos de (2.25) se obtienen inmediatamente a partir de (2.15)-(2.17)

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left(\frac{d^2}{dz^2} + 2ik_{z1} \frac{d}{dz} \right) E_{\alpha 1}(z) - \left(\delta_{\alpha z} \frac{d}{dz} + ik_{\alpha 1} \right) \left[\frac{dE_{z1}(z)}{dz} + i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{E}_1(z) \right] \right\} e^{ik_{z1}z} \\
& = -4\pi \frac{\omega_0^2}{c^2} \left\{ \begin{aligned}
& 2\chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(-2, +3) E_{\beta 2}^*(z) E_{\gamma 3}(z) e^{i(-k_{z2}^* + k_{z3})z} \\
& + 2\chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(-1, +2) E_{\beta 1}^*(z) E_{\gamma 2}(z) e^{i(-k_{z1}^* + k_{z2})z} \\
& + 6\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(-3, +1, +3) E_{\beta 3}^*(z) E_{\gamma 1}(z) E_{\delta 3}(z) e^{i(-k_{z3}^* + k_{z1} + k_{z3})z} \\
& + 3\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(-3, +2, +2) E_{\beta 3}^*(z) E_{\gamma 2}(z) E_{\delta 2}(z) e^{i(-k_{z3}^* + k_{z2} + k_{z2})z} \\
& + 6\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(-2, +1, +2) E_{\beta 2}^*(z) E_{\gamma 1}(z) E_{\delta 2}(z) e^{i(-k_{z2}^* + k_{z1} + k_{z2})z} \\
& + 3\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(-1, -1, +3) E_{\beta 1}^*(z) E_{\gamma 1}^*(z) E_{\delta 3}(z) e^{i(-k_{z1}^* - k_{z1}^* + k_{z3})z} \\
& + 3\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(-1, +1, +1) E_{\beta 1}^*(z) E_{\gamma 1}(z) E_{\delta 1}(z) e^{i(-k_{z1}^* + k_{z1} + k_{z1})z}
\end{aligned} \right\}, \tag{2.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left(\frac{d^2}{dz^2} + 2ik_{z2} \frac{d}{dz} \right) E_{\alpha 2}(z) - \left(\delta_{\alpha z} \frac{d}{dz} + ik_{\alpha 2} \right) \left[\frac{dE_{z2}(z)}{dz} + i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{E}_2(z) \right] \right\} e^{ik_{z2}z} \\
& = -4\pi \frac{(\omega_0)^2}{c^2} \left\{ \begin{aligned}
& 2\chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(-1, +3) E_{\beta 1}^*(z) E_{\gamma 3}(z) e^{i(-k_{z1}^* + k_{z3})z} \\
& + 1\chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(+1, +1) E_{\beta 1}(z) E_{\gamma 1}(z) e^{i(+k_{z1} + k_{z1})z} \\
& + 6\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(-3, +2, +3) E_{\beta 3}^*(z) E_{\gamma 2}(z) E_{\delta 3}(z) e^{i(-k_{z3}^* + k_{z2} + k_{z3})z} \\
& + 6\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(-2, +1, +3) E_{\beta 2}^*(z) E_{\gamma 1}(z) E_{\delta 3}(z) e^{i(-k_{z2}^* + k_{z1} + k_{z3})z} \\
& + 3\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(-2, +2, +2) E_{\beta 2}^*(z) E_{\gamma 2}(z) E_{\delta 2}(z) e^{i(-k_{z2}^* + k_{z2} + k_{z2})z} \\
& + 6\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(-1, +1, +2) E_{\beta 1}^*(z) E_{\gamma 1}(z) E_{\delta 2}(z) e^{i(-k_{z1}^* + k_{z1} + k_{z2})z}
\end{aligned} \right\}, \tag{2.27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left(\frac{d^2}{dz^2} + 2ik_{z3} \frac{d}{dz} \right) E_{\alpha 3}(z) - \left(\delta_{\alpha z} \frac{d}{dz} + ik_{\alpha 3} \right) \left[\frac{dE_{z3}(z)}{dz} + ik_3 \cdot E_3(z) \right] \right\} e^{ik_{z3}z} \\
& = -4\pi \frac{(3\omega_0)^2}{c^2} \left\{ \begin{aligned}
& 2\chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(+1,+2)E_{\beta 1}(z)E_{\gamma 2}(z)e^{i(+k_{z1}+k_{z2})z} \\
& +3\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(-3,+3,+3)E_{\beta 3}^*(z)E_{\gamma 3}(z)E_{\delta 3}(z)e^{i(-k_{z3}^*+k_{z3}+k_{z3})z} \\
& +6\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(-2,+2,+3)E_{\beta 2}^*(z)E_{\gamma 2}(z)E_{\delta 3}(z)e^{i(-k_{z2}^*+k_{z2}+k_{z3})z} \\
& +6\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(-1,+1,+3)E_{\beta 1}^*(z)E_{\gamma 1}(z)E_{\delta 3}(z)e^{i(-k_{z1}^*+k_{z1}+k_{z3})z} \\
& +3\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(-1,+2,+2)E_{\beta 1}^*(z)E_{\gamma 2}(z)E_{\delta 2}(z)e^{i(-k_{z1}^*+k_{z2}+k_{z2})z} \\
& +1\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(+1,+1,+1)E_{\beta 1}(z)E_{\gamma 1}(z)E_{\delta 1}(z)e^{i(+k_{z1}+k_{z1}+k_{z1})z}
\end{aligned} \right\}. \quad (2.28)
\end{aligned}$$

2.5 EL PROMEDIO TEMPORAL DEL TEOREMA DE POYNTING

A partir de (2.25) se puede obtener una expresión equivalente al promedio temporal del teorema de Poynting [ver la discusión alrededor de (A.14) y (A.27) del Apéndice], el cual mediante el desarrollo correspondiente de (2.2) se expresa como

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} \langle \mathbf{S} \rangle_z &= \frac{d}{dz} [\langle \mathbf{S}_1 \rangle + \langle \mathbf{S}_2 \rangle + \langle \mathbf{S}_3 \rangle]_z \\
&= \frac{\delta_{mn} c^2}{4\pi n \omega_0} \frac{d}{dz} \left[iE_{\underline{\alpha}n}(z) \frac{dE_{\underline{\alpha}n}^*(z)}{dz} + k_{zn} E_{\underline{\alpha}n}(z) E_{\underline{\alpha}n}^*(z) - k_{\underline{\alpha}n} E_{\underline{\alpha}n}(z) E_{zn}^*(z) \right] e^{i(k_{zn} - k_{zn}^*)z} \\
&= in\omega_0 \delta_{mn} E_{\underline{\alpha}n}^*(z) e^{-ik_{zn}^*z} \left[P_{\underline{\alpha}n}^{(1)}(z) + P_{\underline{\alpha}n}^{(2,3)}(z) \right] \\
&= in\omega_0 \delta_{mn} E_{\underline{\alpha}n}^*(z) e^{-ik_{zn}^*z} \left\{ i \operatorname{Im} [\chi(n\omega_0)] E_{\underline{\alpha}n}(z) e^{ik_{zn}z} + P_{\underline{\alpha}n}^{(2,3)}(z) \right\}, \quad (2.29)
\end{aligned}$$

donde $\underline{\alpha}$ indica suma únicamente sobre x, y .

Tomando en cuenta a (2.24), el segundo término de la cuarta línea de (2.29), después de retornar a la notación de índices negativos para las cantidades conjugadas complejas y de adoptar un convenio simplificador de la escritura, queda como

$$\begin{aligned}
& in\omega_0\delta_{mn}E_{\alpha n}^*(z)e^{-ik_{zn}z}P_{\alpha n}^{(2,3)}(z) \\
& = in\omega_0\delta_{mn} \left[\begin{aligned} & \delta_{n_1+n_2}^n \delta_{n_1n_1} \delta_{n_2n_2} E_{\alpha(-n)}(z)e^{ik_{z(-n)}z} E_{\beta n_1}(z)e^{ik_{zn_1}z} E_{\gamma n_2}(z)e^{ik_{zn_2}z} \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(n_1, n_2) \\ & + \delta_{n_1+n_2+n_3}^n \delta_{n_1n_1} \delta_{n_2n_2} \delta_{n_3n_3} E_{\alpha(-n)}(z)e^{ik_{z(-n)}z} E_{\beta n_1}(z)e^{ik_{zn_1}z} E_{\gamma n_2}(z)e^{ik_{zn_2}z} E_{\delta n_3}(z)e^{ik_{zn_3}z} \\ & \times \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(n_1, n_2, n_3) \end{aligned} \right] \quad (2.30) \\
& \equiv in\omega_0\delta_{mn} \left[\begin{aligned} & \delta_{n_1+n_2}^n \delta_{n_1n_1} \delta_{n_2n_2} (\alpha(-n), \beta n_1, \gamma n_2) \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(n_1, n_2) \\ & + \delta_{n_1+n_2+n_3}^n \delta_{n_1n_1} \delta_{n_2n_2} \delta_{n_3n_3} (\alpha(-n), \beta n_1, \gamma n_2, \delta n_3) \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(n_1, n_2, n_3) \end{aligned} \right] \\
& \equiv in\omega_0\delta_{mn} \left[\begin{aligned} & \delta_{n_1+n_2}^n \delta_{n_1n_1} \delta_{n_2n_2} (-n, \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}, n_1, n_2) \\ & + \delta_{n_1+n_2+n_3}^n \delta_{n_1n_1} \delta_{n_2n_2} \delta_{n_3n_3} (-n, \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}, n_1, n_2, n_3) \end{aligned} \right].
\end{aligned}$$

Observemos que aunque no tenemos índices griegos repetidos en la última línea de (2.30), las sumatorias respectivas subsisten, por definición. También, a causa de las relaciones (A.1) los pares $\beta n_1, \gamma n_2$ ($\beta n_1, \gamma n_2, \delta n_3$) pueden conmutar libremente entre sí, pero en principio no lo pueden hacer con el par $\alpha(-n)$.

Ahora, la evaluación de (2.30) ya se ha iniciado, salvo un factor numérico, con los segundos miembros de (2.26)-(2.28), junto con sus conjugados complejos ($n = -1, -2, -3$). Usando esta referencia y llevando a cabo algunas transformaciones y desarrollos adicionales simples, rescribimos a (2.29) como

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} \langle S \rangle_z &= \frac{d}{dz} [\langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle + \langle S_3 \rangle]_z = -2\omega_0 \operatorname{Im}[\chi(1\omega_0)] e^{-2(\operatorname{Im}k_{z1})z} \mathbf{E}_1^*(z) \bullet \mathbf{E}_1(z) \\
&\quad - 4\omega_0 \operatorname{Im}[\chi(2\omega_0)] e^{-2(\operatorname{Im}k_{z2})z} \mathbf{E}_2^*(z) \bullet \mathbf{E}_2(z) \\
&\quad - 6\omega_0 \operatorname{Im}[\chi(3\omega_0)] e^{-2(\operatorname{Im}k_{z3})z} \mathbf{E}_3^*(z) \bullet \mathbf{E}_3(z) + \\
&\quad \left[\begin{array}{ll}
1) + 2i\omega_0(-1, \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}, -2, +3) & - 2i\omega_0(+1, \chi_{\beta\gamma\alpha}^{(2)}, +2, -3) \quad (12) \\
2) + 2i\omega_0(-1, \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}, -1, +2) & - 2i\omega_0(+1, \chi_{\beta\gamma\alpha}^{(2)}, +1, -2) \quad (8) \\
3) + 6i\omega_0(-1, \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}, -3, +1, +3) & - 6i\omega_0(+1, \chi_{\gamma\delta\alpha\beta}^{(3)}, +3, -1, -3) \quad (3) \\
4) + 3i\omega_0(-1, \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}, -3, +2, +2) & - 3i\omega_0(+1, \chi_{\gamma\delta\alpha\beta}^{(3)}, +3, -2, -2) \quad (10) \\
5) + 6i\omega_0(-1, \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}, -2, +1, +2) & - 6i\omega_0(+1, \chi_{\gamma\delta\alpha\beta}^{(3)}, +2, -1, -2) \quad (5) \\
6) + 3i\omega_0(-1, \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}, -1, -1, +3) & - 3i\omega_0(+1, \chi_{\beta\gamma\delta\alpha}^{(3)}, +1, +1, -3) \quad (14) \\
7) + 3i\omega_0(-1, \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}, -1, +1, +1) & - 3i\omega_0(+1, \chi_{\gamma\delta\alpha\beta}^{(3)}, +1, -1, -1) \quad (7) \\
\\
1) + 4i\omega_0(-2, \chi_{\beta\gamma\alpha}^{(2)}, +3, -1) & - 4i\omega_0(+2, \chi_{\gamma\alpha\beta}^{(2)}, -3, +1) \quad (12) \\
8) + 2i\omega_0(-2, \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}, +1, +1) & - 2i\omega_0(+2, \chi_{\gamma\alpha\beta}^{(2)}, -1, -1) \quad (2) \\
+ 9) + 12i\omega_0(-2, \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}, -3, +2, +3) & - 12i\omega_0(+2, \chi_{\gamma\delta\alpha\beta}^{(3)}, +3, -2, -3) \quad (9) \\
10) + 12i\omega_0(-2, \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}, -2, +1, +3) & - 12i\omega_0(+2, \chi_{\gamma\delta\alpha\beta}^{(3)}, +2, -1, -3) \quad (4) \\
11) + 6i\omega_0(-2, \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}, -2, +2, +2) & - 6i\omega_0(+2, \chi_{\gamma\delta\alpha\beta}^{(3)}, +2, -2, -2) \quad (11) \\
5) + 12i\omega_0(-2, \chi_{\beta\gamma\delta\alpha}^{(3)}, +1, +2, -1) & - 12i\omega_0(+2, \chi_{\delta\alpha\beta\gamma}^{(3)}, -1, -2, +1) \quad (5) \\
\\
12) + 6i\omega_0(-3, \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}, +1, +2) & - 6i\omega_0(+3, \chi_{\gamma\alpha\beta}^{(2)}, -1, -2) \quad (1) \\
13) + 9i\omega_0(-3, \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}, -3, +3, +3) & - 9i\omega_0(+3, \chi_{\gamma\delta\alpha\beta}^{(3)}, +3, -3, -3) \quad (13) \\
9) + 18i\omega_0(-3, \chi_{\beta\gamma\delta\alpha}^{(3)}, +2, +3, -2) & - 18i\omega_0(+3, \chi_{\delta\alpha\beta\gamma}^{(3)}, -2, -3, +2) \quad (9) \\
3) + 18i\omega_0(-3, \chi_{\beta\gamma\delta\alpha}^{(3)}, +1, +3, -1) & - 18i\omega_0(+3, \chi_{\delta\alpha\beta\gamma}^{(3)}, -1, -3, +1) \quad (3) \\
4) + 9i\omega_0(-3, \chi_{\beta\gamma\delta\alpha}^{(3)}, +2, +2, -1) & - 9i\omega_0(+3, \chi_{\delta\alpha\beta\gamma}^{(3)}, -2, -2, +1) \quad (10) \\
14) + 3i\omega_0(-3, \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}, +1, +1, +1) & - 3i\omega_0(+3, \chi_{\delta\alpha\beta\gamma}^{(3)}, -1, -1, -1) \quad (6)
\end{array} \right. \quad (2.31)
\end{aligned}$$

Los elementos de la primera columna de la tabla de (2.31) pueden diferir (aparte de un factor numérico común) de los elementos de los segundos miembros respectivos de (2.26)-(2.28), en dos aspectos: uno, por las relaciones (A.1); dos, en el orden de los índices “mudos” α, β, γ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$), (que en este sentido es perfectamente válido). A la segunda columna, que corresponde a la compleja conjugada de la primera, también se le ha aplicado

este procedimiento. De esta manera se cuenta con una expresión que será utilizada más adelante.

2.6 SIMPLIFICACIÓN DEL PROMEDIO TEMPORAL DEL TEOREMA DE POYNTING

Cuando las constantes de amortiguamiento Γ pueden despreciarse (es decir casos no resonantes: las frecuencias involucradas corresponden a energías menores que el gap electrónico del material no lineal, ver el Apéndice A.3), se puede demostrar que la susceptibilidad no lineal de orden n tiene la simetría de permutación [2.16]

$$\begin{aligned}
 n = 2, 3, \dots \\
 \chi_{\alpha\beta_1\beta_2\cdots\beta_n}^{(n)*}(\omega = \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n) &= \chi_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_n\alpha}^{(n)}(\omega_1 = -\omega_2 - \cdots - \omega_n + \omega) \\
 &= \dots \\
 &= \chi_{\beta_n\alpha\beta_1\cdots\beta_{n-1}}^{(n)}(\omega_n = \omega - \omega_1 - \cdots - \omega_{n-1}),
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

lo que nos permite obtener [ver (A.37)-(A.38) del Apéndice]

$$\begin{aligned}
 (-n, \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}, n_1, n_2, n_3) &= (n_1, \chi_{\beta\gamma\delta\alpha}^{(3)}, n_2, n_3, -n) = (n_2, \chi_{\gamma\delta\alpha\beta}^{(3)}, n_3, -n, n_1) \\
 &= (n_3, \chi_{\delta\alpha\beta\gamma}^{(3)}, -n, n_1, n_2),
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

$$(-n, \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}, n_1, n_2) = (n_1, \chi_{\beta\gamma\alpha}^{(2)}, n_2, -n) = (n_2, \chi_{\gamma\alpha\beta}^{(2)}, -n, n_1). \tag{2.34}$$

Por otra parte, ya expresamos en (2.11) que

$$\chi_{xx}^{(1)}(n\omega_0) = \chi_{yy}^{(1)}(n\omega_0) = \chi_{zz}^{(1)}(n\omega_0) = \chi(n\omega_0). \tag{2.35}$$

Si ahora reunimos, en (2.31), las relaciones (A.34), (2.33)-(2.35), obtenemos que cuando la energía de los fotones no supera la banda prohibida electrónica

$$\frac{d}{dz} \langle \mathbf{S} \rangle_z = \frac{d}{dz} [\langle \mathbf{S}_1 \rangle + \langle \mathbf{S}_2 \rangle + \langle \mathbf{S}_3 \rangle]_z = 0, \quad (2.36)$$

donde el resultado se aprecia poniendo atención a los términos de (2.31) que tienen la misma numeración.

Si la dispersión de $\chi^{(n)}$ puede también desprejarse, entonces la simetría de permutación en (2.32) llega a ser independiente de las frecuencias. Consecuentemente, una relación de simetría ahora existe entre diferentes elementos del mismo tensor $\chi^{(n)}$, esto es, $\chi_{\alpha\beta_1\beta_2 \dots \beta_n}^{(n)}$ permanece sin cambio cuando los índices Cartesianos son permutados. Esto es conocido como la conjetura de Kleinman [2.17], con la cual el número de elementos independientes de $\chi^{(n)}$ puede reducirse mucho. Por ejemplo, reduce los 27 elementos de $\chi^{(2)}$ a solamente 10 elementos independientes. Debemos notar que dado que todos los medios son dispersivos, la conjetura de Kleinman es buena aproximación solamente cuando todas las frecuencias involucradas están lejos de las resonancias, en tales condiciones la dispersión de $\chi^{(n)}$ no es relativamente importante [2.18].

CAPÍTULO 3

PAQUETES DE ONDAS DE PRIMEROS, SEGUNDOS Y TERCEROS ARMÓNICOS, EN LA APROXIMACIÓN “NO-DEPLETION”

En este Capítulo generalizaremos el razonamiento del Capítulo anterior que nos llevó al conjunto de tres ecuaciones acopladas (2.15)-(2.17). La generalización consiste en proponer como solución de las ecuaciones de Maxwell la suma $E(\mathbf{r}, t)$ de tres paquetes de ondas, un paquete de primeros armónicos, un paquete de segundos armónicos y un paquete de terceros armónicos, dentro de un material en donde se toma en cuenta hasta el tercer orden de la expansión de $P(\mathbf{r}, t)$ en serie de potencias de $E(\mathbf{r}, t)$.

Con base a los resultados del Capítulo 2, conceptualmente podemos construir las ecuaciones acopladas para la formación de paquetes, sin embargo tendríamos un conjunto abrumador de ecuaciones que en términos prácticos sería imposible darles solución.

Un primer paso hacia la solución del problema presente de paquetes de ondas, es la aproximación “no-depletion”, que en los segundos miembros de las ecuaciones equivalentes a (2.15)-(2.17) sólo mantiene a los productos de los campos donde los factores son todos primeros armónicos, despreciando también los términos de autointeracción [3.2] en las ecuaciones (2.15). El sentido físico de la aproximación “no-depletion” está ligado con el promedio temporal del teorema de Poynting de la Sección 2.6 y la generalización de la Sección 3.3, cuando la frecuencia de la radiación involucrada corresponde a energías menores que el gap electrónico del material no lineal.

Pese a la aproximación “no-depletion”, en el caso de paquetes de ondas los segundos miembros de las ecuaciones equivalentes a (2.16)-(2.17) no se reducen a un término como ocurre para una sola frecuencia de primer armónico. Por ejemplo, si en el primer miembro de una ecuación del conjunto correspondiente a (2.17) aparece $E_3(3\omega)$, entonces en el segundo miembro de la misma ecuación deben aparecer los productos $E_1(\omega)E_1(\omega)E_1(\omega)$, $E_1(\omega)E_1(\omega + \Delta\omega)E_1(\omega - \Delta\omega)$, \dots , en otras palabras, en el segundo miembro contribuyen todas las sumas múltiples de tercer orden equivalentes a 3ω , sumas con respecto a las frecuencias ω de primeros armónicos. Una manera de tomar en cuenta todos los términos de sumas múltiples equivalentes de frecuencias, es a través de la simplificación adicional

que llamaremos la aproximación binomial o de sumatoria (integral) simple, la cual expresa el resultado en términos de una modificación aplicada únicamente sobre $E_1(\omega)E_1(\omega)E_1(\omega)$, para nuestro ejemplo de tercer orden.

Más específicamente, en este Capítulo discutimos la solución numérica de la generalización de las ecuaciones (2.15)-(2.17), en la aproximación “no depletion”, con o sin aproximación adicional binomial, para la transmisión de radiación electromagnética a lo largo de una estructura de capas no necesariamente periódica.

Para ello es necesario escindir las generalizaciones de cada una de las ecuaciones (2.16)-(2.17). Por ejemplo, si en el primer miembro de una ecuación del conjunto escindido correspondiente a (2.17) aparece $E_3(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)$, entonces en el segundo miembro de la misma ecuación debe aparecer únicamente el producto $E_1(\omega_1)E_1(\omega_2)E_1(\omega_3)$. De manera que podemos hablar de paquetes de ondas de armónicos de un mismo orden o alternativamente de paquetes de ondas correspondientes a todas las posibles sumas múltiples de un mismo orden, sumas con respecto a las frecuencias ω de primeros armónicos. Preferimos la segunda expresión debido a que puede confundirse un armónico no lineal debido a todas las contribuciones equivalentes de sumas de frecuencias, de la idea monocromática común de un armónico no lineal generado por una sola frecuencia.

La aproximación binomial para la construcción de paquetes de ondas no lineales, se deduce a partir de un paquete Gaussiano incidente (de primeros armónicos), que es estrecho en el dominio de frecuencias, y se demuestra que es válida más allá de los órdenes dos y tres correspondientes a las generalizaciones de las ecuaciones (2.16)-(2.17).

La solución numérica “no-depletion” sin aproximación binomial requiere de una sumatoria (integral) múltiple del mismo orden que el paquete. Incluyendo la aproximación binomial necesitamos de una sumatoria (integral) simple sin importar el orden del paquete, por lo que puede considerarse la contribución sobresaliente de este trabajo de investigación.

3.1 SOLUCIÓN GENERAL PARA CUALQUIER CAPA DE MATERIAL NO LINEAL

En la ecuación (2.9) consideramos un campo eléctrico constituido por tres elementos monocromáticos: una onda primaria incidente o primer armónico con la frecuencia ω_0 , y el segundo y tercer armónicos generados dentro de un material no lineal, estas dos últimas ondas con las frecuencias respectivas de $2\omega_0$ y $3\omega_0$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \delta_n^n \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) e^{-in\omega_0 t}, \quad n = -3, -2, -1, +1, +2, +3. \quad (3.1)$$

Consideremos ahora que en lugar de un elemento monocromático incidente tenemos un paquete de ondas, y donde tenemos en cuenta las sumas de frecuencias de segundo y tercer órdenes, que se generan dentro del material no lineal

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \delta_l^l \mathbf{E}_l(\mathbf{r}) e^{-i\omega_l t} + \delta_{l_1 l_2}^{l_1 l_2} \mathbf{E}_{l_1 l_2}(\mathbf{r}) e^{-i(\omega_{l_1} + \omega_{l_2}) t} + \delta_{l_1 l_2 l_3}^{l_1 l_2 l_3} \mathbf{E}_{l_1 l_2 l_3}(\mathbf{r}) e^{-i(\omega_{l_1} + \omega_{l_2} + \omega_{l_3}) t}, \\ \delta_{l_1 l_2}^{l_1 l_2} \mathbf{E}_{l_1 l_2}(\mathbf{r}) e^{-i(\omega_{l_1} + \omega_{l_2}) t} &= \delta_l^l \left[\delta_{\omega_{l_1} + \omega_{l_2}}^{2\omega_l} \delta_{l_1 l_2}^{l_1 l_2} \mathbf{E}_{l_1 l_2}(\mathbf{r}) e^{-i(\omega_{l_1} + \omega_{l_2}) t} \right] = \delta_l^l \mathbf{E}_{2l}(\mathbf{r}) e^{-i2\omega_l t}, \\ \delta_{l_1 l_2 l_3}^{l_1 l_2 l_3} \mathbf{E}_{l_1 l_2 l_3}(\mathbf{r}) e^{-i(\omega_{l_1} + \omega_{l_2} + \omega_{l_3}) t} &= \delta_l^l \left[\delta_{\omega_{l_1} + \omega_{l_2} + \omega_{l_3}}^{3\omega_l} \delta_{l_1 l_2 l_3}^{l_1 l_2 l_3} \mathbf{E}_{l_1 l_2 l_3}(\mathbf{r}) e^{-i(\omega_{l_1} + \omega_{l_2} + \omega_{l_3}) t} \right] = \delta_l^l \mathbf{E}_{3l}(\mathbf{r}) e^{-i3\omega_l t}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde adicionalmente se propone que

$$\begin{aligned} l, l_1, l_2, l_3 &= \dots, -3, -2, -1, +1, +2, +3, \dots, & \omega_{(-l)} &= -\omega_l, \\ \omega_0 - c\sigma_k &\leq \omega_{|l|}, \omega_{|l_1|}, \omega_{|l_2|}, \omega_{|l_3|} \leq \omega_0 + c\sigma_k, & \omega_0, c\sigma_k &> 0, & \omega_0 &\gg c\sigma_k, \\ \delta_{l_1 l_2}^{l_1 l_2}, \delta_{l_1 l_2 l_3}^{l_1 l_2 l_3} &= \text{sumas con todos los respectivos índices positivos o negativos a la vez,} \\ \mathbf{E}_{(-l)}(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}_l^*(\mathbf{r}), & \mathbf{E}_{(-l_1)(-l_2)}(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}_{l_1 l_2}^*(\mathbf{r}), & \mathbf{E}_{(-l_1)(-l_2)(-l_3)}(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}_{l_1 l_2 l_3}^*(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Vemos en las dos últimas líneas de (3.2) que el problema de paquetes de ondas no lineales generadas por todas las correspondientes sumas múltiples de frecuencias incidentes, realmente es una generalización natural del Capítulo 2. Estamos considerando un paquete incidente de primeros armónicos, con la generación de paquetes de segundos y terceros armónicos. En particular, por lo tanto también deben generalizarse las ecuaciones (2.15)-

(2.17). Debemos tener claro que en esta generalización los armónicos no lineales no son generados por una sola frecuencia, sino por todas las sumas equivalentes de frecuencias. Sin embargo, como trabajaremos esencialmente a través de la formulación de la primera línea de (3.2), entonces nos expresaremos con cierta libertad en términos de la situación en que un armónico no lineal es generado por una sola frecuencia.

Es conveniente expresar las polarizaciones en términos de poliádicas [3.1]

$$\begin{aligned}
& \hat{\mathbf{e}}_{\alpha} \chi_{\alpha\beta_1 \dots \beta_{|n|}}^{(|n|)}(\omega_n) E_{\beta_1 l_1}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_{n_1} t} \dots E_{\beta_{|n|} l_{|n|}}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_{n_{|n|}} t} \\
&= \hat{\mathbf{e}}_{\alpha} \chi_{\alpha\beta_1 \dots \beta_{|n|}}^{(|n|)}(\omega_n) (\hat{\mathbf{e}}_{\beta_1} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\gamma_1}) \dots (\hat{\mathbf{e}}_{\beta_{|n|}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\gamma_{|n|}}) E_{\gamma_1 l_1}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_{n_1} t} \dots E_{\gamma_{|n|} l_{|n|}}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_{n_{|n|}} t} \\
&\equiv \left[\hat{\mathbf{e}}_{\alpha} \chi_{\alpha\beta_1 \dots \beta_{|n|}}^{(|n|)}(\omega_n) \hat{\mathbf{e}}_{\beta_1} \dots \hat{\mathbf{e}}_{\beta_{|n|}} \right] : \left[\hat{\mathbf{e}}_{\gamma_1} E_{\gamma_1 l_1}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_{n_1} t} \dots \hat{\mathbf{e}}_{\gamma_{|n|}} E_{\gamma_{|n|} l_{|n|}}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_{n_{|n|}} t} \right] \quad (3.4) \\
&\equiv T_{1+|n|}(\omega_n) : \left[\mathbf{E}_{l_1}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_{n_1} t} \dots \mathbf{E}_{l_{|n|}}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_{n_{|n|}} t} \right], \\
&\omega_n \equiv \omega_{n_1} + \dots + \omega_{n_{|n|}}.
\end{aligned}$$

En este trabajo tomaremos la aproximación “no-depletion”, que consiste en ignorar la reducción del paquete primario debido a la conversión de una porción de su energía en paquetes de segundo y tercer ordenes. En consecuencia podemos suponer que, en relación con el paquete incidente los otros dos contribuyen muy poco.

Dentro de la aproximación “no-depletion” y de acuerdo con (3.2) y (3.4), la generalización de (2.15)-(2.17) en la que no se efectúa todavía una separación del espectro de frecuencias, puede escribirse como

$$\begin{aligned}
& \left[\nabla^2 - \nabla(\nabla \cdot) + \frac{\omega_l^2}{c^2} \varepsilon(\omega_l) \right] \delta_l^l \mathbf{E}_l(\mathbf{r}) e^{-i\omega_l t} \\
&= -4\pi \frac{\omega_l^2}{c^2} \delta_l^l \delta_{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3}^{\omega_l} \delta_{l_1 l_2 l_3}^{l_1 l_2 l_3} T_4(\omega_{l_1} + \omega_{l_2} + \omega_{l_3}) : \mathbf{E}_{l_1}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_{n_1} t} \mathbf{E}_{l_2}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_{n_2} t} \mathbf{E}_{l_3}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_{n_3} t}, \quad (3.5) \\
& \quad l > 0,
\end{aligned}$$

donde la delta de Kronecker $\delta_{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3}^{\omega_l}$ permite que l_1 , l_2 y l_3 recorran todo el dominio establecido en la primera línea de (3.3),

$$\begin{aligned}
& \left[\nabla^2 - \nabla(\nabla \cdot) + \frac{(\omega_{l_1} + \omega_{l_2})^2}{c^2} \varepsilon(\omega_{l_1} + \omega_{l_2}) \right] \delta_{l_1 l_2}^{l_1 l_2} \mathbf{E}_{l_1 l_2}(\mathbf{r}) e^{-i(\omega_{l_1} + \omega_{l_2})t} \\
& = -4\pi \frac{(\omega_{l_1} + \omega_{l_2})^2}{c^2} \delta_{l_1 l_2}^{l_1 l_2} T_3(\omega_{l_1} + \omega_{l_2}) : \mathbf{E}_{l_1}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_{l_1} t} \mathbf{E}_{l_2}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_{l_2} t}, \quad (3.6) \\
& \quad l_1, l_2 > 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\nabla^2 - \nabla(\nabla \cdot) + \frac{(\omega_{l_1} + \omega_{l_2} + \omega_{l_3})^2}{c^2} \varepsilon(\omega_{l_1} + \omega_{l_2} + \omega_{l_3}) \right] \delta_{l_1 l_2 l_3}^{l_1 l_2 l_3} \mathbf{E}_{l_1 l_2 l_3}(\mathbf{r}) e^{-i(\omega_{l_1} + \omega_{l_2} + \omega_{l_3})t} \\
& = -4\pi \frac{(\omega_{l_1} + \omega_{l_2} + \omega_{l_3})^2}{c^2} \delta_{l_1 l_2 l_3}^{l_1 l_2 l_3} T_4(\omega_{l_1} + \omega_{l_2} + \omega_{l_3}) : \mathbf{E}_{l_1}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_{l_1} t} \mathbf{E}_{l_2}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_{l_2} t} \mathbf{E}_{l_3}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_{l_3} t}, \quad (3.7) \\
& \quad l_1, l_2, l_3 > 0.
\end{aligned}$$

Realmente las ecuaciones (3.5)-(3.7) únicamente requieren que sus correspondientes dominios de frecuencias no se traslapen. No obstante consideramos la condición $\omega_0 \gg c\sigma_k$ porque nos conducirá a una aproximación adicional, que de hecho utilizaremos finalmente en este trabajo. Esto se discutirá en la Sección 3.4.

La aproximación “no-depletion” requiere que los segundos miembros de (3.5)-(3.7) tengan el carácter de una pequeña perturbación a la ecuación homogénea correspondiente, por lo que a pesar de que se presenta un efecto de auto interacción [3.2], en (3.5), también lo omitiremos anulando el miembro derecho correspondiente.

Ya sin auto interacción, si en (3.5)-(3.7) realizamos una separación del espectro de frecuencias y simplificamos la dependencia temporal, entonces se tendrán tres conjuntos de ecuaciones “individuales”, cuyo número de componentes coincide respectivamente con el número de términos de una sumatoria que puede ser simple, doble o triple.

Con las siguientes consideraciones

$$\begin{aligned}
\omega_{(-n)} &\equiv \omega_{(-l_1)} + \dots + \omega_{(-l_{|n|})}, & \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) &\equiv \mathbf{E}_{l_1 \dots l_{|n|}}(\mathbf{r}), & \mathbf{E}_{(-n)}(\mathbf{r}) &\equiv \mathbf{E}_{(-l_1) \dots (-l_{|n|})}(\mathbf{r}), \\
\mathbf{P}_n(\mathbf{r}, \omega_n) &\equiv \begin{cases} T_{1+|n|}(\omega_n) : [\mathbf{E}_{l_1}(\mathbf{r}) \dots \mathbf{E}_{l_{|n|}}(\mathbf{r})], & |n| \neq 1, \\ = 0, & |n| = 1. \end{cases}, & & & & (3.8) \\
&\therefore \mathbf{P}_{(-n)}[\mathbf{r}, \omega_{(-n)}] = \mathbf{P}_n^*(\mathbf{r}, \omega_n).
\end{aligned}$$

$$k_{nv} \equiv \omega_n / c,$$

las expresiones (3.5)-(3.7) pueden escribirse en la forma “individual” compacta

$$\left[\nabla^2 - \nabla(\nabla \cdot) + k_{nv}^2 \varepsilon(\omega_n) \right] \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) = -4\pi k_{nv}^2 \mathbf{P}_n(\mathbf{r}, \omega_n). \quad (3.9)$$

Lo que resta de esta sección lo dedicaremos a establecer teóricamente la solución general de los tres conjuntos de ecuaciones “individuales”, representados por (3.9).

Como se sabe una onda plana, transversal o equivalentemente de divergencia nula, es solución de la ecuación homogénea asociada a (3.9)

$$\begin{aligned} \left[\nabla^2 - \nabla(\nabla \cdot) + k_{nv}^2 \varepsilon(\omega_n) \right] \mathbf{E}_n \exp(i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}) &= \left[i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{E}_n \exp(i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}) \right] (-i\mathbf{k}_n) \\ &= \left[\nabla \cdot \mathbf{E}_n \exp(i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}) \right] (-i\mathbf{k}_n) = 0, \quad (3.10) \\ \mathbf{E}_n &= \text{constante}, \quad k_n = k_{nv} \varepsilon^{1/2}(\omega_n). \end{aligned}$$

Ahora necesitamos un sistema de coordenadas que esté de acuerdo con la discusión del Capítulo 2, eligiendo xz como el plano de incidencia

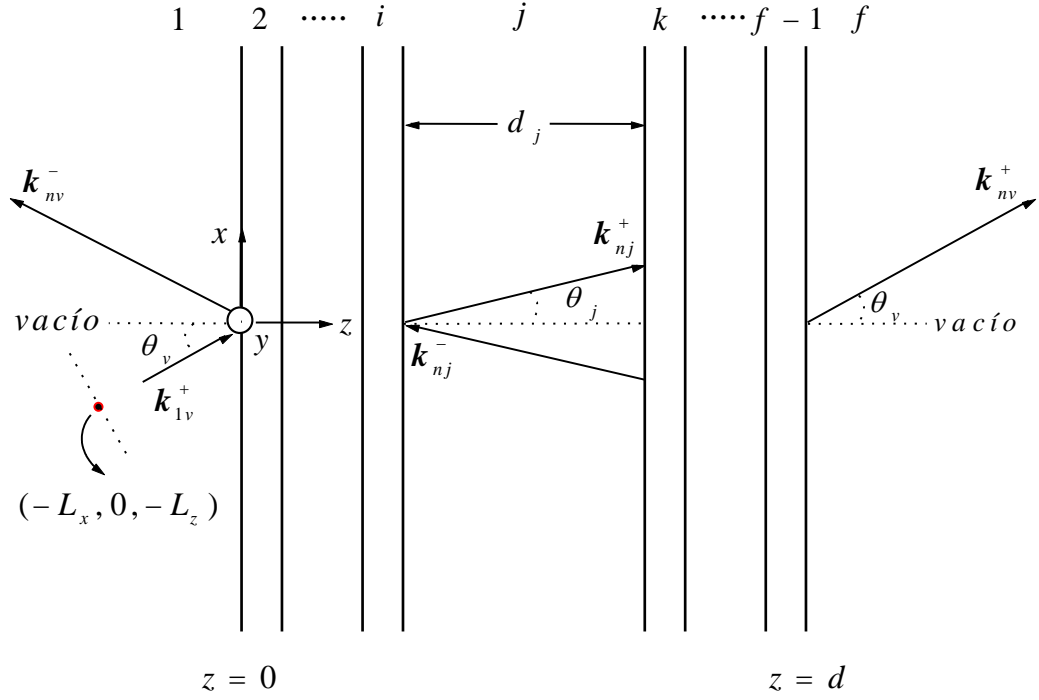


FIGURA 3.1. Estructura de capas de materiales no lineales.

De esta manera para cualquier capa de material no lineal, omitiendo la identificación correspondiente e incorporando las leyes de la reflexión y la refracción, podemos definir los vectores de onda

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k}_n^\pm &= k_{nv} [\hat{\mathbf{e}}_x \kappa \pm \hat{\mathbf{e}}_z N(\omega_n)], \\
 \kappa &= \varepsilon^{1/2}(\omega_n) \text{sen} \theta = \varepsilon_v^{1/2}(\omega_n) \text{sen} \theta_v = \text{sen} \theta_v, \quad N(\omega_n) = \varepsilon^{1/2}(\omega_n) \text{cos} \theta, \\
 (k_n^\pm)^2 &= k_{nv}^2 \varepsilon(\omega_n) = k_{nv}^2 [\kappa^2 + N^2(\omega_n)],
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

en donde κ es la manifestación de la ley de Snell. El ángulo θ depende de $\varepsilon(\omega_n)$. De acuerdo con (3.10)-(3.11) podemos escribir la solución general de la ecuación homogénea

$$\begin{aligned}
 &[\nabla^2 - \nabla(\nabla \cdot) + k_{nv}^2 \varepsilon(\omega_n)] \mathbf{E}_{nh}(\mathbf{r}) = 0, \\
 \mathbf{E}_{nh}(\mathbf{r}) &= \exp(ik_{nv} \kappa x) \left\{ \mathbf{E}_n^+ \exp[+ik_{nv} N(\omega_n) z] + \mathbf{E}_n^- \exp[-ik_{nv} N(\omega_n) z] \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

A partir de (3.12), obtenemos para el campo de primer orden

$$\mathbf{E}_{lh}(\mathbf{r}) = \exp[i(\omega_l/c)\kappa x] \left\{ \mathbf{E}_l^+ \exp[+i(\omega_l/c)N(\omega_l)z] + \mathbf{E}_l^- \exp[-i(\omega_l/c)N(\omega_l)z] \right\}. \quad (3.13)$$

Hemos solucionado la ecuación “individual” (3.9), según lo establecido en (3.8) para $n=1$ y con (3.13), por lo que con ayuda de esta última ecuación

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_2(\mathbf{r}, \omega_2) &= T_3(\omega_2) : [\mathbf{E}_{l_1h}(\mathbf{r})\mathbf{E}_{l_2h}(\mathbf{r})] = T_3(\omega_2) : \exp(ik_{2v}\kappa x) \mathbf{D}_{l_1l_2h}(z), \\ \mathbf{D}_{l_1l_2h}(z) &= \left\{ \begin{aligned} &\mathbf{E}_{l_1}^+ \mathbf{E}_{l_2}^+ \exp[ik_{2v}N_{l_1^+l_2^+}(\omega_1)z] + \mathbf{E}_{l_1}^- \mathbf{E}_{l_2}^+ \exp[ik_{2v}N_{l_1^-l_2^+}(\omega_1)z] + \\ &\mathbf{E}_{l_1}^+ \mathbf{E}_{l_2}^- \exp[ik_{2v}N_{l_1^+l_2^-}(\omega_1)z] + \mathbf{E}_{l_1}^- \mathbf{E}_{l_2}^- \exp[ik_{2v}N_{l_1^-l_2^-}(\omega_1)z] \end{aligned} \right\}, \quad (3.14) \\ \mathbf{P}_2(\mathbf{r}, \omega_2) &= \delta_s^s \mathbf{P}_{2s} \exp\left\{ ik_{2v} [\kappa x + N_{2s}(\omega_1)z] \right\}, \end{aligned}$$

$$N_{2s}(\omega_1) = \left\{ \begin{aligned} &N_{l_1^+l_2^+}(\omega_1) = [+\omega_{l_1}N(\omega_{l_1}) + \omega_{l_2}N(\omega_{l_2})]/(\omega_{l_1} + \omega_{l_2}) \\ &N_{l_1^-l_2^+}(\omega_1) = [-\omega_{l_1}N(\omega_{l_1}) + \omega_{l_2}N(\omega_{l_2})]/(\omega_{l_1} + \omega_{l_2}) \\ &N_{l_1^+l_2^-}(\omega_1) = [+\omega_{l_1}N(\omega_{l_1}) - \omega_{l_2}N(\omega_{l_2})]/(\omega_{l_1} + \omega_{l_2}) \\ &N_{l_1^-l_2^-}(\omega_1) = [-\omega_{l_1}N(\omega_{l_1}) - \omega_{l_2}N(\omega_{l_2})]/(\omega_{l_1} + \omega_{l_2}) \end{aligned} \right\}. \quad (3.15)$$

Similarmente

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_3(\mathbf{r}, \omega_3) &= T_4(\omega_3) : [\mathbf{E}_{l_1h}(\mathbf{r})\mathbf{E}_{l_2h}(\mathbf{r})\mathbf{E}_{l_3h}(\mathbf{r})] = T_4(\omega_3) : \exp(ik_{3v}\kappa x) \mathbf{D}_{l_1l_2l_3h}(z), \\ \mathbf{D}_{l_1l_2l_3h}(z) &= \left\{ \begin{aligned} &\mathbf{E}_{l_1}^+ \mathbf{E}_{l_2}^+ \mathbf{E}_{l_3}^+ \exp[ik_{3v}N_{l_1^+l_2^+l_3^+}(\omega_1)z] + \mathbf{E}_{l_1}^- \mathbf{E}_{l_2}^+ \mathbf{E}_{l_3}^+ \exp[ik_{3v}N_{l_1^-l_2^+l_3^+}(\omega_1)z] + \\ &\mathbf{E}_{l_1}^+ \mathbf{E}_{l_2}^- \mathbf{E}_{l_3}^+ \exp[ik_{3v}N_{l_1^+l_2^-l_3^+}(\omega_1)z] + \mathbf{E}_{l_1}^+ \mathbf{E}_{l_2}^+ \mathbf{E}_{l_3}^- \exp[ik_{3v}N_{l_1^+l_2^+l_3^-}(\omega_1)z] + \\ &\mathbf{E}_{l_1}^- \mathbf{E}_{l_2}^- \mathbf{E}_{l_3}^+ \exp[ik_{3v}N_{l_1^-l_2^-l_3^+}(\omega_1)z] + \mathbf{E}_{l_1}^- \mathbf{E}_{l_2}^+ \mathbf{E}_{l_3}^- \exp[ik_{3v}N_{l_1^-l_2^+l_3^-}(\omega_1)z] + \\ &\mathbf{E}_{l_1}^+ \mathbf{E}_{l_2}^- \mathbf{E}_{l_3}^- \exp[ik_{3v}N_{l_1^+l_2^-l_3^-}(\omega_1)z] + \mathbf{E}_{l_1}^- \mathbf{E}_{l_2}^- \mathbf{E}_{l_3}^- \exp[ik_{3v}N_{l_1^-l_2^-l_3^-}(\omega_1)z] \end{aligned} \right\}, \quad (3.16) \\ \mathbf{P}_3(\mathbf{r}, \omega_3) &= \delta_s^s \mathbf{P}_{3s} \exp\left\{ ik_{3v} [\kappa x + N_{3s}(\omega_1)z] \right\}, \end{aligned}$$

$$N_{3s}(\omega_1) = \left\{ \begin{array}{l} N_{l_1^+ l_2^+ l_3^+}(\omega_1) = \left[+\omega_1 N(\omega_1) + \omega_2 N(\omega_2) + \omega_3 N(\omega_3) \right] / (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \\ N_{l_1^- l_2^+ l_3^+}(\omega_1) = \left[-\omega_1 N(\omega_1) + \omega_2 N(\omega_2) + \omega_3 N(\omega_3) \right] / (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \\ N_{l_1^+ l_2^- l_3^+}(\omega_1) = \left[+\omega_1 N(\omega_1) - \omega_2 N(\omega_2) + \omega_3 N(\omega_3) \right] / (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \\ N_{l_1^+ l_2^+ l_3^-}(\omega_1) = \left[+\omega_1 N(\omega_1) + \omega_2 N(\omega_2) - \omega_3 N(\omega_3) \right] / (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \\ N_{l_1^- l_2^- l_3^+}(\omega_1) = \left[-\omega_1 N(\omega_1) - \omega_2 N(\omega_2) + \omega_3 N(\omega_3) \right] / (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \\ N_{l_1^- l_2^+ l_3^-}(\omega_1) = \left[-\omega_1 N(\omega_1) + \omega_2 N(\omega_2) - \omega_3 N(\omega_3) \right] / (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \\ N_{l_1^+ l_2^- l_3^-}(\omega_1) = \left[+\omega_1 N(\omega_1) - \omega_2 N(\omega_2) - \omega_3 N(\omega_3) \right] / (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \\ N_{l_1^- l_2^- l_3^-}(\omega_1) = \left[-\omega_1 N(\omega_1) - \omega_2 N(\omega_2) - \omega_3 N(\omega_3) \right] / (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \end{array} \right\}. \quad (3.17)$$

Un caso particular de las relaciones (3.15) y (3.17) es el siguiente

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_l,$$

$$N_{2s}(\omega_1) = \left\{ \begin{array}{l} N_{l_1^+ l_2^+}(\omega_1) = +N(\omega_l) \\ N_{l_1^+ l_2^-}(\omega_1) = 0 \\ N_{l_1^- l_2^+}(\omega_1) = 0 \\ N_{l_1^- l_2^-}(\omega_1) = -N(\omega_l) \end{array} \right\}, \quad N_{3s}(\omega_1) = \left\{ \begin{array}{l} N_{l_1^+ l_2^+ l_3^+}(\omega_1) = +N(\omega_l) \\ N_{l_1^- l_2^+ l_3^+}(\omega_1) = +N(\omega_l)/3 \\ N_{l_1^+ l_2^- l_3^+}(\omega_1) = +N(\omega_l)/3 \\ N_{l_1^+ l_2^+ l_3^-}(\omega_1) = +N(\omega_l)/3 \\ N_{l_1^- l_2^- l_3^+}(\omega_1) = -N(\omega_l)/3 \\ N_{l_1^- l_2^+ l_3^-}(\omega_1) = -N(\omega_l)/3 \\ N_{l_1^+ l_2^- l_3^-}(\omega_1) = -N(\omega_l)/3 \\ N_{l_1^- l_2^- l_3^-}(\omega_1) = -N(\omega_l) \end{array} \right\}. \quad (3.18)$$

La expresión (3.18) para $N_{3s}(\omega_1)$, con $\omega_l = \omega_0$, está ligada con el cálculo del tercer armónico para una onda monocromática incidente, que utiliza Bethune [3.3] como ejemplo de aplicación de un método numérico en la aproximación “no-depletion”. Método que extenderemos a nuestro problema con paquetes de ondas.

De acuerdo con (3.14) y (3.16), ahora puede escribirse

$$\begin{aligned}
|n| &= 2, 3, \\
\mathbf{P}_n(\mathbf{r}, \omega_n) &= \delta_s^s \mathbf{P}_{ns} \exp(i\mathbf{k}_{ns} \cdot \mathbf{r}), \\
\mathbf{k}_{ns} &= k_{nv} [\hat{\mathbf{e}}_x \kappa + \hat{\mathbf{e}}_z N_{ns}(\omega_1)].
\end{aligned} \tag{3.19}$$

En analogía con la última línea de (3.11), definimos constantes dieléctricas efectivas $\varepsilon_{ns}(\omega_1)$ a través de la ecuación [3.3]

$$k_{ns}^2 = k_{nv}^2 \varepsilon_{ns}(\omega_1) = k_{nv}^2 [\kappa^2 + N_{ns}^2(\omega_1)]. \tag{3.20}$$

La Figura 3.2d considera el segundo resultado (3.18) y de acuerdo con la Figura 3.2b (o c) podemos efectuar una descomposición vectorial adicional en (3.19) y en consecuencia proponer que el segundo miembro y la solución de la ecuación “individual” (3.9) contengan la forma [3.3]

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_n(\mathbf{r}, \omega_n) &= \delta_s^s (\mathbf{P}_{ns}^{\perp y} + \mathbf{P}_{ns}^{\parallel}) \exp(i\mathbf{k}_{ns} \cdot \mathbf{r}), \\
\mathbf{E}_n(\mathbf{r}) &= \delta_s^s (c_{ns}^{\perp y} \mathbf{P}_{ns}^{\perp y} + c_{ns}^{\parallel} \mathbf{P}_{ns}^{\parallel}) \exp(i\mathbf{k}_{ns} \cdot \mathbf{r}), \\
\mathbf{P}_{ns}^{\perp y} &= \mathbf{P}_{ns}^{\perp} + \mathbf{P}_{ns}^y, & \mathbf{P}_{ns}^{\perp} &= \hat{\mathbf{e}}_{\perp} \mathbf{P}_{ns}^{\perp}, & \mathbf{P}_{ns}^y &= \hat{\mathbf{e}}_y \mathbf{P}_{ns}^y, & \mathbf{P}_{ns}^{\parallel} &= \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \mathbf{P}_{ns}^{\parallel}, \\
\hat{\mathbf{e}}_{\perp} &= \hat{\mathbf{e}}_y \times \hat{\mathbf{e}}_{\parallel}, & \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} &= \mathbf{k}_{ns} / [k_{nv} \varepsilon_{ns}^{1/2}(\omega_1)].
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Sustituyendo (3.21) en (3.9)

$$\begin{aligned}
& [\nabla^2 - \nabla(\nabla \cdot) + k_{nv}^2 \varepsilon(\omega_n)] (c_{ns}^{\perp y} \mathbf{P}_{ns}^{\perp y} + c_{ns}^{\parallel} \mathbf{P}_{ns}^{\parallel}) \exp(i\mathbf{k}_{ns} \cdot \mathbf{r}) \\
&= [k_{nv}^2 \varepsilon(\omega_n) (c_{ns}^{\perp y} \mathbf{P}_{ns}^{\perp y} + c_{ns}^{\parallel} \mathbf{P}_{ns}^{\parallel}) - k_{nv}^2 \varepsilon_{ns}(\omega_1) c_{ns}^{\perp y} \mathbf{P}_{ns}^{\perp y}] \exp(i\mathbf{k}_{ns} \cdot \mathbf{r}) \\
&= -4\pi k_{nv}^2 (\mathbf{P}_{ns}^{\perp y} + \mathbf{P}_{ns}^{\parallel}) \exp(i\mathbf{k}_{ns} \cdot \mathbf{r}), \\
\therefore c_{ns}^{\perp y} &= 4\pi / [\varepsilon_{ns}(\omega_1) - \varepsilon(\omega_n)], & c_{ns}^{\parallel} &= 4\pi / [-\varepsilon(\omega_n)].
\end{aligned} \tag{3.22}$$

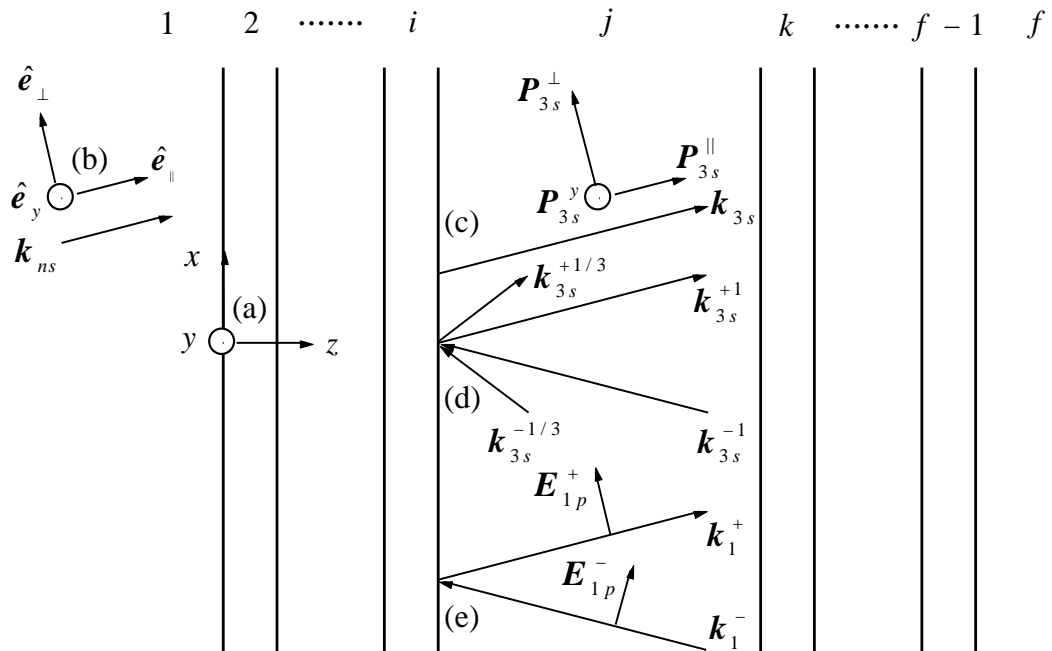


FIGURA 3.2. Esquema de un medio no lineal de f capas que incluyen las regiones semiinfinitas extremas, mostrando en: (a) los ejes coordenados usados, (b) los vectores unitarios asociados con un vector de onda fuente \mathbf{k}_{ns} , (c) las componentes de la polarización no lineal asociadas con un vector de tercer orden \mathbf{k}_{3s} , (d) todos vectores \mathbf{k}_{3s} que surgen en el caso de la generación del tercer armónico cuando las ondas TM (p) de bombeo se propagan a derecha e izquierda (e).

Al menos formalmente y para cada capa de material no lineal, en este momento ya podemos construir la solución (3.2), partiendo de las soluciones generales de la ecuación “individual” (3.9).

En (3.13) contamos con la solución general de primer orden.

Por otra parte (3.21)-(3.22) nos proporcionan las soluciones particulares de segundo y tercer orden. A cada una de las soluciones particulares hay que agregarle la solución general (3.12) de la ecuación homogénea respectiva, suma que a su vez representa la solución general de la ecuación no homogénea.

Reuniendo resultados, podemos incorporar estas características en (3.2)

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \delta_l^l \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) e^{-i\omega_n t} + \delta_{l_1 l_2}^{l_1 l_2} \mathbf{E}_{2n}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_{2n} t} + \delta_{l_1 l_2 l_3}^{l_1 l_2 l_3} \mathbf{E}_{3n}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_{3n} t}, \quad |n|=1. \\
\mathbf{E}_n(\mathbf{r}) &= \left\{ \begin{aligned} & \left(\mathbf{E}_{n\perp}^+ + \mathbf{E}_{ny}^+ + \mathbf{E}_{n\parallel}^+ \right) \exp\{ik_{nv} [\kappa x + N(\omega_n)z]\} + \\ & \left(\mathbf{E}_{n\perp}^- + \mathbf{E}_{ny}^- + \mathbf{E}_{n\parallel}^- \right) \exp\{ik_{nv} [\kappa x - N(\omega_n)z]\}, \quad \mathbf{E}_{n\parallel}^\pm = 0, \quad |n|=1. \end{aligned} \right\}. \\
\mathbf{E}_n(\mathbf{r}) &= \delta_s^s \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{4\pi(\mathbf{P}_{ns}^\perp + \mathbf{P}_{ns}^y)}{\varepsilon_{ns}(\omega_1) - \varepsilon(\omega_n)} - \frac{4\pi\mathbf{P}_{ns}^\parallel}{\varepsilon(\omega_n)} \right] \exp\{ik_{nv} [\kappa x + N_{ns}(\omega_1)z]\} + \\ & \left(\mathbf{E}_{ns\perp}^+ + \mathbf{E}_{nsy}^+ + \mathbf{E}_{ns\parallel}^+ \right) \exp\{ik_{nv} [\kappa x + N(\omega_n)z]\} + \\ & \left(\mathbf{E}_{ns\perp}^- + \mathbf{E}_{nsy}^- + \mathbf{E}_{ns\parallel}^- \right) \exp\{ik_{nv} [\kappa x - N(\omega_n)z]\}, \\ & \mathbf{E}_{ns\parallel}^\pm = \mathbf{E}_{ns\perp}^\pm, \quad |n| \neq 1. \end{aligned} \right\}, \quad (3.23)
\end{aligned}$$

donde se ha extendido la idea de la Figura 3.2 al caso de las ondas homogéneas, cuyos campos son perpendiculares a sus respectivos vectores de onda.

Esta expresión para la solución general de los campos facilita el establecimiento de las condiciones de frontera.

3.2 CONDICIONES DE FRONTERA PARA LOS CAMPOS DE SEGUNDO Y TERCER ORDENES

De (A.17)-(A.20), podemos inferir que los campos magnéticos asociados a (3.23) son

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \delta_l^l \mathbf{H}_n(\mathbf{r}) e^{-i\omega_n t} + \delta_{l_1 l_2}^{l_1 l_2} \mathbf{H}_{2n}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_{2n} t} + \delta_{l_1 l_2 l_3}^{l_1 l_2 l_3} \mathbf{H}_{3n}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_{3n} t}, \quad |n|=1. \\
\mathbf{H}_n(\mathbf{r}) &= \left\{ \begin{aligned} & \left[\kappa \hat{\mathbf{e}}_x + N(\omega_n) \hat{\mathbf{e}}_z \right] \times \left(\mathbf{E}_{n\perp}^+ + \mathbf{E}_{ny}^+ \right) \exp\{ik_{nv} [\kappa x + N(\omega_n)z]\} + \\ & \left[\kappa \hat{\mathbf{e}}_x - N(\omega_n) \hat{\mathbf{e}}_z \right] \times \left(\mathbf{E}_{n\perp}^- + \mathbf{E}_{ny}^- \right) \exp\{ik_{nv} [\kappa x - N(\omega_n)z]\}, \quad |n|=1. \end{aligned} \right\}. \\
\mathbf{H}_n(\mathbf{r}) &= \delta_s^s \left\{ \begin{aligned} & \frac{\left[\kappa \hat{\mathbf{e}}_x + N_{ns}(\omega_1) \hat{\mathbf{e}}_z \right] \times \left[\frac{4\pi(\mathbf{P}_{ns}^\perp + \mathbf{P}_{ns}^y)}{\varepsilon_{ns}(\omega_1) - \varepsilon(\omega_n)} - \frac{4\pi\mathbf{P}_{ns}^\parallel}{\varepsilon(\omega_n)} \right]}{\exp\{-ik_{nv} [\kappa x + N_{ns}(\omega_1)z]\}} + \\ & \left[\kappa \hat{\mathbf{e}}_x + N(\omega_n) \hat{\mathbf{e}}_z \right] \times \left(\mathbf{E}_{ns\perp}^+ + \mathbf{E}_{nsy}^+ + \mathbf{E}_{ns\perp}^+ \right) \exp\{ik_{nv} [\kappa x + N(\omega_n)z]\} + \\ & \left[\kappa \hat{\mathbf{e}}_x - N(\omega_n) \hat{\mathbf{e}}_z \right] \times \left(\mathbf{E}_{ns\perp}^- + \mathbf{E}_{nsy}^- + \mathbf{E}_{ns\perp}^- \right) \exp\{ik_{nv} [\kappa x - N(\omega_n)z]\}, \\ & |n| \neq 1. \end{aligned} \right\}. \quad (3.24)
\end{aligned}$$

Hasta el momento nos hemos referido a la polarización como la respuesta dieléctrica de la materia, pero también puede hablarse de la polarización de ondas de luz [3.4].

Las ondas $\mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{E}_\parallel(\mathbf{r}, t)$ tienen polarización lineal p (TM), mientras que las ondas $\mathbf{E}_y(\mathbf{r}, t)$ tienen polarización lineal s (TE) [3.3].

Las ondas TM tienen el campo magnético perpendicular a la dirección z , por el contrario, en las ondas TE el campo eléctrico es el que está orientado perpendicularmente con respecto a z [3.5].

La siguiente es una tabla relacionada con las polarizaciones p y s

$$\left[\begin{array}{l} \text{polarización lineal } p: \quad \kappa^2 + N_{js}^2 = \varepsilon_{js}, \quad (\kappa \hat{\mathbf{e}}_x + N_{js} \hat{\mathbf{e}}_z) \cdot \mathbf{E}_{js}^\perp = \kappa E_{jsx}^\perp + N_{js} E_{jsz}^\perp = 0, \\ \quad \mathbf{H}_{js}^\perp \equiv (\kappa \hat{\mathbf{e}}_x + N_{js} \hat{\mathbf{e}}_z) \times \mathbf{E}_{js}^\perp = \hat{\mathbf{e}}_y (N_{js} E_{jsx}^\perp - \kappa E_{jsz}^\perp), \\ H_{jsy}^\perp = Y_{js}^\perp |E_{jsx}^\perp| e^{i\varepsilon_{jsx}^\perp} = Y_{js}^\perp E_{js}^\perp \cos\theta_{js}, \quad Y_{js}^\perp = +\varepsilon_{js} / N_{js}, \quad E_{js}^\perp = (\mathbf{E}_{js}^\perp \cdot \mathbf{E}_{js}^{\perp*})^{1/2} e^{i\varepsilon_{jsx}^\perp}, \\ \quad = Y_{js}^{\perp'} |E_{jsz}^\perp| e^{i\varepsilon_{jsz}^\perp}, \quad Y_{js}^{\perp'} = -\varepsilon_{js} / \kappa. \end{array} \right], \quad (3.25)$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{polarización lineal } s: \quad \mathbf{H}_{js}^y \equiv (\kappa \hat{\mathbf{e}}_x + N_{js} \hat{\mathbf{e}}_z) \times \mathbf{E}_{js}^y = (-N_{js} \hat{\mathbf{e}}_x + \kappa \hat{\mathbf{e}}_z) E_{jsy}^y, \\ H_{jsx}^y = Y_{js}^y |E_{jsy}^y| e^{i\varepsilon_{jsy}^y} = Y_{js}^y E_{js}^y, \quad Y_{js}^y = -N_{js}. \end{array} \right],$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{polarización lineal } p: \quad \mathbf{H}_s^\parallel \equiv (\kappa \hat{\mathbf{e}}_x + N_s \hat{\mathbf{e}}_z) \times \mathbf{E}_s^\parallel = 0, \\ H_{sy}^\parallel = Y_s^\parallel |E_{sx}^\parallel| e^{i\varepsilon_{sx}^\parallel} = Y_s^\parallel E_s^\parallel \text{sen}\theta_s, \quad Y_s^\parallel = 0. \end{array} \right],$$

que puede resumirse en la forma

$$\mathbf{H}_{tangencial} = Y \mathbf{E}_{tangencial}, \quad (3.26)$$

donde la componente tangencial es perpendicular a z . Los subíndices j y s se refieren respectivamente a las ondas homogéneas y no homogéneas.

En lo que resta de esta sección aplicaremos esencialmente el método de Bethune [3.3], el cual adaptamos a las características propias de nuestro problema.

Las condiciones de frontera, en la interfase ij de la Figura 3.1, para las componentes tangenciales de los campos eléctricos $E_{ns\xi}^{\pm}$ que se encuentran en (3.23), se aplicarán en la forma

$$\begin{aligned} & \left[E_{i,ns\xi}^+ e^{+ik_{nv}N_i(\omega_n)z_{ij}} + E_{i,ns\xi}^- e^{-ik_{nv}N_i(\omega_n)z_{ij}} \right] e^{i(k_m\kappa x - \omega_n t)} = \\ & \left[E_{j,ns\xi}^+ e^{+ik_{nv}N_j(\omega_n)z_{ij}} + E_{j,ns\xi}^- e^{-ik_{nv}N_j(\omega_n)z_{ij}} \right] e^{i(k_m\kappa x - \omega_n t)} + \\ & \left[E_{s,\xi jn}^+ e^{+ik_{nv}N_{nsj}(\omega_1)z_{ij}} + E_{s,\xi jn}^- e^{-ik_{nv}N_{nsj}(\omega_1)z_{ij}} \right] e^{i(k_m\kappa x - \omega_n t)}, \quad \xi = \perp, y, \parallel, \end{aligned} \quad (3.27)$$

donde se ha supuesto que existen las parejas $+N_{nsj}(\omega_1) > 0$ y $-N_{nsj}(\omega_1) < 0$, como en $N_{3sj}(\omega_1)$ de (3.18), aunque esto no es necesario ya que podemos tratar uno u otro caso por separado, anulando la $E_{s,\xi jn}^{\pm}$ que no corresponda a la situación de interés.

Simplificando el término exponencial de la ecuación (3.27), esta puede abreviarse como

$$(E_i^+ + E_i^-) = (E_j^+ + E_j^-) + (E_s^+ + E_s^-). \quad (3.28)$$

Las condiciones de frontera para los campos magnéticos respectivos tienen la forma (3.28), que a su vez rescribimos con ayuda de (3.25)-(3.26)

$$Y_i (E_i^+ - E_i^-) = Y_j (E_j^+ - E_j^-) + Y_s (E_s^+ - E_s^-). \quad (3.29)$$

Resolviendo (3.28)-(3.29) para E_i^+ y E_i^- , así como expresando el resultado en forma matricial

$$\begin{aligned} & E_i = M_{ij}E_j + M_{is}E_s, \\ & \begin{pmatrix} E_i^+ \\ E_i^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Y_i + Y_j}{2Y_i} & \frac{Y_i - Y_j}{2Y_i} \\ \frac{Y_i - Y_j}{2Y_i} & \frac{Y_i + Y_j}{2Y_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_j^+ \\ E_j^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{Y_i + Y_s}{2Y_i} & \frac{Y_i - Y_s}{2Y_i} \\ \frac{Y_i - Y_s}{2Y_i} & \frac{Y_i + Y_s}{2Y_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_s^+ \\ E_s^- \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

donde hemos renombrado implícitamente a matrices y vectores columna. $M_{ij(s)}$ es la matriz de transferencia para la interfase ij , donde el subíndice s está relacionado con la inclusión de constantes dieléctricas efectivas.

La expresión (3.26) es útil para implementar las condiciones de frontera, aunque como puede verse en (3.25), tenemos un problema para $Y_{s\perp}$ cuando $N_s = 0$. Este es el caso de la ecuación (3.18) para $N_{2s}(\omega_1)$. No obstante también (3.25) nos sugiere que la forma (3.30) puede mantenerse si, para cada $N_s = 0$, recurrimos al artificio

$$Y_{s\perp} = -\kappa/2, \quad E_{s\perp} = \begin{pmatrix} +E_{s\perp z} \\ -E_{s\perp z} \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

donde la componente “tangencial” total z del campo eléctrico es cero, lo cual tiene consistencia con el hecho de que en este caso $E_{s\perp x} = 0$.

Bethune no tiene necesidad de tratar con la situación correspondiente a (3.31) ya que trabaja únicamente con $N_{3s}(\omega_0)$. Además él expresa a (3.30) en términos de las amplitudes complejas E_\perp , E_y y E_\parallel . La forma de esta ecuación se mantiene, aunque hay un cambio para las matrices de polarización ρ

$$\begin{aligned} E_i^y &= M_{ij} E_j^y + M_{is} E_s^y, \\ E_i^\perp &= \left(\frac{\cos\theta_j}{\cos\theta_i} M_{ij} \right) E_j^\perp + \left(\frac{\cos\theta_s}{\cos\theta_i} M_{is} \right) E_s^\perp, \\ E_i^\parallel &= \left(\frac{\cos\theta_j}{\cos\theta_i} M_{ij} \right) E_j^\parallel + \left(\frac{\sin\theta_s}{\cos\theta_i} M_{is} \right) E_s^\parallel, \end{aligned} \quad (3.32)$$

expresión que está de acuerdo con (3.25).

Así que tomando en cuenta a (3.32) y según convenga, la expresión

$$E_i = M_{ij} E_j + M_{is} E_s, \quad (3.33)$$

puede verse como una ecuación de componentes tangenciales o bien de amplitudes complejas.

Como puede verse en (3.27), los vectores columna E_j y E_s tienen una dependencia exponencial en z , que permite escribir

$$\begin{aligned}
 E_j(z_{ij} + d_j) &= \Phi_j E_j(z_{ij}), & E_s(z_{ij} + d_j) &= \Phi_s E_s(z_{ij}), \\
 \Phi_j &= \begin{Bmatrix} \exp[+ik_{nv}N_j(\omega_n)d_j] & 0 \\ 0 & \exp[-ik_{nv}N_j(\omega_n)d_j] \end{Bmatrix}, & (3.34) \\
 \Phi_s &= \begin{Bmatrix} \exp[+ik_{nv}N_{ns}(\omega_1)d_j] & 0 \\ 0 & \exp[-ik_{nv}N_{ns}(\omega_1)d_j] \end{Bmatrix},
 \end{aligned}$$

donde d_j es el grosor de la capa j de la Figura 3.1 y $\Phi_{j(s)}$ es la matriz de propagación, desde la parte izquierda hasta el lado derecho de la capa j .

Las matrices M_{ij} y M_{is} en (3.33) dependen de la interpretación que le demos a E_i , E_j y E_s , por el contrario las matrices Φ_j y Φ_s en (3.34) no cambian.

De acuerdo con (3.33)-(3.34), si queremos llevar simultáneamente al campo homogéneo y no homogéneo, del lado izquierdo al lado derecho de la capa j , y conectarlos a través de la interface jk con el campo homogéneo E_k , debemos escribir

$$M_{kj}\Phi_j E_j + M_{ks}\Phi_s E_s = E_k. \quad (3.35)$$

Las ecuaciones (3.33) y (3.35) son el punto de partida del desarrollo matricial central realizado por Bethune.

Empleando las propiedades

$$M_{ij}^{-1} = M_{ji}, \quad M_{ji}M_{is} = M_{js}, \quad \Phi_j^* = \Phi_j^{-1} \equiv \bar{\Phi}_j, \quad (3.36)$$

podemos despejar E_j de (3.33) y sustituirla en (3.35), para obtener

$$E_k = M_{kj} \Phi_j (M_{ji} E_i + S_j), \quad S_j \equiv (\bar{\Phi}_j M_{js} \Phi_s - M_{js}) E_s. \quad (3.37)$$

Despejando S_j de la primera de las ecuaciones (3.37), y considerando un sistema de f capas que incluye las dos regiones semiinfinitas extremas de la Figura 3.1, se tiene

$$S_j = R_{jf} \begin{bmatrix} E_f^+(j) \\ 0 \end{bmatrix} - L_{j1} \begin{bmatrix} 0 \\ E_1^-(j) \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

$$L_{j1} \equiv M_{ji} \Phi_i M_{i(i-1)} \cdots \Phi_2 M_{21}, \quad R_{jf} \equiv \bar{\Phi}_j M_{jk} \bar{\Phi}_k \cdots \bar{\Phi}_{(f-1)} M_{(f-1)f},$$

donde $E_1^-(j)$ y $E_f^+(j)$ son las componentes tangenciales (o bien las amplitudes complejas) de campo eléctrico, para cierta configuración $ns\xi$, justo fuera de la primera y última interfases, que son debidas a la polarización no lineal de la materia en la capa j . De la primera de las ecuaciones (3.38), se tiene

$$S_j^* = \bar{T} \begin{bmatrix} E_f^+(j) \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ E_1^-(j) \end{bmatrix},$$

$$S_j^* = \bar{L}_{j1} S_j, \quad \bar{L}_{j1} \equiv L_{j1}^{-1} = M_{12} \bar{\Phi}_2 \cdots M_{(i-1)i} \bar{\Phi}_i M_{ij}, \quad (3.39)$$

$$\bar{T} \equiv T^{-1} = \bar{L}_{j1} R_{jf} = M_{12} \bar{\Phi}_2 \cdots M_{ij} \bar{\Phi}_j \cdots \bar{\Phi}_{(f-1)} M_{(f-1)f}.$$

Escribiendo las primeras líneas de (3.38)-(3.39) en la forma

$$\begin{pmatrix} S_j^+ \\ S_j^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_f^+(j) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ E_1^-(j) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} S_j^{*+} \\ S_j^{*-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{T}_{11} & \bar{T}_{12} \\ \bar{T}_{21} & \bar{T}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_f^+(j) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ E_1^-(j) \end{pmatrix}, \quad (3.40)$$

y resolviendo para los campos transmitidos, se tiene respectivamente

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_f^+(j) \\ E_1^-(j) \end{pmatrix} &= \frac{1}{R_{11}L_{22} - R_{21}L_{12}} \begin{pmatrix} L_{22} & -L_{12} \\ R_{21} & -R_{11} \end{pmatrix} S_j, \\ \begin{pmatrix} E_f^+(j) \\ E_1^-(j) \end{pmatrix} &= \frac{1}{\bar{T}_{11}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{T}_{21} & -\bar{T}_{11} \end{pmatrix} S_j'. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Las amplitudes complejas transmitidas (o bien las componentes tangenciales) con polarización s están dadas por cualquiera de las ecuaciones (3.41) para E_y , y aquellas con polarización p están dadas por la suma de los resultados para E_\perp y E_\parallel .

Para determinada frecuencia $\omega_n \equiv \omega_{l_1} + \dots + \omega_{l_{|n|}}$, los campos de salida totales pueden obtenerse ahora agrupando adecuadamente las contribuciones para todas las posibilidades s y ξ , de la configuración $njs\xi$, y para todas las capas j de 2 a $f-1$.

Es necesario señalar que cuando $\varepsilon_{ns}(\omega_1) \rightarrow \varepsilon_j(\omega_n)$, debemos efectuar un desarrollo de Taylor alrededor de $\varepsilon_j(\omega_n)$, obteniendo para la segunda de las ecuaciones (3.37)

$$\begin{aligned} S_{nj}^\perp &= \begin{bmatrix} ik_{nv}d_j & (\bar{\phi}^2 - 1)(\varepsilon - 2N^2)/2N\varepsilon \\ (\phi^2 - 1)(\varepsilon - 2N^2)/2N\varepsilon & -ik_{nv}d_j \end{bmatrix} \frac{\Delta\varepsilon}{2N} \frac{4\pi P_{ns}^\perp}{\Delta\varepsilon}, \\ \phi &= \exp(ik_{nv}Nd_j), \quad N = N_j(\omega_n), \quad \Delta\varepsilon = \varepsilon_{ns}(\omega_1) - \varepsilon_j(\omega_n), \quad \varepsilon = \varepsilon_j(\omega_n), \\ P_{ns}^\perp &= \text{componente tangencial o amplitud compleja,} \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} S_{nj}^y &= \begin{bmatrix} ik_{nv}d_j & -(\bar{\phi}^2 - 1)/2N \\ -(\phi^2 - 1)/2N & -ik_{nv}d_j \end{bmatrix} \frac{\Delta\varepsilon}{2N} \frac{4\pi P_{ns}^y}{\Delta\varepsilon}, \\ P_{ns}^y &= \text{componente tangencial o amplitud compleja,} \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} S_{nj}^\parallel &= \begin{bmatrix} ik_{nv}d_j\Delta\varepsilon/2N & \bar{\phi}^2 - 1 \\ \phi^2 - 1 & -ik_{nv}d_j\Delta\varepsilon/2N \end{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot \frac{\kappa}{N} \cdot \frac{4\pi P_{ns}^\parallel}{(-\varepsilon)}, \\ P_{ns}^\parallel &= \text{componente tangencial, sin el factor } \kappa/N, \\ P_{ns}^\parallel &= \text{amplitud compleja, con el factor } \kappa/N, \end{aligned} \quad (3.44)$$

con lo que se resuelve el problema del denominador de \mathbf{E}_{ns}^{\perp} y \mathbf{E}_{ns}^y en (3.23), para estas condiciones de frontera.

3.3 TEOREMA DE POYNTING Y CONDICIONES DE FRONTERA PARA LOS CAMPOS DE PRIMER ORDEN

Es razonable suponer que, como no existe absorción de fotones, se cumpla el equivalente de la ecuación (2.36) para el problema de paquetes de ondas. En esta situación $k_{zn} - k_{zn}^* = 0$ y usando (A.27) en la ecuación anterior, tenemos

$$\frac{d}{dz} \frac{\delta_n^n c^2}{4\pi\omega_n} \left[iE_{\alpha n}(z) \frac{dE_{\alpha n}^*(z)}{dz} + k_{zn} E_{\alpha n}(z) E_{\alpha n}^*(z) - k_{\alpha n} E_{\alpha n}(z) E_{zn}^*(z) \right] = 0, \quad (3.45)$$

$$n = \pm 1, \pm 2, \pm 3,$$

donde, como se demuestra en el Apéndice, n puede interpretarse ahora con la generalización de éste capítulo. Esto significa que (3.45) es la forma abreviada de lo que debe entenderse ahora, es decir

$$\frac{d}{dz} \left\{ \begin{aligned} & \frac{\delta_l^l c^2}{4\pi\omega_n} \left[iE_{\alpha n}(z) \frac{dE_{\alpha n}^*(z)}{dz} + k_{zn} E_{\alpha n}(z) E_{\alpha n}^*(z) - k_{\alpha n} E_{\alpha n}(z) E_{zn}^*(z) \right] + \\ & \frac{\delta_l^l c^2}{4\pi\omega_{2n}} \left[iE_{\alpha 2n}(z) \frac{dE_{\alpha 2n}^*(z)}{dz} + k_{z2n} E_{\alpha 2n}(z) E_{\alpha 2n}^*(z) - k_{\alpha 2n} E_{\alpha 2n}(z) E_{z2n}^*(z) \right] + \\ & \frac{\delta_l^l c^2}{4\pi\omega_{3n}} \left[iE_{\alpha 3n}(z) \frac{dE_{\alpha 3n}^*(z)}{dz} + k_{z3n} E_{\alpha 3n}(z) E_{\alpha 3n}^*(z) - k_{\alpha 3n} E_{\alpha 3n}(z) E_{z3n}^*(z) \right] \end{aligned} \right\} = 0, \quad (3.46)$$

$$n = \pm 1,$$

en donde al menos formalmente se han agrupado los términos de frecuencia repetida de (3.23)-(3.24), por lo cual se emplea un solo índice l , en lugar de dos o tres. Hemos pasado teóricamente de una sumatoria múltiple a una sola sumatoria.

En la Sección 3.4 veremos una situación donde puede efectuarse tal agrupamiento, a través de $\omega_{2n} = 2\omega_l$ y $\omega_{3n} = 3\omega_l$.

Dándole al campo en (3.12) la forma en (2.20), tenemos para el exterior de la estructura de capas

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_n(z) \exp(i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}) = \left[\mathbf{E}_n^+ + \mathbf{E}_n^- \exp(-i2k_{zn}z) \right] \exp[i(k_{xn}x + k_{zn}z)], \\ n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \quad k_{xn} = k_{nv} \sin\theta_v, \quad k_{zn} = k_{nv} \cos\theta_v. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Sustituyendo (3.47) en la forma abreviada (3.45)

$$\begin{aligned} & \frac{\delta_n^n c^2}{4\pi\omega_n} \left[iE_{\underline{zn}}(z) \frac{dE_{\underline{zn}}^*(z)}{dz} + k_{zn}E_{\underline{zn}}(z)E_{\underline{zn}}^*(z) - k_{\underline{zn}}E_{\underline{zn}}(z)E_{zn}^*(z) \right] \cdots n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \\ & = \frac{\delta_n^n c^2}{4\pi\omega_n} \left\{ \begin{aligned} & -2k_{zn} \left[E_{\underline{zn}}^+ E_{\underline{zn}}^{-*} \exp(+i2k_{zn}z) + E_{\underline{zn}}^{+*} E_{\underline{zn}}^- \exp(-i2k_{zn}z) + 2E_{\underline{zn}}^- E_{\underline{zn}}^{-*} \right] \\ & + 2k_{zn} \left[E_{\underline{zn}}^+ E_{\underline{zn}}^{-*} \exp(+i2k_{zn}z) + E_{\underline{zn}}^{+*} E_{\underline{zn}}^- \exp(-i2k_{zn}z) + E_{\underline{zn}}^+ E_{\underline{zn}}^{+*} + E_{\underline{zn}}^- E_{\underline{zn}}^{-*} \right] \\ & + k_{zn}^{-1} k_{xn}^2 \left[|E_{xn}^+|^2 - |E_{xn}^-|^2 + E_{xn}^{+*} E_{xn}^- \exp(-i2k_{zn}z) - E_{xn}^+ E_{xn}^{-*} \exp(+i2k_{zn}z) \right] \\ & + k_{zn}^{-1} k_{xn}^2 \left[|E_{xn}^+|^2 - |E_{xn}^-|^2 + E_{xn}^+ E_{xn}^{+*} \exp(+i2k_{zn}z) - E_{xn}^{+*} E_{xn}^- \exp(-i2k_{zn}z) \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.48) \\ & = \frac{\delta_n^n c}{2\pi} \left[\sec\theta_v \left(|E_{xn}^+|^2 - |E_{xn}^-|^2 \right) + \cos\theta_v \left(|E_{yn}^+|^2 - |E_{yn}^-|^2 \right) \right] = \text{constante} \\ & \quad n = +1, +2, +3. \end{aligned}$$

Específicamente, aplicando (3.48) al extremo izquierdo L y derecho R de la estructura de capas

$$\begin{aligned} 1 = & \frac{\delta_l' \left[\sec\theta_v \left(|E_{xn}^{-L}|^2 + |E_{xn}^{+R}|^2 \right) + \cos\theta_v \left(|E_{yn}^{-L}|^2 + |E_{yn}^{+R}|^2 \right) \right]}{\delta_l' \left(\sec\theta_v \cdot |E_{xn}^{+L}|^2 + \cos\theta_v \cdot |E_{yn}^{+L}|^2 \right)} + \\ & \frac{\delta_l' \left[\sec\theta_v \left(|E_{x2n}^{-L}|^2 + |E_{x2n}^{+R}|^2 \right) + \cos\theta_v \left(|E_{y2n}^{-L}|^2 + |E_{y2n}^{+R}|^2 \right) \right]}{\delta_l' \left(\sec\theta_v \cdot |E_{xn}^{+L}|^2 + \cos\theta_v \cdot |E_{yn}^{+L}|^2 \right)} + \\ & \frac{\delta_l' \left[\sec\theta_v \left(|E_{x3n}^{-L}|^2 + |E_{x3n}^{+R}|^2 \right) + \cos\theta_v \left(|E_{y3n}^{-L}|^2 + |E_{y3n}^{+R}|^2 \right) \right]}{\delta_l' \left(\sec\theta_v \cdot |E_{xn}^{+L}|^2 + \cos\theta_v \cdot |E_{yn}^{+L}|^2 \right)}, \quad n = +1. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Ahora podemos expresar la aproximación “no-depletion” como

$$\begin{aligned}
 1 \simeq & \frac{\delta_l^l \left[\sec\theta_v \left(|E_{xn}^{-L}|^2 + |E_{xn}^{+R}|^2 \right) + \cos\theta_v \left(|E_{yn}^{-L}|^2 + |E_{yn}^{+R}|^2 \right) \right]}{\delta_l^l \left(\sec\theta_v \cdot |E_{xn}^{+L}|^2 + \cos\theta_v \cdot |E_{yn}^{+L}|^2 \right)} \gg \\
 & \frac{\delta_l^l \left[\sec\theta_v \left(|E_{x2n}^{-L}|^2 + |E_{x2n}^{+R}|^2 \right) + \cos\theta_v \left(|E_{y2n}^{-L}|^2 + |E_{y2n}^{+R}|^2 \right) \right]}{\delta_l^l \left(\sec\theta_v \cdot |E_{xn}^{+L}|^2 + \cos\theta_v \cdot |E_{yn}^{+L}|^2 \right)}, \quad (3.50) \\
 & \frac{\delta_l^l \left[\sec\theta_v \left(|E_{x3n}^{-L}|^2 + |E_{x3n}^{+R}|^2 \right) + \cos\theta_v \left(|E_{y3n}^{-L}|^2 + |E_{y3n}^{+R}|^2 \right) \right]}{\delta_l^l \left(\sec\theta_v \cdot |E_{xn}^{+L}|^2 + \cos\theta_v \cdot |E_{yn}^{+L}|^2 \right)}; \quad n = +1.
 \end{aligned}$$

La primera línea de (3.50) expresa el hecho de que podemos despreciar la interacción del paquete de primer orden con los de segundo y tercero, y ya que también no tenemos en cuenta el término de auto interacción, dicha línea nos permite escribir para cada ω_l

$$\begin{aligned}
 \text{polarización } p: & \quad |E_{xl}^{+L}|^2 = |E_{xl}^{-L}|^2 + |E_{xl}^{+R}|^2, \\
 \text{polarización } s: & \quad |E_{yl}^{+L}|^2 = |E_{yl}^{-L}|^2 + |E_{yl}^{+R}|^2.
 \end{aligned} \quad (3.51)$$

Las condiciones de frontera para los campos de primer orden se obtienen si en (3.33) y en (3.35) hacemos $E_s = 0$, con lo cual podemos obtener

$$\begin{aligned}
 E_f^l &= T^l E_1^l, \\
 T^l &= M_{f(f-1)}^l \Phi_{(f-1)}^l M_{(f-1)(f-2)}^l \cdots \Phi_2^l M_{21}^l = \begin{bmatrix} T_{11}^l & T_{12}^l \\ T_{21}^l & T_{22}^l \end{bmatrix}, \quad (3.52)
 \end{aligned}$$

donde l hace referencia a la frecuencia ω_l . T^l es la matriz de transferencia total izquierda a derecha. Si escribimos

$$\begin{aligned}
E_1^l &= \begin{Bmatrix} E_1^{l+} \\ E_1^{l-} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ r^l \end{Bmatrix} E_0^l \exp[i(\omega_l / c) \text{sen} \theta_v x] \exp(-i\omega_l t) \\
E_f^l &= \begin{Bmatrix} E_f^{l+} \\ E_f^{l-} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t^l \exp[i(\omega_l / c) \cos \theta_v \cdot d] \\ 0 \end{Bmatrix} E_0^l \exp[i(\omega_l / c) \text{sen} \theta_v x] \exp(-i\omega_l t),
\end{aligned} \tag{3.53}$$

y sustituimos en (3.52)

$$r^l = -\frac{T_{21}^l}{T_{22}^l}, \quad t^l = \frac{T_{11}^l T_{22}^l - T_{12}^l T_{21}^l}{T_{22}^l} \exp[-i(\omega_l / c) \cos \theta_v \cdot d], \tag{3.54}$$

donde como se observa en la Figura 3.1, d es la longitud de la estructura de capas.

Empleando (3.53), la expresión (3.51) puede describirse como

$$\begin{aligned}
\text{polarización } p: & \quad 1 = |r_p^l|^2 + |t_p^l|^2, \\
\text{polarización } s: & \quad 1 = |r_s^l|^2 + |t_s^l|^2.
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Como puede verse con ayuda de (3.25) y (3.30), por la manera como se construyen las matrices M_{ji}^l , excepto para $\theta_v = 0$, en general debe tenerse $r_p^l \neq r_s^l$ y $t_p^l \neq t_s^l$.

Realmente la Sección 3.1 necesita de

$$\begin{aligned}
E_j^l &= M_{j(j-1)}^l \Phi_{(j-1)}^l \cdots \Phi_2^l M_{21}^l \begin{Bmatrix} 1 \\ r^l \end{Bmatrix} E_0^l \exp[i(\omega_l / c) \text{sen} \theta_v x] \exp(-i\omega_l t), \\
& \quad l = l_1, l_2, l_3,
\end{aligned} \tag{3.56}$$

para calcular (3.14) y (3.16). Los elementos de (3.56) deben de corresponder al tipo de polarización, p o s .

3.4 PAQUETES DE ONDAS GAUSSIANOS. APROXIMACIÓN DE SUMATORIA SIMPLE

Hasta ahora hemos discutido la solución de las ecuaciones (3.5)-(3.7), despreciando el término de auto interacción en (3.5).

La aplicación del método planteado en las Secciones 3.1-3.3, para la solución de (3.6)-(3.7), en principio puede llevarse a cabo a través de una sumatoria múltiple, doble o triple respectivamente.

En esta Sección veremos que la limitación $\omega_0 \gg c\sigma_k$ de (3.3) nos permite encontrar los paquetes de ondas de segundo y tercer órdenes, empleando únicamente sumatorias simples. Para un paquete Gaussiano de primeros armónicos, aquí encontraremos la equivalencia

$$\left[\delta_l^l \mathbf{E}_l(\mathbf{r}) e^{-i\omega_l t} \right]^n = \delta_l^l c_n c_{n-b,b} \left[\mathbf{E}_l(\mathbf{r}) e^{-i\omega_l t} \right]^n, \quad (3.57)$$

donde $c_{n-b,b}$ multiplican a $\delta_{b=0}^{b=n} n! / [(n-b)! b!]$.

Rescribiendo (3.6)-(3.7) en términos de la segunda y tercera líneas de (3.2), así como tomando en cuenta que $\omega_0 \gg c\sigma_k$

$$\begin{aligned} & \left[\nabla^2 - \nabla(\nabla \cdot) + \frac{(n\omega_l)^2}{c^2} \varepsilon(n\omega_l) \right] \delta_l^l \mathbf{E}_{nl}(\mathbf{r}) e^{-in\omega_l t} \\ & \simeq -4\pi \frac{(n\omega_0)^2}{c^2} T_{1+n}(n\omega_0) : \left[\delta_l^l \mathbf{E}_l(\mathbf{r}) e^{-i\omega_l t} \right]^n \\ & \simeq -4\pi \frac{(n\omega_l)^2}{c^2} T_{1+n}(n\omega_l) : \delta_l^l c_n c_{n-b,b} \left[\mathbf{E}_l(\mathbf{r}) e^{-i\omega_l t} \right]^n, \\ & \quad l > 0, \quad n > 1, \end{aligned} \quad (3.58)$$

donde también se ha sustituido (3.57).

Llamaremos a (3.58) la aproximación binomial o de sumatoria simple, y se obtiene bajo las condiciones $c\sigma_k / \omega_0 \ll 1$ y (3.57). La segunda condición podría no cumplirse, aunque siempre puede lograrse eligiendo para tal propósito los parámetros de la primera. La condición (3.57) expresa el hecho de que el paquete incidente no se distorsiona

apreciablemente cuando se propaga a través de la estructura de capas. Las hipótesis de la aproximación binomial se satisfacen adecuadamente (sin recurrir a la situación extrema $c\sigma_k/\omega_0 \rightarrow 0$), por ejemplo en el interior de un gap fotónico de primer orden, para una estructura periódica de capas. Esta aproximación es atractiva por el hecho de que se demuestra para cualquier entero $n > 1$.

Consideremos la descripción continua de un paquete Gaussiano incidente [3.6][3.7] [3.8]

$$\begin{aligned} \delta_l^l \mathbf{E}_l(\mathbf{r})e^{-i\omega t} &= \Psi_{\mathcal{J}}(\mathbf{r}, t) + \Psi_{\mathcal{J}}^*(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega f(\omega) \mathcal{J} e^{i(\omega/c)(\kappa x + Nz)} e^{-i\omega t} + c.c., \\ \Psi_{\mathcal{J}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{e^{-(k-k_0)^2/4\sigma_k^2}}{(2\pi\sigma_k^2)^{1/4}} e^{ik(\kappa L_x + NL_z)} \mathcal{J} e^{ik(\kappa x + Nz)} e^{-ikct} \\ &= \mathcal{J} \frac{e^{-[\kappa(x+L_x) + N(z+L_z) - ct]^2/4\sigma_L^2}}{(2\pi\sigma_L^2)^{1/4}} e^{ik_0[\kappa(x+L_x) + N(z+L_z) - ct]}, \\ k &= \omega/c, \quad N = \cos\theta_v, \quad \sigma_k\sigma_L = 1/2, \quad \mathcal{J} = \mathcal{J}_{\perp} + \mathcal{J}_y = \text{constante}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

donde puede verse que para $t = 0$, en particular alcanza su amplitud máxima en $x = -L_x$ y $z = -L_z$. En realidad, tenemos todo un plano de amplitud máxima (Figura 3.1). También hemos empleado

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{e^{-n(k-k_0)^2/4\sigma_k^2}}{(2\pi\sigma_k^2)^{n/4}} e^{iky} &= \frac{n^{-1/2} \pi^{-n/4}}{(2\sigma_k^2)^{(n-2)/4}} e^{-n^{-1}\sigma_k^2 y^2} e^{ik_0 y} \\ &= \frac{n^{-1/2} \pi^{(1-n)/2}}{(2\pi\sigma_L^2)^{(2-n)/4}} e^{-n^{-1}y^2/4\sigma_L^2} e^{ik_0 y}, \quad n > 0. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Si en (3.59) reinterpretemos a \mathcal{J} como el parámetro

$$\mathcal{J} = I(2\pi\sigma_L^2)^{1/4}, \quad (3.61)$$

entonces estaremos efectuando un cambio de escala que produce el resultado

$$\boxed{\Psi_I(\mathbf{r}, t) = \mathbf{I} e^{-[\kappa(x+L_x)+N(z+L_z)-ct]^2/4\sigma_L^2} e^{ik_0[\kappa(x+L_x)+N(z+L_z)-ct]}}, \quad (3.62)$$

más atractivo para nuestros propósitos ya que en el límite $\sigma_L \rightarrow \infty$ tenemos el caso de un “paquete” monocromático. Podemos seguir trabajando sin la consideración (3.61), ya que como en (3.59) no afecta los procesos de integración que realizaremos, tomándola en cuenta sólo cuando sea conveniente.

Al paquete incidente $\Psi_I(\mathbf{r}, t)$ le corresponde, en cualquier capa de material no lineal, el paquete de primer orden

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{e^{-(k-k_0)^2/4\sigma_k^2}}{(2\pi\sigma_k^2)^{1/4}} e^{ikL} \left\{ \left[\mathbf{E}^+(k) e^{ikN(k)z} + \mathbf{E}^-(k) e^{-ikN(k)z} \right] e^{ik(\kappa x - ct)} \right\}, \quad (3.63)$$

$$L = \kappa L_x + NL_z = (L_x^2 + L_z^2)^{1/2}, \quad \mathbf{E}^\pm(k) = \mathbf{E}_\perp^\pm(k) + \mathbf{E}_y^\pm(k),$$

donde L es la distancia del plano de amplitud máxima del paquete incidente al eje y , en $t=0$. El factor entre llaves se obtiene de (3.56), no obstante recurriremos al artificio de una aproximación para poder demostrar (3.57).

Cuando $k_0 \gg \sigma_k$, podemos pensar que $N(k)$ lo mismo que $\mathbf{E}_\perp^\pm(k)$ y $\mathbf{E}_y^\pm(k)$ se mantienen casi constantes en el dominio efectivo de integración de (3.63), que en términos prácticos puede tomarse como el dominio establecido en (3.3) o más precisamente como apenas unas cuantas veces más grande [3.8]. Podemos modificar un poco esta aproximación, haciendo

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^\pm(k) &\simeq \mathbf{E}_\perp^\pm e^{ikc\beta_\perp^\pm} + \mathbf{E}_y^\pm e^{ikc\beta_y^\pm} = \left[\mathbf{E}_\perp^\pm e^{ikc(\beta_\perp^\pm - \beta_y^\pm)/2} + \mathbf{E}_y^\pm e^{ikc(\beta_y^\pm - \beta_\perp^\pm)/2} \right] e^{ikc(\beta_\perp^\pm + \beta_y^\pm)/2} \\ &\equiv \mathbf{E}^\pm e^{ikc\beta^\pm}, \\ \mathbf{E}^+, \mathbf{E}^- &\simeq \text{constantes en la capa correspondiente}, \quad N(k) \simeq N(k_0). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Efectuando la aproximación (3.64) en (3.63), obtenemos

$$\begin{aligned}
\Psi(\mathbf{r}, t) &= \Psi^+(\mathbf{r}, t) + \Psi^-(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{e^{-(k-k_0)^2/4\sigma_k^2}}{(2\pi\sigma_k^2)^{1/4}} e^{ik(\kappa x - ct + L)} \left[\begin{array}{c} \mathbf{E}^+ e^{ik[+N(k_0)z + \beta^+ c]} \\ \mathbf{E}^- e^{ik[-N(k_0)z + \beta^- c]} \end{array} \right] + \\
&= \left(\frac{2\sigma_k^2}{\pi} \right)^{1/4} e^{ik_0(\kappa x - ct + L)} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{E}^+ e^{ik_0[+N(k_0)z + \beta^+ c]} e^{-\sigma_k^2[\kappa x - ct + L + N(k_0)z + \beta^+ c]^2} \\ \mathbf{E}^- e^{ik_0[-N(k_0)z + \beta^- c]} e^{-\sigma_k^2[\kappa x - ct + L - N(k_0)z + \beta^- c]^2} \end{array} \right\}, \quad (3.65) \\
[\Psi(\mathbf{r}, t)]^n &\simeq \left(\frac{2\sigma_k^2}{\pi} \right)^{n/4} \frac{e^{ik_0[n(\kappa x - ct + L) + (n-2l)N(k_0)z + (n-l)\beta^+ c + l\beta^- c]} \delta_{l=0}^{l=n} n! (\mathbf{E}^+)^{n-l} (\mathbf{E}^-)^l}{e^{+\sigma_k^2(n-l)[\kappa x - ct + L + N(k_0)z + \beta^+ c]^2 + \sigma_k^2 l[\kappa x - ct + L - N(k_0)z + \beta^- c]^2} (n-l)!!}.
\end{aligned}$$

Ahora usando también la aproximación (3.64), nos proponemos encontrar a $[\Psi(\mathbf{r}, t)]^n$ pero directamente mediante una modificación de la integral en (3.65)

$$\begin{aligned}
[\Psi(\mathbf{r}, t)]^n &= \frac{c_n c_{n-l, l}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left[\frac{e^{-(k-k_0)^2/4\sigma_k^2}}{(2\pi\sigma_k^2)^{1/4}} e^{ik(\kappa x - ct + L)} \right]^n \left[\begin{array}{c} \mathbf{E}^+ e^{ik[+N(k_0)z + \beta^+ c]} \\ \mathbf{E}^- e^{ik[-N(k_0)z + \beta^- c]} \end{array} \right]^n \\
&\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c_n dk}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-n(k-k_0)^2/4\sigma_k^2} e^{ik[n(\kappa x - ct + L) + (n-2l)N(k_0)z + (n-l)\beta^+ c + l\beta^- c]} \delta_{l=0}^{l=n} (\mathbf{E}^+)^{n-l} (\mathbf{E}^-)^l}{(2\pi\sigma_k^2)^{n/4} c_{n-l, l}^{-1} (n!)^{-1} (n-l)!!} \quad (3.66) \\
&= \frac{c_n n^{-1/2} \pi^{-n/4}}{(2\sigma_k^2)^{(n-2)/4}} \frac{e^{ik_0[n(\kappa x - ct + L) + (n-2l)N(k_0)z + (n-l)\beta^+ c + l\beta^- c]} \delta_{l=0}^{l=n} n! (\mathbf{E}^+)^{n-l} (\mathbf{E}^-)^l}{c_{n-l, l}^{-1} e^{+n^{-1}\sigma_k^2[n(\kappa x - ct + L) + (n-2l)N(k_0)z + (n-l)\beta^+ c + l\beta^- c]^2} (n-l)!!}.
\end{aligned}$$

Comparando (3.65) con (3.66)

$$\begin{aligned}
c_n &= \left(\frac{2\sigma_k^2}{\pi} \right)^{n/4} \frac{(2\sigma_k^2)^{(n-2)/4}}{n^{-1/2} \pi^{-n/4}} = 2^{(n-1)/2} n^{1/2} \sigma_k^{n-1} = \frac{n^{1/2}}{(2\sigma_k^2)^{(n-1)/2}}, \quad (3.67) \\
c_{n-l, l} &= \frac{e^{-\sigma_k^2(n-l)[\kappa x - ct + L + N(k_0)z + \beta^+ c]^2 - \sigma_k^2 l[\kappa x - ct + L - N(k_0)z + \beta^- c]^2}}{e^{-n^{-1}\sigma_k^2[n(\kappa x - ct + L) + (n-2l)N(k_0)z + (n-l)\beta^+ c + l\beta^- c]^2}} = e^{-4(n-l)l\sigma_k^2[N(k_0)z + (\beta^+ - \beta^-)c/2]^2/n},
\end{aligned}$$

en donde se ha empleado el desarrollo

$$\begin{aligned}
& n \neq 0, \quad n(\kappa x - ct_0 + L) + (n-2l)N(k_0)z + (n-l)\beta^+c + l\beta^-c = 0, \\
& f(t) = -\sigma_k^2 \left\{ (n-l) \left[\kappa x - ct + L + N(k_0)z + \beta^+c \right]^2 + l \left[\kappa x - ct + L - N(k_0)z + \beta^-c \right]^2 \right\} \\
& = f(t_0) + f'(t_0)(t-t_0) + \frac{f''(t_0)}{2}(t-t_0)^2 = -\frac{4(n-l)l\sigma_k^2}{n} \left[N(k_0)z + \frac{\beta^+ - \beta^-}{2}c \right]^2 \quad (3.68) \\
& \quad - n^{-1}\sigma_k^2 \left[n(\kappa x - ct + L) + (n-2l)N(k_0)z + (n-l)\beta^+c + l\beta^-c \right]^2.
\end{aligned}$$

Hemos demostrado (3.57) bajo la forma

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{e^{-(k-k_0)^2/4\sigma_k^2}}{(2\pi\sigma_k^2)^{1/4}} e^{ikL} \begin{bmatrix} \mathbf{E}^+(k)e^{+ikN(k_0)z} \\ \mathbf{E}^-(k)e^{-ikN(k_0)z} \end{bmatrix} + e^{ik(\kappa x - ct)} \right\}^n \\
& = \frac{c_n c_{n-l,l}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left\{ \frac{e^{-(k-k_0)^2/4\sigma_k^2}}{(2\pi\sigma_k^2)^{1/4}} e^{ikL} \begin{bmatrix} \mathbf{E}^+(k)e^{+ikN(k_0)z} \\ \mathbf{E}^-(k)e^{-ikN(k_0)z} \end{bmatrix} + e^{ik(\kappa x - ct)} \right\}^n. \quad (3.69)
\end{aligned}$$

Pensando en el desarrollo numérico de las integrales, remarcamos que la aplicación del método de solución discutido en las Secciones 3.1-3.3, a través del primer miembro de (3.69), implica trabajar con una sumatoria múltiple de orden $n > 1$. El mismo método aplicado al segundo miembro, nos facilita el trabajo al tener una sumatoria simple sobre k . Observemos la similitud del segundo miembro de (3.69) con la parte del primer miembro que corresponde solo a los armónicos, es decir con

$$\left(\frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \right)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left\{ \frac{e^{-(k-k_0)^2/4\sigma_k^2}}{(2\pi\sigma_k^2)^{1/4}} e^{ikL} \begin{bmatrix} \mathbf{E}^+(k)e^{+ikN(k_0)z} \\ \mathbf{E}^-(k)e^{-ikN(k_0)z} \end{bmatrix} + e^{ik(\kappa x - ct)} \right\}^n, \quad n > 1, \quad (3.70)$$

la cual puede tener un valor numérico diferente de cero, pero en el sentido de las sumas infinitesimales de la integral es un término que en el límite se anula.

Debido a (3.69)-(3.70), el segundo miembro de (3.69) puede identificarse como un paquete de armónicos no lineales “modificados” por la aproximación binomial. Sin los coeficientes correspondientes a tal aproximación podemos hablar de paquetes de armónicos no lineales (cuasi) “normales”, aunque estos no tienen una correspondencia física directa.

La relación (3.69) nos permite describir a la aproximación de sumatoria simple (3.58) en la forma (3.9) de ecuación “individual compacta”

$$\begin{aligned} & \left[\nabla^2 - \nabla(\nabla \cdot) + (nk_l)^2 \varepsilon(nk_0) \right] \mathcal{E}_{nl}(\mathbf{r}) e^{-ink_l ct} \\ & = -4\pi(nk_l)^2 T_{1+n}(nk_0) : c_{n-b,b} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{E}^+(k_l) e^{+ik_l N(k_0)z} + \\ \mathbf{E}^-(k_l) e^{-ik_l N(k_0)z} \end{bmatrix} e^{ik_l(\kappa x - ct)} \right\}^n, \quad (3.71) \\ \mathbf{E}_{nl}(\mathbf{r}) & = \frac{c_n}{\sqrt{2\pi}} dk \left[\frac{e^{-(k-k_0)^2/4\sigma_k^2}}{(2\pi\sigma_k^2)^{1/4}} e^{ik_l L} \right]^n \mathcal{E}_{nl}(\mathbf{r}), \quad l > 0, \quad n > 1. \end{aligned}$$

Los resultados numéricos que obtendremos se referirán a la ecuación (3.71), que debe considerarse para cualquier k_l del dominio de interés y para cualquier posibilidad de la configuración $njs\xi$ mencionada en el comentario final de la Sección 3.2.

Ya se dijo que el factor entre llaves de (3.71) está dado por (3.56) para la capa j de $njs\xi$ y esto, de acuerdo con (3.59) y (3.63), es la solución de primer orden que corresponde a la onda incidente monocromática $\mathcal{J} e^{ik_l(\kappa x + Nz - ct)}$.

La solución de la primera de las ecuaciones (3.71) para la configuración $njs\xi$ origina que del lado derecho R de la estructura de capas emerja la onda monocromática $\mathcal{J}_n^{js\xi}(k_l) e^{ink_l(\kappa x + Nz - ct)}$, que en particular se obtendrá con la segunda de las ecuaciones (3.41).

Si para la onda incidente $\mathcal{J} e^{ik(\kappa x + Nz - ct)}$ se tiene la onda $\mathcal{J}_n(k) e^{ink(\kappa x + Nz - ct)}$, debida a todas las contribuciones $js\xi$ y transmitida a través de la estructura de capas, entonces la segunda línea de (3.71) nos indica que el paquete Gaussiano correspondiente que emerge por el lado R es

$$\Psi_{\mathcal{J}_n}(\mathbf{r}, t) = \frac{c_n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left[\frac{e^{-(k-k_0)^2/4\sigma_k^2}}{(2\pi\sigma_k^2)^{1/4}} e^{ikL} \right]^n \mathcal{J}_n(k) e^{ink(\kappa x + Nz - ct)}, \quad n > 0, \quad (3.72)$$

expresión que como se indica admite el caso $n = 1$.

3.5 TIEMPO DE RETARDO

La ecuación (3.72) con el uso de la aproximación (3.64) se puede escribir como:

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathcal{J}_n}(\mathbf{r}, t) &= \frac{c_n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left[\frac{e^{-(k-k_0)^2/4\sigma_k^2}}{(2\pi\sigma_k^2)^{1/4}} e^{ikL} \right]^n \mathcal{J}_n e^{inkc\beta_n} e^{ink(\kappa x + Nz - ct)} \\ &= \mathcal{J}_n \left\{ \frac{e^{-[\kappa(x+L_x) + N(z+L_z) - c(t-\beta_n)]^2/4\sigma_L^2}}{(2\pi\sigma_L^2)^{1/4}} e^{ik_0[\kappa(x+L_x) + N(z+L_z) - c(t-\beta_n)]} \right\}^n \\ \sigma_k \ll k_0, \quad \mathcal{J}_n(k) &\simeq \mathcal{J}_n e^{inkc\beta_n}, \quad \mathcal{J}_n \simeq \text{constante}, \quad n > 0.\end{aligned}\quad (3.73)$$

El resultado (3.73) que corresponde a la consideración (3.61) es

$$\boxed{\begin{aligned}\Psi_{T_n}(\mathbf{r}, t) &= T_n \left\{ e^{-[\kappa(x+L_x) + N(z+L_z) - c(t-\beta_n)]^2/4\sigma_L^2} e^{ik_0[\kappa(x+L_x) + N(z+L_z) - c(t-\beta_n)]} \right\}^n \\ \mathcal{J}_n &= T_n (2\pi\sigma_L^2)^{n/4}\end{aligned}}. \quad (3.74)$$

De manera que la formulación binomial (3.72) para la construcción de paquetes de ondas (lineales o no), en el límite $\sigma_L \rightarrow \infty$, puede reproducir la situación de ondas planas incidentes (3.62) y la transmisión de armónicos (lineales o no) (3.74).

Comparando (3.59) con (3.73) se observa que un paquete Gaussiano incidente, cuando $\sigma_k \ll k_0$, transmite paquetes de forma Gaussiana. También se concluye que si el paquete incidente tiene determinado plano de intensidad máxima para el tiempo t , los paquetes transmitidos tienen el mismo plano de intensidad máxima para el tiempo correspondiente $t_n = t + \beta_n$. Así que β_n tiene el significado de un tiempo de retardo.

De acuerdo con (3.72)-(3.73), efectuando un desarrollo semejante a (3.64), y pensando en un desarrollo de Taylor alrededor de k_0

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_n(k) &= \mathcal{F}_n^\perp(k)e^{i\gamma_n^\perp(k)} + \mathcal{F}_n^y(k)e^{i\gamma_n^y(k)} \\
&\simeq \mathcal{F}_n^\perp e^{ink\beta_n^\perp} + \mathcal{F}_n^y e^{ink\beta_n^y} = \left[\mathcal{F}_n^\perp e^{ink(\beta_n^\perp - \beta_n^y)/2} + \mathcal{F}_n^y e^{ink(\beta_n^y - \beta_n^\perp)/2} \right] e^{ink(\beta_n^\perp + \beta_n^y)/2} \\
&\equiv \mathcal{F}_n e^{ink\beta_n},
\end{aligned} \tag{3.75}$$

$$\begin{aligned}
\beta_n &= \frac{1}{2}(\beta_n^\perp + \beta_n^y) = \frac{1}{nc} \frac{d}{dk} \frac{1}{2}(\gamma_n^\perp + \gamma_n^y) \Big|_{k=k_0} = \frac{1}{n} \frac{d}{d\omega} \frac{1}{2}(\gamma_n^\perp + \gamma_n^y) \Big|_{\omega=\omega_0} \\
&= \frac{1}{nc} \frac{d}{dk} \gamma_n \Big|_{k=k_0} = \frac{1}{n} \frac{d}{d\omega} \gamma_n \Big|_{\omega=\omega_0},
\end{aligned}$$

donde la derivada se toma con respecto a la $k(\omega)$ incidente.

La igualdad para β_1 correspondiente a la última línea de la expresión (3.75) es conocida en la literatura, en particular coincide con la obtenida por Zohta [3.9].

La ecuación completa (3.75) expresa una generalidad que no emplearemos para el tiempo de “retraso” de las ondas transmitidas en nuestro trabajo, ya que las componentes \perp , y no se presentarán simultáneamente. De existir las dos componentes, tal vez sería mejor considerar los tiempos de “retraso” por separado.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS NUMÉRICOS

Bajo la hipótesis de un paquete Gaussiano incidente que se transmite con poca distorsión a través de un material no lineal de índice de refracción isotrópico, en el Capítulo anterior se obtuvo la contribución teórica de este trabajo de investigación: la construcción de paquetes de ondas transmitidas de cualquier orden, en la aproximación binomial [resumida en (3.72)]. Tal formulación es una superposición simple de armónicos “modificados” que se distinguen de los armónicos (cuasi) “normales” al menos por su amplitud [al respecto ver la definición que sigue a (3.70)].

La incidencia de una onda electromagnética plana sobre un material no lineal de índice de refracción isotrópico, con la generación simultánea del segundo y tercer armónicos en la aproximación “no-depletion”; así como la formulación binomial para paquetes de ondas se aplican al caso de una superred construida con placas alternadas de AlAs y GaAs de grosor respectivo fijo. Realmente la primera situación es un caso particular de la segunda, en el que los “paquetes” son monocromáticos.

Se presentan resultados numéricos sobre coeficientes de transmisión, tiempos de retardo y paquetes de ondas, del primero hasta el tercer orden debido a que se demuestra que la aproximación binomial no afecta el tiempo de retardo de un segundo armónico “modificado” con respecto a un segundo armónico (cuasi) “normal”. En el mismo sentido, la aproximación binomial puede llegar a variar notablemente el tiempo de retardo de tercer orden.

En particular encontramos efectos superluminales (tiempos de retardo negativos) para los paquetes transmitidos de todos los órdenes mencionados. Los rangos de frecuencia para los cuales se observa este efecto son más estrechos para el segundo y tercer orden comparados con el primero.

Tomando en cuenta que todas las frecuencias que consideraremos en estos cálculos corresponden a energías inferiores al “gap electrónico” de los materiales usados en la construcción de la superred entonces, como vimos en el Capítulo 2, las susceptibilidades lineales son reales. Si además adoptamos la conjetura de Kleinman [2.17], entonces también son reales las susceptibilidades no lineales.

4.1 CONSIDERACIONES NUMÉRICAS PRELIMINARES

En la condición de frontera para el campo eléctrico de una onda plana de orden enésimo (3.27), intervienen las componentes z de los vectores de onda (3.11), estas son proporcionales a

$$N_{i,j}(\omega_n) = \varepsilon_{i,j}^{1/2}(\omega_n) \cos \theta_{i,j} = n_{i,j}(\omega_n) \cos \theta_{i,j}, \quad (4.1)$$

donde $n_{i,j}(\omega_n)$ son los índices de refracción de cada una de las capas de la superred AlAs/GaAs.

Para el estudio de la transmisión de radiación electromagnética en la superred se emplea luz con una polarización lineal P (TM: Transversal Magnética), y con el fin de tener simultáneamente respuestas de segundo y tercer orden se emplea un ángulo de incidencia diferente de cero, por lo que se presentan cálculos que corresponden a 20° . Los índices de refracción considerados en este trabajo son [4.2] $n_{AlAs} = 2.868, 2.9, 2.948$ y $n_{GaAs} = 3.31, 3.35, 3.5138$. Ondas monocromáticas con estos índices corresponden respectivamente a una longitud de onda incidente (fundamental, de bombeo o primer armónico, aunque el último término se empleará para la onda transmitida) de $3 \mu m$ ($\omega = 2\pi c / \lambda = 2\pi \times 10^{14} s^{-1}$), a una señal de segundo armónico a $1.5 \mu m$ ($4\pi \times 10^{14} s^{-1}$) y a un tercer armónico a $1 \mu m$ ($6\pi \times 10^{14} s^{-1}$). En cuanto a la intensidad de las ondas planas incidentes P se considera $|\mathcal{J}| = |\mathcal{J}_\perp| = 3.5 \times 10^3 \text{ statvolt cm}^{-1}$ [ver la ecuación (3.59)].

En cuanto a las componentes de las susceptibilidades no lineales de segundo orden, estas son tales [4.3] que conducen a la siguiente respuesta dieléctrica

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_2(\mathbf{r}, \omega_2) &= \hat{\mathbf{e}}_x (\chi_{xyz} E_y E_z + \chi_{xzy} E_z E_y) + \hat{\mathbf{e}}_y (\chi_{yzx} E_z E_x + \chi_{yxz} E_x E_z) + \\ &\quad \hat{\mathbf{e}}_z (\chi_{zxy} E_x E_y + \chi_{zyx} E_y E_x) \\ &= \hat{\mathbf{e}}_y (\chi_{yzx} E_z E_x + \chi_{yxz} E_x E_z), \quad E_y = 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Para ondas planas incidentes con polarización lineal S el campo eléctrico únicamente tiene componente E_y (ver la Figura 3.1) y por lo tanto vemos en (4.2) que el segundo armónico es nulo. Así que elegimos polarización lineal P con ángulo de incidencia diferente de cero, 20° , con objeto de tener componentes E_x y E_z para la generación del segundo armónico. Polarización lineal P a incidencia normal, 0° , también anula el segundo armónico.

Todas las componentes diferentes de cero del tensor de susceptibilidad de tercer orden se encuentran en [4.3], pero sólo escribiremos las relacionadas con nuestro trabajo

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_3(\mathbf{r}, \omega_3) = & \hat{\mathbf{e}}_x (\chi_{xxx} E_x E_x E_x + \chi_{xxz} E_x E_z E_z + \chi_{xzx} E_z E_x E_z + \chi_{xzz} E_z E_z E_x) + \\ & \hat{\mathbf{e}}_z (\chi_{zzz} E_z E_z E_z + \chi_{zzx} E_z E_x E_x + \chi_{zxx} E_x E_z E_x + \chi_{zxz} E_x E_x E_z). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Si despreciamos la dispersión de los tensores de susceptibilidad, entonces $\chi_{\alpha\beta_1\beta_2\cdots\beta_n}^{(n)}$ permanece sin cambio cuando los índices Cartesianos son permutados (conjetura de Kleinman [4.4]). Esto y las relaciones [4.3] nos permiten escribir

$$\begin{aligned} \chi_{yzx} &= 10^{-7} \text{ esu}, \\ \chi_{xxx} = \chi_{zzz} &= 3\chi_{xxz} = 10^{-12} \text{ esu}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde las elecciones numéricas están de acuerdo con [4.5], y se utilizan para cada una de las capas de la superred. Únicamente hacemos la distinción correspondiente en las susceptibilidades escalares (índices de refracción).

De acuerdo con [4.3] (o la aproximación de Kleinman) y sustituyendo (3.13) en (4.2), podemos rescribir la última ecuación

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_2(\mathbf{r}, \omega_2) &= \hat{\mathbf{e}}_y (\chi_{yzx} E_z E_x + \chi_{yxz} E_x E_z) = \hat{\mathbf{e}}_y 2\chi_{yzx} E_z E_x \\
&= \hat{\mathbf{e}}_y 2\chi_{yzx} \exp[i(2\omega/c)\kappa x] \times \\
&\quad \left\{ E_z^+ \exp[+i(\omega/c)N(\omega)z] + E_z^- \exp[-i(\omega/c)N(\omega)z] \right\} \times \\
&\quad \left\{ E_x^+ \exp[+i(\omega/c)N(\omega)z] + E_x^- \exp[-i(\omega/c)N(\omega)z] \right\} \quad (4.5) \\
&= \hat{\mathbf{e}}_y 2\chi_{yzx} \exp[i(2\omega/c)\kappa x] \times \\
&\quad \left\{ E_z^+ E_x^+ \exp[+i(2\omega/c)N(\omega)z] - E_z^- E_x^- \exp[-i(2\omega/c)N(\omega)z] \right\}, \\
&\quad E_z^- = -E_z^+, \quad E_x^- = E_x^+.
\end{aligned}$$

La ecuación (4.5) y los coeficientes (3.67) nos indican que la “corrección” binomial para paquetes de ondas de segundo orden, realmente no existe. En la Sección 4.3 veremos que la corrección binomial puede modificar los tiempos de retardo de tercer orden, lo que evidentemente no ocurre con los de segundo orden.

La Figura 4.1 muestra los perfiles de las bandas electrónicas prohibidas para la superred AlAs/GaAs. Se observa que la banda electrónica prohibida para el AlAs es más amplia que la correspondiente al GaAs. En consecuencia, debido a que la anchura de la banda electrónica prohibida para el GaAs [4.10] se encuentra en el infrarrojo cercano ($E_{g2} \sim 1.43 \text{ eV}$, ó $0.87 \mu\text{m}$, ó $7.24 \times 3 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$), todas las frecuencias de interés no sobrepasan este límite, con el fin de evitar un problema de absorción. La diferencia entre las bandas de energía prohibida entre el GaAs y el AlAs puede obtenerse a través de la ecuación obtenida por Méndez [4.17] para el valle Γ

$$E(\Gamma_{Al_xGa_{1-x}As}) - E(\Gamma_{GaAs}) = 0.7x + 1.15(x - 0.45)^2, \quad 0.45 < x < 1. \quad (4.6)$$

De esta manera el gap obtenido para el AlAs es de 2.48 eV .

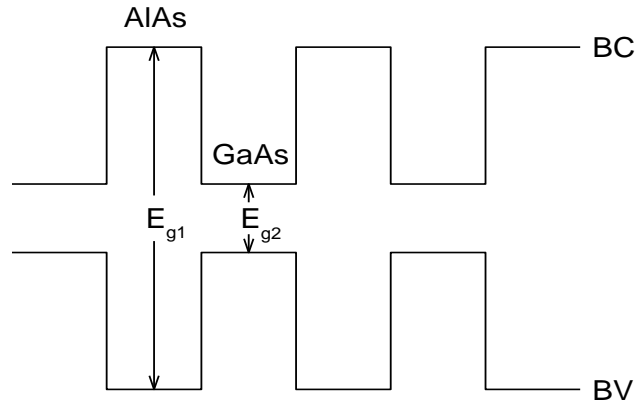


FIGURA 4.1. Esquema de la estructura de bandas del AlAs/GaAs la cual corresponde a una superred tipo I, aquí los perfiles de las bandas electrónicas son tales que un tope de la banda de valencia y un fondo de la banda de conducción varían en direcciones opuestas.

Los anchos de las capas que forman la superred pueden elegirse de acuerdo con la relación $n_{AlAs}d_{AlAs} + n_{GaAs}d_{GaAs} = \lambda/2$, con lo cual se logra que la primera banda fotónica prohibida de primer orden se localice alrededor de la longitud de onda λ [4.11][ver la ecuación (4.9) de esta Sección].

Una posibilidad es que la longitud del camino óptico correspondiente a cada capa de la superred sea un cuarto de la longitud de onda, esto es $n_{AlAs,GaAs}d_{AlAs,GaAs} = \lambda/4$. Cuando esto ocurre la longitud de onda fundamental se encuentra dentro del gap fotónico que corresponde a

$$d_{AlAs} = \frac{30 \times 10^{-5} \text{ cm}}{4(2.868)} = 2.62 \times 10^{-5} \text{ cm},$$

$$d_{GaAs} = \frac{30 \times 10^{-5} \text{ cm}}{4(3.31)} = 2.27 \times 10^{-5} \text{ cm},$$
(4.7)

situación que puede observarse en el espectro de transmisión mostrado en la Figura 4.2a.

La consideración (4.7) está de acuerdo con los valores elegidos para los anchos de las placas en los casos en que se ha reportado tunelamiento superluminal de fotones a través de

la banda fotónica prohibida en sistemas periódicos unidimensionales, por Chiao *et al* en 1991 [4.6], Steinberg *et al* en 1993 [4.7] y por Spielmann *et al* en 1994 [4.1].

Scalora *et al* [4.8] también se han ocupado del tunelamiento superluminal. No obstante, con otros fines y en una referencia de generación del segundo armónico a través de una estructura 1D de 20 periodos [4.9], la onda fundamental es transmitida en el borde izquierdo de la primera banda fotónica prohibida adecuada. Incorporando esta idea a nuestro trabajo, debemos encontrar un par de espesores d_{AlAs} y d_{GaAs} que se ajusten a tal requerimiento. Hemos elegido la posibilidad

$$\begin{aligned} d_{AlAs} &= 2 \times 10^{-5} \text{ cm}, & d_{GaAs} &= 2.5 \times 10^{-5} \text{ cm}, \\ \therefore \quad 2.868d_{AlAs} + 3.31d_{GaAs} &= \frac{28.02 \times 10^{-5} \text{ cm}}{2}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

ocasionando prácticamente el desplazamiento requerido de las longitudes de onda prohibidas hasta alrededor de $\lambda' = 2.80 \mu m$ ($\omega' = 6.73 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$), como puede verse en la Figura 4.2b.

Las Figuras 4.2 (a ó b) tienen el inconveniente de que no toman en cuenta la dispersión de los índices de refracción. En otras palabras, estrictamente sólo tienen validez local, para la longitud de onda $\lambda = 3 \mu m$ ($\omega = 2\pi \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$).

Alrededor de esta longitud de onda y dentro de ciertos límites, esta omisión se justifica por la pequeña variación de los índices de refracción en el relativamente amplio intervalo de frecuencias [$2\pi \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$, $6\pi \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$].

Por ejemplo, si en la Figura 4.2b se cambian los índices de refracción por los que corresponden a $1.5 \mu m$ ($4\pi \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$), entonces se obtiene la Figura 4.2c. Esto origina que la banda fotónica prohibida se desplace hasta alrededor de $\lambda'' = 2.84 \mu m$ ($\omega'' = 6.65 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$).

A través de un modelo simple y de acuerdo con los datos que corresponden a las Figuras 4.2 (b y c), podemos obtener una estimación del desplazamiento dispersivo ω_d que debería considerarse en la Figura 4.2b, únicamente para la región fotónica prohibida

$$\omega_d = \frac{|\omega'' - \omega'|}{4\pi - 2\pi} \times 0.9 = \frac{|6.65 - 6.73|}{2\pi} \times 0.9 \times 10^{14} \text{ s}^{-1} = 0.01 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}, \quad (4.9)$$

donde $0.9 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$ es aproximadamente el ancho de la región de baja transmisión para el espectro de 20 periodos.

Esto nos permite prever que el efecto de la dispersión de los índices de refracción sobre la Figura 4.2b, al menos para la región de la banda fotónica prohibida, es lo suficientemente pequeño para poderlo despreciar.

La omisión de la dispersión en los índices de refracción será aplicada a la construcción de los paquetes de onda que nos interesan.

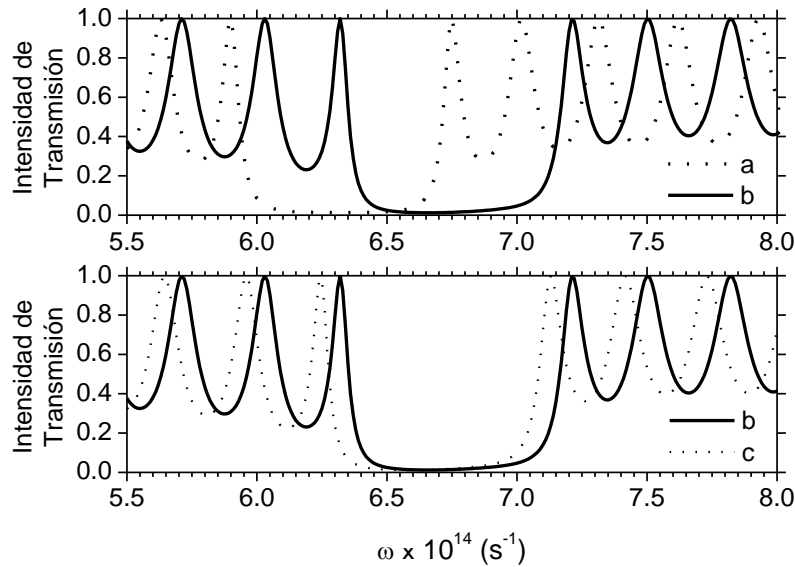


FIGURA 4.2. Para 20 periodos AlAs/GaAs y para el primer armónico, las gráficas reflejan la ubicación de la primera banda fotónica prohibida cuando:

a) $n_{AlAs} = 2.868$, $n_{GaAs} = 3.31$, $d_{AlAs} = 2.615 \times 10^{-5} \text{ cm}$, $d_{GaAs} = 2.265 \times 10^{-5} \text{ cm}$.

b) $n_{AlAs} = 2.868$, $n_{GaAs} = 3.31$, $d_{AlAs} = 2 \times 10^{-5} \text{ cm}$, $d_{GaAs} = 2.5 \times 10^{-5} \text{ cm}$.

c) $n_{AlAs} = 2.9$, $n_{GaAs} = 3.35$, $d_{AlAs} = 2 \times 10^{-5} \text{ cm}$, $d_{GaAs} = 2.5 \times 10^{-5} \text{ cm}$.

Con respecto al borde derecho del gap b), el desplazamiento dispersivo ω_d del borde derecho del gap c) se estima en una décima parte de la que se muestra.

Algo semejante debe ocurrir con frecuencias $\omega < 2\pi \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$.

Las Figuras 4.3a y 4.3b muestran las gráficas de intensidad de transmisión para muestras de 20 y 100 periodos. Aquí podemos notar que para un número de 100 periodos los límites del gap se encuentran bien definidos.

A través de la Figura 4.3c y 4.3d es posible observar el ancho del gap fotónico, calculado mediante la relación de dispersión para ondas TM [4.11]

$$\cos[\Lambda K(\theta_v, \omega)] = \cos k_{1z} a \cos k_{2z} b - \frac{1}{2} \left(\frac{n_2^2 k_{1z}}{n_1^2 k_{2z}} + \frac{n_1^2 k_{2z}}{n_2^2 k_{1z}} \right) \text{sen} k_{1z} a \text{sen} k_{2z} b,$$

$$\Lambda = a + b, \quad n_{1,2} = n_{AlAs, GaAs}, \quad a, b = d_{AlAs, GaAs}, \quad \theta_v = 20^\circ, \quad (4.10)$$

$$k_{1z, 2z} = \frac{\omega}{c} \left(n_{1,2}^2 - \text{sen}^2 \theta_v \right)^{1/2},$$

donde K es el número de onda de Bloch.

La relación (4.10) se obtiene a partir de las condiciones de frontera del campo electromagnético y el teorema de Bloch. Como puede demostrarse y observarse en la Figura 4.3c, $\cos(\Lambda K)$ es una función de valor real tal que es posible que $|\cos(\Lambda K)| > 1$. Esto ocurre cuando $\Lambda K = m\pi + i\Lambda K_i$, $m = \text{entero}$, $K_i \neq 0$. Pero esta situación no produce modos normales oscilatorios en z [4.11], por lo que las bandas fotónicas prohibidas se localizan en los intervalos de valores de ω tales que $|\cos(\Lambda K)| > 1$.

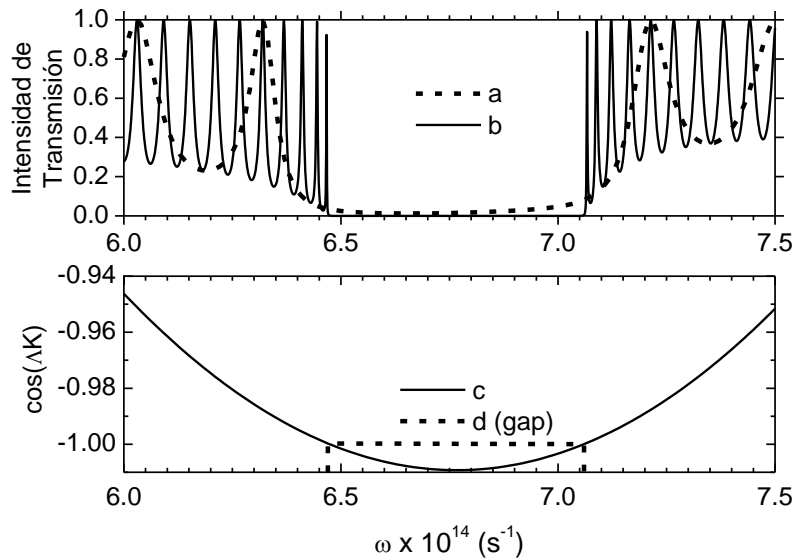


FIGURA 4.3. a,b) Espectros de transmisión para muestras de 20 y 100 periodos. c,d) Espectro de transmisión para una superred periódica de extensión infinita. El intervalo de frecuencia de la banda fotónica prohibida es aproximadamente $[6.47 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}, 7.06 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}]$.

4.2 ESTUDIOS SOBRE EL COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN

En escala logarítmica, en ésta Sección presentamos los espectros de transmisión para los tres primeros armónicos que se propagan a través de una superred AlAs/GaAs. Cuando no se especifique, la escala de frecuencias de cada armónico generado debe considerarse el doble o el triple respectivamente de la frecuencia correspondiente al primer armónico.

En la Figura 4.4a mostramos las intensidades de transmisión para una muestra de 20 periodos. En concordancia con Scalora *et al* [4.8], observamos que la intensidad del segundo armónico generado alcanza su valor máximo sobre todo el intervalo de frecuencia mostrado, cuando la onda fundamental transmitida tiene la frecuencia del borde izquierdo (entre 2π y $6.4 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$) del primer gap.

Adicionalmente se encuentra que ocurre lo mismo con el tercer armónico, aunque el máximo del segundo armónico es mayor que el del tercero.

Espectros análogos a los de 4.4a, se tienen en la Figura 4.4b para una muestra de 100 periodos, donde ahora alcanzamos a distinguir regiones que podemos asociar con los primeros gaps para el segundo y tercer armónicos, estos se localizan alrededor de 2×6.7 y $3 \times 6.5 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$ respectivamente. El espectro de transmisión que alcanza valores de uno corresponde a la componente lineal (primer armónico), debajo de éste se ubican las soluciones para el segundo y tercer armónico. En concordancia con la aproximación “no-depletion”, la intensidad de transmisión de la respuesta lineal en promedio es mucho mayor que la del segundo y tercer armónico (en sentido estricto, tal aproximación debe considerar también las contribuciones de las ondas correspondientes que emergen por el lado izquierdo de la superred).

No obstante hemos encontrado que para algunas frecuencias ubicadas en la banda prohibida, la transmisión del segundo armónico puede ser mayor que la del primero. Y más aún, el tercer armónico puede dar lugar a una transmisión mayor a la de los dos anteriores.

Como se aprecia en las Figuras 4.4 y 4.5, este efecto se logra por el incremento del número de celdas elementales de la superred y por la ubicación y extensión de las primeras bandas fotónicas prohibidas de todos los ordenes mencionados. Como se esperaba, según la teoría lineal [4.11], en la medida que se incrementa el número de capas de la muestra la transmisión en la región de frecuencias prohibidas se hace más pequeña. Se observa el mismo comportamiento en los armónicos generados por la interacción del primero con las susceptibilidades de segundo y tercer orden.

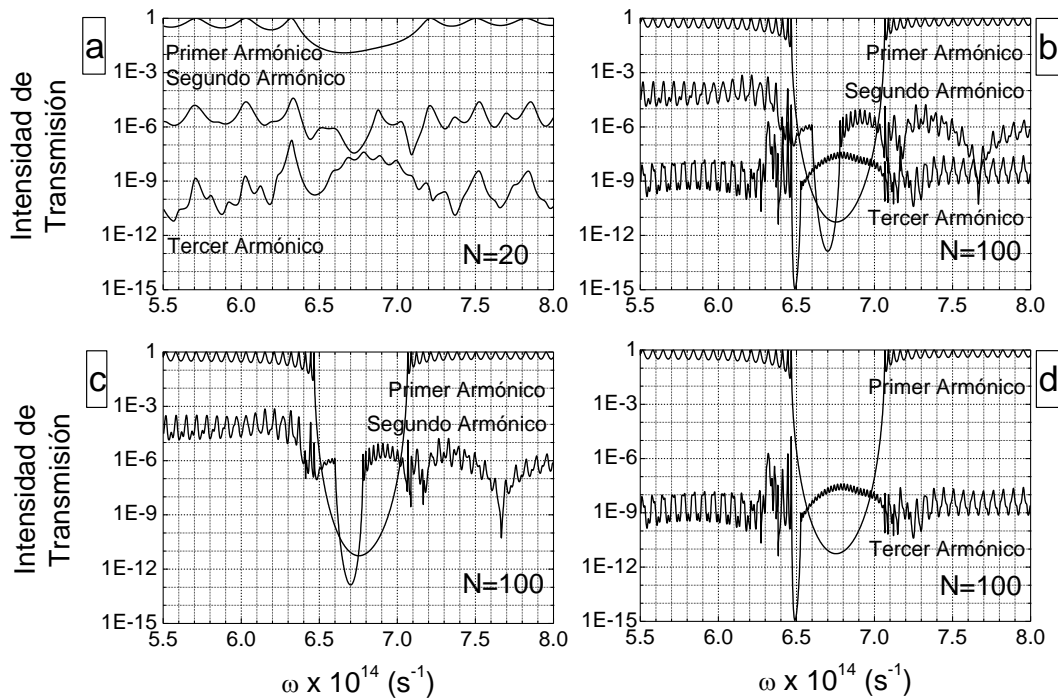


FIGURA 4.4. En escala logarítmica, intensidad de transmisión en función de la frecuencia para los tres primeros armónicos que se propagan en estructuras de gap fotónico. La primera gráfica corresponde a 20 periodos, las restantes pertenecen a 100 periodos. En la región del gap de primer orden, para N=100, la intensidad de transmisión relativa entre los tres armónicos es cambiante.

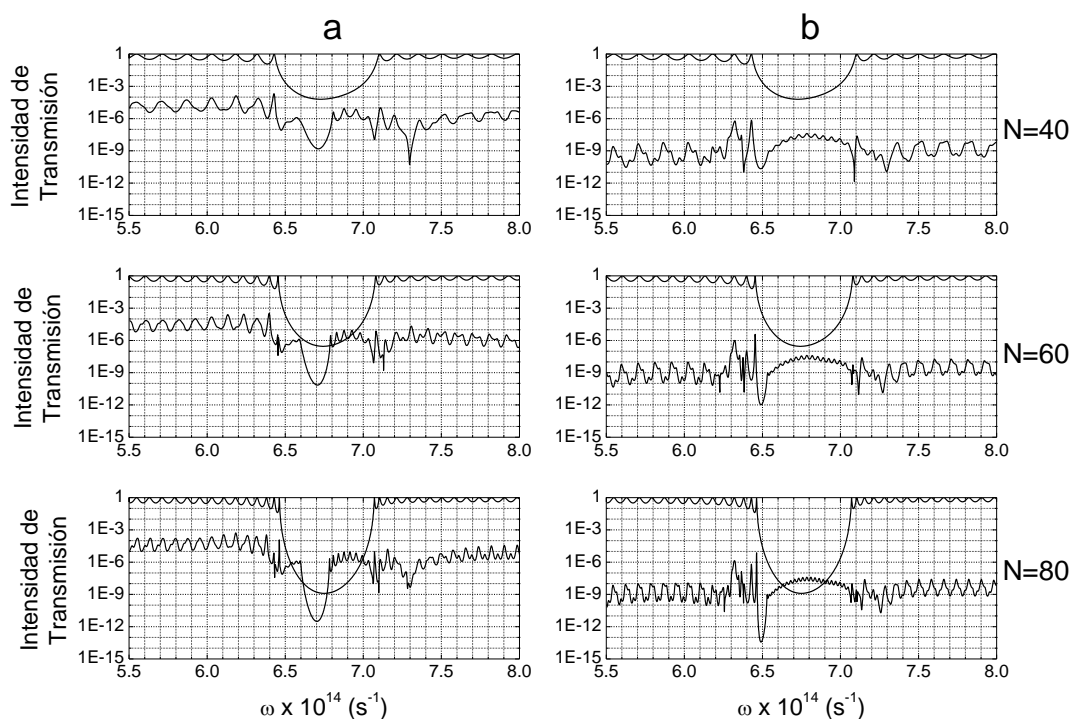


FIGURA 4.5. Secuencia de intensidades de transmisión para $N=40, 60, 80$, así como también para: a) primer y segundo armónicos, b) primer y tercer armónicos. La profundidad de las bandas de baja transmisión de los tres ordenes crece con N , lo cual se esperaba para el primer armónico, en concordancia con la teoría lineal.

De izquierda a derecha, la Figura 4.6a resalta las regiones de muy baja transmisión de los tres primeros armónicos de la Figura 4.4b. Estas pueden compararse con las bandas fotónicas prohibidas obtenidas a partir de (4.10), para los índices de refracción correspondientes al primero, segundo y tercer armónico respectivamente como si se tratase de casos lineales, estas se muestran de izquierda a derecha en la Figura 4.6b. De manera que las bandas prohibidas 4.6b son independientes entre sí.

Ya que el segundo y tercer armónicos son generados por la interacción del primer armónico con las susceptibilidades de segundo y tercer orden, existe una dependencia de los armónicos no lineales respecto del lineal. Entonces, la notable diferencia que existe en la comparación para el tercer armónico, puede explicarse por el hecho de que el extremo izquierdo del tercer gap 4.6b cae fuera del primer gap 4.6b. Las frecuencias de tal extremo se ven estimuladas por esta situación, reduciéndose la anchura efectiva del gap de tercer

orden. Aunque muy ligeramente, para el segundo armónico se presenta la situación contraria, efecto que puede ser originado porque N no sea lo suficientemente grande.

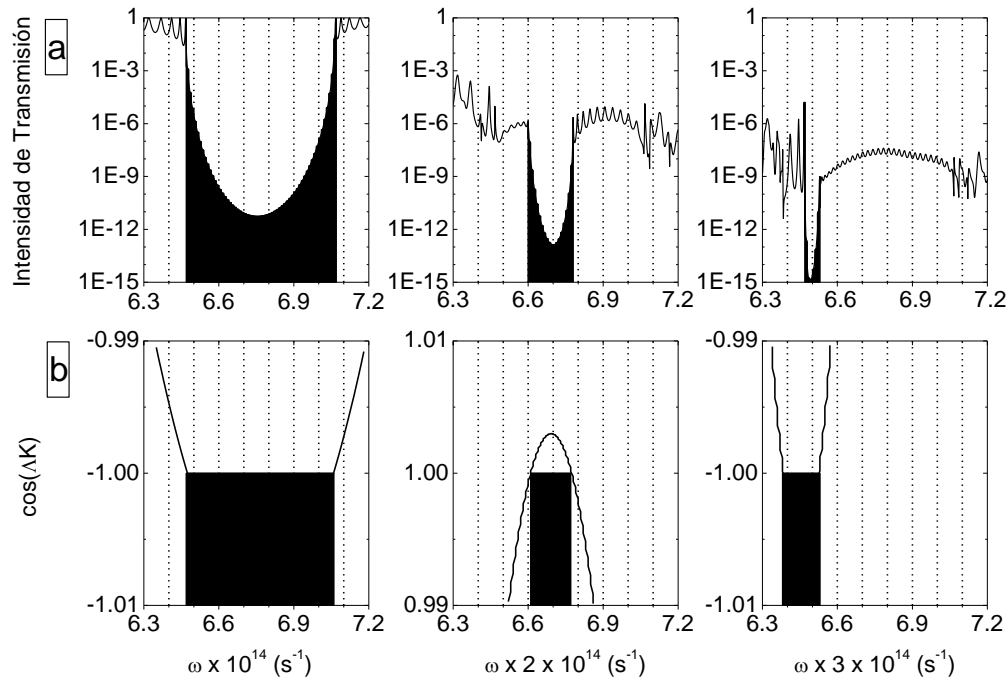


FIGURA 4.6. Anchura de las bandas fotónicas prohibidas relacionadas con los tres primeros armónicos, obtenidas mediante: a) una muestra de 100 periodos, b) una superred periódica de extensión infinita. Las bandas b) son independientes entre sí. Por el contrario y esperado por construcción, las dos últimas bandas a) muestran cierta dependencia de la primera. En relación con b), la última banda a) es afectada apreciablemente por el grosor y ubicación de la primera.

4.3 TIEMPOS DE RETARDO

Ahora nos ocuparemos del tiempo de retardo $t_{dn}(\beta_n)$, relacionado con la transmisión de orden n de un paquete Gaussiano estrecho centrado en $k_0(\omega_0)$, definido en la Sección 3.5 a través de la ecuación (3.75)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_n(k) &= \mathcal{F}_n^{\perp y}(k) e^{i\gamma_n^{\perp y}(k)} \\
&\simeq \mathcal{F}_n^{\perp y} e^{ink\beta_n^{\perp y}}, \quad |k(\omega) - k_0(\omega_0)| \leq \sigma_{k(\omega)} \ll k_0(\omega_0), \\
t_{dn} &= \beta_n^{\perp y} = \frac{1}{nc} \frac{d}{dk} \gamma_n^{\perp y} \Big|_{k=k_0} = \frac{1}{n} \frac{d}{d\omega} \gamma_n^{\perp y} \Big|_{\omega=\omega_0},
\end{aligned} \tag{4.11}$$

donde $\mathcal{F}_n[k(\omega)]$ son las amplitudes complejas de las ondas planas transmitidas del paquete correspondiente. Las ondas planas transmitidas de primer y tercer orden tienen polarización $P(\perp)$, las de segundo orden cuentan con polarización $S(y)$.

Para $n > 1$ la relación (4.11) está ligada a la aproximación de sumatoria simple, construida en la Sección 3.4 en relación con paquetes de ondas Gaussianos. En consecuencia, el tiempo de retardo depende de los coeficientes binomiales (3.67) que figuran en la corrección (3.71) para la generación de ondas planas armónicas de orden $n > 1$.

No obstante la corrección binomial puede llegar a ser insignificante cuando $\sigma_{k(\omega)}$ es lo suficientemente pequeña.

Para el intervalo de frecuencia mostrado, la Figura 4.7 considera el efecto de la corrección binomial para los tiempos de retardo del tercer armónico. La muestra correspondiente es de 20 periodos y $\sigma_\omega = 0.08 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$. En la Sección 4.1 demostramos que tal corrección no afecta los tiempos de retardo del segundo armónico.

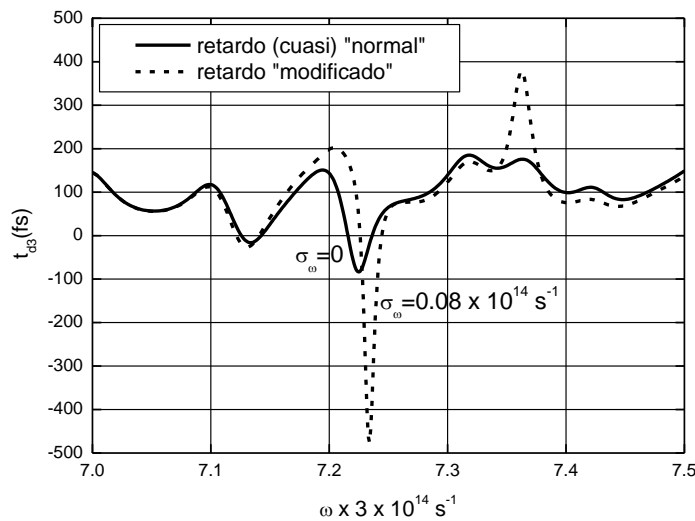


FIGURA 4.7. Tiempos de retardo (cuasi) “normal” y “modificado” por la aproximación binomial, para el tercer armónico. Obviamente, la subdivisión del intervalo puede influir en el resultado de una derivada, en éste caso la subdivisión consiste de 500 partes. De 7.0 a 7.1 las gráficas correspondientes coinciden, mientras que de 7.1 a 7.5 la diferencia llega a ser bastante notable.

Las Figuras restantes de ésta Sección no tomarán en cuenta la corrección binomial, aunque la tendremos presente cuando nos ocupemos de los paquetes de ondas Gaussianos en la próxima Sección.

En la Figura 4.8b presentamos los tiempos de retardo para los tres primeros armónicos en una muestra de 20 bicapas. Como puede verse, para el primer armónico los tiempos son positivos, mientras que para el segundo y tercero existen frecuencias que corresponden a tiempos negativos, esto es la muestra soporta una transmisión superluminal para el segundo y tercer armónico.

Aunque tengamos solamente 20 periodos, ahora sabemos donde se encuentran las regiones de frecuencia prohibida, y así vemos en la Figura 4.8b que el segundo armónico cuenta con tiempos negativos dentro y fuera de la banda prohibida correspondiente. El tercer armónico únicamente presenta tiempos negativos fuera del gap respectivo. Así que para los armónicos no lineales los tiempos de retardo negativos no es un efecto exclusivo de las bandas fotónicas prohibidas.

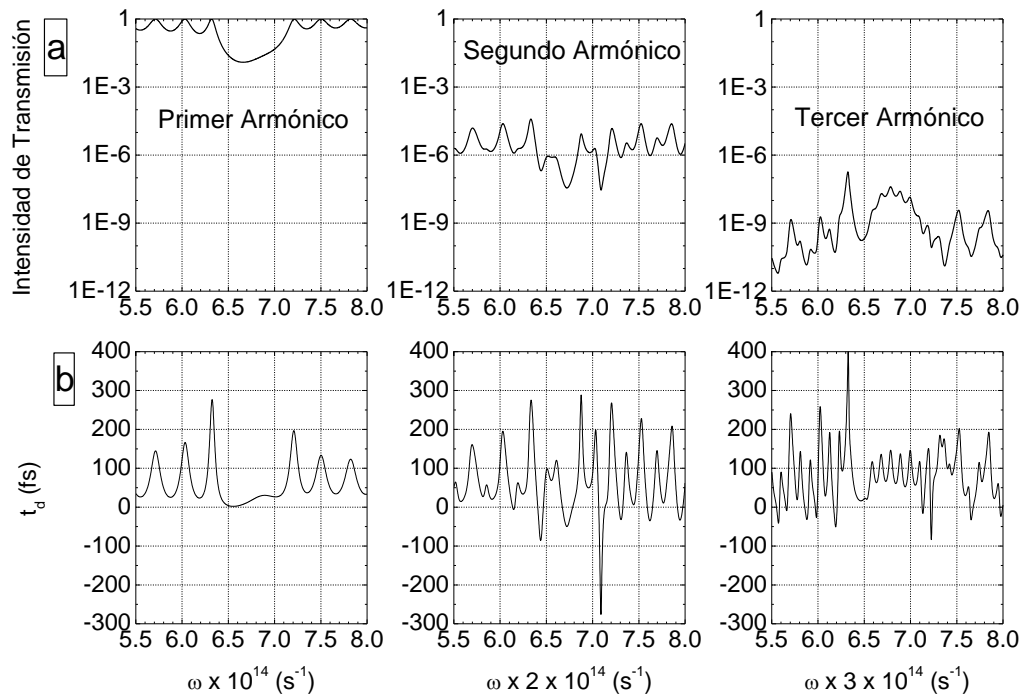


FIGURA 4.8. a) Intensidad de transmisión. b) Tiempos de retardo para las ondas planas correspondientes atravesando una muestra de 20 bicapas AlAs/GaAs. Los tiempos de retardo para el primer armónico son todos positivos, mientras que para el segundo y tercero existen regiones de frecuencia para las cuales los tiempos de retardo pueden ser negativos o positivos.

En la Figura 4.9b se muestran los tiempos de retardo de los tres primeros armónicos en una muestra de 100 bicapas. Podemos apreciar que ahora están claramente marcados los perfiles de tiempo de retardo que corresponden a las bandas fotónicas prohibidas de los tres ordenes. Para el primer armónico los tiempos negativos se encuentran solo en el gap correspondiente, mientras que para el segundo y tercero los tiempos negativos están presentes dentro y fuera de las bandas fotónicas prohibidas respectivas.

Comparando la Figura 4.9a con la Figura 4.9b, observamos que cada una de las bandas fotónicas prohibidas tiene asociada una banda de tiempos de retardo negativos. Las correspondientes proyecciones sobre la escala de frecuencias de los perfiles de los dos tipos de bandas, tienen la misma ubicación y extensión.

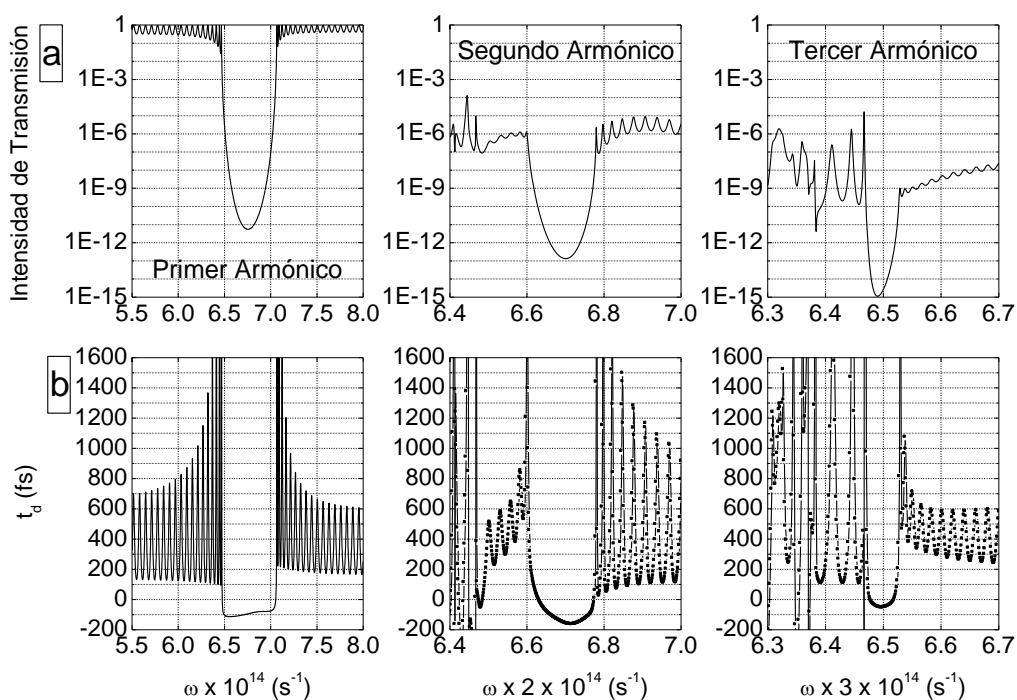


FIGURA 4.9. a) Intensidad de transmisión. b) Tiempos de retardo para las ondas planas correspondientes que atraviesan una muestra de 100 bicapas AlAs/GaAs. Las bandas fotónicas prohibidas de los tres ordenes están acompañadas por bandas respectivas de tiempos de retardo negativos. Los correspondientes perfiles de los dos tipos de bandas tienen la misma proyección horizontal.

La Figura 4.10 nos muestra la secuencia de los tiempos de retardo correspondientes a la Figura 4.5. En la región de las bandas fotónicas prohibidas, existen características comunes entre los espectros de transmisión y los tiempos de retardo respectivos. De manera que las afirmaciones hechas en uno de los dos casos tienen una contraparte análoga para el otro, por ejemplo en relación con los tiempos de retardo podemos expresar:

Para cualquier armónico el ancho de las bandas de tiempos de retardo disminuye con el crecimiento del número N de las bicapas de la muestra. Para N fija el ancho de las bandas de tiempos de retardo disminuye con el crecimiento del orden del armónico. Para cualquier armónico la profundidad de las bandas de tiempos de retardo se acentúa cuando N crece.

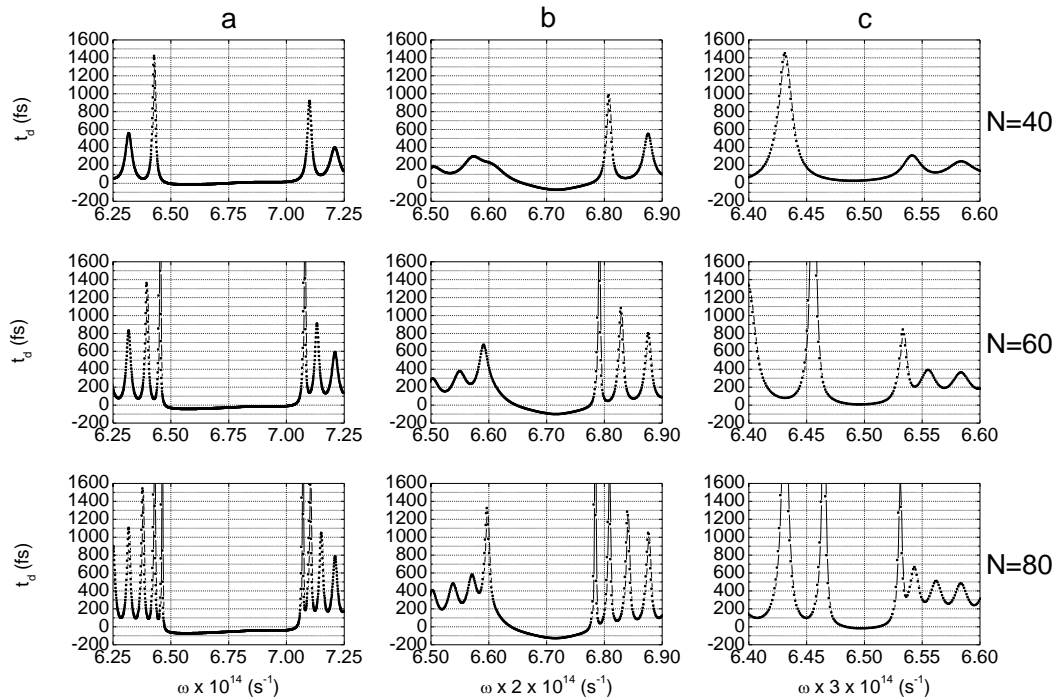


FIGURA 4.10. Secuencia de tiempos de retardo para $N=40$, 60 , 80 , así como también para: a) primer armónico, b) segundo armónico, c) tercer armónico. Para cualquier columna (fila), el ancho de las bandas de tiempos de retardo disminuye con el crecimiento de N (el orden del armónico). Para cualquier columna, la profundidad de las bandas de tiempos de retardo se acentúa cuando N crece. Una afirmación semejante puede aplicarse a las intensidades de transmisión de la Figura 4.5.

No hay que perder de vista lo que se mencionó en el Capítulo 1, referente a las velocidades superluminales de los pulsos de primer orden transmitidos a través de la banda fotónica prohibida:

Pese a las velocidades de grupo paradójicamente altas, el pico de amplitud que emerge de la muestra es siempre más bajo que la amplitud que el pulso tendría en el mismo instante si estuviera justamente propagándose a c sin atenuación, es decir, la velocidad de energía no excede a c y por lo tanto la causalidad no es violada [4.1].

Las Figuras 4.4 y 4.5 son un ejemplo de que en la aproximación “no-depletion”, la idea anterior puede aplicarse también a los paquetes generados de segundo y tercer orden.

Los tiempos de retardo pueden expresarse de manera equivalente en términos de desplazamientos espaciales originados por las condiciones de frontera que deben cumplir

los armónicos de cualquier orden. Vemos en (3.59) y (3.73) que $c(t - \beta_n)$ es la distancia del origen de coordenadas $(x + L_x = 0, z + L_z = 0)$ al plano de intensidad máxima $\kappa(x + L_x) + N(z + L_z) = c(t - \beta_n)$. Con respecto a la distancia ct , si β_n es positivo el plano de intensidad máxima se retrasa, si β_n es negativo el plano de intensidad máxima se adelanta.

En defensa de la causalidad, otro argumento particularmente sencillo está basado en la creencia del “pulso reorganizado”, el cual supone que el pulso de tunelamiento “superluminal” surge tempranamente desde la parte frontal pequeña del pulso incidente [4.12].

La idea podemos extenderla también a los paquetes “superluminales” transmitidos de segundo y tercer orden. Esta manera de razonar explica el hecho de que los pulsos transmitidos son de muy pequeña intensidad en relación con la intensidad del pulso incidente y, sin violentar el principio de la velocidad límite c , explica los desplazamientos espaciales positivos de los centros de los paquetes transmitidos, con respecto al centro del paquete incidente.

Varios argumentos más se han propuesto para explicar el mecanismo de tunelamiento superluminal y por qué la velocidad de grupo superluminal no viola la causalidad.

No obstante, la pregunta de cómo el pulso de tunelamiento se obtiene a partir del pulso incidente aún no está satisfecha [4.13] (o no entendida [4.14]), o, se dice, permanece bastante controversial [4.15][4.16].

4.4 TRANSMISIÓN DE PAQUETES GAUSSIANOS EN LA ESTRUCTURA PERIÓDICA AIAs/GaAs

El que los tiempos de retardo $t_{dn} = \beta_n$ pueden asociarse a paquetes Gaussianos transmitidos que son estrechos en el dominio de $k(\omega)$, se expresa a través de las ecuaciones (3.72)-(3.73)

$$\begin{aligned}
\Psi_{\mathcal{F}_n}(\mathbf{r}, t) &= \frac{c_n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left[\frac{e^{-(k-k_0)^2/4\sigma_k^2}}{(2\pi\sigma_k^2)^{1/4}} e^{ikL} \right]^n \mathcal{F}_n(k) e^{ink(\kappa x + Nz - ct)} \\
&\simeq \frac{c_n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left[\frac{e^{-(k-k_0)^2/4\sigma_k^2}}{(2\pi\sigma_k^2)^{1/4}} e^{ikL} \right]^n \mathcal{F}_n e^{ink\beta_n} e^{ink(\kappa x + Nz - ct)} \\
&= \mathcal{F}_n \left\{ \frac{e^{-[\kappa(x+L_x) + N(z+L_z) - c(t-\beta_n)]^2/4\sigma_L^2}}{(2\pi\sigma_L^2)^{1/4}} e^{ik_0[\kappa(x+L_x) + N(z+L_z) - c(t-\beta_n)]} \right\}^n \\
\sigma_k \ll k_0, \quad \mathcal{F}_n(k) &\simeq \mathcal{F}_n e^{ink\beta_n}, \quad \mathcal{F}_n \simeq \text{constante}, \quad n > 0.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Con $\beta_n = 0$ y $n = 1$ los paquetes transmitidos (4.12) reproducen la forma para el paquete incidente (3.59). De manera que un paquete Gaussiano incidente estrecho transmite paquetes Gaussianos para cada uno de los tres ordenes.

En esta Sección estudiaremos a una superred construida de 20 periodos, es decir su longitud sobre el eje de crecimiento Z es $d = 20(d_{AlAs} + d_{GaAs})$. En el espacio de las posiciones, los perfiles de los paquetes de ondas se grafican sobre un sistema de coordenadas bidimensionales, tomando como eje horizontal al eje $\xi_z = z \cos 20^\circ / d$ que es paralelo al eje Z (o si se prefiere paralelo al eje de incidencia). El eje $\xi_z d$ se considera equivalente al eje de incidencia ya que si en determinado momento el plano de intensidad máxima del paquete transmitido tiene la posición z , sobre el eje Z , entonces sobre la dirección de incidencia tendrá la posición $z \cos 20^\circ$. En consecuencia, sobre el eje ξ_z a la superred sólo le corresponde el intervalo $0 \leq \xi_z \leq \cos 20^\circ$.

Al tiempo $t = 0$ el centro del paquete incidente se localiza en $\xi_z = -10$. En una propagación libre el centro del paquete incidente debe alcanzar la posición $\xi_z = 20$ en un tiempo de $30d/c = 900$ fs. Así que en esta Sección todas las gráficas de paquetes en el espacio de las posiciones, se obtienen para el tiempo de 900 fs.

Recordando que en (3.59) se expresa que $\sigma_k \sigma_L = 1/2$, entonces (4.12) indica que para $k_0(\omega_0)$ fija y $\sigma_k(\sigma_\omega)$ variable, el término de amplitud del paquete transmitido correspondiente a determinado orden, disminuye cuando $\sigma_k(\sigma_\omega)$ disminuye. En general, la ecuación (4.12) puede ser una referencia útil aún cuando $\sigma_k(\sigma_\omega)$ no sea lo suficientemente

pequeña para producir un paquete transmitido de forma Gaussiana. De acuerdo con esto y con fines de comparación, construiremos gráficas modificando la escala de amplitudes de manera que sólo muestren cualitativamente las características de la ecuación (4.12).

La Figura 4.11 y la Figura 4.12 muestran secuencias de valores de $\sigma_\omega = c\sigma_k$ y los correspondientes paquetes transmitidos de segundo y tercer orden. En ambos casos la frecuencia central ω_0 permanece fija y está relacionada con tiempos de retardo negativos. Aunque inicialmente las secuencias no están formadas por paquetes transmitidos de forma Gaussiana, el tiempo de retardo del pico frontal puede calcularse en términos de sus posiciones y de la velocidad c . Como es de esperar, este último tiempo de retardo tiende al resultado indicado por la expresión (4.11). Esta información se concentra en la Tabla 1.

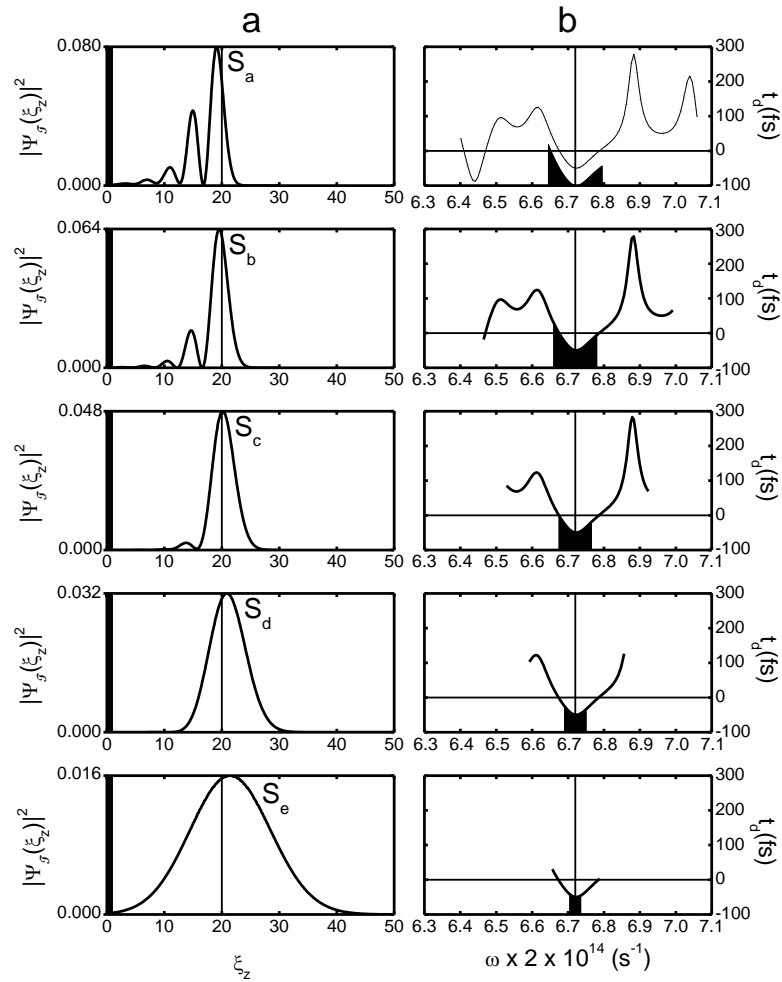


FIGURA 4.11. a) Paquetes de segundo orden, b) tiempos de retardo. El área sombreada en a) corresponde al intervalo asignado a la superred. El área

sombreada en b) señala el intervalo $|\omega - \omega_0| \leq \sigma_\omega$. La extensión de las líneas de tiempo de retardo indica el intervalo de integración para la obtención de los paquetes en a). La gráfica superior de tiempo de retardo muestra en línea punteada la “corrección” binomial.

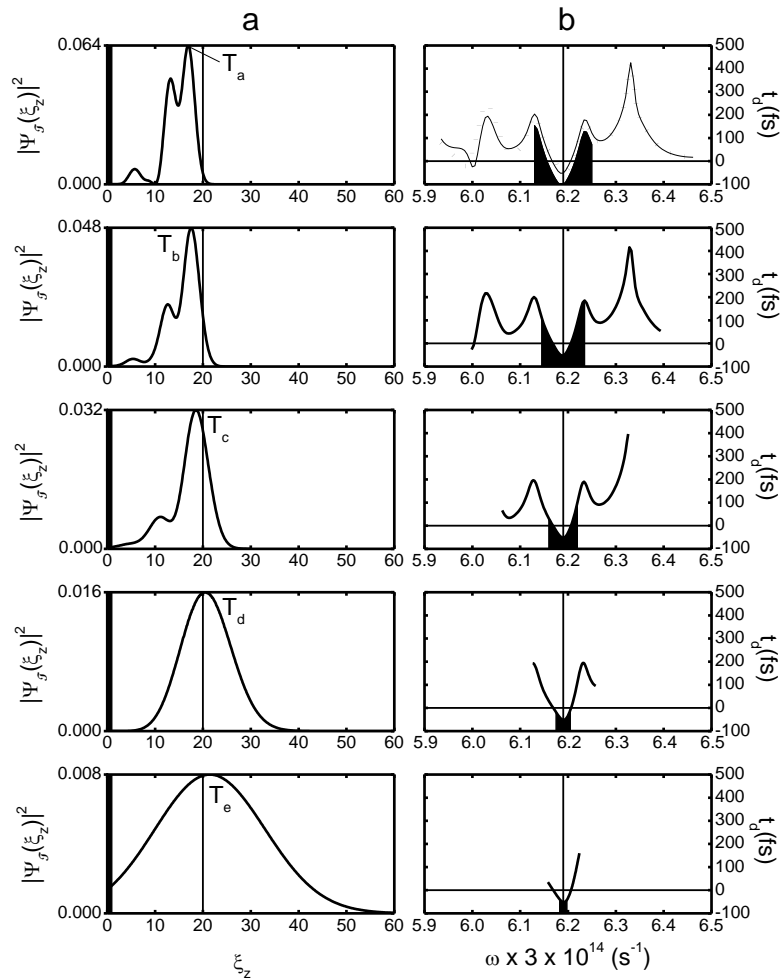


FIGURA 4.12. a) Paquetes de tercer orden, b) tiempos de retardo. Con línea de puntos, puede observarse la corrección binomial para el tiempo de retardo.

$\omega_0 \times 10^{14}$	$\sigma_\omega \times 10^{14}$	ξ_z del pico	Armónico	Símbolo	T. de Retardo
Figura 4.11. El tiempo de retardo de la onda monocromática a ω_0 es -49.6 fs					
6.72 s ⁻¹	0.080 s ⁻¹	19.1	Segundo	S _a	27 fs
	0.064 s ⁻¹	19.5		S _b	15 fs
	0.048 s ⁻¹	20.2		S _c	-6 fs
	0.032 s ⁻¹	20.9		S _d	-27 fs
	0.016 s ⁻¹	21.4		S _e	-42 fs

	0.008 s ⁻¹				
Figura 4.12. El tiempo de retardo de la onda monocromática a ω_0 es -48.9 fs					
6.19 s ⁻¹	0.080 s ⁻¹		Tercero		
	0.064 s ⁻¹	16.9		T _a	93 fs
	0.048 s ⁻¹	17.5		T _b	75 fs
	0.032 s ⁻¹	18.6		T _c	42 fs
	0.016 s ⁻¹	20.5		T _d	-15 fs
	0.008 s ⁻¹	21.4		T _e	-42 fs

TABLA 4.1

Ahora mantendremos fija la anchura $\sigma_\omega = c\sigma_k = 0.08 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$ para paquetes Gaussianos incidentes sobre la muestra de 20 bicapas. Y serán revisados los paquetes transmitidos para el primero, segundo y tercer armónico, para ello consideraremos paquetes centrados en $\omega_0 = ck_0$ donde se estudian los siguientes tres casos: a) $\omega_0 = 6.47 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$ en el borde izquierdo de la banda prohibida, b) $\omega_0 = 6.76 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$ en el centro del gap, c) $\omega_0 = 7.05 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$ en el borde derecho de la banda prohibida.

Aún cuando los resultados numéricos para b) y c) indican que el paquete de tercer orden tiene amplitud mayor que la del segundo, los demás cálculos se ajustan cualitativamente a la expresión (4.12), es decir, para ω_0 y σ_ω fijas la amplitud de los paquetes transmitidos disminuye con el orden n . Además la amplitud del paquete incidente se mantiene mayor que la del paquete transmitido de primer orden y mucho mayor que la de los paquetes transmitidos de orden superior. Con el fin de que los paquetes puedan ser observados conjuntamente, usamos las características cualitativas de (4.12) para construir las gráficas de las Figuras 4.13 y 4.14.

En las Figuras 4.13Aa, 4.13Ab y 4.13Ac graficamos los correspondientes valores absolutos de las funciones de distribución $\Phi_{\mathcal{F}_n}(k)$ de cada uno de los tres primeros armónicos transmitidos. Pensando en la transformada de Fourier (2.6) y en (4.12) podemos definir a dichas funciones como

$$\Psi_{\mathcal{J}_n}(\xi_z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \Phi_{\mathcal{J}_n}(k) e^{ikn[(\xi_z+10)d-ct]}, \quad n > 0, \quad (4.13)$$

$$\Phi_{\mathcal{J}_n}(k) = c_n \sqrt{2\pi} \left[\frac{e^{-(k-k_0)^2/4\sigma_k^2}}{(2\pi\sigma_k^2)^{1/4}} \right]^n \mathcal{J}_n(k),$$

donde hemos considerado la nueva coordenada y la posición inicial del paquete incidente $\xi_z = -10$. Observamos que los perfiles Gaussianos son modificados por la amplitud compleja de onda plana transmitida $\mathcal{J}_n(k)$.

En las Figuras 4.13Ba, 4.13Bb y 4.13Bc graficamos los correspondientes coeficientes de transmisión (proporcionales a $|\mathcal{J}_n(k)|^2$) de cada uno de los tres primeros armónicos. Esto ayuda a entender como se deforman las funciones de distribución Gaussianas que se obtienen en el caso de $\sigma_\omega \ll \omega_0$. Considerando la coincidencia de las posiciones, sobre la escala de frecuencias, de los picos de transmisión con los picos de tiempo de retardo, que se observa en la Figura 4.8, podemos explicar tales deformaciones en términos de las diferentes velocidades de transmisión de las componentes del paquete.

En las Figuras 4.13Ab y 4.13Bb, $\sigma_\omega / \omega_0 = 0.012$ pudiera no considerarse suficientemente pequeño por la forma de las funciones de distribución para el segundo y tercer orden, no obstante la función de distribución de primer orden es aproximadamente Gaussiana. Esto se explica por el hecho de que en el interior del gap la intensidad de transmisión varía suavemente (la Figura 4.3 puede resultar más ilustrativa), sin embargo es ligeramente mayor sobre la segunda mitad del gap, originando un pequeño desplazamiento del centro de la función de distribución para el paquete transmitido, con respecto al incidente.

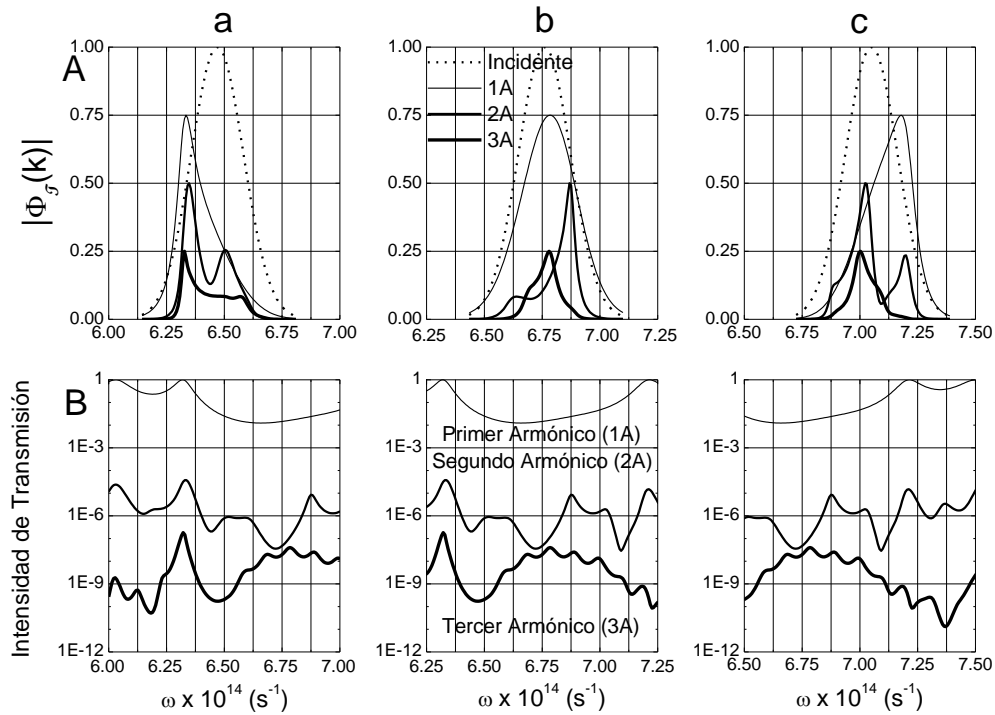


FIGURA 4.13. Paquete de onda Gaussiano incidente y paquetes transmitidos de los tres primeros ordenes en el espacio de las frecuencias, con $\omega_0 = ck_0$ ubicada en: Aa) la primera frontera del gap, Ab) el centro del gap, Ac) la segunda frontera del gap. La superred tiene 20 periodos y empleamos $\sigma_\omega = c\sigma_k = 0.08 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$. La escala vertical de los paquetes es un tanto arbitraria. Con la fila B se entiende mejor como el coeficiente de transmisión deforma el perfil Gaussiano.

Tomando en cuenta las consideraciones previas, en la Figura 4.14 se construyen las gráficas $|\Psi_{\mathcal{J}_n}(\xi_z, t)|^2$ de acuerdo a la ecuación (4.13) y evaluando todos los paquetes en el tiempo $t = 900 \text{ fs}$. Para este tiempo, un paquete Gaussiano incidente de referencia propagándose en el vacío ocuparía la posición $\xi_z = 20$. Como parcialmente ya lo hicimos antes, a partir de esta posición de referencia, podemos calcular el tiempo de retardo de cualquier pico de los paquetes transmitidos, deformados o no respecto del perfil Gaussiano incidente.

En la Figura 4.14 se han indicado cada uno de los picos para los cuales se calcula el tiempo de retardo. En la Tabla 4.2 se presentan los resultado numéricos, el primer renglón

corresponde a valores para una propagación libre (espacio vacío) por lo que el tiempo de retardo es cero.

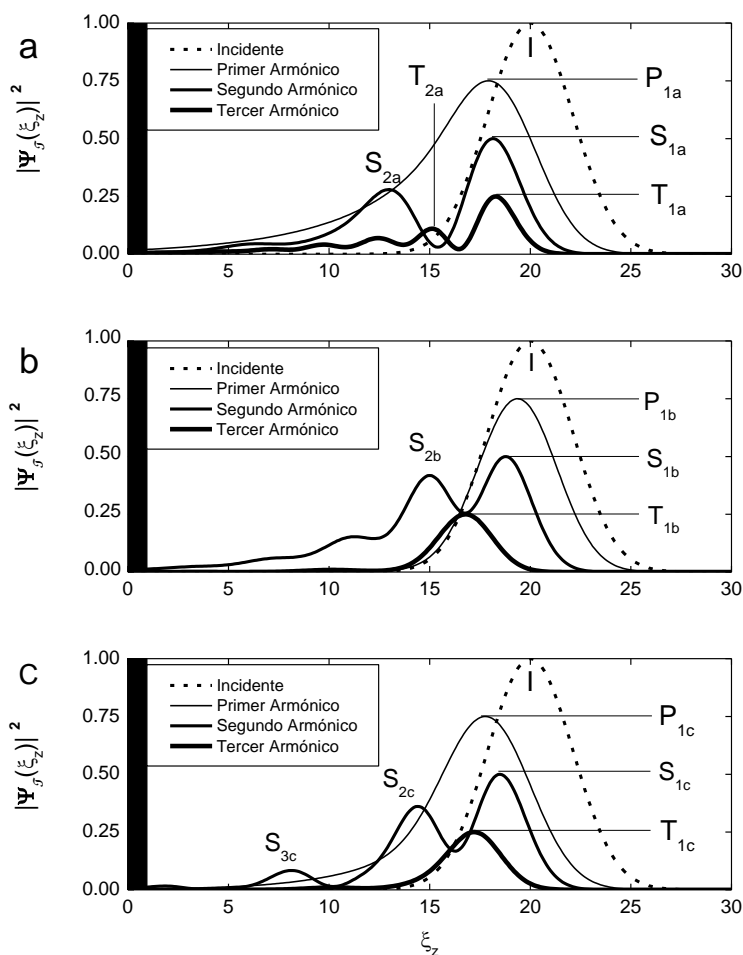


FIGURA 4.14. Distribución espacial de los paquetes correspondientes a la Figura 4.13A. Se identifican las posiciones de los picos de interés.

$\omega_0 \times 10^{14}$	$\sigma_\omega \times 10^{14}$	ξ_z del pico	Armónico	Símbolo	T. de Retardo
Figura 4a					
6.47 s^{-1}	0.080 s^{-1}	20	Incidente	I	0fs
		17.9	Primero	P_{1a}	63 fs
		18.1	Segundo	S_{1a}	57 fs
		13	Segundo	S_{2a}	210 fs
		18.3	Tercero	T_{1a}	51 fs
		15.1	Tercero	T_{2a}	147 fs
Figura 4b					
6.76 s^{-1}	0.080 s^{-1}	20	Incidente	I	0fs
		19.4	Primero	P_{1b}	18 fs

		18.8	Segundo	S _{1b}	36 fs
		15	Segundo	S _{2b}	150 fs
		16.8	Tercero	T _{1b}	96 fs
Figura 4c					
7.05 s ⁻¹	0.080 s ⁻¹	20	Incidente	I	0fs
		17.8	Primero	P _{1c}	66 fs
		18.5	Segundo	S _{1c}	45 fs
		14.4	Segundo	S _{2c}	168 fs
		8.1	Segundo	S _{3c}	357 fs
		17.2	Tercero	T _{1c}	84 fs

TABLA 4.2

Considerando la expresión (4.13), una estimación de las posiciones de los picos prominentes de la Figura 4.14, puede obtenerse a partir de los tiempo de retardo correspondientes a las frecuencias de los picos prominentes respectivos de la Figura 4.13. Por ejemplo al pico de primer orden de la Figura 4.13Ab le corresponde un tiempo de retardo positivo, ver la Figura 4.8b, por lo que en el espacio de las posiciones de la Figura 4.14b se encuentra desplazado negativamente con respecto a $\xi_z = 20$.

CONCLUSIONES

Los paquetes de ondas de un mismo orden no lineal que consideramos en este trabajo, son la superposición múltiple de las ondas correspondientes a todas las sumas múltiples posibles del mismo orden, de las frecuencias de un paquete de primeros armónicos que se propagan a través de un material no lineal de índice de refracción isotrópico (escalar). Estos paquetes no lineales son independientes unos de otros debido al desacoplamiento (aproximación) “no-depletion”.

Cuando el paquete incidente tiene la forma Gaussiana y se propaga a través del material no lineal sin que su perfil sea modificado sustancialmente (paquete estrecho en el dominio de frecuencias), la aproximación binomial permite que la superposición (integral) múltiple, relacionada con los paquetes no lineales de cualquier orden, pueda expresarse como una superposición simple de correspondientes armónicos “modificados”.

Expresar a los paquetes lineales y no lineales mediante una integral simple permite generalizar rápidamente la interpretación para la derivada, con respecto a la frecuencia angular, de la fase de la amplitud de transmisión de cualquier orden: tiempo de retardo para el correspondiente paquete estrecho en el dominio de frecuencias, que físicamente es la diferencia de tiempos en que ocuparían la misma posición el pico de orden lineal o no (aproximadamente Gaussiano) que emerge del material y el pico Gaussiano incidente moviéndose en el vacío.

El paquete de armónicos “normales” de primer orden puede incluirse dentro de lo que puede llamarse formulación de paquetes de ondas y tiempos de retardo, de cualquier orden, en la aproximación binomial. Esta es la contribución sobresaliente de esta investigación. La aproximación binomial produce ondas planas en el límite.

La incidencia de una onda electromagnética plana sobre un material no lineal de índice de refracción isotrópico, con la generación simultánea del segundo y tercer armónicos en la aproximación “no-depletion”; así como la formulación binomial de paquetes de ondas se aplicaron al caso de un cristal fotónico (superred) unidimensional construido con capas alternadas de AlAs y GaAs de grosor respectivo fijo.

Se presentaron resultados numéricos sobre coeficientes de transmisión, tiempos de retardo y paquetes de ondas, del primero hasta el tercer orden debido a que la aproximación binomial no afecta el tiempo de retardo de un segundo armónico “modificado” con respecto

a un segundo armónico “cuasinormal”. En el mismo sentido, la aproximación binomial puede llegar a variar notablemente el tiempo de retardo de tercer orden.

En lo que se refiere a ondas monocromáticas pudo mostrarse para una muestra de 100 bicapas AlAs/GaAs, que las intensidades del segundo y tercer armónicos pueden ser más grandes que la intensidad del haz fundamental en la región de frecuencias donde la estructura soporta una banda de energía prohibida para la solución lineal. Este efecto se logra por el número de celdas elementales de la superred y por la ubicación y extensión de las bandas fotónicas prohibidas correspondientes a cada uno de los tres armónicos.

Usando muestras entre 20 y 100 bicapas, se mostró que el efecto superluminal (tiempos de retardo negativos) se presenta sólo en la respectiva región prohibida para el caso del primer armónico, en lo que concierne al segundo y tercer armónicos tal efecto se presenta dentro y fuera de los correspondientes gaps.

Para una muestra de 20 bicapas y con el fin de ser consistentes con la aproximación binomial, para un paquete Gaussiano incidente cuya anchura ($\sigma_\omega = 0.08 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$) y frecuencia central son tales que el paquete transmitido de primer orden resulta aproximadamente Gaussiano, se presentaron cálculos para los paquetes transmitidos de los tres primeros ordenes. En particular cuando la frecuencia central del paquete incidente se ubica a la mitad del gap fotónico de primer orden, se tienen las mejores condiciones para la aproximación binomial ya que el paquete transmitido de primer orden es prácticamente Gaussiano. Este efecto se debe al comportamiento del factor de deformación, en general representado por la amplitud de transmisión de orden correspondiente. Para estas frecuencias y en el caso de primer orden, el módulo de la amplitud de transmisión y el tiempo de retardo varían suavemente. Por el contrario la amplitud de transmisión de segundo orden varía apreciablemente, originando una deformación notable del paquete de ondas correspondiente. Esto no significa que el perfil de segundo orden no sea confiable, respecto de la contribución correcta de todas las sumas equivalentes de frecuencias, ya que la hipótesis de nuestra aproximación se cumple adecuadamente.

Como el factor de deformación de los paquetes de ondas transmitidos, con respecto a la forma Gaussiana, esta representado por la amplitud de transmisión correspondiente (cuya fase esta relacionada con los tiempos de retardo), físicamente resulta razonable emplear la siguiente expresión simple y “obvia”: la parte delantera de los paquetes de ondas

transmitidos está constituida esencialmente por la contribución de las ondas de menores tiempos de retardo (mayores velocidades de propagación dentro del material). En el mismo sentido, la parte trasera de los paquetes de ondas transmitidos está constituida esencialmente por la contribución de las ondas de mayores tiempos de retardo (menores velocidades de propagación dentro del material).

Para un tiempo fijo, cuando un paquete transmitido está constituido por dos o más picos de transmisión, la amplitud de estos picos disminuye en dirección opuesta a la dirección de incidencia. Esto significa que en la construcción del paquete transmitido, la contribución de las ondas de mayores velocidades de propagación dentro del material es más intensa que la contribución de las ondas de menores velocidades de propagación dentro del material.

Debido a la mayor velocidad de la parte frontal del paquete que se propaga dentro del material, tal paquete experimenta un “estiramiento” de derecha a izquierda.

A cada pico de un paquete transmitido puede asignársele un tiempo de retardo, empleando cinemática elemental.

APÉNDICE

A.1 POLARIZACIONES DE SEGUNDO Y TERCER ORDENES

Por construcción de (2.7), [2.1] está permitido hacer cualquier intercambio simultáneo de las parejas $\beta_1\omega_1, \dots, \beta_n\omega_n$ dejando invariante a $\chi_{\alpha\beta_1 \dots \beta_n}^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_n)$, y en consecuencia por ejemplo

$$\begin{aligned}
 \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(n_1\omega_0, n_2\omega_0)E_{\beta n_1}E_{\gamma n_2} &= \chi_{\alpha\gamma\beta}^{(2)}(n_2\omega_0, n_1\omega_0)E_{\gamma n_2}E_{\beta n_1} \\
 \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(n_1\omega_0, n_2\omega_0, n_3\omega_0)E_{\beta n_1}E_{\gamma n_2}E_{\delta n_3} &= \chi_{\alpha\beta\delta\gamma}^{(3)}(n_1\omega_0, n_3\omega_0, n_2\omega_0)E_{\beta n_1}E_{\delta n_3}E_{\gamma n_2} \\
 &= \chi_{\alpha\delta\beta\gamma}^{(3)}(n_3\omega_0, n_1\omega_0, n_2\omega_0)E_{\delta n_3}E_{\beta n_1}E_{\gamma n_2} = \chi_{\alpha\gamma\beta\delta}^{(3)}(n_2\omega_0, n_1\omega_0, n_3\omega_0)E_{\gamma n_2}E_{\beta n_1}E_{\delta n_3} \\
 &= \chi_{\alpha\gamma\delta\beta}^{(3)}(n_2\omega_0, n_3\omega_0, n_1\omega_0)E_{\gamma n_2}E_{\delta n_3}E_{\beta n_1} = \chi_{\alpha\delta\gamma\beta}^{(3)}(n_3\omega_0, n_2\omega_0, n_1\omega_0)E_{\delta n_3}E_{\gamma n_2}E_{\beta n_1},
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

donde además hemos empleado la conmutatividad de los campos. Este resultado es independiente del contexto de suma implícita.

Las permutaciones distinguibles de (A.1) se reducen a una y tres, respectivamente para el segundo y tercer orden, si $\omega_1 = \omega_2 \neq \omega_3$. Cuando $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$, las permutaciones distinguibles para el tercer orden se reducen a una.

Debido a la conmutatividad simultánea de las parejas βn_1 , γn_2 y δn_3 que se establece en (A.1), para calcular las polarizaciones del segundo miembro de (2.13), podemos recurrir al siguiente artificio

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_n^{(2)}(\mathbf{r}, t) &= \delta_{n_1+n_2}^n \delta_{n_1 n_1} \delta_{n_2 n_2} \left[\chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(n_1\omega_0, n_2\omega_0)E_{\beta n_1}(\mathbf{r}, t)E_{\gamma n_2}(\mathbf{r}, t) \right] \equiv \delta_{n_1+n_2}^n \delta_{n_1 n_1} \delta_{n_2 n_2} [n_1 n_2] \\
 &= \delta_{n_1+n_2}^n [(-3) + (-2) + (-1) + (+1) + (+2) + (+3)]^2,
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_n^{(3)}(\mathbf{r}, t) &= \delta_{n_1+n_2+n_3}^n \delta_{n_1 n_1} \delta_{n_2 n_2} \delta_{n_3 n_3} \left[\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(n_1\omega_0, n_2\omega_0, n_3\omega_0)E_{\beta n_1}(\mathbf{r}, t)E_{\gamma n_2}(\mathbf{r}, t)E_{\delta n_3}(\mathbf{r}, t) \right] \\
 &\equiv \delta_{n_1+n_2+n_3}^n \delta_{n_1 n_1} \delta_{n_2 n_2} \delta_{n_3 n_3} [n_1 n_2 n_3] \\
 &= \delta_{n_1+n_2+n_3}^n [(-3) + (-2) + (-1) + (+1) + (+2) + (+3)]^3.
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Desarrollando (A.2)

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_n^{(2)}(\mathbf{r}, t) &= \delta_{n_1+n_2}^n \left[(-3) + (-2) + (-1) + (+1) + (+2) + (+3) \right]^2 \\
&= \delta_{n_1+n_2}^n \left\{ \begin{aligned} &(-3)(-3) + (-2)(-2) + (-1)(-1) + (+1)(+1) + (+2)(+2) + (+3)(+3) \\ &+ 2[(-3)(-2) + (-3)(-1) + (-3)(+1) + (-3)(+2) + (-3)(+3)] \\ &+ 2[(-2)(-1) + (-2)(+1) + (-2)(+2) + (-2)(+3)] \\ &+ 2[(-1)(+1) + (-1)(+2) + (-1)(+3)] \\ &+ 2[(+1)(+2) + (+1)(+3) + (+2)(+3)] \end{aligned} \right\}, \quad (\text{A.4}) \\
&= \delta_{n_1+n_2}^n \left\{ \begin{aligned} &2[(-1)(-2) + (+1)(+2)] \\ &+ [2(+1)(-3) + (-1)(-1)] + [2(-1)(+3) + (+1)(+1)] \\ &+ 2[(+2)(-3) + (+1)(-2)] + 2[(-2)(+3) + (-1)(+2)] \end{aligned} \right\},
\end{aligned}$$

donde en la primera igualdad se tienen todos los términos del cuadrado de la expresión entre corchetes. En la segunda igualdad se mantienen solo los términos que finalmente son diferentes de cero, por la presencia de la delta de Kronecker, para los valores particulares de n .

Para calcular (A.3) partimos del segundo miembro de la primera igualdad (A.4), obteniéndose

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{-3,+3}^{(3)}(\mathbf{r}, t) &= \delta_{n_1+n_2+n_3}^{n=-3,+3} \left[(-3) + (-2) + (-1) + (+1) + (+2) + (+3) \right]^3 \\
&= \delta_{n_1+n_2+n_3}^{n=-3,+3} \left[\begin{aligned} &3(+3)(-3)(-3) + 3(-3)(+3)(+3) \\ &+ 6(+2)(-2)(-3) + 6(-2)(+2)(+3) \\ &+ 6(+1)(-1)(-3) + 6(-1)(+1)(+3) \\ &+ 3(+1)(-2)(-2) + 3(-1)(+2)(+2) \\ &+ (-1)(-1)(-1) + (+1)(+1)(+1) \end{aligned} \right], \quad (\text{A.5})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{-2,+2}^{(3)}(\mathbf{r}, t) &= \delta_{n_1+n_2+n_3}^{n=-2,+2} \left[(-3) + (-2) + (-1) + (+1) + (+2) + (+3) \right]^3 \\
&= \delta_{n_1+n_2+n_3}^{n=-2,+2} \left[\begin{aligned} &6(+3)(-2)(-3) + 6(-3)(+2)(+3) \\ &+ 6(+2)(-1)(-3) + 6(-2)(+1)(+3) \\ &+ 3(+2)(-2)(-2) + 3(-2)(+2)(+2) \\ &+ 6(+1)(-1)(-2) + 6(-1)(+1)(+2) \end{aligned} \right], \quad (\text{A.6})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{-1,+1}^{(3)}(\mathbf{r}, t) &= \delta_{n_1+n_2+n_3}^{n=-1,+1} [(-3) + (-2) + (-1) + (+1) + (+2) + (+3)]^3 \\
&= \delta_{n_1+n_2+n_3}^{n=-1,+1} \begin{bmatrix} 6(+3)(-1)(-3) + 6(-3)(+1)(+3) \\ +3(+3)(-2)(-2) + 3(-3)(+2)(+2) \\ +6(+2)(-1)(-2) + 6(-2)(+1)(+2) \\ +3(+1)(+1)(-3) + 3(-1)(-1)(+3) \\ +3(+1)(-1)(-1) + 3(-1)(+1)(+1) \end{bmatrix}. \tag{A.7}
\end{aligned}$$

Con ayuda de (2.20) tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \delta_{\alpha\beta} E_{\beta n}(\mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial \gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} E_{\alpha n}(z) e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[\left(\delta_{\gamma z} \frac{d}{dz} + i\mathbf{k}_{\gamma n} \right) E_{\alpha n}(z) \right] e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}} \\
&= \left[\left(\delta_{\gamma z} \frac{d}{dz} + i\mathbf{k}_{\gamma n} \right) \left(\delta_{\gamma z} \frac{d}{dz} + i\mathbf{k}_{\gamma n} \right) E_{\alpha n}(z) \right] e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}} \\
&= \left[\left(\frac{d^2}{dz^2} + 2i\mathbf{k}_{zn} \frac{d}{dz} - k_n^2 \right) E_{\alpha n}(z) \right] e^{in(k_{x1}x+k_{y1}y)} e^{ik_{zn}z}, \tag{A.8} \\
-\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} E_{\beta n}(\mathbf{r}) &= -\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} E_{\beta n}(z) e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}} = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{dE_{zn}(z)}{dz} + i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{E}_n(z) \right] e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}} \\
&= -\left\{ \left(\delta_{\alpha z} \frac{d}{dz} + i\mathbf{k}_{\alpha n} \right) \left[\frac{dE_{zn}(z)}{dz} + i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{E}_n(z) \right] \right\} e^{in(k_{x1}x+k_{y1}y)} e^{ik_{zn}z}, \\
\frac{(n\omega_0)^2}{c^2} \varepsilon_{\alpha\beta} (n\omega_0) E_{\beta n}(\mathbf{r}) &= \frac{(n\omega_0)^2}{c^2} \varepsilon(n\omega_0) E_{\alpha n}(z) e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}} = k_n^2 E_{\alpha n}(z) e^{in(k_{x1}x+k_{y1}y)} e^{ik_{zn}z},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{\alpha n}^{(2,3)}(\mathbf{r}) &= \left[\begin{aligned} &\delta_{n_1+n_2}^n \delta_{n_1 n_1} \delta_{n_2 n_2} \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(n_1\omega_0, n_2\omega_0) E_{\beta n_1}(\mathbf{r}) E_{\gamma n_2}(\mathbf{r}) \\ &+ \delta_{n_1+n_2+n_3}^n \delta_{n_1 n_1} \delta_{n_2 n_2} \delta_{n_3 n_3} \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(n_1\omega_0, n_2\omega_0, n_3\omega_0) E_{\beta n_1}(\mathbf{r}) E_{\gamma n_2}(\mathbf{r}) E_{\delta n_3}(\mathbf{r}) \end{aligned} \right] \\
&= \left[\begin{aligned} &\delta_{n_1+n_2}^n \delta_{n_1 n_1} \delta_{n_2 n_2} \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(n_1\omega_0, n_2\omega_0) E_{\beta n_1}(z) E_{\gamma n_2}(z) e^{i(k_{zn_1}+k_{zn_2})z} e^{i(n_1+n_2)(k_{x1}x+k_{y1}y)} \\ &+ \delta_{n_1+n_2+n_3}^n \delta_{n_1 n_1} \delta_{n_2 n_2} \delta_{n_3 n_3} \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(n_1\omega_0, n_2\omega_0, n_3\omega_0) E_{\beta n_1}(z) E_{\gamma n_2}(z) E_{\delta n_3}(z) \\ &\quad \times e^{i(k_{zn_1}+k_{zn_2}+k_{zn_3})z} e^{i(n_1+n_2+n_3)(k_{x1}x+k_{y1}y)} \end{aligned} \right] \tag{A.9} \\
&= \left[\begin{aligned} &\delta_{n_1+n_2}^n \delta_{n_1 n_1} \delta_{n_2 n_2} \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(n_1\omega_0, n_2\omega_0) E_{\beta n_1}(z) E_{\gamma n_2}(z) e^{i(k_{zn_1}+k_{zn_2})z} \\ &+ \delta_{n_1+n_2+n_3}^n \delta_{n_1 n_1} \delta_{n_2 n_2} \delta_{n_3 n_3} \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(n_1\omega_0, n_2\omega_0, n_3\omega_0) \\ &\quad \times E_{\beta n_1}(z) E_{\gamma n_2}(z) E_{\delta n_3}(z) e^{i(k_{zn_1}+k_{zn_2}+k_{zn_3})z} \end{aligned} \right] e^{in(k_{x1}x+k_{y1}y)} \\
&= P_{\alpha n}^{(2,3)}(z) e^{in(k_{x1}x+k_{y1}y)}.
\end{aligned}$$

A.2 EL PROMEDIO TEMPORAL DEL TEOREMA DE POYNTING

En el Capítulo 2 y la Sección A.1 las frecuencias de interés son $\omega_n = n\omega_0$, con $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3$. Para esta Sección es mejor pensar en la generalización para n de uno, dos o tres índices de sumatoria, dada en el Capítulo 3, donde por ejemplo la ecuación (3.4) expresa que $\omega_1 = \omega_{l_1}$, $\omega_2 = \omega_{l_1} + \omega_{l_2}$ y $\omega_3 = \omega_{l_1} + \omega_{l_2} + \omega_{l_3}$. También la ecuación (3.2) señala simbólicamente que δ_n^n debe ser remplazada por $\delta_{l_1}^{l_1} + \delta_{l_1}^{l_1} \delta_{l_2}^{l_2} + \delta_{l_1}^{l_1} \delta_{l_2}^{l_2} \delta_{l_3}^{l_3}$.

Con esta idea generalizada para n y δ_n^n debe interpretarse ahora a (2.25) [ver la discusión alrededor de (3.9)], aunque en esta interpretación también debemos tener presente que al menos teóricamente y para esta discusión, se han agrupado todos los términos de (3.2) que tienen frecuencia equivalente [observar los primeros miembros de (3.5)-(3.7)]. En lo que se refiere al segundo miembro de (2.25), solo escribiremos simbólicamente la polarización no lineal correspondiente, conformándonos con tener claro como expresarla a través de la generalización de (A.2) y (A.3).

Bajo estas consideraciones partimos de (2.25) para realizar el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \left(\frac{d^2}{dz^2} + 2ik_{zn} \frac{d}{dz} \right) E_{an}(z) - \left(\delta_{az} \frac{d}{dz} + ik_{an} \right) \left[\frac{dE_{zn}(z)}{dz} + i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{E}_n(z) \right] \right\} e^{ik_{zn}z} \\
 & \times \delta_{mn} E_{an}^*(z) e^{-ik_{zn}^*z} \\
 & = \delta_{mn} \left\{ \begin{array}{l} E_{an}^*(z) \left(\frac{d^2}{dz^2} + 2ik_{zn} \frac{d}{dz} \right) E_{an}(z) \\ - \left(E_{zn}^*(z) \frac{d}{dz} + i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{E}_n^*(z) \right) \left[\frac{dE_{zn}(z)}{dz} + i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{E}_n(z) \right] \end{array} \right\} e^{i(k_{zn} - k_{zn}^*)z}
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned}
& E_{\underline{\alpha}n}^*(z) \left(\frac{d^2}{dz^2} + 2ik_{zn} \frac{d}{dz} \right) E_{\underline{\alpha}n}(z) + E_{zn}^*(z) \left(\frac{d^2}{dz^2} + 2ik_{zn} \frac{d}{dz} \right) E_{zn}(z) \\
& \qquad \qquad \qquad - E_{zn}^*(z) \frac{d^2 E_{zn}(z)}{dz^2} \\
& -ik_{\underline{\alpha}n} E_{zn}^*(z) \frac{dE_{\underline{\alpha}n}(z)}{dz} \qquad \qquad \qquad -ik_{zn} E_{zn}^*(z) \frac{dE_{zn}(z)}{dz} \\
& -ik_{\underline{\alpha}n} E_{\underline{\alpha}n}^*(z) \frac{dE_{zn}(z)}{dz} \qquad \qquad \qquad -ik_{zn} E_{zn}^*(z) \frac{dE_{\underline{\alpha}n}(z)}{dz} \\
& + [\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{E}_n^*(z)] [\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{E}_n(z)]
\end{aligned} \right\} \quad (A.11) \\
& \times e^{i(k_{zn} - k_{zn}^*)z},
\end{aligned}$$

donde $\underline{\alpha}$ indica suma únicamente sobre x, y ,

$$\begin{aligned}
& = i\delta_{mn} \left\{ \begin{aligned}
& \left[+iE_{\underline{\alpha}(-n)}^*(z) \frac{d^2 E_{\underline{\alpha}(-n)}(z)}{dz^2} + i \frac{dE_{\underline{\alpha}n}(z)}{dz} \frac{dE_{\underline{\alpha}n}^*(z)}{dz} \right] \\
& +k_{zn} \left[\begin{aligned}
& E_{\underline{\alpha}n}^*(z) \frac{dE_{\underline{\alpha}n}(z)}{dz} + E_{\underline{\alpha}n}(z) \frac{dE_{\underline{\alpha}n}^*(z)}{dz} \\
& +E_{\underline{\alpha}n}^*(z) \frac{dE_{zn}(z)}{dz} - E_{\underline{\alpha}n}(z) \frac{dE_{zn}^*(z)}{dz}
\end{aligned} \right] \\
& + \left[-k_{\underline{\alpha}n} E_{zn}^*(z) \frac{dE_{\underline{\alpha}n}(z)}{dz} + k_{\underline{\alpha}(-n)} E_{\underline{\alpha}(-n)}^*(z) \frac{dE_{z(-n)}(z)}{dz} \right] \\
& -i \left[k_{zn} E_{zn}^*(z) + k_{\underline{\alpha}n} E_{\underline{\alpha}n}^*(z) \right] \left[k_{zn} E_{zn}(z) + k_{\underline{\alpha}n} E_{\underline{\alpha}n}(z) \right]
\end{aligned} \right\} e^{i(k_{zn} - k_{zn}^*)z} \quad (A.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = i\delta_{mn} \left\{ \begin{aligned}
& \frac{d}{dz} \left[iE_{\underline{\alpha}n}(z) \frac{dE_{\underline{\alpha}n}^*(z)}{dz} + k_{zn} E_{\underline{\alpha}n}(z) E_{\underline{\alpha}n}^*(z) - k_{\underline{\alpha}n} E_{\underline{\alpha}n}(z) E_{zn}^*(z) \right] \\
& + \left[\begin{aligned}
& iE_{\underline{\alpha}n}(z) \frac{dE_{\underline{\alpha}n}^*(z)}{dz} + k_{zn} E_{\underline{\alpha}n}(z) E_{\underline{\alpha}n}^*(z) - k_{\underline{\alpha}n} E_{\underline{\alpha}n}(z) E_{zn}^*(z) \\
& -k_{zn} E_{\underline{\alpha}n}(z) E_{\underline{\alpha}n}^*(z)
\end{aligned} \right] i(k_{zn} - k_{zn}^*)
\end{aligned} \right\} \quad (A.13) \\
& \times e^{i(k_{zn} - k_{zn}^*)z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= i\delta_{mn} \frac{d}{dz} \left[iE_{\underline{an}}(z) \frac{dE_{\underline{an}}^*(z)}{dz} + k_{zn} E_{\underline{an}}(z) E_{\underline{an}}^*(z) - k_{\underline{an}} E_{\underline{an}}(z) E_{zn}^*(z) \right] e^{i(k_{zn} - k_{zn}^*)z} \\
&\quad 4\pi k_{nv}^2 \delta_{mn} E_{an}^*(z) e^{-ik_{zn}^* z} P_{an}^{(1)}(z) = \\
&\quad = -4\pi k_{nv}^2 \delta_{mn} E_{an}^*(z) e^{-ik_{zn}^* z} P_{an}^{(2,3)}(z),
\end{aligned} \tag{A.14}$$

donde con ayuda de (2.20) y (2.12) se ha obtenido y tomado en cuenta que

$$\begin{aligned}
&\delta_{mn} k_{zn} (k_{zn} - k_{zn}^*) E_{an}(z) E_{an}^*(z) e^{i(k_{zn} - k_{zn}^*)z} \\
&= 4\pi k_{nv}^2 \delta_{mn} E_{an}^*(z) e^{-ik_{zn}^* z} \left[\chi(n\omega_0) E_{an}(z) e^{ik_{zn} z} \right] \\
&= 4\pi k_{nv}^2 \delta_{mn} E_{an}^*(z) e^{-ik_{zn}^* z} \left[P_{an}^{(1)}(z) \right], \\
&= 4\pi k_{nv}^2 \delta_{mn} E_{an}^*(z) e^{-ik_{zn}^* z} e^{-in(k_{x1}x + k_{y1}y)} \left[\chi(n\omega_0) E_{an}(z) e^{ik_{zn} z} e^{in(k_{x1}x + k_{y1}y)} \right] \\
&= 4\pi k_{nv}^2 \delta_{mn} E_{an}^*(z) e^{-ik_{zn}^* z} e^{-in(k_{x1}x + k_{y1}y)} \left[P_{an}^{(1)}(\mathbf{r}) \right], \\
&= i4\pi k_{nv}^2 \delta_{mn} E_{an}^*(z) e^{-ik_{zn}^* z} \text{Im}[\chi(n\omega_0)] E_{an}(z) e^{ik_{zn} z}.
\end{aligned} \tag{A.15}$$

Verificaremos que (A.14) es el promedio temporal del teorema de Poynting, es decir

$$\left\langle \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \right\rangle = - \left\langle \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (E^2 + H^2) \right\rangle - \left\langle \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right\rangle. \tag{A.16}$$

De acuerdo con (2.20) y (2.22), sustituyendo

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \delta_{mn} \mathbf{E}_n(\mathbf{r}, t) = \delta_{mn} \mathbf{E}_n(z) e^{i(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r} - \omega_n t)} = \delta_{mn} \mathbf{E}_n(z) e^{i[n(k_{x1}x + k_{y1}y) + k_{zn}z - \omega_n t]} \\
\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \delta_{mn} \mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t) = \delta_{mn} \mathbf{H}_n(z) e^{i(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r} - \omega_n t)} = \delta_{mn} \mathbf{H}_n(z) e^{i[n(k_{x1}x + k_{y1}y) + k_{zn}z - \omega_n t]},
\end{aligned} \tag{A.17}$$

en la ecuación de Maxwell

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t), \\
\delta_{mn} \nabla \times \mathbf{E}_n(z) e^{i(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r} - \omega_n t)} &= -\delta_{mn} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}_n(z) e^{i(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r} - \omega_n t)},
\end{aligned} \tag{A.18}$$

donde insistimos en el hecho de que al menos para esta Sección, n representa todas las configuraciones de los índices de sumatoria en (3.2), que conducen a la misma frecuencia

$$\omega_n = \omega_{l_1} + \dots + \omega_{l_{|n|}}.$$

Reconociendo en (A.18) una igualdad para cada n y usando los tensores delta y alternante, respectivamente $\delta_{\alpha\beta}$ y $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ [2.3]

$$\begin{aligned} \frac{i\omega_n}{c} \mathbf{H}_n(z) e^{i(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r} - \omega_n t)} &= \hat{\mathbf{e}}_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial \beta} E_{\gamma n}(z) e^{i(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r} - \omega_n t)} \\ &= \hat{\mathbf{e}}_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \left[\delta_{\beta z} \frac{d}{dz} E_{\gamma n}(z) + ik_{\beta n} E_{\gamma n}(z) \right] e^{i(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r} - \omega_n t)} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{i\omega_n}{c} \mathbf{H}_n(z) = \frac{d}{dz} \hat{\mathbf{e}}_\alpha \varepsilon_{\alpha z \gamma} E_{\gamma n}(z) + i\mathbf{k}_n \times \mathbf{E}_n(z) = \frac{d}{dz} \left[-\hat{\mathbf{e}}_x E_{yn}(z) + \hat{\mathbf{e}}_y E_{xn}(z) \right] + i\mathbf{k}_n \times \mathbf{E}_n(z),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_n(z) &= \frac{c}{\omega_n} \left\{ i \frac{d}{dz} \left[\hat{\mathbf{e}}_x E_{yn}(z) - \hat{\mathbf{e}}_y E_{xn}(z) \right] + \mathbf{k}_n \times \mathbf{E}_n(z) \right\} \\ \mathbf{H}_{(-n)}(z) &= \frac{c}{\omega_n} \left\{ -i \frac{d}{dz} \left[\hat{\mathbf{e}}_x E_{yn}^*(z) - \hat{\mathbf{e}}_y E_{xn}^*(z) \right] + \mathbf{k}_n^* \times \mathbf{E}_n^*(z) \right\} = \mathbf{H}_n^*(z), \\ \therefore \mathbf{H}_{(-n)}(\mathbf{r}) &= \mathbf{H}_n^*(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Para evaluar los términos de (A.16) empezamos con un cálculo preliminar

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot \mathbf{S}_{|n|} \rangle &= \left\langle \nabla \cdot \frac{c}{4\pi} \left[2 \operatorname{Re} \mathbf{E}_n(\mathbf{r}, t) \times 2 \operatorname{Re} \mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t) \right] \right\rangle \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} \left\{ \nabla \cdot \frac{c}{4\pi} \left[2 \operatorname{Re} \mathbf{E}_n(\mathbf{r}, t) \times 2 \operatorname{Re} \mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t) \right] \right\} dt = \nabla \cdot \langle \mathbf{S}_{|n|} \rangle \\ &= \nabla \cdot \delta_{ll} \delta_{mm} \frac{c}{4\pi} \left[\mathbf{E}_l(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_m(\mathbf{r}) \right] \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} e^{-i\omega_l t} e^{-i\omega_m t} dt \quad l, m = \pm |n| \quad (\text{A.21}) \\ &= \nabla \cdot \delta_{ll} \delta_{mm} \delta_{m(-l)} \frac{c}{4\pi} \left[\mathbf{E}_l(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_m(\mathbf{r}) \right] = \nabla \cdot \delta_{ll} \frac{c}{4\pi} \left[\mathbf{E}_l(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_l^*(\mathbf{r}) \right] \\ &= \nabla \cdot \delta_{ll} \frac{c}{4\pi} \left[\mathbf{E}_l(z) e^{ik_{lj}z} e^{i(k_{x1}x + k_{y1}y)} \times \mathbf{H}_l^*(z) e^{-ik_{lj}^*z} e^{-i(k_{x1}x + k_{y1}y)} \right] = \frac{d}{dz} \langle \mathbf{S}_{|n|} \rangle_z, \end{aligned}$$

que será útil para encontrar

$$\begin{aligned}
\langle \nabla \cdot \mathbf{S} \rangle &= \left\langle \nabla \cdot \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)] \right\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} \left\{ \nabla \cdot \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)] \right\} dt = \nabla \cdot \langle \mathbf{S} \rangle \\
&= \nabla \cdot \delta_{mn} \delta_{jj} \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}_n(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_j(\mathbf{r})] \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} e^{-i\omega_n t} e^{-i\omega_j t} dt \quad n, j = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \quad (\text{A.22}) \\
&= \nabla \cdot \delta_{mn} \delta_{jj} \delta_{j(-n)} \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}_n(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_j(\mathbf{r})] = \nabla \cdot \delta_{mn} \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}_n(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_n^*(\mathbf{r})] \\
&= \frac{d}{dz} \langle \mathbf{S} \rangle_z = \frac{d}{dz} \langle \mathbf{S}_1 \rangle_z + \frac{d}{dz} \langle \mathbf{S}_2 \rangle_z + \frac{d}{dz} \langle \mathbf{S}_3 \rangle_z.
\end{aligned}$$

De acuerdo con (A.20) y siguiendo con el desarrollo de (A.22)

$$\begin{aligned}
\langle \nabla \cdot \mathbf{S} \rangle &= \frac{d}{dz} \delta_{mn} \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}_n(z) \times \mathbf{H}_n^*(z)]_z e^{i(k_{zn} - k_{zn}^*)z} \\
&= \frac{d}{dz} \delta_{mn} \frac{c}{4\pi} [E_{xn}(z) H_{yn}^*(z) - E_{yn}(z) H_{xn}^*(z)] e^{i(k_{zn} - k_{zn}^*)z} \quad (\text{A.23}) \\
&= \frac{d}{dz} \delta_{mn} \frac{c}{4\pi} \frac{c}{\omega_n} \left\{ \begin{array}{l} E_{xn}(z) \left[i \frac{dE_{xn}^*(z)}{dz} + k_{zn}^* E_{xn}^*(z) - k_{xn} E_{zn}^*(z) \right] \\ - E_{yn}(z) \left[-i \frac{dE_{yn}^*(z)}{dz} + k_{yn} E_{zn}^*(z) - k_{zn}^* E_{yn}^*(z) \right] \end{array} \right\} e^{i(k_{zn} - k_{zn}^*)z} \\
\langle \nabla \cdot \mathbf{S} \rangle &= \frac{\delta_{mn} c^2}{4\pi \omega_n} \frac{d}{dz} \left\{ \begin{array}{l} i \left[E_{xn}(z) \frac{dE_{xn}^*(z)}{dz} + E_{yn}(z) \frac{dE_{yn}^*(z)}{dz} \right] \\ + k_{zn}^* [E_{xn}(z) E_{xn}^*(z) + E_{yn}(z) E_{yn}^*(z)] \\ - [k_{xn} E_{xn}(z) + k_{yn} E_{yn}(z)] E_{zn}^*(z) \end{array} \right\} e^{i(k_{zn} - k_{zn}^*)z} \\
&= \frac{\delta_{mn} c^2}{4\pi \omega_n} \frac{d}{dz} \left[i E_{zn}(z) \frac{dE_{zn}^*(z)}{dz} + k_{zn}^* E_{zn}(z) E_{zn}^*(z) - k_{zn} E_{zn}(z) E_{zn}^*(z) \right] e^{i(k_{zn} - k_{zn}^*)z} \quad (\text{A.24}) \\
&= \frac{\delta_{mn} c^2}{4\pi \omega_n} \frac{d}{dz} \left[i E_{zn}(z) \frac{dE_{zn}^*(z)}{dz} + k_{zn} E_{zn}(z) E_{zn}^*(z) - k_{zn} E_{zn}(z) E_{zn}^*(z) \right] e^{i(k_{zn} - k_{zn}^*)z},
\end{aligned}$$

donde vemos que las dos últimas líneas son equivalentes cuando cambiamos n por $-n$ en el segundo término (incluyendo los factores externos), y claro ya que $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3$.

Continuando con la evaluación de los términos de (A.16)

$$\begin{aligned}
\left\langle -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} [E^2(\mathbf{r}, t) + H^2(\mathbf{r}, t)] \right\rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} \left\{ -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} [E^2(\mathbf{r}, t) + H^2(\mathbf{r}, t)] \right\} dt \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} \left\{ -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} \delta_{mn} \delta_{mm} [E_{an}(\mathbf{r}) E_{am}(\mathbf{r}) + H_{an}(\mathbf{r}) H_{am}(\mathbf{r})] e^{-i(\omega_n + \omega_m)t} \right\} dt \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} \left\{ \frac{i(\omega_n + \omega_m)}{8\pi} \delta_{mn} \delta_{mm} [E_{an}(\mathbf{r}) E_{am}(\mathbf{r}) + H_{an}(\mathbf{r}) H_{am}(\mathbf{r})] e^{-i(\omega_n + \omega_m)t} \right\} dt \quad (\text{A.25}) \\
&= \frac{i(\omega_n + \omega_m)}{8\pi} \delta_{mn} \delta_{mm} [E_{an}(\mathbf{r}) E_{am}(\mathbf{r}) + H_{an}(\mathbf{r}) H_{am}(\mathbf{r})] \delta_{m(-n)} \\
&= \frac{i(\omega_n - \omega_n)}{8\pi} \delta_{mn} [E_{an}(\mathbf{r}) E_{an}^*(\mathbf{r}) + H_{an}(\mathbf{r}) H_{an}^*(\mathbf{r})] = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle -\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \right\rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} \left[-\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \right] dt \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} \left[-\delta_{mn} E_{am}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_m t} \frac{\partial}{\partial t} \delta_{nm} [P_{an}^{(1)}(\mathbf{r}) + P_{an}^{(2,3)}(\mathbf{r})] e^{-i\omega_n t} \right] dt \\
&= i\omega_n \delta_{mn} \delta_{mm} E_{am}(\mathbf{r}) [P_{an}^{(1)}(\mathbf{r}) + P_{an}^{(2,3)}(\mathbf{r})] \delta_{m(-n)} \quad (\text{A.26}) \\
&= i\omega_n \delta_{mn} E_{an}^*(\mathbf{r}) [P_{an}^{(1)}(\mathbf{r}) + P_{an}^{(2,3)}(\mathbf{r})] \\
&= i\omega_n \delta_{mn} E_{an}^*(z) e^{-ik_{zn}^* z} [P_{an}^{(1)}(z) + P_{an}^{(2,3)}(z)].
\end{aligned}$$

Sustituyendo (A.24)-(A.26) en (A.16) y de acuerdo con (A.22), (A.15)

$$\begin{aligned}
\langle \nabla \cdot \mathbf{S} \rangle &= \frac{d}{dz} \langle \mathbf{S} \rangle_z = \frac{d}{dz} [\langle \mathbf{S}_1 \rangle + \langle \mathbf{S}_2 \rangle + \langle \mathbf{S}_3 \rangle]_z \\
&= \frac{\delta_{mn} c^2}{4\pi\omega_n} \frac{d}{dz} \left[iE_{an}(z) \frac{dE_{an}^*(z)}{dz} + k_{zn} E_{an}(z) E_{an}^*(z) - k_{an} E_{an}(z) E_{zn}^*(z) \right] e^{i(k_{zn} - k_{zn}^*)z} \quad (\text{A.27}) \\
&= i\omega_n \delta_{mn} E_{an}^*(z) e^{-ik_{zn}^* z} [P_{an}^{(1)}(z) + P_{an}^{(2,3)}(z)] \\
&= in\omega_0 \delta_{mn} E_{an}^*(z) e^{-ik_{zn}^* z} \left\{ i \operatorname{Im} [\chi(n\omega_0)] E_{an}(z) e^{ik_{zn} z} + P_{an}^{(2,3)}(z) \right\},
\end{aligned}$$

expresión que resulta equivalente a (A.14).

A.3 DESCRIPCIÓN CUÁNTICA DE LAS SUSCEPTIBILIDADES

En el Capítulo 2 hemos descrito a las susceptibilidades partiendo de principios generales, pero es necesario recurrir a los métodos de la mecánica cuántica para obtener una descripción microscópica. Al respecto, en [2.2] y [2.6] se encuentran las expresiones de primer y segundo orden

$$\begin{aligned}
 \chi_{\alpha\beta}^{(1)}(\omega) &= \frac{e^2}{\hbar} \int d^3q \delta_{vv} \delta_{cc} f_{\alpha\beta}^{(1)}(\omega, \mathbf{q}) f_v(\mathbf{q}) \\
 f_{\alpha\beta}^{(1)}(\omega, \mathbf{q}) &= \frac{\langle v, \mathbf{q} | \beta | c, \mathbf{q} \rangle \langle c, \mathbf{q} | \alpha | v, \mathbf{q} \rangle}{\omega + \omega_{cv}(\mathbf{q}) + i\Gamma_{cv}(\mathbf{q})} - \frac{\langle v, \mathbf{q} | \alpha | c, \mathbf{q} \rangle \langle c, \mathbf{q} | \beta | v, \mathbf{q} \rangle}{\omega - \omega_{cv}(\mathbf{q}) + i\Gamma_{cv}(\mathbf{q})} \\
 &\equiv \frac{\beta_{vc}(\mathbf{q}) \alpha_{cv}(\mathbf{q})}{\omega + \omega_{cv}(\mathbf{q}) + i\Gamma_{cv}(\mathbf{q})} - \frac{\alpha_{vc}(\mathbf{q}) \beta_{cv}(\mathbf{q})}{\omega - \omega_{cv}(\mathbf{q}) + i\Gamma_{cv}(\mathbf{q})}, \tag{A.28}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) &\equiv \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(\omega = \omega_1 + \omega_2) = -\frac{e^3}{\hbar^2} \int d^3q \delta_{vv} \delta_{cc} \delta_{dd} f_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(\omega_1, \omega_2, \mathbf{q}) f_v(\mathbf{q}) \\
 f_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(\omega_1, \omega_2, \mathbf{q}) &= + \frac{\langle v, \mathbf{q} | \alpha | c, \mathbf{q} \rangle \langle c, \mathbf{q} | \beta | d, \mathbf{q} \rangle \langle d, \mathbf{q} | \gamma | v, \mathbf{q} \rangle}{[\omega - \omega_{cv}(\mathbf{q}) + i\Gamma_{cv}(\mathbf{q})][\omega_2 - \omega_{dv}(\mathbf{q}) + i\Gamma_{dv}(\mathbf{q})]} \\
 &+ \frac{\langle v, \mathbf{q} | \alpha | c, \mathbf{q} \rangle \langle c, \mathbf{q} | \gamma | d, \mathbf{q} \rangle \langle d, \mathbf{q} | \beta | v, \mathbf{q} \rangle}{[\omega - \omega_{cv}(\mathbf{q}) + i\Gamma_{cv}(\mathbf{q})][\omega_1 - \omega_{dv}(\mathbf{q}) + i\Gamma_{dv}(\mathbf{q})]} \\
 &+ \frac{\langle v, \mathbf{q} | \beta | c, \mathbf{q} \rangle \langle c, \mathbf{q} | \gamma | d, \mathbf{q} \rangle \langle d, \mathbf{q} | \alpha | v, \mathbf{q} \rangle}{[\omega + \omega_{dv}(\mathbf{q}) + i\Gamma_{dv}(\mathbf{q})][\omega_1 + \omega_{cv}(\mathbf{q}) + i\Gamma_{cv}(\mathbf{q})]} \\
 &+ \frac{\langle v, \mathbf{q} | \gamma | c, \mathbf{q} \rangle \langle c, \mathbf{q} | \beta | d, \mathbf{q} \rangle \langle d, \mathbf{q} | \alpha | v, \mathbf{q} \rangle}{[\omega + \omega_{dv}(\mathbf{q}) + i\Gamma_{dv}(\mathbf{q})][\omega_2 + \omega_{cv}(\mathbf{q}) + i\Gamma_{cv}(\mathbf{q})]} \\
 &- \frac{\gamma_{vc}(\mathbf{q}) \alpha_{cd}(\mathbf{q}) \beta_{dv}(\mathbf{q})}{\omega - \omega_{dc}(\mathbf{q}) + i\Gamma_{dc}(\mathbf{q})} \left[\frac{1}{\omega_2 + \omega_{cv}(\mathbf{q}) + i\Gamma_{cv}(\mathbf{q})} + \frac{1}{\omega_1 - \omega_{dv}(\mathbf{q}) + i\Gamma_{dv}(\mathbf{q})} \right] \\
 &- \frac{\beta_{vc}(\mathbf{q}) \alpha_{cd}(\mathbf{q}) \gamma_{dv}(\mathbf{q})}{\omega - \omega_{dc}(\mathbf{q}) + i\Gamma_{dc}(\mathbf{q})} \left[\frac{1}{\omega_1 + \omega_{cv}(\mathbf{q}) + i\Gamma_{cv}(\mathbf{q})} + \frac{1}{\omega_2 - \omega_{dv}(\mathbf{q}) + i\Gamma_{dv}(\mathbf{q})} \right], \tag{A.29}
 \end{aligned}$$

donde \mathbf{q} denota el vector de onda del electrón, v, c, d son índices de banda, $f_v(\mathbf{q})$ es el factor de distribución de Fermi para el estado $|v, \mathbf{q}\rangle$, en otras palabras, es la probabilidad de encontrar al electrón en tal estado. El estado monoeléctrico $|v, \mathbf{q}\rangle$ se identifica con las funciones de Bloch $\psi_{v\mathbf{q}}(\mathbf{r}) = V^{-1/2} u_{v\mathbf{q}}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$, donde V es el volumen del cristal [2.4].

Hay dos términos en $\chi_{\alpha\beta}^{(1)}(\omega)$ y ocho términos en $\chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(\omega = \omega_1 + \omega_2)$. El cálculo puede extenderse a tercer orden para encontrar $\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3)$, la cual tiene cuarenta y ocho términos. La expresión completa para $\chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}$ se encuentra en la literatura [2.7]. Será de utilidad la expresión

$$\begin{aligned} \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \frac{1}{\omega \pm \omega_{cv}(\mathbf{q}) + i\Gamma} &= \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \frac{\omega \pm \omega_{cv}(\mathbf{q}) - i\Gamma}{[\omega \pm \omega_{cv}(\mathbf{q})]^2 + \Gamma^2} \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\omega \pm \omega_{cv}(\mathbf{q})} & , \quad \omega \pm \omega_{cv}(\mathbf{q}) \neq 0 \\ -i\pi\delta[\omega \pm \omega_{cv}(\mathbf{q})] & , \quad \omega \pm \omega_{cv}(\mathbf{q}) = 0 \end{array} \right\} \quad (\text{A.30}) \\ &\equiv P \frac{1}{\omega \pm \omega_{cv}(\mathbf{q})} - i\pi\delta[\omega \pm \omega_{cv}(\mathbf{q})], \end{aligned}$$

donde se ha empleado una representación de la delta de Dirac.

A la relación (A.30) le asignaremos un carácter operacional, y debe comprenderse en el sentido de que la integración de los miembros primero y segundo con cualquier función continua proporciona un mismo resultado. En este caso la variable correspondiente es \mathbf{q} , cuyo dominio es la primera zona de Brillouin [2.4].

La letra P indica el valor principal de Cauchy de la integral, con referencia a la superficie de energía constante $E_{cv}(\mathbf{q}) = \hbar\omega_{cv}(\mathbf{q}) = \mp\hbar\omega$. Al respecto, pequeñas discusiones para una dimensión se encuentran en [2.5][2.8].

Debido a que la unidad imaginaria esta relacionada con la “constante de amortiguamiento Γ ”, en (A.30) se ve claramente que ignorar a Γ es equivalente a que la contribución de la delta de Dirac no se manifieste al integrar, y que esto también es equivalente a que la

función $[\omega \pm \omega_{cv}(\mathbf{q})]^{-1}$ es continua en todo el dominio de integración. Esto ocurre cuando $E_{g,cv} = |E_{cv}(\mathbf{q}) = E_c(\mathbf{q}) - E_v(\mathbf{q})|_{\text{mínimo}} > |\hbar\omega|$.

Cuando la función $[\omega \pm \omega_{cv}(\mathbf{q})]^{-1}$ es continua en todo el dominio de integración, no es necesario escribir $P[\omega \pm \omega_{cv}(\mathbf{q})]^{-1}$.

Esto nos lleva a la conclusión de que si, en particular, “v” denota la banda de valencia y “c” las bandas restantes, entonces en todos los términos correspondientes a (A.30) las funciones $[\omega \pm \omega_{cv}(\mathbf{q})]^{-1}$ son continuas en todo el dominio de integración (se pueden despreciar las constantes Γ respectivas) cuando $E_g > |\hbar\omega|$, donde E_g es la anchura energética de la banda prohibida entre la banda de valencia y la banda de conducción. Lo cual sucede porque $E_{g,cv} \geq E_g$, según el modelo unidimensional de potencial periódico para el cristal, propuesto por R. Kronig y W. Penney (aproximación del enlace fuerte) [2.9] [2.10].

Esta conclusión puede aplicarse a todos los términos de (A.28) si tomamos una aproximación de temperaturas suficientemente bajas, es decir, si $f_v(\mathbf{q}) = 1$ en la banda de valencia y, naturalmente, $f_v(\mathbf{q}) = 0$ para las bandas restantes, lo que de paso reduce a un solo término la suma indicada por δ_{vv} .

El esquema que tenemos para que podamos despreciar las constantes Γ , en la susceptibilidad de primer orden, implica que puede hacerse lo mismo para la de segundo orden.

Debemos notar que, para números de banda específicos, “d”, “c” y “v” son diferentes entre sí. Como hemos dicho, en particular “v” es la de valencia con $f_v(\mathbf{q}) = 1$.

Ocupémonos primero de los cuatro últimos términos de (A.29), omitiendo las constantes de amortiguamiento dentro de los corchetes, ya que $E_{g,dv}, E_{g,cv} \geq E_g$ y se cumple con $E_g > |\hbar\omega|, |\hbar\omega_1|, |\hbar\omega_2|, |\hbar\omega_3|$ en nuestro trabajo de los tres primeros armónicos

$$f_{\alpha\beta\gamma,5_8}^{(2)} = -\frac{\gamma_{vc}(\mathbf{q})\alpha_{cd}(\mathbf{q})\beta_{dv}(\mathbf{q})}{\omega - \omega_{dc}(\mathbf{q}) + i\Gamma_{dc}(\mathbf{q})} \left[\frac{1}{\omega_2 + \omega_{cv}(\mathbf{q})} + \frac{1}{\omega_1 - \omega_{dv}(\mathbf{q})} \right] - \frac{\beta_{vc}(\mathbf{q})\alpha_{cd}(\mathbf{q})\gamma_{dv}(\mathbf{q})}{\omega - \omega_{dc}(\mathbf{q}) + i\Gamma_{dc}(\mathbf{q})} \left[\frac{1}{\omega_1 + \omega_{cv}(\mathbf{q})} + \frac{1}{\omega_2 - \omega_{dv}(\mathbf{q})} \right], \quad (\text{A.31})$$

donde, como hemos visto, las funciones dentro de los corchetes son continuas en todo el dominio de integración. Por lo mismo podemos repetir el procedimiento directamente ($E_{g,dc} \geq E_g$), obteniendo un resultado similar al de la primera omisión.

Pero una segunda omisión directa puede no ser posible ya que “ d ” y “ c ” son índices de valor diferente de cualesquiera bandas que no son la de valencia, y entonces para bandas adyacentes muy lejanas, seguro que $E_{g,dc} < E_g$ [2.9][2.10].

Cualquiera que sea el caso, podemos simplificar (A.31), realizando sumas de fracciones, aplicando (A.30) y haciendo la transformación $d^3q = dSd(\omega - \omega_{dc}(\mathbf{q}))|\nabla(\omega - \omega_{dc}(\mathbf{q}))|^{-1}$, que evalúa la integral a través de y sobre superficies definidas por $\omega - \omega_{dc}(\mathbf{q}) = \text{constante}$

$$\begin{aligned} \int_V f_{\alpha\beta\gamma,5_8}^{(2)} d^3q &= \int_V \left\{ -\frac{\gamma_{vc}(\mathbf{q})\alpha_{cd}(\mathbf{q})\beta_{dv}(\mathbf{q})}{[\omega_2 + \omega_{cv}(\mathbf{q})][\omega_1 - \omega_{dv}(\mathbf{q})]} - \frac{\beta_{vc}(\mathbf{q})\alpha_{cd}(\mathbf{q})\gamma_{dv}(\mathbf{q})}{[\omega_1 + \omega_{cv}(\mathbf{q})][\omega_2 - \omega_{dv}(\mathbf{q})]} \right\} \\ &\quad \times (\omega - \omega_{dc}(\mathbf{q})) \left[P \frac{1}{\omega - \omega_{dc}(\mathbf{q})} - i\pi\delta(\omega - \omega_{dc}(\mathbf{q})) \right] \frac{dSd(\omega - \omega_{dc}(\mathbf{q}))}{|\nabla(\omega - \omega_{dc}(\mathbf{q}))|} \\ &= \int_V \left\{ -\frac{\gamma_{vc}(\mathbf{q})\alpha_{cd}(\mathbf{q})\beta_{dv}(\mathbf{q})}{[\omega_2 + \omega_{cv}(\mathbf{q})][\omega_1 - \omega_{dv}(\mathbf{q})]} - \frac{\beta_{vc}(\mathbf{q})\alpha_{cd}(\mathbf{q})\gamma_{dv}(\mathbf{q})}{[\omega_1 + \omega_{cv}(\mathbf{q})][\omega_2 - \omega_{dv}(\mathbf{q})]} \right\} d^3q + \\ &\quad \int_S \left\{ -\frac{\gamma_{vc}(\mathbf{q})\alpha_{cd}(\mathbf{q})\beta_{dv}(\mathbf{q})}{[\omega_2 + \omega_{cv}(\mathbf{q})][\omega_1 - \omega_{dv}(\mathbf{q})]} - \frac{\beta_{vc}(\mathbf{q})\alpha_{cd}(\mathbf{q})\gamma_{dv}(\mathbf{q})}{[\omega_1 + \omega_{cv}(\mathbf{q})][\omega_2 - \omega_{dv}(\mathbf{q})]} \right\}_{\omega - \omega_{dc}(\mathbf{q})=0} \\ &\quad \times \left[-i\pi dS \lim_{\omega - \omega_{dc}(\mathbf{q}) \rightarrow 0} \frac{\omega - \omega_{dc}(\mathbf{q})}{|\nabla(\omega - \omega_{dc}(\mathbf{q}))|} \right] \\ &= \int_V \left\{ -\frac{\gamma_{vc}(\mathbf{q})\alpha_{cd}(\mathbf{q})\beta_{dv}(\mathbf{q})}{[\omega_2 + \omega_{cv}(\mathbf{q})][\omega_1 - \omega_{dv}(\mathbf{q})]} - \frac{\beta_{vc}(\mathbf{q})\alpha_{cd}(\mathbf{q})\gamma_{dv}(\mathbf{q})}{[\omega_1 + \omega_{cv}(\mathbf{q})][\omega_2 - \omega_{dv}(\mathbf{q})]} \right\} d^3q, \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

donde también hemos tomado en cuenta la posibilidad de que el gradiente se anule en la integral de superficie, pero aún en este caso el límite es cero porque $\omega - \omega_{dc}(\mathbf{q})$ tiende a cero más rápido que sus derivadas parciales. También, como ya lo hicimos antes, para una función continua da lo mismo tomar o no un valor principal de Cauchy para la integral.

El resultado (A.32) implica que (A.31) se reduce a

$$f_{\alpha\beta\gamma,5-8}^{(2)} = -\frac{\gamma_{vc}(\mathbf{q})\alpha_{cd}(\mathbf{q})\beta_{dv}(\mathbf{q})}{[\omega_2 + \omega_{cv}(\mathbf{q})][\omega_1 - \omega_{dv}(\mathbf{q})]} - \frac{\beta_{vc}(\mathbf{q})\alpha_{cd}(\mathbf{q})\gamma_{dv}(\mathbf{q})}{[\omega_1 + \omega_{cv}(\mathbf{q})][\omega_2 - \omega_{dv}(\mathbf{q})]} \quad (\text{A.33})$$

En cuanto a los cuatro primeros términos de la susceptibilidad de segundo orden no hay problema para que, siguiendo el camino ya mostrado, apliquemos una omisión sucesiva directa de constantes Γ .

Resumiendo, cuando $f_v(\mathbf{q})=1$ y $E_g > |\hbar\omega|, |\hbar\omega_1|, |\hbar\omega_2|, |\hbar\omega_3|$, entonces las constantes de amortiguamiento en (A.28)-(A.29) pueden omitirse. En consecuencia y de acuerdo con (A.33), las susceptibilidades de primer y segundo orden $\chi_{ll}^{(1)}(\omega)$ y $\chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(\omega = \omega_1 + \omega_2)$ se reducen a

$$\chi_{ll}^{(1)}(\omega) = \frac{e^2}{\hbar} \int d^3q \delta_{cc} f_{ll}^{(1)}(\omega, \mathbf{q}) \quad (\text{A.34})$$

$$f_{ll}^{(1)}(\omega, \mathbf{q}) = |l_{vc}(\mathbf{q})|^2 \left(\frac{1}{\omega + \omega_{cv}(\mathbf{q})} - \frac{1}{\omega - \omega_{cv}(\mathbf{q})} \right),$$

$$\chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) \equiv \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(\omega = \omega_1 + \omega_2) = -\frac{e^3}{\hbar^2} \int d^3q \delta_{cc} \delta_{dd} f_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(\omega_1, \omega_2, \mathbf{q})$$

$$f_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(\omega_1, \omega_2, \mathbf{q}) = +\frac{\alpha_{vc}(\mathbf{q})\beta_{cd}(\mathbf{q})\gamma_{dv}(\mathbf{q})}{[\omega - \omega_{cv}(\mathbf{q})][\omega_2 - \omega_{dv}(\mathbf{q})]} + \frac{\alpha_{vc}(\mathbf{q})\gamma_{cd}(\mathbf{q})\beta_{dv}(\mathbf{q})}{[\omega - \omega_{cv}(\mathbf{q})][\omega_1 - \omega_{dv}(\mathbf{q})]} \quad (\text{A.35})$$

$$+ \frac{\beta_{vc}(\mathbf{q})\gamma_{cd}(\mathbf{q})\alpha_{dv}(\mathbf{q})}{[\omega + \omega_{dv}(\mathbf{q})][\omega_1 + \omega_{cv}(\mathbf{q})]} + \frac{\gamma_{vc}(\mathbf{q})\beta_{cd}(\mathbf{q})\alpha_{dv}(\mathbf{q})}{[\omega + \omega_{dv}(\mathbf{q})][\omega_2 + \omega_{cv}(\mathbf{q})]}$$

$$- \frac{\gamma_{vc}(\mathbf{q})\alpha_{cd}(\mathbf{q})\beta_{dv}(\mathbf{q})}{[\omega_2 + \omega_{cv}(\mathbf{q})][\omega_1 - \omega_{dv}(\mathbf{q})]} - \frac{\beta_{vc}(\mathbf{q})\alpha_{cd}(\mathbf{q})\gamma_{dv}(\mathbf{q})}{[\omega_1 + \omega_{cv}(\mathbf{q})][\omega_2 - \omega_{dv}(\mathbf{q})]}.$$

Observemos que $\chi_{ii}^{(1)}(\omega)$ es real.

Las expresiones (A.34) y (A.35) son casos particulares correspondientes de (A.28) y (A.29), y son consecuencia de un razonamiento operacional basado en un modelo simple para las bandas de energía de un cristal. Tal razonamiento considera $f_v(\mathbf{q})=1$ para la banda de valencia y $E_g > |\hbar\omega|, |\hbar\omega_1|, |\hbar\omega_2|, |\hbar\omega_3|$, por lo que el cristal no absorberá energía del campo electromagnético. La probabilidad de encontrar al electrón en la banda “v” con energía $E_v(\mathbf{q})$, en el instante de conexión de la interacción del cristal con el campo electromagnético, es precisamente $f_v(\mathbf{q})$ [2.11].

Hemos encontrado un ejemplo de que cuando no existe absorción de fotones, todas las constantes de amortiguamiento pueden omitirse. El procedimiento operacional mismo nos indica que cuando ocurre la absorción no todas las Γ pueden despreciarse.

La susceptibilidad de tercer orden tiene un comportamiento similar en lo que se refiere a la omisión de las constantes Γ .

Para aclarar esta situación solamente escribiremos las ecuaciones básicas, en la forma planteada por [2.11], para obtener las susceptibilidades de cualquier orden [2.12]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} &= \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}_0 + \hat{H}_{int}, \hat{\rho}] - \Gamma(\hat{\rho} - \hat{\rho}^{(0)}) \\ \langle \hat{\mathbf{P}} \rangle &= Tr(\hat{\rho} \hat{\mathbf{P}}), \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

donde $\hat{\rho}^{(0)} = \hat{\rho}(t = -\infty) = f_v(\mathbf{q})$ es el valor en equilibrio ($\partial \hat{\rho}^{(0)} / \partial t = 0$) de la matriz de densidad cuántica [2.13] en el instante de conexión de la interacción del cristal con el campo electromagnético, $\langle \hat{\mathbf{P}} \rangle$ es el valor esperado de la polarización \mathbf{P} .

En mecánica clásica, en relación con el oscilador armónico forzado, tenemos un tiempo de relajación [2.14][2.15], que caracteriza el amortiguamiento del estado transitorio y el establecimiento del estado estacionario.

En (A.36) Γ^{-1} es un tiempo fenomenológico efectivo de relajación que describe la interacción del cristal con el medio disipativo, constituido por los fonones de las oscilaciones de la red del propio cristal [2.4], \hat{H}_0 es el operador Hamiltoniano del cristal no

perturbado y \hat{H}_{int} es el operador Hamiltoniano que describe la interacción de la luz con la materia.

Si (A.28) y (A.29) se hubieran obtenido partiendo de (A.36), solamente diferirían en que la constante de amortiguamiento sería única. Es claro que esta situación se manifestará en las susceptibilidades de cualquier orden. Consecuentemente, cuando no haya absorción de fotones, la Γ eficaz es realmente cero, ya que no hay energía que entregar a las vibraciones de la red.

Cuando las constantes de amortiguamiento pueden despreciarse, la simetría de permutación (2.32) nos permite obtener

$$\begin{aligned}
(-n, \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}, n_1, n_2, n_3) &= (\alpha(-n), \beta n_1, \gamma n_2, \delta n_3) \chi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)}(+n = +n_1 + n_2 + n_3), \text{ por (2.28)} \\
&= (\alpha(-n), \beta n_1, \gamma n_2, \delta n_3) \chi_{\beta\gamma\delta\alpha}^{(3)*} (+n_1 = -n_2 - n_3 + n), \text{ por (2.30)} \\
&= (\beta n_1, \gamma n_2, \delta n_3, \alpha(-n)) \chi_{\beta\gamma\delta\alpha}^{(3)} (-n_1 = +n_2 + n_3 - n), \text{ por conmutación algebraica de los campos y por conjugación compleja (A.37)} \\
&= (n_1, \chi_{\beta\gamma\delta\alpha}^{(3)}, n_2, n_3, -n) \text{ por (2.28)} \\
&= (n_2, \chi_{\gamma\delta\alpha\beta}^{(3)}, n_3, -n, n_1) \text{ por similitud} \\
&= (n_3, \chi_{\delta\alpha\beta\gamma}^{(3)}, -n, n_1, n_2) \text{ por similitud,}
\end{aligned}$$

y similarmente

$$(-n, \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}, n_1, n_2) = (n_1, \chi_{\beta\gamma\alpha}^{(2)}, n_2, -n) = (n_2, \chi_{\gamma\alpha\beta}^{(2)}, -n, n_1). \quad (\text{A.38})$$

REFERENCIAS

Capítulo 1

- [1.1] See papers in Nonlinear Optics of Photonic Crystals, edited by C.M. Bowden and A.M. Zheltikov, Feature issue J. Opt. Soc. Am. B **19**, 1961 (2002).
- [1.2] Amnon Yariv, Pochi Yeh: Optical Waves in Crystals, Propagation and Control of Laser Radiation (Wiley, New York 1984), Sect. 6.8.
- [1.3] A. Fiore, V. Berger, E. Rosencher, P. Brevetti, and J. Nagle, Nature (London) **391**, 463 (1998).
- [1.4] P.K. Kashkarov, L.A. Golovan, A.B. Fedotov, A.I. Efimova, L.P. Kuznetsova, V.Y. Timoshenko, D.A. Sidorov-Biryukov, A.M. Zheltikov, and J.W. Haus, J. Opt. Soc. Am. B **19**, 2273 (2002).
- [1.5] V. Berger, Phys. Rev. Lett. **81**, 4136 (1998).
- [1.6] N.G.R. Broderick, G.W. Ross, H.L. Offerhaus, D.J. Richardson, and D.C. Hanna, Phys. Rev. Lett. **84**, 4345 (2000).
- [1.7] V. Berger, J. Opt. Soc. Am. B **14**, 1351 (1997); V. Pellegrini, R. Colombelli, I. Carusotto, F. Beltram, S. Rubini, R. Lantier, A. Franciosi, C. Vinegoni, and L. Pavesi, Appl. Phys. Lett. **74**, 1945 (1999).
- [1.8] M. Centini, C. Sibilia, M. Scalora, G. D'Aguanno, M. Bertolotti, M. J. Bloemer, C.M. Bowden, and I. Nefedov, Phys. Rev. E **60**, 4891 (1999); G. D'Aguanno, M. Centini, M. Scalora, C. Sibilia, Y. Dumeige, P. Vidakovic, J.A. Levenson, M.J. Bloemer, C.M. Bowden, J.W. Haus, and M. Bertolotti, *ibid.* **64**, 016609 (2001); Y. Dumeige, I. Sagnes, P. Monnier, P. Vidakovic, I. Abram, C. Mériadec, and A. Levenson, Phys. Rev. Lett. **89**, 043901 (2002).
- [1.9] J. Martorell, R. Vilaseca, and R. Corbalan, Appl. Phys. Lett. **70**, 702 (1997).
- [1.10] E. M. Purcell, Phys. Rev. **69**, 681 (1946).
- [1.11] R. G. Hulet, E. S. Hilfer, and D. Kleppner, Phys. Rev. Lett. **55**, 2137 (1985).
- [1.12] G. Gabrielse and H. Dehmelt, Phys. Rev. Lett. **55**, 67 (1985).
- [1.13] R. J. Nelson and R. G. Sobers, J. Appl. Phys. **49**, 6103 (1978).
- [1.14] E. Yablonovitch, Phys. Rev. Lett. **58**, 2059 (1987).
- [1.15] H. Kogelnik and C. V. Shank, J. Appl. Phys. **43**, 2328 (1972).

- [1.16] Ref. [1.2], p.217.
- [1.17] Development and Applications of Photonic Band Gap Materials, edited by C. M. Bowden, J. P. Dowling, and H. O. Everitt, special issue of *J. Opt. Soc. Am. B* **10**, 279-413 (1993); also, Photonic Band Structures, edited by G. Kurizki and J. W. Haus, special issue of *J. Mod. Opt.* **41** (1994).
- [1.18] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, 5th ed. (Wiley, New York, 1976), pp. 188 and 189.
- [1.19] W. K. H. Panofsky and M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism* (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1962), pp. 202-3.
- [1.20] A. Sommerfeld, *Ann. Physik* **44**, 177 (1914).
- [1.21] L. Brillouin, *Ann. Physik* **44**, 203 (1914). A summary of Sommerfeld and Brillouin can be found in the following: L. Brillouin, *Wave Propagation and Group Velocity* (Academic, New York, 1960).
- [1.22] C. G. B. Garrett and D. E. McCumber, *Phys. Rev. A* **1**, 305 (1970).
- [1.23] See the remarks preceding and following Eq. (9) of Ref. [1.22].
- [1.24] F. R. Faxvog, C. N. Chow, T. Bieber, and J. A. Carruthers, *Appl. Phys. Letters* **17**, 192 (1970).
- [1.25] M. D. Crisp, *Phys. Rev. A* **4**, 2104 (1971).
- [1.26] R. Landauer, *Nature (London)* **341**, 567 (1989).
- [1.27] L.A. MacColl, *Phys. Rev.* **40**, 621 (1932).
- [1.28] T. E. Hartman, *J. Appl. Phys.* **33**, 3427 (1962).
- [1.29] A. M. Steinberg, P. G. Kwiat, and R. Y. Chiao, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 708 (1993).
- [1.30] Ch. Spielmann, R. Szipöcs, A. Stingl, and F. Krausz, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 2308 (1994).
- [1.31] R. Y. Chiao, P. G. Kwiat, and A. M. Steinberg, *Physica (Amsterdam)* **175B**, 257 (1991).
- [1.32] M. Büttiker and R. Landauer, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1739 (1982); M. Büttiker, *Phys. Rev. A* **27**, 6178 (1983).
- [1.33] E. H. Hauge, J. P. Falck, and T. A. Fjeldly, *Phys. Rev. B* **36**, 4203 (1987); E. H. Hauge and J. A. Stovneng, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 917 (1989).

- [1.34] A. Ranfagni, D. Mugnai, P. Fabeni, and G. P. Pazzi, *Appl. Phys. Lett.* **58**, 774 (1991).
- [1.35] A. Enders and G. Nimtz, *J. Phys. I (France)* **2**, 1693 (1992); **3**, 1089 (1993); *Phys. Rev. B* **47**, 9605 (1993); *Phys. Rev. E* **48**, 632 (1993).
- [1.36] S. Chu and S. Wong, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 738 (1982).
- [1.37] E. L. Bolda, R. Y. Chiao, and J. C. Garrison, *Phys. Rev. A* **48**, 3890 (1993).

Capítulo 2

- [2.1] D. L. Mills: *Nonlinear Optics, Basic Concepts* (Springer, Berlin 1998), ps. 2, 9, 11, 37, 38.
- [2.2] Y. R. Shen: *The Principles of Nonlinear Optics* (Wiley, New York 1984), Sect. 2.2.
- [2.3] D. E. Bourne, P. C. Kendall: *Análisis Vectorial y Tensores Cartesianos* (Limusa, México 1980), Chap. 8.
- [2.4] A. S. Davíдов: *Teoría del Sólido* (Mir Moscú 1981), Chap. 8, Sect. 42.
- [2.5] E. Merzbacher: *Quantum Mechanics* (Wiley, New York 1970, 2nd edn.), p. 85.
- [2.6] N. Bloembergen, *Nonlinear Optics* (Benjamin, New York, 1965), Sect. 2.4.
- [2.7] N. Bloembergen, H. Lotem, and R. T. Lunch, *Indian J. Pure Appl. Phys.* **16**, 151 (1978).
- [2.8] M. Brédov, V. Rumiántsev, I. Toptiguin: *Electrodinámica Clásica* (Mir Moscú 1986), p. 467.
- [2.9] P. V. Pávlov, A. F. Jójlov: *Física del Estado Sólido* (Mir Moscú 1987), Sect. 7.6.
- [2.10] K. V. Shalíмова: *Física de los Semiconductores* (Mir Moscú 1975), Sect. 2-4.
- [2.11] Ref. [2.4], Chap. 8, Sect. 41.
- [2.12] Ref. [2.2], Sect. 2.1.
- [2.13] L. de la Peña: *Introducción a la Mecánica Cuántica* (Cecsa, México 1979), Sects. 21.1, 21.2.
- [2.14] C. Kittel, W.D. Knight, M. A. Ruderman: *Berkeley Physics Course, Volumen 1, Mecánica* (Reverté, España 1968), p. 205.
- [2.15] J. B. Marion: *Dinámica Clásica de las Partículas y Sistemas* (Reverté, España 1975), Sects. 4.2, 4.3.
- [2.16] Y.R. Shen, *Phys. Rev.* **167**, 818 (1968).

[2.17] D. A. Kleinman, *Phys. Rev.* **126**, 1977 (1962).

[2.18] Ref. [2.2], Sect. 2.5.

Capítulo 3

[3.1] J. N. Reddy, M. L. Rasmussen: *Análisis Matemático Avanzado, Con Aplicaciones a Ingeniería y Ciencias* (Limusa, México 1989), p. 169.

[3.2] Ref. [2.1], ps. 119, 120.

[3.3] D.S. Bethune, *J. Opt. Soc. Am. B/Vol. 6*, No. 5/may 1989.

[3.4] Amnon Yariv, Pochi Yeh: *Optical Waves in Crystals, Propagation and Control of Laser Radiation* (Wiley, New York 1984), ps. 54-60.

[3.5] John David Jackson: *Electrodinámica Clásica* (Alhambra, Madrid 1980), ps. 346-349.

[3.6] Aquino, Valdir C. Aguilera-Navarro, M. Goto, H. Iwamoto, *Phys. Rev. A* **58** (1998) 4359.

[3.7] Jon Mathews, R. L. Walker: *Matemáticas para físicos* (Reverté, España 1979), ps. 111-113.

[3.8] Juan de la Rubia Pacheco, José Javier Brey Abalo: *Introducción a la Mecánica Estadística* (Ediciones del Castillo, España 1978), ps. 23-26.

[3.9] Y. Zohta, *Solid State Commun.* **73** (1990) 845.

Capítulo 4

[4.1] Ref. [1.30].

[4.2] *Handbook of Optical Constants of Solids*, Edited by E. D. Palik (Academic, New York, 1985).

[4.3] Ref. [2.2], Sect. 2.6.

[4.4] Ref. [2.17].

[4.5] Ref. [2.2], Sect. 7.3.

[4.6] R. Chiao, P. G. Kwiat, and A. M. Steinberg, *Physica B* **175**, 257 (1991).

[4.7] Ref. [1.29].

[4.8] Michael Scalora, Jonathan P. Dowling, Aaron S. Manka, and Charles M. Bowden, *Phys. Rev. A* **52**, 726 (1995).

- [4.9] M. Scalora, M. J. Bloemer, A. S. Manka, J. P. Dowling, C. M. Bowden, R. Viswanathan, and J. W. Haus, *Phys. Rev. A* **56**, 3166 (1997).
- [4.10] Ref. [2.9], Sect. 7.7.
- [4.11] Ref. [3.4], Sects. 6.1-6.3.
- [4.12] R. Y. Chiao and A. M. Steinberg, in *Tunneling Time and Superluminality*, edited by E. Wolf, *Progress in Optics* Vol. 37 (Elsevier, New York, 1997), p. 345.
- [4.13] R. Landauer, *Nature (London)* **365**, 692 (1993).
- [4.14] F. E. Low, *Ann. Phys. (Leipzig)* **7**, 660 (1998).
- [4.15] M. Büttiker and S. Washburn, *Nature (London)* **422**, 271 (2003).
- [4.16] H. G. Winful, *Nature (London)* **424**, 638 (2003).
- [4.17] E.E. Méndez, E. Calleja, and W.I. Wang, *Phys. Rev. B*, **34**, 6026 (1986).