



# BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

---

---

Facultad de Ingeniería  
Colegio de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

## **“Desarrollo y Programación del Modelo De Bergeron para el Análisis de Sobretensiones Transitorias en Línea Monofásica”**

“Tesis presentada como requisito para obtener el título de:  
**Licenciatura en Ingeniería Mecánica y Eléctrica.**”

Presenta:

**Miguel López Castillo**

Asesor / Coasesor:

**Dr. Juan Carlos Escamilla Sánchez / M.C. Ismael Albino  
Padilla**

**Noviembre 2016**



**BUAP**

Oficio No. S.AC. 2192/16

**ASUNTO: ACEPTACIÓN TEMA TESIS**

**C. MIGUEL LÓPEZ CASTILLO  
PASANTE DE LA CARRERA DE  
INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
DE LA B.U.A.P.  
PRESENTE.**

En atención a la autorización del Tema de Tesis que puso Usted a consideración de esta Facultad, se turnó la misma al:

**M. en C. GUILLERMO FLORES MARTÍNEZ  
COORDINADOR DEL COLEGIO DE  
INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA**

Habiendo autorizado el tema denominado:

**“DESARROLLO Y PROGRAMACIÓN DEL MODELO DE BERGERON PARA EL ANÁLISIS  
DE SOBRETENSIONES TRANSITORIAS EN LINEA MONOFÁSICA”**

Por lo anterior hacemos de su conocimiento que se asignan como Asesores de esta tesis a: **DR. JUAN CARLOS ESCAMILLA SÁCHEZ Y M.C. ISMAEL ALBINO PADILLA.**

Sin otro particular de momento, me es grato quedar de usted.

ATENTAMENTE

“PENSAR BIEN PARA VIVIR MEJOR”

H. Puebla de Zaragoza, 26 de septiembre de 2016

**M.I. FERNANDO DANIEL LAZCAÑO HERNÁNDEZ  
DIRECTOR**

C.c.p.- Mesa de Exámenes Profesionales

Asesor

Archivo

M´FDLH/MAJT\*rba.

**60**  
**AÑOS DE**  
**AUTONOMÍA**  
UNIVERSITARIA

Facultad  
de Ingeniería

Bldv. Valsequillo y Av. San Claudio  
s/n, edif. ING 4, Col. San Manuel,  
Ciudad Universitaria,  
Puebla, Pue. C.P. 72570  
01 (222) 229 55 00 Ext. 7610

**Asunto: AUTORIZACIÓN DE IMPRESIÓN TESIS**

**M.I. FERNANDO DANIEL LAZCANO HERNÁNDEZ  
DIRECTOR DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA  
DE LA B.U.A.P.  
Presente.**

El suscrito: **DR. JUAN CARLOS ESCAMILLA SÁNCHEZ, Asesor del Tema de Tesis denominado:**

**“DESARROLLO Y PROGRAMACIÓN DEL MODELO DE BERGERON PARA EL ANÁLISIS DE SOBRETENSIONES TRANSITORIAS EN LÍNEA MONOFÁSICA”**

Presentado por el **c. MIGUEL LÓPEZ CASTILLO, Pasante de la Carrera de Ingeniería Mecánica y Eléctrica**, y en atención al oficio No. S.AC. 2192/16 de fecha 26 de septiembre del presente año, me permito informar a usted que después de haber revisado cuidadosamente el contenido temático, la metodología, la redacción y la ortografía **de la Tesis, no tengo inconveniente en autorizar la impresión de la misma.**

Lo que hago de su conocimiento para los efectos legales a que haya lugar.

Asimismo, solicito tenga a bien autorizar el Jurado para su Examen Profesional.

ATENTAMENTE

H. Puebla de Z., 4 de noviembre de 2016

  
**DR. JUAN CARLOS ESCAMILLA SÁNCHEZ  
ASESOR**

C.c.p.- Exámenes Profesionales  
Interesado  
Archivo

rba

## RESUMEN

La presente tesis fue realizada con el propósito de describir y programar el Modelo de Bergeron para el cálculo de sobretensiones transitorias en líneas de transmisión uniformes, monofásicas y sin pérdidas, teniendo como principal aplicación la determinación de sobretensiones debidas a la energización de la línea abierta, con carga y bajo descargas atmosféricas.

En los primeros tres capítulos se mencionan y describen todos aquellos temas necesarios para comprender las sobretensiones transitorias, dando así un panorama previo al Modelo de Bergeron, la programación del modelo es realizada en el software MATLAB, se implementa un código el cual puede ser modificado para simular diferentes casos.

Con el propósito de validar y verificar el código programado se realiza una comparación de los resultados obtenidos del Modelo de Bergeron con respecto al Modelo en la Frecuencia, dicha comparación muestra que el código presenta un porcentaje de error mínimo, por lo que su aplicación es fiable.

# CONTENIDO

RESUMEN .....	i
ÍNDICE DE FIGURAS .....	vi
ÍNDICE DE TABLAS .....	x
GLOSARIO DE TÉRMINOS.....	xi
<b>1. INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>1</b>
1.1 Planteamiento del Problema .....	7
1.2 Justificación.....	7
1.3 Objetivos .....	7
1.3.1 Principal .....	7
1.3.2 Específicos.....	8
1.4 Hipótesis.....	8
<b>2. CÁLCULO DE PARÁMETROS MONOFÁSICOS .....</b>	<b>9</b>
2.1 Resistencia.....	10
2.1.1 Cálculo de la Resistencia.....	10
2.2 Inductancia .....	11
2.2.1 Definición .....	11
2.2.2 Cálculo de la Inductancia.....	12
2.2.3 Cálculo de la Inductancia, considerando el Efecto del Suelo.....	16

2.3 Capacitancia.....	18
2.3.1 Definición .....	18
2.3.2 Cálculo de la Capacitancia.....	19
2.3.3 Cálculo de la Capacitancia, considerando el Efecto del Suelo .....	23
<b>3. ANÁLISIS DE LÍNEAS DE TRANSMISIÓN.....</b>	<b>25</b>
3.1 Factores que Afectan la Transmisión de Energía.....	25
3.1.1 Efecto Corona .....	25
3.1.2 Efecto Aislador .....	28
3.1.3 Efecto Piel (Pelicular).....	30
3.1.4 Efecto de Proximidad.....	30
3.2 Sobretensiones .....	31
3.2.1 Clasificación de Sobretensiones .....	32
3.3 Análisis en la Frecuencia y en el Tiempo .....	33
3.3.1 Dominio de la Frecuencia .....	34
3.3.2 Dominio del Tiempo .....	35
3.4 Parámetros Concentrados y Parámetros Distribuidos.....	36
3.4.1 Parámetros Concentrados .....	36
3.4.2 Parámetros Distribuidos.....	37
3.5 Análisis de Sobretensiones Transitorias .....	41
3.5.1 Diagrama de Lattice.....	41
3.5.2 Método de las Características.....	48

<b>4. MODELO DE BERGERON</b> .....	52
4.1 Introducción .....	52
4.2 Ecuaciones del Telegrafista .....	52
4.3 Desarrollo del Modelo de Bergeron .....	56
4.4 Determinación de los Primeros Valores de una Sobretensión Transitoria por el Modelo de Bergeron .....	62
<b>5. APLICACIÓN DEL MODELO DE BERGERON</b> .....	72
5.1 Generalidades de la Programación del Modelos de Bergeron .....	72
5.2 Aplicación del Modelo de Bergeron .....	72
5.2.1 Energización de una Línea Abierta .....	74
5.2.2 Energización de una Línea con Carga .....	75
5.2.3 Energización de una Línea con Cierre de Interruptor en un Tiempo Diferente de Cero .....	77
5.2.4 Línea con Descarga Atmosférica .....	79
5.3 Validación de la Programación del Modelo de Bergeron .....	81
<b>6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES PARA TRABAJOS FUTUROS</b> .....	83
6.1 Conclusiones .....	83
6.2 Recomendaciones y Trabajos Futuros .....	84
<b>BIBLIOGRAFÍA</b> .....	85

<b>ANEXOS</b> .....	87
Anexo I. Código Simulación Fuente Función Escalón.....	87
Anexo II. Código Simulación Fuente Cosenoidal .....	88
Anexo III. Código Simulación Cierre de Interruptor en Tiempo Diferente de Cero .....	88
Anexo IV. Código Simulación Descarga Atmosférica.....	89

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1. Líneas de campo magnético obtenidas en simulación de Comsol Multiphysics 3.3.....	12
Figura 2.2. Representación de línea a par abierto .....	13
Figura 2.3. Densidad de superficie formada por efecto del suelo.....	17
Figura 2.4. Placas de un capacitor separadas a una distancia $d$ conectadas a una fuente de energía .....	18
Figura 2.5. Dipolo formado por dos cargas eléctricas con signos opuestos.....	19
Figura 2.6. Representación de línea de par abierto .....	20
Figura 3.1. Representación de efecto aislador en un cable suspendido .....	29
Figura 3.2. Ilustración del efecto de proximidad. ....	30
Figura 3.3. a) Forma de onda ideal en una red para voltaje. b) Representación de onda senoidal de voltaje con distorsión.....	33
Figura 3.4. Comparación de gráficos en el dominio del tiempo y dominio de la frecuencia.....	35
Figura 3.5. Circuito con parámetros concentrados. ....	37
Figura 3.6. Circuito representativo con parámetros distribuidos.....	37
Figura 3.7. a) Tubería con llave de paso cerrada, b) Tubería con llave abierta. ....	39
Figura 3.8. a) Tubería con llave de paso cerrada, b) Tubería con llave abierta .....	39
Figura 3.9. Ampliación de la Figura 3.8 b), donde se aprecia como el agua tiende a generar turbulencias en la sección de cambio de diámetro.....	40
Figura 3.10. Circuito representativo para comprender el diagrama de Lattice, basado en ondas viajeras. ....	41

Figura 3.11. Representación del “rebote” de una onda viajera, con respecto a la Figura 3.10. ....	41
Figura 3.12. Comparación hipotética del cambio de la magnitud de la energía conforme a cada reflexión de la onda viajera. ....	42
Figura 3.13. Circuito para ejemplo 3.1 .....	45
Figura 3.14. Primera parte del diagrama de Lattice. ....	46
Figura 3.15. Segunda parte del diagrama de Lattice. ....	47
Figura 3.16. Diagrama de Lattice para ocho instantes de tiempo $t_0$ . ....	47
Figura 3.17. Gráfico de voltaje obtenido del diagrama de Lattice. ....	47
Figura 3.18. a) Diagrama de Lattice para la corriente del ejemplo 3.1, b) Gráfica de la corriente durante ocho tiempos, basada en el diagrama de Lattice .....	48
Figura 3.19. Plano de impedancia y tiempo $(z, t)$ donde se representan las curvas del método de las características. ....	49
Figura 3.20. Circuito utilizado por SPICE para un análisis en el dominio del tiempo. ..	50
Figura 3.21. a) Grafica que representa la variación del voltaje con respecto al tiempo del ejemplo 3.2, b) Grafica que muestra la variación de la corriente con respecto al tiempo del ejemplo 3.2. ....	51
Figura 4.1. Circuito representativo de una línea de transmisión para determinar las ecuaciones del telegrafista. ....	53
Figura 4.2. Modelo de línea con parámetros distribuidos. ....	53
Figura 4.3. Línea de transmisión con longitud $L$ para determinar ecuaciones representativas del Modelo de Bergeron. ....	56
Figura 4.4. Circuito dual de Norton para una línea de transmisión. ....	58
Figura 4.5. Circuito equivalente de una línea de transmisión utilizado por el Modelo de Bergeron. ....	58

Figura 4.6.	Ilustración sobre la forma en que se obtiene la solución del Modelo de Bergeron.....	60
Figura 4.7.	Posición de las corrientes de historia y las ondas de energía durante el tiempo de observación. ....	61
Figura 4.8.	Posición de la fuente de voltaje con respecto al diagrama de las ondas viajeras.....	62
Figura 4.9.	Determinación de los primeros valores de corriente de historia.....	63
Figura 5.1.	Diagrama de flujo para la solución de transitorios por el Modelo de Bergeron.....	73
Figura 5.2.	Sobretensión transitoria debida a la energización de línea abierta con fuente función escalón. ....	74
Figura 5.3.	Sobretensión transitoria debida a la energización de línea abierta con fuente cosenoidal.....	74
Figura 5.4.	Sobretensión transitoria debida a la energización de línea con impedancia de carga de $10\text{ K}\Omega$ ; fuente escalón unitario.....	75
Figura 5.5.	Sobretensión transitoria debida a la energización de línea con impedancia de carga de $10\text{ K}\Omega$ ; fuente cosenoidal.....	75
Figura 5.6.	Sobretensión transitoria debida a la energización de línea con impedancia de carga de $1000, 800$ y $600\ \Omega$ ; fuente escalón.....	76
Figura 5.7.	Sobretensión transitoria debida a la energización de línea con impedancia de carga de $1000, 800$ y $600\ \Omega$ ; fuente cosenoidal.....	76
Figura 5.8.	Sobretensión transitoria debida a la energización de línea abierta: cierre de interruptor en tiempo $t = 16\text{ ms}$ . ....	77
Figura 5.9.	Sobretensión transitoria debida a la energización de línea, impedancia de carga de $10\text{ k}\Omega$ ; cierre de interruptor en tiempo $t = 16\text{ ms}$ .....	78

Figura 5.10. Sobretensión transitoria debida a la energización de línea, variación de impedancia de carga; cierre de interruptor en tiempo $t = 16 \text{ ms}$ .....	78
Figura 5.11. Comparación de sobretensión transitoria debida a la energización de línea abierta; cierre de interruptor en tiempo $t = 12.3 \text{ ms}$ y $16 \text{ ms}$ . .....	78
Figura 5.12. Forma de onda normalizada para la descarga atmosférica. ....	79
Figura 5.13. Sobretensión transitoria debida a descarga atmosférica en línea con carga de $10 \text{ K}\Omega$ .....	80
Figura 5.14. Anulación de sobretensión transitoria con carga de $475 \Omega$ ; fuente escalón unitario. ....	80
Figura 5.15. Anulación de sobretensión transitoria con carga de $475 \Omega$ ; fuente cosenoidal .....	81
Figura 5.16. Anulación de sobretensión transitoria, debida a descarga atmosférica, con carga de $475 \Omega$ .....	81
Figura 5.17. Comparación de resultados entre el Modelo en la Frecuencia y Bergeron, para la simulación de sobretensión transitoria; fuente escalón unitario. ....	82
Figura 5.18. Comparación de resultados entre el Modelo en la Frecuencia y Bergeron, para la simulación de sobretensión transitoria; fuente cosenoidal .....	82

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1.1.	Fallas Frecuentes en un SEP.....	2
Tabla 1.2.	Comparación cualitativa de los modelos de línea, comparados con el modelo de J. Martí.....	5
Tabla 3.1.	Frecuencias de sobretensiones.....	32
Tabla 3.2.	Valores de coeficiente de reflexión.....	44

## GLOSARIO DE TÉRMINOS

ATP	<i>Alternative Transients Program</i> (Programa alternativo para transitorios).
EMTP	<i>ElectroMagnetic Transient Program</i> (Programa para transitorios electromagnéticos).
LT	Línea de transmisión.
MATLAB	<i>MATrix LABoratory</i> (Laboratorio de matrices), software para cálculo técnico.
RMG	Radio medio geométrico.
SD	Sobretensiones por descarga atmosférica.
SM	Sobretensiones por maniobra.
SEP	Sistema Eléctrico de Potencia.
SPICE	<i>Simulation Program with Integrated Circuits Emphasis</i> (Programa de simulación con énfasis en circuitos integrados).

# 1. INTRODUCCIÓN

Para poder disponer de la electricidad es fundamental contar con sistema que permita su generación, transmisión y distribución, a dicho sistema se le denomina Sistema Eléctrico de Potencia (SEP), el cual se encuentra compuesto, principalmente, por:

- Generadores
- Líneas de transmisión
- Subestaciones
- Transformadores
- Redes de distribución

Cada uno de los elementos enlistados anteriormente deben ser los adecuados para poder tener un servicio eficiente de energía, sin embargo no suele ser suficiente contar con equipos bien diseñados o constituidos ya que pueden fallar en cualquier momento, lo cual no necesariamente significa que el equipo fallara por si solo sino que este se puede ver afectado por fallas internas (propias del sistema) o externas (descargas atmosféricas) en cualquiera de los casos estas pueden ser algunas de las consecuencias:

1. Una falla no sólo puede producir interrupción de servicios, sino que puede ser de consecuencias tales que provoquen interrupciones mayores como es la pérdida de sincronismo en las plantas generadoras lo que puede conducir a interrupciones generales.
2. Además de las interrupciones, se puede destruir parte de las instalaciones y equipos.
3. Daños mecánicos en partes de las instalaciones que tienen como causa primaria una falla eléctrica.
4. Fallas menores pueden producir solo un mal servicio, como son la variación de frecuencias o caídas excesivas de voltaje [1].

En la Tabla 1.1 se presenta estadísticas de fallas en un sistema eléctrico así como el porcentaje que representan del total.

**Tabla 1.1.** Fallas Frecuentes en un SEP [1].

Parte Del Sistema	% Del Total De Fallas
Líneas aéreas	50
Cables subterráneos	10
Interruptores	15
Transformadores de potencia	12
Transformadores de potencial y corriente	2
Equipo de control	3
Equipos varios en las subestaciones	8
Total	100%

En la Tabla 1.1 se puede notar que el 50% del total de las fallas en un sistema ocurre en las líneas de transmisión, esto es debido a que es un elemento que cubre grandes extensiones expuesto al medio ambiente por lo cual es más propenso a tener alteraciones externas que van desde las descargas atmosféricas hasta las fallas propias (cortocircuito) [1]. Dichas alteraciones se consideran como un evento transitorio, el cual puede definirse de la siguiente manera:

“Un transitorio eléctrico es un cambio repentino en las condiciones de un circuito, como la apertura y cierre de un interruptor o cuando se produce un fallo en el sistema. El período de un transitorio suele ser muy corto (milisegundos). Sin embargo, estos períodos transitorios son extremadamente importantes, ya que es en esos momentos en que los componentes del circuito están sometidos a corrientes o tensiones excesivas”. [2]

Por lo que, para el caso de las líneas de transmisión los eventos transitorios a considerar son:

- Sobrecorrientes por fallas.
- Sobretensiones por la maniobra de interruptores y descargas atmosféricas.

Las fallas por corto circuito pueden ser:

- a) De una fase a tierra.
- b) Entre dos fases.
- c) Entre dos fases y tierra.
- d) Trifásico.

Por otra parte las sobretensiones que se presentan en los sistemas eléctricos pueden ser:

- a) Sobretensiones de origen atmosférico.

Estas sobretensiones son debidas a las descargas atmosféricas y por lo general se manifiestan inicialmente sobre las líneas de transmisión pudiendo ocurrir:

- Por descargas directamente sobre la línea de transmisión.
- Por descargas sobre las estructuras (torres o postes) o sobre los hilos de guarda de las líneas de transmisión.
- Por descargas a tierra en las proximidades de la línea de transmisión.

- b) Sobretensiones por maniobra de interruptores.

- c) Sobretensiones temporales a la frecuencia del sistema.

Ya sea un cortocircuito o una sobretensión es necesario contar con métodos, procedimientos y modelos, que permitan calcular las magnitudes de voltaje y corriente cuando se suscita uno de estos fenómenos, debido a que de ello dependerá poder adecuar el sistema con protecciones y aislamientos necesarios que puedan mantener en las mejores condiciones posibles a los elementos del SEP.

Para el caso de las líneas de transmisión las sobretensiones son un objeto de estudio que permiten, por ejemplo, determinar la coordinación de aislamientos y el ajuste de

protección de los equipos; a diferencia de un cortocircuito y una descarga atmosférica una sobretensión por maniobra es producida de cierta forma “intencional” pues este es un fenómeno ocasionado por el cierre de interruptores, por lo cual es difícil de evitar, sin embargo, los resultados de una sobretensión por maniobra pueden aproximarse por medio de simulaciones. Un software puede realizar los cálculos de una línea de transmisión siempre que se cuente con los datos que la caracterizaran, por ejemplo:

- Tipo de sistema (monofásico, trifásico).
- Disposición geométrica de conductores.
- Longitud de la línea.
- Características eléctricas y geométricas del conductor.
- Voltaje de la fuente.
- Tipo de carga a alimentar.

La precisión de los valores que se obtengan a través de una simulación dependerá del medio por el cual se realicen los cálculos, es decir, de las ecuaciones y modelos que sean empleados para procesar los datos de entrada.

Dentro de los modelos de simulación de eventos transitorios en una línea de transmisión se encuentran:

- Circuito PI nominal.
- Circuito PI en cascada.
- Modelo de Bergeron.
- Modelo de J. Marti.
- Modelo de T. Noda.
- Modelo de Z – Line.
- Modelo de Línea Idempotente.
- Modelo Directo de Nguyen.
- Método de las Características.
- Modelo Universal de las Líneas de Transmisión.
- Representaciones en el Dominio de la Frecuencia.

De ahí se encuentran dos grupos:

- Modelos de parámetros concentrados.
- Modelos de parámetros distribuidos.

En la primera clasificación se encuentran los circuitos PI nominal y cascada, estos resultan útiles en simulación de sobretensiones temporales a frecuencia del sistema.

En el caso de los parámetros distribuidos a su vez se encuentran dos sub clasificaciones:

1. Parámetros constantes. Es el caso del Modelo de Bergeron.
2. Parámetros dependientes de la frecuencia. Se encuentran el resto de los modelos.

La comparación de los modelos de línea se basa en cuatro índices muy significativos: la exactitud del modelo, el tiempo de respuesta computacional, la capacidad del modelo de simular líneas con alta asimetría y su complejidad. El modelo estándar de comparación es el modelo desarrollado por J. Martí. Ver Tabla 1.2. [3]

**Tabla 1.2.** Comparación cualitativa de los modelos de línea, en base al Modelo de J. Martí. [3]

Modelo	Índices De Evaluación			
	Exactitud		Tiempo De Respuesta Computacional	
	SM	SD	SM	SD
Circuitos PI	- E	- E	Lento	Lento
Bergeron	- E	- E	10 al 30% más rápido	10 al 30% más rápido
Taku Noda	+ E	+ E	Lento	Lento

**Tabla 1.2.** Comparación cualitativa de los modelos de línea, en base al Modelo de J. Martí. (Continuación). [3]

Modelo	Índices De Evaluación			
	Exactitud		Tiempo De Respuesta Computacional	
	SM	SD	SM	SD
Z – Line	+ E	+ E	Segundos más lento	Segundos más lento
Línea Idempotente	+ E	+ E	Segundos más lento	Segundos más lento
Directo de Nguyen	+ E	+ E	Lento	Lento

Donde:

SM = sobretensiones por maniobra.

SD = sobretensiones por descarga atmosférica.

E = exactitud, mayor (+ E) y menor (- E).

En base a la tabla anterior se obtienen las siguientes observaciones:

1. Los Modelos de Circuito PI, resultan muy lentos e inexactos para las simulaciones de sobretensiones por maniobra y descarga atmosférica, no obstante son recomendados en el caso de sobretensiones a la frecuencia del sistema.
2. El Modelo de J. Martí es más exacto en comparación de Bergeron pero más lento, a su vez la complejidad de J. Martí es mayor pues utiliza parámetros dependientes de la frecuencia.
3. Por medio de los modelos de T. Noda, Z – Line, Línea Idempotente, Directo de Nguyen se obtienen resultados de mayor exactitud, pero en algunos casos el tiempo de respuesta computacional es más lento.

Como se aprecia el Modelo de Bergeron se encuentra en una posición media comparado con el resto, debido a que su complejidad es menor que aquellos que

utilizan parámetros dependientes de la frecuencia y su respuesta computacional es mayor que la de todos. En base a la Tabla 1.1 se puede decir que Bergeron es la primera aproximación de la solución de sobretensiones transitorias en las líneas de transmisión, con esta idea se tiene el objetivo de la presente tesis que es el de describir el Modelo de Bergeron así como su programación.

## **1.1 Planteamiento del Problema**

La información sobre el desarrollo de un modelo para el análisis de sobretensiones transitorias en una línea de transmisión es basta, sin embargo, no siempre es sencilla o fácil de comprender esto debido a que el tema involucra varios conceptos de los cuales se deben tener conocimiento previo al estudio de transitorios. Es por ello que en la presente tesis es estructurada de modo que el Modelo de Bergeron sea comprendido de la mejor manera y por consiguiente su programación.

## **1.2 Justificación**

En el análisis de las líneas de transmisión es de gran importancia determinar la magnitud de sobretensiones debido a que de ello depende la coordinación de aislamiento y ajuste de protecciones, por lo que comprender el tema representa un aspecto importante en el estudio de transmisión de energía, bajo esta condición el contar con una base que ayude a su comprensión resulta en un apoyo en el estudio de ingeniería eléctrica.

## **1.3 Objetivos**

### **1.3.1 Principal**

Describir el desarrollo del Modelo de Bergeron y su programación para el cálculo de sobretensiones por maniobra y descargas atmosféricas en líneas monofásicas.

### **1.3.2 Específicos**

1. Mencionar y describir de forma general todos aquellos temas necesarios para comprender el desarrollo del Modelo de Bergeron.
2. Programar en MATLAB el Modelo de Bergeron para el cálculo de sobretensiones por maniobra y descarga atmosférica.
3. Validar los resultados obtenidos en el programa desarrollado en MATLAB comparado el Modelo en la Frecuencia.

### **1.4 Hipótesis**

A través de una descripción detallada del Modelo de Bergeron, para la línea monofásica, se contará con los conceptos y ecuaciones necesarias para programarlo en el lenguaje de MATLAB y obtener resultados válidos para la simulación de sobretensiones transitorias.

## 2. CÁLCULO DE PARÁMETROS MONOFÁSICOS

El sistema eléctrico de potencia (SEP) se puede describir de forma resumida en tres partes importantes:

1. Generación: producción de electricidad.
2. Transmisión: sistema de líneas que transportan la electricidad de las centrales eléctricas de generación al área en donde es usada.
3. Distribución: sistema de líneas que conectan a un cliente al SEP.

Por fines de seguridad, prácticos y económicos generalmente la generación se encuentra remota a los clientes finales, pues un terreno en lejanías de una ciudad es mucho más barato que cercano a ella y por lo cual se decide construir a las afueras, así mismo resulta claro que, por ejemplo, en el caso de generación hidroeléctrica los generadores estarán ubicados donde el caudal de agua se encuentre.

Sin embargo, en la mayoría de los casos la generación se encuentra a varios kilómetros del centro de consumo, lo que resulta en la necesidad de elevar el voltaje a niveles muy altos para evitar que se presenten altas corrientes, disminuyendo de esta manera las pérdidas que se presentan a lo largo de la línea de transmisión.

La instalación de líneas a grandes distancias requiere de analizar aquellos parámetros que definen la caída de tensión y la variación de corriente en ellas:

- a) Resistencia ( $R$ ) y reactancia ( $jX$ ), definen la caída de tensión formando la impedancia serie:  $Z = R + jX$ .
- b) Conductancia ( $G$ ) y susceptancia ( $B$ ) en derivación, provocan la variación de corriente en la línea, forman la admitancia transversal de la línea:  $\gamma = G + jB$ .

A pesar de la relevancia que poseen los cuatro parámetros anteriormente mencionados, en estado transitorio y en especial para fines de cálculo del Modelo de Bergeron, se describirá sólo el inciso a) adicionando la capacitancia en derivación [4].

## 2.1 Resistencia

Para el análisis de un circuito eléctrico de apenas unos centímetros de longitud la resistencia de los conductores que lo componen no es considerada debido a que su longitud en realidad aporta números despreciables para este parámetro. Por otro lado en una línea de transmisión la resistencia no tiene la misma consideración ya que esta afecta la capacidad del conductor siendo la principal causa de pérdidas por efecto Joule. Por lo anterior, para el diseño de sistemas de transmisión es esencial tomar en cuenta este parámetro.

### 2.1.1 Cálculo de la Resistencia

La determinación de la resistencia se basa en cálculo de la resistividad del conductor a la corriente directa y a la resistencia a la corriente alterna, esto debido a que el comportamiento de este parámetro no es igual para ambos casos. En este apartado se muestra la ecuación de la resistencia en corriente directa pues para analizar en alterna se deben considerar algunos aspectos que hacen que su valor varíe.

$$R_0 = k_t \frac{\rho l}{A} \dots [\Omega] \quad (2.1)$$

Donde:

$R_0$  = resistencia efectiva en corriente directa corregida por temperatura.

$\rho$  = resistividad del material.

$l$  = longitud de la línea.

$A$  = área transversal del conductor.

El factor  $k_t$  de la ecuación (2.1) es incluido para realizar la corrección por temperatura.

$$k_t = \frac{T + t_2}{T + t_1} \quad (2.2)$$

Donde:

$T$  = constante de temperatura del material conductor, por ejemplo  $234.5\text{ }^\circ\text{C}$  para cobre.

$t_1$  = temperatura ambiente, usualmente se utiliza como referencia  $25\text{ }^\circ\text{C}$ .

$t_2$  = temperatura a la que se desea calcular la resistencia.

## 2.2 Inductancia

### 2.2.1 Definición

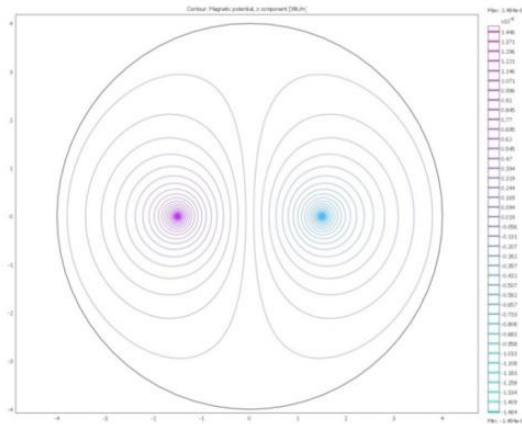
Un conductor se puede ver envuelto en líneas de flujo magnético cuando por él circula corriente eléctrica, la magnitud de estas líneas de campo depende de cuanta intensidad de esta energía sea percibida. La corriente alterna tiene la propiedad de poder ser almacenada en forma de campo magnético [5], se dice entonces que un circuito tiene inductancia cuando en él se cuenta con un elemento en forma de bobina, el cual será el contenedor del campo magnético.

Sin embargo, en una LT no se tiene de forma física una bobina, más sin embargo se dice que en ella se produce un efecto de inductancia.

Para el caso de una línea monofásica se considera que uno de los conductores es el que lleva la energía (x) y el otro el que funge como retorno (•), a tiempo en ambos se crean líneas de flujo que envuelven todo el conductor. En la Figura 2.1 se observa un ejemplo del campo magnético formado en una línea con los siguientes datos:

- Conductor sólido.
- Longitud de la línea =  $1\text{ Km}$ .
- Frecuencia de operación =  $60\text{ Hz}$ .
- Separación =  $3\text{ m}$ .
- Radio del conductor sólido =  $0.002\text{ m}$ .

Se puede apreciar que estas líneas no se ven entrelazadas, pues en un circuito con cargas opuestas las líneas de campo magnético se repelen.



**Figura 2.1.** Líneas de campo magnético obtenidas en simulación de Comsol Multiphysics 3.3.

Para que exista una diferencia en el número de estas líneas antes debe de crearse un cambio en la corriente que en ellas circula, a su vez al inferir tal cambio en la intensidad de corriente se induce una fuerza electromotriz (f.e.m.) en la línea, esta f.e.m. es directamente proporcional a la velocidad de la variación de flujo [5]. Entonces se define que la inductancia en la línea es la relación de la f.e.m. inducida (por la variación de flujo) con la velocidad de variación de la corriente [5].

### 2.2.2 Cálculo de la Inductancia

Para llegar a la ecuación que define la inductancia en una línea monofásica se parte de la densidad de superficie de flujo magnético ( $\psi$ ), esta relaciona al campo magnético con la corriente que circula a través de los conductores.

$$\psi = \iint B \cdot ds \tag{2.3}$$

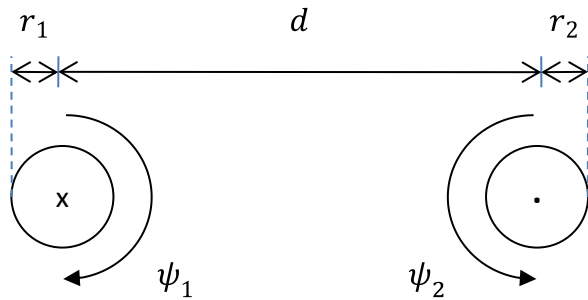
$$\psi = \iint \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr \tag{2.4}$$

Donde:

$\mu_0$  = permeabilidad magnética en vacío =  $4\pi \times 10^{-7} (H/m)$ .

$I$  = corriente en la línea.

En la Figura 2.2 se considera la geometría que representa la línea de monofásica de par abierto (ideal).



**Figura 2.2.**  
Representación de línea a par abierto.

Para los límites de integración se considera que el campo magnético parte de la superficie del conductor 1 hasta llegar a la superficie del conductor 2.

$$\psi_1 = \int_{r_1}^{d-r_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr \quad (2.5)$$

Resolviendo la integral.

$$\psi_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r \Big|_{r_1}^{d-r_2} \quad (2.6)$$

Sustituyendo los límites de integración.

$$\psi_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} [\ln(d-r_2) - \ln r_1] \quad (2.7)$$

Aplicando leyes de los logaritmos ( $\ln a - \ln b = \ln(a/b)$ ) se obtiene:

$$\psi_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{d-r_2}{r_1} \right) \right] \quad (2.8)$$

De manera similar al primer conductor, para el retorno ahora integrando desde la superficie del conductor de retorno (•) hacia la superficie de (x).

$$\psi_2 = \int_{r_2}^{d-r_1} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr \quad (2.9)$$

Resolviendo la integral.

$$\psi_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r \Big|_{r_2}^{d-r_1} \quad (2.10)$$

Sustituyendo los límites de integración.

$$\psi_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} [\ln(d-r_1) - \ln r_2] \quad (2.11)$$

Aplicando leyes de los logaritmos ( $\ln a - \ln b = \ln(a/b)$ ) se obtiene:

$$\psi_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{d-r_1}{r_2} \right) \right] \quad (2.12)$$

La densidad de superficie total, estará definida como la suma de la densidad de flujo magnético de cada conductor:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 \quad (2.13)$$

Sustituyendo las expresiones (2.8) y (2.12) en (2.13).

$$\psi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{d-r_2}{r_1} \right) \right] + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{d-r_1}{r_2} \right) \right] \quad (2.14)$$

Factorizando (2.14).

$$\psi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{d-r_2}{r_1} \right) + \ln \left( \frac{d-r_1}{r_2} \right) \right] \quad (2.15)$$

Aplicando leyes de los logaritmos ( $\ln a + \ln b = \ln(a * b)$ ) se obtiene:

$$\psi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{(d - r_2)(d - r_1)}{r_1 r_2} \quad (2.16)$$

Considerando que los conductores son geoméricamente iguales y tiene el mismo radio y si la distancia entre conductor es mucho mayor que el radio de los conductores se deduce que:

$$r_1 = r_2 = r \quad (2.17)$$

$$d \gg r \therefore \text{para } (d - r_2) \approx d \quad (2.18)$$

Reescribiendo la ecuación (2.16) tomando en cuenta las consideraciones (2.17) y (2.18).

$$\psi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left( \frac{d}{r} \right)^2 \quad (2.19)$$

Aplicando leyes de los logaritmos ( $\ln a^n = n \ln a$ ).

$$\psi = \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \left( \frac{d}{r} \right) \quad (2.20)$$

Finalmente para obtener la inductancia se parte de la relación (2.21):

$$\psi = LI \quad (2.21)$$

Sustituyendo (2.20) en (2.21).

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \left( \frac{d}{r} \right) \dots \left[ \frac{H}{m} \right] \quad (2.22)$$

Donde:

$L$  = inductancia geométrica de la línea ( $H/m$ ).

$\mu_0$  = permeabilidad magnética en vacío ( $H/m$ ).

$r$  = radio de los conductores ( $m$ ).

$d$  = distancia entre conductores ( $m$ ).

Se define a la ecuación (2.22) como la inductancia geométrica de la línea; se observara más adelante que el Modelo de Bergeron solo considera este parámetro para el cálculo de la impedancia característica de la línea de transmisión, por lo que la inductancia de retorno por tierra y la inductancia interna del conductor no se calculan.

### 2.2.3 Cálculo de la Inductancia, considerando el Efecto del Suelo

La expresión (2.22) fue determinada en base a una línea de par abierto, es decir, una línea ideal; en la realidad tal expresión no es del todo válida, debido a que la inductancia de la línea se ve afectada por la distancia existente entre esta y el suelo.

Para considerar el cambio de la magnitud de la inductancia debida al efecto del suelo se recurre al método de las imágenes el cual representa el conductor de fase con una imagen de la misma, para entender mejor el concepto ver Figura 2.3.

Para el conductor con radio  $r_1$  se tiene la expresión (2.23) que representa la densidad de superficie de flujo magnético.

$$\psi_1 = \int_{r_1}^h \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr \quad (2.23)$$

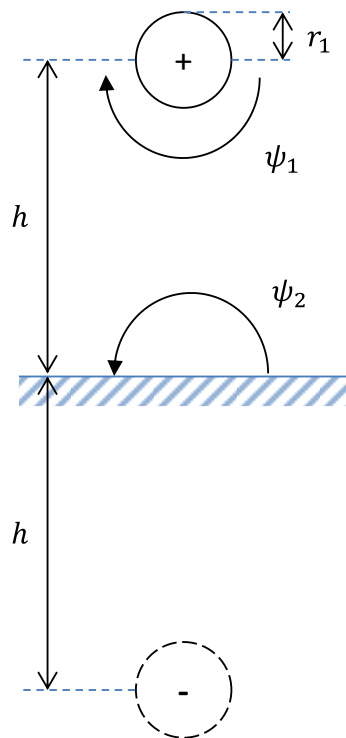
Siguiendo el mismo procedimiento que se utilizó para resolver la inductancia en la línea de par abierto, se tiene la siguiente expresión:

$$\psi_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \ln \frac{h}{r_1} \quad (2.24)$$

Ahora para el conductor imagen:

$$\psi_2 = \int_h^{2h-r_1} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr \quad (2.25)$$

$$\psi_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \ln \frac{2h-r_1}{h} \quad (2.26)$$



**Figura 2.3.** Densidad de superficie formada por efecto del suelo.

Donde:

$h$  = altura del conductor con respecto al suelo.

$r_1$  = radio del conductor 1.

$\psi_1$  = densidad de superficie del conductor 1.

$\psi_2$  = densidad de superficie debida al efecto del suelo.

Realizando la suma de la densidad de superficie los conductores y aplicando de forma similar las relaciones (2.17), (2.18) y (2.21) se tiene la ecuación que permitirá conocer la inductancia debida al efecto del suelo.

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{2h}{r}\right) \dots \left[\frac{H}{m}\right] \quad (2. 27)$$

Donde:

$L$  = inductancia de la línea debida al efecto del suelo.

$\mu_0$  = permeabilidad magnética en vacío.

$h$  = altura de la línea con respecto al suelo.

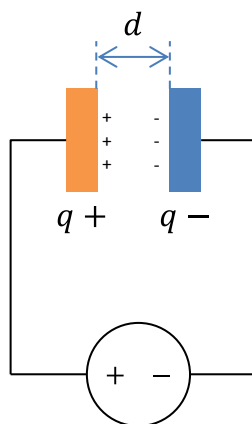
$r$  = radio del conductor.

## 2.3 Capacitancia

### 2.3.1 Definición

El capacitor es un elemento que se encuentra presente en variados dispositivos eléctricos y electrónicos, en cada área de estudio con diferentes propiedades pero en ambos casos su principio de funcionamiento es el mismo.

Un capacitor se compone de dos placas o conductores, los cuales al ser acoplados en un circuito, el gradiente de potencial existente entre los conductores hace que se presente una carga  $q$  en cada conductor, se dice entonces que el capacitor está cargado cuando esta carga es de igual magnitud en cada conductor y de signo contrario, ver Figura 2.4.

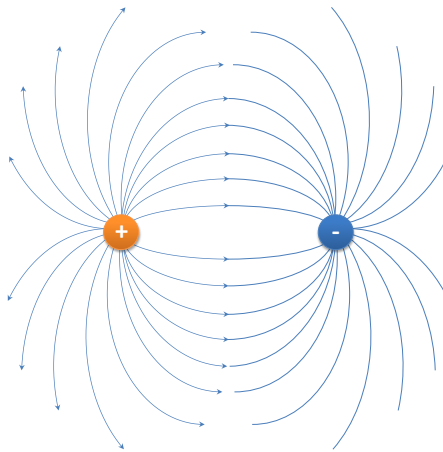


**Figura 2.4.** Placas de un capacitor separadas a una distancia  $d$  conectadas a una fuente de energía.

La capacitancia  $C$  se define como la relación de la magnitud de la carga en cualquiera de los conductores a la magnitud de la diferencia de potencial entre dichos conductores [6]:

$$C = \frac{q}{V_{ab}} \quad (2.28)$$

Se sabe que la inductancia está relacionada con el campo magnético y la capacitancia con el campo eléctrico pero a diferencia de la inductancia, las líneas de campo eléctrico se ven entrelazadas como se muestran en el dipolo eléctrico de la Figura 2.5.



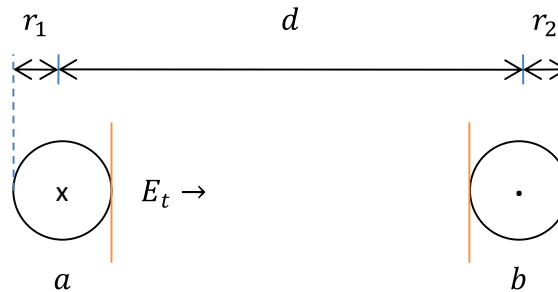
**Figura 2.5.** Dipolo formado por dos cargas eléctricas con signos opuestos.

### 2.3.2 Cálculo de la Capacitancia

La línea de transmisión al transportar energía con un conductor (carga  $+q$ ) de envío y otro de retorno (carga  $-q$ ), se produce en ella un efecto capacitivo bajo el mismo principio antes descrito.

De manera análoga a la inductancia, la capacitancia puede ser calculada con las líneas de fuerza asociadas al parámetro, en este caso las líneas de campo eléctrico. Se dice que existe un campo eléctrico en la región del espacio que rodea a un objeto con carga, la carga fuente ( $+q$ ), cuando otro objeto con carga, la carga de prueba ( $-q$ ), entra en este campo eléctrico, una fuerza eléctrica actúa sobre él. [6]

En la Figura 2.6 se encuentra la representación de la línea monofásica a par abierto y el campo eléctrico asociado.



**Figura 2.6.**  
Representación  
de línea de par  
abierto.

El campo eléctrico transversal para un conductor cilíndrico se define con la ecuación (2.29):

$$E_t = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (2.29)$$

Donde:

$E_t$  = campo eléctrico transversal.

$q$  = carga presente en el conductor.

$\epsilon_0$  = permitividad del medio en vacío =  $8.854 \times 10^{-12}$  (F/m).

$r$  = radio del conductor.

Como se menciona anteriormente, la capacitancia está asociada al campo eléctrico que se origina entre dos conductores a partir de una diferencia de potencial inducida, por lo que es necesario conocer el voltaje existente entre la superficie de los conductores ( $V_{ab}$ ), este se define por la expresión (2.30).

$$V_{ab} = - \int_b^a E_t dl \quad (2.30)$$

Sustituyendo (2.29) en (2.30) y cambiando los límites de integración:

$$V_{ab} = - \int_{d-r_2}^{r_1} \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r} dr \quad (2.31)$$

Resolviendo (2.31).

$$V_{ab} = - \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \int_{d-r_2}^{r_1} \frac{1}{r} dr \quad (2.32)$$

$$V_{ab} = - \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left[ \ln r \Big|_{d-r_2}^{r_1} \right] \quad (2.33)$$

$$V_{ab} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left[ \ln \left( \frac{d-r_2}{r_1} \right) \right] \quad (2.34)$$

El campo eléctrico afecta a ambos conductores por lo que es necesario ahora determinar  $V_{ba}$ , para ello se considera la relación:

$$V_{ab} = -V_{ba} \quad (2.35)$$

La igualdad (2.35) se deduce de la definición de capacitancia pues los conductores deben tener el mismo potencial y con signo contrario. Entonces de manera similar al cálculo anterior se tiene:

$$V_{ba} = \int_a^b E_t dl \quad (2.36)$$

Se observa que  $V_{ba}$  será igual a:

$$V_{ba} = \int_{r_2}^{d-r_1} \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r} dr \quad (2.37)$$

Resolviendo (2.37):

$$V_{ba} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln r \Big|_{r_2}^{d-r_1} \quad (2.38)$$

$$V_{ba} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left[ \ln \left( \frac{d-r_1}{r_2} \right) \right] \quad (2.39)$$

Se puede decir que el potencial total debido a las cargas en los conductores estará definido por (2.40).

$$V = V_{ab}^+ + V_{ba}^- \quad (2.40)$$

Por lo tanto:

$$V = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left[ \ln \left( \frac{d-r_2}{r_1} \right) \right] + \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left[ \ln \left( \frac{d-r_1}{r_2} \right) \right] \quad (2.41)$$

$$V = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[ \frac{(d-r_1)(d-r_2)}{(r_1)(r_2)} \right] \quad (2.42)$$

Considerando que los conductores son geoméricamente iguales y tiene el mismo radio y si la distancia entre conductor es mucho mayor que el radio de los conductores se deduce que:

$$r_1 = r_2 = r \quad (2.43)$$

$$\text{Si } d \gg r \therefore \text{para } (d-r_1) \approx d \text{ y } (d-r_2) \approx d \quad (2.44)$$

Aplicando las relaciones (2.43) y (2.44) en (2.42), se obtiene:

$$V = \frac{q}{\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{d}{r} \right) \quad (2.45)$$

Retomando la definición de capacitancia de (2.28) y sustituyendo (2.45).

$$C = \frac{q}{V} \quad (2.46)$$

$$C = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln\left(\frac{d}{r}\right)} \dots \left[\frac{F}{m}\right] \quad (2.47)$$

Donde:

$C$  = capacitancia de la línea monofásica ( $F/m$ ).

$\epsilon_0$  = permitividad del medio en vacío ( $F/m$ ).

$r$  = radio de los conductores ( $m$ ).

$d$  = distancia entre conductores ( $m$ ).

### 2.3.3 Cálculo de la Capacitancia, considerando el Efecto del Suelo

De forma análoga a la inductancia, la capacitancia se ve alterada por el efecto del suelo, para el cálculo de esta se retoman las expresiones (2.30) y (2.35) y al mismo tiempo los límites de (2.23) y (2.25) respectivamente, esto debido a que se continua tomando como referencia la Figura 2.3 pues el método de las imágenes para la capacitancia no cambia.

$$V_{ab} = - \int_h^{r_1} \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r} dr \quad (2.48)$$

$$V_{ba} = \int_h^{2h-r_1} \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r} dr \quad (2.49)$$

Resolviendo las dos ecuaciones anteriores, se tiene respectivamente:

$$V_{ab} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{h}{r_1} \quad (2.50)$$

$$V_{ba} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h-r_1}{h} \quad (2.51)$$

Llevando a cabo las relaciones descritas en (2.28), (2.40) y de forma análoga las consideraciones (2.43) y (2.44).

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2h}{r}} \dots \left[ \frac{F}{m} \right] \quad (2.52)$$

La ecuación (2.52) sirve para obtener la capacitancia tomando en cuenta el efecto del suelo.

## 3. ANÁLISIS DE LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

### 3.1 Factores que afectan la Transmisión de Energía

Hablar de un análisis sugiere el conocer de una manera más profunda las características y propiedades de un cuerpo u objeto, entonces para una línea de transmisión esto va más allá de la determinación de los parámetros antes descritos, es decir, es necesario conocer todos aquellos fenómenos que permitan realizar un diseño oportuno y eficiente de la línea y así asegurar una transmisión de energía sin interrupciones por fallas en sus elementos.

Algunos de los fenómenos que producen alteraciones en la LT son:

- Efecto corona
- Efecto aislador
- Efecto piel
- Efecto de proximidad
- Sobretensiones

#### 3.1.1 Efecto Corona

Como se describió anteriormente, la energía transportada en una línea de transmisión produce líneas de campo eléctrico debido a la diferencia de potencial entre sus conductores, ahora si el campo llega a crecer en gran medida este hará que los electrones del conductor y de las moléculas del aire que lo rodean se aceleren y como consecuencia uno de sus electrones se libere, este fenómeno provocara que la molécula que perdió un electrón se cargue eléctricamente, es decir se ioniza. La liberación de electrones y la ionización de las moléculas de aire producen el efecto corona [6].

El efecto corona produce un brillo en la LT que puede ser observado en la oscuridad o bien con una cámara ultravioleta durante el día; además de ser un fenómeno agradable a la vista este nos puede servir de indicativo para saber cuándo un aislador esta

fracturado o bien si un conductor presenta irregularidades geométricas ya que es usual que el efecto corona se presenta bajo estas condiciones.

El conocer el estado de las cadenas de aisladores es sin duda un aspecto de gran importancia para la correcta protección del SEP, pero en el análisis deseado el efecto corona es considerado como otra razón de pérdidas en la línea. El cálculo para determinar las pérdidas por este efecto se basa en las ecuaciones de Peek quien de forma experimental llegó a su deducción. Peek menciona que primero se debe determinar si en la línea se producirá efecto corona y en caso de ser afirmativo se prosigue a calcular las pérdidas.

Para la determinación de la existencia del efecto se definen tres tensiones:

- ⇒ Tensión crítica disruptiva: resistencia o tensión del aire que los electrones deben vencer para moverse en él.
- ⇒ Tensión crítica visual: resistencia o tensión del aire que los electrones deben vencer para que el efecto sea visible, esta no posee la misma importancia que las demás pues no es necesario que el efecto pueda ser observado para que tenga afectación la línea.
- ⇒ Tensión más elevada: es el pico de tensión que la línea puede alcanzar en condiciones normales de operación. Usualmente se puede obtener por tablas, aunque su valor suele ser entre 10 y 20 % superior a la nominal, es más frecuente que sea 15 % superior a la nominal [7].

El método de Peek propone cuatro pasos:

1. Calcular la tensión que puede aguantar el aire tanto en ambientes secos como húmedos (disruptiva).
2. Calcular la tensión más elevada.
3. Comparar las dos tensiones calculadas: si la tensión disruptiva es mayor que la más elevada, los electrones no tienen suficiente energía para moverse en el aire y no hay efecto. Por el contrario, de ser mayor la tensión más elevada el efecto corona existirá y por lo tanto es necesario calcular las pérdidas.
4. Por formulas empíricas, se calculan las pérdidas por efecto corona [7].

Entonces para el procediendo descrito se tiene:

### 1.- Tensión disruptiva ( $V_c$ )

$$V_c = 84 \cdot m_c \cdot m_t \cdot r \cdot \delta \cdot \log\left(\frac{D_e}{r_e}\right) \dots [KV] \quad (3. 1)$$

Donde:

- 84 = constante que define el paso de las tensiones de una valor máximo a uno eficaz.
- $m_c$  = coeficiente del conductor empleado, este varía según la edad del conductor así como de su geometría:
  - $m_c = 1$ , para conductores nuevos.
  - $m_c =$  de 0.93 a 0.98, para conductores viejos.
  - $m_c =$  de 0.83 a 0.87, para conductores agrupados (formados por hilos).
- $m_t$  = coeficiente medioambiental.
  - $m_t = 1$ , para aire seco.
  - $m_t = 0.8$ , para aire húmedo o contaminado.
- $r_e$  = radio del conductor en *cm*. Para el caso de conductores agrupados usar radio medio geométrico (RMG).
- $D_e$  = distancia media geométrica entre fases.
- $\delta$  = densidad relativa del aire, es adimensional y depende de las condiciones medioambientales y de la altura topográfica.

$$\delta = \frac{3.921h}{273 + \theta} \quad (3. 2)$$

Para esta fórmula  $\theta$  es la temperatura (°C) del ambiente y  $h$  es la presión atmosférica (*cmHg*), para determinar  $h$  se emplea la fórmula de Halley:

$$\log h = \log 76 - \frac{y}{18336} \quad (3. 3)$$

Donde  $y$  es la altura topográfica en metros del tramo de la línea a considerar.

## 2.- Tensión más elevada ( $V_{me}$ )

Para el cálculo de esta tensión la forma más sencilla y práctica es hacer la aproximación del 15 %.

$$V_{me} = 1.15 \times V_{Linea} \dots [KV] \quad (3.4)$$

## 3.- Comparación de $V_c$ y $V_{me}$

Si  $V_c > V_{me} \Rightarrow$  no hay efecto corona.

Si  $V_c < V_{me} \Rightarrow$  hay efecto corona.

4.- En caso de que se cumpla la segunda condición del paso anterior, se procede a calcular las pérdidas en  $KW$ .

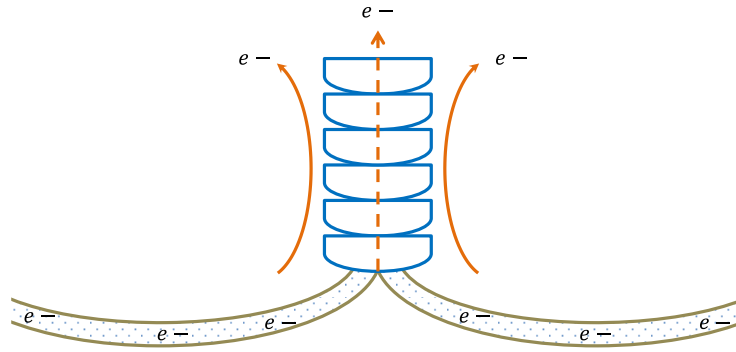
$$P_{fase-Km} = \frac{241}{\delta} (f + 25) \cdot \sqrt{\frac{r_e}{D_e}} \cdot \left[ \frac{V_{me}}{\sqrt{3}} - \frac{V_c}{\sqrt{3}} \right]^2 \cdot 10^{-5} \quad (3.5)$$

El efecto corona usualmente es tomado en cuenta cuando se desea un cálculo y análisis más exacto, sin embargo este se suele despreciar.

### 3.1.2 Efecto Aislador

Debido a que las líneas de transmisión son montadas en estructuras de metal es necesario que exista un asilamiento entre la línea y la torre, la razón principal es para que el metal no cause corto circuito entre las fases, para esto se utilizan cadenas de aisladores que pueden estar hechas de materiales altamente no conductores.

De manera similar al efecto corona, en el efecto aislador algunos de los electrones del material conductor son liberados pero en este caso el medio conductor de estos no es el aire si no la cadena de aislamiento y debido a su conexión con la torre, dichos electrones se irán a tierra lo que se traduce en pérdidas. En la Figura 3.1 se muestra el efecto aislador.



**Figura 3.1.**  
Representación  
de efecto aislador  
en un cable  
suspendido.

Las pérdidas causadas por este efecto siempre están presentes en una línea pues no existe un aislador perfecto. La magnitud de la presencia de este efecto se puede obtener a través de la conductancia [5]:

$$G = \frac{P_{fase}}{V_f^2} \times 10^{-3} \dots \left[ \frac{S}{Km} \right] \quad (3.6)$$

Donde:

$P_{fase}$  = potencia de fase en Watts.

$V_f$  = voltaje de fase en Volts.

Sin embargo, el interés no solo es saber si este fenómeno se presenta sino también cuantas pérdidas se le atribuyen, para ello se puede recurrir a valores estándar, basados en valores para un disco de la cadena de aisladores [5]:

- Pérdidas por efecto aislador de un disco en un ambiente de poca humedad: 3 a 5 W.
- Pérdidas por efecto aislador de un disco en un ambiente húmedo: 8 a 20 W.

Para determinar las pérdidas totales basta con multiplicar el número de discos en la cadena por las pérdidas estimadas, basándose en las condiciones ambientales.

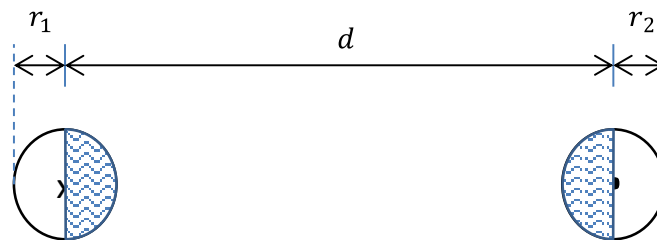
$$P_T = P_{Aislador} \times N_{Discos} \quad (3.7)$$

### 3.1.3 Efecto Piel (Pelicular)

El transporte de corriente es la causa de la inductancia en la línea así como la de otras pérdidas, pero el hecho de que la energía tenga una frecuencia trae consigo otras variaciones en la línea; se ha demostrado que cuando por un conductor circula corriente directa esta tiende a ocupar toda la sección transversal del mismo, sin embargo para AC es diferente pues las variaciones de frecuencia hacen que el flujo de corriente se aleje del centro de los conductores y se aproxime a la superficie, a este desplazamiento se le denomina efecto piel.

### 3.1.4 Efecto De Proximidad

Siguiendo el caso de la línea monofásica, la variación de corriente con respecto al tiempo crea en las superficies de los conductores una resta vectorial de densidad de flujo, ver Figura 3.2, originando una reducción en la inductancia en las superficies próximas de los conductores y en las diametralmente opuestas, dando por resultado una distribución no uniforme de la densidad de corriente y aumento aparente de la resistencia efectiva.



**Figura 3.2.**  
Ilustración  
del efecto de  
proximidad.

Ahora, como se mencionó en la sección 2.1.1, la resistencia de la línea es diferente en DC y AC esto debido a que el efecto piel y de proximidad la afectan sustancialmente, por lo cual la resistencia en AC está dada por [8]:

$$R_{AC} = R_{DC}(1 + Y_s + Y_p) \cdots \left[ \frac{\Omega}{Km} \right] \quad (3.8)$$

Donde:

$Y_s$  = factor debido al efecto piel.

$Y_p$  = factor debido al efecto de proximidad.

El factor  $Y_s$  del efecto piel se calcula por medio de (3.9).

$$Y_s = \frac{X_s^4}{192 + 0.8X_s^4} \quad (3.9)$$

Donde:

$$X_s^2 = \frac{8\pi f}{R'} \times 10^{-4} K_s.$$

$f$  = frecuencia del sistema (Hz).

$R'$  = resistencia del conductor corregida a la temperatura de operación en ( $\Omega/\text{Km}$ ).

$K_s = 1$  para conductores redondos y conductores redondos compactos.

$K_s = 0.435$  para conductor compacto segmental

Ahora para el factor  $Y_p$  del efecto de proximidad:

$$Y_p = \frac{X_p^4}{192 + 0.8X_p^4} \left(\frac{d_c}{s}\right)^2 \left[ 0.312 \left(\frac{d_c}{s}\right)^2 + \frac{1.18}{\frac{X_p^4}{192 + 0.8X_p^4} + 0.27} \right] \quad (3.10)$$

Donde:

$$X_p^2 = \frac{8\pi f}{R'} \times 10^{-4} K_p.$$

$d_c$  = diámetro del conductor en *cm*.

$s$  = distancia entre ejes de los conductores en *cm*.

$K_p = 1$ , para conductor redondo y conductor redondo compacto.

$K_p = 0.37$  para conductor compacto segmental.

### 3.2 Sobretensiones

Como se pudo notar, los fenómenos descritos hasta ahora tienen un efecto directo en la resistencia de la LT, por lo que se puede decir que el incremento de estos puede hacer que se vea reducida la tensión en el lado de recepción. Por otro lado la LT también puede tener una sobretensión, cuyo origen puede ser interno o ajeno al sistema.

### 3.2.1 Clasificación de Sobretensiones

*Sobretensión temporal*, es una tensión oscilatoria de larga duración que un periodo a la frecuencia del sistema, la cual no está amortiguada o tiene un débil amortiguamiento.

*Sobretensión transitoria*, es de corta duración de pocos milisegundos, la cual puede ser oscilatoria o no oscilatoria, usualmente altamente amortiguada. Puede estar sobrepuesta a una sobretensión temporal. Estas sobretensiones se clasifican en la forma siguiente:

- a) Sobretensión de frente lento (maniobra), usualmente unidireccional, con duración en el frente entre  $30 \mu s$  y  $3000 \mu s$ , y duración menor de un periodo de la frecuencia.
- b) Sobretensión de frente rápido (descarga atmosférica), con duración en el frente entre  $0.1 \mu s$  y  $30 \mu s$ , y duración de la cola hasta algunos cientos de microsegundos.
- c) Sobretensión de frente muy rápido, usualmente unidireccional, con duración en el frente menor que  $0.1 \mu s$  y duración de la cola hasta algunos miles de microsegundos. [9]

Además de la duración de una sobretensión transitoria también se encuentra que la frecuencia en la que estas se manifiestan no es de magnitud igual o similar a la de operación del sistema, en la Tabla 3.1 se encuentra un resumen de este parámetro.

**Tabla 3.1.** Frecuencias de sobretensiones.

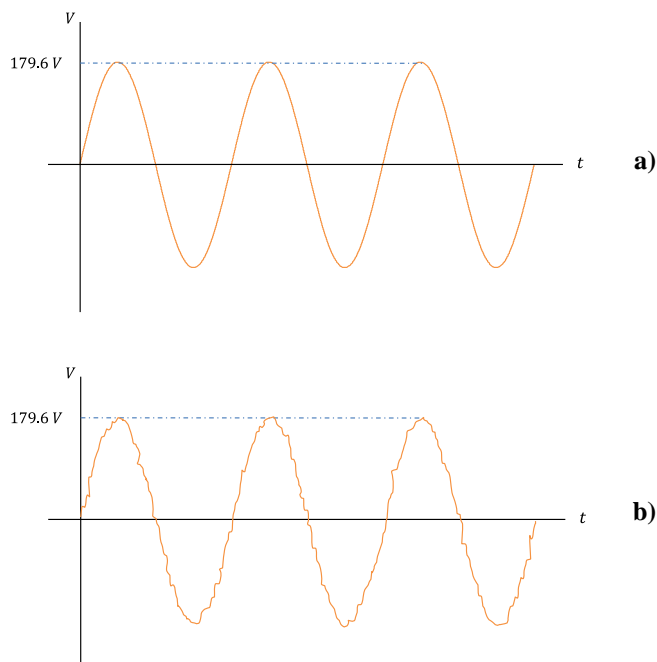
Tipo de Sobretensión	Rango de frecuencia	Características del fenómeno
Temporales	$0.1 \text{ Hz} - 3 \text{ KHz}$	Oscilación de baja frecuencia
Transitoria por maniobra	$50/60 \text{ Hz} - 20 \text{ KHz}$	Frente de onda lento

**Tabla 3.1.** Frecuencias de sobretensiones (continuación).

<b>Tipo de Sobretensión</b>	<b>Rango de frecuencia</b>	<b>Características del fenómeno</b>
Transitoria por descarga atmosférica.	10 KHz – 3MHz	Fuente de onda rápido
Transitoria por reencendido y fallas en subestaciones aisladas en gas $SF_6$ .	100 KHz – 50 MHz	Frente de onda muy rápido

### 3.3 Análisis en la Frecuencia y en el Tiempo

Si se quiere visualizar la forma de onda de la tensión que llega en los hogares basta configurar un osciloscopio con las indicaciones adecuadas, y conectar sus terminales a las de un contacto, es probable que el resultado del oscilograma captado sea parecido al de la Figura 3.3 a), sin embargo realmente toda la señal se encuentra distorsionada a lo largo de su onda y es que basta con encender y apagar alumbrado conectado a la red, para que se perciba un cambio en la forma de onda, por lo que entonces en realidad se vería algo semejante a lo mostrado en la Figura 3.3 b).



**Figura 3.3.** a) Forma de onda ideal en una red para voltaje. b) Representación de onda senoidal de voltaje con distorsión.

Estas graficas representan en sus ejes vertical y horizontal el voltaje y tiempo respectivamente, por lo que se dice que se encuentra en el dominio del tiempo. Análogamente, el dominio de la frecuencia para el mismo caso sería graficar la amplitud de la tensión y en lugar del tiempo colocar la frecuencia, la diferencia entre un dominio y otro es que en el dominio del tiempo no siempre es posible captar las variaciones en la amplitud, por otro lado el dominio de la frecuencia nos permitirá notar esos cambios de amplitud pues ellos tendrán una frecuencia diferente a la de una condición normal de operación del sistema, de ahí la importancia que tendrá en el análisis de sobretensiones transitorias el empleo de un dominio u otro.

### 3.3.1 Dominio de la Frecuencia

Como se sabe la frecuencia se define como el número de ciclos por segundos, es decir:

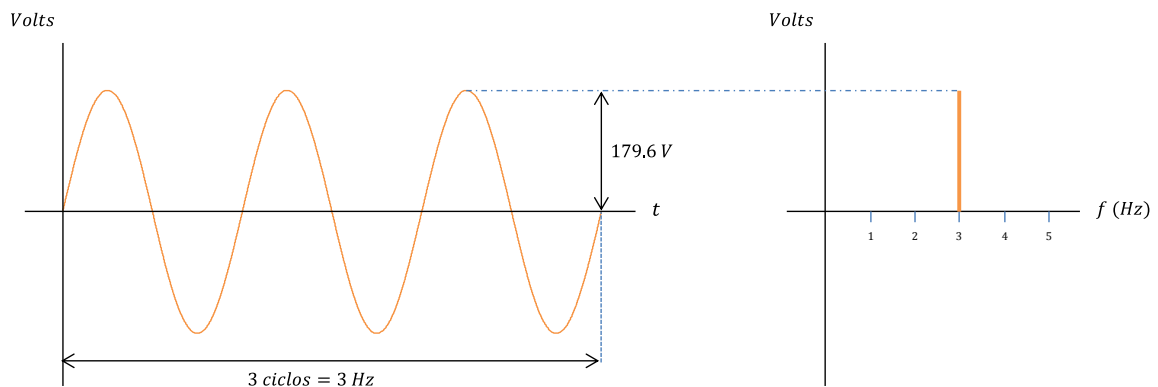
$$1 \text{ Hz} = \frac{1 \text{ ciclo}}{\text{seg}} \quad (3. 11)$$

Debido a que los transitorios no tienen una frecuencia propia, resulta útil conocer cómo es que varía la tensión a través de toda esta. En la Figura 3.4 se encuentra la representación de una onda senoidal en el dominio del tiempo al dominio de la frecuencia, en este caso el valor de la amplitud permanece constante durante los tres primeros ciclos por lo que la gráfica en el dominio de la frecuencia indica el mismo valor de la amplitud que en el tiempo.

En el instante en que la tensión sufra una variación, en este dominio, se puede visualizar con facilidad a los cuantos ciclos fue inducido el cambio. Adicionalmente, en la resolución de circuitos es muy útil utilizar valores de corriente y tensión en forma fasorial (dominio de la frecuencia) donde sólo se considera una magnitud y un ángulo de fase olvidándonos el tiempo al que pertenece dicha tensión o corriente.

La resistencia de un conductor no es tomada en cuenta cuando se resuelven circuitos cuya longitud es de algunos centímetros, pues si se hiciera esta sería de un valor tan pequeño que prácticamente es despreciable, en cambio al hablar de la LT la resistencia ya adquiere importancia dado que las distancias que cubre es de varios kilómetros, algo parecido sucede con el empleo del dominio de la frecuencia para el análisis de una LT,

la analogía surge de la velocidad de propagación de la energía pues para un circuito de “pequeña” longitud se puede considerar que ante el cierre de un interruptor el tiempo que tardara la energía en llegar desde la fuente a cualquier parte del circuito será de apenas unos nanosegundos por lo que en realidad este tiempo no es tomado en cuenta, por otra parte en una LT la distancia que debe recorrer la energía para llegar desde la fuente hasta la carga ya no se puede tomar como cero pues se estaría errando la solución.



**Figura 3.4.** Comparación de gráficos en el dominio del tiempo y dominio de la frecuencia.

### 3.3.1 Dominio del Tiempo

Un análisis bajo esta denominación se puede considerar como un estudio donde es importante determinar el comportamiento de una o más variables en un lapso de tiempo, por ejemplo cuando se habla de un objeto en caída libre es importante conocer la distancia recorrida así como la velocidad que este adquiere en distintos instantes de tiempo, por lo que se dice que este es un fenómeno es analizado en el tiempo.

El estudio del comportamiento de las sobretensiones temporales se puede realizar en el dominio del tiempo pues, como se mencionó anteriormente, la energía no viaja instantáneamente de un punto a otro, análogamente a un cuerpo en caída libre una sobretensión transitoria en una línea de transmisión no sólo están en función del tiempo sino también de la distancia que recorren, por lo que las ecuaciones que definan el comportamiento de la tensión y de la corriente deberán estar en función del tiempo y de

la distancia, es decir, se convierten en ecuaciones diferenciales parciales por depender de dos variables independientes.

### **3.4 Parámetros Concentrados y Parámetros Distribuidos**

Cuando se desea determinar las variables o parámetros de un circuito o sistema es importante delimitar el alcance o profundidad de estudio; como se describió en temas anteriores, en ocasiones es importante tomar en cuenta la longitud de un circuito pues por ejemplo, en función de esta distancia la resistencia de los conductores toma valores importantes o el tiempo que tarda en llegar la energía de un punto a otro ya no se considera cero.

Siguiendo en mente la importancia que tiene la longitud de un circuito, ahora surge la pregunta, ¿cuándo se debe y cuándo no tomar en cuenta este factor?

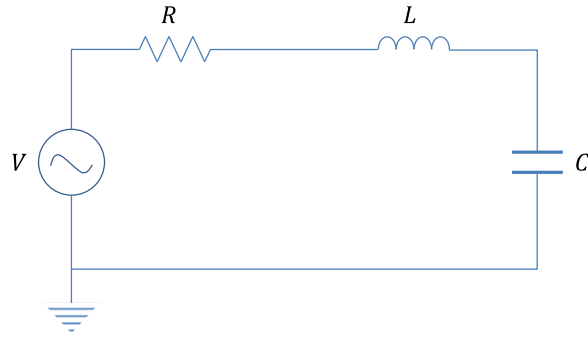
Si bien, puede resultar sencillo decir que para un circuito de apenas unos centímetros no es importante la longitud de este, y que para una línea de transmisión de varios kilómetros si lo es, sería una observación errónea. Para evitar este tipo de decisiones se recurre a las definiciones de parámetros concentrados y parámetros distribuidos.

#### **3.4.1 Parámetros Concentrados**

Este concepto es simple, pues básicamente es considerar a un circuito o sistema eléctrico con resistencia, inductancia y capacitancia ubicados como un solo parámetro en un lugar en específico del circuito. Ver Figura 3.5.

Las principales características de parámetros concentrados son:

- No importa la distancia entre un elemento y otro.
- No interesa el tiempo en que se desplaza la energía de un punto a otro.
- El modelado de los elementos se realiza por medio de ecuaciones diferenciales ordinarias.



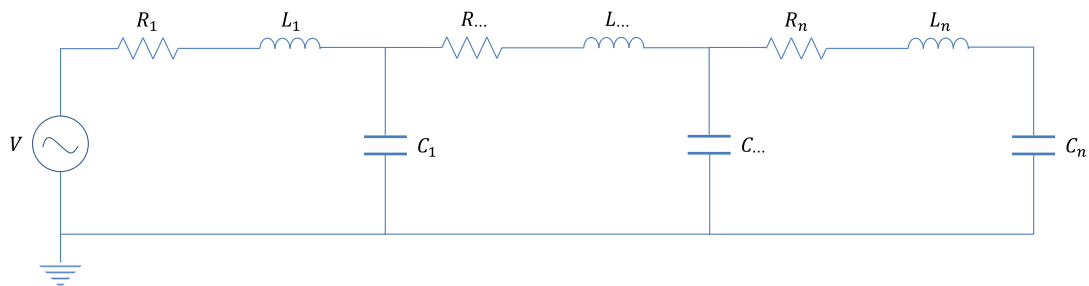
**Figura 3.5.** Circuito con parámetros concentrados.

### 3.4.2 Parámetros Distribuidos

Para entender mejor la visualización de parámetros concentrados, se define la parte contraria, los parámetros distribuidos. En este caso se considera que el circuito se estudiara de manera que tanto como la resistencia, inductancia y capacitancia se encuentran distribuidos a lo largo de la línea, es decir se encontraran presentes al mismo tiempo a lo largo de toda la longitud y no solo en una parte específica. En la Figura 3.6, se aprecia una imagen que representa la distribución de los parámetros.

Las principales características de parámetros concentrados son:

- Importa la distancia entre un elemento y otro.
- Interesa el tiempo en que se desplaza la energía de un punto a otro.
- El modelado de los elementos se realiza por medio de ecuaciones diferenciales parciales.



**Figura 3.6.** Circuito representativo con parámetros distribuidos.

Se observa que la respuesta a la cuestión de saber cuándo es necesario tomar en cuenta la longitud de un circuito o LT, está en la elección de trabajar con parámetros concentrados o distribuidos, y bien esta elección se debe basar en el resultado que se obtenga de las relaciones (3.12) y (3.13).

$$\lambda \gg L \quad (3.12)$$

$$\lambda \ll L \quad (3.13)$$

Donde:

$\lambda$  = distancia que recorre una onda electromagnética por periodo.

$L$  = longitud del circuito a resolver.

La distancia recorrida por onda electromagnética es determinada por la ecuación (3.14)

$$\lambda = \frac{vel}{f} \quad (3.14)$$

Donde:

$vel$  = velocidad a la cual viaja la energía.

$f$  = frecuencia del sistema.

Si al resolver la ecuación (3.14) se cumple la relación (3.12) entonces se empleara el análisis de parámetros concentrados y de cumplirse la relación (3.13) debe considerarse el análisis de parámetros distribuidos.

Hasta este punto se conoce de manera general la teoría de los siguientes temas:

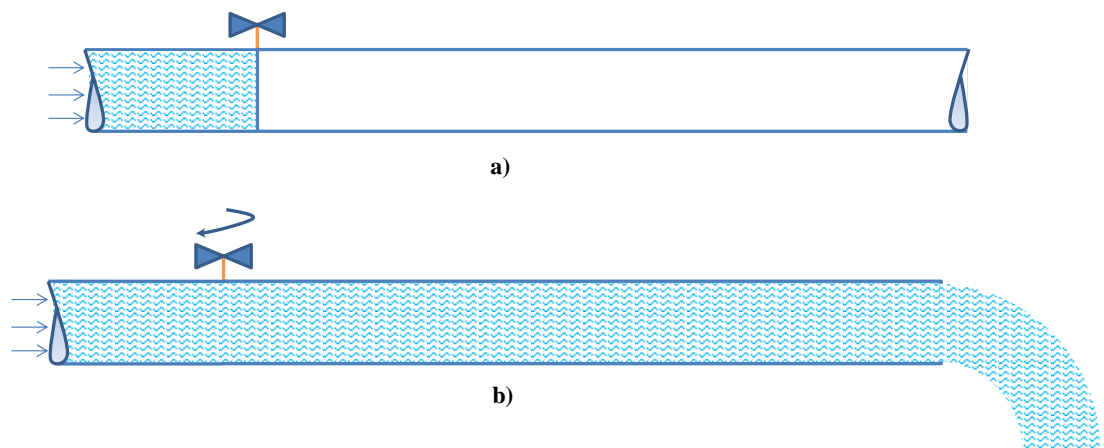
- Sobretensiones transitorias
- Dominio de la frecuencia
- Dominio del tiempo
- Parámetros concentrados
- Parámetros distribuidos

Para propósitos de esta tesis se toman las sobretensiones transitorias como tema central y el resto como secundarios para la comprensión de la solución de problemas relacionados.

Las sobretensiones transitorias en su mayor parte son originados por la maniobra de cierre de interruptores, para entender mejor como surge este fenómeno, se recurre a la analogía de una llave de paso de agua la cual se encuentra conectada a la red de suministro local y que da paso al fluido para recorrer cierta distancia.

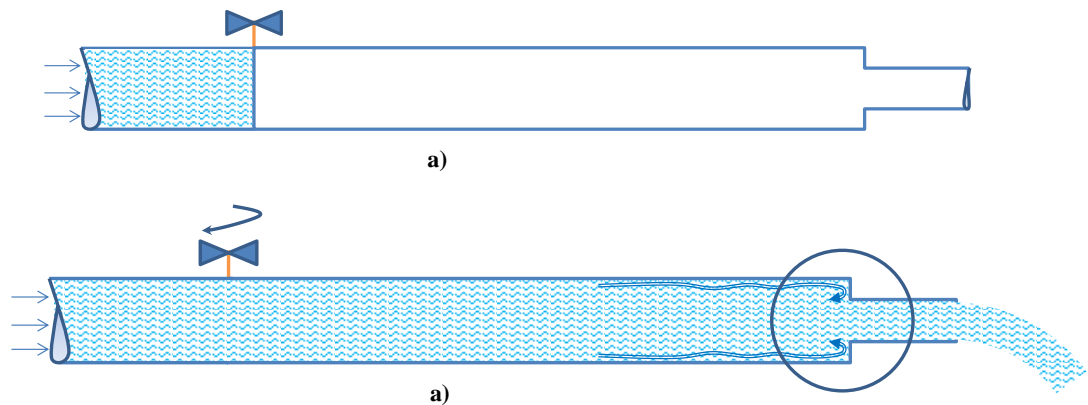
Ahora se describen dos casos hipotéticos:

- a) El diámetro de la tubería es constante en toda la longitud; en un determinado momento la llave es abierta y deja circular el agua. Ver Figura 3.7 a) y 3.7 b)



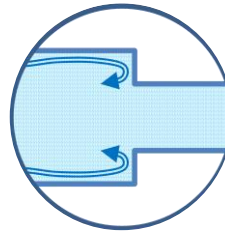
**Figura 3.7.** a) Tubería con llave de paso cerrada, b) Tubería con llave abierta.

- b) El diámetro de la tubería es modificado al final de esta, por lo que ahora a la salida el diámetro es menor que el resto; en un determinado momento la llave es abierta y deja circular el agua. Ver Figura 3.8 a) y 3.8 b).



**Figura 3.8.** a) Tubería con llave de paso cerrada, b) Tubería con llave abierta.

Con el cambio de diámetro se genera una obstrucción que impide que el agua fluya con la misma velocidad y presión que cuando es igual al resto de la tubería. Realizando una ampliación de la Figura 3.8 b) en la sección donde fue cambiado el diámetro, se observaría algo parecido a lo mostrado en la Figura 3.9, donde el agua que circula en las paredes del tubo tiende a formar una especie de remolineo en esa zona.



**Figura 3.9.** Ampliación de la Figura 3.8 b), donde se aprecia como el agua tiende a generar turbulencias en la sección de cambio de diámetro.

El proceso descrito en la parte de arriba es casi en su totalidad análogo con lo que ocurre en una LT cuando se realiza la maniobra de cierre de interruptores, destacando principalmente:

1. La reducción del diámetro de la tubería, eléctricamente se puede visualizar como el cambio de impedancia al final de la línea.
2. A diferencia del agua, la electricidad al encontrar una “obstrucción” esta no solo rebotara en la sección del cambio de impedancia sino que regresa su fuente de origen.
3. En el estudio de la transmisión de la energía la forma en que esta recorre la línea se conceptualiza como onda viajera y los rebotes debidos al cambio de impedancia como la reflexión de dicha onda.

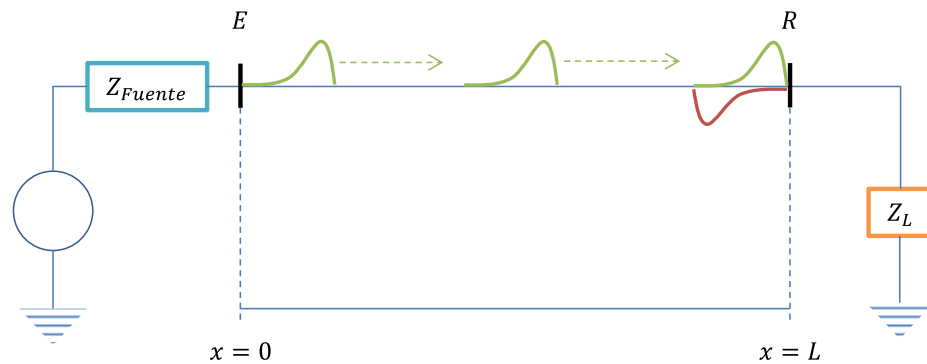
Encontrar el comportamiento y los valores de la tensión y voltaje bajo un estado transitorio, puede ser una tarea difícil, sin embargo existen métodos gráficos que pueden arrojar resultados si bien, no exactos, si una aproximación que da una idea de lo que ocurre en este fenómeno, algunos métodos gráficos en el dominio del tiempo son:

- Diagrama de Lattice
- Método de las Características
- Método/Modelo de Bergeron

## 3.5 Análisis de Sobretensiones Transitorias

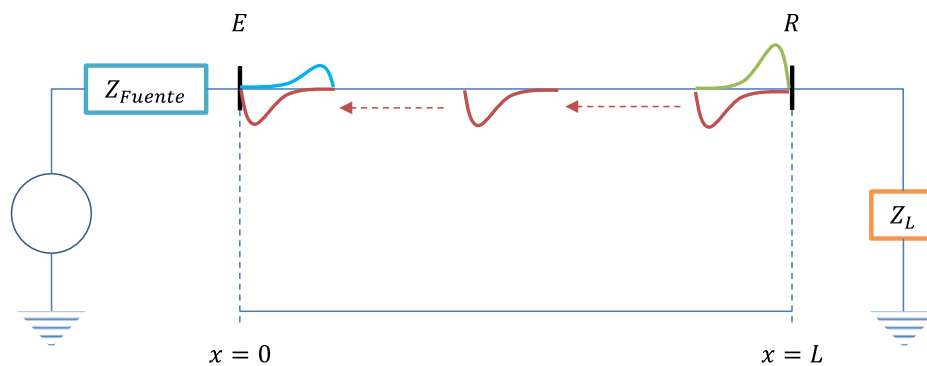
### 3.5.1 Diagrama de Lattice

El diagrama de Lattice fue introducido por Bewley L.V. y es de gran ayuda mientras se realizan cálculos con ondas viajeras [10]. Para comprender la relación de este método con la onda viajera Ver la Figura 3.10 donde ilustra un circuito simple, semejante a la analogía de la tubería.



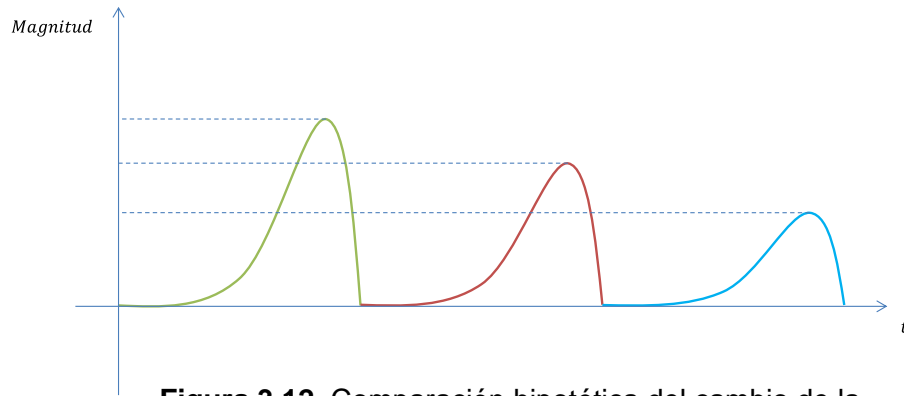
**Figura 3.10.** Circuito representativo para comprender el diagrama de Lattice, basado en ondas viajeras.

Las ondas de color verde y rojo de la Figura 3.10 representan la propagación de la energía a lo largo de línea, ahora bien, la primera onda que viaja en la línea es la de color verde, la roja representa la reflexión o “rebote” de la energía cuando la anterior llega a la impedancia de la carga, en la Figura 3.11 se ilustra que la onda roja al regresar a su fuente esta también tendrá una reflexión debida a la impedancia de la fuente y ahora la onda que regresara a la carga será a la de color azul.



**Figura 3.11.** Representación del “rebote” de una onda viajera, con respecto a la Figura 3.10.

Si se comparan las Figuras 3.10 y 3.11 se notaría notar que las ondas no son iguales entre si pues la magnitud de estas cambia conforme a cada reflexión. En la Figura 3.12 se encuentra un ejemplo de cómo podría ser el cambio de magnitud conforme al tiempo.



**Figura 3.12.** Comparación hipotética del cambio de la magnitud de la energía conforme a cada reflexión de la onda viajera.

La solución que se obtiene a través del diagrama de Lattice precisamente se basa en el cambio de magnitud de la energía teniendo resultados para la tensión y la corriente. Ahora se describirá como se determinan las ecuaciones utilizadas en este método.

### Para el Voltaje

Se sitúa en la Figura 3.10, específicamente en la parte de envío y en la de recepción, en estos puntos se encuentra la impedancia característica de la línea y la impedancia de la carga respectivamente. Entonces para la primera onda en el lado de recepción se dice que la tensión total será igual a la suma del voltaje que llega más su reflexión.

$$v_R = v_R^+ + v_R^- \quad (3.15)$$

De forma similar, la corriente en el lado de recepción la corriente puede ser calculada por:

$$i_R = i_R^+ + i_R^- \quad (3.16)$$

$$i_R = \frac{v_R^+ - v_R^-}{Z_c} \quad (3.17)$$

Entonces la impedancia de la carga queda determinada por:

$$Z_L = \frac{v_R}{i_R} \quad (3.17)$$

$$Z_L = \frac{v_R^+ + v_R^-}{i_R^+ + i_R^-} \quad (3.18)$$

A su vez se puede encontrar a  $Z_L$  en función de  $Z_c$ .

$$Z_L = Z_c \frac{v_R^+ + v_R^-}{v_R^+ - v_R^-} \quad (3.19)$$

La impedancia característica se define con (3.21) para una línea sin pérdidas.

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (3.20)$$

Donde:

$L$  = inductancia de la línea.

$C$  = capacitancia de la línea.

Despejando y reagrupando de (3.19):

$$Z_L(v_R^+ - v_R^-) = Z_c(v_R^+ + v_R^-) \quad (3.21)$$

$$Z_L v_R^+ - Z_L v_R^- = Z_c v_R^+ + Z_c v_R^- \quad (3.22)$$

$$v_R^+(Z_L - Z_c) = v_R^-(Z_L + Z_c) \quad (3.23)$$

La forma en que varía el voltaje tras cada reflexión, está dado por el coeficiente de reflexión, que se obtiene de (3.24).

$$\Gamma_v = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} \quad (3.24)$$

Por lo tanto:

$$v_R^- = \Gamma_v v_R^+ \quad (3.25)$$

La ecuación (3.25) define la tensión de reflexión.

A través de (3.24) se pueden definir las relaciones indicadas en la Tabla 3.2.

**Tabla 3.2** Valores de coeficiente de reflexión.

Condición	Consideración	$\Gamma_v$	Valor de Coeficiente
Línea abierta	$Z_L = \infty$	$\frac{\infty - Z_c}{\infty + Z_c}$	1
Línea en corto	$Z_L = 0$	$\frac{0 - Z_c}{0 + Z_c}$	-1
Sin cambio de impedancia	$Z_L = Z_c$	$\frac{Z_c - Z_c}{Z_c + Z_c}$	0

### Para la Corriente

Retomando la expresión (3.18) y despejando, se tiene:

$$Z_L(i_R^+ + i_R^-) = v_R^+ + v_R^- \quad (3.26)$$

Al igual que en (3.23) es necesario que (3.26) se encuentre en función de  $Z_c$ , por lo que  $i_R$  será:

$$i_R = \frac{v_R^+ - v_R^-}{Z_c} \quad (3.27)$$

Entonces:

$$v_R^+ = Z_c i_R^+ \quad (3.28)$$

$$v_R^- = -Z_c i_R^- \quad (3.29)$$

Sustituyendo (3.28) y (3.29) en (3.26) y reordenando:

$$Z_L(i_R^+ + i_R^-) = Z_c(i_R^+ - i_R^-) \quad (3.30)$$

$$i_R^+(Z_c - Z_L) = i_R^-(Z_c + Z_L) \quad (3.31)$$

Similarmente a la tensión, se encuentra el coeficiente de reflexión para la corriente:

$$\Gamma_i = \frac{Z_c - Z_L}{Z_c + Z_L} \quad (3.32)$$

$$i_R^- = \Gamma_i i_R^+ \quad (3.33)$$

Para comprender mejor el concepto que se maneja en el diagrama de Lattice, se desarrollara un ejemplo ilustrativo.

### Ejemplo 3.1

Una fuente de cd de 127 V con una resistencia despreciable se conecta a través de un interruptor  $S$  a una línea de transmisión sin pérdidas que tiene una impedancia característica  $Z_c = 30 \Omega$ , ver Figura 3.13. La línea de transmisión termina en una carga de  $90 \Omega$ . Por medio del diagrama de Lattice encontrar el voltaje y la corriente en  $8\tau$ . [11]

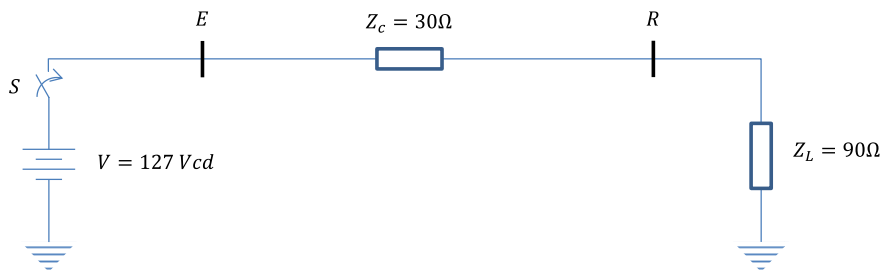


Figura 3.13. Circuito para ejemplo 3.1.

El primer paso para ilustrar el diagrama de Lattice es determinar los coeficientes de reflexión en cada parte de la línea, es decir en el lado de envío y en el de recepción.

#### Para el Lado de Envío

La ecuación (3.25) es aplicable tomando en cuenta que la impedancia de la carga es representada por la resistencia de la fuente, sin embargo el ejemplo indica que esta es despreciable, por lo que para el caso de la tensión:

$$\Gamma_{v-E} = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} = \frac{0 - 30}{0 + 30} = -1$$

Para el coeficiente de reflexión de la corriente se tiene de la ecuación (3.33).

$$\Gamma_{i-E} = \frac{Z_c - Z_L}{Z_c + Z_L} = \frac{30 - 0}{30 + 0} = 1$$

### Para el Lado de Recepción

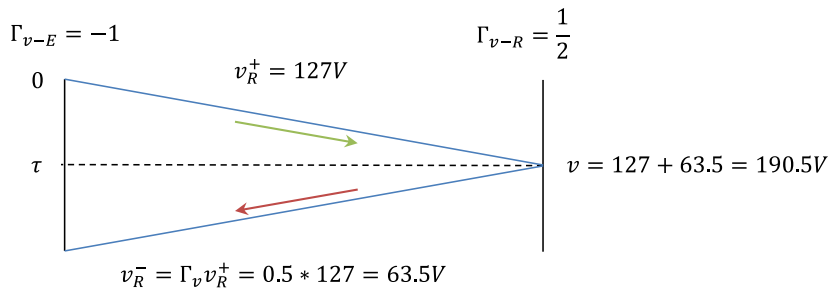
El coeficiente de reflexión al igual que en el caso anterior se determina por (3.24) pero en este caso se respeta la nomenclatura de los términos, tal como lo indica la ecuación.

$$\Gamma_{v-R} = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} = \frac{90 - 30}{90 + 30} = \frac{1}{2}$$

De forma similar para la corriente.

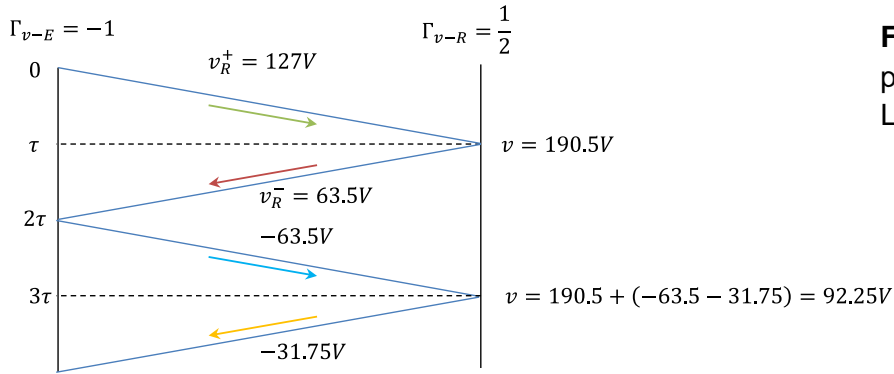
$$\Gamma_{i-E} = \frac{Z_c - Z_L}{Z_c + Z_L} = \frac{30 - 90}{30 + 90} = -\frac{1}{2}$$

El diagrama se realiza como se ve en la Figura 3.14, se ve que la parte izquierda representa el lado de envío y la parte derecha el lado de recepción con sus respectivos coeficientes de reflexión. La primera onda de voltaje tendrá el valor de la fuente, cuando esta llegue al otro extremo se verá reflejada con el coeficiente de reflexión de 0.5. El valor del voltaje para un instante de tiempo  $\tau$  obtiene sumando la tensión de la primera onda y la de la onda reflejada.



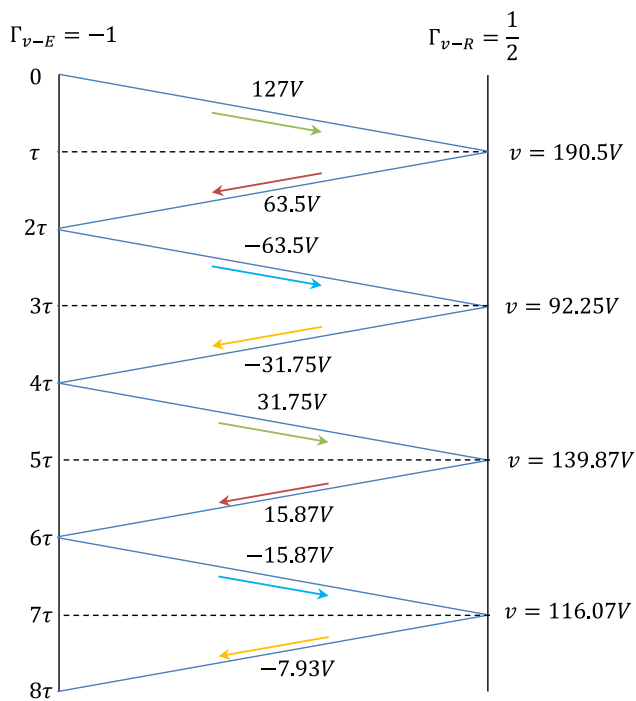
**Figura 3.14.** Primera parte del diagrama de Lattice.

El proceso para continuar con el diagrama es igual a lo descrito anteriormente, solo que ahora los 63.5V se verán reflejados por el coeficiente de  $-1$  para después ser reflejado por el coeficiente de 0.5. El voltaje para  $3\tau$  se obtiene sumando la tensión en  $\tau$  más los dos nuevos valores obtenidos. Ver Figura 3.15.



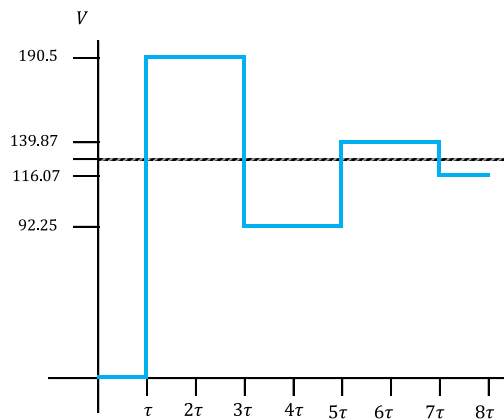
**Figura 3.15.** Segunda parte del diagrama de Lattice.

Al continuar con la solución, se obtiene algo semejante a lo de la Figura 3.16.



**Figura 3.16.** Diagrama de Lattice para ocho instantes de tiempo  $\tau$ .

Obtenido el diagrama, ahora se procede a graficar los valores. Ver Figura 3.17.

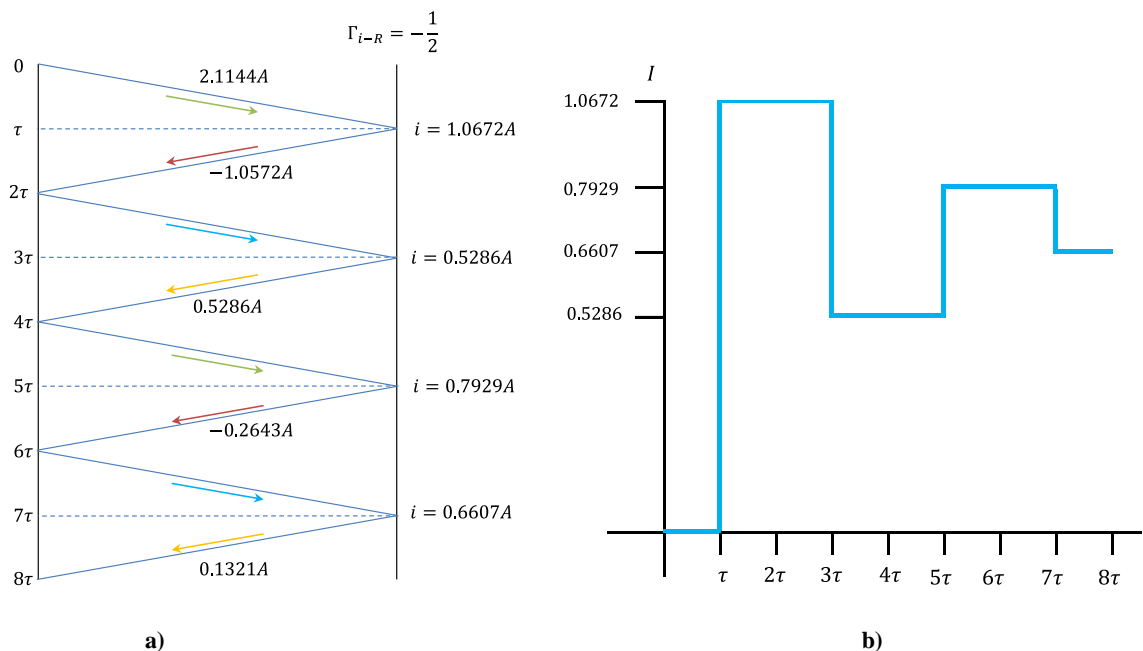


**Figura 3.17.** Gráfico de voltaje obtenido del diagrama de Lattice.

En el caso de la corriente, primero se debe calcular el primer valor de corriente y esto es de acuerdo a la ley de Ohm, sin embargo el voltaje que se utiliza no son los 127 V sino que será la tensión resultante de la primera reflexión y la impedancia de la carga, entonces:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{190.3}{90} = 2.1144 \text{ Amp}$$

De forma similar al voltaje se encuentra para la corriente el diagrama de Lattice representativo, así como la gráfica que muestra el comportamiento de la corriente en ocho instantes de tiempo  $\tau$ . Ver Figura 3.18.



**Figura 3.18.** a) Diagrama de Lattice para la corriente del ejemplo 3.1, b) Gráfica de la corriente durante ocho tiempos, basada en el diagrama de Lattice.

### 3.5.2 Método de las Características

Método atribuido a Brinan, es otra forma gráfica para determinar el comportamiento de los fenómenos transitorios electromagnéticos en una línea de transmisión, se basa en la transformación de ecuaciones diferenciales parciales de la línea de transmisión, a ecuaciones diferenciales ordinarias. [2]

Este método consiste el trazo de curvas, parecidas a las del diagrama de Lattice, donde se determinan los voltajes y corrientes durante el fenómeno transitorio en función del tiempo y de la impedancia, tanto de la carga como la característica de la línea. Ver Figura 3.19, donde:

$L$  = inductancia de la línea.

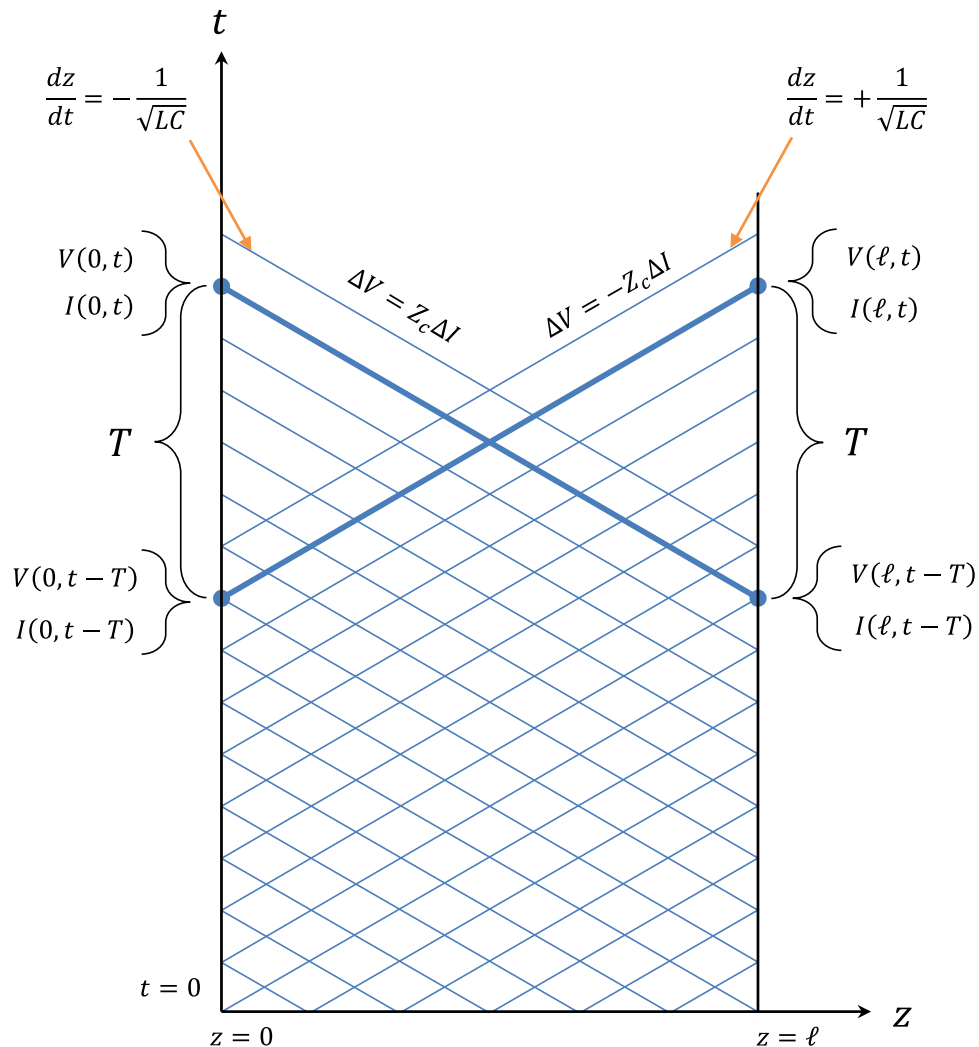
$C$  = capacitancia de la línea.

$Z_c$  = impedancia característica de la línea.

$1/\sqrt{LC} = v$  = velocidad de fase.

$\ell$  = impedancia de la carga.

$T = \ell/v$  = one – way delay (tiempo de viaje de la energía).



**Figura 3.19.** Plano de impedancia y tiempo ( $z, t$ ) donde se representan las curvas del método de las características.

Con este método se obtienen gráficos del comportamiento de la tensión y corriente durante un fenómeno transitorio, sin embargo, la determinación de estos no resulta sencillo pues para ello se requiere métodos numéricos los cuales de ser resueltos analíticamente constaría de mucho tiempo, para ello existen programas de cómputo que pueden resolver este tipo de problemas basándose en el método de las características, tal es el caso del software SPICE.

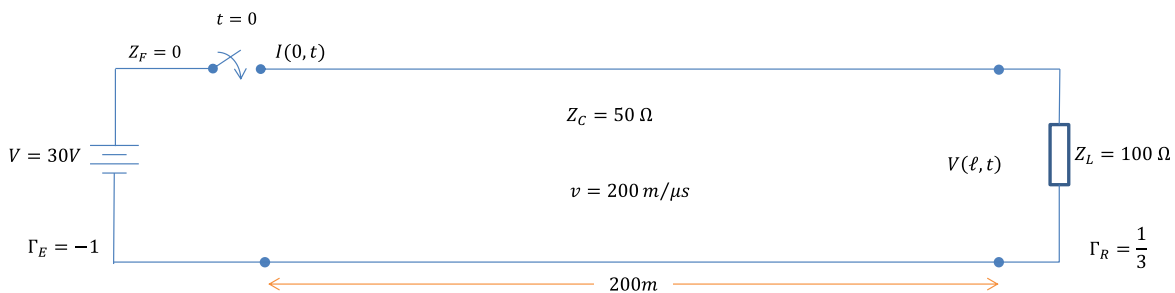
A continuación se muestra la solución arrojada por SPICE, para un caso de un evento transitorio, producido por el cierre de un interruptor.

### Ejemplo 3.2

Como un ejemplo del uso del modelo de línea monofásica sin pérdidas en el dominio del tiempo de SPICE, considera el análisis de la línea mostrada en la Figura 3.20. Donde la fuente incrementa su voltaje de  $0\text{ V}$  a  $30\text{ V}$  en  $0.1\ \mu\text{s}$ , el análisis se realiza en un intervalo de tiempo de  $20\ \mu\text{s}$ . El programa en SPICE es [2]:

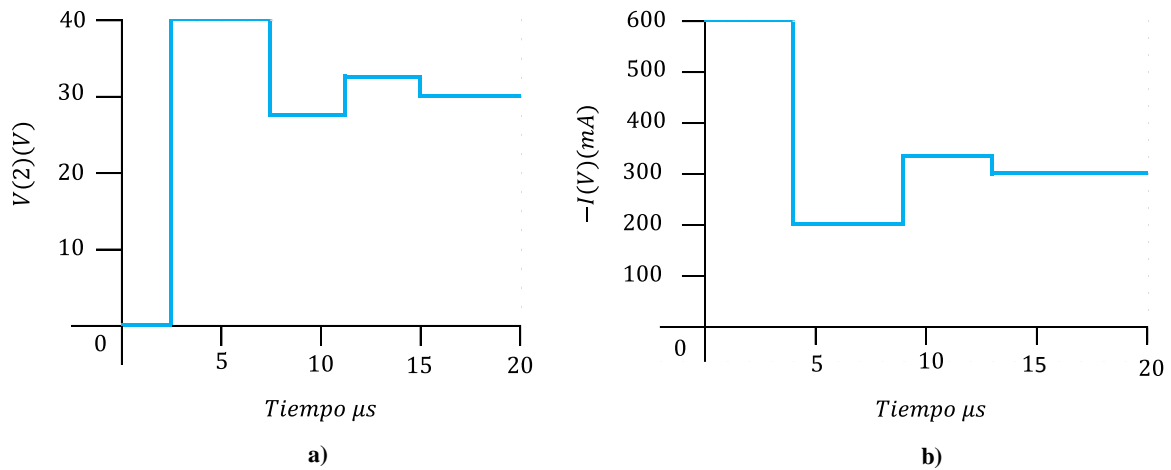
FIGURE 3.20

```
VS 1 0 PWL( 0 0 .1U 30 20U 30)
T 1 0 2 0 ZO = 50 TD = 2U
RL 2 0 100
.TRAN .1U 20U
.PRINT TRAN V(2) I(VS)
.PLOT TRAN V(2) I(VS)
.END
```



**Figura 3.20.** Circuito utilizado por SPICE para un análisis en el dominio del tiempo.

En las Figuras 3.21 a) y 3.21 b), se encuentran los gráficos obtenidos a través de del programa de SPICE [2].



**Figura 3.21.** a) Grafica que representa la variación del voltaje con respecto al tiempo del ejemplo 3.2, b) Grafica que muestra la variación de la corriente con respecto al tiempo del ejemplo 3.2.

El ejemplo mostrado en esta tesis sobre el Método de las Características es un resumen general de todo el desarrollo que implica, pues su estudio requiere de un análisis mucho más profundo.

## 4. MODELO DE BERGERON

### 4.1 Introducción

Modelo en el dominio del tiempo originalmente desarrollado por el analista de sistemas hidráulicos L. Bergeron en 1949 el cual ha sido adaptado a las líneas de transmisión, al igual que los métodos descritos en el capítulo anterior, Bergeron ha sido utilizado para encontrar solución a los transitorios electromagnéticos en líneas de transmisión, es un modelo de forma gráfica y fue de los primeros métodos numéricos que se implementaron en programas de simulación del tipo EMTP. [2]

Debido a que este modelo se basa en soluciones en el tiempo, es necesario describir las ecuaciones que rigen el comportamiento de la línea de transmisión bajo este dominio.

### 4.2 Ecuaciones del Telegrafista

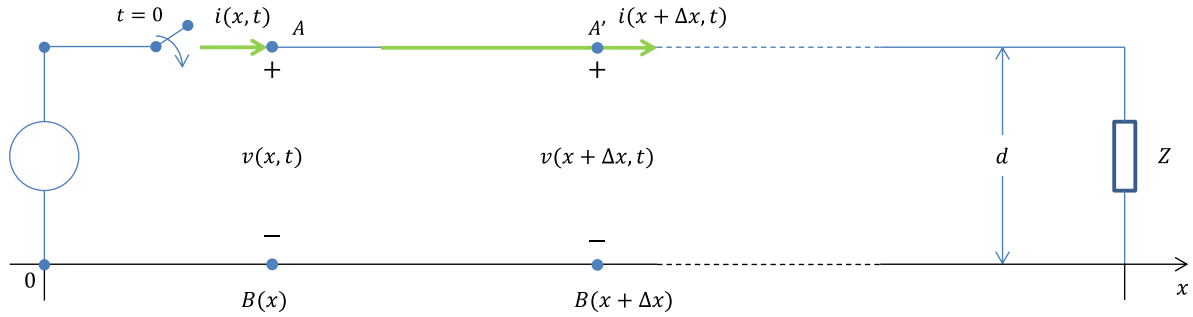
Se trata de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales respecto a la distancia  $x$  y tiempo  $t$ , que relacionan a la corriente  $i(x, t)$  con la tensión eléctrica  $v(x, t)$  a lo largo de la línea y que, al resolverse, definen el comportamiento de una línea eléctrica en estado transitorio [12].

Al tomar en cuenta los fenómenos eléctricos tales como resistencia, inductancia y capacitancia, se puede construir el circuito equivalente en el tramo de línea  $(x, x + \Delta x)$  de la Figura 4.1, con parámetros distribuidos por unidad de longitud:  $R$ ,  $L$  y  $C$  respectivamente, ver Figura 4.2 [12].

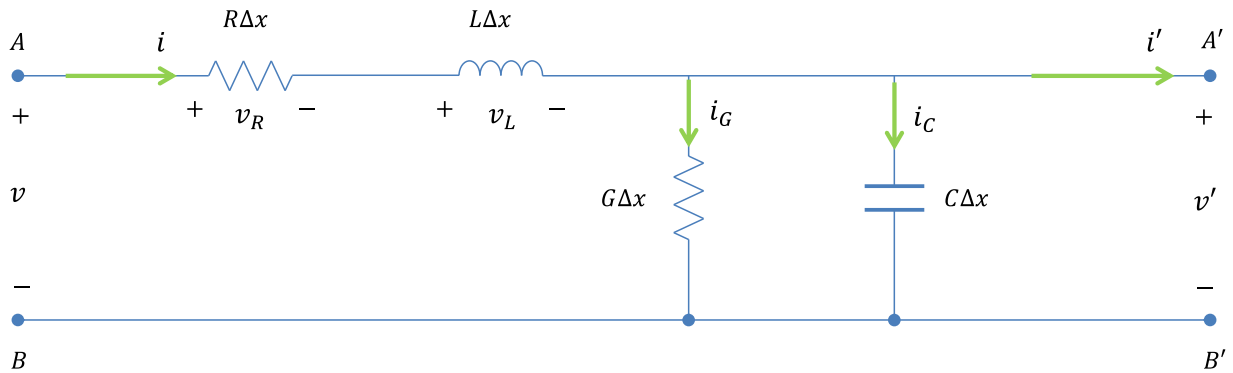
Donde:

$$i(x + \Delta x, t) \neq i(x, t) \quad (4. 1)$$

$$v(x + \Delta x, t) \neq v(x, t) \quad (4. 2)$$



**Figura 4.1.** Circuito representativo de una línea de transmisión para determinar las ecuaciones del telegrafista [12].



**Figura 4.2.** Modelo de línea con parámetros distribuidos [12].

Para la deducción de las ecuaciones se utilizan las siguientes igualdades:

$$i(x, t) = i \tag{4.3}$$

$$i(x + \Delta x, t) = i' \tag{4.4}$$

$$v(x, t) = v \tag{4.5}$$

$$v(x + \Delta x, t) = v' \tag{4.6}$$

De la Figura 4.2:

$$i = i_G + i_C + i' \tag{4.7}$$

Considerando:

$$i_G = G\Delta x \cdot v \tag{4.8}$$

$$i_C = C\Delta x \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \tag{4.9}$$

Entonces sustituyendo (4.8) y (4.9) en (4.7):

$$i = G\Delta x \cdot v + C\Delta x \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + i' \quad (4.10)$$

Sustituyendo las igualdades (4.3) y (4.4) en (4.10):

$$i(x, t) = G\Delta x \cdot v + C\Delta x \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + i(x + \Delta x, t) \quad (4.11)$$

Reagrupando a (4.11) y dividiendo entre  $\Delta x$ :

$$\frac{i(x, t) - i(x + \Delta x, t)}{\Delta x} = \frac{G\Delta x \cdot v + C\Delta x \cdot \frac{\partial v}{\partial t}}{\Delta x} \quad (4.12)$$

$$\frac{i(x, t) - i(x + \Delta x, t)}{\Delta x} = G \cdot v + C \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \quad (4.13)$$

Aplicando a (4.13) el límite cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{i(x, t) - i(x + \Delta x, t)}{\Delta x} = G \cdot v + C \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \quad (4.14)$$

$$-\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = G \cdot v + C \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \quad (4.15)$$

De forma similar a la corriente se tiene para el voltaje:

$$v = v_R + v_L + v' \quad (4.16)$$

Pero.

$$v_R = R\Delta x \cdot i \quad (4.17)$$

$$v_L = L\Delta x \cdot \frac{\partial i}{\partial t} \quad (4.18)$$

Sustituyendo (4.17) y (4.18) en (4.16).

$$v = R\Delta x \cdot i + L\Delta x \cdot \frac{\partial i}{\partial t} + v' \quad (4.19)$$

Sustituyendo las igualdades (4.5) y (4.6) en (4.19):

$$v(x, t) = R\Delta x \cdot i + L\Delta x \cdot \frac{\partial i}{\partial t} + v(x + \Delta x, t) \quad (4.20)$$

Reagrupando a (4.20) y dividiendo entre  $\Delta x$ :

$$\frac{v(x, t) - v(x + \Delta x, t)}{\Delta x} = \frac{R\Delta x \cdot i + L\Delta x \cdot \frac{\partial i}{\partial t}}{\Delta x} \quad (4.21)$$

$$\frac{v(x, t) - v(x + \Delta x, t)}{\Delta x} = R \cdot i + L \cdot \frac{\partial i}{\partial t} \quad (4.22)$$

Aplicando a (4.22) el límite cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x, t) - v(x + \Delta x, t)}{\Delta x} = R \cdot i + L \cdot \frac{\partial i}{\partial t} \quad (4.23)$$

$$-\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = R \cdot i + L \cdot \frac{\partial i}{\partial t} \quad (4.24)$$

Considerando el Modelo de Bergeron para líneas ideales, entonces para las ecuaciones (4.15) y (4.24),  $R = 0$ , por lo que:

$$-\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = C \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \quad (4.25)$$

$$-\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = L \cdot \frac{\partial i}{\partial t} \quad (4.26)$$

Sustituyendo las relaciones (4.3) y (4.5) en (4.25) y (4.26):

$$-\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = C \cdot \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \quad (4.27)$$

$$-\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = L \cdot \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \quad (4.28)$$

La solución de las ecuaciones diferenciales parciales (4.27) y (4.28) son respectivamente [2]:

$$v(x, t) = v^+ \left( t - \frac{x}{v} \right) + v^- \left( t + \frac{x}{v} \right) \quad (4.29)$$

$$i(x, t) = \frac{v^+}{Z_c} \left( t - \frac{x}{v} \right) - \frac{v^-}{Z_c} \left( t + \frac{x}{v} \right) \quad (4.30)$$

Donde  $v$  es la velocidad de propagación de las ondas viajeras a través de la línea [2].

Ahora al multiplicar a (4.30) por la impedancia característica, se tiene:

$$Z_c i(x, t) = v^+ \left( t - \frac{x}{v} \right) - v^- \left( t + \frac{x}{v} \right) \quad (4.31)$$

Sumando (4.31) a (4.29).

$$v(x, t) + Z_c i(x, t) = 2v^+ \left( t - \frac{x}{v} \right) \quad (4.32)$$

Restando (4.31) a (4.29).

$$v(x, t) - Z_c i(x, t) = 2v^- \left( t + \frac{x}{v} \right) \quad (4.33)$$

Considerando que la onda que entra es igual a la que sale de (4.33) y (4.32).

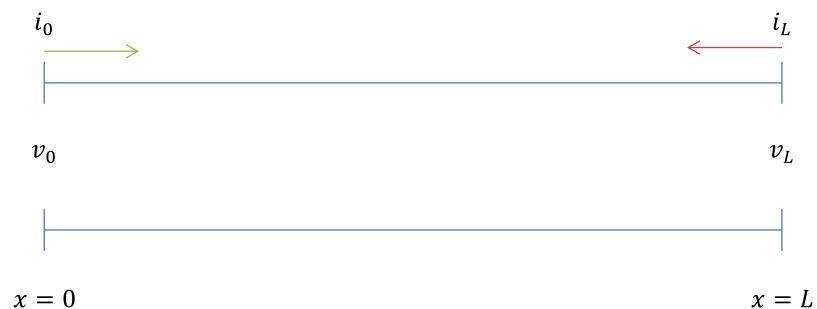
$$2v^+ \left( t - \frac{x}{v} \right) = 2v^- \left( t + \frac{x}{v} \right) \quad (4.34)$$

Sustituyendo la igualdad (4.34) con (4.33) y (4.32):

$$v(x, t) + Z_c i(x, t) = v(x, t) - Z_c i(x, t) \quad (4.35)$$

### 4.3 Desarrollo del Modelo de Bergeron

De forma similar al diagrama de Lattice, se considera un circuito donde existen ondas viajeras al inicio con una reflexión al final, ver Figura 4.3.



**Figura 4.3.** Línea de transmisión con longitud  $L$  para determinar ecuaciones representativas del Modelo de Bergeron.

Recordando la igualdad (4.34) ahora se tiene:

$$v^+(x, t) + Z_c i(x, t) = v^+(x, t) - Z_c i(x, t) \quad (4.36)$$

Para la onda que va hacia delante se sustituyen las condiciones de frontera mostradas en la Figura 4.3 en (4.36):

$$v^+(0, t - \tau) + Z_c i(0, t - \tau) = v^+(L, t) - Z_c i(L, t) \quad (4.37)$$

De forma similar, para la onda hacia atrás:

$$v^+(L, t - \tau) + Z_c i(L, t - \tau) = v^+(0, t) - Z_c i(0, t) \quad (4.38)$$

Siendo constante la longitud  $L$ , entonces para (4.37) y (4.38), se tiene respectivamente:

$$v_0^+(t - \tau) + Z_c i_0(t - \tau) = v_L^+(t) - Z_c i_L(t) \quad (4.39)$$

$$v_L^+(t - \tau) + Z_c i_L(t - \tau) = v_0^+(t) - Z_c i_0(t) \quad (4.40)$$

Despejando  $i(t)$  de (4.39) y (4.40):

$$i_L(t) = \frac{v_L^+}{Z_c} - \frac{v_0^+(t - \tau)}{Z_c} - i_0(t - \tau) \quad (4.41)$$

$$i_0(t) = \frac{v_0^+}{Z_c} - \frac{v_L^+(t - \tau)}{Z_c} - i_L(t - \tau) \quad (4.42)$$

Renombrando (4.41) y (4.42):

$$i_L(t) = Y_c v_L^+ + I_{Hist}^0 \quad (4.43)$$

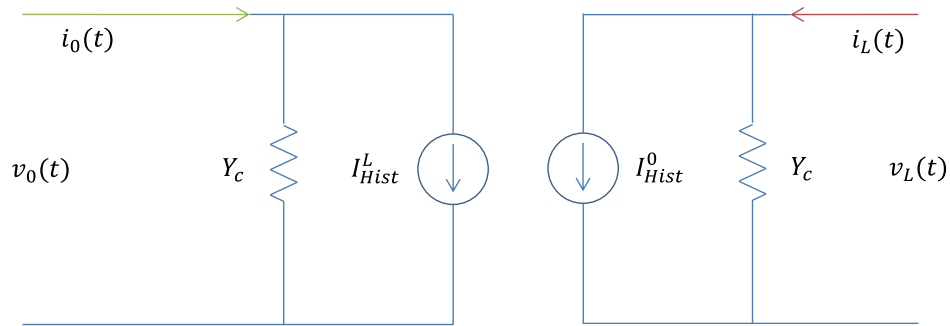
$$i_0(t) = Y_c v_0^+ + I_{Hist}^L \quad (4.44)$$

Donde:

$$I_{Hist}^0 = -\frac{v_0^+(t - \tau)}{Z_c} - i_0(t - \tau) \quad (4.45)$$

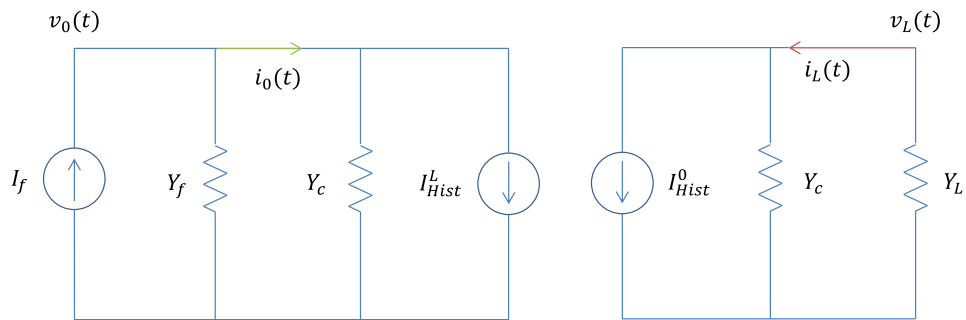
$$I_{Hist}^L = -\frac{v_L^+(t - \tau)}{Z_c} - i_L(t - \tau) \quad (4.46)$$

A través de las ecuaciones (4.43), (4.44), (4.45) y (4.46) se forma el circuito dual de Norton para una línea de transmisión. Ver Figura 4.4.



**Figura 4.4.** Circuito dual de Norton para una línea de transmisión.

La Figura 4.4 muestra la parte equivalente de la línea de transmisión obtenida a través de las ecuaciones de Bergeron, de forma adicional es necesario colocar la fuente de energía y la carga que se encuentre al final de línea en el punto  $x = L$ . Debido a que se está trabajando con fuentes de Corriente de Historia, para facilitar el cálculo solo basta con hacer un arreglo en la fuente de voltaje convirtiéndolo a fuente de corriente con una admitancia en paralelo. Ver Figura 4.5.



**Figura 4.5.** Circuito equivalente de una línea de transmisión utilizado por el Modelo de Bergeron.

La solución al circuito de la Figura 4.5 la se obtiene por medio de las siguientes ecuaciones:

**Para  $v_0(t)$**

Se suman las fuentes de corriente y por otra parte las admitancias en paralelo, posteriormente se aplica Ley de Ohm.

$$v_0(t) = (I_f - I_{Hist}^L) * inv(Y_f + Y_c) \tag{4.47}$$

## Para $v_L$

De forma similar a lo hecho para  $v_0$ .

$$v_L = (-I_{Hist}^0) * inv(Y_c + Y_L) \quad (4.48)$$

Para que ambas partes del circuito sean resueltas simultáneamente, se forma un sistema de ecuación de 2 x 2.

$$[v] = inv[Y][I] \quad (4.49)$$

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ v_L \end{bmatrix} = inv \begin{bmatrix} Y_f + Y_c & 0 \\ 0 & Y_c + Y_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_f - I_{Hist}^L \\ -I_{Hist}^0 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Ahora, como se pudo notar en el circuito de la Figura 4.5, las fuentes de corriente de historia se encuentran posicionadas en el lado opuesto a su nomenclatura, es decir,  $I_{Hist}^0$  se encuentra en el lado del circuito perteneciente al final de la línea, siendo que esta fuente de corriente corresponde al inicio, lo mismo pasa con  $I_{Hist}^L$  que se coloca en su lado opuesto; lo anterior se hace con el propósito de enlazar la solución dado a que el circuito no presenta una unión entre las dos partes.

De forma similar al Diagrama de Lattice el Modelo de Bergeron puede ser visualizado a manera de ondas viajeras.

En la Figura 4.6, se encuentran dos líneas paralelas las cuales representaran el inicio y fin de la línea, lo que corresponde a la sección sombreada del circuito colocado en la parte inferior de la misma figura, donde:

$t_{obs}$  = tiempo durante el cual se observara el comportamiento transitorio de la línea.

$\tau$  = es el tiempo que tarda la onda la energía en llegar de la fuente a la carga y se determina por medio de (4.51).

$$\tau = L/u \quad (4.51)$$

$L$  = longitud de la línea, también indica el fin de esta.

$u$  = velocidad de propagación de la energía, aproximadamente igual a la velocidad de la luz.

$I_f$  = corriente de la fuente.

$Y_f$  = admitancia de la fuente.

$Y_L$  = admitancia de la carga.

$Y_c$  = admitancia característica de la línea.

$I_{Hist}^L$  = corriente de historia calculada en al final de la línea.

$I_{Hist}^0$  = corriente de historia calculada en al inicio de la línea.

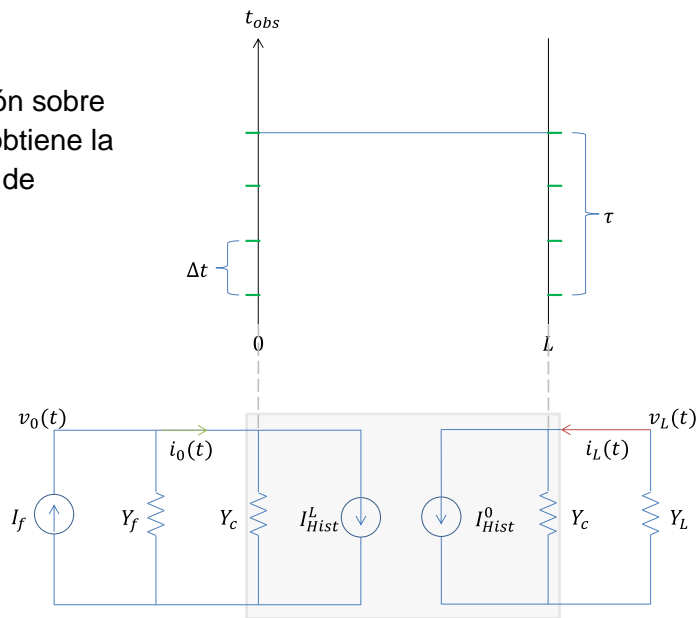
A su vez se pueden notar líneas horizontales de color verde, estas son las partes en las que es dividido  $\tau$ , donde:

$$\Delta t = \frac{\tau}{s} \quad (4.52)$$

$\Delta t$  = incremento del tiempo en segundos.

$s$  = numero arbitrario en el que es dividido a  $\tau$ , para obtener mejores resultados es conveniente que  $s > 1$ .

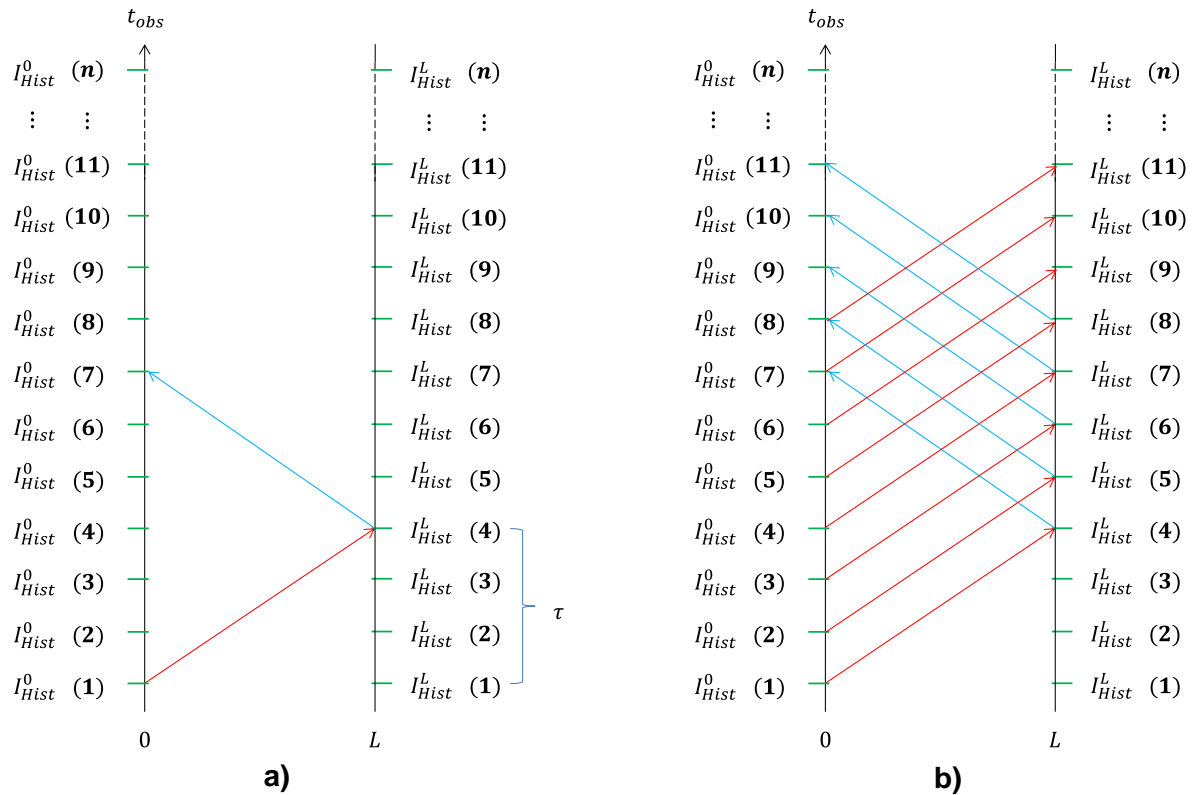
**Figura 4.6.** Ilustración sobre la forma en que se obtiene la solución del Modelo de Bergeron.



En la Figura 4.7 a) y b) se encuentran las dos líneas verticales ilustradas en la Figura 4.6, en ambos extremos se adiciona una sucesión numérica que va desde 1 hasta  $n$  cuyo valor se obtiene a través de (4.53).

$$Secciones = \frac{t_{obs}}{\Delta t} + s \quad (4.53)$$

Cada uno de estos números representa un valor de corriente de historia en una posición del tiempo de observación. En (4.53) se adiciona  $s$  debido a que en las ecuaciones (4.45) y (4.46) se dice que las corrientes de historia se calculan con valores de voltaje con un tiempo  $(t - \tau)$  y  $s$  son las partes equivalentes de  $\tau$ .

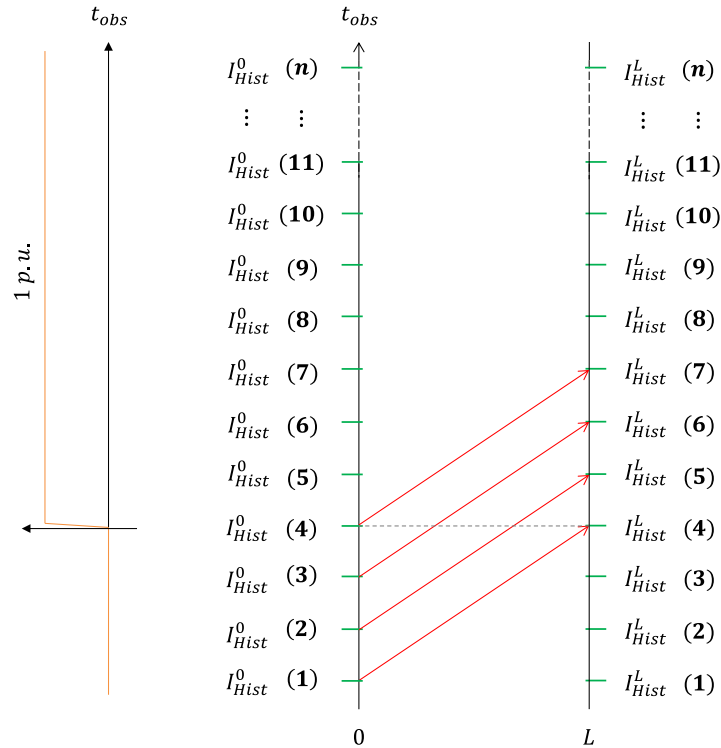


**Figura 4.7.** Posición de las corrientes de historia y las ondas de energía durante el tiempo de observación.

Por otra parte se encuentra una línea roja la cual va de izquierda a derecha partiendo de la posición (1) a la (4), lo que quiere decir que para ese caso  $s = 3$ , esta representa una onda de energía que al llegar a (4) rebotara y regresara en un tiempo  $\tau$  a la fuente, es entonces por lo que la flecha azul toca en el punto (7). Bergeron toma en cuenta que la fuente continua inyectando energía, es decir la fuente no sólo da un impulso en el tiempo sino que esta continuara por cada división del tiempo de observación y por consiguiente existirán las mismas ondas reflejadas. Ver Figura 4.7 b).

Con lo antes descrito, es posible comprender de mejor manera el cómo se comportan las ecuaciones que componen al sistema indicado en (4.50). En la Figura 4.8 ahora se

nota que en el lado izquierdo se añade una gráfica que muestra la forma del voltaje de la fuente, con fines explicativos se utiliza una función escalón de magnitud igual a 1 p.u. sin embargo esta fuente también puede tener forma cosenoidal.



**Figura 4.8.** Posición de la fuente de voltaje con respecto al diagrama de las ondas viajeras.

#### 4.4 Determinación de los Primeros Valores de una Sobretensión Transitoria por el Modelo de Bergeron

Un aspecto importante a considerar es que la fuente no adquiere valores al inicio del diagrama eso es debido a que las corrientes de historia se basan en voltajes en función de un tiempo  $(t - \tau)$  por lo que cuando el tiempo es igual a cero el voltaje estará en función de  $(-\tau)$  pero siendo este negativo no es posible asignar un valor diferente de cero a corrientes y voltajes, no obstante en el diagrama se toman en cuenta. Será hasta que  $t > \tau$  cuando la fuente empiece a inyectar energía a la línea, es la razón por la que en la Figura 4.8 la función escalón inicia en el punto (4) del tiempo de observación,

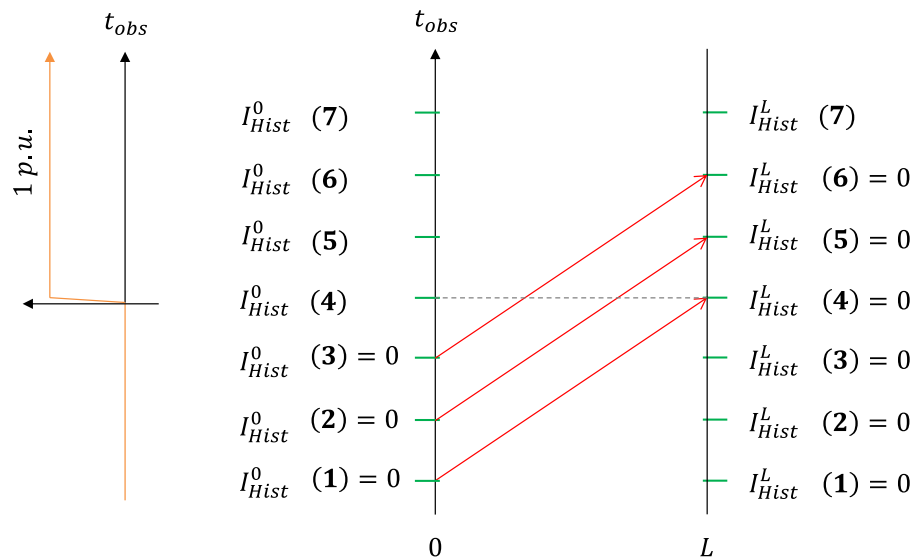
claro siguiendo con el ejemplo de que  $\tau$  es dividido en tres partes, el valor en los puntos (1) al (4) se consideran como condiciones iniciales.

Es conveniente aclarar que el tiempo indicado en  $(t - \tau)$  es diferente del tiempo de observación ( $t_{obs}$ ) dado a que  $(t)$  se referirá a cada una de las partes en las que es dividido el tiempo de observación determinado por (4.53) y siendo que  $(t)$  describe a las posiciones con respecto al tiempo de observación resulta útil que  $(\tau)$  se exprese de la misma manera por lo que este es reemplazado por  $(s)$  que son las partes equivalentes de  $(\tau)$ . Entonces ahora de (4.45) y (4.46) se tiene:

$$I_{Hist}^0 = -\frac{v_0^+(t-s)}{Z_c} - i_0(t-s) \quad (4.54)$$

$$I_{Hist}^L = -\frac{v_L^+(t-s)}{Z_c} - i_L(t-s) \quad (4.55)$$

Para la determinación de los primeros valores de corriente de historia no es necesario resolver ninguna ecuación pues basta con observar que al no existir una fuente de excitación al inicio de la línea por consiguiente al final de la misma tampoco se tendrá tensión y corriente. Ver Figura 4.9.



**Figura 4.9.** Determinación de los primeros valores de corriente de historia.

Entonces de la Figura 4.9, es posible formar los siguientes grupos de vectores:

Lado de la fuente.

$$\begin{aligned}t &= [ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 ] \\I_{Hist}^0 &= [ 0 \ 0 \ 0 ] \\v_0(t) &= [ 0 \ 0 \ 0 ] \\i_0(t) &= [ 0 \ 0 \ 0 ]\end{aligned}\tag{4.56}$$

Lado de la carga.

$$\begin{aligned}t &= [ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 ] \\I_{Hist}^L &= [ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 ] \\v_L(t) &= [ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 ] \\i_L(t) &= [ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 ]\end{aligned}\tag{4.57}$$

Como se observa en los vectores (4.56), a diferencia de (4.57), sólo se colocaron valores hasta  $t = 3$ , es debido a que en la Figura 4.9 se dice que la fuente inicia precisamente  $t = 4$  en por lo que en este punto ya no se puede decir que las corrientes y voltajes serán igual a cero. A continuación se muestra como se obtienen los siguientes valores hasta para  $t = 7$  en el lado de la fuente.

**Para  $t = 4$**

**1.  $I_{Hist}^0$**

La ecuación de corriente de historia al inicio de la línea se encuentra en función de  $v_0^+(t-s)$  e  $i_0(t-s)$ , por lo que es necesario resolverlas. Primero se encuentra que  $v_0^+$  se refiere al voltaje de la fuente. Entonces:

$$v_0^+(t-s) = v_0^+(4-3) = v_0^+(1) = 0\tag{4.58}$$

En el caso de la corriente  $i_0$ , se tiene:

$$i_0(t - s) = i_0(4 - 3) = i_0(1) \quad (4. 59)$$

Sólo queda determinar  $i_0(1)$ .

$$i_0(1) = Y_c v_0^+ + I_{Hist}^L \quad (4. 60)$$

En el caso de  $I_{Hist}^L(1)$  basta con observar en (4.57) para ver que tiene un valor igual a cero, lo mismo que  $v_0^+(1)$  en (4.56).

Por lo tanto:

$$I_{Hist}^0(4) = 0 \quad (4. 61)$$

## 2. $v_0(t)$

La ecuación para este parámetro solo está en función de  $I_{Hist}^L$ . Por lo tanto es suficiente con definir los valores de sus variables:

$$v_L^+(4 - 3) = v_L^+(1) = 0 \quad (4. 62)$$

$$i_L(4 - 3) = i_L(1) = 0 \quad (4. 63)$$

Es entonces que  $I_{Hist}^L(4) = 0$ , y:

$$v_0(4) = (I_f - I_{Hist}^L) * inv(Y_f + Y_c) = I_f * inv(Y_f + Y_c) \quad (4. 64)$$

## 3. $i_0(t)$ .

La corriente de historia  $I_{Hist}^L(4)$  ya ha sido calculada y debido a que en (4) la fuente empieza a inyectar energía a la línea entonces  $v_0^+(4) = v_0(4) = I_f * inv(Y_f + Y_c)$ .

$$i_0(4) = Y_c v_0^+(4) + I_{Hist}^L(4) = Y_c (I_f * inv(Y_f + Y_c)) + 0 = Y_c * I_f * inv(Y_f + Y_c) \quad (4. 65)$$

Los valores encontrados en (4.61), (4.64) y (4.65) se agregan a (4.56), para formar los grupos vectoriales que estarán almacenando los valores de voltaje y corriente que se utilizaran en los cálculos posteriores.

$$\begin{aligned}
t &= [ 1 \ 2 \ 3 \quad \quad \quad 4 \quad \quad \quad 5 \ 6 \ 7 ] \\
I_{Hist}^0 &= [ 0 \ 0 \ 0 \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad ] \\
v_0(t) &= [ 0 \ 0 \ 0 \quad I_f * inv(Y_f + Y_c) \quad ] \\
i_0(t) &= [ 0 \ 0 \ 0 \quad Y_c * I_f * inv(Y_f + Y_c) \quad ]
\end{aligned}
\tag{4.66}$$

**Para  $t = 5$**

**1.  $I_{Hist}^0$**

Realizando los mismos pasos que  $t = 4$ :

$$v_0^+(t - s) = v_0^+(5 - 3) = v_0^+(2) = 0 \tag{4.67}$$

En el caso de la corriente  $i_0$ , se tiene:

$$i_0(t - s) = i_0(5 - 3) = i_0(2) \tag{4.68}$$

Determinando  $i_0(2)$ .

$$i_0(2) = Y_c v_0^+ + I_{Hist}^L \tag{4.69}$$

En el caso de  $I_{Hist}^L(2)$  basta con observar en (4.57) para ver que tiene un valor igual a cero, lo mismo que  $v_0^+(2)$  en (4.56). Por lo tanto:

$$I_{Hist}^0(5) = 0 \tag{4.70}$$

**2.  $v_0(t)$**

Para  $I_{Hist}^L(5)$ .

$$v_L^+(5 - 3) = v_L^+(2) = 0 \tag{4.71}$$

$$i_L(5 - 3) = i_L(2) = 0 \tag{4.72}$$

Es entonces que  $I_{Hist}^L(5) = 0$ , y:

$$v_0(5) = (I_f - I_{Hist}^L) * inv(Y_f + Y_c) = I_f * inv(Y_f + Y_c) \quad (4.73)$$

### 3. $i_0(t)$ .

La corriente de historia  $I_{Hist}^L(5)$  al igual que para  $v_0^+(5)$ .

$$i_0(5) = Y_c v_0^+(5) + I_{Hist}^L(5) = Y_c (I_f * inv(Y_f + Y_c)) + 0 = Y_c * I_f * inv(Y_f + Y_c) \quad (4.74)$$

Los valores encontrados en (4.70), (4.73) y (4.74) se agregan a (4.66).

$$\begin{aligned} t &= [ 1 \quad 2 \quad 3 \quad \quad 4 \quad \quad \quad 5 \quad \quad \quad 6 \quad 7 ] \\ I_{Hist}^0 &= [ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \quad 0 \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad ] \\ v_0(t) &= [ 0 \quad 0 \quad 0 \quad I_f * inv(Y_f + Y_c) \quad I_f * inv(Y_f + Y_c) ] \\ i_0(t) &= [ 0 \quad 0 \quad 0 \quad Y_c * I_f * inv(Y_f + Y_c) \quad Y_c * I_f * inv(Y_f + Y_c) ] \end{aligned} \quad (4.75)$$

## Para $t = 6$

### 1. $I_{Hist}^0$

Realizando los mismos pasos que  $t = 5$ :

$$v_0^+(t - s) = v_0^+(6 - 3) = v_0^+(3) = 0 \quad (4.76)$$

En el caso de la corriente  $i_0$ , se tiene:

$$i_0(t - s) = i_0(6 - 3) = i_0(3) \quad (4.77)$$

Determinando  $i_0(3)$ .

$$i_0(3) = Y_c v_0^+ + I_{Hist}^L \quad (4.78)$$

En el caso de  $I_{Hist}^L(3)$  basta con observar en (4.57) para ver que tiene un valor igual a cero, lo mismo que  $v_0^+(3)$  en (4.56).

Por lo tanto:

$$I_{Hist}^0(6) = 0 \quad (4.79)$$

## 2. $v_0(t)$

Para  $I_{Hist}^L(6)$ .

$$v_L^+(6-3) = v_L^+(3) = 0 \quad (4.80)$$

$$i_L(6-3) = i_L(3) = 0 \quad (4.81)$$

Es entonces que  $I_{Hist}^L(6) = 0$ , y:

$$v_0(6) = (I_f - I_{Hist}^L) * inv(Y_f + Y_c) = I_f * inv(Y_f + Y_c) \quad (4.82)$$

## 3. $i_0(t)$ .

La corriente de historia  $I_{Hist}^L(6)$  ya ha sido calculada y  $v_0^+(6)$ .

$$i_0(6) = Y_c v_0^+(6) + I_{Hist}^L(6) = Y_c (I_f * inv(Y_f + Y_c)) + 0 = Y_c * I_f * inv(Y_f + Y_c) \quad (4.83)$$

Los valores encontrados en (4.79), (4.82) y (4.83) se agregan a (4.75).

$$\begin{aligned} t &= [ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 ] \\ I_{Hist}^0 &= [ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad ] \\ v_0(t) &= [ 0 \quad 0 \quad 0 \quad I_f * inv(Y_f + Y_c) \quad I_f * inv(Y_f + Y_c) \quad I_f * inv(Y_f + Y_c) \quad ] \\ i_0(t) &= [ 0 \quad 0 \quad 0 \quad Y_c * I_f * inv(Y_f + Y_c) \quad Y_c * I_f * inv(Y_f + Y_c) \quad Y_c * I_f * inv(Y_f + Y_c) \quad ] \end{aligned} \quad (4.84)$$

## Para $t = 7$

### 1. $I_{Hist}^0$

Realizando los mismos pasos que  $t = 6$ :

$$v_0^+(t-s) = v_0^+(7-3) = v_0^+(4) = I_f * inv(Y_f + Y_c) \quad (4.85)$$

En el caso de la corriente  $i_0$ , se tiene:

$$i_0(t-s) = i_0(7-3) = i_0(4) \quad (4.86)$$

Determinando  $i_0(4)$ .

$$i_0(4) = Y_c v_0^+ + I_{Hist}^L \quad (4.87)$$

En el caso de  $I_{Hist}^L(4)$  basta con observar en (4.57) para ver que tiene un valor igual a cero, por otro lado  $v_0^+(4) = I_f * inv(Y_f + Y_c)$ . Por lo tanto:

$$I_{Hist}^0(7) = -\frac{I_f * inv(Y_f + Y_c)}{Z_c} - Y_c * I_f * inv(Y_f + Y_c) = -2Y_c * I_f * inv(Y_f + Y_c) \quad (4.88)$$

## 2. $v_0(t)$

Para  $I_{Hist}^L(7)$ .

$$v_L^+(7-3) = v_L^+(4) = 0 \quad (4.89)$$

$$i_L(7-3) = i_L(4) = 0 \quad (4.90)$$

Entonces:

$$I_{Hist}^L = 0 \quad (4.91)$$

$$v_0(7) = I_f * inv(Y_f + Y_c) \quad (4.92)$$

## 3. $i_0(t)$ .

La corriente de historia  $I_{Hist}^L(7)$  ya ha sido al igual que  $v_0^+(7)$ .

$$i_0(7) = Y_c v_0^+(7) + I_{Hist}^L(7) = Y_c (I_f * inv(Y_f + Y_c)) - 0 = Y_c * I_f * inv(Y_f + Y_c) \quad (4.93)$$

Los valores encontrados en (4.88), (4.92) y (4.93) se agregan a (4.84).

$$\begin{array}{rcl}
 t & = & [ \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \quad 4 \quad \quad \quad 5 \quad \quad \quad 6 \quad \quad \quad 7 \quad \quad ] \\
 I_{Hist}^0 & = & [ \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \quad 0 \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad 0 \quad \quad -2Y_c * I_f * inv(Y_f + Y_c) \quad ] \\
 v_0(t) & = & [ \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad I_f * inv(Y_f + Y_c) \quad I_f * inv(Y_f + Y_c) \quad I_f * inv(Y_f + Y_c) \quad I_f * inv(Y_f + Y_c) \quad ] \\
 i_0(t) & = & [ \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad Y_c * I_f * inv(Y_f + Y_c) \quad Y_c * I_f * inv(Y_f + Y_c) \quad Y_c * I_f * inv(Y_f + Y_c) \quad Y_c * I_f * inv(Y_f + Y_c) \quad ]
 \end{array} \quad (4.94)$$

Ahora para el lado de la carga.

## Para $t = 7$ , en el lado de la carga

### 1. $I_{Hist}^L$

De forma análoga al lado de la fuente.

$$v_L^+(t - s) = v_L^+(7 - 3) = v_L^+(4) = 0 \quad (4.95)$$

En el caso de la corriente  $i_0$ , se tiene:

$$i_L(t - s) = i_L(7 - 3) = i_L(4) = 0 \quad (4.96)$$

Entonces

$$I_{Hist}^L(7) = 0 \quad (4.97)$$

### 2. $v_L(t)$

Para  $I_{Hist}^0(7)$ .

$$v_0^+(7 - 3) = v_0^+(4) = I_f * inv(Y_f + Y_c) \quad (4.98)$$

$$i_0(7 - 3) = i_0(4) = Y_c * I_f * inv(Y_f + Y_c) \quad (4.99)$$

Entonces:

$$I_{Hist}^0 = -\frac{I_f * inv(Y_f + Y_c)}{Z_c} - Y_c * I_f * inv(Y_f + Y_c) \quad (4.100)$$

$$v_L(7) = 2Y_c * I_f * inv(Y_f + Y_c) * inv(Y_c + Y_L) \quad (4.101)$$

### 3. $i_L(t)$ .

La corriente de historia  $I_{Hist}^0(7)$  ya ha sido calculada al igual que  $v_L^+(7)$ .

$$i_L(7) = Y_c \left( 2Y_c * I_f * inv(Y_f + Y_c) * inv(Y_c + Y_L) \right) - 2Y_c * I_f * inv(Y_f + Y_c) \quad (4.102)$$

Los valores encontrados en (4.97), (4.101) y (4.102) se agregan a (4.57).

$$\begin{aligned}
t &= [ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad ] \\
I_{Hist}^L &= [ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad ] \\
v_L(t) &= [ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2Y_c * I_f * inv(Y_f + Y_c) * inv(Y_c + Y_L) \quad ] \\
i_L(t) &= [ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad Y_c (2Y_c * I_f * inv(Y_f + Y_c) * inv(Y_c + Y_L)) - 2Y_c * I_f * inv(Y_f + Y_c) \quad ]
\end{aligned} \tag{4. 103}$$

Para obtener la gráfica que muestre el comportamiento del voltaje al final y al inicio de la línea basta con retomar los valores obtenidos por  $v_0(t)$  y  $v_L(t)$  con respecto a  $t$ . Sin embargo, resulta en un procedimiento tardado determinar cada uno de los elementos de voltaje y corriente en cada uno de los instantes de tiempo, es por ello que se recurre a la programación del Modelo Bergeron y así realizar los cálculos en un tiempo mínimo.

## 5. APLICACIÓN DEL MODELO DE BERGERON

### 5.1 Generalidades de la Programación del Modelo de Bergeron

A través de la descripción del Modelo de Bergeron, hecha en el capítulo anterior, se puede notar cuáles son los puntos que deben definirse previamente al cálculo de sobretensiones, tales como dimensión del conductor, altura y longitud de la línea; datos necesarios para el cálculo de parámetros eléctricos, para posteriormente calcular corrientes de historia; en el Figura 5.1 se muestra el diagrama de flujo de la programación realizada en el software de MATLAB para el Modelo de Bergeron.

### 5.2 Aplicación del Modelo de Bergeron

La programación realizada permite simular diferentes situaciones en las que se puede ver involucrada una línea de transmisión, por lo que este capítulo tiene como propósito mostrar los resultados de la aplicación del modelo para los siguientes casos:

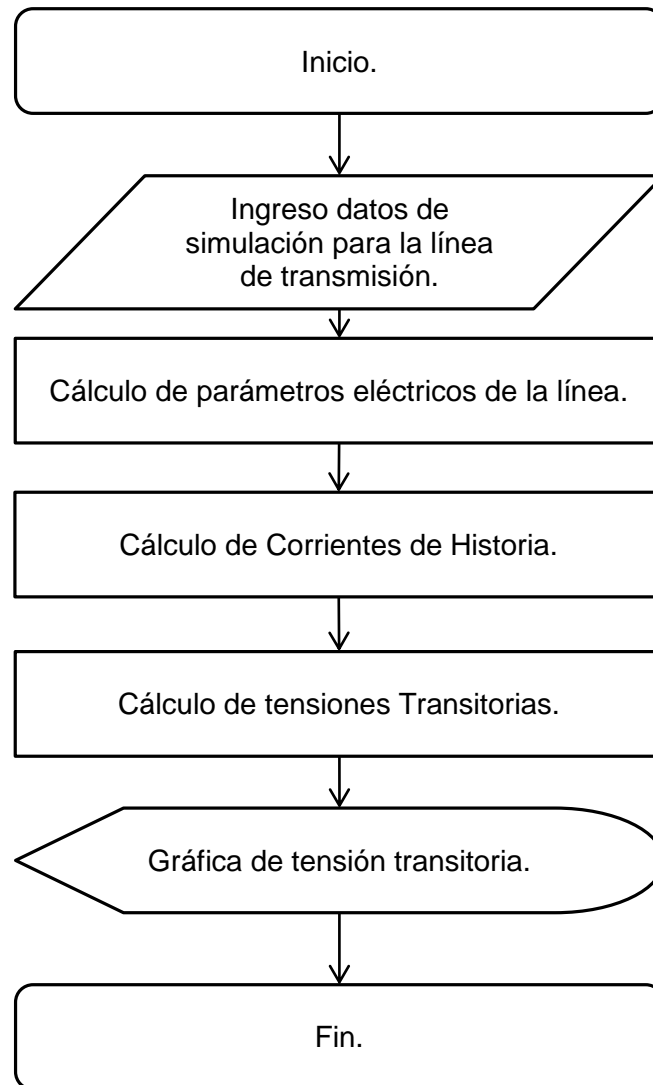
- a) Energización de una línea abierta.
- b) Energización de una línea con carga.
- c) Energización de una línea con cierre de interruptor en un tiempo diferente de cero.
- d) Línea con descarga atmosférica.

Para validar los resultados obtenidos con el Modelo de Bergeron, se comparan los resultados con los obtenidos con el Modelo en la Frecuencia el cual proporciona valores de simulación muy exactos para los casos de estudio.

El código se encuentra anexo en el apartado de “Anexo I”, al mismo tiempo se adjuntan los cambios necesarios para simular cada uno de los casos. Se utilizaron los siguientes datos como constantes:

- ❖ Fuente = 1 *p. u.*
- ❖ Impedancia de la fuente = 0.01  $\Omega$ .
- ❖ Radio del conductor = 0.02 *m.*

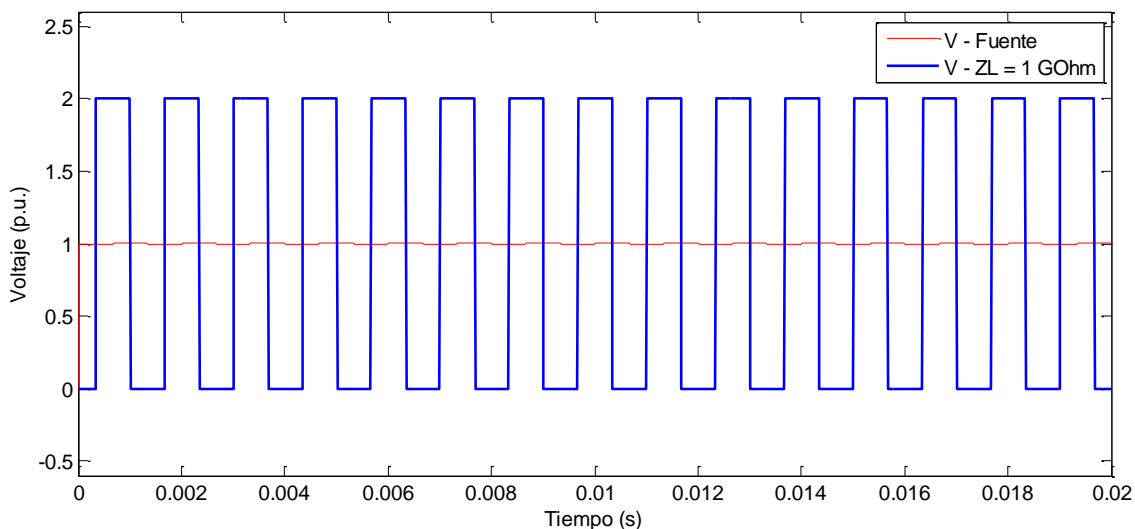
- ❖ Altura de la línea = 28 m.
- ❖ Longitud de la línea = 100 km.
- ❖  $S = 20$  (número de divisiones del tiempo de viaje).



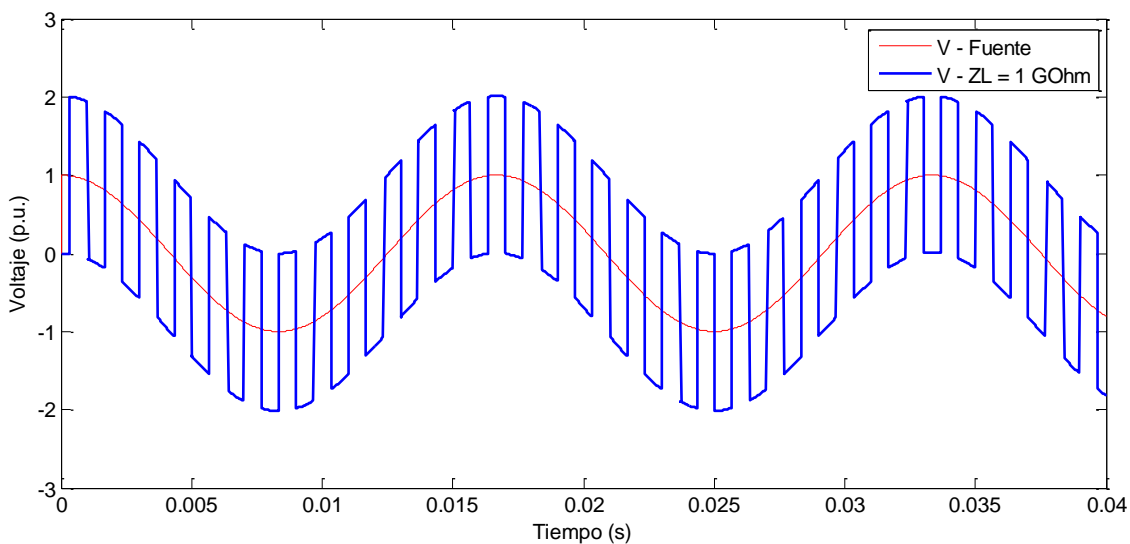
**Figura 5.1.** Diagrama de flujo para la solución de transitorios por el Modelo de Bergeron.

### 5.2.1 Energización de una Línea Abierta

Para el primer caso se realiza la simulación de la línea abierta, para la programación es equivalente a tener una carga con impedancia resistiva muy grande. En las Figuras 5.2 y 5.3 se observa que la tensión se duplica y se mantiene prácticamente constante.



**Figura 5.2.** Sobretensión transitoria debida a la energización de línea abierta con fuente función escalón unitario.

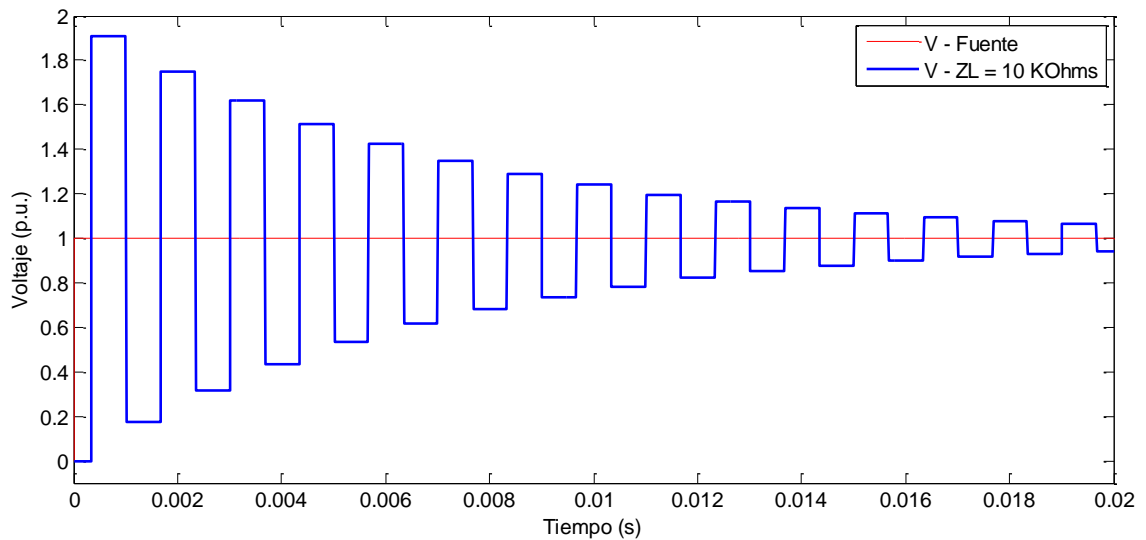


**Figura 5.3.** Sobretensión transitoria debida a la energización de línea abierta con fuente cosenoidal.

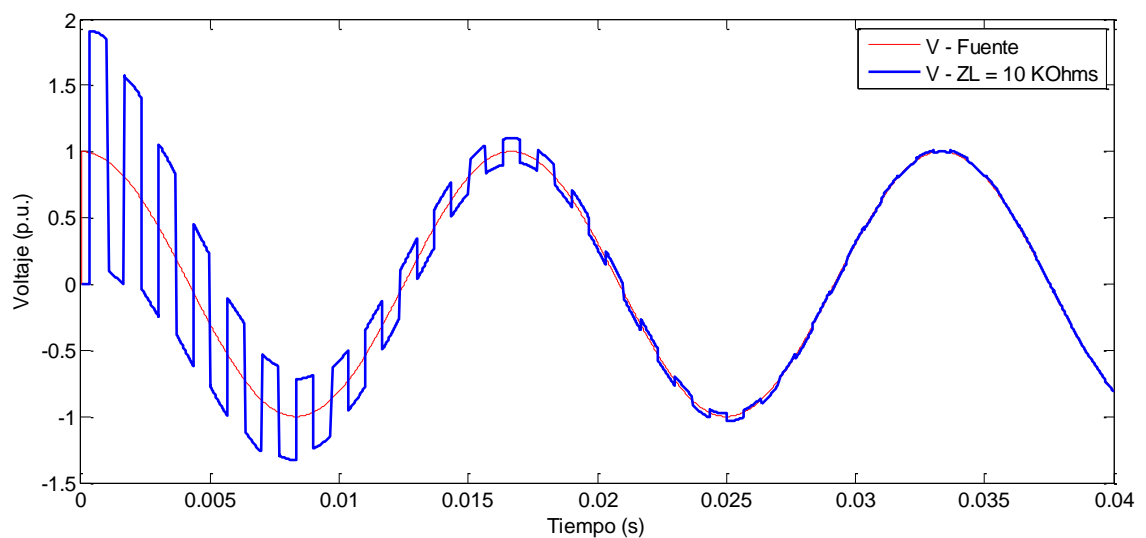
## 5.2.2 Energización de una Línea con Carga

En este inciso se realiza una simulación semejante a la realizada en **a)** con la diferencia de que se varía la resistencia de la carga con el propósito de visualizar el comportamiento de la sobretensión ante dichos cambios.

1. Se reduce la impedancia de la carga a  $10\text{ K}\Omega$ . Ver Figura 5.4 y 5.5.

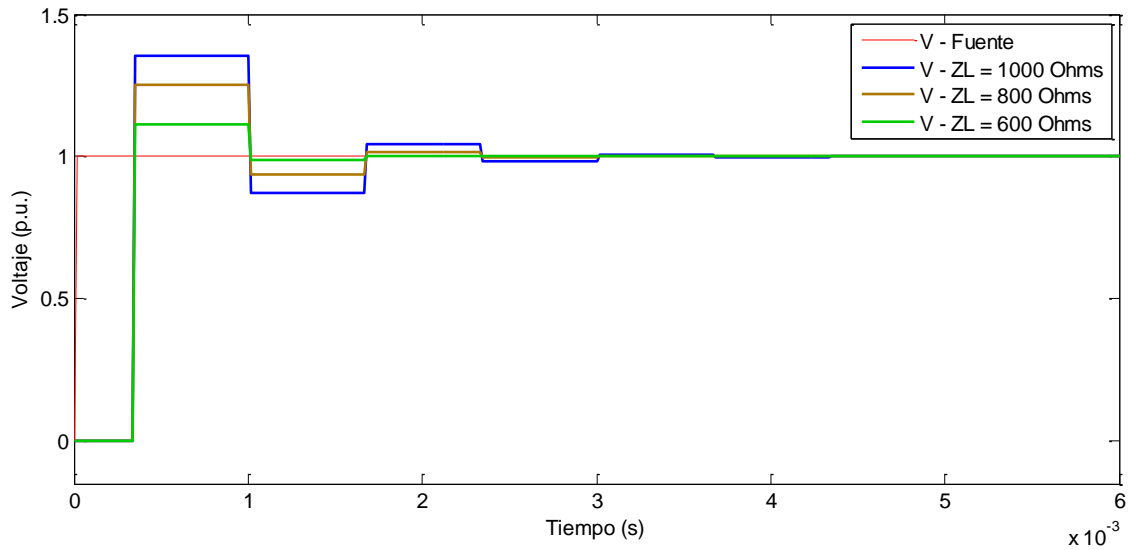


**Figura 5.4.** Sobretensión transitoria debida a la energización de línea con impedancia de carga de  $10\text{ K}\Omega$ ; fuente escalón unitario.

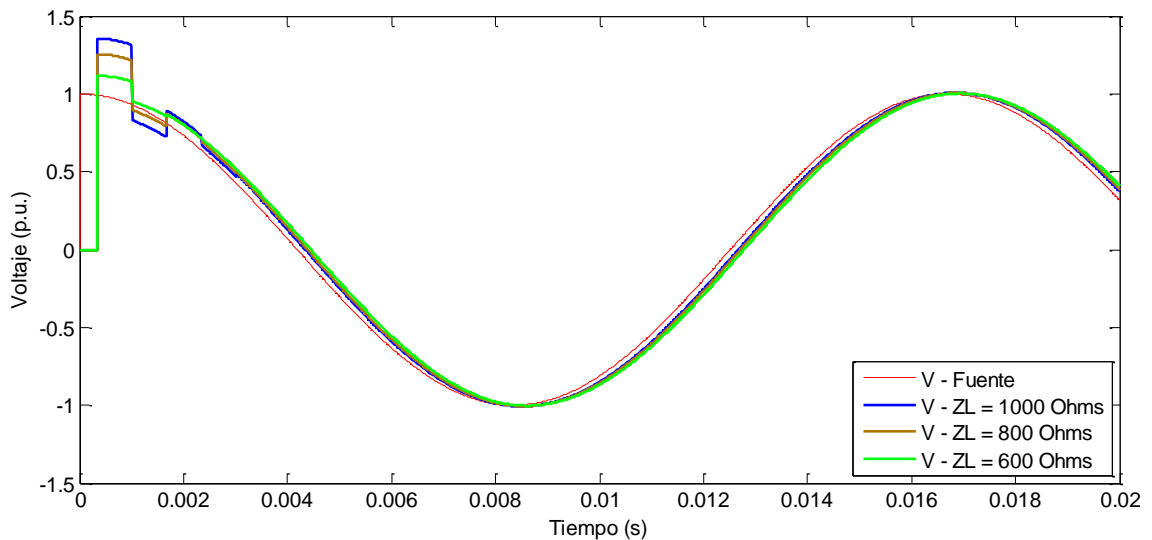


**Figura 5.5.** Sobretensión transitoria debida a la energización de línea con impedancia de carga de  $10\text{ K}\Omega$ ; fuente cosenoidal.

2. Reducción de la impedancia de carga ( $Z_L$ ) a 1000, 800 y 600  $\Omega$ . Se puede notar que ante estas variaciones de carga la sobretensión disminuye en proporciones similares. Ver Figura 5.6 y 5.7.



**Figura 5.6.** Sobretensión transitoria debida a la energización de línea con impedancia de carga de 1000, 800 y 600  $\Omega$ ; fuente escalón unitario.



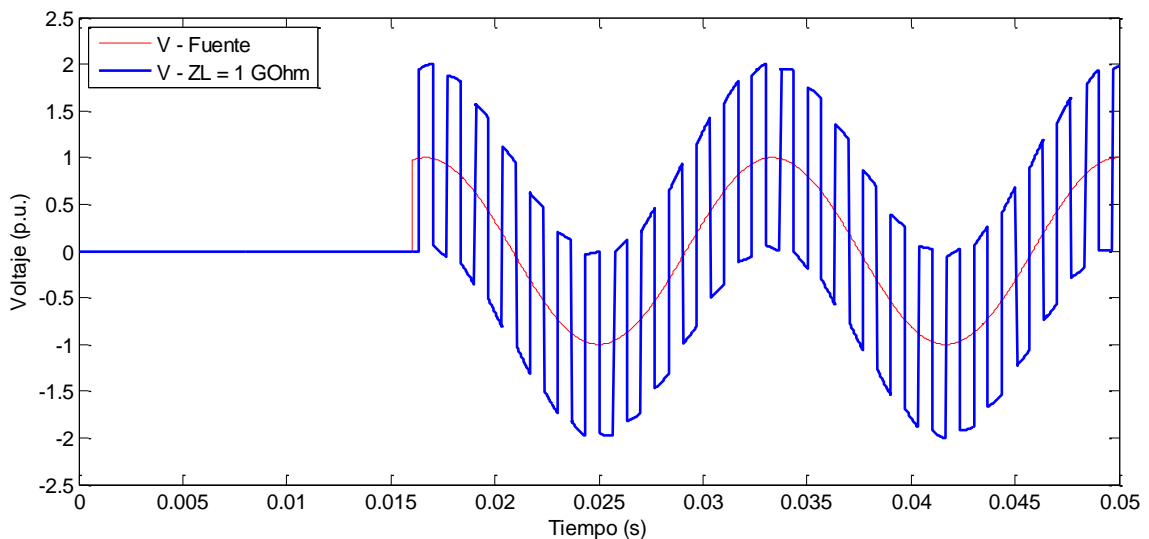
**Figura 5.7.** Sobretensión transitoria debida a la energización de línea con impedancia de carga de 1000, 800 y 600  $\Omega$ ; fuente cosenoidal.

### 5.2.3 Energización de una Línea con Cierre de Interruptor en un Tiempo Diferente de Cero

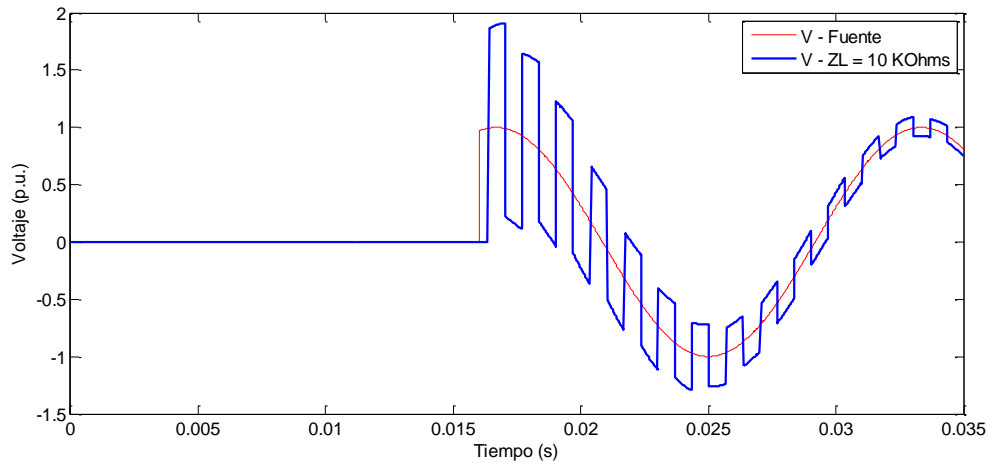
Se puede notar que en el caso de la fuente de tensión con forma de onda cosenoidal la simulación se realiza donde la fuente inicia su ciclo con un valor de 1 p.u. desde  $t = 0$ .

En este inciso se realizan simulaciones para el caso donde el interruptor cierra en un instante de tiempo diferente de cero para la onda cosenoidal, se utiliza un tiempo  $t = 16 \text{ ms}$ . En las Figuras 5.8, 5.9 y 5.10 se aprecia que los resultados no cambian de forma considerable en el tiempo seleccionado lo que es comprensible debido a que precisamente en este tiempo la onda esta muy proxima al valor de 1 p.u.

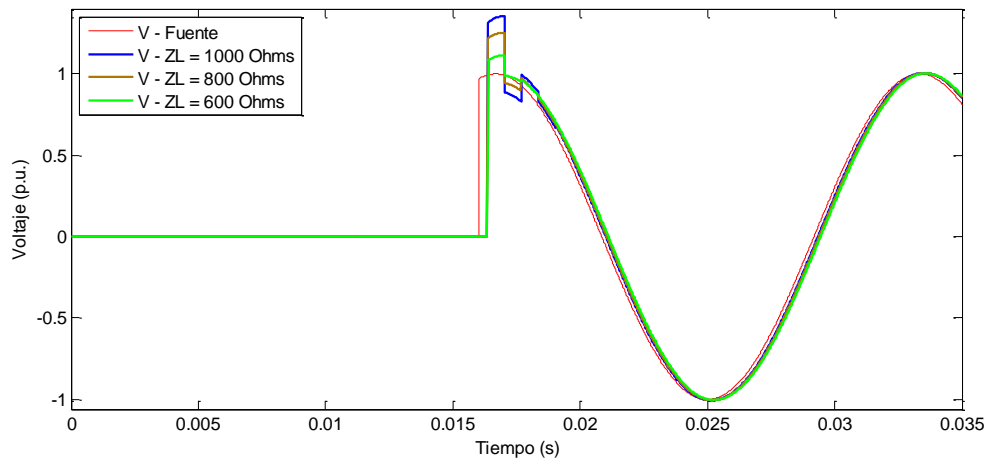
Se vizualiza el comportamiento del transitorio realizando simulaciones variando el tiempo, donde se observa que cuando la línea es energizada en un punto de la onda con valor proximo a cero la sobretensión se ve disminuida de forma considerable. Sólo se realiza el caso de la línea abierta. Los resultados se muesran en la Figura 5.11.



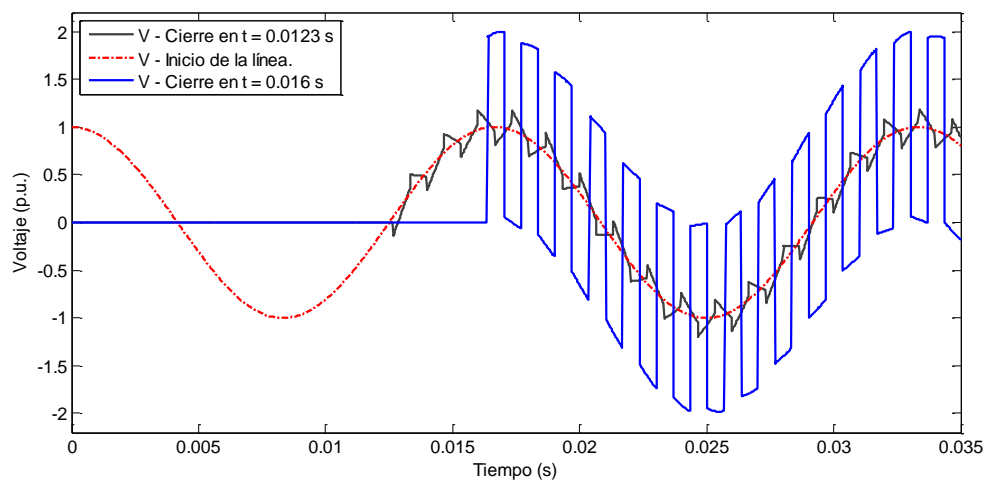
**Figura 5.8.** Sobretensión transitoria debida a la energización de línea abierta: cierre de interruptor en tiempo  $t = 16 \text{ ms}$ .



**Figura 5.9.** Sobretensión transitoria debida a la energización de línea, impedancia de carga de 10 kΩ; cierre de interruptor en tiempo  $t = 16 \text{ ms}$ .



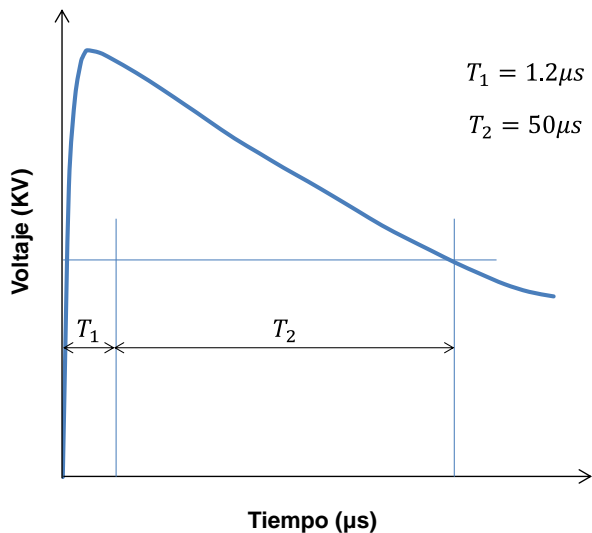
**Figura 5.10.** Sobretensión transitoria debida a la energización de línea, variación de impedancia de carga; cierre de interruptor en tiempo  $t = 16 \text{ ms}$ .



**Figura 5.11.** Comparación de sobretensión transitoria debida a la energización de línea abierta; cierre de interruptor en tiempo  $t = 12.3 \text{ ms}$  y  $16 \text{ ms}$ .

## 5.2.4 Línea con Descarga Atmosférica

Una descarga atmosférica tiene la peculiaridad de ser irregular, es decir, en la realidad no tiene una forma definida esto debido a que la tensión tiene múltiples variaciones durante el tiempo que tiene lugar, sin embargo, para su estudio se dispone de una forma de tensión normalizada, el cual es impulso de tensión con un tiempo de subida hasta el valor cresta de  $1.2 \mu s$  y un tiempo de cola de  $50 \mu s$  [13]. Ver Figura 5.12.



**Figura 5.12.** Forma de onda normalizada para la descarga atmosférica.

Para su simulación se dispone la ecuación (5.1) que proporciona una gráfica semejante a la Figura 5.12.

$$V_{DA} = -A * (e^{-t\alpha_1} - e^{-t\alpha_2}) \quad (5.1)$$

Donde:

$V_{DA}$  = tensión debida a descarga atmosférica.

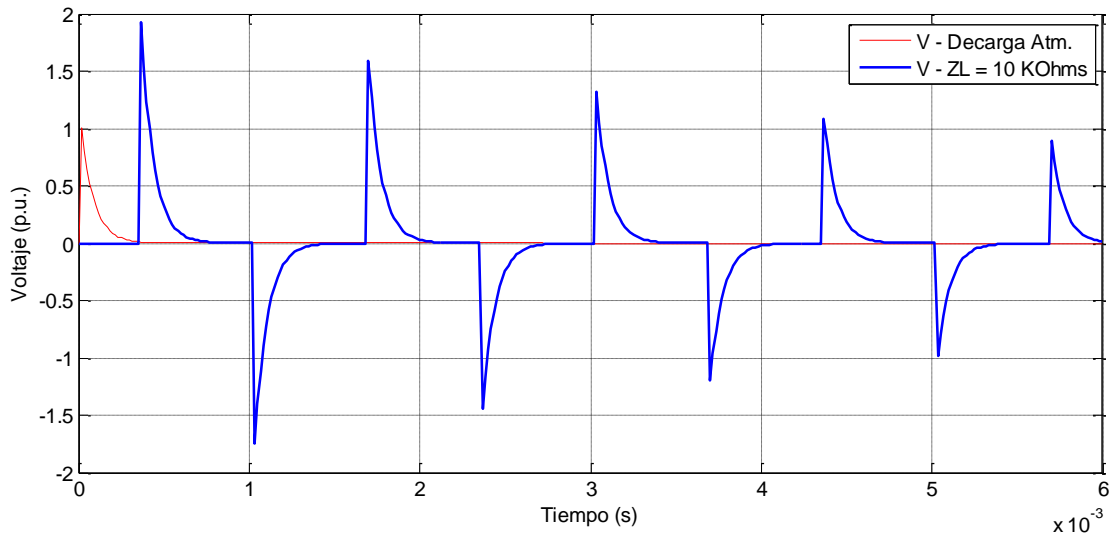
$A$  = amplitud de la tensión.

$t$  = tiempo de observación.

$\alpha_1 = 1/0.21 * 10^{-6} = \text{constante.}$

$\alpha_2 = 1/75 * 10^{-6} = \text{constante.}$

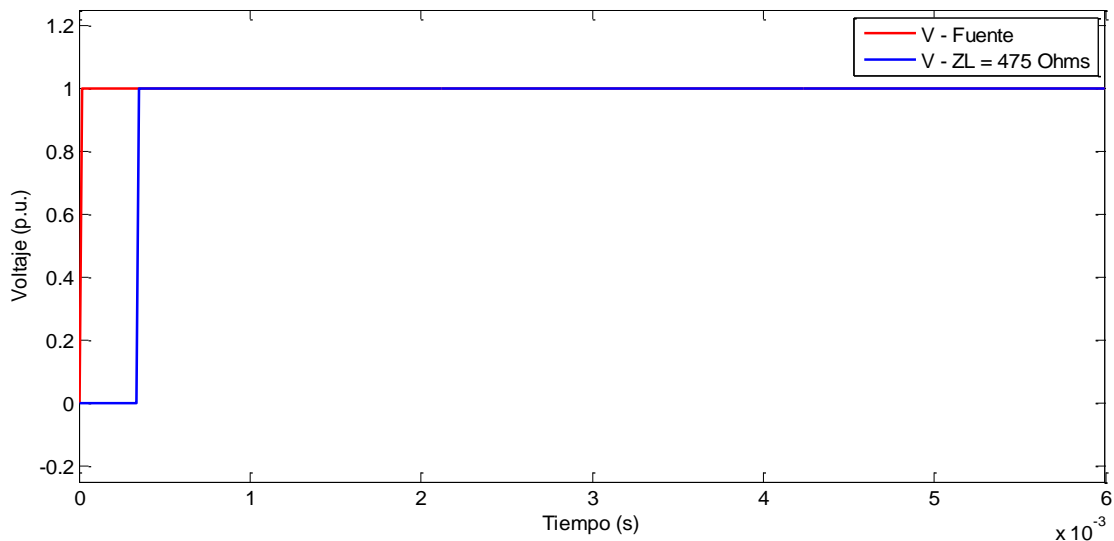
En la simulación realizada para este inciso se utiliza (5.1) para ser la fuente de descarga normalizada. Los resultados se muestran en la Figura 5.13.



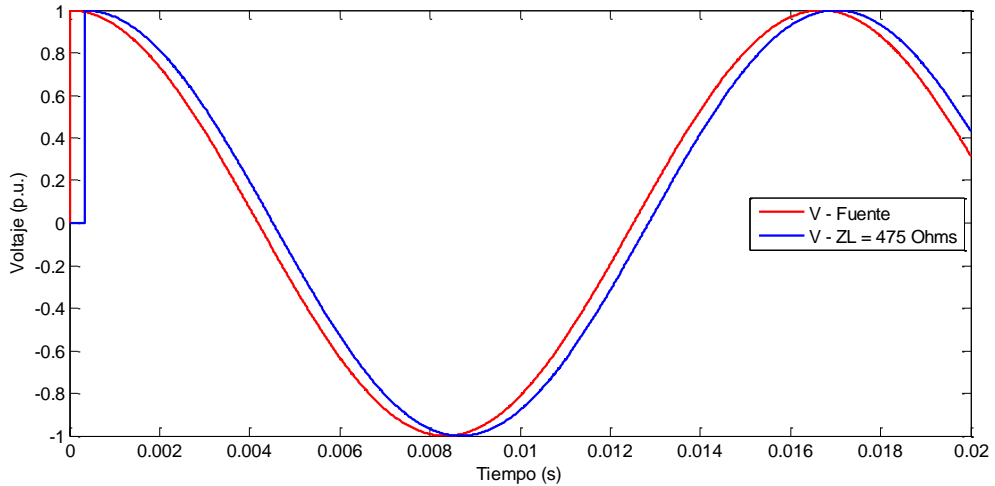
**Figura 5.13.** Sobretensión transitoria debida a descarga atmosférica en línea con carga de  $10\text{ K}\Omega$ .

Por medio de las simulaciones realizadas se observa que para el caso de la línea abierta la manera de evitar sobretensiones es energizar en un punto donde la forma de onda cosenoidal tome un valor cercano a cero. Ver Figura 5.11.

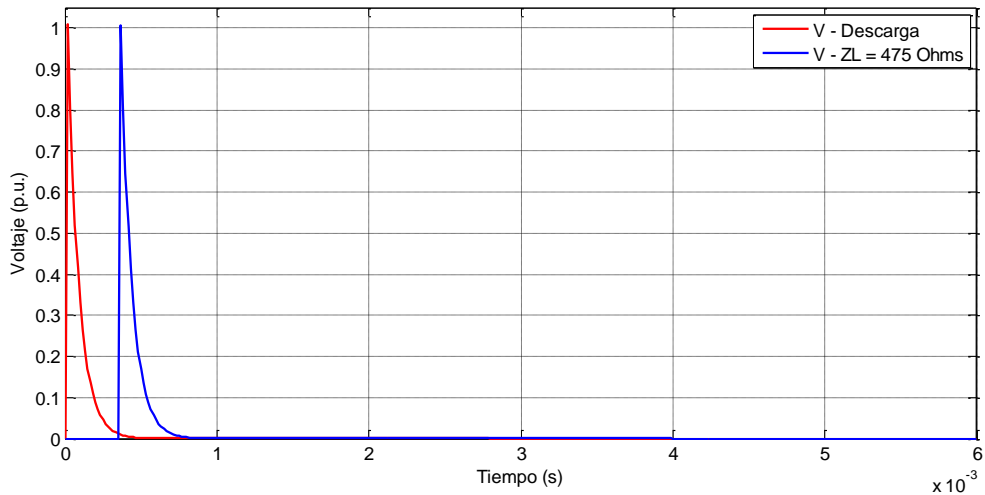
Cuando la línea tiene una impedancia de carga, lo ideal es que esta tenga un valor cercano a la impedancia característica de la línea para evitar sobretensiones transitorias. Esto se demuestra en las Figuras 5.14, 5.15 y 5.16, donde se encontró que para una carga con valor igual o menor a  $475\ \Omega$ , la sobretensión prácticamente desaparece, incluso para la descarga atmosférica.



**Figura 5.14.** Anulación de sobretensión transitoria con carga de  $475\ \Omega$ ; fuente escalón unitario.



**Figura 5.15.** Anulación de sobretensión transitoria con carga de 475  $\Omega$ ; fuente cosenoidal.

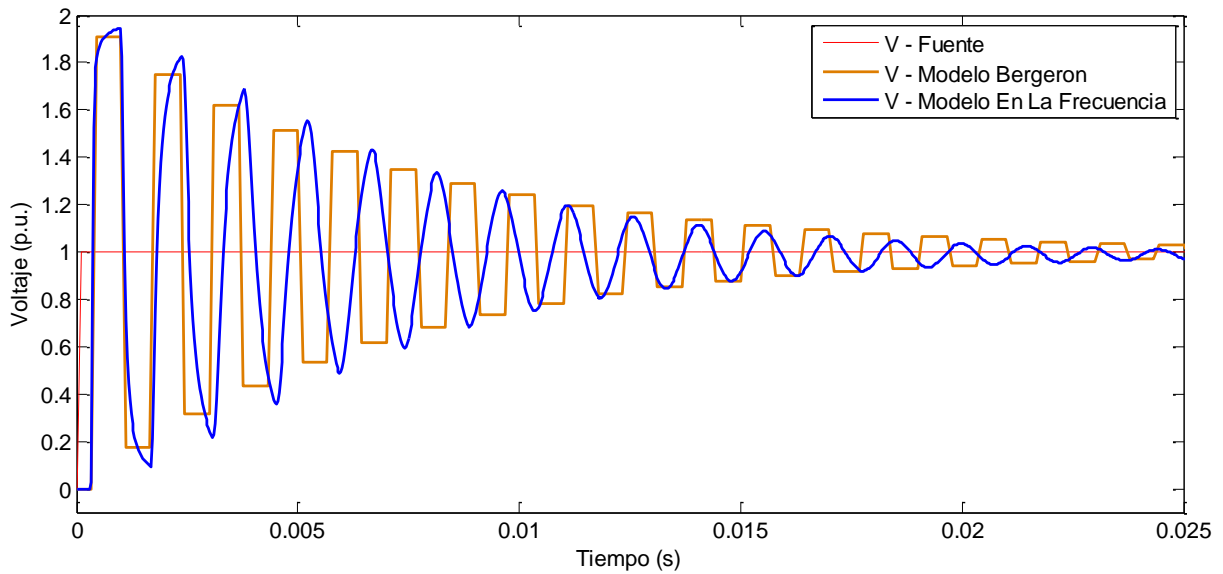


**Figura 5.16.** Anulación de sobretensión transitoria, debida a descarga atmosférica, con carga de 475  $\Omega$ .

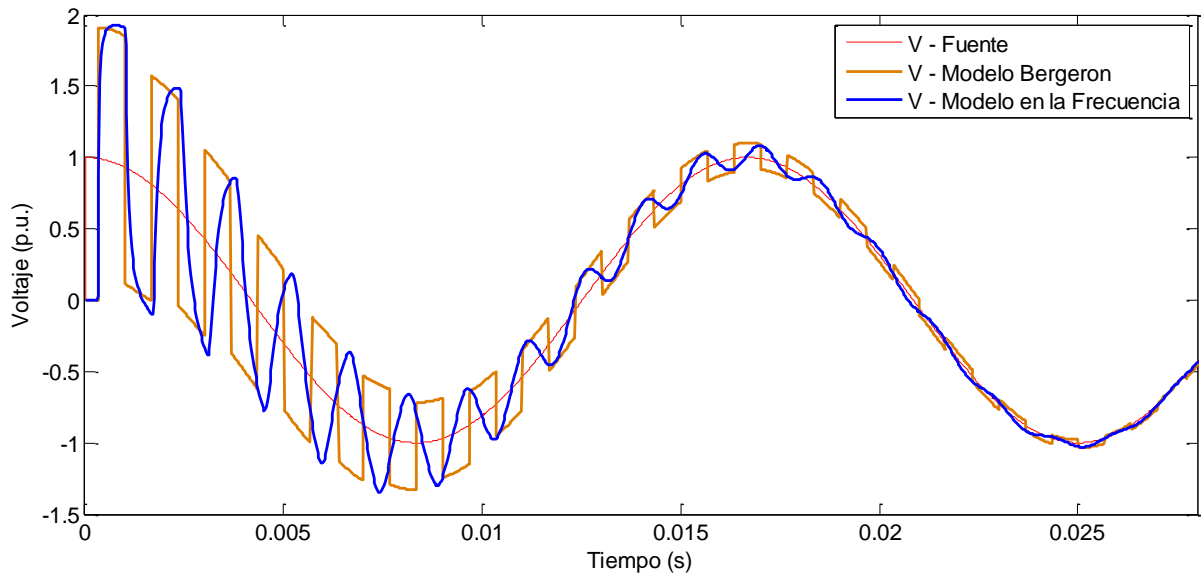
### 5.3 Validación de la Programación del Modelo de Bergeron

Con el propósito de validar la implementación realizada del Modelo de Bergeron, se realizan simulaciones con el Modelo en la Frecuencia con los mismos valores utilizados en los casos expuestos anteriormente. Los resultados muestran pequeñas variaciones entre ambos modelos y esto es porque a diferencia de Bergeron el Modelo en la Frecuencia considera las pérdidas en la línea y el efecto piel en los conductores. Ver Figuras 5.17 y 5.18.

Con las comparaciones mostradas en las Figuras 5.17 y 5.18, se pudo demostrar que el código desarrollado en MATLAB para la simulación de sobretensiones transitorias en líneas de transmisión es correcto y que aunque el Modelo de Bergeron se realizó para el caso de línea sin pérdidas los resultados no se alejan mucho para cuando estas son consideradas.



**Figura 5.17.** Comparación de resultados entre el Modelo en la Frecuencia y Bergeron, para la simulación de sobretensión transitoria; fuente escalón unitario.



**Figura 5.18.** Comparación de resultados entre el Modelo en la Frecuencia y Bergeron, para la simulación de sobretensión transitoria; fuente cosenoidal.

## 6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES PARA TRABAJOS FUTUROS

### 6.1 Conclusiones

Contar con la programación de un modelo que permita determinar con anticipación las sobretensiones transitorias en una línea de transmisión, es un recurso necesario en el diseño de un Sistema Eléctrico de Potencia, debido a que con el se podrán simular diversas situaciones en las cuales se pueden ver afectadas las líneas de transmisión y al mismo tiempo el suministro eléctrico de las cargas (usuarios).

El Modelo Bergeron se desarrolló con el propósito de simular sobretensiones transitorias en las líneas de transmisión estudiando el caso monofásico como primer fundamento para comprender el tema de transitorios, debido a que este es un modelo para líneas uniformes y sin pérdidas.

Se realizaron simulaciones para los siguientes casos de sobretensiones transitorias:

- ❖ Comportamiento de sobretensión transitoria debida a la energización de una línea abierta, para la forma de onda senoidal y escalón.
- ❖ Comportamiento de sobretensión transitoria debida a la energización de una línea con una carga resistiva de  $10\text{ k}\Omega$ , para la forma de onda senoidal y escalón.
- ❖ Comportamiento de sobretensión transitoria debida a la energización de una línea con diferentes cargas ( $1000, 800$  y  $600\Omega$ ), para la forma de onda senoidal y escalón.
- ❖ Comportamiento de la sobretensión transitoria debida a la energización de una línea en tiempo diferente de cero de la onda cosenoidal, observando que cuando el tiempo de cierre es próximo al instante donde la forma de onda adquiere un valor cero, la sobretensión se amortigua más rápidamente incluso en el caso de línea abierta.
- ❖ Comportamiento de sobretensión transitoria debida a una descarga atmosférica directa en la línea.

- ❖ Comportamiento de sobretensión transitoria para un valor de carga ante el cual cualquiera de las sobretensiones mencionadas en los puntos anteriores sea nula.
- ❖ Validación del Modelo de Bergeron programado en MATLAB en comparación con los valores obtenidos por el Modelo en la Frecuencia.

Como se muestra en el capítulo anterior, la programación de Bergeron resulta valida pues los resultados de este con respecto al Modelo en la Frecuencia presenta sólo algunas diferencias y esto es debido a que el Modelo en la Frecuencia considera las pérdidas y el efecto piel en el conductor, sin embargo, a pesar de este hecho Bergeron realiza una aproximación aceptable.

## **6.2 Recomendaciones y Trabajos Futuros**

1. Validar el Modelo de Bergeron con ATP/Draw.
2. Simular el comportamiento de una sobretensión transitoria en una línea de transmisión no uniforme.
3. Análisis de sobretensiones transitorias en las líneas de transmisión incluyendo apartarrayos.
4. Programar el Modelo de Bergeron para una línea con pérdidas.
5. Desarrollo y programación del Modelo de Bergeron para el caso de líneas multiconductoras.
6. Aplicar el Modelo de Bergeron para redes radiales y anilladas.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Harper, G. E. (s.f.). *Elementos De Diseño De Subestaciones Eléctricas*. México: Limusa.
- [2] Paul, C. R. (1994). *Analysis Of Milticonductor Transmission Lines*. New York: John Wiley & Sons Inc.
- [3] Restrepo, L. H., Delgado, G. C., & Aranda, F. C. (2008). Modelos de línea de transmisión para transitorios electromagnéticos en sistemas de potencia. *Energía y Computación*, 21-32.
- [4] Harper, G. E. (2014). *Sistemas De Transmisión Y Distribución De Potencia Eléctrica*. México: Limusa.
- [5] Rosas, R. M. (2003). *Tecnología Eléctrica*. Barcelona.
- [6] Serway, R. A. (2009). *Física Para Ciencias E Ingeniería Con Física Moderna*. México: CENGAGE Learning.
- [7] Mujal, R. M. (2013). *Cálculo de Líneas y Redes Eléctricas*. Barcelona: UPC.
- [8] Castaño, S. R. (2014). *Redes de Distribución de Energía*. Colombia: Manizales.
- [9], C. (1991). *Coordinación de Aislamiento*. Especificación CFE L0000-06.
- [10] Sluis, L. V. (2001). *Transients In Power Systems*. New York: John Wiley & Sons.
- [11] Stevenson, W. D. (1996). *Análisis De Sistemas De Potencia*. México: Mc. Graw Hill.
- [12] Talavera, G. G. (1998). *Análisis Fisicomatemático de Redes Eléctricas*. México: LIMUSA.

- [13] Velasco, J. A. (2007). *Coordinación de aislamiento en redes eléctricas de alta tensión*. México: McGraw-Hill .
- [14] A. Greenwood, *“Electrical Transients in Power Systems”*. Second edition, John Wiley & Sons, Inc.
- [15] L. A. Siegert C., *“Alta Tensión y Sistemas de Transmisión”*. LIMUSA. México D. F. 1989.
- [16] Electromagnetic Transient Program (EMTP – Theory Book), Portland, USA , July 1995.
- [17] J. Martí, *“Accurate Modelling of Frequency-Dependent Transmission Lines in Electromagnetic Transient Simulations”*, IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, vol. PAS-101, no. 1, January 1982.
- [19] L. Martí, *“Simulation of Transients in Underground Cables with Frequency-Dependent Modal Transformation Matrices”*, IEEE Trans. Power Delivery, vol. 3, no. 3, July 1988.
- [20] B. Gustavsen and A. Semlyen, *“Combined Phase Domain and Modal Domain Calculation of Transmission Line Transients Based on Vector Fitting”*, IEEE Trans. Power Delivery, vol. 13, no. 2, April 1998.
- [21] A. Morched, B. Gustavsen and M. Tartibi, *“A Universal Model for Accurate Calculation of Electromagnetic Transients on Overhead Lines and Underground Cables”*, IEEE Trans. Power Delivery, vol. 14, no. 3, July 1999.
- [22] P. Moreno, P. Gomez and Jose L. Naredo and J. L. Guardado, *“Frequency Domain Transient Analysis of Electrical Networks Including Non-Linear Conditions”* Electrical Power and Energy Systems 27 (2005) 139–146.

En este apartado se encuentra el código implementado en MATLAB para el cálculo de sobretensiones transitorias en una línea de transmisión monofásica sin pérdidas. Para la simulación de todos los casos expuesto en el Capítulo 5, solo es necesario realizar pequeñas modificaciones al código raíz, el cual se encuentra ordenado de tal manera que cumpla con el diagrama de flujo expuesto en el mismo capítulo.

En todos los casos es indicado cuales son los parámetros que pueden ser modificados para poder realizar las simulaciones, dichos parámetros son aquellos que se encuentran señalados con la siguiente marca: **->**.

## Anexo I. Código Simulación Fuente Función Escalón

```

%Solución De La Línea Por El Modelo De Bergeron
clc, clear all
%%
% -Datos De La Línea-
long=100000;    % -> Longitud de la línea (metros).
r=0.02;        % -> Radio del conductor (metros).
h=28;         % -> Altura a la que se encuentra el conductor (metros).

% -Datos Generales-
s=20;         % -> Número de At equivalentes a un tao.
vel=3e8;     %   Velocidad de propagación de la energía en la línea.
e=long/vel;  %   Tao = tiempo de viaje, múltiplo de 'At'.
At=e/s;     %   Incremento de tiempo en segundos.
Tobs=0.035; % -> Tiempo de observación de la sobretensión transitoria
              (segundos).
T=[0:At:Tobs]; %   Tiempo de muestreo (segundos).

% -Datos Lado De La Fuente-
k=length(T); %   Constante auxiliar.
E(1,1:k)=1;  %   Magnitud de la fuente en por unidad.
ZF=0.01;     % -> Impedancia de la fuente (ohms).
YF=1/ZF;    %   Admitancia de la fuente (ohms).
IF=E*YF;    %   Corriente de la fuente.

% -Datos Lado De La Carga-
ZL=1e9;     % -> Impedancia de la carga (ohms).
YL=1/ZL;    %   Admitancia de la carga.

```

```

%%
% -Cálculo De Parámetros Eléctricos-
Mo = 4*pi*1e-7;           % Permeabilidad del vacío.
Eo = 1e-9/(36*pi);       % Permitividad del vacío.
C = (2*pi*Eo)/(log(2*h/r)); % Capacitancia.
L = (Mo/(2*pi))*log(2*h/r); % Inductancia geométrica.
Zc=sqrt(L/C);            % Impedancia característica de la línea.
Yc=inv(Zc);              % Admitancia característica de la línea,
                          Zc=inv(Yc).

%%
% -Cálculo De Tensiones Transitorias-
Yaa=[Yc+YF 0;0 Yc+YL];   % Y barra.
Zaa=inv(Yaa);            % Z barra.
V=zeros(2,k+s); I=zeros(2,k+s); % Vectores auxiliares.

for t=s+1:k+s;
IH0(t)=-Yc*V(1,t-s)-I(1,t-s); % Corriente De Historia (IOHist)
IHL(t)=-Yc*V(2,t-s)-I(2,t-s); % Corriente De Historia (ILHist)
V(:,t)=Zaa*([IF(t-s)-IHL(t); -IH0(t)]); % Tensiones transitorias.
I(1,t)=Yc*V(1,t)+IHL(t); % Corriente lado de la fuente.
I(2,t)=Yc*V(2,t)+IH0(t); % Corriente lado de la carga.
end

%%
% -Gráfica De Sobretensión-
plot(T,V(1,s:k+s-1),'r'), hold on % Voltaje en lado de la fuente.
xlabel ('Tiempo (s)'); ylabel('Voltaje (p.u.)');
plot(T,V(2,s:k+s-1),'b'), hold on % Voltaje en lado de la carga.
xlabel ('Tiempo (s)'); ylabel('Voltaje (p.u.)');

```

## Anexo II. Código Simulación Fuente Cosenoidal

Para obtener la fuente con forma de onda cosenoidal se utiliza en general todo el código del Anexo I. Sólo se sustituyen los datos enmarcados en azul, por:

```

E = cos (377*T);           % Magnitud de la fuente en por unidad.
ZF=0.01;                  % -> Impedancia de la fuente (ohms).
YF=1/ZF;                  % Admitancia de la fuente (ohms).
k=length(T);              % Constante auxiliar.
IF=E*YF;                  % Corriente de la fuente.

```

## Anexo III. Código Simulación Cierre de Interruptor en Tiempo Diferente de Cero

Para poder simular variaciones del tiempo de energización de la línea de transmisión, al igual que el Anexo II, sólo es necesario sustituir toda la sección enmarcada con línea punteada azul en el Anexo I, por los siguientes renglones:

```

Tcierre = 0.016; % -> Tiempo de cierre del interruptor.
Tc=find(T > Tcierre); % Función auxiliar.
n=Tc(1); % Variable auxiliar.
E=zeros(1,length(T)); % Magnitud de la fuente en por unidad
para el tiempo Tcierre.
E(n:end)= cos (377*T(n:length(T))); % Magnitud de la fuente en por unidad
para el tiempo Tcierre.
ZF=0.01; % -> Impedancia de la fuente (ohms).
YF=1/ZF; % Admitancia de la fuente (ohms).
k=length(T); % Constante auxiliar.
IF=E*YF; % Corriente de la fuente.

```

## Anexo IV. Código Simulación Descarga Atmosférica

Para este último caso, sustituir los renglones enmarcados con línea punteada azul y línea punteada naranja del Anexo I, respectivamente, por los siguientes renglones:

### 1. Para la sección enmarcada con línea punteada azul.

```

k=length(T); % Constante auxiliar.
alf1=1/0.21e-6; % Constante 1 para el cálculo de la
descarga atmosférica.
alf2=1/75e-6; % Constante 2 para el cálculo de la
descarga atmosférica.
A=1.26; % Amplitud de la tensión.
E=-A*(exp(-T*alf1)-exp(-T*alf2)); % Tensión debida a descarga
atmosférica.
ZF=0.01; % -> Impedancia de la fuente (ohms).
YF=1/ZF; % Admitancia de la fuente (ohms).
IF=E*YF; % Corriente de la fuente.

```

### 2. Para la sección enmarcada con línea punteada naranja.

```

plot(T,E,'r'),grid, hold on % Tensión debida a descarga
atmosférica.
plot(T,V(2,s:k+s-1),'b'), hold on % Voltaje en lado de la carga.
xlabel ('Tiempo (s)'); ylabel('Voltaje (p.u.)');

```