BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE PENDIENTE APOYADO POR LA CALCULADORA GRÁFICA DESMOS Y FUNDAMENTADO EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA EN EL NIVEL MEDIO SUPERIOR

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MAESTRO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA

ING. EDUARDO CRUZ MÁRQUEZ

DIRECTOR DE TESIS

DRA. RUTH GARCIA SOLANO

CODIRECTOR DE TESIS

DRA. LIDIA AURORA HERNANDEZ REBOLLAR

PUEBLA, PUE. MAYO 2025

BUAP

Dr. Severino Muñoz Aguirre
Secretario de Investigación y Estudios de Posgrado
P R E S E N T E

Por este medio le informo que el C:

ING. EDUARDO CRUZ MARQUEZ

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 04 de diciembre de 2024, con la tesis titulada:

"LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE PENDIENTE APOYADO POR LA CALCULADORA GRÁFICA DESMOS Y FUNDAMENTADO EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA EN EL NIVEL MEDIO SUPERIOR"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A t e n t a m e n t e
H. Puebla de Z., 29 de abril de 2025

Dra. Estela de Lourdes Juárez Ruiz
Coordinadora de la Maestría en Educación Matemática.

EDLJR / agm

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 Sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Agradecimientos al CONAHCyT

Con el más profundo agradecimiento, quiero reconocer al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCyT) por haberme otorgado su apoyo, permitiéndome cursar una maestría profesionalizante en el área de la educación matemática. Este respaldo no solo me brindó la oportunidad de especializarme en este campo, sino que también representó un pilar fundamental en mi crecimiento académico y profesional.

Este apoyo tuvo un impacto significativo en mi formación como investigador, ya que me permitió adentrarme en el proceso que conlleva el desarrollo de un proyecto de investigación, un ámbito que, hasta el momento en que ingresé al posgrado, desconocía por completo. La oportunidad de ser parte de este proceso de elaboración de una tesis ha sido una experiencia profundamente enriquecedora. A lo largo de este camino, adquirí herramientas fundamentales que no solo consolidaron mis conocimientos, sino que también me ayudaron a desarrollar una visión más crítica sobre la enseñanza de las matemáticas, fortaleciendo tanto mi labor docente como mi perspectiva sobre la educación matemática.

Haber concluido este trabajo hace que el esfuerzo haya valido la pena, y esto me llena de satisfacción, no solo por el logro personal, sino porque confío en que esta investigación pueda ser una aportación valiosa para docentes y estudiantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. De igual forma, espero que motive a otros investigadores a seguir impulsando estudios que contribuyan al desarrollo de la educación matemática en México, promoviendo estrategias innovadoras de enseñanza y fomentando la mejora continua en el ámbito educativo.

Dedicatorias

En esta sección especial, quiero expresar mi más profundo agradecimiento a todas aquellas personas que fueron parte de este recorrido y desempeñaron un papel fundamental para que hoy pueda culminarlo con éxito.

A DIOS, por darme la fortaleza, el compromiso y la motivación para no decaer en este camino. Gracias por darme la claridad y sabiduría para superar cada obstáculo, incluso en los momentos de mayor incertidumbre.

A mis papás, Elizabeth y Wuillibaldo, pilares fundamentales en mi vida. Gracias por darme su amor incondicional, su comprensión y su constante apoyo. Sus palabras de aliento, consejos y motivación fueron clave para seguir adelante, dándome la confianza y tranquilidad necesaria en los momentos más desafiantes. Aprecio profundamente su paciencia y el respeto por mis tiempos, cuando sabían que me encontraba realizando tareas, proyectos, o escribiendo esta tesis.

A la Dra. Ruth, directora de esta tesis, por su orientación y acompañamiento durante este proceso. A pesar de incorporarse en una etapa avanzada por circunstancias ajenas, su guía y conocimientos permitieron recuperar el ritmo y culminar exitosamente el trabajo.

A las Dra. Estela y Dra. Lidia, por sus comentarios oportunos, su acompañamiento y consejos siempre asertivos y constructivos. Gracias por su disposición y compromiso con el propósito de lograr un resultado sólido y exitoso.

A la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, por brindarme el espacio y las instalaciones adecuadas para mi formación académica. A mis profesores y cuerpo docente del posgrado en Educación Matemática, quienes con su conocimiento y experiencia me permitieron adentrarme en el fascinante mundo de la investigación en esta área.

A mis compañeras y compañeros de la maestría, con quienes compartí este enriquecedor camino. Gracias por el compañerismo, por las sonrisas que alivianaron los momentos difíciles y por hacer de esta experiencia algo más significativo. Cada obstáculo fue más llevadero gracias a su apoyo y entusiasmo. Me llevo los mejores recuerdos de este tiempo compartido.

A todas y todas, por estar y ser parte de este logro, ¡¡¡¡Muchas Gracias!!!!

Resumen

El presente estudio analiza la comprensión del concepto de pendiente de estudiantes del nivel Medio Superior cuando interactúan con una secuencia didáctica fundamentada bajo los 6 principios de la Educación Matemática Realista (RME) y mediada por la calculadora gráfica Desmos. El problema central radica en la baja comprensión de este concepto, debido a que su enseñanza tradicional se enfoca en procedimientos algorítmicos, dejando de lado su significado conceptual y diversas concepciones, lo que dificulta una comprensión profunda. Para atender a esta problemática, se diseñó e implementó un instrumento de intervención compuesto por una serie de tareas que partieran de una situación realista. Dicho instrumento integra 8 de las 11 conceptualizaciones de la pendiente reportadas en la literatura, favoreciendo una comprensión más integral del concepto. El marco teórico se basa en la RME, teoría que se enfoca en la matematización progresiva, desde situaciones contextuales como punto de partida, hasta llegar a un conocimiento matemático formal. La metodología utilizada fue el experimento de enseñanza, abordado desde un enfoque cualitativo, en el que se analizaron las respuestas de los estudiantes a partir de los 6 principios de la RME. Los resultados indican que los estudiantes lograron conectar una situación real con representaciones gráficas y algebraicas, favoreciendo su aprendizaje. Sin embargo, se presentaron algunas dificultades en la matematización vertical, ya que algunos estudiantes tuvieron problemas para generalizar una definición formal del concepto, a pesar de haber comprendido correctamente el contexto planteado. Se concluye que la integración de tecnología es una herramienta eficaz para fomentar la comprensión conceptual de la pendiente, pero se destaca la necesidad de una adecuada orientación docente. Se recomienda replicar el estudio en otros contextos educativos para evaluar su efectividad, así como seguir desarrollando investigaciones que promuevan una enseñanza integral de conceptos matemáticos, mediados por la tecnología digital.

Palabras clave: Pendiente de una recta, Educación Matemática Realista, Conceptualizaciones de la pendiente, Experimento de enseñanza

Abstract

This study analyzes the understanding of the concept of slope among upper secondary students when engaging with a didactic sequence based on the six principles of Realistic Mathematics Education (RME) and supported by the Desmos graphing calculator. The main issue lies in students' limited comprehension of this concept, as traditional instruction emphasizes algorithmic procedures while neglecting conceptual understanding and various conceptions, leading to a lack of deep comprehension. To address this problem, an intervention instrument was designed and implemented, consisting of a series of tasks grounded in a real-world context. This instrument incorporates 8 out of the 11 conceptions of slope reported in the literature, promoting a more comprehensive understanding of the concept. The theoretical framework is based on RME, which emphasizes progressive mathematization, transitioning from contextual situations to a formal mathematical understanding. The study follows a qualitative approach using the teaching experiment methodology, where students' responses were analyzed based on the six principles of RME. The findings indicate that students were able to connect real-world situations with graphical and algebraic representations, enhancing their learning. However, some difficulties persisted in vertical mathematization, as some students struggled to generalize a formal definition of the concept despite successfully relating to the given context. It is concluded that technology integration is an effective tool for fostering conceptual understanding of slope, though proper instructional guidance remains essential. Further research is recommended to test this approach in different educational contexts and to continue exploring teaching strategies that integrate technology for a more comprehensive mathematics education.

Keywords: Slope of a line, Realistic Mathematics Education, Slope conceptualization, Desmos, Teaching experiment

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

Introducción

El concepto de pendiente, tradicionalmente enseñado de forma algorítmica y descontextualizada, supone un reto en su introducción debido a su importancia dentro del currículo de la educación media superior en México. Por ello resulta imprescindible diseñar tareas que partan de situaciones realistas vinculando el contexto del estudiante con las matemáticas y promoviendo una comprensión profunda de conceptos abstractos.

El presente estudio intenta atender esta problemática, partiendo de un enfoque innovador, centrado en la enseñanza del concepto matemático con el apoyo de la tecnología digital y que facilite la transición de un aprendizaje que vaya desde lo informal hacia una formalización conceptual más sólida. Todo esto se enmarca desde los principios de la Educación Matemática Realista e incorporando una metodología que permita conectar de manera orgánica las matemáticas con la realidad contextual, transformando la experiencia del aprendizaje de las matemáticas.

El problema abordado en esta investigación radica en la limitada comprensión del concepto de pendiente en estudiantes de media superior, derivado de una enseñanza que privilegia el enfoque algorítmico a través de la fórmula algebraica que calcula el valor numérico de la pendiente. Esto deriva en un rendimiento bajo en los cursos actuales, así como en el estudio de cursos posteriores más avanzados.

Actualmente existen algunos estudios a nivel internacional que abordan el concepto en diferentes vertientes como el estado de la investigación actual, su conceptualización y los obstáculos de enseñanza-aprendizaje, por lo que aún es importante seguir contribuyendo con otras propuestas que partan de distintos enfoques y utilicen herramientas como la tecnología que puedan integrarse de manera efectiva en las opciones ya existentes y que exploren su eficacia dentro del aula para superar las dificultades presentadas en el proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto.

Así, el propósito de este estudio es diseñar, implementar, y analizar la eficacia de una secuencia de tareas basadas en el marco teórico de la Educación Matemática Realista, que integre 8 de las 11 conceptualizaciones de la pendiente reportadas en la literatura. Esta secuencia será mediada por la calculadora gráfica Desmos. Se pretende ayudar a los estudiantes a desarrollar una comprensión más profunda y significativa del concepto de pendiente de una línea recta en un curso de geometría analítica, con una propuesta que pueda servir como base o modelo replicable en otros contextos educativos.

El estudio adopta un enfoque cualitativo y metodológicamente se desarrolla a través de un experimento de enseñanza, que permita analizar los procesos de comprensión en el aprendizaje del concepto a través de tareas que fomentan la participación activa del estudiante en su proceso de aprendizaje y que faciliten la conexión de situaciones reales con las matemáticas. Las actividades progresan desde situaciones informales hasta conceptos formales, además de integrar diferentes subdominios o categorizaciones del concepto, apoyados de herramientas digitales que sean mediadores en el proceso y complementado con la guía de un facilitador que oriente una trayectoria coherente con un impacto tangible en el aprendizaje.

La tesis está estructurada en seis capítulos. El primero aborda una revisión de la literatura existente explorando los estudios actuales sobre la enseñanza-aprendizaje del concepto de pendiente y algunas propuestas que abonan a este proceso, así como las características y bondades ofrecidas por Desmos como herramienta tecnológica mediadora. El segundo capítulo presenta el planteamiento del problema, pregunta de investigación, objetivos (general y específicos) y la justificación de la realización del estudio. El tercero enmarca la investigación bajo la teoría de la Educación Matemática Realista, describiendo sus características y los seis pilares en los que se fundamenta este marco. El cuarto capítulo establece la metodología utilizada, detallando el experimento de enseñanza, así como una descripción general del proceso de desarrollo del instrumento. Por su parte, el quinto capítulo expone los resultados obtenidos de la implementación del instrumento, analizándolos bajo los seis principios de la RME a las respuestas más interesantes de los estudiantes a cada uno de los veinte ítems diseñados dentro del instrumento.

Finalmente, el sexto capítulo ofrece una sección de discusión y conclusiones conectando los resultados con la literatura revisada, concluyendo con propuestas y recomendaciones para futuras investigaciones.

Capítulo 1. Revisión de literatura

En México, la geometría analítica es una materia fundamental dentro del currículo de la educación media superior. Aunque el enfoque varía según el subsistema educativo, esta asignatura suele impartirse durante los últimos semestres del ciclo preuniversitario. Un concepto clave en el estudio de la geometría analítica es la pendiente, que se introduce como la razón de cambio entre las coordenadas y, x de una recta en el plano cartesiano.

Introducir correctamente el concepto de pendiente en un curso de geometría analítica, asignatura que se imparte con mayor profundidad en la educación Medio Superior en México, prepara a los estudiantes para comprender mejor los conceptos del cálculo diferencial, donde la derivada de una curva en un punto específico se interpreta como la pendiente de la tangente a esa curva en dicho punto. Sin embargo, el enfoque inicial en la geometría analítica resulta crucial, ya que proporciona a los estudiantes una intuición clara y concreta sobre cómo funcionan las pendientes en situaciones más simples tales como funciones lineales antes de abordar conceptos más avanzados en cursos posteriores como límites y derivadas.

1.1 Interpretaciones y dificultades en la comprensión de la pendiente

Existen varias interpretaciones de “pendiente” en el aula, tanto de estudiantes como profesores. Las estrategias más utilizadas en la enseñanza están asociadas a la razón de cambio que se relaciona ampliamente con elementos básicos de razones y relaciones proporcionales (Abreu et al., 2020). En este sentido Stump (2001b) realizó una investigación sobre la comprensión de pendiente como medida en estudiantes de precálculo. En este estudio los estudiantes respondieron a preguntas acerca de situaciones del mundo real, como aquellas situaciones físicas que involucraban la pendiente como una medida de inclinación y de situaciones funcionales que involucraban la pendiente como una medida de la razón de cambio.

Las investigaciones en este tema se han centrado en tres líneas de seguimiento, la conceptualización de pendiente que tienen estudiantes y profesores, los obstáculos que enfrentan al estudiarlo, y el proceso de enseñanza-aprendizaje que implica. Sin embargo, los estudios en estas tres direcciones siguen en desarrollo (Deniz y Kabael, 2017).

Varias pueden ser las causas de la desconexión del conocimiento matemático por parte de los estudiantes, algunas de las cuales pueden estar relacionadas con los métodos de enseñanza, estrategias y materiales didácticos usados por los profesores. Se considera que la conexión y transferencia del conocimiento deben ser promovidas principalmente por los profesores y libros de texto (Dolores et al., 2020). En México, el proceso de enseñanza-aprendizaje privilegia en gran medida, la adquisición del conocimiento de este tema de una manera procedimental, enfocándose en la parte algorítmica y relegando el desarrollo del concepto en todas sus conceptualizaciones. (Rivera et al., 2019).

Abordar un concepto matemático, concibiéndolo desde una problemática con enfoque contextualizado, incrementa las posibilidades de aplicarlo en la vida real. Por ello la tarea escolar debe poseer una alta representatividad, permitiendo que los estudiantes tengan una mayor tendencia a aplicar el conocimiento en situaciones fuera del aula. Así mismo Niss (1992) describe: una auténtica situación extra matemática como aquella que está incrustada en una práctica o área temática real existente fuera de las matemáticas, y que trata con objetos, fenómenos, cuestiones o problemas que son genuinos de esa área y son reconocidos como tales por las personas que trabajan en ella.

En la literatura revisada hasta la realización de este estudio, se demuestra que estudiantes afrontan importantes dificultades conceptuales y procedimentales al trabajar con la pendiente en su formación académica, lo que impide la correcta comprensión del concepto. De acuerdo con Cho y Nagle (2017), muchos estudiantes cometen errores al calcular la pendiente debido a una comprensión inadecuada del concepto, confundiéndola con el algoritmo 'rise/run’, lo que los lleva a limitarse a la interpretación más simple de esta expresión. (p. 140).

Existen diversas investigaciones que han abordado las dificultades del aprendizaje del concepto de pendiente, así como las diversas conceptualizaciones en que se concibe, las cuales influyen en cómo los estudiantes las estudian y comprenden. Stump (2001b) identificó inicialmente algunas de estas conceptualizaciones, que más tarde serían ampliadas y complementadas por Moore-Russo et al. (2011), teniendo 11 diferentes formas de conceptualizar a la pendiente, las cuales son: razón geométrica, razón algebraica, propiedad física, propiedad funcional, coeficiente paramétrico, concepción trigonométrica, concepción en cálculo, situación del mundo real, propiedad determinante, constante lineal e indicador de comportamiento. Estas conceptualizaciones tienen implicaciones en su enseñanza y aprendizaje. Se abordarán y presentarán sus definiciones en la sección de metodología.

El estudio de estas conceptualizaciones ha sido tratado en diferentes trabajos de investigación. Por ejemplo, Dolores et al. (2022) analizaron como se incluyen en los libros de texto, mientras que en Rivera et al. (2019) se evalúa la comprensión de estudiantes universitarios sobre estas. También, Dolores et al. (2022) encontraron que en el curriculum colombiano, las conceptualizaciones predominantes en el nivel Medio Superior son la propiedad funcional y la situación del mundo real.

Por otra parte, Deniz y Uygur-Kabael (2017) observaron cómo los estudiantes lograban conectar conocimientos informales con una comprensión más formal del concepto, a través de las conceptualizaciones como la propiedad geométrica y la razón algebraica en el contexto de la Educación Matemática Realista (RME). Esto indica que, la inclusión de diferentes conceptualizaciones en el aula puede facilitarles a los estudiantes su comprensión a través de diferentes representaciones, tales como gráficas, algebraicas y contextuales, generando así una comprensión más integral del concepto.

Asimismo, Sánchez et al. (2022) destacan los problemas que estudiantes en México presentan al no interpretar correctamente significados geométricos y algebraicos, por ejemplo, al confundir la altura con el eje “y”, lo que genera obstáculos en su comprensión numérica. Estos hallazgos sugieren que el problema no es exclusivo del sistema educativo mexicano, sino que también se presenta en otros países como Colombia, indicando que pudiera ser un patrón recurrente en distintos contextos educativos.

Otros estudios también se han centrado en estudiar las conceptualizaciones de la pendiente, así como el análisis de documentos curriculares de Colombia, específicamente los Estándares Básicos de Competencias (EBC) y los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA). "Este artículo da cuenta de una investigación enfocada en explorar qué conceptualizaciones de la pendiente se promueven en el currículum colombiano de matemáticas" (Dolores et al., 2022, p. 217). Las conceptualizaciones predominantes fueron la propiedad funcional y la concepción en cálculo, que varían según el nivel educativo, pero con mayor enfoque en los niveles de secundaria y nivel Medio Superior. "En los EBC y DBA de la secundaria incrementa la cantidad de conceptualizaciones y se pone énfasis en la propiedad funcional y en la situación mundo real" (Dolores et al., 2022, p. 234).

La enseñanza efectiva del concepto de pendiente en la geometría analítica puede reducir significativamente las dificultades que los estudiantes enfrentan al estudiar cálculo. Una sólida comprensión de la pendiente facilita una transición más fluida hacia la derivada, ayudando a los estudiantes a ver la conexión entre la pendiente de una recta y la de una curva en un determinado punto. Además, una comprensión clara de este concepto permite a los estudiantes aplicar este conocimiento en diversos contextos matemáticos y científicos. Deniz y Uygur-Kabael (2017) sugieren que el uso de modelos dinámicos en el aula puede facilitar la transición de los estudiantes entre diferentes representaciones de la pendiente, promoviendo una transición más digerible que facilite un entendimiento mayormente profundo del concepto matemático.

1.2 La Educación Matemática Realista y su aplicación en la enseñanza de la pendiente

La Educación Matemática Realista, conocida como RME, por sus siglas en inglés (Realistic Mathematics Education) es una teoría ampliamente utilizada en el campo de la educación matemática para la enseñanza de diversos conceptos matemáticos, como el de la pendiente. El enfoque de esta teoría desarrollada por Freudenthal (1991) coloca al estudiante como eje central de su propio aprendizaje, en el cual construye su conocimiento a partir de situaciones cotidianas o de la vida real. Además, se sustenta en una matematización progresiva en la que los estudiantes parten de conocimientos informales hasta llegar a conceptos más formales y abstractos (Gravemeijer y Cobb, 2006).

La aplicación de la educación matemática realista en la enseñanza ha demostrado una mejora en la comprensión de conceptos matemáticos por parte de los estudiantes al permitirles conectar experiencias reales con el conocimiento formal matemático (Deniz y Uygur-Kabael, 2017). Algunos estudios han demostrado que, al trabajar con contextos realistas y vivenciales, los estudiantes comprenden mejor y construyen representaciones matemáticas más significativas, en contraste con aquellos que solo utilizan métodos mecanizados y más tradicionales en la resolución de ejercicios para su aprendizaje (Khasanah y Siswono, 2025). Por su parte Netriwati et al. (2025) destacan la importancia de la Educación Matemática Realista en el pensamiento geométrico y algebraico, lo cual permite establecer conexiones más sólidas entre ambas representaciones, algo que resulta imprescindible en la enseñanza de la pendiente.

La teoría RME ha sido utilizada no solo para la enseñanza de la pendiente, sino también para promover la enseñanza de otros conceptos matemáticos y permitir abordarlos desde perspectivas basadas en el contexto del estudiante (Aprilia y Zuliana, 2025). Estos estudios hacen énfasis en el uso de experiencias reales, así como modelos visuales que faciliten la transición de conocimientos informales hasta una comprensión más abstracta y estructurada de los conceptos matemáticos.

Algunas investigaciones recientes destacan el rol del estudiante como un factor importante en su propio aprendizaje desarrollando estrategias para la resolución de problemas matemáticos en contextos realistas. Bui et al. (2021) encontraron que el uso de la RME para la enseñanza de la estadística promovió que los estudiantes tuvieran que encontrar soluciones estructuradas y organizadas para resolver problemas, lo que sugiere que este enfoque puede funcionar para otros conceptos matemáticos como el de la pendiente. Por su parte Eisenhut (2024) enfatiza que, para generar una comprensión profunda de conceptos matemáticos, se deben implementar proyectos que partan de situaciones realistas que promuevan la reflexión y el pensamiento crítico en los estudiantes.

El enfoque de la EMR ha sido ampliamente utilizado en la enseñanza de diversos conceptos matemáticos, mostrando cómo su correcta aplicación arroja resultados prometedores, pues facilita la conexión entre distintas representaciones matemáticas, ayudando a los estudiantes a superar la mecanización y promoviendo un aprendizaje basado en la comprensión profunda y aplicable a los contextos reales vividos por los estudiantes.

1.3 La tecnología en la enseñanza y el uso de Desmos

La implementación de tecnología en educación adquirió una relevancia importante durante la pandemia, la cual obligó a suspender las clases presenciales. Esto llevó a que los docentes experimentaran una transición significativa de la enseñanza tradicional hacia la enseñanza en línea en México durante los años 2020, 2021 y parte del 2022. En este contexto, la competencia digital docente se volvió indispensable para proporcionar educación de calidad, intentando emular las clases presenciales en la medida de lo posible. Considerando que las herramientas tecnológicas seguirán evolucionando, es fundamental que los profesores continúen actualizándose en este ámbito para integrarlas de manera efectiva en sus prácticas pedagógicas.

Los estudiantes actuales han crecido en una era digital, adaptándose con facilidad a diversas tecnologías, lo que representa una oportunidad para aprovechar estas herramientas en beneficio de su aprendizaje, generando entornos dinámicos e interactivos que potencien su pensamiento analítico-reflexivo. En un estudio realizado en un curso para futuros profesores de matemáticas, se evidenció que el uso de tecnologías como GeoGebra facilita la transición de los estudiantes entre diferentes representaciones de conceptos matemáticos, mejorando su comprensión (Cullen et al., 2020).

En educación matemática, varios softwares facilitan el análisis conceptual desde otras perspectivas. Sin embargo, se debe cuestionar ideas generalizadas sobre que lo digital induce espontáneamente mayor reflexión, sin una implementación intencionada (Trouche y Guin, 1998). La incorporación de la computadora u otro dispositivo puede ser útil en la enseñanza matemática si, mediante un correcto diseño docente contextualizado a los estudiantes, activa sus esquemas mentales para construir instrumentos (conjunto de artefacto y esquemas de utilización) que resuelvan las tareas propuestas (Artigue y Trouche, 2021).

La tecnología debe incorporarse de manera óptima, analizando dónde aporta valor agregado, en lugar de usarla superficialmente. Su implementación en la enseñanza de las matemáticas no debe centrarse únicamente en mostrar cómo utilizarla, sino en cómo esta puede apoyar el aprendizaje matemático, promoviendo ciclos de prueba y facilitando la representación múltiple de conceptos matemáticos (Cullen et al., 2020). Por su parte, Alvarez y Galman (2024) remarcan la idea de que la integración de la tecnología en el aula debe ir más allá de una simple demostración de habilidades técnicas en esta área. Por ello, es fundamental que los docentes se preocupen por tener un entendimiento más profundo de los conceptos que pretenden enseñar, apoyándose en la tecnología que funcione como un puente que conecte la teoría matemática con aplicaciones prácticas realistas. Esta idea conecta con la necesidad de que los estudiantes no solo comprendan la pendiente como un algoritmo, sino desde una perspectiva del mundo real, unida a la tecnología.

De entre las herramientas digitales disponibles para la enseñanza de las matemáticas, Desmos ha ganado popularidad por su interactividad y facilidad de uso. Se trata de una aplicación educativa ampliamente utilizada que ofrece una calculadora gráfica interactiva que permite a los estudiantes visualizar gráficos geométricos basados en conceptos matemáticos de manera sencilla y efectiva, a partir de situaciones de la vida real, siguiendo el proceso de matematización vertical. Esto implica que los estudiantes desarrollan conceptos matemáticos relevantes partiendo de experiencias cercanas a su realidad. En este estudio, se busca que los estudiantes comprendan el concepto de "pendiente" identificando las ecuaciones de la recta y los parámetros relacionados con este concepto, generando dichas ecuaciones a partir de imágenes que ellos mismos capturan e insertan en el software.

Una de las principales ventajas de Desmos es su interfaz intuitiva, que facilita la exploración y comprensión de diversos temas matemáticos. Gracias a su diseño interactivo, los estudiantes pueden manipular ecuaciones y observar en tiempo real cómo cambian los gráficos, lo cual enriquece su comprensión visual y conceptual de las matemáticas. Esta característica convierte a Desmos en una herramienta valiosa tanto para el aprendizaje individual como para el uso en el aula. Otra ventaja destacada de Desmos es su accesibilidad, ya que se puede instalar fácilmente en dispositivos como smartphones y tabletas electrónicas, y aunque también está disponible en línea, no requiere conexión a internet para su uso. Su interfaz intuitiva y los comandos prácticos hacen que sea sencillo de implementar con estudiantes de nivel Medio Superior, quienes están acostumbrados a interactuar con la tecnología.

Para los docentes, Desmos ofrece múltiples funcionalidades que pueden integrarse en sus planes de estudio. Permite crear actividades personalizadas, compartir gráficos interactivos con los estudiantes y utilizar recursos ya disponibles en su biblioteca de actividades. Esto no solo hace que las lecciones sean más dinámicas y atractivas, sino que también facilita la enseñanza de conceptos matemáticos de una manera más accesible y comprensible (Michilena y Pazmiño, 2024).

De acuerdo con Alvarez y Galman (2024), la integración de recursos digitales, como Desmos, puede ayudar a potenciar significativamente la comprensión de conceptos matemáticos que pudieran parecer complejos o abstractos como la pendiente. También destacan que el uso de la tecnología puede facilitar la manipulación interactiva de funciones lineales, acciones que ayudan a los estudiantes a visualizar e internalizar los conceptos en un contexto aplicable y más dinámico.

En su estudio publicado, Alvarez y Galman (2024) destacaron la importancia de herramientas tecnológicas en el contexto educativo y específicamente para la enseñanza de la pendiente, señalando que pueden ser una excelente opción para abordarse de manera sencilla en situaciones del mundo real y para facilitar su comprensión en contextos de cálculo. Hallaron que aquellos estudiantes que utilizaron esta herramienta lograron fácilmente hacer conexiones entre las conceptualizaciones algebraicas y representaciones gráficas de la pendiente con su interpretación en cálculo diferencial, lo que sugiere que estas herramientas son muy útiles para conectar teoría y práctica.

De acuerdo con un artículo de Puhl (2019), los estudiantes que utilizaron Desmos, lograron una mejor comprensión de problemas que involucraban contextos de la vida real, además de mejorar en la resolución de problemas abstractos. Esto reafirma la idea de que la herramienta tecnológica facilita la conexión entre la teoría matemática y su aplicación práctica, además de ser un factor clave para un aprendizaje efectivo en un contexto más significativo. Los resultados del estudio de Puhl (2019) también indican que a los estudiantes se les facilitó la utilización de parámetros de funciones lineales con el uso de la aplicación de Desmos, visualizando de manera sencilla los efectos de los cambios a través de su manipulación. Esto genera una mayor comprensión, y les permite hacer conexiones entre las representaciones gráficas, con la parte algebraica, lo cual favorece una transición más sólida de una comprensión procedimental hacia una más conceptual.

Mediante la adecuada manipulación de los comandos en Desmos, los estudiantes pueden asociar imágenes del mundo real con las ecuaciones de la recta y el concepto de pendiente. Esto facilita un acercamiento práctico y visual a los símbolos matemáticos, conectando su aprendizaje con situaciones concretas y tangibles. Así, se pretende que los estudiantes no solo aprendan el concepto de pendiente a través de las ecuaciones de la recta, sino que también comprenden cómo estas se relacionan con su entorno cotidiano, logrando una comprensión más profunda y aplicada de las matemáticas (Vizcarra y Jiménez, 2023).

Así mismo, Puhl (2019) afirma que el uso de Desmos permite actuar como un mediador que contribuye a superar las limitaciones comunes de los estudiantes hacia la memorización. De esta forma no solo mejoraron su comprensión conceptual, sino que también adquirieron mayor capacidad para aplicarla en contextos del mundo real. Este enfoque resulta interesante, en la enseñanza de la pendiente, donde como ya se ha mencionado, se considera necesario que su aprendizaje se conecte con situaciones enriquecidas contextualmente.

Capítulo 2. Planteamiento del problema

2.1 Enunciado del problema

La limitada comprensión debido al uso excesivo de la enseñanza algorítmica y métodos procedimentales en la enseñanza del concepto de pendiente que tienen estudiantes de 3er semestre de educación media superior, periodo en el que se aborda el concepto de acuerdo con los Planes y Programas de estudio del Bachillerato General Estatal (BGE) del Estado de Puebla (2018).

2.2 Pregunta de investigación

¿Cómo comprenden los estudiantes de nivel Medio Superior el concepto de "pendiente" de una línea recta, al participar en una secuencia de aprendizaje apoyada por la calculadora gráfica Desmos?

2.3 Objetivos

2.3.1 General

Analizar la comprensión del concepto de pendiente en estudiantes de nivel Medio Superior al participar en una secuencia de aprendizaje diseñada bajo los principios de la Educación Matemática Realista (RME) y apoyada por la calculadora gráfica Desmos.

2.3.2 Específicos

1. Diseñar una secuencia didáctica apoyada por la calculadora gráfica Desmos, fundamentada en los principios de la Educación Matemática Realista, que promueva la comprensión del concepto de pendiente en estudiantes de nivel Medio Superior.
2. Aplicar la secuencia didáctica en estudiantes de 3er semestre del nivel Medio Superior del Centro Escolar Gral. Rodolfo Sánchez Taboada, para documentar su impacto en la comprensión del concepto de pendiente.
3. Interpretar los patrones de comprensión del concepto de pendiente surgidos a lo largo de la implementación de la secuencia didáctica, identificando los significados construidos por los estudiantes.

2.4 Supuesto

Se espera que la implementación de las tareas diseñadas bajo el marco de la Educación Matemática Realista y apoyadas por la calculadora gráfica Desmos, sirva como una estrategia efectiva en el aprendizaje del tema de pendiente, aprovechando el dinamismo e interactividad que esta herramienta tecnológica puede brindar. Estas tareas se diseñan para ser implementadas en el aula con el propósito de determinar la efectividad de su uso en la comprensión del concepto de pendiente por parte de los estudiantes.

Su efectividad se analiza dentro del marco de la Educación Matemática Realista, que propone al estudiante como un participante activo en su proceso de aprendizaje, partiendo de situaciones realistas para abordar un concepto matemático.

Para llevar a cabo la implementación de estas tareas se utilizó el experimento de enseñanza, el cual permite estudiar de manera continua las interpretaciones matemáticas de los estudiantes en un ambiente de aula previamente diseñado Este enfoque se alinea con el paradigma interpretativista/constructivista que concibe la educación como la construcción de significados por parte de los participantes, promoviendo una comprensión más sólida del concepto de pendiente

2.5 Justificación

En México, el estudio de las conceptualizaciones de la pendiente aún se considera insuficiente y relativamente nuevo, pues su investigación es reciente y escasa. Muchas de las investigaciones que lo estudian se centran principalmente en el concepto como razón de cambio, sin embargo, la forma de enseñanza en las aulas privilegia lo procedimental, dejando en segundo plano las conceptualizaciones que podrían facilitar una comprensión profunda y efectiva del concepto (Rivera et al., 2019).

Según Abreu et al. (2020), los estudios sobre pendiente son muy escasos y limitados, subrayando la necesidad de seguir investigando las dificultades para entender el concepto, así como obstáculos en el diseño y uso de alternativas didácticas que favorezcan el proceso de enseñanza-aprendizaje de la pendiente en la escuela.

Desde mi experiencia como docente, he notado que una comprensión sólida del concepto de pendiente es esencial para el éxito en cursos posteriores, como el cálculo diferencial. La pendiente de una recta, definida como $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, no solo describe la inclinación de la recta, sino que también sirve como base para entender conceptos matemáticos más avanzados. Deniz y Uygur-Kabael (2017) enfatizan que, al facilitar a los estudiantes la transición entre diferentes representaciones del concepto de pendiente, se promueve una comprensión más completa y significativa del mismo, superando la simple memorización de fórmulas.

En este sentido, diversas investigaciones han explorado la enseñanza y aprendizaje del concepto desde sus conceptualizaciones, como la razón algebraica, propiedad funcional, o la situación del mundo real (Rivera et al., 2019). Sin embargo, la enseñanza de la pendiente en México refleja que aún se privilegia lo algorítmico y procedimental, dejando de lado otras maneras más dinámicas que permitan al estudiante conectar con su entorno, y por ende una mayor comprensión del concepto matemático (Dolores et al., 2022)

En cuanto a mi experiencia como estudiante, la falta de una comprensión clara de la pendiente desde el curso de geometría analítica dificultó mi aprendizaje del cálculo. Por esta razón, este trabajo busca proponer una mejora en la enseñanza del concepto de pendiente, para que los estudiantes puedan interiorizarlo de manera efectiva y logren una mejor comprensión de los temas relacionados en cursos posteriores. En concordancia con la necesidad de abordar el concepto de pendiente desde múltiples perspectivas, Sánchez Santiesteban et al. (2022) subrayan la importancia de desarrollar un enfoque que integre los significados analítico, geométrico y contextual, para garantizar una comprensión más completa del concepto.

Alvarez y Galman (2024) destacan la importancia del uso de herramientas tecnológicas en la educación, y su correcta integración en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Herramientas como Desmos que pueden resultar interesantes para la enseñanza de conceptos complejos, que no solo deben ser tratadas como un recurso adicional, sino como un elemento integral dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje, a fin de sacar el mejor provecho a estas herramientas. Aplicar estas ideas es fundamental si se quiere que los estudiantes puedan desarrollar una comprensión profunda y con sentido de aplicación de conceptos como el de la pendiente.

El entendimiento que tienen los profesores de este concepto también puede variar. Por ejemplo, al proponer actividades para que los estudiantes entren en contacto con el concepto, recurren a conceptualizaciones de razón algebraica, a través de ejemplos como actividades que involucran la obtención de la pendiente a partir de dos puntos conocidos, centrándose en la ejercitación de la fórmula. Además, enfatizan en el coeficiente paramétrico para dar explicaciones que involucran a la pendiente como el número que acompaña a la x en la ecuación $y = mx + b$, sin embargo, conceptualizaciones como la propiedad funcional y la propiedad física, que, aunque pueden ayudar a fomentar un aprendizaje más significativo mediante la vinculación con contextos reales, suelen quedar relegados a segundo plano en la enseñanza tradicional (Dolores et al., 2022).

Cho y Nagle (2017) sugieren que es vital que los docentes no solo se enfoquen en procedimientos tradicionales, sino que también integren la enseñanza conceptual, lo que podría incluir tareas que relacionen la pendiente con situaciones del mundo real, facilitando una mejor comprensión y aplicación del concepto en diversos contextos (p. 148). Es fundamental que los estudiantes comprendan la pendiente no solo como un procedimiento mecánico para resolver problemas, sino como un concepto que tiene un significado profundo y aplicaciones variadas dentro y fuera del contexto matemático, tal como lo he experimentado en los cursos que he impartido. Como destacan Cho y Nagle (2017), la comprensión conceptual de la pendiente es esencial para que los estudiantes puedan transferir este conocimiento a diferentes tipos de problemas y representaciones (p. 140). Por ello, es de suma importancia que el concepto se enseñe de forma integral y bien estructurada desde un curso de geometría analítica en las escuelas, y de esa forma se asegura una mejor comprensión de los temas subsecuentes en posteriores asignaturas como el cálculo y demás áreas relacionadas dentro de este currículo antes mencionado.

Salgado et al. (2019) mencionan que la gran mayoría de los profesores poco promueven un desarrollo que propicie una vinculación entre contenidos sobre pendiente y situaciones de esta en el entorno real, tal como es sugerido en el Programa de Estudio de Matemáticas III (Secretaría de Educación Pública, 2013, p. 50-51). Existen diferentes formas de abordar el concepto, desde "la tangente del ángulo de inclinación", "diferentes fórmulas para calcularla", utilizándola para "encontrar la ecuación de una recta o ángulo de inclinación de esta", y para decidir con base en ella "si dos rectas son paralelas o perpendiculares"; sin embargo, no se evidenció que el profesor diera lugar a que los estudiantes crearan conexiones entre estas definiciones (Salgado et al., 2019)

Las diversas formas de conceptualizar la pendiente generan muchas confusiones y dificultades para que los estudiantes la interioricen, en ese sentido Rivera et al. (2019) afirman que:

> Las diversas maneras en que puede conceptualizarse la pendiente es una de las fuentes de errores y dificultades en estudiantes de diferentes niveles educativos. Los errores más comunes se dan en el cálculo de la pendiente por medio de la expresión algebraica $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ en su interpretación como $\frac{rise}{run}$ en la gráfica de una recta. (p.1028)

De acuerdo con la bibliografía consultada para desarrollar este trabajo, además de la experiencia personal como estudiante y después como docente, se considera que aún falta desarrollo en el concepto para vincular las diversas conceptualizaciones que faciliten su comprensión. En este sentido, para Salgado et al. (2020):

> los profesores de matemáticas en su práctica deben tratar el concepto de pendiente vinculando las ideas intramatemáticas con las extramatemáticas, de tal forma que el estudiante tenga la oportunidad de integrar las diversas representaciones del concepto para desarrollar la comprensión de este. (p. 52)

A pesar de los estudios existentes, aún hay poco desarrollo en esta línea de investigación sobre obstáculos de los estudiantes para adquirir el concepto de pendiente en la escuela, así como estrategias de enseñanza y aprendizaje que promuevan dicho conocimiento.

> Recomendamos realizar estudios similares en otros estados de la república mexicana, que involucren estudiantes y profesores de otros niveles educativos, la instrucción del profesor y los libros de texto, ya que es escasa la investigación en México sobre esta línea y, así, equiparar los resultados con lo reportado en otros países. (Rivera et al., 2020, p. 1040)

Dolores et al. (2022) también recomiendan realizar estudios similares en otros contextos a fin de analizar si las conceptualizaciones predominantes de la pendiente y los métodos de enseñanza aplicados en Colombia son comparables con los observados en México y en otros países. Estas investigaciones podrían ayudar a entender cómo los significados de la pendiente se desarrollan en diferentes contextos educativos, y así adaptar y desarrollar las mejores prácticas pedagógicas acordes con los contextos locales.

Por tales motivos, es imprescindible continuar con estas líneas de investigación y analizar cómo es que los estudiantes comprenden el concepto de pendiente en la escuela. Dado que los estudiantes han mostrado deficiencias para entender de manera óptima este concepto, se busca contribuir mediante una propuesta de secuencia didáctica que ayude a promover en estudiantes del

Nivel Medio Superior el entendimiento al concepto de pendiente en un curso de geometría analítica, y que posteriormente sea de utilidad para una introducción a un futuro curso de cálculo diferencial. Es fundamental que los docentes en formación no solo aprendan a utilizar herramientas tecnológicas, que como se ha mencionado, son de vital importancia en el área de la educación, y para el proceso enseñanza-aprendizaje, sino que comprendan cómo integrarlas eficazmente en el salón de clases con el fin de maximizar su eficiencia en la enseñanza de conceptos complejos (Cullen et al., 2020).

De acuerdo con la investigación de Puhl (2019), la correcta implementación por parte del docente hacia sus estudiantes de estas herramientas tecnológicas puede derivar en la mejora significativa de la comprensión conceptual pues permite una enseñanza más efectiva que no sólo se centre en la memorización de fórmulas y algoritmos, sino que integre la aplicación práctica de conceptos, lo cual garantiza el éxito para cursos más avanzados y una preparación más sólida para el desarrollo académico futuro.

Capítulo 3. Marco teórico

El objetivo de este apartado es describir la teoría que sustenta la propuesta de este trabajo sobre introducir el concepto de pendiente en estudiantes de nivel Medio Superior que cursan geometría analítica, y además pueda servirles como introducción para un posterior curso de Cálculo Diferencial.

Para ello se eligió la teoría de la Educación Matemática Realista (RME), con la cual se busca abordar el concepto de pendiente desde una perspectiva que parta de situaciones del mundo real, establecido como elemento importante en el proceso de aprendizaje

3.1 Educación Matemática Realista

El proceso de enseñanza-aprendizaje, como se exploró, se convierte en una actividad muy compleja que requiere atención cuidadosa y reflexiva. La Educación Matemática Realista (RME), como teoría instruccional específica para la enseñanza de las matemáticas, se desarrolló en los Países Bajos desde la década de 1970 en respuesta a la necesidad de reformar la educación matemática (Treffers, 1987; De Lange, 1987). Esta perspectiva se sustenta en la visión revolucionaria de Freudenthal (1968, 1971) que concibe las matemáticas como una actividad humana intrínseca antes que como un mero cuerpo de conocimientos.

Freudenthal introdujo el concepto de "matematización”, definiéndolo como la actividad de organizar la realidad utilizando las matemáticas, subrayando que "no hay matemáticas sin matematización" (1973). Esta perspectiva sitúa la matematización como el objetivo fundamental de la educación matemática, una idea que se integra de manera central en la RME.

La matematización, según Freudenthal, se desarrolla en dos formas: "horizontal" y "vertical". La primera implica aplicar herramientas matemáticas para modelar y resolver problemas del mundo real, mientras que la segunda se centra en reorganizar y conectar conceptos dentro del sistema matemático (Treffers, 1978). Ambas formas son igualmente valoradas en la RME, reflejando la riqueza y complejidad de la matematización como actividad humana (Freudenthal, 1991).

Otro pilar esencial de la RME es la teoría de los niveles en el aprendizaje matemático (Freudenthal, 1973). Esta teoría postula que la matematización, inicialmente informal, se vuelve progresivamente más formal mediante la reflexión. Aquí, los modelos sirven como herramientas para apoyar esta progresión (Treffers y Goffree, 1985). El poder de los modelos radica en su capacidad para elevar el nivel de comprensión matemática, transformándose de un "modelo de" una situación específica a un "modelo para" organizar nuevas situaciones matemáticamente (Streefland, 1985).

Sin embargo, la efectividad de los modelos depende de su arraigo en contextos realistas, su flexibilidad para aplicarse en niveles avanzados y su capacidad para ser reinventados por los estudiantes (Treffers, 1987; Gravemeijer, 1994). La búsqueda de modelos y actividades que los favorezcan es crucial, requiriendo entornos de aprendizaje diseñados con problemas que naturalmente lleven a los estudiantes a identificar estructuras matemáticas (Gravemeijer, 1994; 1999).

En esta perspectiva, el estudiante se convierte en un participante activo en su propio proceso de aprendizaje matemático, dentro del contexto social del aula (Freudenthal, 1991). La RME aboga por que los estudiantes aprendan matemáticas modelando y resolviendo problemas significativos, empoderándolos para reinventar progresivamente conocimientos y herramientas matemáticas formales desde sus estrategias informales.

La Educación Matemática Realista busca transformar la enseñanza de las matemáticas en una experiencia activa y significativa, donde los estudiantes se sumergen en la matematización como actividad esencial para comprender y organizar su entorno. Este enfoque, arraigado en fundamentos sólidos y principios coherentes, no solo moldea el proceso educativo, sino que también moldea la percepción y la relación de los estudiantes con las matemáticas.

3.1.2 Los Principios de la RME

Este marco teórico se sustenta en seis principios fundamentales que están interrelacionados, y cuyo objetivo es favorecer la comprensión de conceptos matemáticos por parte del estudiante al integrarse adecuadamente durante el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Estos principios, definidos por Van Drijvers (2020), son: actividad, realidad, nivel, entrelazamiento, interactividad y orientación. Como se ha mencionado anteriormente, el estudiante debe ser un participante activo en su proceso de aprendizaje. Además, es fundamental partir de situaciones realistas para introducir un concepto matemático, lo que facilita una comprensión más profunda y significativa del contenido.

Cada uno de estos principios representa una importante parte en la enseñanza de conceptos matemáticos bajo el enfoque de la Educación Matemática Realista. El principio de actividad enfatiza en que el estudiante debe ser un participante activo en la construcción de su propio conocimiento. El principio de realidad establece que el aprendizaje de las matemáticas se ve favorecido cuando parte de situaciones realistas o contextuales. El de nivel indica que, el estudiante debe avanzar progresivamente desde el conocimiento informal hasta comprensiones más estructuradas y formales. El de entrelazamiento destaca la importancia de la conexión entre distintos conceptos entre sí, estableciendo una comprensión global de las matemáticas. Por su parte, el de interactividad, aborda la idea de que el conocimiento debe generarse de forma colaborativa fomentando la comunicación efectiva con su entorno. Finalmente, el pilar de orientación indica la guía de un docente quien se encarga de estructurar el aprendizaje de los estudiantes, facilitando las formas de pensar y la exploración matemática de los estudiantes, sin dar respuestas explicitas directas.

Para comprender la riqueza de la Educación Matemática Realista, es fundamental explorar más a fondo sus principios fundamentales. La teoría de Freudenthal (1973) sobre los niveles en el aprendizaje matemático revela que la matematización, inicialmente informal, evoluciona hacia formas más formales mediante la reflexión. En este proceso, los modelos desempeñan un papel crucial al servir como instrumentos para respaldar la progresión del entendimiento matemático (Treffers y Goffree, 1985).

El concepto de "dos formas de matematización", introducido por Treffers (1978), destaca la dualidad entre la matematización "horizontal" y "vertical". La primera impulsa a los estudiantes a aplicar herramientas matemáticas para abordar y resolver problemas del mundo real, mientras que la segunda se centra en la reorganización y conexión de conceptos dentro del sistema matemático. Esta dualidad refleja la naturaleza dinámica y multifacética de la matematización como una actividad humana integral (Freudenthal, 1991).

Una consideración crucial para la RME es la efectividad de los modelos. Estos no solo deben arraigarse en contextos realistas, sino que también deben ser lo suficientemente flexibles para aplicarse en niveles más avanzados y, lo que es más importante, deben ser reinventados por los propios estudiantes (Treffers, 1987; Gravemeijer, 1994). Este enfoque no solo fomenta el entendimiento conceptual, sino que también estimula la creatividad y la participación de los estudiantes en su propio proceso de aprendizaje.

La búsqueda de modelos y actividades que faciliten la comprensión matemática es un componente esencial. Diseñar entornos de aprendizaje que guíen naturalmente a los estudiantes a identificar estructuras matemáticas implica un análisis didáctico profundo sobre cómo estos conceptos matemáticos se presentan a los estudiantes (Gravemeijer, 1994; 1999). Este enfoque proactivo asegura que los estudiantes no solo comprendan los conceptos, sino que también los integren de manera significativa en su repertorio cognitivo.

En esta dinámica, el estudiante se convierte en un participante activo en su propio proceso de aprendizaje matemático, guiado por el docente, pero sintiendo que tiene un rol de líder en este proceso. La RME, según Freudenthal (1991), abraza la noción de que el aprendizaje de las matemáticas no es simplemente una actividad individual, sino una actividad social. Facilita discusiones en toda la clase y el trabajo en grupo, proporcionando a los estudiantes oportunidades para compartir estrategias y descubrimientos (p. 523).

En última instancia, el papel del profesor en este contexto es esencial. La RME postula que el docente debe poseer las herramientas pedagógicas necesarias para implementar efectivamente los principios fundamentales, estableciendo así el principio de orientación. El profesor no solo transmite conocimientos matemáticos, sino que también actúa como guía y facilitador, creando un entorno propicio para el florecimiento del pensamiento matemático de los estudiantes.

El nivel de entrelazamiento establece la conexión entre conceptos, dominios y contenidos matemáticos, considerando así una integración en la que, en algunos casos, los elementos se combinan y en otros siguen una secuencia específica, pero siempre mantienen una relación entre sí.

En conclusión, la Educación Matemática Realista busca ir más allá de la mera transmisión de conocimientos matemáticos, instando a los estudiantes a sumergirse activamente en la matematización como actividad esencial para comprender y organizar su entorno. Este enfoque integral, respaldado por una profunda comprensión de los niveles de aprendizaje y la interacción entre los principios de la RME, redefine la experiencia educativa, transformando la forma en que se enseñan las matemáticas y la relación de los estudiantes con esta disciplina.

Capítulo 4. Metodología

Se diseñó una secuencia didáctica para promover la enseñanza del concepto de pendiente apoyado por la calculadora gráfica Desmos. La secuencia implementada se llevó a cabo a través del equipo celular de los estudiantes en el que cada uno de ellos interactuó con su dispositivo para realizar las tareas propuestas. El tiempo de aplicación de la secuencia fue de 6 sesiones. La forma en la que se recolectaron los datos fue mediante una hoja de exploración de aprendizaje guiado del estudiante. La información recopilada se analizó mediante la Educación Matemática Realista (RME), ya detallada en este trabajo.

La metodología utilizada en este trabajo se basó en el experimento de enseñanza. Por ello se pretendió que el proceso de diseño de las tareas y su subsecuente implementación con los estudiantes mejorara su rendimiento en la conceptualización de pendiente. Para el diseño y estructura de las tareas, se tomaron como base las conceptualizaciones de la pendiente, establecidas por Stump (1999,2001) y complementadas por Moore-Russo et. (2011), las cuales sirvieron como base para la construcción de los ítems del instrumento de intervención. Dicha implementación estuvo focalizada en un seguimiento al proceso de resolución por parte de los estudiantes sobre las actividades propuestas, mismas que debían motivar al estudiante al aprendizaje del concepto estudiado. En este sentido Cobb et al. (2016) mencionan que el investigador suele interactuar con los estudiantes de forma individual e intenta favorecer su aprendizaje planteando tareas teóricamente motivadas y haciendo preguntas de seguimiento, a menudo con la intención de animar al alumno a reflexionar sobre su actividad matemática.

El diseño de las tareas por parte del investigador, que también tiene el rol de profesor, se considera esencial en el desarrollo de este trabajo, sin embargo, aunque el investigador actúa como profesor en este enfoque metodológico, el énfasis principal está en la interpretación del razonamiento matemático de los estudiantes más que en el desarrollo de diseños instructivos (Cobb et al., 2016).

Por ello se esperaba que el diseño de las tareas, mediado por la calculadora gráfica Desmos, sirviera como una propuesta efectiva en el aprendizaje del tema de pendiente, aprovechando el dinamismo que el software puede brindar cuando se implementen dichas tareas en el aula y determinando qué tan positiva es su implementación con los estudiantes. Así Cobb et al. (2016) afirman que la intención al evaluar el potencial de determinados tipos de tareas y de herramientas físicas o simbólicas es anticipar las oportunidades de aprendizaje de los estudiantes que podrían surgir si se utilizaran en el aula.

4.1 Paradigma

Existen diversos paradigmas desde los cuales se estudia un problema de investigación, cada uno con una forma diferente de comprender la realidad, el objeto de conocimiento estudiado, así como la forma de validar dicho conocimiento. Así pues, el paradigma a utilizar depende de la relación que tenga este con el problema de investigación. Los paradigmas utilizados en la investigación son: positivista, postpositivista, sociocrítico y constructivista o interpretativo.

Dichos paradigmas se abordan desde distintas perspectivas en relación con la manera de responder a tres preguntas fundamentales sobre cómo se observa la realidad desde el punto de vista del tema investigado. Flores (como se citó en Guba 1990) señala que:

> Los paradigmas pueden ser caracterizados según la manera en que sus representantes responden a tres preguntas de corte: ontológico, epistemológico y metodológico. En este apartado se presentan los paradigmas positivistas, postpositivista, realismo crítico o constructivista y la manera como éstos responden a las siguientes preguntas.

1. ¿Cuál es la naturaleza de lo conocible o de la realidad? Esta es la pregunta ontológica.

2. ¿Cuál es la naturaleza de la relación entre el que conoce (en este caso el investigador) y lo conocible (susceptible de ser conocido)? Esta es la pregunta epistemológica.

3. ¿Cómo deberá el investigador proceder en la búsqueda del conocimiento? Esta es la pregunta metodológica.

Así mismo los paradigmas positivista y postpositivista se abordan desde un enfoque cuantitativo, basado en la relación de causa y efecto.

Flores (2004) plantea que, desde la pregunta ontológica, el positivismo considera que la realidad es moldeada por diferentes mecanismos y leyes naturales; desde la epistemológica considera al investigador como una figura distante de la realidad, excluyendo sus valores para evitar interferencias con los resultados, de ahí su énfasis en objetivismo. Por su parte la pregunta metodológica declara que las hipótesis se formulan desde un principio en forma de proposiciones.

Desde esta perspectiva, el positivismo se considera un enfoque experimental y manipulativo, pues sus hipótesis están en función de datos empíricos dentro de situaciones de control. Por otra parte, el paradigma postpositivista es una versión alterna del positivismo, en donde siguen predominando la predicción y el control.

Dado que el enfoque está centrado en la comprensión de los estudiantes sobre el concepto de pendiente, en lugar de una medición cuantitativa de variables, este paradigma no es el más adecuado para el estudio.

Por su parte el paradigma sociocrítico se centra en estudiar aspectos sociales tales como la desigualdad, feminismo, política, etc., propiciando precisamente una indagación basada en la crítica. Desde la perspectiva ontológica, la teoría sociocrítica establece que existe una "conciencia verdadera" en el investigador a través de una realidad objetiva. Para la pregunta epistemológica, este paradigma sostiene que los valores del investigador están altamente ligados a los actos realizados en la investigación por lo que aquí predomina un enfoque subjetivista. Finalmente, para la pregunta metodológica, este paradigma responde a que el propósito de los investigadores es cambiar al mundo a través de un ejercicio de conciencia de los participantes, permitiéndoles desarrollar la motivación necesaria para intervenir y transformar su realidad (Flores, 2004).

Si bien este paradigma pudiera ser relevante para ciertos contextos educativos, no es el elegido para esta investigación, ya que el objetivo se centra en analizar la comprensión de la pendiente de estudiantes de nivel Medio Superior a través de una secuencia de aprendizaje mediada por la tecnología digital y no precisamente en una crítica social.

Por ello, tomando en cuenta un enfoque centrado en comprender cómo los estudiantes de nivel Medio Superior conciben el concepto de "pendiente" a través de la implementación de una secuencia didáctica, que se encuentra apoyada por la calculadora gráfica Desmos, el paradigma adoptado para esta investigación es el interpretativo/ constructivista.

A partir de este paradigma, la educación es una rama que se fundamenta en las interpretaciones y significados de los participantes en cuestión sobre los objetos de investigación, en este caso los conceptos matemáticos, evitando así las generalidades sobre la naturaleza de los fenómenos estudiados.

Para el caso de este estudio, se aplicó con estudiantes de nivel Medio Superior una secuencia didáctica de tareas apoyada por la tecnología para explorar cuál es la comprensión que tienen del concepto de pendiente. Durante este proceso, el investigador, quien también es el docente de los estudiantes además de observar las respuestas de los estudiantes, se encargará de guiarlos y apoyarlos con el uso de la calculadora gráfica Desmos, asegurando que sus niveles de comprensión concuerden con las tareas propuestas.

Es así como la postura interpretativa se refuerza mediante las interacciones mediadas que tenga el estudiante con las tareas propuestas por el docente, pues se espera entender las comprensiones de los estudiantes a partir de sus experiencias con la calculadora.

Este enfoque se emplea especialmente en contextos educativos, en donde los fenómenos no son entendidos solamente a través de observaciones objetivas, si no que requieren del uso de la subjetividad para lograr una comprensión profunda de las percepciones surgidas de los participantes. Así, de acuerdo con el constructivismo, la realidad es subjetiva y se construye socialmente a través de experiencias, percepciones y contextos de los individuos (Jonker y Pennink, 2009).

De acuerdo con Bartolomé (1992), Sandín (2003) y Tójar (2006), las principales características de este paradigma son: A) los procesos de investigación son dinámicos, parten de una construcción social que derivan de interpretaciones, representaciones y percepciones de los involucrados en el proceso investigativo; por lo tanto, el contexto escolar se construye a partir de los significados que la comunidad le provea, B) a diferencia del positivismo, donde el factor principal es la conducta humana, en este paradigma el foco está en la acción humana, la cual deriva de las representaciones de significado que cada persona realiza. C) La construcción teórica se basa en la comprensión teleológica más que en explicación causal. D) La objetividad se consigue con el acceso al simbolismo subjetivo que la acción tiene para los protagonistas.

4.1.1 Perspectiva Epistemológica

Desde esta perspectiva, se concibe al conocimiento como la construcción basada en la interpretación de significados influenciados por las experiencias, perspectivas, ideas, creencias y contextos de los participantes; por lo tanto, se considera subjetivo. En este sentido, la interpretación del concepto de pendiente por parte de los estudiantes estará influenciada no solo por su interacción con Desmos, sino también por sus experiencias previas en matemáticas y su contexto educativo.

En esta investigación, esta perspectiva es muy importante, pues nos indica como los estudiantes dan sentido al concepto de "pendiente". Dado que la subjetividad es el enfoque predominante en este paradigma, se considera importante para que el investigador pueda interpretar los datos obtenidos y establecer conclusiones de estos a través de la reflexión.

Es así como el investigador en su rol de docente y mediador debe ser consciente de que sus percepciones derivadas de experiencias pueden influir en su instrucción hacia los participantes durante la fase de implementación del instrumento. Por ello, es necesario realizar ajustes para evitar un entorno de aprendizaje inequitativo y minimizar los sesgos que puedan existir, con el fin de ofrecer una construcción activa del conocimiento. Este proceso de construcción del conocimiento está influenciado por las creencias, ideas y contextos de los participantes, así como por la subjetividad del investigador, quien juega un papel activo en la interpretación de los datos (Bartolomé, 1992).

4.1.2 Perspectiva Ontológica

Desde esta perspectiva, la realidad se comprende como subjetiva, es decir, se construye socialmente. Por tal motivo, se considera que no existe una única realidad, sino diversas realidades subjetivas que son moldeadas a través de las vivencias de los sujetos.

Esto nos indica que la comprensión del concepto de pendiente podrá variar de acuerdo con la concepción que cada estudiante le dé. De este modo habrá estudiantes que la interpreten desde una conceptualización geométrica, otros desde la algebraica, o incluso desde su realidad, por lo que puede depender su contexto o aprendizajes previos que tengan en matemáticas.

Según Santos (2002), esta multiplicidad de realidades sugiere que las conceptualizaciones matemáticas, como la pendiente, pueden variar significativamente entre los estudiantes dependiendo de cómo se les presente el concepto y de los recursos utilizados en su enseñanza.

Por tal motivo, el concepto de pendiente no es comprendido por una única definición correcta, sino que puede entenderse desde diferentes significaciones, tal como las conceptualizaciones de pendiente, categorizadas por Stump (1999, 2001) y Moore-Russo, Conner y Rugg (2011).

Es así como el contexto sociocultural en concordancia con las experiencias educativas puede influir en la construcción de diferentes significados. Con el uso de herramientas tecnológicas, los estudiantes también pueden dar diferentes significados a la pendiente al explorar dicha tecnología.

El uso de Desmos refuerza la idea de que existen múltiples representaciones del concepto. A partir de la interacción con la tecnología, es como el estudiante puede construir su conceptualización de la pendiente, reforzando la idea ontológica que afirma que la realidad es subjetiva y está en continua construcción.

4.1.3 Perspectiva Metodológica

Desde la perspectiva metodológica, el enfoque cualitativo es el que mejor se alinea con el paradigma interpretativo, y esto nos permite observar lo que cada participante está captando en diferentes entornos. La idea principal de este enfoque es que la realidad se construye a partir de las interacciones y representaciones de los significados surgidos a partir de las experiencias de los participantes (Creswell, 2013).

Este método se basa en la observación detallada de la manera en que cada estudiante se involucra con el concepto de "pendiente" en un entorno establecido por el investigador y diseñado mediante la metodología del experimento de enseñanza.

La observación participante ofrece una visión directa de cómo interactúan con la calculadora Desmos durante las actividades de aprendizaje, permitiendo analizar las diversas perspectivas que tenga cada participante en cuestión.

Este tipo de observación es crucial en la investigación cualitativa, ya que permite al investigador captar las múltiples realidades y perspectivas que los estudiantes construyen (Sánchez, 2013). La interacción del investigador es directa y amplia, con el propósito de obtener la información detallada sobre sus significados sobre la pendiente. Este enfoque se vincula con el experimento de enseñanza, utilizado como parte de la metodología de esta investigación y explicado más adelante.

Así pues, se pretende recopilar datos claros y precisos con respecto al contexto de los estudiantes para comprender cómo cada uno lo interpreta desde su realidad y construyen un significado propio de pendiente.

Este enfoque también permite que los datos emergentes den forma a las interpretaciones del investigador, alineándose con el principio de que el conocimiento es subjetivo y se co- construye entre el investigador y los participantes (Creswell, 2013).

Esto debe permitir al investigador una comprensión clara y detallada de la forma en que se desarrolla el conocimiento matemático a través de sesiones controladas, reflexivas y diseñadas mediante la metodología del experimento de enseñanza y enmarcadas en un contexto realista. Dicho contexto se alinea con los principios de la RME, que actúa como el marco teórico que guía la implementación de esta metodología. Esto permite que los estudiantes se involucren activamente en su proceso de aprendizaje a través de situaciones del mundo real que faciliten la comprensión del concepto (Gravemeijer, 1994).

Además, se identifican categorías emergentes que puedan dar una forma de interpretar patrones que den significado a las comprensiones de los estudiantes, proporcionando una base sólida para comprender como se construye este conocimiento.

En conclusión, la elección de este paradigma radica en su énfasis en la subjetividad en la construcción de concepciones y su exploración a partir de la percepción de los estudiantes desde una perspectiva contextual en relación con el concepto de pendiente. Así, se analiza cómo la tecnología digital influye en este desarrollo de aprendizaje del concepto de pendiente, permitiendo observar las diferentes formas en que los estudiantes lo comprenden. De esta forma, se considera tanto sus experiencias previas en matemáticas como su interacción con el instrumento de intervención influenciado en un entorno tecnológico.

4.2 Tipo de estudio

Se definió una metodología cualitativa con un método deductivo. Específicamente, se utiliza el experimento de enseñanza, donde se estudian las interpretaciones continuas de la actividad matemática de los estudiantes en un ambiente de aula diseñado. El objetivo principal es analizar la construcción del concepto de pendiente por parte de los estudiantes. Este experimento encaja con el paradigma interpretativo/constructivista que concibe la educación como la construcción de significados por parte de los participantes. Por ello, esta investigación se asume de un corte cualitativo.

A pesar de que este trabajo no se encuentra establecido como un estudio basado en diseño (DRB, por sus siglas en inglés), sí incorpora algunos elementos propios de esta metodología, como la iteración de las distintas fases de desarrollo que conllevó la creación del instrumento final y un análisis retrospectivo que implicó el estudio de las comprensiones de los estudiantes sobre el concepto analizado, después de la aplicación del instrumento (Bakker & Van Eerde, 2015).

Como Cobb et al. (2016) señalan, el equipo de investigación suele tener que idear formas de documentar el desarrollo del razonamiento de los estudiantes y los aspectos clave del entorno de aprendizaje del aula. Por lo tanto, los datos recogidos en el curso de un estudio de diseño de aulas suelen ser cualitativos en su mayor parte.

El instrumento de intervención pasó por distintas etapas en las que fue ajustado progresivamente en cuanto a diseño y funcionalidad, basándose en la observación, el análisis, y la validación de expertos, así como pruebas preliminares con estudiantes. En referencia a esto Cobb et al. (2016), mencionan que el diseño instruccional implica una serie de pruebas que permitan evaluar las tareas y herramientas, lo cual se realizó de forma constante durante el desarrollo de la secuencia didáctica.

4.3 Experimento de enseñanza

El experimento de enseñanza se plantea como una metodología enriquecedora para construir explicaciones sólidas sobre las concepciones y formas de razonamiento matemático de los estudiantes. Este enfoque, fundamentado en la obra de Steffe y Ulrich (2020), posiciona a las "matemáticas de los estudiantes" como la piedra angular de su proceso de aprendizaje, reconociendo y respetando las nociones previas de los estudiantes como punto de partida.

Los experimentos de enseñanza delinean un enfoque en el que los estudiantes se encuentran en constante construcción de su conocimiento, tal como plantean Steffe y Thompson (2000), en cuyo proceso el investigador busca documentar todos los cambios en la comprensión de los estudiantes sobre los conceptos estudiados. Además de esto, la metodología también promueve el surgimiento de las interacciones en el aula, y su impacto en el aprendizaje.

El experimento se caracteriza por episodios de enseñanza cuidadosamente planificados, siguiendo la metodología propuesta por Hunting (1983) y Steffe (1983). Estos episodios se desarrollan en una secuencia dinámica que involucra al investigador-docente, los estudiantes, y registros meticulosos de las interacciones. Esta estructura permite una inmersión profunda en el entorno educativo, capturando la riqueza de las dinámicas de aprendizaje y proporcionando un material valioso para el análisis posterior.

Durante la implementación flexible en el aula, se ponen a prueba y ajustan las conjeturas sobre la progresión del razonamiento estudiantil mediante ciclos reiterados de diseño, enseñanza exploratoria e interpretación intersubjetiva con los participantes (Cobb y Gravemeijer, 2016). Esta flexibilidad permite adaptar continuamente la metodología a las dinámicas emergentes del aprendizaje, optimizando la efectividad de la intervención.

La interacción inicial refleja el compromiso del investigador-docente con un análisis interpretativo de las perspectivas individuales de los estudiantes. Esta etapa, en consonancia con Steffe y Ulrich (2020), es crucial para establecer una conexión genuina y fomentar un ambiente propicio para la expresión libre del pensamiento matemático. Posteriormente, la transición a la interacción analítica representa un cambio hacia la observación desde una perspectiva externa.

El investigador, ahora en el papel de observador de primer y segundo orden, analiza y explora el razonamiento estudiantil desde un enfoque más objetivo, proporcionando una visión equilibrada y completa de la dinámica educativa.

La fase de análisis conceptual retrospectivo culmina en una revisión exhaustiva de transcripciones e interpretaciones, consolidando y refinando los modelos mentales inferidos sobre el razonamiento y aprendizaje matemático de los participantes. Este proceso, según Steffe y Ulrich (2020), resulta esencial para extraer lecciones valiosas y generalizables que trasciendan el ámbito específico del experimento.

El análisis retrospectivo global, la última etapa del proceso, implica una evaluación minuciosa del conjunto de datos para situar la evolución particular del razonamiento y sus apoyos como un caso representativo de fenómenos más generales de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (Cobb y Gravemeijer, 2016). Este análisis proporciona una perspectiva más amplia, permitiendo que los hallazgos trasciendan las experiencias individuales para contribuir al conocimiento general sobre el aprendizaje matemático.

Aunque este trabajo no tiene como objetivo generar una teoría de instrucción local, sí lleva a cabo un análisis retrospectivo que permite evaluar la efectividad de la secuencia didáctica a través de la comprensión del concepto de pendiente. Esto implica la recolección de los datos a través del instrumento de intervención para su posterior análisis y evaluar en qué medida la secuencia ayuda a los estudiantes a construir el concepto matemático abordado.

El rol multifacético del investigador-docente durante el proceso se presenta en diferentes fases:

- Como planificador hipotético inicial, formulando objetivos y una trayectoria conjeturada sobre la evolución del razonamiento estudiantil.
- Como facilitador adaptativo, implementando y ajustando actividades según la comprensión emergente mediante la enseñanza exploratoria.
- Como intérprete intersubjetivo, infiriendo modelos mentales del razonamiento de los estudiantes.
- Como observador analítico externo, evaluando la dinámica educativa desde una perspectiva global.
- Finalmente, ejerce como teorizador retrospectivo, elaborando constructos teóricos que explican los cambios en las concepciones matemáticas desde una perspectiva más general.

Para esta investigación, el experimento de enseñanza constructivista aplicado a la enseñanza del concepto de pendiente dentro del marco de la Educación Matemática Realista se revela como un enfoque integral y profundamente reflexivo.

La cuidadosa integración de episodios de enseñanza, la flexibilidad en la implementación y el análisis retrospectivo global se combinan para ofrecer una comprensión completa y generalizable del proceso de aprendizaje matemático de este concepto. Este enfoque, basado en la consideración de las "matemáticas de los estudiantes" como punto de partida, resalta la importancia de adaptarse a sus necesidades individuales y contribuye significativamente a la comprensión teórica más amplia de la enseñanza y el aprendizaje matemático.

4.4 Participantes

Los participantes de esta investigación fueron estudiantes de 3er semestre del Bachillerato del Centro Escolar Gral. Rodolfo Sánchez Taboada, ubicado en la localidad de Acatzingo de Hidalgo, en el Municipio de Acatzingo (en el Estado de Puebla), donde hay 31,599 habitantes. Entre todas las localidades del municipio, esta ocupa el número 1 en cuanto a número de habitantes. Acatzingo de Hidalgo está a 2,140 metros de altitud.

El estudio se aplicó a un grupo mixto de 40 estudiantes de aproximadamente 16 años. Dicho grupo cursó la asignatura de Pensamiento Matemático III, perteneciente a los planes y programas del BGE 2018, y nuestra atención estará focalizada en la parte correspondiente a geometría analítica. Se trata de una muestra por conveniencia seleccionada.

La selección de los participantes se llevó a cabo mediante el método de muestreo no probabilístico por conveniencia. Esta técnica es común en investigaciones donde el acceso a una muestra aleatoria resulta complicado, por lo que el investigador recurre a una selección de participantes que esté basada en criterios como la facilidad de acceso, o proximidad, reduciendo así el esfuerzo, tiempo o costos de implementación. Sin embargo, esto implica una menor representatividad estadística (Ochoa, 2015; Vázquez Martínez, 2017). Para el caso de este estudio, la conveniencia se refleja en que el investigador también es el docente que imparte la asignatura en el grupo seleccionado, lo que facilita la aplicación del instrumento.

4.5 Instrumentos

Inicialmente, se consideró como referencia la situación de aprendizaje establecida en los planes y programas del BGE de 2018, que aborda el contenido relacionado con el concepto de pendiente. Se adaptó esta situación con el propósito de darle un mayor enfoque al concepto en cuestión. Aunque se conservó la estructura base, las actividades fueron rediseñadas, ya que las originales incluían situaciones no realistas que, si bien eran útiles para introducir conceptos matemáticos, no resultaban posibles en la vida real y podían afectar su coherencia y pertinencia.

Este tipo de rediseño está alineado con los estudios de diseño de aula, donde los investigadores colaboran con docentes para adaptar las actividades a las necesidades reales de los estudiantes, asegurando que las tareas reflejen un contexto más auténtico (Cobb et al., 2016).

Durante el proceso de desarrollo del instrumento de intervención, se siguió un proceso iterativo que consistió en realizar diferentes ajustes a la secuencia didáctica desde su primera modificación hasta la versión final. Los cambios en el conjunto de tareas propuestas en los Planes y Programas del BGE (2018) se fundamentaron en la observación y el análisis, así como en modificaciones adicionales derivadas de pruebas preliminares con otros estudiantes. Estas pruebas permitieron identificar problemas de comprensión y formato del documento. Además, se tomaron como referencia las conceptualizaciones de la pendiente para el diseño de los ítems, de tal forma que los estudiantes pudieran interpretar el concepto de pendiente, representados a través de las preguntas y actividades del instrumento de intervención.

Asimismo, se llevó a cabo una evaluación cualitativa por expertos, lo que permitió obtener un mayor grado de confiabilidad al instrumento. De esta manera, se garantizó que las actividades promovieran la construcción del concepto de pendiente, abordado desde una perspectiva contextualizada.

Además, como señala Swan (2020), el uso de ciclos iterativos de diseño y rediseño permite que el proceso de enseñanza se ajuste mejor a las circunstancias reales, mejorando la pertinencia de las actividades al crear nuevas posibilidades de aprendizaje en entornos auténticos. Como parte de estos ciclos de rediseño, las actividades se ajustaron para alinearse mejor con los esquemas de pensamiento de los estudiantes privilegiando su razonamiento matemático.

El instrumento pasó por diversos cambios y ajustes, tanto en su contenido como en su formato. Se revisaron aspectos como la cantidad de ítems a evaluar, la pertinencia y la estructura de las preguntas, así como la distribución de actividades dentro de las sesiones de aprendizaje. Cada versión buscó mejorar el instrumento, asegurando que atendiera las necesidades de aprendizaje de los estudiantes.

Este proceso de revisión también responde a la lógica de la investigación de diseño iterativa, en la que cada ciclo de rediseño tiene como objetivo refinar las estrategias de enseñanza y mejorar su efectividad a través de ajustes basados en la observación y el análisis de su impacto en los estudiantes (Cobb et al., 2016).

En este sentido, las actividades rediseñadas fueron analizadas cualitativamente para evaluar su alineación con los esquemas de pensamiento de los estudiantes. Estos análisis, alineados con lo propuesto por Strauss y Corbin (1998), permitieron identificar fallas e inconsistencias en las tareas, conduciendo a un proceso de reajuste que favoreciera el desarrollo del razonamiento matemático de los estudiantes

4.5.1 Validación cualitativa por expertos

Tras efectuar los ajustes necesarios para implementar el instrumento, se realizó un nuevo análisis llevado a cabo por expertos externos. Este enfoque se adoptó con el propósito de obtener una perspectiva imparcial que aportara comentarios y recomendaciones adicionales, fortaleciendo y consolidando el instrumento de evaluación. Esto permitió identificar las deficiencias y áreas de mejora de los ítems en cuanto a redacción, estructura y cumplimiento con el objetivo de aprendizaje, logrando un refinamiento en el instrumento con base en la retroalimentación obtenida por parte de los expertos en educación matemática. La selección de estos expertos se realizó mediante invitación, contemplando la participación de maestros y doctores especializados en el campo de la educación matemática, tanto por su formación como por su experiencia. Para formalizar la solicitud a estos expertos, se creó un "Manual de Expertos" junto con un formulario específico, que se encuentra disponible en el anexo II de este documento.

El sustento metodológico para el proceso de validación cualitativa por expertos se basa en la metodología del juicio de expertos, el cual sigue una estructura formada por cuatro categorías: claridad, coherencia, relevancia y suficiencia, propuestas por Escobar y Cuervo (2008). Ellos definieron el juicio de expertos como una valoración realizada por personas calificadas en el ámbito evaluado, capaces de emitir juicios y proporcionar evidencia fundamentada.

Para garantizar una selección idónea de expertos, se siguieron los criterios propuestos por Juárez-Hernández y Tobón (2018), tales como:

- La formación académica de los expertos, sobre todo por su especialización en el área de la educación matemática.
- Su experiencia profesional en la enseñanza de las matemáticas.
- El conocimiento técnico y teórico relevante en relación con el área de estudio.
- Su disponibilidad y tiempo para participar activamente en el proceso de retroalimentación.

La calidad teórica de las respuestas de los expertos, el nivel de profundidad en sus valoraciones, la facilidad de ejecución y la falta de requisitos técnicos y humanos para llevarlas a cabo, así como la posibilidad de utilizar diversas técnicas de recopilación de información, son factores esenciales para evaluar contenidos y temas complejos. Durante el proceso de validez de contenido, los expertos debaten diversas opiniones y, aunque no siempre hay consenso, se pueden identificar las fortalezas y debilidades del instrumento, lo que permite al investigador tomar decisiones sobre qué modificar, integrar o eliminar. Cabero y Llorente, 2013).

Según un estudio de Galicia et al. (2017), los académicos valoran positivamente la realización de juicios de expertos en línea, encontrando este proceso más cómodo y dinámico. Esta modalidad permite una mejor distribución del tiempo, es más rápido y preciso, y reduce las ambigüedades. Además, facilita la comunicación con el investigador y el uso de la tecnología para discutir o retroalimentar cualquier duda.

Considerando las opiniones favorables sobre la validación en línea, se incrementó la confianza en el uso de herramientas virtuales. Estas herramientas no solo resuelven dificultades para los jueces, sino también para el investigador, quien puede completar la plantilla con la información del instrumento, incluir las instrucciones específicas y recuperar la información en una hoja de cálculo, ahorrando tiempo y evitando omisiones en el envío.

El proceso de validación del contenido de los instrumentos de investigación mediante juicio de expertos resulta más eficiente cuando se especifican claramente las expectativas y se respetan los tiempos de los expertos, considerando sus cargas laborales.

La herramienta virtual ofrece la ventaja de la asincronía, evitando problemas de distancia y tiempo, y facilitando un proceso más eficiente y colaborativo. (Galicia et al., 2017).

Las categorías: coherencia, relevancia, claridad y suficiencia, establecidas por Escobar y Cuervo (2008), fueron utilizadas para validar el contenido de los ítems en una plantilla. Estas categorías se utilizaron en la herramienta virtual creada. La Figura 1 presenta las categorías y los indicadores para cada categoría, representando la opinión del juez sobre el grado en que cada ítem cumple con la categoría especificada.

Categorías	Indicadores
Suficiencia Los ítems que pertenecen a una misma dimensión bastan para obtener la medición de esta	Los ítems no son suficientes para medir la dimensión Los ítems miden algún aspecto de la dimensión, pero no corresponden a la dimensión total Se deben incrementar algunos ítems para poder evaluar la dimensión completamente Los ítems no son suficientes
Claridad El ítem se comprende fácilmente, es decir, su sintáctica y semántica son adecuadas	El ítem no es claro El ítem requiere bastantes modificaciones o una modificación muy grande en el uso de las palabras de acuerdo con su significado o por la ordenación de estas Se requiere una modificación muy específica de algunos de los términos del ítem El ítem es claro, tiene semántica y sintaxis adecuada
Coherencia El ítem tiene relación lógica con la dimensión o indicador que está midiendo	El ítem no tiene relación lógica con la dimensión El ítem tiene una relación tangencial con la dimensión El ítem tiene una relación moderada con la dimensión que está midiendo El ítem se encuentra completamente relacionado con la dimensión que está midiendo
Relevancia El ítem es esencial o importante, es decir, debe ser incluido	El ítem puede ser eliminado sin que se vea afectada la medición de la dimensión El ítem tiene alguna relevancia, pero otro ítem puede estar incluyendo lo que mide este El ítem es relativamente importante El ítem es muy relevante y debe ser incluido

Figura 1. Tabla de categorías e indicadores.

Nota. Adaptado de Escobar y Cuervo (2008, p. 37).

El proceso seguido para el juicio de expertos fue el siguiente:

1. Selección de expertos con el perfil adecuado para evaluar el instrumento, basada en su trayectoria y experiencia.
2. Envío de la invitación junto con el Manual de Expertos, sugiriendo un tiempo aproximado para la devolución de resultados especificándolo en el manual de expertos. La Figura 2 muestra las instrucciones que aparecen dentro del formulario antes de responderlo.

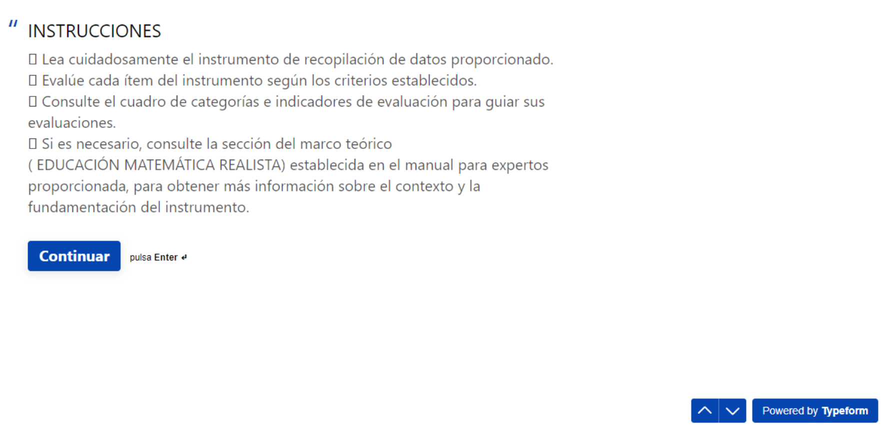


Figura 2. Pantalla de las instrucciones para contestar el formulario

3. Inclusión de un enlace (https://n95feucnltk.typeform.com/to/tV6QUnpv) al formulario en el archivo electrónico con el instrumento a validar, el cual contenía la "Plantilla para evaluar la validez de contenido a través de juicio de expertos" mostrada en la figura 1, asegurando la claridad en la definición de las categorías a evaluar.

4. Monitoreo constante de la base de datos del formulario para identificar cuántos jueces faltaban por responder y envío de recordatorios cuando era necesario, como se muestra en la Figura 3.

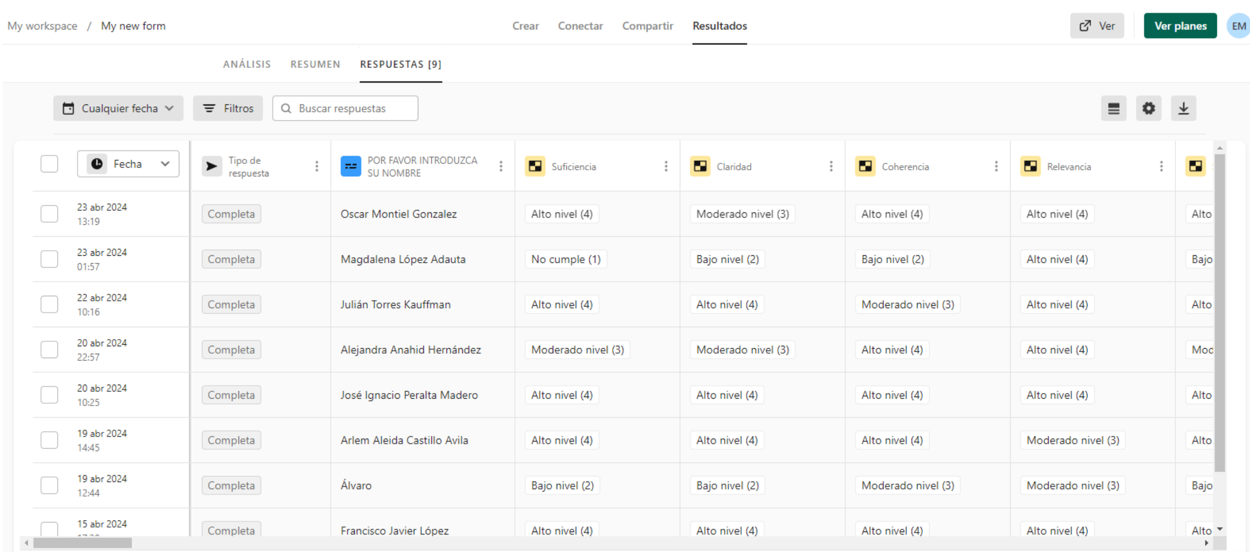


Figura 3. Pantalla de respuestas en formulario de los jueces

5. Revisión y corrección de los ítems que recibieron observaciones específicas por parte de los jueces. Por ejemplo, una jueza aportó comentarios valiosos y sencillos que no habían sido considerados anteriormente, resultando en una contribución relevante.

Comentarios de la juez:

Ítem 1

“Suficiencia, se analiza el ángulo de inclinación de los caminos con respecto a la horizontal no la pendiente de ellos. Además, la inclinación de un camino puede ser relevante o no en la experiencia de una persona dependiendo de su condición física o en el caso del rendimiento del automóvil dependerá de los caballos de fuerza de su motor o incluso si el recorrido de dicho camino es de subida o bajada.

Claridad, eliminar “Piensa en cómo la pendiente puede… ya que es redundante con la pregunta planteada e induce al estudiante a pensar que la pendiente tiene un efecto. Observo tres verbos en el ítem, sugiero reescribirlo para que la única acción a realizar sea responder la pregunta.

Coherencia, el ángulo de inclinación de un camino está relacionado con la pendiente del mismo, pero no la pendiente en sí misma, pensar el caso en que la pendiente sea negativa.

Relevancia, iniciar con este ítem para reflexionar sobre el ángulo de inclinación de los caminos y posteriormente añadir otro que relacione el ángulo de inclinación con la pendiente.”

Ítem 2:

“Suficiencia, considero que después de analizar más ejemplos de caminos o variaciones en ellos mismos se podría solicitar al estudiante que responda a esta pregunta.

Claridad, nuevamente se están solicitando dos acciones en el ítem, mejorar la redacción del enunciado inicial para que no sea una interrogante.

Coherencia, misma razón enunciada en suficiencia.

Relevancia, misma razón enunciada en suficiencia.”

Ítem 3:

“Claridad, demasiadas indicaciones para un ítem.

Coherencia, ¿se compara la inclinación de dos caminos diferentes o pretende analizar la relación de entre inclinación y pendiente iones?

Relevancia, siempre y cuando las instrucciones de las acciones a realizar se redacten con mayor claridad.”

Ítem 4:

Coherencia, continúa usando indistintamente inclinación y pendiente.

Ítem 5:

“Claridad, ¿en la teoría matemática hay pendientes pronunciadas?

Coherencia, o reflexiona sobre la experiencia o responde las dificultades.”

Ítem 6:

“Claridad, ¿o hace la descripción o responde la pregunta?”

Ítem 7:

“Claridad, se sugiere reformular las instrucciones de las tareas a realizar para que el estudiante se dé cuenta de la variación sin que se le indique que existe, ya que con este antecedente se promueve el efecto Topas.”

Ítem8:

“Claridad, el enunciado previo a la pregunta es la respuesta solicitada. ¿El estudiante va a deducir o va a transcribir el enunciado inicial? “

Ítem 9:

“Nuevamente la respuesta a la pregunta está en el enunciado previo a ella.”

Ítem 10:

“Observación: La pendiente es una propiedad numérica de una recta o un segmento de ella, no se puede determinar la pendiente de dos puntos, se determina la pendiente de la recta que pasa por esos puntos o del segmento cuyos extremos son esos dos puntos.

Coherencia, el proceso de determinar la pendiente de un segmento cuyos extremos son las coordenadas de los puntos dados no estimula la reflexión, solo es un proceso algorítmico que podría o no consolidar la comprensión del concepto de pendiente.”

Ítem 11:

“Claridad, hay líneas rectas, curvas, quebradas, especificar a qué tipo de línea se hace referencia. ¿cuántas líneas? ¿por qué solo dos?

Coherencia ¿solo hay líneas rectas con pendientes positiva o negativa?”

Ítem 12:

“Claridad: la ordenada al origen se define como el punto de intersección de la recta con el eje Y no de “corte”.

Coherencia: ¿por qué varia sólo la ordenada si el objeto de estudio y no la pendiente?”

Ítem 13:

“Claridad: ¿Cuáles son los trazos que se espera que el estudiante realice para responder a la pregunta planteada? “

Ítem 14:

No hay.

Ítem 15:

“Claridad, ¿qué espera que analice visualmente? “

Ítem 16:

“Claridad, la acepción forma punto-punto para referirse a la ecuación dados dos puntos o dos puntos de la recta no está registrada en libros de texto de México, ni en estudios de educación matemática previos, se sugiere referirse a ella de manera que no se genere una confusión al estudiante.”

Ítem 17:

“Claridad, no se cambian las ecuaciones, se reescriben o en el último de los casos se transforman en ecuaciones equivalentes a la original.”

Ítem 18:

“Claridad, retomar la observación sobre la nomenclatura punto-punto, reescribir la pregunta u omitir el enunciado “Escribe las ecuaciones de las rectas …” sería más enriquecedor solicitar la ecuación general de la recta y que el estudiante elija que ecuación (dados dos puntos, puntos pendiente, simétrica o pendiente-ordenada al origen) aplicar para lograr su objetivo.”

Ítem 19:

“Claridad, el enunciado previo a la pregunta induce la respuesta. Sugerencia: sólo planteara la pregunta o redactar “Reflexiona sobre el trabajo realizado en este proyecto y responde a la siguiente interrogante”

Como resultado de los comentarios recibidos en el juicio de expertos, el instrumento sufrió algunas modificaciones en cuanto a cambios en la semántica de las preguntas, cambios de redacción, reestructuración de algunos ítems y eliminación de otros. El resultado final se encuentra establecido en el anexo III de este trabajo.

4.5.2 Cambios en el instrumento

Para mantener la claridad y evitar una sobrecarga de información en este apartado, a continuación, se presenta una diferenciación entre las principales características de la primera y la última versión del instrumento desarrollado. Aunque algunos cambios pueden parecer abruptos, es importante destacar que los ajustes se realizaron gradualmente a lo largo de las diferentes versiones, manteniendo la base conceptual inicial.

En estudios de diseño, las revisiones iterativas son esenciales para permitir que el instrumento evolucione progresivamente, adaptándose a los resultados observados en cada iteración sin perder de vista los objetivos teóricos iniciales (Cobb et al., 2016).

Además, como se señala en la investigación de Swan (2020), cada ciclo de rediseño ofrece nuevas oportunidades para incorporar retroalimentación valiosa de los usuarios finales, lo que asegura una mejora continua en el proceso de enseñanza-aprendizaje El primer instrumento realizado se encuentra en el apartado de anexos de este trabajo titulado Anexo I.

A continuación, se presentan los cambios establecidos y, por ende, las diferencias del primer instrumento titulado: "Un Viaje Matemático por Nuestra Comunidad" con respecto al instrumento final titulado: "Explorando Nuestra Comunidad a Través de sus Caminos: Una Perspectiva Matemática".

Para la siguiente comparativa, estos serán referidos como “Instrumento 1” e “Instrumento 2” respectivamente. La Tabla 1 muestra una comparativa de diferentes aspectos entre el Instrumento 1 y el instrumento final, denominado Instrumento 2, el cual se desarrolló a partir del primero y pasó por diferentes etapas basadas en la evaluación cualitativa de expertos.

1.- Título del proyecto:

Instrumento 1: "Un Viaje Matemático por Nuestra Comunidad"

Instrumento 2: "Explorando Nuestra Comunidad a Través de sus Caminos: Una Perspectiva Matemática"

2.- Enfoque del proyecto:

Instrumento 1: Destaca lugares de interés en la comunidad y cómo la pendiente influye en la accesibilidad y experiencia de visitarlos.

Instrumento 2: Se centra en los caminos de la comunidad y cómo sus pendientes afectan a las personas y vehículos que los utilizan.

3.- Objetivos de aprendizaje:

Instrumento 1: No se mencionan objetivos de aprendizaje específicos.

Instrumento 2: Se enumeran objetivos de aprendizaje relacionados con el concepto de pendiente y habilidades matemáticas.

4.- Contenido de las sesiones:

Instrumento 1: Más enfocado en el concepto general de pendiente, su representación gráfica y su impacto en la accesibilidad a lugares de interés.

Instrumento 2: Mayor énfasis en la exploración práctica de pendientes en caminos, su impacto en el desgaste físico y el consumo de combustible, y la aplicación de diferentes formas de la ecuación de la recta.

5.- Actividades prácticas:

Instrumento 1: Incluye actividades como análisis de imágenes, trazado de rutas en mapas 2D y exploración en Desmos.

Instrumento 2: Además de actividades similares, también incluye cálculos de pendientes, transformación de ecuaciones de rectas y análisis detallado en Desmos.

6.- Uso de herramientas:

Instrumento 1: Mayor enfoque en el uso de Google Maps y Desmos.

Instrumento 2: Además de Google Maps y Desmos, se incluye el uso de planos cartesianos y tablas de valores para graficar rectas.

7.-Ejemplos visuales:

Instrumento 1: Proporciona algunas imágenes de ejemplo.

Instrumento 2: Incluye más imágenes de ejemplo relacionadas con caminos y su representación gráfica.

8. Cantidad de sesiones:

Instrumento 1: Contiene 9 sesiones.

Instrumento 2: Contiene 6 sesiones.

Tabla 1

Cuadro comparativo entre primer y último instrumento.

Aspecto	Instrumento 1: "Un Viaje Matemático por Nuestra Comunidad"	Instrumento 2: "Explorando Nuestra Comunidad a Través de sus Caminos: Una Perspectiva Matemática"
Estructura	Estructura más directa y menos segmentada dividida en 9 sesiones.	Dividido en cinco sesiones, cada una con objetivos y actividades claras.

Objetivos de aprendizaje	No se mencionan objetivos de aprendizaje específicos.	Se enumeran objetivos de aprendizaje relacionados con el concepto de pendiente y habilidades matemáticas.
Enfoque	Destaca lugares de interés en la comunidad y cómo la pendiente influye en la accesibilidad y experiencia de visitarlos. Más enfocado en el concepto general de pendiente, su representación gráfica y su impacto en la accesibilidad a lugares de interés.	Se centra en los caminos de la comunidad y cómo sus pendientes afectan a las personas y vehículos que los utilizan. Mayor énfasis en la exploración práctica de pendientes en caminos, su impacto en el desgaste físico y el consumo de combustible, y la aplicación de diferentes formas de la ecuación de la recta.
Exploración Visual	Menos enfocado en la exploración visual. Proporciona algunas imágenes de ejemplo.	Emplea más imágenes de ejemplo relacionadas con caminos y su representación gráfica para entender conceptos.
Plataformas Interactivas	Uso de Google Maps y Desmos.	Además de Google Maps y Desmos, se incluye el uso de planos cartesianos y tablas de valores para graficar rectas.
Fórmulas y Conceptos Matemáticos	Introduce la fórmula de la pendiente, con menor énfasis en el análisis.	Introduce y utiliza la fórmula de la pendiente en problemas prácticos.
Aplicaciones Prácticas	Presenta problemas prácticos con menor enfoque en reflexiones.	Reflexiona sobre cómo las pendientes afectan la vida diaria.

	Incluye actividades como análisis de imágenes, trazado de rutas en mapas 2D y exploración en Desmos.	Además de actividades similares, también incluye cálculos de pendientes, transformación de ecuaciones de rectas y análisis detallado en Desmos.
Trabajo en Grupo y Discusión	Enfocado en el trabajo individual.	Fomenta la discusión en grupo y actividades colaborativas.
Proyectos de Campo	No incluye actividades de campo.	Incluye actividades de capturar y analizar imágenes de caminos reales.
Variedad de Actividades	Se enfoca en el uso de la fórmula de la pendiente.	Amplia variedad de actividades, incluyendo exploración visual y análisis gráfico.
Evaluación y Reflexión	Menos preguntas de reflexión y discusión.	Preguntas de reflexión y discusión al final de cada actividad.
Conclusión	Menos énfasis en la reflexión final.	Sección final para reflexionar sobre el conocimiento adquirido.

4.5.3 Criterios e Indicadores de Evaluación

Para tener un parámetro de evaluación y saber en qué medida el estudiante cumplió con el objetivo de cada una de las preguntas alineadas con la Educación Matemática Realista, se crearon dos tablas, la primera de ellas contiene una definición conceptual de cada uno de los pilares de la RME, de acuerdo con lo descrito en Van de Heuvel et al. (2020, se encuentra establecida en la Tabla 2.

La segunda tabla, denominada como Tabla 3 se conforma de 4 columnas. La primera columna corresponde a cada uno de los 20 ítems concretos que conforman al instrumento de intervención, la segunda columna indica el pilar o pilares, en caso de que fueran más de uno, con los que se alinean y bajo los cuales fueron diseñados cada uno de los 20 ítems. La tercera columna establece los criterios "ideales" de respuesta bajo los que fueron diseñados los ítems del instrumento. Finalmente, la cuarta columna presenta los indicadores de evaluación de acuerdo con los criterios, contemplando tres categorías: cumple con el criterio de respuesta "ideal", cumple parcialmente, o definitivamente no cumple. Cabe resaltar que, si el estudiante no contestó algún ítem, esta queda en la categoría de "No cumple" a fin de simplificar la evaluación.

Estos criterios fueron establecidos con el fin de observar los patrones de razonamiento en las respuestas de los estudiantes, así como tener una visión más clara de su progreso a lo largo de las actividades de la secuencia didáctica y, por consiguiente, su comprensión del concepto de pendiente.

Tabla 2

Cuadro de definición conceptual de pilares de la RME.

Pilar de la RME	Definición Conceptual
Actividad	Los estudiantes son tratados como participantes activos en el proceso de aprendizaje. Las matemáticas se aprenden mejor haciendo matemáticas, lo que se refleja en las matemáticas como una actividad humana, así como en la idea de matematización.
Realidad	Concede la capacidad de los estudiantes para aplicar las matemáticas en la resolución de problemas de la "vida real". La educación matemática debe partir de situaciones problemáticas que sean significativas para los estudiantes, lo que les ofrece oportunidades para dar significado a los constructos matemáticos que desarrollan mientras resuelven problemas. La enseñanza comienza con problemas en contextos ricos que requieren organización matemática y poner a los estudiantes en la pista de estrategias de solución informales relacionadas con el contexto como un primer paso en el proceso de aprendizaje.

Nivel	Subraya que aprender matemáticas significa que los estudiantes pasan varios niveles de comprensión: desde las soluciones informales relacionadas con el contexto, hasta adquirir conocimientos sobre cómo se relacionan los conceptos y las estrategias. Los modelos son importantes para tender un puente (cerrar la brecha) entre las matemáticas informales relacionadas con el contexto y las matemáticas más formales.
Entrelazamiento	Significa que los dominios de contenido matemático, no se consideran capítulos del plan de estudios aislados, sino que están muy integrados. A los estudiantes se les ofrecen ricos problemas en los que pueden utilizar diversas herramientas y conocimientos matemáticos.
Interactividad	Significa que el aprendizaje de las matemáticas no es solo una actividad individual sino también una actividad social. La RME favorece las discusiones de toda la clase y el trabajo en grupo que ofrecen a los estudiantes oportunidades para compartir sus estrategias e invenciones con otros. Los estudiantes pueden obtener ideas para mejorar sus estrategias. La interacción evoca la reflexión, lo que permite a los estudiantes alcanzar un mayor nivel de comprensión.
Orientación	Implica que en la RME los profesores deben tener un papel proactivo en el aprendizaje de los estudiantes y que los programas educativos deben contener escenarios que tengan el potencial de funcionar como una palanca para lograr cambios en la comprensión de los estudiantes.

Nota. Elaboración propia con definiciones adaptadas de Heuvel-Panhuizen y Drijvers (2020)

Tabla 3

Cuadro de pilares de la RME, criterios de respuestas ideales e indicadores de ítems.

Ítem	Pilares abordados de la RME	Criterios de Respuesta Ideales	Indicadores
P1	Realidad Actividad	Los estudiantes conectan la inclinación con la dificultad de caminar o conducir, proporcionando ejemplos del mundo real y mostrando reflexión activa.	***Cumple:** Describe una relación clara con ejemplos de la vida real. ***Cumple Parcialmente:** Ofrece ejemplos, pero de manera vaga o incompleta. ***No Cumple:** No establece una relación con situaciones del mundo real.
P2	Realidad Actividad	Define "pendiente" utilizando ejemplos o situaciones del mundo real y muestra una comprensión activa del concepto.	***Cumple:** Define el término y lo relaciona con situaciones reales. ***Cumple Parcialmente:** Ofrece una definición vaga o parcial. ***No Cumple:** No logra definir el término.
P3	Actividad	Describe diferencias de inclinación utilizando términos matemáticos, demostrando una comprensión activa y práctica del concepto de pendiente.	***Cumple:** Describe diferencias de inclinación de manera detallada y con términos matemáticos

			***Cumple Parcialmente:** Describe diferencias, pero de manera superficial o vaga. ***No Cumple:** No describe diferencias o las describe incorrectamente.
P4	Interactividad Realidad	Describe cómo la interacción con Desmos ayudó a visualizar y comprender la pendiente en situaciones que simulan la realidad.	***Cumple:** Describe claramente el apoyo de Desmos en su comprensión. ***Cumple Parcialmente:** Menciona el apoyo de Desmos, pero de manera vaga. ***No Cumple:** No muestra relación con el uso de Desmos.
P5	Realidad Actividad	Describe los desafíos asociados con caminar o conducir en diferentes pendientes, usando ejemplos concretos y mostrando una reflexión activa.	***Cumple:** Describe dificultades claras y ejemplos concretos. ***Cumple Parcialmente:** Describe algunas dificultades, pero de manera vaga o incompleta. ***No Cumple:** No logra describir las dificultades o ejemplos.
P6	Nivel	Explica la relación entre inclinación y altura, utilizando términos matemáticos para mostrar	***Cumple:** Explica claramente la relación entre inclinación y altura.

		comprensión formal del concepto de pendiente.	***Cumple Parcialmente:** Muestra comprensión, pero de manera incompleta o vaga. ***No Cumple:** No establece correctamente la relación.
P7	Actividad	Identifica cómo los cambios en la altura (Δy) y la distancia horizontal (Δx) afectan la pendiente de una recta.	***Cumple:** Explica claramente la relación entre Δy, Δx y la pendiente. ***Cumple Parcialmente:** Muestra comprensión, pero de manera incompleta. ***No Cumple:** No logra establecer la relación.
P8	Nivel	Selecciona la expresión correcta para calcular la pendiente, mostrando comprensión formal del concepto.	***Cumple:** Selecciona correctamente la expresión Δy/Δx. ***No Cumple:** Selecciona incorrectamente la expresión.
P9	Entrelazamiento	Conecta y compara los valores de las pendientes en diferentes segmentos.	***Cumple:** Establece conexiones claras entre los valores de las pendientes. ***Cumple Parcialmente:** Ofrece conexiones, pero de manera incompleta. ***No Cumple:** No logra establecer conexiones.

P10	Entrelazamiento	Infiere la constancia de la pendiente en diferentes puntos de una misma línea recta.	***Cumple:** Reconoce la constancia de la pendiente en la misma línea recta. ***Cumple Parcialmente:** Reconoce la constancia, pero de manera vaga o incompleta. ***No Cumple:** No logra inferir la constancia de la pendiente.
P11	Nivel	Concluye que la pendiente es constante para una línea recta que pasa por distintos puntos.	***Cumple:** Concluye correctamente que la pendiente es constante. ***Cumple Parcialmente:** Conclusión incompleta o vaga. ***No Cumple:** No concluye la constancia de la pendiente.
P12	Entrelazamiento	Describe cómo cambiar el valor de 'm' afecta los segmentos de las rectas.	***Cumple:** Describe claramente las diferencias al cambiar 'm'. ***Cumple Parcialmente:** Describe algunas diferencias, pero de manera vaga. ***No Cumple:** No describe correctamente las diferencias.
P13	Entrelazamiento	Establece que el valor de "m" refleja la inclinación de la línea recta.	***Cumple:** Establece claramente la relación entre "m" y la inclinación.

			***Cumple Parcialmente:** Relación incompleta o vaga. ***No Cumple:** No establece la relación.
P14	Orientación	Expresa las ecuaciones de las rectas en diferentes formas, con la orientación del docente.	***Cumple:** Expresa correctamente las ecuaciones en todas sus formas y determina la pendiente. ***Cumple Parcialmente:** Expresa las ecuaciones, pero con errores o de forma incompleta. ***No Cumple:** No logra expresar las ecuaciones correctamente.
P15	Nivel Entrelazamiento	Diferencia visual y numéricamente la pendiente en diferentes direcciones.	***Cumple:** Diferencia claramente entre los tipos de pendientes. ***Cumple Parcialmente:** Diferencia de manera vaga o incompleta. ***No Cumple:** No logra diferenciar las pendientes.
P16	Interactividad	Describe cómo Desmos facilitó la comprensión de la relación entre ecuaciones y topografía.	***Cumple:** Describe claramente cómo Desmos facilitó la comprensión.

			***Cumple Parcialmente:** Menciona la ayuda de Desmos, pero de manera vaga. ***No Cumple:** No muestra relación con el uso de Desmos.
P17	Nivel	Interpreta el valor de "m" y su impacto en la forma de la línea recta.	***Cumple:** Interpreta correctamente el valor de "m" y su forma. ***Cumple Parcialmente:** Interpreta de manera vaga o incompleta. ***No Cumple:** No logra interpretar el valor de "m".
P18:	Nivel	Interpreta la pendiente indefinida y su impacto en la forma de la línea recta.	***Cumple:** Interpreta correctamente la pendiente indefinida. ***Cumple Parcialmente:** Interpreta de manera vaga o incompleta. ***No Cumple:** No logra interpretar la pendiente indefinida.
P19	Entrelazamiento	Concluye la relación entre el valor numérico de la pendiente y la forma de la línea recta.	***Cumple:** Concluye claramente la relación. ***Cumple Parcialmente:** Conclusión vaga o incompleta.

			***No Cumple:** No logra concluir la relación.
P20:	Orientación	Define la pendiente de una recta, incorporando conceptos discutidos.	***Cumple:** Ofrece una definición clara y completa. ***Cumple** Parcialmente: Definición vaga o incompleta. ***No Cumple:** No proporciona una definición coherente.

4.5.4 Conceptualizaciones de la Pendiente en el Instrumento de Intervención

Se creó una matriz, la cual clasifica los ítems del instrumento de intervención según la conceptualización de la pendiente que abordan. Estas conceptualizaciones fueron establecidas por Stump (1999, 2001) y más adelante complementadas por Moore-Russo et al. (2011).

El instrumento de intervención incluye 8 conceptualizaciones de las 11 conocidas en la literatura existente. Cabe resaltar que estas conceptualizaciones no fueron utilizadas para el análisis de las respuestas de los estudiantes, dado que la Educación Matemática Realista es el marco teórico que sirve como lupa para analizar las respuestas de los estudiantes. Sin embargo, las conceptualizaciones fueron base complementaria para el diseño del instrumento, asegurando que los ítems incluyeran las diversas formas de concebir a la pendiente. Es así como la matriz relaciona a las 8 conceptualizaciones utilizadas con uno o más ítems de los 20 que contiene el instrumento de intervención, lo que permite a los estudiantes explorar diferentes significados del concepto. En la Tabla 4, se presenta la matriz con la clasificación de los ítems según la conceptualización de la pendiente que representan.

Tabla 4

Matriz de Conceptualizaciones de la Pendiente en el Instrumento de Intervención.

Conceptualización	**Definición**	**Ítems relacionados**
Situación del Mundo Real	Situación física (estática, por ej.: una rampa, escalera etc.) o situación funcional (dinámica, por ej.: distancia en función del tiempo, volumen en función del tiempo etc.).	1, 2, 3, 4, 5, 6, 15, 16, 20
Razón Algebraica	Cambio en y entre cambio en x, razón con la expresión algebraica $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ o $\frac{\Delta y}{\Delta x}$	8, 9, 10, 11, 14, 17, 18, 19
Razón Geométrica	La razón del desplazamiento vertical y desplazamiento horizontal en la gráfica de una recta. Subida sobre corrida en el gráfico de una recta.	7, 17, 18,19
Propiedad Funcional	Razón de cambio constante entre dos variables encontradas en representaciones múltiples, incluyendo tablas y descripciones verbales (por ej. cuando x incrementa en 2, e incrementa en 3).	12, 13, 14
Constante Lineal	Propiedad constante y única para las rectas; pendiente de la recta no es afectada por la traslación. Propiedad constante que garantiza la colinealidad de los puntos de una recta, independiente de la región del gráfico lineal que se está considerando, es decir que dos puntos cualesquiera de la recta determinan la pendiente.	9, 10, 11
Coeficiente Paramétrico	Coeficiente m (o su valor numérico) en $y = mx + b$ o $y - y_1 = m(x - x_1)$.	12, 13, 14, 15, 16
Propiedad Física	Descripción de una recta utilizando expresiones como grado, inclinación, tendencia, ladeo, declive, ángulo, etc.	1, 3, 4, 5, 6, 13, 15, 16

Indicador de Comportamiento	Número real con signo que indica crecimiento (+), decrecimiento (−), tendencia horizontal de la línea (0). Si no es cero, indica la intersección con el eje x.	3, 4, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19

Nota. Elaboración propia con definiciones adaptadas de Rivera et al. (2019), basadas en Stump (1999, 2001) y Moore-Russo et al. (2011).

Capítulo 5. Resultados y Análisis

5.1 Resultados

Una vez finalizada la implementación del instrumento de intervención con los participantes, a continuación, se presenta los resultados obtenidos a partir de la interacción de 40 estudiantes con cada uno de los ítems del instrumento.

Cada estudiante fue codificado con el símbolo "A" complementado de un número, siguiendo la secuencia de los números naturales consecutivos, comenzando desde el número 1. Es decir, el primer estudiante se denominó "A1", el segundo "A2", el tercero "A3", y así sucesivamente para cada uno de los 40 estudiantes finalizando con el participante "A40". Este método se empleó con el fin de proteger los datos de los estudiantes que participaron.

Se creó una matriz o cuadro de evaluación de 4 columnas. La primera columna corresponde al número de ítems, presentados en el orden en que se aplicaron en el instrumento de intervención, y codificados como P1, P2, P3, y así sucesivamente hasta el ítem P20. La segunda columna contiene la respuesta textual del estudiante al ítem. La tercera columna establece en qué indicador se encuentra la respuesta del estudiante, de acuerdo con los indicadores definidos en la Tabla 2. Se utilizaron los siguientes códigos: cumple (C), cumple parcialmente (CP), y no cumple (NC). Cabe resaltar que el caso del ítem 8 solo cuenta con los indicadores (C) o (NC) dado que es un ítem que solo puede ser correcto o incorrecto. En el caso del ítem 14, la respuesta del estudiante tiene que ver con llenar una tabla con las diferentes ecuaciones de la recta y la identificación del valor de la pendiente en ellas. Por lo tanto, no se cuenta con una respuesta descriptiva. Para su evaluación, se tomaron en cuenta únicamente las consideraciones y comentarios del docente alineados con los criterios de evaluación del ítem. Finalmente, la cuarta columna establece la justificación de la elección del código, de acuerdo con los indicadores previamente establecidos.

Como ejemplo, a continuación, se presenta un cuadro de evaluación de una estudiante, que ilustra cómo se llevó a cabo este proceso con cada una de las repuestas de los 40 estudiantes. La Tabla 5 representa un ejemplo ilustrativo del análisis de las respuestas de un estudiante, evaluadas de acuerdo con los criterios establecidos en la Tabla 3.

Tabla 5

Ejemplo de evaluación de respuestas de una estudiante.

Pregunta	Respuesta de A1	Indicador	Justificación
P1	"Que el esfuerzo en inclinaciones es mayor que a un Camino plano y puedes cansarte más rápido, gastando más energías."	C	A1 conecta la inclinación con situaciones del mundo real y muestra una reflexión activa sobre la dificultad de caminar por caminos inclinados.
P2	"Algún camino, u otra cosa que Sea muy inclinado."	CP	La respuesta de A1 es vaga y no proporciona una definición completa del término "pendiente", aunque hace una conexión básica con la realidad.
P3	"Que unos son simplemente rectos, pero hay otros tipos de calles que la inclinación se nota un poco más e incluso hay unos que se notan completamente inclinadas."	CP	Describe las diferencias de inclinación entre caminos, pero no usa términos matemáticos específicos, mostrando una comprensión limitada.
P4	"Es más fácil ver la inclinación de una calle, es mucho más notorio me ayuda	C	Describe cómo la interacción con Desmos ayudó a visualizar y

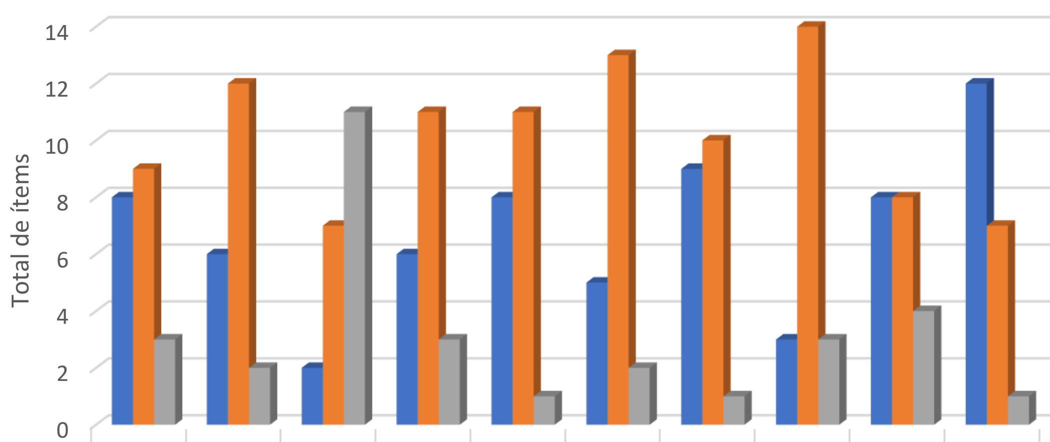
	más las líneas de las gráficas en Desmos."		comprender la inclinación, relacionando la herramienta con situaciones del mundo real.
P5	"En las pendientes más inclinadas son las más difíciles para algunas personas e incluso más cansadas, ya que a las personas con alguna discapacidad puede ser muy agotador e incluso frustrante ya que se les complica y para las personas normales puede ser cansado."	C	Describe claramente los desafíos relacionados con las pendientes en situaciones del mundo real, mostrando reflexión activa.
P6	"En mi punto de vista es que no siempre es muy inclinado ya que hay veces que no es muy inclinada y subes mucha altura, pero también hay otros que si son más inclinados. Yo creo que depende del lugar."	CP	La explicación es vaga y no establece una relación clara entre inclinación y altura con conceptos formales.
P7	"Que se forman mediante una línea inclinada la cual la mayoría de las calles inclinadas tienen esas líneas de diferente forma."	CP	Describe la relación entre altura y distancia de manera superficial, sin utilizar términos matemáticos claros.
P8	"$m = (\Delta x) /(\Delta y)$"	NC	Selecciona incorrectamente la expresión para calcular la pendiente.

P9	"La mayoría dava 1 me imagino que es porque es la misma inclinación."	CP	Muestra alguna conexión entre los valores de la pendiente, pero su respuesta es vaga y falta de detalles.
P10	"Que es la misma inclinación."	C	Reconoce la constancia de la pendiente en la misma línea recta.
P11	"Sí porque todos pasan por la misma línea."	C	Concluye que la pendiente es constante para una línea recta.
P12	"Que todos son diferentes, diferentes inclinaciones."	CP	Describe algunas diferencias, pero de manera vaga sin detalles claros.
P13	"No entendí."	NC	No establece la relación entre el valor de "m" y la inclinación.
P14	"Identifica correctamente las pendientes, pero no sabe transformar entre las formas de la ecuación."	CP	Identifica correctamente los valores de las pendientes en cada forma de la ecuación, pero tiene dificultades para realizar las transformaciones entre las formas ordinaria, general y simétrica.

P15	"Visualmente es muy fácil porque se ve la inclinación y puedes definir fácilmente si es a la derecha, izquierda o un camino recto."	C	Diferencia visualmente entre los tipos de pendientes y hace una conexión entre conceptos.
P16	"Porque puedes ver fácilmente cómo son y luego las operaciones de Desmos le pueden ayudar a resolver más fácil."	C	Describe cómo Desmos facilita la comprensión, mencionando la utilidad de la herramienta en el proceso.
P17	"m=0 porque son el mismo número y la operación da como resultado 0."	C	Interpreta correctamente el valor de "m" y su impacto en la forma de la línea recta.
P18	"m=undefined porque son mismos números y son muy cerca de la línea recta."	CP	Muestra comprensión, pero de manera incompleta en la interpretación de la pendiente indefinida.
P19	"Que las líneas pueden ser diferentes, depende el procedimiento y el número que utilicemos, también depende si es positiva o negativa."	CP	Ofrece conexiones, pero de manera incompleta.
P20	"NO CONTESTADO"	NC	No proporciona una respuesta

5.2 Gráficas y tablas de Frecuencia

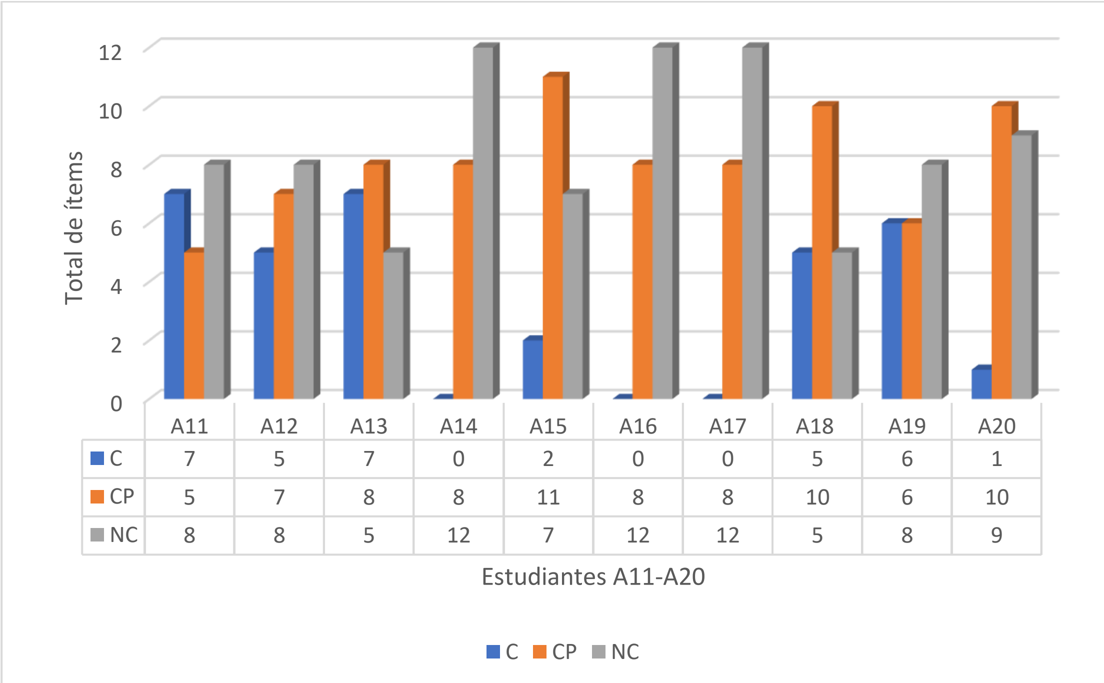
Además del cuadro individual para cada estudiante, ejemplificado en la Tabla 3, se creó un cuadro general y una gráfica de frecuencias de las respuestas a los 20 ítems para cada uno de los 40 participantes. Por ello en las Figura 4, 5, 6 y 7, se presentan los datos en cuatro secciones con el fin de evitar una sobrecarga de información en una sola parte. Este formato permite distribuir mejor la información y mejorar su claridad en la presentación. Cada una de estas figuras muestra el número de ítems respondidos por cada participante de manera organizada y estructurada.



	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
C	8	6	2	6	8	5	9	3	8	12
CP	9	12	7	11	11	13	10	14	8	7
NC	3	2	11	3	1	2	1	3	4	1

Figura 4. Evaluación de estudiantes parte 1

Nota. La figura muestra la evaluación de los estudiantes A1-A10 para cada ítem del instrumento de acuerdo con las categorías “Correcto”, “Correcto Parcialmente”, “No Correcto”



	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18	A19	A20
C	7	5	7	0	2	0	0	5	6	1
CP	5	7	8	8	11	8	8	10	6	10
NC	8	8	5	12	7	12	12	5	8	9

Figura 5. Evaluación de estudiantes parte 2

Nota. La figura muestra la evaluación de los estudiantes A11-A20 para cada ítem del instrumento de acuerdo con las categorías “Correcto”, “Correcto Parcialmente”, “No Correcto”

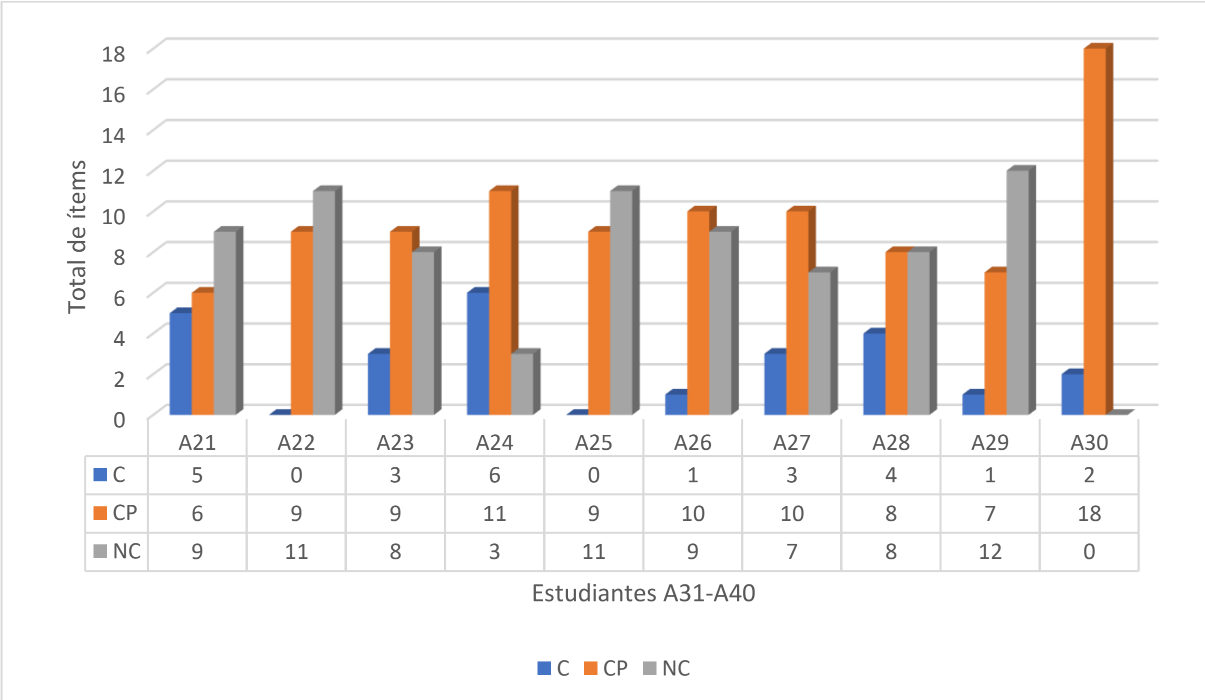


Figura 6. Evaluación de estudiantes parte 3

Nota. La figura muestra la evaluación de los estudiantes A21-A30 para cada ítem del instrumento de acuerdo con las categorías “Correcto”, “Correcto Parcialmente”, “No Correcto”

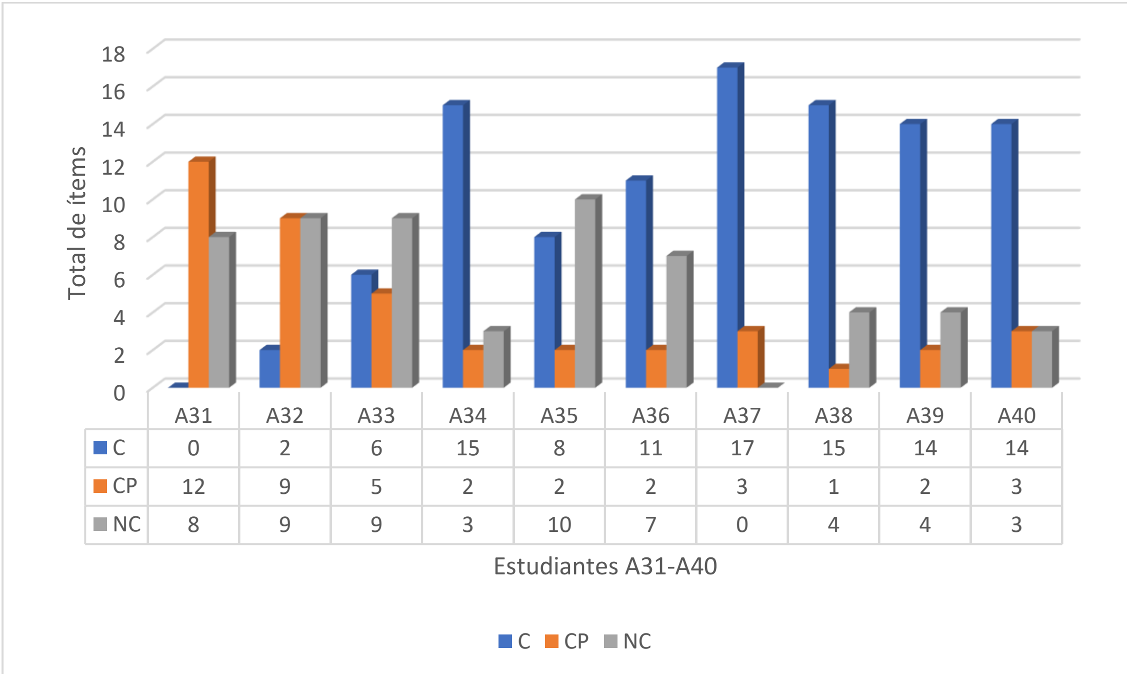


Figura 7. Evaluación de estudiantes parte 4

Nota. La figura muestra la evaluación de los estudiantes A31-A40 para cada ítem del instrumento de acuerdo con las categorías "Correcto", "Correcto Parcialmente", "No Correcto"

5.3 Análisis

En el siguiente apartado se presenta el análisis descriptivo de las respuestas más representativas de los participantes para cada uno de los 20 ítems, los cuales se encuentran alineados con la Educación Matemática Realista.

Las respuestas fueron seleccionadas ya sea por su capacidad de reflejar o por su dificultad para alinearse con los pilares fundamentales de la RME: Realidad, Actividad, Interactividad, Nivel, Entrelazamiento y Orientación. Asimismo, se pretende analizar en profundidad las respuestas de los estudiantes. Algunos de los ítems seleccionados reflejan la capacidad de los estudiantes para interpretar el concepto de pendiente dentro de la situación de aprendizaje planteada, especialmente cuando el estudiante visualiza la inclinación de los caminos mediante el uso de la calculadora gráfica Desmos.

Por otra parte, existen otras repuestas que muestran mayor complejidad para alinearse y conectar con cada uno de los principios de esta teoría. Las principales respuestas de los estudiantes se presentan a continuación.

ÍTEM 1

Este ítem está principalmente vinculado con el principio de la Realidad, pues parte de situaciones de la vida cotidiana como el esfuerzo físico o el rendimiento que tiene un automóvil, y de esta manera empieza a establecer una conexión con el concepto de pendiente.

En su respuesta mostrada en la Figura 8, "A) Esfuerzo humano: se requiere mayor esfuerzo físico por parte de las personas, ya que están trabajando contra la gravedad, esto puedes resultar muy cansado y fatiga. Automóvil: aumento de consumo de combustible ya que el motor trabaja más para vencer la gravedad, la aceleración puede ser más lenta y el rendimiento puede disminuir. B) El esfuerzo físico es más constante y menor al de una pendiente menos fatiga y menos cansancio. El consumo de combustible es más estable, la aceleración más suave y rendimiento más específico", el estudiante A34 hace referencia al término "pendiente", al relacionarlo con el rendimiento de un automóvil. En la imagen B, que muestra un camino recto o con menor pendiente, el participante describe que el consumo de combustible es más estable y la aceleración es más suave y el rendimiento más "específico", lo cual pudiera ser una palabra que utilizó como sinónimo de eficiente.

El participante demuestra una comprensión sobre la relación entre la inclinación y el rendimiento o cansancio de una persona y de un automóvil en un contexto del mundo real. Además, identifica la variación del esfuerzo o consumo de combustible en función de la pendiente.

El hecho de que el estudiante utilice el término "pendiente" en su respuesta, así como los ejemplos utilizados sobre el esfuerzo del humano y rendimiento del automóvil, indica que la respuesta del participante se alinea con el pilar de Realidad de la RME, ya que intenta hacer una conexión de las matemáticas con la situación cotidiana planteada.

Algunos extractos de la respuesta como "rendimiento más específico" no son del todo claros. Sin embargo, el participante demuestra una comprensión general de cómo la pendiente puede influir en la situación práctica, lo cual indica que se cumple el objetivo de conectar con el principio de Realidad, al vincular la situación con experiencias concretas, evidenciando un razonamiento inicial del concepto.

El uso del término "pendiente" en la respuesta, junto con los ejemplos de esfuerzo y consumo, alinea la respuesta con los pilares de Realidad y Actividad de la Educación Matemática Realista (RME). El estudiante A34 realiza un esfuerzo significativo por conectar las matemáticas con una situación cotidiana, logrando así una reflexión activa sobre los efectos de la pendiente. Sin embargo, aunque el estudiante muestra un buen entendimiento de la relación entre inclinación y esfuerzo, ciertos aspectos de su respuesta, como "rendimiento más específico," podrían ser más detallados y precisos.

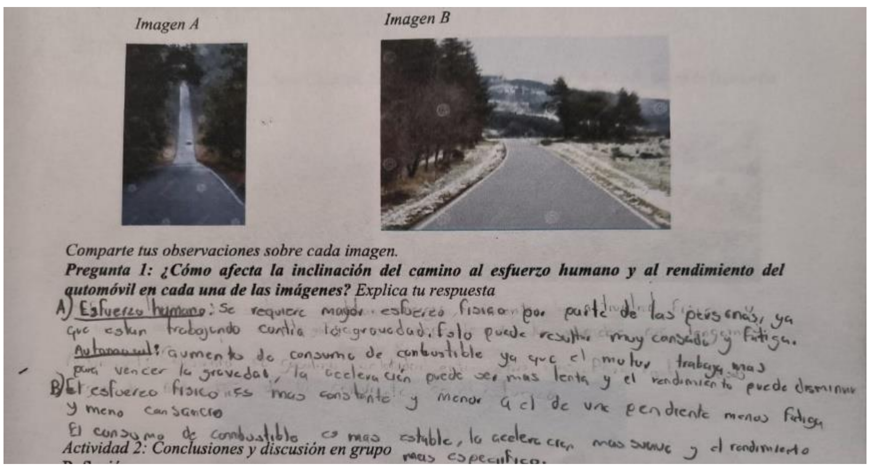


Figura 8. Respuesta al ítem 1 del estudiante A34

La respuesta de la estudiante A18, exhibida en la Figura 9, “En la imagen A afecta al esfuerzo y al rendimiento al subir también tendrían que calcular a cuántos kilómetros tendrían que subir y al bajar para no causar un accidente. En la imagen B afecta el rendimiento en que al dar la vuelta ya que tiene que disminuir la velocidad para no provocar un accidente al dar la vuelta.”, muestra una comprensión general sobre cómo la inclinación de los caminos mostrados afecta al esfuerzo humano y el rendimiento del automóvil. Además, su respuesta sugiere un entendimiento básico de la pendiente al mencionar que se deben “calcular cuántos kilómetros” se deben avanzar al subir o bajar por el camino para evitar accidentes. Esto introduce la idea de una relación entre una distancia y la inclinación del camino, lo que indica una conexión de la necesidad de moderar la velocidad y esfuerzo en caminos con diferentes inclinaciones en un contexto real.

Comparando la respuesta del estudiante A34, quien aborda el concepto de "pendiente" directamente en su respuesta, la respuesta de A18 parece ser menos concreta en términos matemáticos. Sin embargo, adopta otra postura interesante al mencionar la distancia medida en kilómetros, lo cual sugiere una percepción de cómo el avance se conecta de alguna manera con la inclinación del camino.

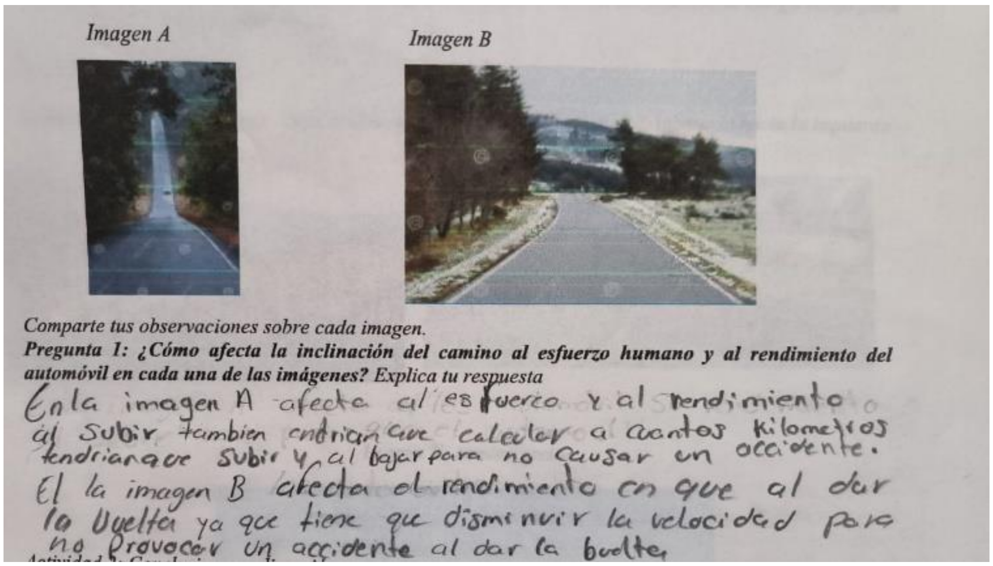


Figura 9. Respuesta al ítem 1 de la estudiante A18

ÍTEM 2

La respuesta de la estudiante, A33 indicada en la Figura 10, "Es la inclinación de una superficie. En pocas palabras un camino que sube o baja en el plano", indica que la estudiante es capaz de proporcionar una definición inicial sobre el concepto, pues las frases "la inclinación de una superficie" y "un camino que sube o baja", muestran una conexión del concepto con el mundo real, cumpliendo de manera general con el principio de Realidad, bajo el cual fue diseñado este ítem. Sin embargo, no se puede decir que logra una comprensión activa del conocimiento, sino que permanece en un nivel más general, ya que aún no menciona otros aspectos como el cambio en las direcciones vertical y horizontal, rasgos importantes para definir al concepto.

Aunque la estudiante necesita proporcionar algunos ejemplos más detallados de la aplicación del concepto, lo cual fortalecería el principio de Actividad, el objetivo de este ítem se cumple, ya que la estudiante comprende de manera general y con sus propias palabras una definición inicial del término “pendiente”.

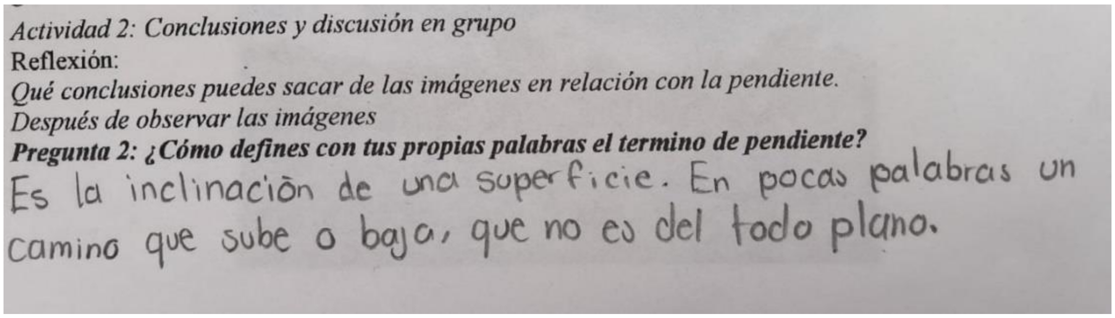

Actividad 2: Conclusiones y discusión en grupo
Reflexión:
Qué conclusiones puedes sacar de las imágenes en relación con la pendiente.
Después de observar las imágenes
Pregunta 2: ¿Cómo defines con tus propias palabras el termino de pendiente?
Es la inclinación de una superficie. En pocas palabras un camino que sube o baja, que no es del todo plano.

Figura 10. Respuesta al ítem 2 de la estudiante A33

La respuesta de A18, señalada en la Figura 11, “Una cosa que dejamos a la mitad y falta por completar, o también puede ser una calle inclinada.”, demuestra que los significados que se le dan a un concepto pueden variar, incluso si estos no fueran matemáticos. Al referirse a “algo que dejamos a la mitad y falta por completar”, la estudiante muestra cómo su percepción del significado del concepto puede variar de acuerdo con el lenguaje utilizado diariamente, lo cual evidencia que este significado no está relacionado con el concepto matemático.

Quizá se debería tener mayor claridad al diseñar el ítem, indicando que lo que se espera es que se responda de acuerdo con el contexto abordado o brindando alguna orientación del docente que remarque este aspecto para evitar confusiones semánticas. Sin embargo, A18 después proporciona un significado más acorde al contexto estudiado, al mencionar una “calle inclinada”, demostrando que también su concepción es matemática. Aunque su respuesta es más vaga que la de A33, está más alineada con los pilares de Realidad y Actividad en comparación con su primera respuesta.

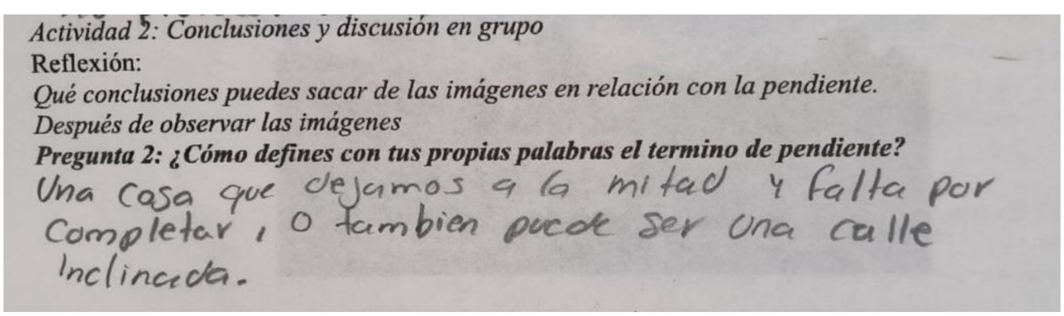

Actividad 2: Conclusiones y discusión en grupo
Reflexión:
Qué conclusiones puedes sacar de las imágenes en relación con la pendiente.
Después de observar las imágenes
Pregunta 2: ¿Cómo defines con tus propias palabras el termino de pendiente?
Una cosa que dejamos a la mitad y falta por completar, o tambien puede ser una calle Inclinada.

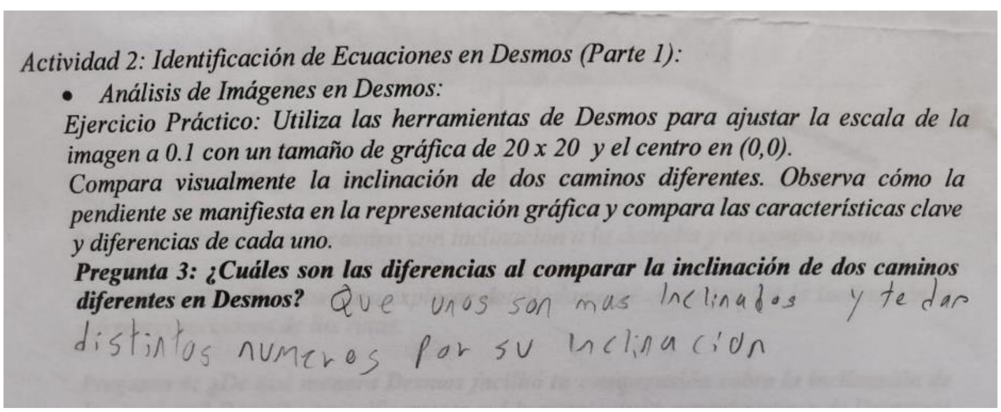
Figura 11. Respuesta al ítem 2 de la estudiante A18

ÍTEM 3

La respuesta de A18, evidenciada en la Figura 12 , “Que unos son más inclinados y te dan distintos números por su inclinación”, denota que tiene una comprensión general sobre la inclinación, pues hace mención que cada camino tiene “un número distinto” , encontrando una relación con la pendiente, esto sucede porque al cargar y manipular las imágenes dentro de Desmos, el estudiante debía establecer una línea recta que fuera coherente con la inclinación del camino en las imágenes (esto se encuentra más detallado en el instrumento de intervención).

A través de las herramientas que ofrece la calculadora gráfica, se necesitó la orientación del docente para guiar el desarrollo de esta parte de la actividad. Así, el estudiante pudo generar una línea recta dentro de Desmos, utilizando la ecuación y= mx+b, manipulando los valores de “m” y “b” sin aún conocer el concepto matemático de estos parámetros, pero sabiendo que, al moverlos, la inclinación y el desplazamiento de la línea recta se modificaban.

Aun así, el no conocer los parámetros mencionados anteriormente limita la profundidad de su respuesta en términos matemáticos. Sin embargo, para esta parte del instrumento aún no se espera que el estudiante logre una comprensión sobre estos parámetros, más allá de saber que influyen en la representación de la línea recta. Por ello, se puede afirmar que la respuesta de A18 cumple con el objetivo del ítem.

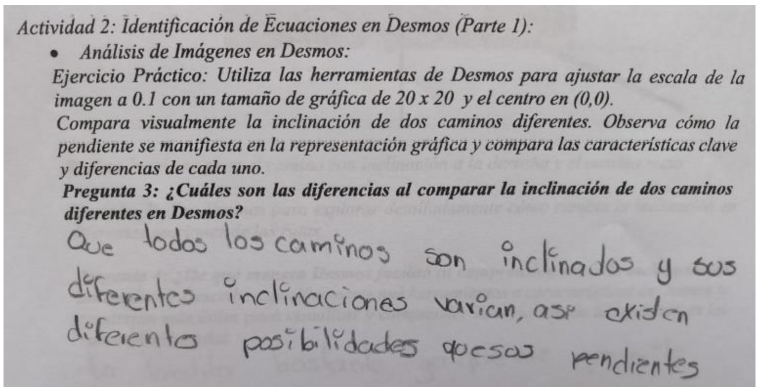

Actividad 2: Identificación de Ecuaciones en Desmos (Parte 1):

- *Análisis de Imágenes en Desmos:*

Ejercicio Práctico: Utiliza las herramientas de Desmos para ajustar la escala de la imagen a 0.1 con un tamaño de gráfica de 20 x 20 y el centro en (0,0).
Compara visualmente la inclinación de dos caminos diferentes. Observa cómo la pendiente se manifiesta en la representación gráfica y compara las características clave y diferencias de cada uno.
Pregunta 3: ¿Cuáles son las diferencias al comparar la inclinación de dos caminos diferentes en Desmos? Que unos son mas inclinados y te dar distintos numeros por su inclinacion

Figura 12. Respuesta al ítem 3 del estudiante A12

En su respuesta reflejada en la Figura 13, el participante A13 menciona: “que todos los caminos son inclinados y sus diferentes inclinaciones varían, así existen diferentes posibilidades que sus pendientes”, mostrando una comprensión aún parcial de la actividad planteada. Su respuesta refleja que reconoce la variación en las inclinaciones de los caminos, ya que logra manipular correctamente los valores de “m” y “b”, generando una línea recta con la misma inclinación que los caminos en sus capturas. Sin embargo, aún no comprende completamente los conceptos matemáticos involucrados. Su respuesta sugiere la necesidad de fortalecer la conexión entre la comprensión conceptual y la manipulación de los parámetros dentro de la calculadora gráfica.



Actividad 2: Identificación de Ecuaciones en Desmos (Parte 1):

- *Análisis de Imágenes en Desmos:*

Ejercicio Práctico: Utiliza las herramientas de Desmos para ajustar la escala de la imagen a 0.1 con un tamaño de gráfica de 20 x 20 y el centro en (0,0).
Compara visualmente la inclinación de dos caminos diferentes. Observa cómo la pendiente se manifiesta en la representación gráfica y compara las características clave y diferencias de cada uno.

Pregunta 3: ¿Cuáles son las diferencias al comparar la inclinación de dos caminos diferentes en Desmos?

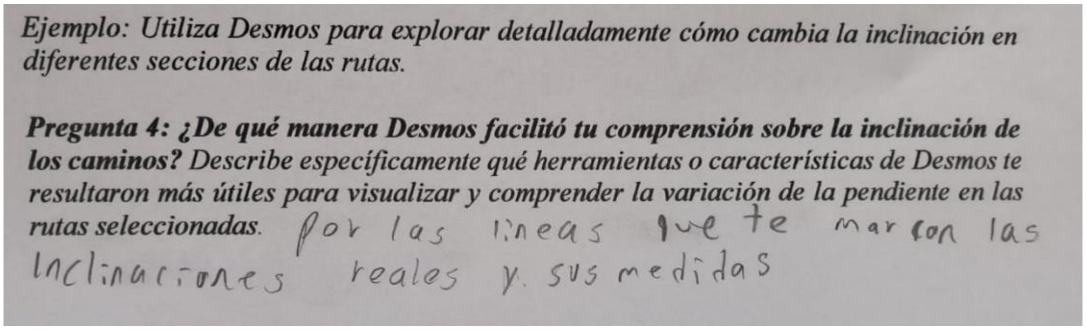
Que todos los caminos son inclinados y sus diferentes inclinaciones varian, así exiden diferente posibilidades apesas pendientes

Figura 13. Respuesta al ítem 3 de la estudiante A13

ÍTEM 4

La respuesta de A12, representada en la Figura 14, “Por las líneas que te marcaron las inclinaciones reales y sus medidas”, refleja la identificación de las inclinaciones de los caminos en sus imágenes. Sin embargo, aunque demuestra una interacción básica con la herramienta, aún le falta mayor profundidad para describir las interacciones o herramientas específicas de la calculadora le ayudaron a comprender el concepto de pendiente en un contexto real.

A12 comprende manera limitada la conexión entre las imágenes sacadas del mundo real con una representación gráfica. Por ello, los pilares de la RME bajo los cuales fue diseñado este ítem se cumplen solo de manera parcial con la respuesta de este estudiante.


Ejemplo: Utiliza Desmos para explorar detalladamente cómo cambia la inclinación en diferentes secciones de las rutas.

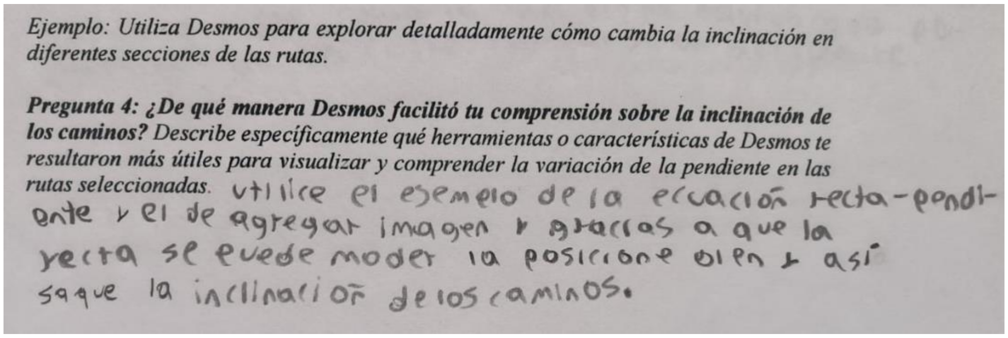
Pregunta 4: ¿De qué manera Desmos facilitó tu comprensión sobre la inclinación de los caminos? *Describe específicamente qué herramientas o características de Desmos te resultaron más útiles para visualizar y comprender la variación de la pendiente en las rutas seleccionadas.* Por las líneas que te marcan las inclinaciones reales y sus medidas

Figura 14. Respuesta al ítem 4 de la estudiante A12

En su respuesta, “Utilicé el ejemplo de la ecuación recta pendiente, el de agregar imagen y gráficas a que la recta se puede mover la posición bien y así que la inclinación de los caminos.”, establecida en la Figura 15, A38 hace referencia a que utilizó Desmos de una forma más completa, mencionando que empleó herramientas como la ecuación de la recta-pendiente, misma que le ayudó a visualizar con mayor claridad la inclinación de los caminos analizados. Esto sugiere que posee una habilidad mayor para ajustar la línea recta con respecto a la inclinación del camino de sus imágenes. Sin embargo, no logra establecer una conexión clara entre la manipulación dentro de la calculadora y una comprensión sólida del concepto de pendiente en situaciones de la vida cotidiana.

En comparación con la respuesta de A12, el estudiante A38 demuestra un uso más detallado de las herramientas que ofrece la aplicación, destacando la manipulación de la recta a través de los parámetros “m” y “b”, mientras que A12 se limita a describir las inclinaciones sin necesariamente especificar que lo logró a través de las herramientas de Desmos.

A pesar de que ambos estudiantes logran ajustar e identificar correctamente la línea recta pendiente en sus imágenes, aún no consiguieron comprender cómo esta interacción contribuye a la comprensión del concepto de pendiente en el contexto planteado.



Ejemplo: Utiliza Desmos para explorar detalladamente cómo cambia la inclinación en diferentes secciones de las rutas.

Pregunta 4: ¿De qué manera Desmos facilitó tu comprensión sobre la inclinación de los caminos? *Describe específicamente qué herramientas o características de Desmos te resultaron más útiles para visualizar y comprender la variación de la pendiente en las rutas seleccionadas.* utilice el esemplo de la ecuacion recta-pendiente y el de agregar imagen y gracias a que la recta se puede moder la posicione bien y así saque la inclinacion de los caminos.

Figura 15. Respuesta al ítem 4 de la estudiante A38

ÍTEM 5

La respuesta de la estudiante A4, representada en la Figura 16, "Una mayor fuerza física y Automovilista. Depende de cómo sea las pendiente rectas, curveadas, estrechas, Inclinadas unas Requiere mayor fuerza que otras" denota una comprensión general sobre el esfuerzo que implica transitar sobre caminos inclinados, pues menciona "mayor fuerza física y automovilística" y hace alusión a caminos con diferentes formas, como rectos, curvos, estrechos e inclinados. Esto demuestra que A4 tiene nociones sobre la complejidad de transitar por caminos de diferentes formas e inclinaciones. Sin embargo, su representación gráfica carece de coherencia con su descripción escrita, pues muestra solo un camino inclinado sobre un plano cartesiano, lo que sugiere que, aunque A4 comprende las diferentes variaciones de los caminos, le resulta complicado transmitirlo visualmente en su dibujo.

Aun así, resulta interesante observar cómo A4 relaciona la inclinación de un camino con un plano cartesiano, lo que muy probablemente se derivó de la actividad previa, en donde los estudiantes cargaron sus imágenes en Desmos y las adecuaron y manipularon dentro de calculadora gráfica en un plano cartesiano. Es así como el conocimiento de la estudiante comienza a experimentar un proceso de matematización horizontal, de acuerdo con Freudenthal (1991), al agregar un elemento matemático a sus respuestas con contexto realista.

A4 conecta su comprensión de la pendiente con una situación cotidiana relacionada con el esfuerzo físico y automovilístico conectando con el principio de Realidad. Además, logra establecer una clasificación de las pendientes tratando de categorizar las diferentes formas de los caminos. Sin embargo, la falta de un dibujo más detallado que ilustre esta clasificación indica que aún necesita desarrollar mejor su comprensión práctica, especialmente en la relación entre su lenguaje verbal y su representación gráfica.

La literatura en educación matemática (Treffers, 1987) sugiere que la transferencia de ideas entre lo verbal y lo visual puede ser un desafío. Por ello, se sugiere el uso de actividades de representación para fortalecer este tipo de habilidades. Así, la respuesta de la estudiante cumple de manera parcial con el pilar de Actividad.

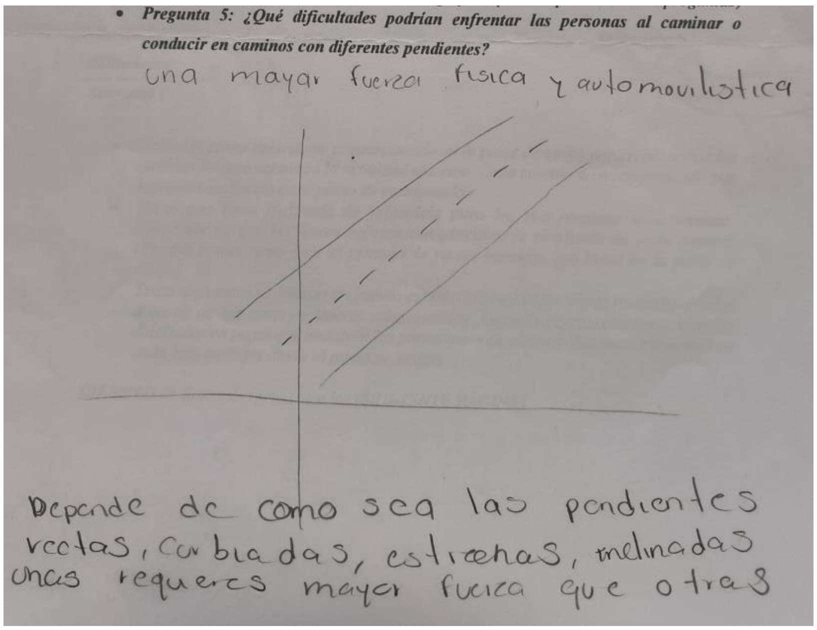


Figura 16. Respuesta al ítem 5 de la estudiante A4

La respuesta de A8 al ítem 5, expuesta en la Figura 17, muestra una comprensión aplicada sobre las dificultades de caminar o conducir por tres caminos con distintas pendientes, pues utiliza tanto texto como representaciones gráficas. Es interesante cómo A8, en sus representaciones visuales, identifica un camino con pendiente negativa (inclinado hacia la izquierda del plano cartesiano) como un camino en descenso, indicando los riesgos que pueden sufrir los peatones o los vehículos al bajar por él, como deslizamientos o el temor a caer. Por otra parte, para el camino representado con pendiente positiva (inclinado hacia la derecha), la estudiante menciona que las personas o vehículos requieren un esfuerzo adicional para avanzar, pues el camino va de subida, lo que indica que interpreta la relación entre la inclinación y la resistencia al ascender. Finalmente, en su representación del camino plano, indica la facilidad al transitar por él, logrando moverse con facilidad.

Esta respuesta se alinea con los principios de Realidad y de Actividad de la RME, pues A8 conecta su experiencia en situaciones de la vida cotidiana con el concepto de pendiente. Su respuesta también cumple con los criterios de respuesta ideal de evaluación propuestos, al establecer un vínculo entre las características de los diferentes caminos y su impacto en la experiencia al transitar por ellos. Además, se enriquece con los planteamientos de Van den Heuvel-Panhuizen (2020) sobre la contextualización de los conceptos matemáticos, lo que permite a la estudiante internalizar la noción de pendiente mediante ejemplos cotidianos.

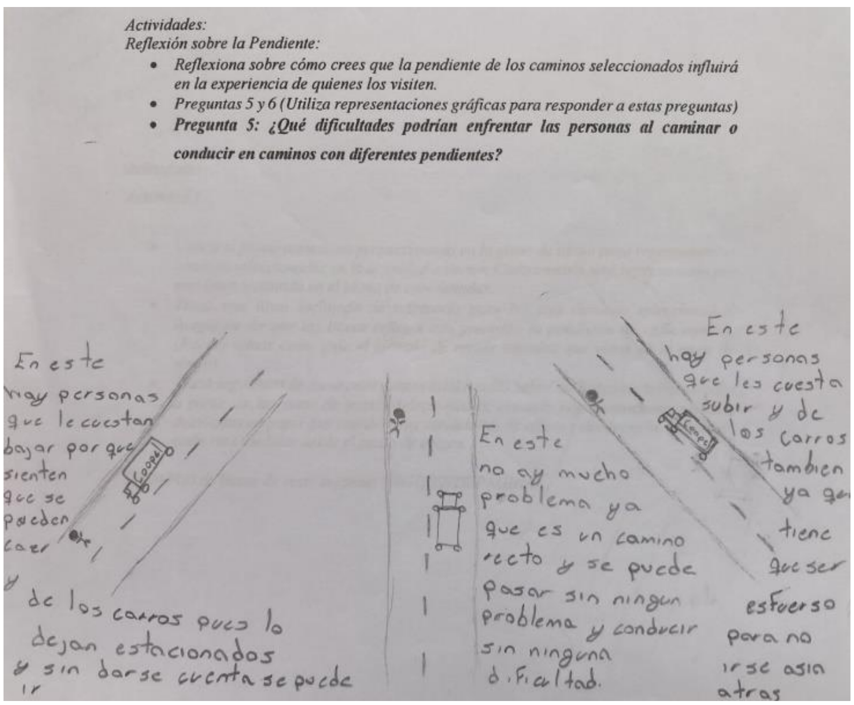


Figura 17. Respuesta al ítem 5 de la estudiante A8

ÍTEM 6

Este ítem, el cual se centra en explorar la relación entre la altura y su impacto en la inclinación de un camino, sirve como una introducción al razonamiento sobre el concepto de pendiente. Aunque presenta algunas imprecisiones, sigue estando contextualizado dentro de la situación de aprendizaje planteada.

La respuesta del estudiante A15, plasmada en la Figura 18 se enfoca en explicar que la pendiente de un camino está relacionada con la altura y la longitud, aunque carece de una explicación más detallada, como se observa en la frase "el grado de la inclinación podría ser el mismo, pero debido a que es más alto, tiene más camino". Su dibujo complementa esta idea, pues muestra un camino que crece a diferentes alturas. Sin embargo, no parece ilustrar ni demostrar con claridad si la inclinación se mantiene o cambia con la variación de la altura o la distancia horizontal.

Esta respuesta sugiere una comprensión inicial del concepto de pendiente, pero aún presenta confusión en la relación entre la altura y el recorrido, así como en su impacto en el grado de inclinación.

Analizado desde el pilar de Nivel de la RME, el estudiante reconoce la altura como factor importante en la inclinación, pero aún es incapaz de reconocer la relación entre el cambio de altura (Δy) y la distancia horizontal (Δx). Por ello, su respuesta cumple parcialmente con el objetivo del ítem. En resumen, el estudiante comienza a aproximarse a una conceptualización de la pendiente al relacionarla con la altura, pero aún necesita una formalización más clara del concepto. Esto incluso puede ser esperado, ya que, hasta este punto del instrumento, el estudiante aún no ha entrado en la formalización matemática del concepto, pues aún sigue interactuando con actividades contextualizadas dentro del entorno de aprendizaje planteado.

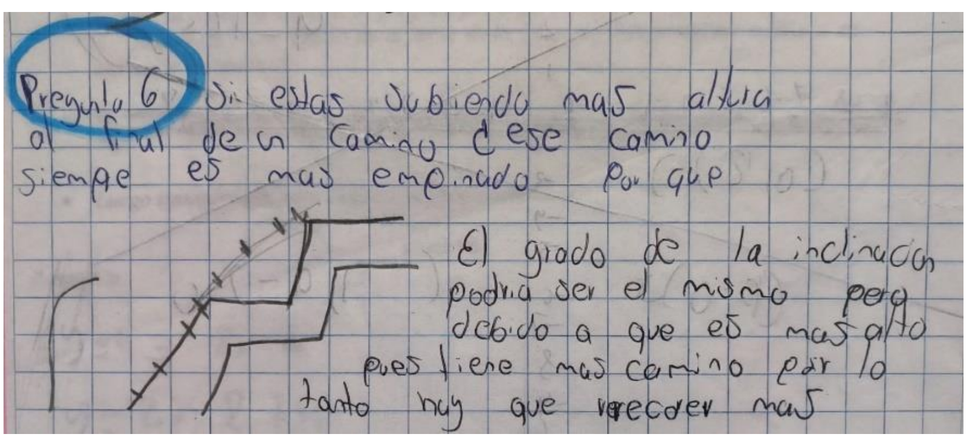


Figura 18. Respuesta al ítem 6 de la estudiante A15

En su respuesta ilustrada en la Figura 19, el estudiante A33 demuestra un buen entendimiento del concepto al dibujar dos triángulos rectángulos con diferentes alturas, referenciando al teorema de Tales. Con este dibujo, el estudiante establece que, aunque se tengan dos puntos A y B con alturas distintas, la inclinación del camino que pasa por ambos puntos será la misma, ya que comparten la misma relación geométrica y proporcional. El hecho de que el estudiante haya optado por una representación visual para contestar al ítem resulta valioso dentro de la RME, ya que logra conectar conceptos abstractos a través de imágenes o dibujos.

Desde la perspectiva del pilar de Nivel, el estudiante alcanza un nivel más formal del concepto, al utilizar triángulos rectángulos proporcionales para demostrar la invariabilidad del valor de la pendiente. Su respuesta establece que la posición del punto en el plano no afecta el valor de la pendiente, y utiliza un dibujo para validar su afirmación. Este razonamiento indica que algunos estudiantes se sienten más cómodos utilizando representaciones gráficas para expresar su comprensión de conceptos matemáticos.

Al comparar esta respuesta con la de A15, se hace evidente que, aunque A15 también posee una comprensión intuitiva del concepto, no utiliza una representación tan sólida como la de A33. Esto hace que la respuesta de A33 sea más clara y con mayor formalización del concepto.

Mientras que A15 menciona la altura como un parámetro que tiene relación con el valor de la pendiente, A33 reafirma que no solo la altura, sino también el recorrido horizontal influye en la pendiente. Además, complementa su respuesta con un ejemplo geométrico concreto, conectando conceptos teóricos con representaciones gráficas y con un ejemplo de la vida cotidiana, alineándose así con el principio de Realidad.

Esta respuesta, indica que el uso de dibujos en la educación matemática puede ser una herramienta efectiva, ya que permite a los estudiantes validar sus conceptos a través de diferentes representaciones. Asimismo, funciona como un medio para expresar su comprensión de estos conceptos, fortaleciendo la conexión entre la teoría y la práctica.

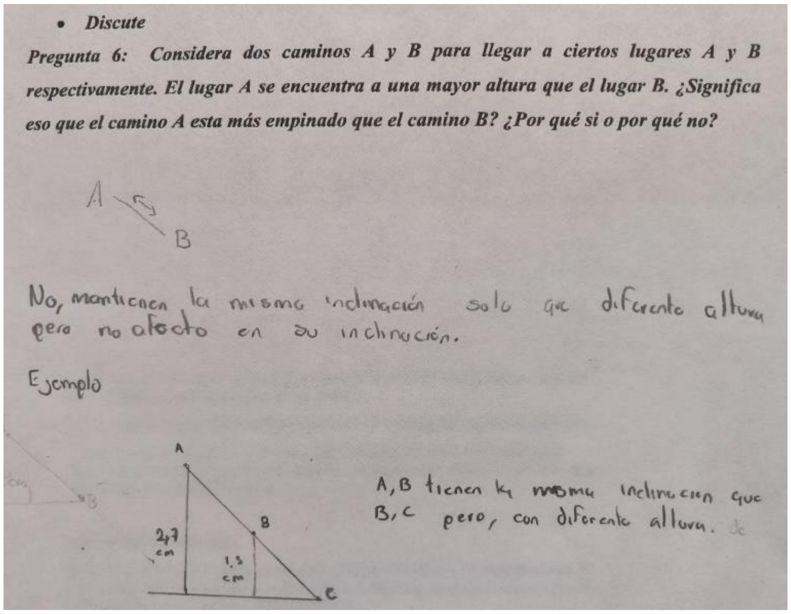


Figura 19. Respuesta al ítem 6 de la estudiante A34

ÍTEM 7

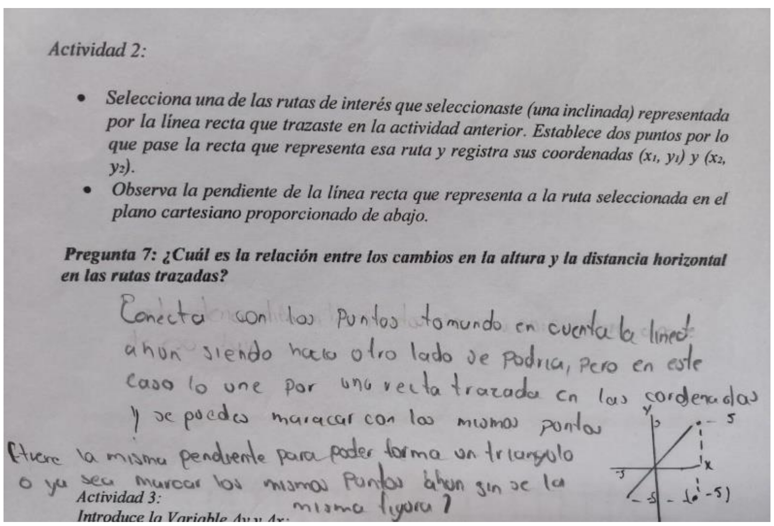
En la respuesta de A20 al ítem 7, ejemplificada en la Figura 20, se observa que, aunque su descripción verbal es vaga y carece de profundidad para explicar la relación entre los cambios de altura y distancia horizontal, su dibujo representa adecuadamente el concepto de pendiente.

La representación visual que realiza, la cual incluye un pequeño plano cartesiano y una línea recta que pasa por dos puntos con sus coordenadas, además de las distancias vertical y horizontal entre ellos, demuestra que posee una comprensión intuitiva de la relación entre las distancias de los puntos, lo cual representa una comprensión del concepto de pendiente. Aunque la estudiante no logra articularlo verbalmente en su descripción de su respuesta, su dibujo si muestra una representación efectiva a la relación matemática.

Es importante señalar que este ítem viene precedido por un contexto de actividades, en el que se le solicitó al estudiante trazar líneas rectas en un plano cartesiano, mismas que copia directamente de las rectas generadas de sus fotos de caminos en la actividad de interacción con Desmos. En esta actividad, el estudiante debe establecer puntos de referencia sobre estas líneas. Este contexto no solo enmarca las actividades dentro de un entorno realista, sino que también lleva a los estudiantes a explorar de forma visual el comportamiento de la pendiente en diferentes caminos.

De acuerdo con los principios de la RME, la relación con representaciones visuales y gráficos permite a los estudiantes la construcción y comprensión de conceptos matemáticos abstractos. (Van den Heuvel-Panhuizen, 2020).

La RME, promueve el uso de situaciones realistas con el fin de que los estudiantes puedan interactuar con conceptos matemáticos de manera tangible. En este caso, aunque la estudiante no expone detalladamente cómo los cambios de altura y distancia horizontal afectan a la pendiente, su esquema sugiere una internalización intuitiva del concepto. Su dibujo, que representa el trazado de puntos en el plano cartesiano, muestra que el estudiante reconoce a la pendiente en términos de variación entre puntos.


Actividad 2:

- *Selecciona una de las rutas de interés que seleccionaste (una inclinada) representada por la línea recta que trazaste en la actividad anterior. Establece dos puntos por lo que pase la recta que representa esa ruta y registra sus coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2).*
- *Observa la pendiente de la línea recta que representa a la ruta seleccionada en el plano cartesiano proporcionado de abajo.*

Pregunta 7: ¿Cuál es la relación entre los cambios en la altura y la distancia horizontal en las rutas trazadas?

Conecta con los puntos tomando en cuenta la linea ahun siendo hacia otro lado se podria, pero en este caso lo une por una recta trazada en las cordenadas y se puedes maracar con los mismos puntos tiene la misma pendiente para poder forma un triangulo o ya sea marcar los mismos puntos ahun sin se la misma figura ?

Actividad 3:

Introduce la Variable Δy y Δx:

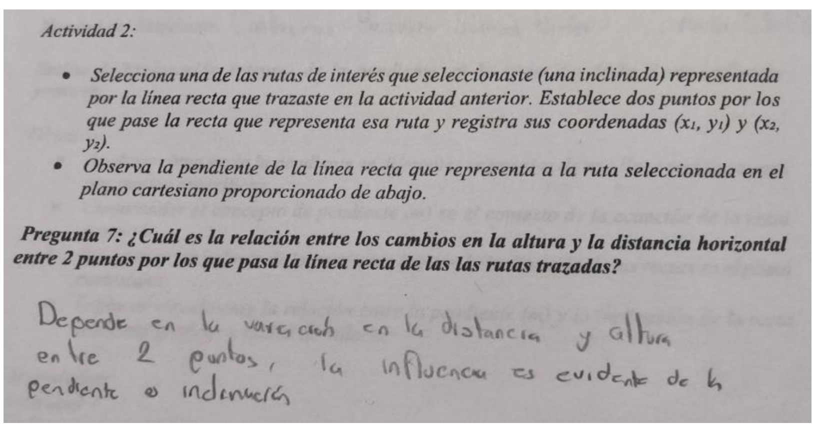
Figura 20. Respuesta al ítem 7 de la estudiante A20

La respuesta del estudiante A33, visualizada en la Figura 21, “Depende de la variación en la distancia y la altura entre dos puntos, la influencia es evidente de la pendiente o inclinación”, muestra una descripción formal del concepto de pendiente en cuanto los cambios de distancia vertical y horizontal entre dos puntos. Al referirse a “depende de la variación en la distancia y la altura entre dos puntos,” el estudiante afirma que el valor de la pendiente es el resultado de la variación en la altura (Δy) y la distancia horizontal (Δx). Sin embargo, su respuesta carece de un elemento gráfico, el cual pudo haberle ayudado a clarificar su respuesta y reafirmar su comprensión del concepto.

Desde la perspectiva de la RME, A33 demuestra una comprensión parcial, ya que no expresa explícitamente cómo esta variación resulta en el valor de la pendiente. Además, la falta de un dibujo reduce la demostración de la relación funcional entre los dos puntos.

Observando la respuesta de los dos estudiantes analizados para este ítem, se puede identificar un contraste interesante: mientras A33 establece una respuesta verbal más precisa, A20 lo hace de manera gráfica en un plano cartesiano, representando cómo las distancias en altura y distancia horizontal entre dos puntos se traducen en un cambio de pendiente en una línea recta que pasa por dichos puntos. Esto enriquece su respuesta verbal, aunque no es tan precisa como la de A33.

La representación visual de A20 apoya la construcción del concepto, y esto es importante para la RME, ya que afirma que las conexiones entre representaciones gráficas y verbales fortalecen la comprensión de un concepto matemático.



Actividad 2:

- *Selecciona una de las rutas de interés que seleccionaste (una inclinada) representada por la línea recta que trazaste en la actividad anterior. Establece dos puntos por los que pase la recta que representa esa ruta y registra sus coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2).*
- *Observa la pendiente de la línea recta que representa a la ruta seleccionada en el plano cartesiano proporcionado de abajo.*

Pregunta 7: ¿Cuál es la relación entre los cambios en la altura y la distancia horizontal entre 2 puntos por los que pasa la línea recta de las las rutas trazadas?

Depende en la variación en la distancia y altura entre 2 puntos, la influencia es evidente de la pendiente o inclinación

Figura 21. Respuesta al ítem 7 del estudiante A33

ÍTEM 8

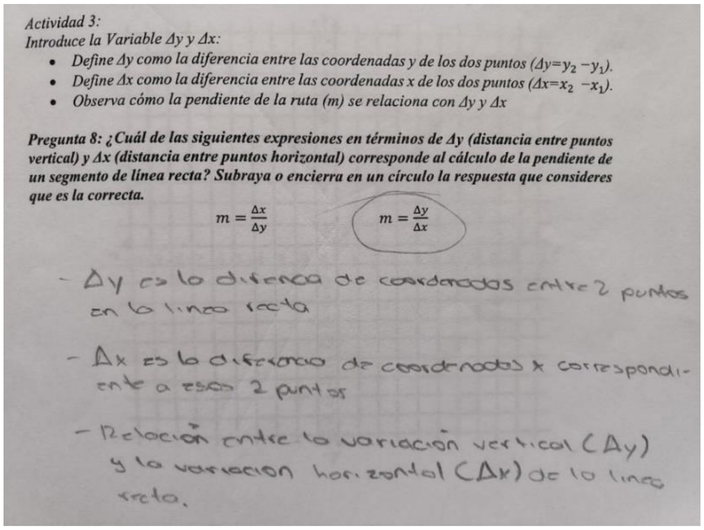
En su respuesta al ítem 8 presentada en la Figura 22, la estudiante A35 cumple con criterio esperado al seleccionar correctamente la expresión $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ como la adecuada para calcular el valor de la pendiente de una línea recta. Sin embargo, resulta interesante cómo la estudiante ofrece una explicación más detallada de los términos que conforman dicha expresión, describiéndolos como:

“la diferencia de coordenadas y entre dos puntos en la línea recta” y "la diferencia de coordenadas x correspondiente a estos dos puntos". Esto indica una comprensión más formal del concepto, que va más allá de la simple memorización.

Analizada desde la RME, la formalización progresiva de un concepto es clave dentro de los objetivos de esta teoría. En este sentido, la respuesta de A35 muestra un manejo preciso de los términos matemáticos. Aunque el ítem está diseñado principalmente para el reconocimiento de una expresión matemática y no para una exploración conceptual profunda, la explicación ofrecida por la estudiante indica que su comprensión ha sido desarrollada no solo a partir de la instrucción directa, sino también gracias a actividades e ítems previos que requerían el uso de Δy y Δx en situaciones que involucran cambio de altura y distancia horizontal.

La formalización en la respuesta de A35, sugiere que el ítem pudo diseñarse de forma más efectiva, incorporando no solo la solicitud de reconocer la fórmula, sino también el análisis de los conceptos que subyacen en ella, así como A35, quien no solo memoriza la fórmula de la pendiente, sino que comprendió el fundamento matemático y su aplicación en el plano cartesiano.

Este ítem es totalmente directo, en comparación con el resto de los ítems del instrumento de intervención, que son más abiertos en cuanto a la exploración del concepto. Sin embargo, la respuesta de A35 demuestra que, incluso en este tipo de ítems, es posible observar un razonamiento reflexivo que justifique matemáticamente su elección. Esto subraya la importancia de que los estudiantes desarrollen la habilidad para moverse dentro de los niveles formales de la matemática y faciliten la transición hacia abstracciones conceptuales, lo que evoca el proceso de matematización vertical propuesta en la RME.



Actividad 3:
Introduce la Variable Δy y Δx:

- *Define Δy como la diferencia entre las coordenadas y de los dos puntos ($\Delta y = y_2 - y_1$).*
- *Define Δx como la diferencia entre las coordenadas x de los dos puntos ($\Delta x = x_2 - x_1$).*
- *Observa cómo la pendiente de la ruta (m) se relaciona con Δy y Δx*

Pregunta 8: ¿Cuál de las siguientes expresiones en términos de Δy (distancia entre puntos vertical) y Δx (distancia entre puntos horizontal) corresponde al cálculo de la pendiente de un segmento de línea recta? Subraya o encierra en un círculo la respuesta que consideres que es la correcta.

$m = \frac{\Delta x}{\Delta y}$ $\quad$ $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

- Δy es la difencia de coordenadas entre 2 puntos en la linea recta
- Δx es la diferencia de coordenadas x correspondiente a esos 2 puntos
- Relación entre la variación vertical (Δy) y la variacion horizontal (Δx) de la linea recta.

Figura 22. Respuesta al ítem 8 de la estudiante A35

ÍTEM 9

Antes de comenzar con el análisis de los ítems 9, 10, 11, es importante mencionar las actividades previas que preceden a estos tres ítems. Estas actividades funcionan como un antecedente que guía a los estudiantes en su comprensión del valor de la pendiente como una relación de su invarianza a través de una línea recta en el plano cartesiano. El objetivo de estas actividades era que los estudiantes calcularan el valor de la pendiente a partir de varios puntos dados. Al unirlos, se genera una línea recta inclinada, lo que les permite reflexionar y prepararse para responder a los ítems antes mencionados. Un ejemplo del trazo de los puntos y por consiguiente la línea recta al unirlos, se muestra en la Figura 23.

La estudiante A24 trazó un segmento de recta que pasa por los puntos A (1,2) y B (5,6) dentro del plano cartesiano. Además, calculó correctamente la pendiente entre ambos puntos mediante la expresión $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, obteniendo un valor de m= 1. Posteriormente, agregó un tercer punto C (3,4), dentro del segmento AB. En este nuevo cálculo, la estudiante obtuvo nuevamente el valor de m= 1 para el tramo AC, lo que permitió observar la invarianza de la pendiente a lo largo de la línea recta.

El análisis continuó al agregar un cuarto punto, ubicado fuera del segmento AB, con coordenadas D (7,8). En este caso, la estudiante calculó el valor de la pendiente de los segmentos

AD y DB, obtenido nuevamente el valor de m=1. Con ello, se buscó que la estudiante comprendiera que, incluso al añadir más puntos fuera del segmento original, el valor de la pendiente sigue siendo constante.

El objetivo de esta actividad fue hacer que el estudiante concluyera que el valor de la pendiente se mantiene constante a lo largo de una línea recta y que, además pudiera constatarlo a través de una representación gráfica en distintos tramos de la línea recta. Las instrucciones y cálculos realizados por la estudiante al atender las mismas se exponen en la Figura 24.

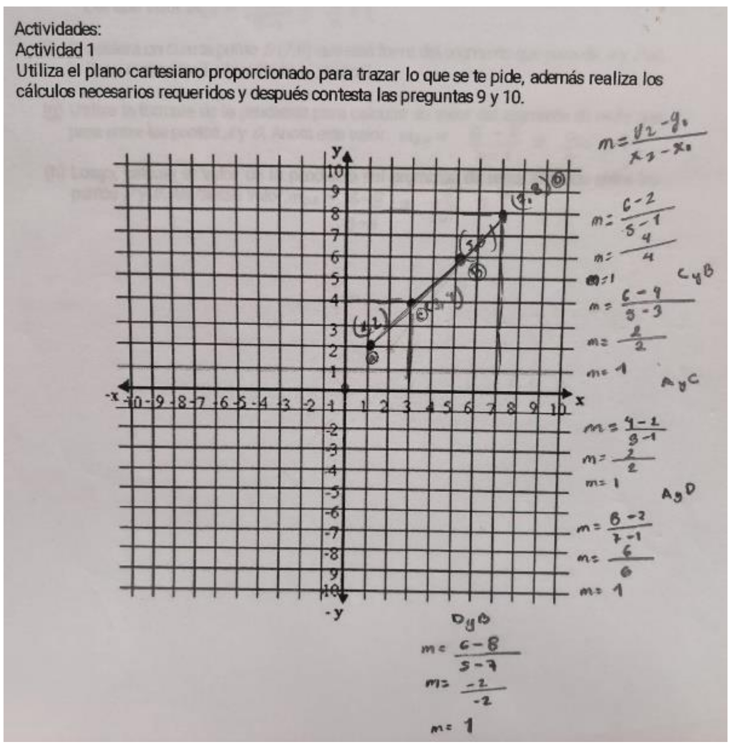
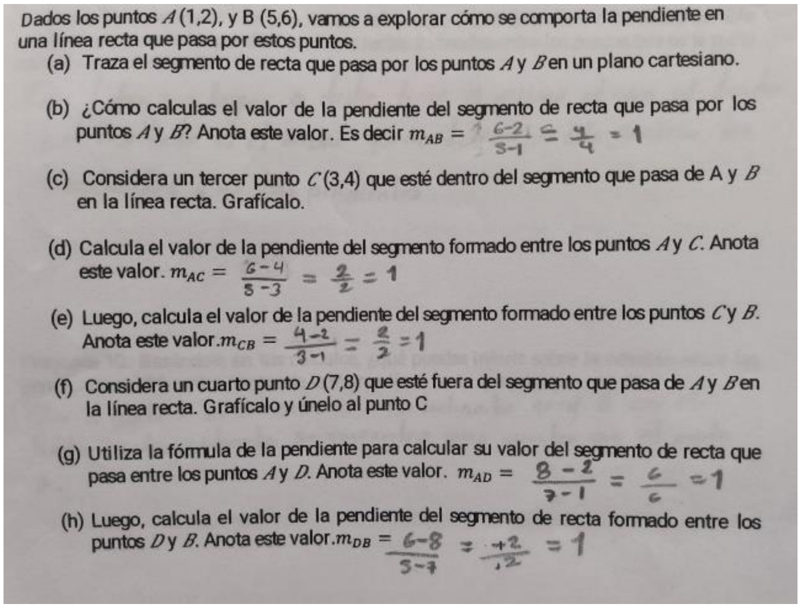


Figura 23. Respuesta de gráfico en plano cartesiano de actividad 1, sesión 4, de la estudiante A24 al ítem 9

Nota. La figura muestra los cálculos del valor de la pendiente en distintos puntos a través de varios segmentos de la recta, así como su gráfica en el plano cartesiano.



Dados los puntos A (1,2), y B (5,6), vamos a explorar cómo se comporta la pendiente en una línea recta que pasa por estos puntos.

(a) Traza el segmento de recta que pasa por los puntos A y B en un plano cartesiano.

(b) ¿Cómo calculas el valor de la pendiente del segmento de recta que pasa por los puntos A y B? Anota este valor. Es decir $m_{AB} = \frac{6-2}{5-1} = \frac{4}{4} = 1$

(c) Considera un tercer punto C (3,4) que esté dentro del segmento que pasa de A y B en la línea recta. Grafícalo.

(d) Calcula el valor de la pendiente del segmento formado entre los puntos A y C. Anota este valor. $m_{AC} = \frac{6-4}{5-3} = \frac{2}{2} = 1$

(e) Luego, calcula el valor de la pendiente del segmento formado entre los puntos C y B. Anota este valor. $m_{CB} = \frac{4-2}{3-1} = \frac{2}{2} = 1$

(f) Considera un cuarto punto D (7,8) que esté fuera del segmento que pasa de A y B en la línea recta. Grafícalo y únelo al punto C

(g) Utiliza la fórmula de la pendiente para calcular su valor del segmento de recta que pasa entre los puntos A y D. Anota este valor. $m_{AD} = \frac{8-2}{7-1} = \frac{6}{6} = 1$

(h) Luego, calcula el valor de la pendiente del segmento de recta formado entre los puntos D y B. Anota este valor. $m_{DB} = \frac{6-8}{5-7} = \frac{+2}{+2} = 1$

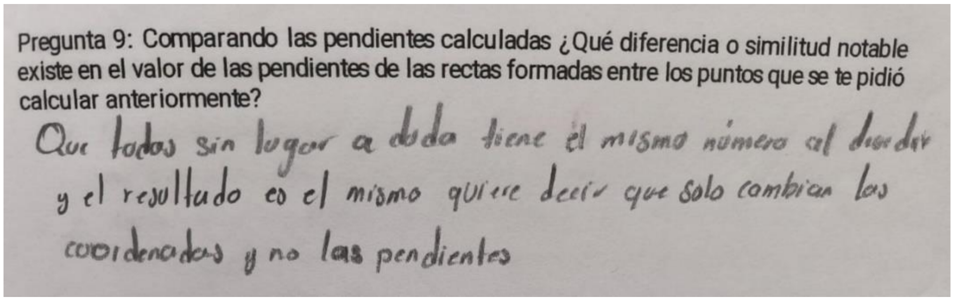
Figura 24. Respuesta cálculos e instrucciones de actividad 1, sesión 4, de la estudiante A24 al ítem 9

Nota. La figura muestra las indicaciones solicitadas al estudiante sobre la gráfica de puntos y cálculo de pendientes de segmentos de rectas que pasa por ellos.

La respuesta de la estudiante A24, proporcionada en la Figura 25, "que todos sin lugar a duda tiene el mismo número al dividir y el resultado es el mismo quiere decir que solo cambiará las coordenadas y no las pendientes", demuestra una comprensión de la invarianza del valor de la pendiente de una línea recta. Al mencionar que los resultados obtenidos son invariantes, la estudiante evidencia que comprendió que la pendiente no cambia, sino únicamente las coordenadas de los puntos utilizadas para calcularla.

A24 logra notar la propiedad de constancia de la pendiente de una línea recta, independientemente de los puntos elegidos para calcularla, siempre que estos pertenezcan a la misma línea recta. Esta comprensión resulta exitosa, ya que A24 no solo entiende el cálculo operativo del valor de la pendiente, sino que, gracias a las actividades previas, logra conectarlo con una comprensión más abstracta del concepto.

Este resultado pudo tener éxito dadas las actividades previas que la estudiante necesitó realizar, las cuales le permitieron validar su respuesta al ítem 9. Dentro del marco de la RME, su respuesta se alinea con el principio de Nivel, ya que trasciende de la aplicación de la fórmula matemática a una interpretación gráfica y simbólica, privilegiando así la matematización vertical.


Pregunta 9: Comparando las pendientes calculadas ¿Qué diferencia o similitud notable existe en el valor de las pendientes de las rectas formadas entre los puntos que se te pidió calcular anteriormente?

Que todos sin lugar a duda tiene el mismo número al dividir y el resultado es el mismo quiere decir que solo cambian las coordenadas y no las pendientes

Figura 25. Respuesta al ítem 9 de la estudiante A24

ÍTEM 10

La respuesta de A33, establecida en la Figura 26, "Que la inclinación de la recta va aumentando, subiendo" indica una comprensión en la que estudiante entiende que el valor de la pendiente aumenta conforme la línea sube en plano cartesiano. Sin embargo, esto muestra que aún no ha logrado percibir la propiedad de constancia de la pendiente de una línea recta.

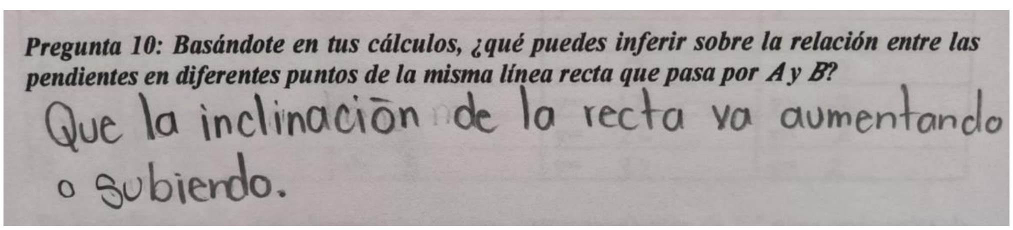
Al analizar las actividades previas que la estudiante debió realizar para contestar a este ítem, se observa la ausencia de gráficos y cálculos de pendiente. Se limitó a solo colocar el valor de m=1 como resultado a la solicitud de calcular el valor de la pendiente entre diferentes puntos. A pesar de que el resultado es "correcto", la falta de sustento en su respuesta puede deberse a muchos factores que, por la naturaleza de este estudio, no se indagaron. Sin embargo, se puede inferir que la usencia de estos datos previos contribuyó a la confusión en su respuesta, ya que no tuvo la oportunidad de verificar cómo la pendiente se mantiene constante en distintos puntos de su gráfica en el plano cartesiano.

La respuesta de A33 también refleja una confusión en cuanto a la relación entre el valor de la pendiente y la altura de un punto. Parece interpretar que el valor de la pendiente aumenta conforme la altura de un punto incrementa, en lugar de comprender que el valor de la pendiente se obtiene a partir de la relación entre los cambios en las coordenadas Δy y Δx de dos puntos por los que pasa la línea recta.

Además, el hecho de que no haya realizado las actividades previas indica una falta de conexión entre actividades prácticas y el razonamiento necesario para responder a este ítem. Quizá se necesitó enfatizar a los estudiantes que, para contestar el ítem, era imprescindible una comprensión visual y de manipulación, mismas que se trabajan en las actividades previas. Incluso, la integración de la calculadora gráfica Desmos podría haber optimizado el tiempo ofreciéndoles a los estudiantes observar la representación gráfica de manera más práctica. Esto les hubiera facilitado comprender visualmente cómo la pendiente se mantiene constante a lo largo de una línea recta.

La respuesta de A33 arroja una reflexión sobre cómo enfatizar a los estudiantes la necesidad de realizar actividades previas para poder responder a ciertas preguntas, además de buscar diseños óptimos que faciliten la atención a estas necesidades. Por supuesto, esto no ocurrió en las respuestas de todos los estudiantes; sin embargo, las acciones de A33 demuestran que pueden existir estudiantes que requieran de otro tipo de instrucciones para poder responder y ejecutar ciertas actividades de manera efectiva.

Este caso refleja cómo la falta de conexión entre acciones puede generar lagunas conceptuales, no cumpliendo, por ejemplo, con el pilar de Entrelazamiento propuesto por la RME, el cual fue utilizado específicamente para evaluar este ítem.


Pregunta 10: Basándote en tus cálculos, ¿qué puedes inferir sobre la relación entre las pendientes en diferentes puntos de la misma línea recta que pasa por A y B?

Que la inclinación de la recta va aumentando o subiendo.

Figura 26. Respuesta al ítem 10 de la estudiante A33

ÍTEM 11

Las actividades previas a la respuesta de A3 sobre el ítem 11, mostradas en las Figuras 27 y 28, muestran la representación en el plano cartesiano, así como los cálculos matemáticos del valor de la pendiente a partir de las coordenadas de varios puntos planteados. Estas actividades fueron el sustento que llevaron a la estudiante a su conclusión en la respuesta al ítem 11.

La Figura 28 muestra el gráfico de una línea recta ascendente con pendiente positiva, representando una comprensión adecuada del concepto de pendiente en un plano cartesiano. La línea recta fue trazada a través de los puntos dados y se complementa con algunos cálculos utilizando la formula rise/run para determinar el valor de la pendiente entre coordenadas de puntos, establecidos a la derecha del plano.

En la Figura 28, la estudiante añade los puntos C y D, como se le es requerido, y realiza los cálculos necesarios para obtener el valor de la pendiente, obteniendo un valor constante de m=1. Se observa que la estudiante aplica la fórmula de la pendiente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ para cada par de puntos y la aplica correctamente, aunque con cierta falta de formalidad.

Estas acciones demuestran que la estudiante ha aplicado correctamente la expresión matemática utilizada para calcular la pendiente, dadas las coordenadas (y, x) de dos puntos por los que pasa la línea recta, mostrando una comprensión operativa. La estudiante hizo uso del gráfico y cálculos para construir un entendimiento del valor de la pendiente, al menos operacionalmente, logrando aplicarla correctamente y obteniendo el valor constante de la pendiente en distintos tramos de la línea recta.

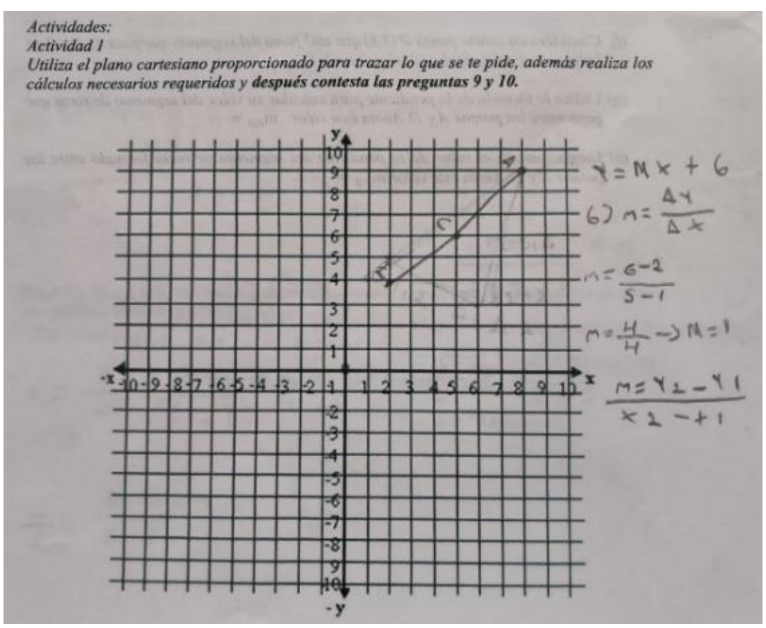
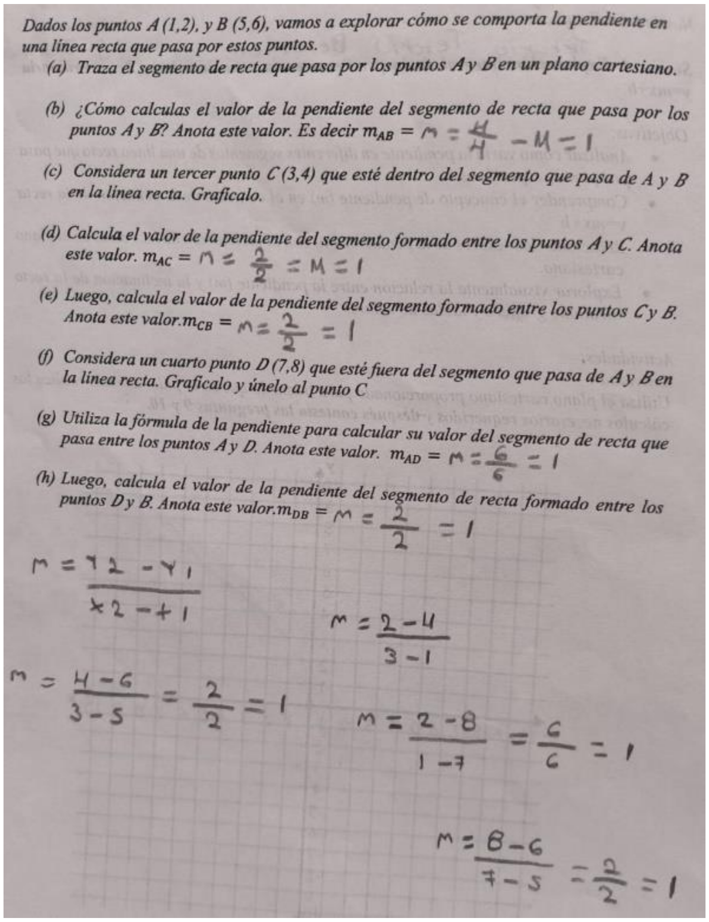


Figura 27. Respuesta de gráfico en plano cartesiano de actividad 1, sesión 4, de la estudiante A3 al ítem 11



Dados los puntos A (1,2), y B (5,6), vamos a explorar cómo se comporta la pendiente en una línea recta que pasa por estos puntos.

(a) Traza el segmento de recta que pasa por los puntos A y B en un plano cartesiano.

(b) ¿Cómo calculas el valor de la pendiente del segmento de recta que pasa por los puntos A y B? Anota este valor. Es decir $m_{AB} =$ $m = \frac{4}{4} - M = 1$

(c) Considera un tercer punto C (3,4) que esté dentro del segmento que pasa de A y B en la línea recta. Grafícalo.

(d) Calcula el valor de la pendiente del segmento formado entre los puntos A y C. Anota este valor. $m_{AC} =$ $m = \frac{2}{2} = M = 1$

(e) Luego, calcula el valor de la pendiente del segmento formado entre los puntos C y B. Anota este valor. $m_{CB} =$ $m = \frac{2}{2} = 1$

(f) Considera un cuarto punto D (7,8) que esté fuera del segmento que pasa de A y B en la línea recta. Grafícalo y únelo al punto C

(g) Utiliza la fórmula de la pendiente para calcular su valor del segmento de recta que pasa entre los puntos A y D. Anota este valor. $m_{AD} =$ $m = \frac{6}{6} = 1$

(h) Luego, calcula el valor de la pendiente del segmento de recta formado entre los puntos D y B. Anota este valor. $m_{DB} =$ $m = \frac{2}{2} = 1$

$m = \frac{Y2 - Y1}{x2 - x1}$

$m = \frac{2-4}{3-1}$

$m = \frac{4-6}{3-5} = \frac{2}{2} = 1$

$m = \frac{2-8}{1-7} = \frac{6}{6} = 1$

$m = \frac{8-6}{7-5} = \frac{2}{2} = 1$

Figura 28. Respuesta cálculos e instrucciones de actividad 1, sesión 4, de la estudiante A3 al ítem 11

La respuesta exhibida en la Figura 29, "que los puntos pueden dar el mismo resultado no en todas las ocasiones, pero siguiendo La fórmula es Fácil de Realizar y es más entendible", muestra que, aunque la estudiante había demostrado una comprensión a nivel operacional del concepto de pendiente, su conclusión en la respuesta al ítem 11 aún refleja una comprensión parcial del concepto. La estudiante reconoce que el uso de la fórmula matemática es una herramienta que facilita conocer el valor de la pendiente y su comprensión; sin embargo, su respuesta requiere un mayor grado de generalización para una comprensión más sólida del concepto.

Esto sugiere que la estudiante aún se encuentra en un proceso de formalización del concepto de pendiente. Las actividades previas, que incluyen la graficación y el cálculo de la pendiente a través de la expresión matemática, proporcionan un contexto adecuado diseñado para fomentar una exploración mayor del concepto. Sin embargo, la respuesta de A3 a este ítem, se queda en una comprensión operativa del concepto, sin generalizarlo plenamente. Por esta razón, el principio de Nivel de la RME, bajo el cual está pensado este ítem, se cumple de manera parcial, pues específicamente esta estudiante no logró avanzar plenamente hacia la construcción de un concepto más sólido.

Esto indica que la estudiante necesita un refuerzo que le permita conectar los resultados obtenidos de forma operacional hasta llegar a una generalización más compleja. El objetivo sería que logre comprender la propiedad de constancia de la pendiente en una línea recta, que refleje un mayor enfoque de formalización y generalización del concepto. Esto permitiría generar una comprensión más robusta del concepto a través del principio de Nivel propuesto por la RME.

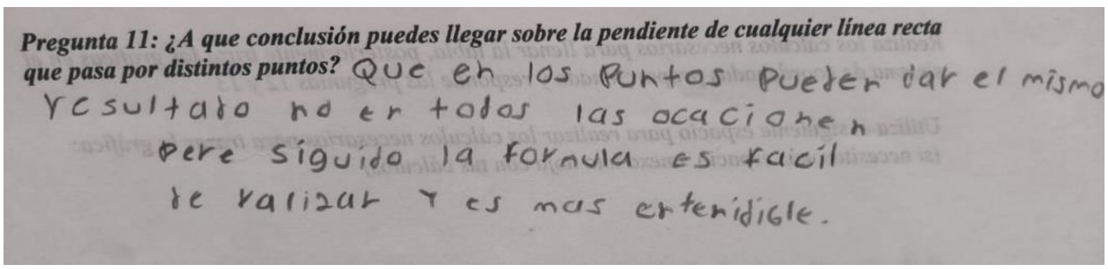

Pregunta 11: ¿A que conclusión puedes llegar sobre la pendiente de cualquier línea recta que pasa por distintos puntos? Que en los Puntos Pueden dar el mismo resultado no en todas las ocaciones pere siguido la formula es facil de ralizar y es mas entenidible.

Figura 29. Respuesta al ítem 11 de la estudiante A3

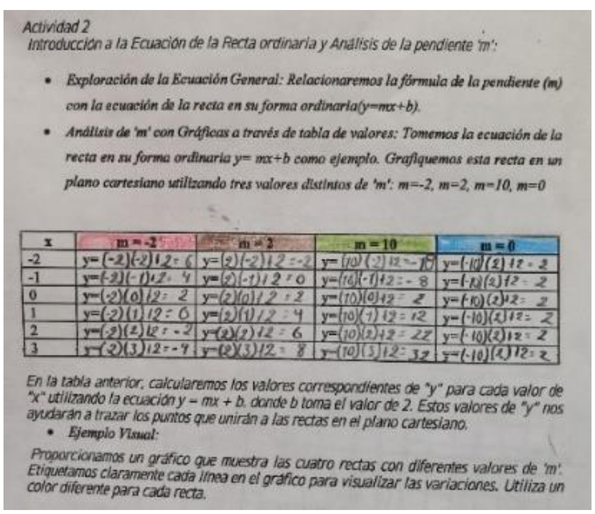
ÍTEM 12 e ÍTEM 13

Las actividades previas a los ítems 12 y 13, no solo fueron diseñadas con el objetivo de dar a conocer a los estudiantes la ecuación de la recta en su forma ordinaria $y = mx + b$, sino también para que exploraran cómo el valor de “m” influye en la inclinación de la línea recta. Se proporcionó un cuadro en el que los estudiantes debían calcular el valor de la coordenada “y”, dada una coordenada “x”, a través de la ecuación ordinaria de la línea recta con distintos valores de “m” (específicamente, m=-2, m=2, m=10 y m=0), manteniendo el valor de “b” constante en 2. Posteriormente, los estudiantes trazaron líneas rectas en un plano cartesiano de acuerdo con las coordenadas calculadas para cada valor de “m”. De esta manera, el diseño de las actividades pretendía permitir a los estudiantes visualizar la variación de la inclinación de la recta cuando cambia el valor de “m”.

De acuerdo con los resultados de A18, la estrategia utilizada fue eficaz tanto en los cálculos como la representación gráfica. La estudiante estableció los cálculos indicados en la Figura 30 de manera correcta utilizando los valores de “x” propuestos para obtener los de “y”. Además, empleó colores específicos para diferenciar entre los distintos valores de “m”, utilizando rojo para m=-2, café para m=2, verde para m=10 y azul para m=0, como se observa en la Figura 31. Cabe resaltar que esta acción no fue solicitada, sin embargo, A18 la realizó para tener un diferenciador que resaltara más entre las rectas, especialmente al trasladar sus cálculos en el plano cartesiano, manteniendo los mismos colores para las rectas trazadas.

La estudiante logró conectar de manera óptima sus cálculos con su representación gráfica, estableciendo una relación entre la operación algebraica y la visualización geométrica. Esto evoca los principios de Entrelazamiento y Nivel propuestos por la RME, permitiendo a la estudiante comprender cómo el valor de “m” afecta tanto la dirección como la inclinación de la línea recta en el plano cartesiano.

De esta manera, las actividades previas a los ítems 12 y 13 proveen un entrelazamiento conceptual, conectando los cálculos algebraicos con representaciones gráficas alineadas con los principios de la RME. Esta combinación de cálculos y gráficos vas más allá de la simple memorización de cálculos y fórmulas matemáticas y, por el contrario, refuerza el aprendizaje significativo de una expresión matemática.



Actividad 2
Introducción a la Ecuación de la Recta ordinaria y Análisis de la pendiente 'm':

- *Exploración de la Ecuación General: Relacionaremos la fórmula de la pendiente (m) con la ecuación de la recta en su forma ordinaria(y=mx+b).*
- *Análisis de 'm' con Gráficas a través de tabla de valores: Tomemos la ecuación de la recta en su forma ordinaria y= mx+b como ejemplo. Grafiquemos esta recta en un plano cartesiano utilizando tres valores distintos de 'm': m=-2, m=2, m=10, m=0*

x	m = -2	m = 2	m = 10	m = 0
-2	y=(-2)(-2)+2=6	y=(2)(-2)+2=-2	y=(10)(-2)+2=-18	y=(-10)(2)+2=2
-1	y=(-2)(-1)+2=4	y=(2)(-1)+2=0	y=(10)(-1)+2=-8	y=(-10)(2)+2=2
0	y=(-2)(0)+2=2	y=(2)(0)+2=2	y=(10)(0)+2=2	y=(-10)(2)+2=2
1	y=(-2)(1)+2=0	y=(2)(1)+2=4	y=(10)(1)+2=12	y=(-10)(2)+2=2
2	y=(-2)(2)+2=-2	y=(2)(2)+2=6	y=(10)(2)+2=22	y=(-10)(2)+2=2
3	y=(-2)(3)+2=-4	y=(2)(3)+2=8	y=(10)(3)+2=32	y=(-10)(2)+2=2

En la tabla anterior, calcularemos los valores correspondientes de "y" para cada valor de "x" utilizando la ecuación y = mx + b. donde b toma el valor de 2. Estos valores de "y" nos ayudarán a trazar los puntos que unirán a las rectas en el plano cartesiano.

- *Ejemplo Visual:*

Proporcionamos un gráfico que muestra las cuatro rectas con diferentes valores de 'm'. Etiquetamos claramente cada línea en el gráfico para visualizar las variaciones. Utiliza un color diferente para cada recta.

Figura 30. Respuesta de cuadro de ecuación de la recta en su forma ordinaria de actividad 2, sesión 4, de la estudiante A18 al ítem 12

Nota. La actividad muestra un cuadro en donde la estudiante utilizó la ecuación de la recta en su forma ordinario $y = mx + b$, dados valores consecutivos de “x” para obtener los de “y”, variando los valores de “m”

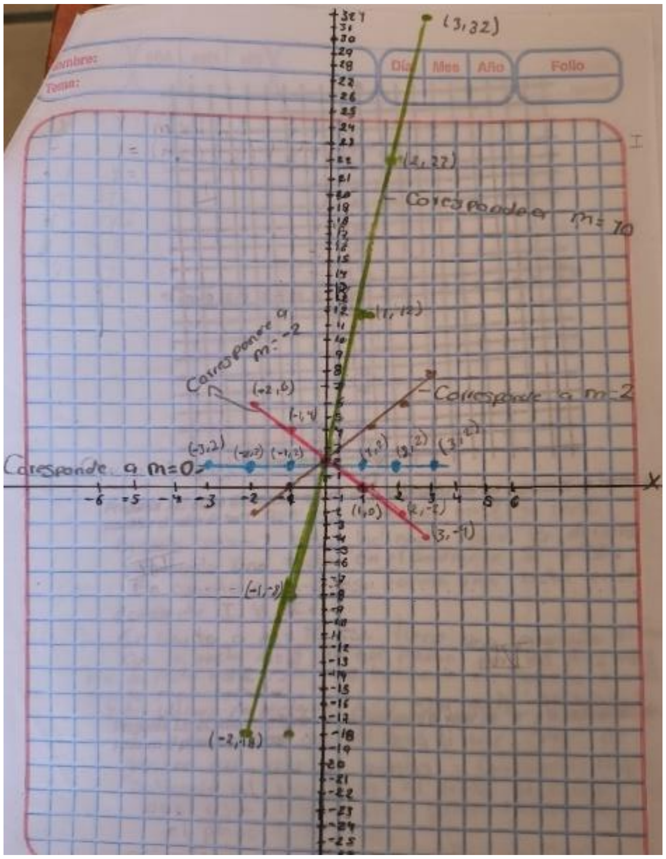


Figura 31. Respuesta de gráficas de ecuación de la recta de actividad 2, sesión 4, de la estudiante A18 al ítem 12

Nota. La figura presenta la imagen de las líneas rectas generadas con diferente valor de "m" a través de las coordenadas de puntos establecidos en el punto anterior.

ÍTEM 12

La respuesta de A18, evidenciada en la Figura 32, muestra cómo intenta explicar los cálculos y gráficos realizados con base en las actividades previas planteadas. Además, la estudiante menciona los cuadrantes por los que pasan las líneas rectas trazadas. Por ejemplo, indica que la pendiente negativa m=-2 se inclina hacia los cuadrante II y IV, mientras que la pendiente positiva m=2 lo hace hacia los cuadrantes I y III. Asimismo, la estudiante reconoce que cuando m=10, la pendiente se vuelve más pronunciada. Sin embargo, no logra expresarlo de manera correcta, mencionando que la recta m=10 "es mucho más recta", lo que sugiere una incorrecta interpretación, posiblemente semántica, del concepto de inclinación.

Este análisis también muestra que, a pesar de que la estudiante logró realizar los cálculos de forma correcta y posteriormente trasladarlos de manera gráfica, aún presenta algunas dificultades para expresarlo verbalmente de manera adecuada. Su respuesta también refleja una comprensión contradictoria de los efectos de la pendiente en la línea recta, en específico cuando escribe que "m=10 es mucho más recta que m=2", lo cual podría indicar una mala comprensión de la inclinación y el ángulo que forma línea recta con respecto al eje horizontal.

La estudiante utilizó diferentes colores para representar las rectas de acuerdo con la variación de su parámetro "m". Sin embargo, su respuesta verbal no logra cerrar de forma correcta su comprensión sobre la relación entre el cambio de "m" y el grado de inclinación de la recta. Entrando en el terreno de las suposiciones, es probable que A18 haya notado las variaciones de inclinación en sus rectas graficadas, pero al intentar expresarlo formalmente, presentó dificultades para interpretar el concepto de inclinación. Aunque el uso de colores facilitó la visualización del gráfico, esto indica que es necesario hacer énfasis entre la conexión entre representaciones visuales y términos formales que describan a la pendiente, pues incluso es muy probable que haya mal interpretando la frase "mucho más recta" como sinónimo de inclinación.

Esta respuesta indica la importancia de reforzar aún más el pilar de Entrelazamiento entre conceptos visuales y lenguaje matemático formal. Si bien A18 logró representar de forma sólida sus rectas, así como realizar correctamente los cálculos previos a estas, su respuesta revela áreas de oportunidad en un uso de lenguaje matemático más preciso para expresar sus conclusiones.

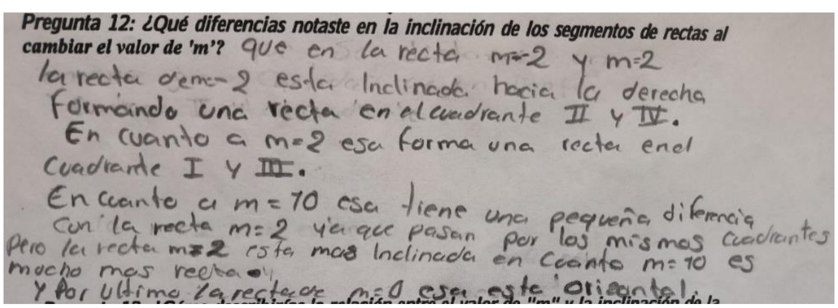

Pregunta 12: ¿Qué diferencias notaste en la inclinación de los segmentos de rectas al cambiar el valor de 'm'? que en la recta m=-2 y m=2
la recta de m=-2 esta Inclinada hacia la derecha
formando una recta en el cuadrante II y IV.
En cuanto a m=2 esa forma una recta en el
Cuadrante I y III.
En cuanto a m=10 esa tiene una pequeña diferencia
con la recta m=2 ya que pasan por los mismos cuadrantes
Pero la recta m=2 esta mas Inclinada en cuanto m=10 es
mucho mas recta.
Y por ultimo la recta de m=0 esa este orizontal.

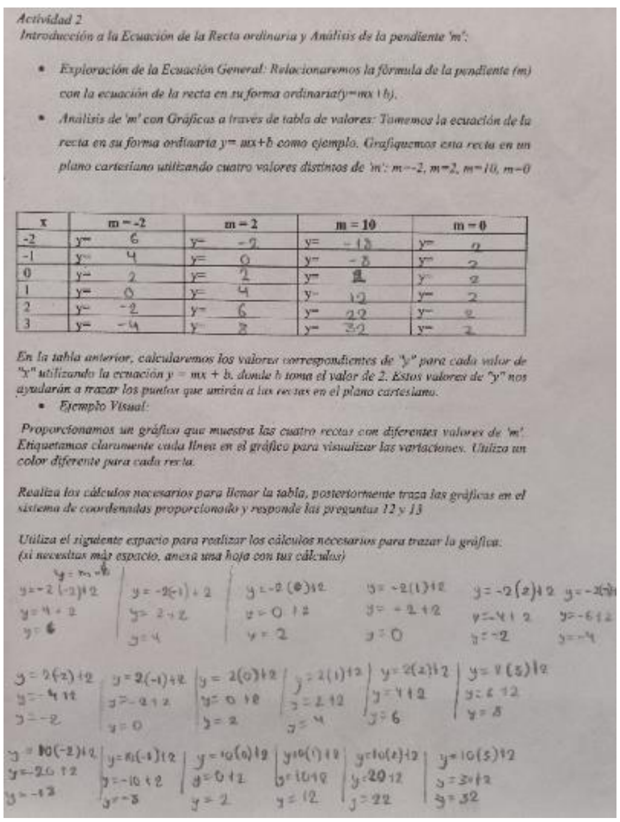
Figura 32. Respuesta al ítem 12 de la estudiante A18

ÍTEM 13

En las actividades previas al ítem 13, A34 utilizó los valores propuestos de "m" y calculó de manera correcta los valores de "y" con los valores de "x" dados, reflejados en la Figura 33. Se muestra una claridad y comprensión para obtener los valores, lo que facilita su posterior graficación en el plano cartesiano representado en la Figura 34.

En las rectas que trazó, se aprecia una diferencia de inclinación de acuerdo con el valor de sus pendientes, mostrando visualmente la variación según el valor de “m”. Las rectas con pendiente negativa se encuentran trazadas con inclinación hacia la izquierda, por su parte las positivas lo hacen hacia la derecha. Finalmente, la recta con pendiente de m=0 es totalmente horizontal, lo que indica que no tiene inclinación.

A34 ha mostrado exactitud tanto en cálculos como en la graficación de puntos que derive en líneas rectas en el plano cartesiano, lo que probablemente le proporcionó una base sólida para responder al ítem 13.



Actividad 2

Introducción a la Ecuación de la Recta ordinaria y Análisis de la pendiente 'm':

- *Exploración de la Ecuación General: Relacionaremos la fórmula de la pendiente (m) con la ecuación de la recta en su forma ordinaria(y=mx+b).*
- *Análisis de 'm' con Gráficas a través de tabla de valores: Tomemos la ecuación de la recta en su forma ordinaria y= mx+b como ejemplo. Grafiquemos esta recta en un plano cartesiano utilizando cuatro valores distintos de 'm': m=-2, m=2, m=10, m=0*

x	m = -2	m = 2	m = 10	m = 0
-2	y= 6	y= -2	y= -18	y= 2
-1	y= 4	y= 0	y= -8	y= 2
0	y= 2	y= 2	y= 2	y= 2
1	y= 0	y= 4	y= 12	y= 2
2	y= -2	y= 6	y= 22	y= 2
3	y= -4	y= 8	y= 32	y= 2

En la tabla anterior, calcularemos los valores correspondientes de "y" para cada valor de "x" utilizando la ecuación y = mx + b, donde b toma el valor de 2. Estos valores de "y" nos ayudarán a trazar los puntos que unirán a las rectas en el plano cartesiano.

- *Ejemplo Visual:*

Proporcionamos un gráfico que muestra las cuatro rectas con diferentes valores de 'm'. Etiquetamos claramente cada línea en el gráfico para visualizar las variaciones. Utiliza un color diferente para cada recta.

Realiza los cálculos necesarios para llenar la tabla, posteriormente traza las gráficas en el sistema de coordenadas proporcionado y responde las preguntas 12 y 13

Utiliza el siguiente espacio para realizar los cálculos necesarios para trazar la gráfica: (si necesitas más espacio, anexa una hoja con tus cálculos)

Figura 33. Respuesta de cuadro de ecuación de la recta en su forma ordinaria de actividad 2, sesión 4, del estudiante A34 al ítem 13

Nota. La actividad muestra un cuadro en donde la estudiante utilizó la ecuación de la recta en su forma ordinario $y = mx + b$, dados valores consecutivos de “x” para obtener los de “y”, variando los valores de “m”

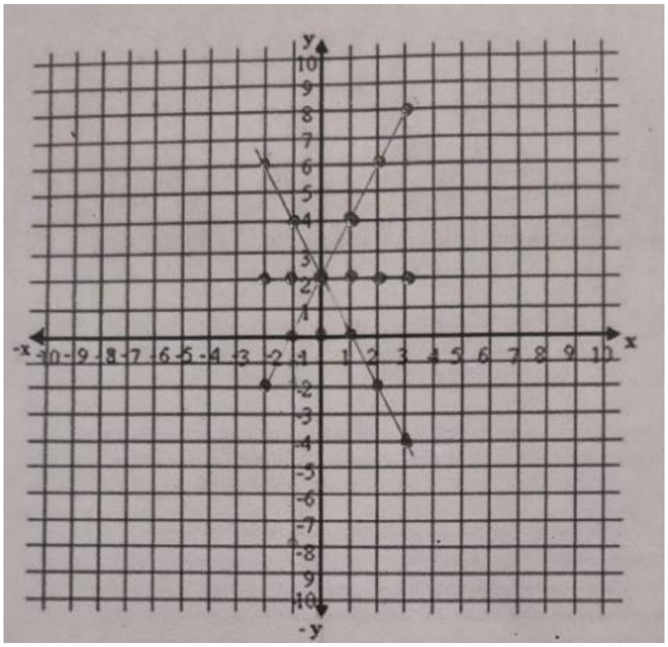


Figura 34. Respuesta de gráficas de ecuación de la recta de actividad 2, sesión 4, del estudiante A34 al ítem 13

Nota. La figura presenta la imagen de las líneas rectas generadas con diferente valor de “m” a través de las coordenadas de puntos establecidos en el punto anterior.

La respuesta del estudiante A34, expresada en la Figura 35; “Que a medida que aumenta el valor de m, aumenta la inclinación. Si es menor que 0 su inclinación es hacia la derecha, si es 0 es recta; y si es mayor a 0 su inclinación es hacia la izquierda”, muestra un entendimiento general adecuado. En su respuesta, indica como el valor de “m” influye en la inclinación de la línea recta, mencionando que, si el parámetro aumenta, la inclinación de la recta será mayor. Por otro lado, si “m” es negativa, la recta se inclinará hacia la derecha, mientras que si m=0, se mantiene de forma horizontal.

Esta respuesta se considera precisa y, de acuerdo con la matriz de evaluación, considerada “correcta”. Sin embargo, el análisis sigue siendo un tanto superficial, pues necesita enfatizar más en las actividades previas que el estudiante ha realizado previamente.

Con base en la matriz de análisis, este ítem se encuentra alineado con el pilar de Entrelazamiento de la RME, el cual busca una conexión entre conocimientos matemáticos en el aprendizaje del estudiante. Es decir, en este ejemplo, se espera que el estudiante pueda relacionar conceptos algebraicos, como el de "m", con su representación visual en el plano cartesiano. De esta manera, los estudiantes pueden reconocer y vincular el cambio en una línea recta cuando el valor de "m" varía en su ecuación en su forma ordinaria.

En este sentido, A34 logra reconocer la variación de la línea recta cuando lo hace "m", llegando a una conclusión teórica del concepto. Sin embargo, no hay evidencia de que haya alcanzado esta conclusión mediante la manipulación del valor de "m" y su representación en las gráficas.

La RME propone partir de situaciones que utilicen representaciones y actividades conceptuales para el aprendizaje de conceptos abstractos. Sin embargo, en este caso, la transición entre el ejercicio práctico y la conclusión en la respuesta del estudiante no parece que haya ocurrido de manera efectiva, aunque se puede suponer que lo logró por la resolución de actividades previas. Una mejor respuesta podría haber incluido cómo los valores de "m" graficados influían en la inclinación de las rectas, lo que habría mostrado un mayor apego hacia el pilar de Entrelazamiento.

Aunque la respuesta de A34 es correcta de acuerdo con los criterios de evaluación propuestos en la matriz de análisis, un enfoque más integrado habría permitido conectar sus observaciones con su respuesta al ítem. Así, habría logrado relacionar sus conocimientos con experiencias visuales, fortaleciendo el aprendizaje en matemáticas.

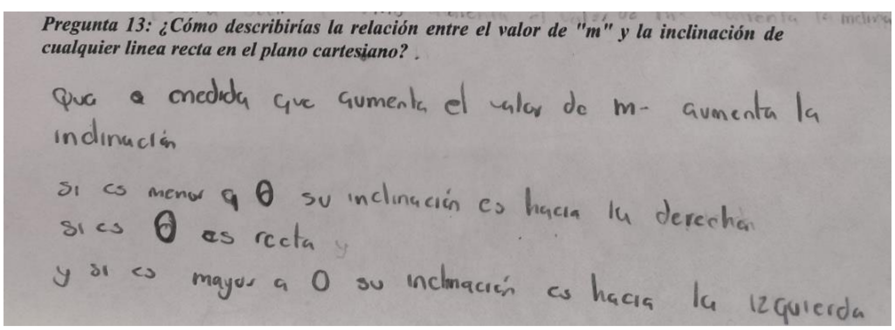


Figura 35. Respuesta al ítem 13 del estudiante A34

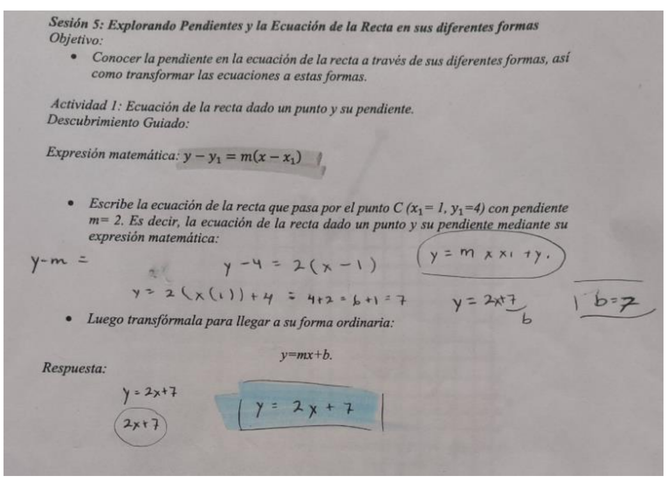
Análisis de la sesión 5: Explorando pendientes y la Ecuación de la Recta en sus diferentes formas.

La sesión 5 tuvo como objetivo fundamental que los estudiantes conocieran y desarrollaran una comprensión de la ecuación de la recta y sus diferentes formas: ecuación de la recta en su forma ordinaria $y = mx + b$; dado un punto y su pendiente, dados dos puntos, forma general y forma simétrica.

La sesión completa fue ejecutada con la orientación del docente, alineando esto al pilar de Orientación propuesto por la RME, cuyo enfoque permite a los estudiantes no solo aprender la fórmula matemática, sino también generar una comprensión significativa de los conceptos, organizando y conectando ideas dentro del espectro matemático y fomentando una matematización vertical.

La estructura de la sesión está dividió en varias actividades, cada una de ellas enfocada en la transformación de una forma específica de la ecuación de la recta. Para la primera actividad, se les otorgó a los estudiantes un ejemplo, indicándoles el valor de su pendiente y un punto con coordenadas en x, y utilizando la expresión $y - y_1 = m(x - x_1)$. Posteriormente, se les guió para transformarla a la forma $y = mx + b$. Un ejemplo de los cálculos realizados por una estudiante se expone en la Figura 36.

Cabe resaltar que la guía del docente en estos ejercicios fue crucial para orientar a los estudiantes a reconocer los parámetros de las distintas formas y entender cómo, al cambiarlos, se modifican las coordenadas o el valor de la pendiente. Los estudiantes interactuaron con las expresiones mediante la resolución manual de las ecuaciones, conectando así los cálculos algebraicos con su representación gráfica.



Sesión 5: Explorando Pendientes y la Ecuación de la Recta en sus diferentes formas

Objetivo:

- *Conocer la pendiente en la ecuación de la recta a través de sus diferentes formas, así como transformar las ecuaciones a estas formas.*

Actividad 1: Ecuación de la recta dado un punto y su pendiente.
Descubrimiento Guiado:

Expresión matemática: $y - y_1 = m(x - x_1)$

- *Escribe la ecuación de la recta que pasa por el punto C (x_1= 1, y_1=4) con pendiente m= 2. Es decir, la ecuación de la recta dado un punto y su pendiente mediante su expresión matemática:*

y-m =

$y - 4 = 2(x - 1)$

$y = mxx_1 + y_1$

$y = 2(x(1)) + 4 = 4+2 = 6+1 = 7$

$y = 2x+\underbrace{7}_{b}$

$b=7$

- *Luego transfórmala para llegar a su forma ordinaria:*

y=mx+b.

Respuesta:

$y = 2x+7$

$2x+7$

$\boxed{y = 2x + 7}$

Figura 36. Ejercicio realizado por un estudiante en papel, mostrando cómo transformó la ecuación en su forma ordinaria a la ecuación punto-pendiente.

La sesión 5 fue diseñada específicamente con la intención de que se alineara con el principio de Orientación, uno de los pilares fundamentales de la RME. De acuerdo con Van den Heuvel-Panhuizen (2020), este principio establece la idea de un facilitador que tiene como objetivo guiar a los estudiantes a la construcción de conceptos matemáticos a través de una orientación constante y significativa.

Otro de los objetivos de la sesión 5 era preparar a los estudiantes con una base sólida para enfrentarse al ítem 14, en el cual se solicita expresar las ecuaciones de la línea recta en sus diferentes formas, derivadas de las rectas generadas a partir de los caminos con los que trabajaron en la sesión 2. De esta manera, la orientación del docente pretende permitir que los estudiantes comprendan las diferentes formas de la ecuación de la línea recta y puedan resolver el ítem 14 sin la ayuda. Ejemplos de los cálculos realizados por estudiantes de estas actividades se plasman en las Figuras 37 y 38.

La realización de estas actividades permite a los estudiantes enfrentarse al ítem 14 de forma autónoma, enriqueciendo el principio de Orientación y fomentando una comprensión de conceptos matemáticos abstractos dentro del enfoque de la RME.

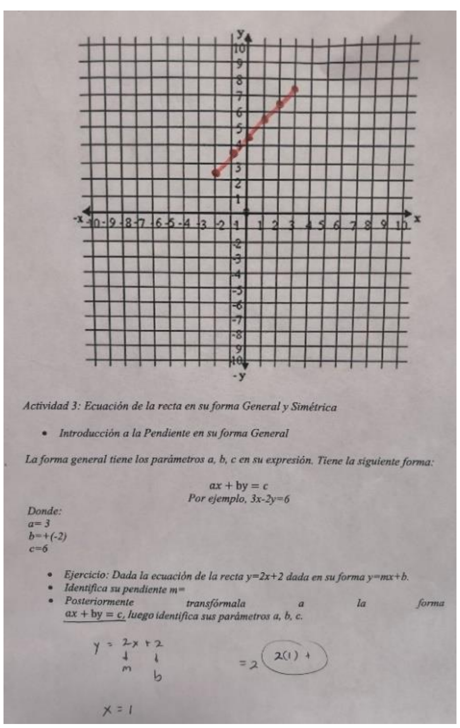
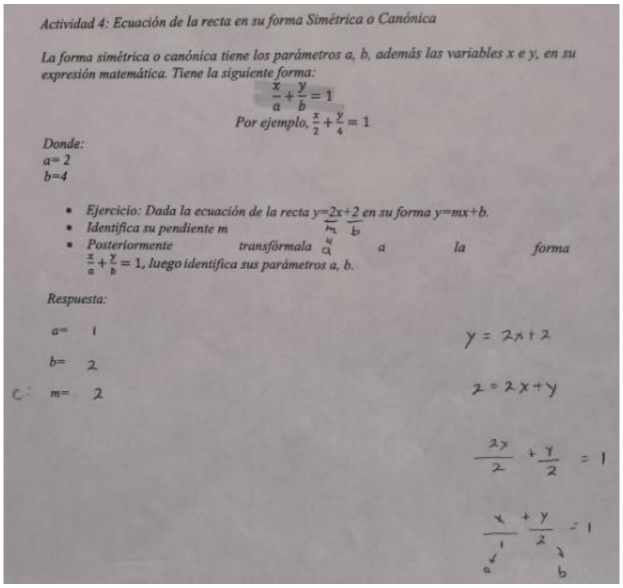


Figura 37. Ejemplo de un ejercicio transformado por una estudiante, demostrando la transición de la forma ordinaria a la forma general.



Actividad 4: Ecuación de la recta en su forma Simétrica o Canónica

La forma simétrica o canónica tiene los parámetros a, b, además las variables x e y, en su expresión matemática. Tiene la siguiente forma:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

Por ejemplo, $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$

Donde:
a= 2
b=4

- *Ejercicio: Dada la ecuación de la recta* $y=\underbrace{2}_{m}x+\underbrace{2}_{b}$ *en su forma y=mx+b.*
- *Identifica su pendiente m*
- *Posteriormente transfórmala a la forma* $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$*, luego identifica sus parámetros a, b.*

Respuesta:

a= 1

b= 2

m= 2

$y=2x+2$

$2=2x+y$

$\frac{2x}{2}+\frac{y}{2}=1$

$\frac{x}{1}+\frac{y}{2}=1$

Figura 38. Ejemplo de un ejercicio transformado por una estudiante, demostrando la transición de la forma ordinaria a la forma simétrica

ÍTEM 14

La respuesta de la estudiante A37, ilustrada en las Figura 39 y 40, refleja un proceso detallado de transformación entre diferentes formas de la ecuación de la recta, derivado de una intervención docente, en el que se guio a los estudiantes para comprender la transformación entre ecuaciones de recta a lo largo de toda la sesión 5. Esta sesión, previa a este ítem, enfatizó en el pilar de Orientación propuesto por la RME.

El uso de Desmos, introducido en la sesión 2, permitió a los estudiantes manipular los parámetros de “m” y b” dentro de la calculadora, identificando cómo se comporta la línea recta al cambiar el valor de estos parámetros. A partir de esta sesión interactiva, los estudiantes obtuvieron la primera ecuación de la recta en su forma ordinaria para uno de los caminos de sus fotografías capturadas, siguiendo el mismo proceso para las dos restantes.

Después de esto, en la sesión 6, como objetivo para la respuesta al ítem 14, se esperaba que los estudiantes tomaran esta primera ecuación de la recta y la transformaran en sus diferentes formas (dados punto y pendiente, dados dos puntos, forma general y forma simétrica), pudiendo identificar el valor de la pendiente dentro de ellas, observando la variación de inclinaciones de caminos. Esto permitió a los estudiantes establecer conexiones entre representaciones algebraicas y visuales.

En la Figura 41, se observa un trabajo ordenado y sistemático de A37, transformando su ecuación de la recta ordinaria a las formas de la ecuación de la recta dados un punto y su pendiente, y dados dos puntos, a partir de un conjunto de puntos obtenidos en Desmos. Posteriormente, realizó las transformaciones a las demás formas.

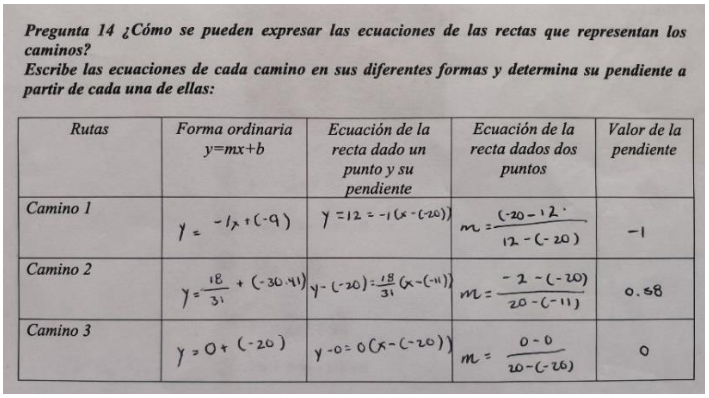
Las ecuaciones presentadas en el cuadro demuestran la capacidad de la estudiante para transformar correctamente las ecuaciones a sus diferentes formas, identificando el valor de la pendiente en cada caso para cada uno de los tres caminos trabajados y observando cómo su valor se mantiene constante sin importar la forma que se esté trabajando.

La respuesta de la estudiante A37 remarca la importancia del pilar de Orientación de la RME, en la guía del docente en una sesión previa hacia la transformación entre ecuaciones, permitiendo a los estudiantes desarrollar una comprensión sobre las diferentes formas de la ecuación de la recta y aplicarla a la situación contextual mediante la interacción con la calculadora gráfica.

Es importante mencionar que este caso representa un éxito en cuanto a la transformación correcta de ecuaciones; sin embargo, existieron otros casos en donde este proceso tuvo errores, principalmente algebraicos, al intentar completar la matriz de manera correcta. Esto sugiere la necesidad de un mayor énfasis en reforzar la manipulación algebraica con los estudiantes. No obstante, prácticamente todos los estudiantes fueron capaces de identificar el valor de la pendiente, a pesar de la inexactitud en la trasformación entre diferentes formas de la ecuación de la recta.

El caso particular de A37 muestra un nivel de precisión adecuado, que refleja un éxito en los pilares de Orientación y Nivel matemático. Además, se lleva a cabo un proceso de matematización horizontal, ya que la estudiante parte de una situación contextual y su representación gráfica en Desmos para poder transformar a un lenguaje matemático, obteniendo las ecuaciones en sus diferentes formas y poder establecerlas dentro de la calculadora gráfica ejemplificado en la Figura 42.

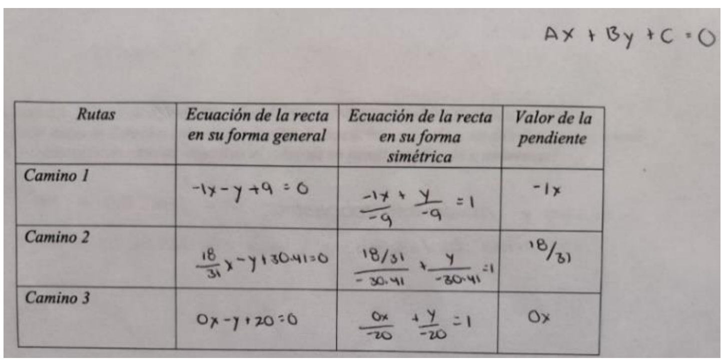
Asimismo, se ve privilegiada la matematización vertical, pues la estudiante transforma las ecuaciones y demuestra la habilidad de trabajar dentro del lenguaje matemático, conectando diferentes representaciones e identificando del valor de la pendiente.



Pregunta 14 ¿Cómo se pueden expresar las ecuaciones de las rectas que representan los caminos?
Escribe las ecuaciones de cada camino en sus diferentes formas y determina su pendiente a partir de cada una de ellas:

Rutas	*Forma ordinaria y=mx+b*	*Ecuación de la recta dado un punto y su pendiente*	*Ecuación de la recta dados dos puntos*	*Valor de la pendiente*
Camino 1	$y = -1x + (-9)$	$y = 12 = -1(x - (-20))$	$m = \frac{(-20 - 12)}{12 - (-20)}$	-1
Camino 2	$y = \frac{18}{31} + (-30.41)$	$y - (-20) = \frac{18}{31}(x - (-11))$	$m = \frac{-2 - (-20)}{20 - (-11)}$	0.58
Camino 3	$y = 0 + (-20)$	$y - 0 = 0(x - (-20))$	$m = \frac{0 - 0}{20 - (-20)}$	0

Figura 39. Primera parte de respuesta al ítem 14 de la estudiante A37



$Ax + By + C = 0$

Rutas	*Ecuación de la recta en su forma general*	*Ecuación de la recta en su forma simétrica*	*Valor de la pendiente*
Camino 1	$-1x - y + 9 = 0$	$\frac{-1x}{-9} + \frac{y}{-9} = 1$	$-1x$
Camino 2	$\frac{18}{31}x - y + 30.41 = 0$	$\frac{18/31}{-30.41} + \frac{y}{-30.41} = 1$	$18/31$
Camino 3	$0x - y + 20 = 0$	$\frac{0x}{-20} + \frac{y}{-20} = 1$	$0x$

Figura 40. Segunda parte de respuesta al ítem 14 de la estudiante A37

Nota. Las figuras 39 y 40 muestran las transformaciones de las ecuaciones a sus diferentes formas

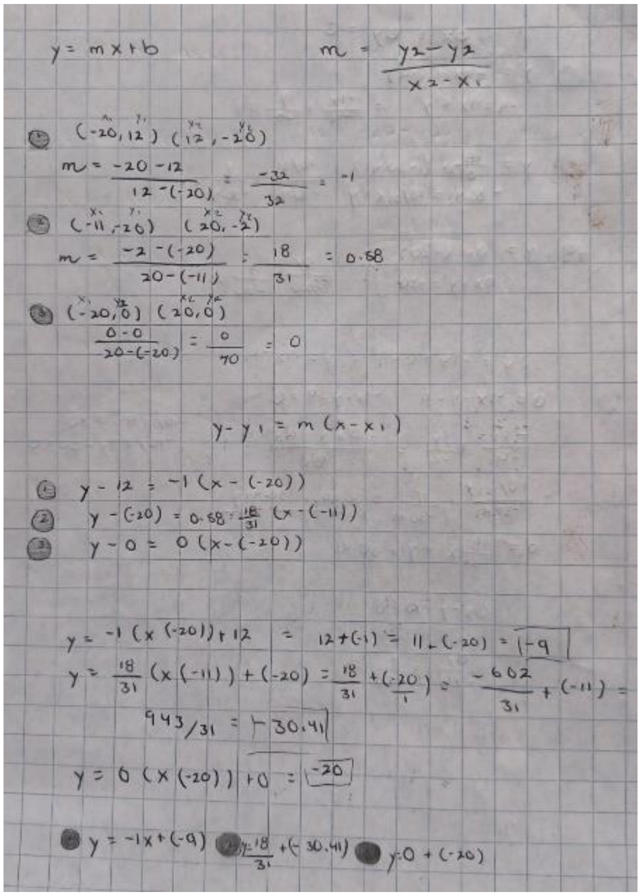


Figura 41. Cálculos de A37, para responder al ítem 14

Nota. La figura muestra los cálculos detallados que realizó la estudiante al transformar las ecuaciones y cómo llegó a los resultados correctos.

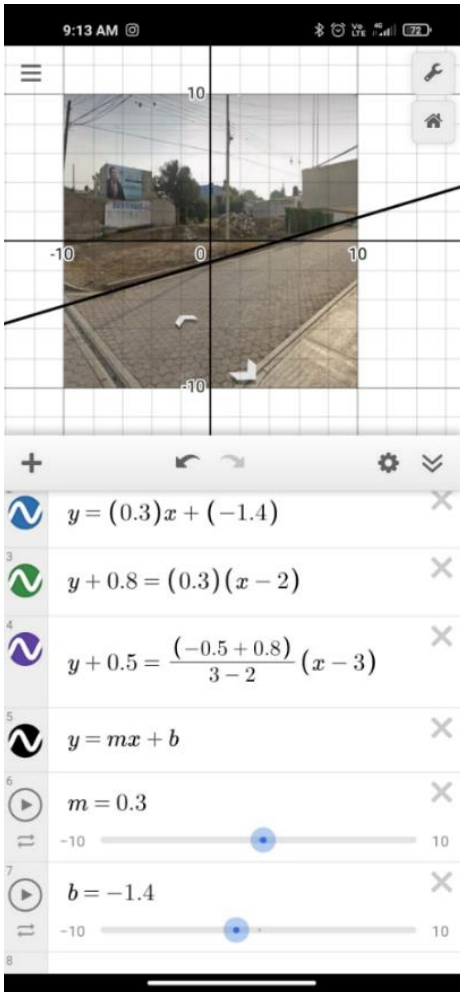


Figura 42. Pantalla de Desmos de A37

Nota. La figura muestra la pantalla de Desmos de A37 representando uno de los caminos inclinado hacia la derecha, así como la ecuación de la recta en sus diferentes formas.

ÍTEM 15

El ítem 15 tiene como objetivo principal identificar cómo se visualizan tres tipos de caminos distintos, mismos que los estudiantes capturaron como requisito en la sesión 1: un camino inclinado hacia la derecha, un camino inclinado hacia la izquierda, y un camino recto. A partir de esto, los alumnos debían reflexionar sobre la variación de la recta conforme el valor de pendiente de la recta aumenta o disminuye. Para ello, se guió a los estudiantes en el uso de Desmos, permitiéndoles ajustar los parámetros de las ecuaciones con el uso de deslizadores y así observar la variación de las rectas en la gráfica de forma interactiva.

La respuesta de A34, presentada en la Figura 43, "Visualmente la pendiente de un camino inclinado hacia la derecha de 1 representaría con una línea inclinada hacia arriba desde izquierda a derecha, lo que indica una pendiente positiva. Por otro lado, un camino inclinado hacia la izquierda se representaría con una línea inclinada hacia abajo desde izquierda a derecha, indicando una pendiente negativa. En el caso de un camino recto, la línea sería completamente horizontal, lo que significa que la pendiente es 0", evidencia una comprensión adecuada de los conceptos relacionados.

En el caso de la pendiente positiva, el estudiante reconoce que se representa mediante una línea recta inclinada que sube de izquierda a derecha. Asimismo, identifica la pendiente negativa como una línea recta inclinada hacia abajo en la misma dirección y la pendiente nula la identificó como una línea recta horizontal, que representa una pendiente igual a cero.

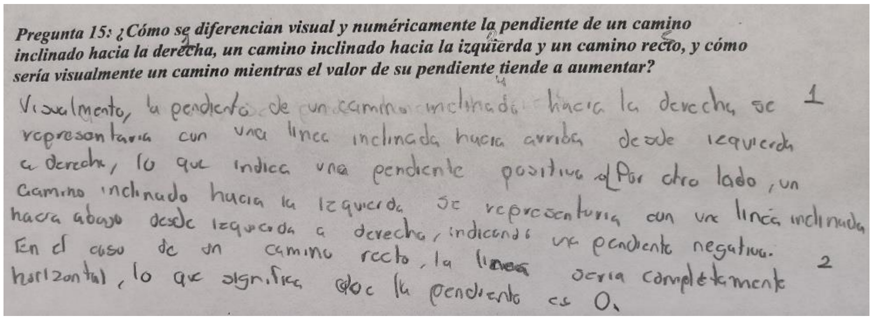
A pesar de que esta interpretación de A34 es correcta, faltó mencionar el cambio de la recta cuando varía el valor de su pendiente. Esto indica una comprensión parcial, ya que, aunque el estudiante logró reconocer la relación entre la inclinación y el signo de la pendiente, no abordó completamente cómo el valor de la pendiente influye en la inclinación.

El proceso de matematización horizontal se encuentra presente cuando el estudiante pasa de una situación del mundo real, reflejada en las imágenes de los caminos inclinados, a un modelo matemático. Esto genera una conexión entre la apreciación visual de los caminos en términos de inclinaciones hacia la derecha, izquierda o recto y el valor de su pendiente.

El proceso de matematización vertical también se ve reflejado cuando el estudiante es capaz de relacionar la inclinación la línea recta en el plano cartesiano con el signo y valor de la pendiente.

Los pilares con los cuales se diseñó este ítem fueron los de Nivel y Entrelazamiento. En cuanto al pilar de Nivel, A34 demostró una comprensión conceptual al diferenciar adecuadamente entre pendientes positivas, negativas o nulas, tanto visual como numéricamente. Por otro lado, aunque existe una conexión parcial entre los conceptos algebraicos y geométricos, podría haberse desarrollado con mayor profundidad la relación entre los cambios del valor de la pendiente con la inclinación de la línea recta, privilegiando la relación entre aspectos algebraicos y geométricos.

Finalmente, a pesar de que inicialmente no se incluyó el pilar de Orientación para el diseño y la evaluación de este ítem en específico, se considera fundamental el uso de Desmos para la manipulación de los parámetros. Esta herramienta ayudó a visualizar de manera dinámica cómo los cambios de los valores de la pendiente afectan a la línea recta. Por ello, la guía del docente fue relevante para que el estudiante aprendiera a utilizar estas herramientas en tiempo real.


Pregunta 15: ¿Cómo se diferencian visual y numéricamente la pendiente de un camino inclinado hacia la derecha, un camino inclinado hacia la izquierda y un camino recto, y cómo sería visualmente un camino mientras el valor de su pendiente tiende a aumentar?

Visualmente, la pendiente de un camino inclinado hacia la derecha se representaría con una línea inclinada hacia arriba desde izquierda a derecha, lo que indica una pendiente positiva. Por otro lado, un camino inclinado hacia la izquierda se representaría con una línea inclinada hacia abajo desde izquierda a derecha, indicando una pendiente negativa. 1

En el caso de un camino recto, la línea sería completamente horizontal, lo que significa que la pendiente es 0. 2

Figura 43. Respuesta al ítem 15 del estudiante A34

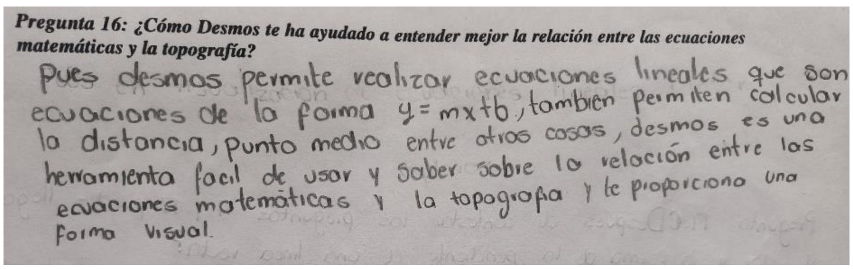
ÍTEM 16

La respuesta de la estudiante A7, visualizada en la Figura 44, "Pues Desmos permita realizar ecuaciones lineales que son ecuaciones de la forma y= mx+ b también permitan calcular la distancia, punto medio entre otras cosas Desmos es una herramienta fácil de usar y saber sobre la relación entre las ecuaciones matemáticas y la topografía y te proporciona una forma visual", refleja un conocimiento general sobre todas las posibilidades que ofrece la herramienta Desmos. El estudiante menciona que la herramienta gráfica facilita la representación de ecuaciones lineales, distancias entre puntos, puntos medios, además de ayudar a comprender la relación entre topografía y ecuaciones.

En general, la respuesta representa a los pilares de Entrelazamiento e Interactividad, sin embargo, a un nivel superficial, pues se encuentra más apegado a reflexionar sobre la practicidad que puede ofrecer sin profundizar en una comprensión matemática sólida.

La respuesta del estudiante demuestra un enfoque centrado en la instrumentalización de Desmos, sin reflexionar y ahondar más en los conceptos matemáticos a partir de las representaciones visuales ofrecidas. Si bien es innegable que la calculadora ofrece una interacción “agradable” para la obtención de las respuestas, el estudiante no demuestra haber llegado a una abstracción de concepto.

La orientación docente resultó de mucha ayuda para que el estudiante usara Desmos de manera óptima. Sin embargo, después de analizar las respuestas de los estudiantes, se considera que el ítem pudo haberse diseñado de diferente manera, adoptando un enfoque que fomentara una mayor reflexión crítica sobre como las representaciones gráficas obtenidas en Desmos pueden contribuir a la comprensión de las topografías y su relación con las expresiones matemáticas.


Pregunta 16: ¿Cómo Desmos te ha ayudado a entender mejor la relación entre las ecuaciones matemáticas y la topografía?

Pues desmos permite realizar ecuaciones lineales que son ecuaciones de la forma y=mx+b, tambien permiten calcular la distancia, punto medio entre otros cosas, desmos es una herramienta facil de usar y saber sobre la relación entre las ecuaciones matematicas y la topografia y te proporciona una forma visual.

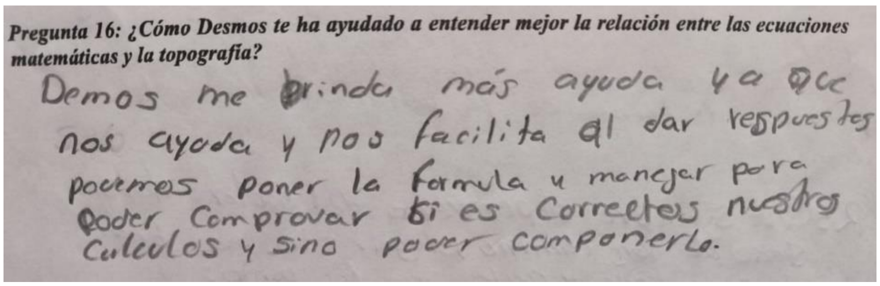
Figura 44. Respuesta al ítem 16 de la estudiante A7

La respuesta de A18 a este ítem, mostrada en la Figura 45, “Demos me brinda más ayuda y nos facilita dar respuestas podemos poner la fórmula y manejar para poder comprobar si es correctos nuestros cálculos y si no poder componerlo.”, se centra en la capacidad de la calculadora gráfica para validar y ajustar los resultados. Esto permite un uso más eficiente de las herramientas que puede ofrecer esta aplicación, percibiéndola como un medio para la comprobación de respuestas y la corrección de errores en tiempo real.

De acuerdo con la RME, la respuesta de A7 indica un nivel de Interactividad con el uso de la calculadora, que le permite manipular las ecuaciones que validen sus resultados, así como realizar los ajustes en caso de ser necesario. Esto también refleja un nivel alto de exploración empírica. Sin embargo, al igual que el estudiante A7, A18 aún requiere una mayor profundización en su respuesta en cuanto a comprensión conceptual sólida y generalización de resultados.

Contrastando ambas respuestas, A7 se centra en las bondades generales que ofrece la calculadora, centrándose en las diferentes funciones que ayudan a la comprensión de conceptos matemáticos y la facilidad para representar gráficamente las pendientes. Por su parte, A18 enfatiza en el proceso de comprobación y modificación de resultados en tiempo real, permitiendo ajustar la exactitud de los cálculos.

A7 se enfoca en mencionar las funcionalidades de Desmos, mientras que A18 parece encontrarla como una herramienta útil para verificar resultados. Esto sugiera la necesidad de una intervención docente que no solo se limite a explicar la interacción con la calculadora, sino que fomente una reflexión crítica sobre las ventajas que ofrece la tecnología para comprender conceptos matemáticos abstractos, promoviendo así una matematización vertical.


Pregunta 16: ¿Cómo Desmos te ha ayudado a entender mejor la relación entre las ecuaciones matemáticas y la topografía?

Demos me brinda más ayuda ya que nos ayuda y nos facilita al dar respuestas poremos poner la formula y manejar para poder Comprovar si es Correctos nuestros Calculos y sino poder componerlo.

Figura 45. Respuesta al ítem 16 de la estudiante A18

ÍTEM 17

El propósito del ítem 17 se centra en que los estudiantes refuercen la relación entre el valor de la pendiente “m” y la dirección y la forma de la línea recta. Para ello se les solicitó ajustar los valores de y_2 e y_1 mediante deslizadores dentro de la calculadora gráfica hasta que la expresión Δy sea igual a 0. Esto se hizo con el objetivo de que el estudiante comprendiera de forma interactiva cómo una pendiente con valor m=0 significa que la línea recta se mantiene de forma horizontal, es decir, con pendiente nula.

La actividad fue guiada por el docente en cuanto al uso de la manipulación de la ecuación y deslizadores en Desmos; sin embargo, la idea era que los estudiantes descubrieran y reforzaran el concepto de pendiente dentro de la ecuación de la recta y cómo este valor afecta su comportamiento gráfico. Un ejemplo de esta actividad se expone en la Figura 46.

En su respuesta, proporcionada en la Figura 47, “el valor numérico de m=0 por qué al no tener pendiente la línea es recta”, A24 establece una conclusión corta, pero precisa y directa. La respuesta indica que, al manipular los valores solicitados y así obtener un valor de m=0, la recta resultante será horizontal. Esto demuestra un entendimiento sólido del concepto y se alinea completamente a los objetivos propuestos para el ítem.

De acuerdo con el marco teórico propuesto, la respuesta cumple satisfactoriamente con el pilar de Nivel, al reconocer correctamente la relación del valor “m” y la inclinación de la línea recta. Adicional a esto, la calculadora gráfica contribuyó a que esta comprensión se lograra de forma práctica, promoviendo el pilar de Interactividad, cuando el estudiante interactuó de manera interactiva con la calculadora gráfica.

Este ítem se incluyó de último momento durante la sesión, ya que se percibió que aún quedaban ciertas dudas en cómo se relacionaba el valor de la pendiente con su representación gráfica. Esto refleja un enfoque iterativo, ajustando el diseño pedagógico de acuerdo con las necesidades observadas dentro del aula, encajando dentro de la metodología del experimento de enseñanza. Cobb et al. (2003) señalan que la adaptación de actividades en tiempo real es importante para enriquecer el proceso de enseñanza-aprendizaje.

El agregar este ítem tuvo como objetivo reforzar ítems anteriores que abordan la relación entre pendiente y su inclinación de línea recta. Al observar la respuesta de A24 y su interacción con la calculadora gráfica, se confirma que esta actividad ayudo a fortalecer la comprensión del concepto, destacando el aprendizaje visual y práctico.

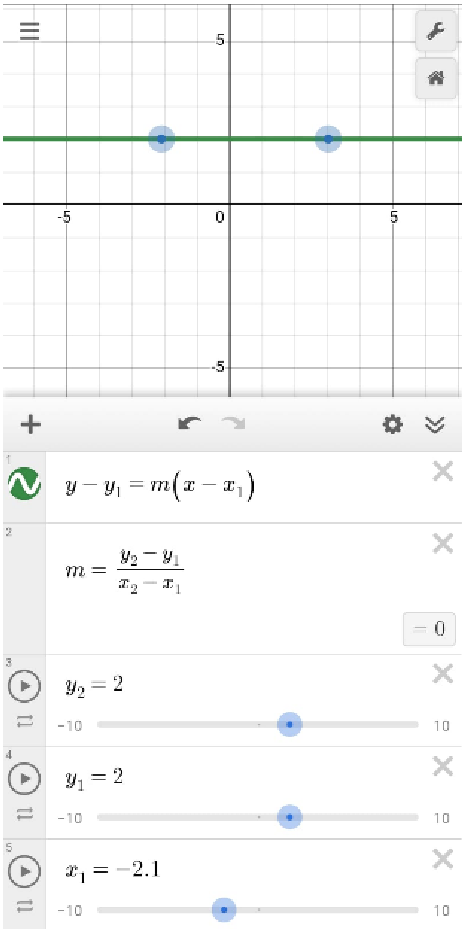


Figura 46. Pantalla de Desmos de A24

Nota. La figura muestra la pantalla del trabajo de A24, al manipular los deslizadores y_2, y_1, x_2, x_1, de tal forma que Δy sea igual a cero para obtener la gráfica de la ecuación de la pendiente dados dos puntos.

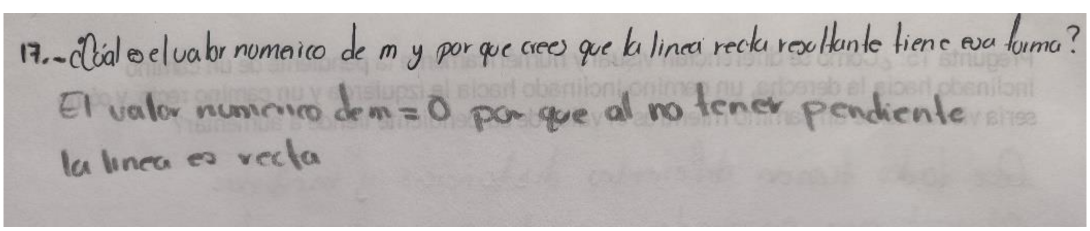

17.- ¿Cuál es el valor numerico de m y por que crees que la linea recta resultante tiene esa forma?
El valor numerico de m = 0 por que al no tener pendiente
la linea es recta

Figura 47. Respuesta al ítem 17 de la estudiante A2

ÍTEM 18

El ítem 18 tuvo como objetivo que el estudiante manipulara a través de los deslizadores que controlan los valores de x_2 e $x_1$dentro de la calculadora gráfica y así explorara cómo cambia Δx y, a su vez cómo esto afecta al valor de la pendiente "m". A diferencia del ítem 17, en el que se le solicitaba al estudiante manipular los valores de "y", para este caso se requería que el estudiante ajustara los de "x", de tal manera que Δx adoptara un valor muy pequeño, casi cero, sin llegar a cero. De esta manera, los estudiantes podían observar que, al suceder esto, el valor de la pendiente se incrementaba, provocando una línea recta muy empinada, casi vertical.

Incluso hubo estudiantes que se acercaron demasiado al cero y, por consecuencia, la calculadora arrojó un valor indefinido a "m". Un ejemplo de esta actividad se plantea en la Figura 48.

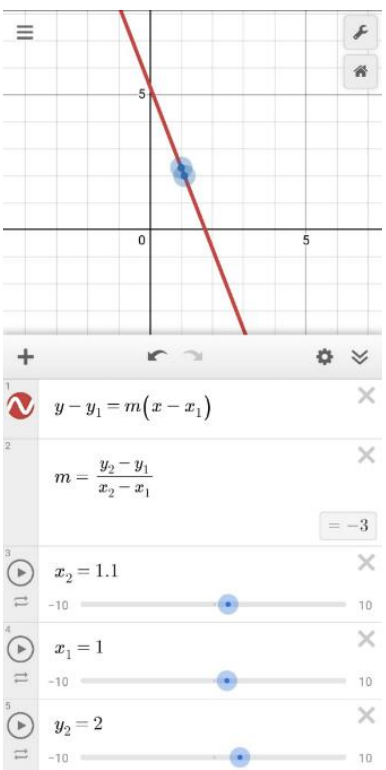


Figura 48. Pantalla de Desmos de A2

Nota. La figura muestra la pantalla del trabajo de A2, al manipular los deslizadores y_2, y_1, x_2, x_1, de tal forma que Δx sea igual a un valor muy cercano a cero para obtener la gráfica de la ecuación de la pendiente dados dos puntos.

En el caso de la respuesta de A2, exhibida en la Figura 49, la estudiante manipuló los valores de x_2 e x_1, así como los de y_2 e y_1, hasta obtener una pendiente de m=-3. En su respuesta, "la pendiente es más empinada", reconoce cómo la línea recta se hizo mucho más empinada, con pendiente negativa, debido a la reducción de Δx y cómo la variación de los valores de x influye en este cambio.

Este ítem se diseñó bajo el pilar de Nivel, pues su objetivo es fomentar que el estudiante pueda interpretar la representación gráfica de la pendiente y cómo la manipulación de los deslizadores puede afectar tanto a el valor de la pendiente como a su gráfica.

Además, el ítem privilegia el pilar de Interactividad, al permitir que los estudiantes manipulen los valores de x_2 e x_1 y así modificaran de forma dinámica a la pendiente, lo que les permite observar en tiempo real los efectos de sus ajustes, además de facilitar una comprensión intuitiva del concepto de pendiente indefinida y su relación con los valores de "x".

A pesar de que A2 logró visualizar de forma correcta a la pendiente como una línea inclinada más pronunciada cuando redujo el valor de Δx, no abordó de manera extensa la interpretación de una pendiente indefinida y su relación cuando la diferencia de valores de x_2-x_1 tiende a cero.

Al igual que el ítem 17, el añadir este ítem 18 de forma improvisada refuerza el enfoque iterativo en el que el investigador realiza ajustes y se adapta de acuerdo con las necesidades emergentes de sus estudiantes. Este enfoque alineando con el experimento de enseñanza, promueve ciertas acciones, como el ajuste de actividades a fin de fortalecer la comprensión de conceptos abstractos; en este caso específico, la relación del valor de la pendiente "m" y la variación de Δx.

Cobb et al. (2003) enfatizan sobre la importancia de adaptar actividades en tiempo real, para atender las necesidades de los estudiantes dentro de su entorno de aprendizaje. Por ello, al incluir el ítem 18, se buscó reforzar la comprensión de cómo el valor de la pendiente afecta la forma de la línea recta, contribuyendo a un aprendizaje más significativo.

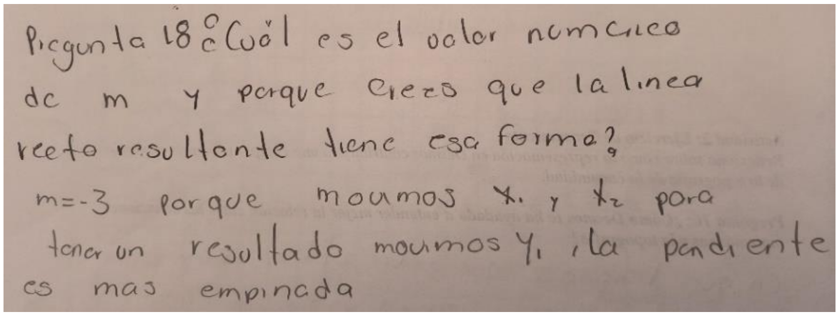

Pregunta 18 ¿Cuál es el valor numérico de m y porque crees que la linea recta resultante tiene esa forma?
m=-3 porque movimos x_1 y x_2 para tener un resultado movimos y_1, la pendiente es mas empinada

Figura 49. Respuesta al ítem 18 de la estudiante A2

ÍTEM 19

El ítem 19 tiene como objetivo que el estudiante llegue a una conclusión general sobre cómo el valor de la pendiente influye en la forma de su línea recta tras haber interactuado con la calculadora gráfica, manipulando los valores de Δy, Δx, y respondido a los ítems 17 y 18.

En su respuesta, señalada en la Figura 50, “si el valor es 0 el caminó es recto, Pero si Tienes algún número el caminó tomará forma diferente”, A24 entiende cómo el valor de m=0 implica una línea recta horizontal, y, a su vez, que otro valor de “m” distinto generará una inclinación en la recta. Sin embargo, su respuesta, aunque en general correcta, carece de precisión sobre la dirección que tomara la recta, dependiendo de si el valor de su pendiente es positivo o negativo.

Por ello, su respuesta cumple parcialmente, ya que comprende la relación entre la posición y dirección de la recta con el valor de su pendiente, pero no ahonda más en la distinción entre la inclinación hacia la derecha o izquierda de la recta.

Este ítem fue diseñado bajo el pilar de Entrelazamiento de la RME, ya que tiene el objetivo de que los estudiantes establezcan una conexión entre los ítems 17 y 18 y su conclusión en el ítem 19. Además, también busca enlazar la experiencia manipulativa en Desmos con la conceptualización geométrica de la pendiente.

La inclusión de este ítem en la sesión en vivo buscaba que los estudiantes lograran una comprensión más sólida de la relación del valor de la pendiente con la dirección de la línea recta en el plano cartesiano, siguiendo un enfoque adaptativo alineado con los principios establecidos por Cobb et al. (2003).

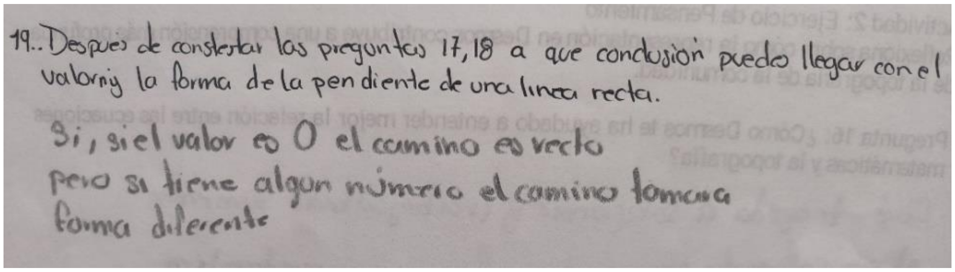

19.. Despues de constestar las preguntas 17,18 a que conclusión puedo llegar con el valor y la forma de la pendiente de una linea recta.
Si, si el valor es 0 el camino es recto
pero si tiene algun número el camino tomara
forma diferente

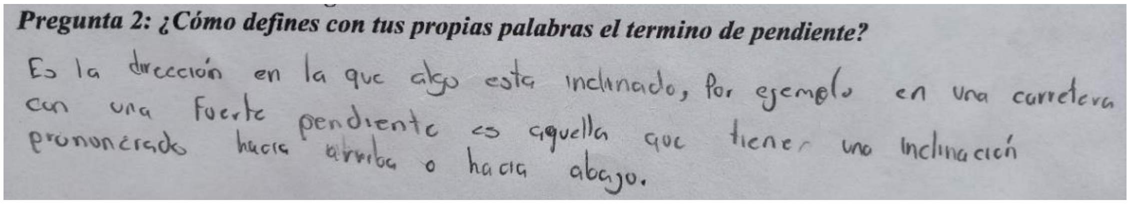
Figura 50. Respuesta al ítem 19 de la estudiante A24

ÍTEM 20

Para realizar el análisis del ítem 20, se seleccionaron las respuestas de un estudiante a dos ítems a fin de establecer una comparación entre ambos. El ítem 2, que solicita al estudiante definir con sus propias palabras el término “pendiente” y el ítem 20, que pide dar una definición formal de la pendiente de una línea recta. Esto permitió analizar la comprensión del concepto del estudiante a lo largo de las 6 sesiones del instrumento de intervención, destacando si las actividades diseñadas bajo los 6 pilares establecidos por la RME: Actividad, Realidad, Nivel, Entrelazamiento, Interactividad y Orientación conectados a los dos tipos de matematización (horizontal y vertical), contribuyeron al aprendizaje de la pendiente de una línea recta.

En su respuesta al ítem 2, evidenciada en la Figura 51, "Es la dirección en la que algo está inclinado, por ejemplo, en una carretera con una fuerte pendiente es aquella que tiene una inclinación pronunciada hacia arriba o hacia abajo", se refleja una percepción inicial del concepto, vinculada a situaciones cotidianas, como la inclinación de una carretera. Esto debido a la situación de aprendizaje inicial, donde se le plantea al estudiante la idea contextual de la creación de un recurso informativo sobre los caminos más importantes de la comunidad como parte de la promoción turística de la misma.

La respuesta de A34 carece de precisión matemática, pues no hace alusión a términos como “razón de cambio o referencias numéricas”. Esto indica un nivel de comprensión aún informal que parte de su realidad y que se alinea con el principio de Realidad, así como con el enfoque de la matematización horizontal, donde se relaciona el contexto matemático con un contexto real.


Pregunta 2: ¿Cómo defines con tus propias palabras el termino de pendiente?

Es la dirección en la que algo esta inclinado, Por ejemplo en una carretera con una Fuerte pendiente es aquella que tienen una inclinación pronunciado hacia arriba o hacia abajo.

Figura 51. Respuesta al ítem 2 del estudiante A34

En su respuesta al ítem 20, reflejada en la Figura 52, "Es un valor numérico que indica la inclinación de la recta con respecto al eje horizontal, representa cuánto crece o decrece la recta verticalmente por cada unidad que avanza horizontalmente", el nivel de comprensión de A34 presenta un avance significativo al aludir a conceptos más formales, como "inclinación respecto al eje horizontal" y la relación entre el cambio vertical entre el avance horizontal, indicando una transición de matematización horizontal a vertical.

La respuesta del estudiante incluye elementos abordados durante las 6 sesiones, como el cálculo de $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y su representación en el plano cartesiano.

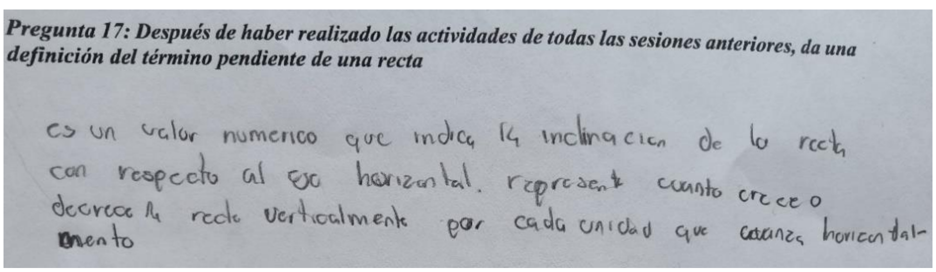
La definición de A34 al ítem 20 tiene un nivel avanzado en cuanto a compresión, claridad y formalidad del concepto de "pendiente", reflejando el avance que se tuvo después de abordar las 6 sesiones. La orientación docente, enmarcada dentro de la RME, también se hace presente con la guía de las actividades que facilitaron la transición de una comprensión informal (matematización horizontal) hacia una matemática más profunda (matematización vertical).

El progreso que demuestra específicamente este estudiante hace evidente el éxito que puede tener el instrumento de intervención como parte del experimento de enseñanza. Actividades como la manipulación de deslizadores en Desmos, ejercicios de graficación, cálculo de pendientes y transformación entre las diferentes formas de la ecuación de la recta, guiaron al estudiante en su progresión de un nivel de comprensión contextual e informal hacia un nivel conceptual más sólido. Esto permitió ciclos iterativos de exploración, discusión y síntesis, reforzando los principios establecidos por Cobb et al. (2003) como parte del experimento de enseñanza.

Los principios fundamentales bajo los cuales se diseñó este último ítem del instrumento son los de Nivel y Entrelazamiento. La transición que debería mostrar el estudiante desde una comprensión inicial hacia una formal es fundamental en el ítem 20, ya que permite evaluar el avance obtenido para interpretar el concepto de “pendiente”, justificando así el enfoque en el nivel de formalización alcanzado.

A su vez, para responder “correctamente” al ítem, se requirió que el estudiante haya trabajado los diferentes aspectos matemáticos, tales como ecuaciones, gráficas e interacciones con la calculadora gráfica a lo largo del instrumento, conectándolos a una definición formal. Esta capacidad de integrar los aprendizajes en una conceptualización matemática más precisa se alinea con el pilar de Entrelazamiento, fomentando diferentes conexiones significativas.

La comparativa entre las respuestas a ambos ítems de A34 demuestra que el instrumento le permitió pasar de una percepción informal y descriptiva hacia una más matemática y precisa, destacando la importancia del enfoque de la RME, que parte de situaciones contextualizadas, iterativas y orientadas a la enseñanza de conceptos matemáticos como el de “pendiente de una línea recta”



Pregunta 17: Después de haber realizado las actividades de todas las sesiones anteriores, da una definición del término pendiente de una recta

es un valor numerico que indica la inclinacion de la recta con respecto al eje horizontal. representa cuanto crece o decrece la recta verticalmente por cada unidad que avanza horizontalmente

Figura 52. Respuesta al ítem 20 del estudiante A34

Nota. La figura muestra la respuesta de A34 al ítem 20, en su hoja de exploración guiada al estudiante está establecida como “pregunta 17” ya que inicialmente se contempló con este número de ítem, sin embargo, después de añadir los ítems 17, 18 y 19 de último momento, el ítem 17 se convirtió en el ítem 20.

Capítulo 6. Discusión y Conclusiones

6.1 Discusión

El análisis detallado anteriormente sobre la implementación del instrumento de intervención y que aborda la comprensión del concepto de pendiente de una línea recta en estudiantes de nivel Medio Superior, mediante una serie de tareas divididas en 6 sesiones y apoyada por la herramienta tecnológica Desmos, revela algunas nociones generales, pero relevantes en el área de la educación matemática.

6.1.1 Implicaciones sobre la comprensión del concepto de pendiente

Después de la implementación de las actividades diseñadas bajo los principios de la Educación Matemática Realista, los resultados indican que se logró desarrollar una comprensión profunda por parte de los estudiantes, en comparación con su conocimiento previo limitado del concepto, ya que de acuerdo con los planes y programas de BGE (2018), dicho concepto se introduce formalmente hasta tercer semestre, por lo que los estudiantes no habían tenido un abordaje previo del concepto, situación confirmada a través de la experiencia docente con el grupo. La comprensión mencionada anteriormente se atribuye principalmente a que el instrumento parte de una situación contextual, lo cual permitió a los estudiantes construir el concepto desde su experiencia. Esto concuerda con lo planteado por Gravemeijer (1994), quien enfatiza en la importancia de la matematización horizontal, es decir, una enseñanza de situaciones informales que conecten con conceptos matemáticos. En este trabajo, estas situaciones se conectan con la tecnología para observar gráficamente las pendientes de los caminos de la situación planteada, reforzando la transición de una matemática informal hacia un enfoque más abstracto (Treffers, 1987).

Se destaca que el instrumento no solo promovió la comprensión de la pendiente abordada desde una situación conceptual, sino que también integró en el instrumento de intervención a 8 de las 11 conceptualizaciones reportadas en la literatura (Stump, 1999, 2001; Moore-Russo et al., 2011), lo que permitió a los estudiantes interactuar con diversas formas de interpretar al concepto.

Los datos cualitativos sugieren que el uso de la calculadora gráfica Desmos facilitó la exploración de representaciones algebraicas y gráficas del concepto de pendiente, lo que refuerza el argumento de Alvarez y Galman (2024), quienes afirman que el uso de Desmos puede servir como conexión entre contextos aplicables y conceptos abstractos. No obstante, se observaron algunas dificultades por parte de los estudiantes para utilizar la calculadora gráfica, puesto que, aunque la herramienta tiene un uso bastante intuitivo, la falta de experiencia en el uso de tecnologías por parte de algunos estudiantes dificultó en un inicio la interacción con Desmos. Por ello, se necesitó la orientación docente en el uso de los comandos y herramientas ofrecidas por la calculadora. Esto sugiere que la efectividad también depende de un diseño instruccional adecuado por parte del docente que promueva la familiaridad de los estudiantes con su uso para obtener el máximo provecho de estas tecnologías. (Cullen et al., 2020).

6.1.2 Conexión los principios de la Educación Matemática Realista

La estructura de las tareas propuestas estuvo regida bajo el marco teórico de la Educación Matemática Realista, y se evidenció que la mayoría de los estudiantes logró un progreso significativo en el aprendizaje del concepto. El hecho de partir de una situación realista, como el de los caminos inclinados de la comunidad, permitió a los estudiantes la construcción de un significado más sólido, reforzando el enfoque de Freudenthal (1991), quien afirma que las matemáticas deben ser presentadas como una actividad humana que moldean y da sentido a la realidad.

Todos los principios de la RME poseen su grado de importancia, ya que todos los ítems fueron diseñados bajo los 6 principios. Sin embargo, se debe hacer una mención especial al principio de entrelazamiento, el cual fomenta la integración de diferentes conceptos, lo que se reflejó en los resultados. En este sentido, el diseño del instrumento permitió a los estudiantes interactuar con distintas conceptualizaciones, favoreciendo una comprensión interrelacionada de la pendiente. Los estudiantes partieron de una situación contextual, conectándola con la perspectiva algebraica y observando su relevancia funcional, tal como sugieren otras investigaciones relacionadas (Deniz y Uygur-Kabael, 2017).

A pesar de esto, aún se observan dificultades con el enfoque de la matematización vertical ya que no todos los estudiantes lograron transitar de manera efectiva hacia una comprensión formal que generalizara su aprendizaje del concepto de pendiente. Esto puede atribuirse a la falta de experiencia para trabajar con este tipo de enfoques y a las dificultades implícitas en el aprendizaje del concepto de pendiente, tal como sugieren Cho y Nagle (2017).

6.1.3 Relevancia de la tecnología en la enseñanza del concepto

La adopción de la tecnología en este estudio se destaca como un elemento importante que supera el enfoque tradicional de enseñanza, funcionando como un apoyo que promueva una comprensión profunda del concepto. En este sentido, la tecnología permite a los estudiantes conectar dinámicamente enfoques algebraicos y gráficos, facilitando una transición fluida hacia una comprensión conceptual, como lo reportado por Puhl (2019).

La interactividad ofrecida por la calculadora gráfica Desmos fue un elemento clave, para que los estudiantes pudieran visualizar de forma dinámica el impacto del valor de la pendiente en los cambios de la línea recta de manera gráfica, así como observar las variaciones en las inclinaciones de los caminos de su actividad inicial.

Sin embargo, resulta imprescindible destacar la importancia del docente como facilitador, quien guía la integración de la tecnología en las tareas propuestas. Aunque la calculadora gráfica puede ser intuitiva, su uso puede resultar complejo si los estudiantes no tienen experiencia previa, especialmente para manejar los comandos y herramientas que se necesitan para las actividades. Por ello, el apoyo docente se vuelve crucial para llevar a cabo la integración efectiva de la tecnología en el aprendizaje de los estudiantes. Esto concuerda con lo señalado por Trouche y Guin (1998), quienes argumentan que la tecnología no es capaz de generar conocimiento significativo por sí sola, sino que requiere de una implementación pedagógica adecuada para favorecer el aprendizaje.

6.1.4 Limitaciones del estudio

Como se mencionó anteriormente, la implementación del instrumento arrojó resultados considerados “buenos” y que reflejan la efectividad de la intervención. Sin embargo, es importante mencionar algunas de las limitaciones encontradas.

En primer lugar, aunque se parte de una situación contextual que puede ser común para muchos estudiantes que viven en diferentes comunidades de México, e incluso en otras partes del mundo, esta realidad puede no ser tan representativa para estudiantes de ciudades grandes o comunidades más reconocidas. En estos contextos, la promoción turística podría no ser una necesidad primordial, o el reconocimiento de calles y caminos relevantes podría ser más difícil debido a la grandeza del contexto geográfico en el que se desenvuelven.

Otro aspecto importante que considerar como limitación es la falta de familiaridad inicial con la tecnología por parte de los estudiantes, misma que pudo haber influido negativamente en el uso práctico de la calculadora sin una guía docente. Además, al ser 40 estudiantes los involucrados en la intervención, y considerando que cada una de las sesiones contaba con un tiempo efectivo de aproximadamente 40 minutos, probablemente la explicación sobre el uso de los comandos y herramientas de la calculadora gráfica no haya sido suficiente para todos los estudiantes. Aunado a esto, y enfatizando en la variable del tiempo, la duración limitada de las sesiones presentó restricciones en cuanto a la profundización de otros aspectos, como la relación entre la pendiente y la derivada, lo que habría servido como una introducción al cálculo diferencial.

Este estudio se llevó a cabo en un grupo de estudiantes, pertenecientes a una escuela en específico dentro de un contexto educativo determinado. Esta característica no representa una limitación como tal, ya que las investigaciones cualitativas no buscan una generalización estadística, sino la comprensión de un fenómeno en su contexto. Sin embargo, sería interesante replicar este estudio ampliando la cantidad de participantes y en otros entornos educativos, a fin de obtener otras perspectivas sobre la comprensión de este concepto.

6.1.5 Implicaciones prácticas y futuras líneas de investigación

Este estudio destaca la importancia de seguir diseñando e implementando estrategias que promuevan la enseñanza de conceptos matemáticos que adopten enfoques teóricos sólidos, como el de la Educación Matemática Realista, e integren la tecnología como apoyo efectivo. Los resultados sugieren que la tecnología puede ser un excelente apoyo en la práctica pedagógica, siempre y cuando se integre de forma instruccional con un enfoque pedagógico intencionado.

Se sugiere:

- Desarrollar actividades, tareas y secuencias didácticas en las asignaturas de matemáticas de los planes de estudio de educación media superior, que integren herramientas tecnológicas, como Desmos, para la enseñanza de conceptos matemáticos.

- Implementar esta propuesta de diseño de tareas en otros contextos educativos y con diferentes poblaciones estudiantiles, a fin de validar su efectividad en diversos contextos y entornos educativos.
- Realizar un seguimiento de este diseño de tareas, mediante estudios longitudinales, que midan el impacto en el aprendizaje del concepto de pendiente para el abordaje de cursos posteriores, como el de cálculo diferencial en la enseñanza de la derivada.
- Promover otras investigaciones que exploren el uso de herramientas tecnológicas en combinación con la teoría de la Educación Matemática Realista dentro del proceso enseñanza-aprendizaje de conceptos matemáticos.
- Fomentar la capacitación en el ámbito tecnológico en docentes y estudiantes, con enfoque en la enseñanza de las matemáticas, que garantice una implementación exitosa y efectiva.

6.2 Conclusiones

El presente estudio tuvo como objetivo principal analizar la comprensión que tienen estudiantes del nivel Medio Superior cuando participan en una secuencia didáctica de aprendizaje mediada por la tecnología, implementada y enmarcada bajo los principios de la Educación Matemática Realista, que respondiera a la pregunta de cómo contribuye a la comprensión del concepto de pendiente en estudiantes de media superior. Los resultados obtenidos indican que las tareas diseñadas promueven la comprensión del concepto a través del vínculo entre una situación contextual real y las matemáticas.

Uno de los principales aportes de este estudio es la inclusión de las conceptualizaciones en el diseño del instrumento de intervención, ya que a diferencia de enfoque tradicionales que se centran en la enseñanza de la pendiente de forma algorítmica, o como coeficiente en la expresión $y = mx + b$, este trabajo permitió a los estudiantes explorar el concepto por medio de 8 conceptualizaciones: situación del mundo real, razón algebraica, razón geométrica, propiedad funcional, constante lineal, coeficiente paramétrico, propiedad física e indicador de comportamiento. Esta diversidad de conceptualizaciones contribuye a una enseñanza más completa y alineada a las necesidades de aprendizaje de los estudiantes.

La implementación de las actividades promovió una comprensión en los estudiantes, que partiera de situaciones contextualizas e informales hasta llegar a una formalización matemática, mostrando cómo la conexión entre contextos reales y representaciones algebraicas, gráficas y funcionales puede fomentar el avance progresivo en el aprendizaje de las matemáticas. Los hallazgos sugieren que el utilizar diferentes conceptualizaciones para la enseñanza de la pendiente, resulta efectivo para favorecer la comprensión del concepto, y reducir errores relacionados a su interpretación. Además, estas actividades pueden ser replicables e implementarse en otros contextos educativos y adaptarlas para funcionar en el abordaje de diferentes temas matemáticos. Lo anterior resulta un aporte valioso en el área de la educación matemática, ya que centra al estudiante como participante activo en su proceso de aprendizaje, respaldado por la tecnología digital.

Sin embargo, vale la pena resaltar que los resultados de este trabajo evidenciaron que, aunque el uso de la tecnología juega un papel crucial en el proceso enseñanza-aprendizaje de conceptos matemáticos abstractos, es fundamental contar con una guía pedagógica adecuada que instruya a los estudiantes en el uso de estas herramientas tecnológicas a fin de maximizar su potencial en el aprendizaje de las matemáticas a través del diseño de actividades y tareas que puedan aprovechar el uso de la tecnología con un propósito didáctico. Aun así, Desmos demostró ser un recurso útil para que los estudiantes pudieran visualizar y manipular gráficas en tiempo real, dinamizando las actividades propuestas.

Las herramientas digitales, en combinación con secuencias didácticas contextualizadas, se presentan como opciones efectivas para la enseñanza de las matemáticas. Asimismo, pueden aportar nuevas ideas y estrategias para los docentes, e incluso para añadirse en programas académicos o utilizarse como base para crear nuevas situaciones de aprendizaje, tal como sucedió en el proceso de creación de esta secuencia didáctica. Esta propuesta también atiende la necesidad de seguir implementando estrategias que privilegien el aprendizaje significativo de las matemáticas, apoyándose de la tecnología, y que representen un aporte para la educación media superior en México y a nivel global.

Es importante reconocer que ningún trabajo es perfecto y siempre existen oportunidades de mejora. En ese sentido, este trabajo presenta carencia en cuanto a el tiempo limitado para la implementación del instrumento de intervención. Además, sería relevante analizar si resulta valiosa para el aprendizaje de conceptos y asignaturas más avanzadas, por ejemplo, como una introducción al cálculo diferencial. Probablemente, con futuras implementaciones se podrán detectar áreas de oportunidad, y en consecuencia permitir añadir nuevas modificaciones y mejoras a fin de seguir enriqueciéndola para fortalecer su impacto en la enseñanza de las matemáticas. También se evidenciaron brechas tecnológicas, lo que resalta la necesidad de familiarizar más a los estudiantes con el uso de la tecnología como parte de su proceso de aprendizaje.

Finalmente, este estudio ofrece una nueva propuesta que abre la posibilidad de seguir explorando cómo una secuencia didáctica fundamentada en un marco teórico como la Educación Matemática Realista y apoyada por la tecnología digital puede implementarse en el currículo, planes y programas de estudio, así como secuencias didácticas o clases. Los resultados arrojados en este estudio muestran cómo una enseñanza fundamentada en diferentes enfoques de la educación matemática puede mejorar el desarrollo académico de estudiantes y profesores. A través de la integración de herramientas tecnológicas, se busca proporcionar recursos que los apoyen a enfrentar los desafíos que supone el mundo actual y futuro. Aún quedan muchas aportaciones por realizar en la enseñanza de las matemáticas, y esta tesis pretende ofrecer una propuesta práctica que apoye a otros profesores y diseñadores curriculares en la implementación de prácticas pedagógicas con enfoques innovadores y tecnológicos en el aula, además de servir como inspiración que contribuya con nuevas estrategias de enseñanza-aprendizaje para transformar a la educación matemática.

Referencias

Abreu, R., Dolores, C., Sánchez, J.L. y Sigarreta, J.M. (2020). El concepto de pendiente: estado de la investigación y prospectivas. *NÚMEROS Revista de didáctica de las matemáticas, 103,* 81-98. http://www.sinewton.org/numeros

Alvarez, J. I., y Galman, S. M. A. (2024). Utilizing digitalization in differentiation: Integration of Desmos in learning analytic geometry and calculus. *Galaxy International Interdisciplinary Research Journal, 12*(3), 127–140. https://www.giirj.com/index.php/giirj/article/view/6560.

Aprilia, N. D. y Zuliana, E. (2025). Penggunaan PMRI berbantu media jaring-jaring karakter. *Indo-MathEdu Intellectuals Journal, 6*(1), 826-835. https://doi.org/10.54373/imeij.v6i1.2535

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 7,* 245–274. https://doi.org/10.1023/A:1022103903080

Bakker, A. y Van Eerde, D. (2015). An introduction to design-based research with an example from statistics education. *Didactica Mathematicae*, 37, 45-67. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9593-1

Bartolomé, M. (1992). Investigación cualitativa en investigación: ¿Comprender o transformar? Revista de Investigación Educativa, 20, 736.

Bui, P. U., Tong, D. H., Loc, N. P. y Thanh, L. N. P. (2021). The effectiveness of applying Realistic Mathematics Education approach in teaching statistics in grade 7 to students' mathematical skills. *Journal of Education and e-Learning Research, 8*(2), 185-197. https://doi.org/10.20448/journal.509.2021.82.185.197

Burton, L. (1993). Implications of constructivism for achievement in mathematics. EIn J. A. Malone y P. C. S. Taylor (Eds.), *Constructivist interpretations of teaching and learning mathematics* (pp. 7–14).

Cabrero, J. y Llorente, M. C. (2013). La aplicación del juicio de experto como técnica de evaluación de las tecnologías de la información (TIC). *Eduweb. Revista de Tecnología de Información y Comunicación en Educación*, *7*(2), 11-22. http://servicio.bc.uc.edu.ve/educacion/eduweb/v7n2/art01.pdf

Cho, P. y Nagle, C. (2017). Procedural and conceptual difficulties with slope: An analysis of students' mistakes on routine tasks. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES), 3*(1), 135-150. https://www.ijres.net

Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2016). Design research from the learning design perspective. *En Handbook of Design Research Methods in Education: Innovations in Science, Technology, Engineering, and Mathematics Learning and Teaching* (pp. 68-94). Routledge.

Cobb, P., Jackson, K. y Dunlap, C. (2016). Design research: An analysis and critique. *Educational Researcher, 45*(1), 63-70. https://doi.org/10.3102/0013189X16677038

Creswell, J. W. (2013). Qualitative Inquiry and Research Design: Choosing Among Five Approaches (3rd ed.). SAGE Publications.

Cullen, C. J., Hertel, J. T., y Nickels, M. (2020). The roles of technology in mathematics education. *The Educational Forum*, 84(2), 166-178. https://doi.org/10.1080/00131725.2020.1698683

Deniz, Ö., y Kabael, T. (2017). 8th Grade Students' Construction Processes of the Concept of Slope. *Education and Science, 42*(192), 139-172. https://doi.org/10.15390/EB.2017.6996

Deniz, Ö. y Uygur-Kabael, T. (2017). Students' mathematization process of the concept of slope within the Realistic Mathematics Education. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi (H.U. Journal of Education), 32*(1), 123-142. https://doi.org/10.16986/HUJE.2016018796

De Lange, J. (1987). *Mathematics, Insight and Meaning.* OWyOC, Utrecht University, Utrecht, The Netherlands.

Dolores, C. y Ibañez, G. (2020). Conceptualizaciones de la Pendiente en Libros de Texto de Matemáticas. *Bolema, Rio Claro, 34* (67), 825-846. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v34n67a22

Dolores, C. y Mosquera, G. A. (2022). Conceptualizaciones de la pendiente en el currículum colombiano de matemáticas. *Educación Matemática, 34*(2), 217-239. https://doi.org/10.24844/EM3402.08

Escobar, J., y Cuervo, Á. (2008). Validez de contenido y juicio de expertos: una aproximación a su utilización. *Avances en Medición*, *6*(1), 27-36. https://www.researchgate.net/publication/302438451_Validez_de_contenido_y_juicio_de_expertos_Una_aproximacion_a_su_utilizacion

Eisenhut, J. (2024). *Real life projects with a focus on the principles of realistic mathematics education* [Tesis de maestría, State University of New York (SUNY), Brockport]. https://soar.suny.edu/handle/20.500.12648/15990

Flores, M. (2014). Implicaciones de los paradigmas de investigación en la práctica educativa. Revista Digital Universitaria, 5(1), 2-9. https://www.researchgate.net/publication/316976911_Implicaciones_de_los_paradigmas_de_investigacion_en_la_practica_educativa

Freudenthal, H. (1968). 'Why to teach mathematics so as to be useful?', *Educational Studies in Mathematics, 1,* 3–8.

Freudenthal, H. (1971). 'Geometry between the devil and the deep sea', *Educational Studies in Mathematics, 3,* 413–435.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Riedel Publishing Company, Dordrecht, The Netherlands.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. China Lectures. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

Galicia, L. A., Balderrama, J. A. y Edel, R. (2017). Validez de contenido por juicio de expertos: propuesta de una herramienta virtual. *Apertura, 9*(2), 42-53. http://dx.doi.org/10.32870/Ap.v9n2.993

Guin, D y Truche, L. (1998). The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 3,* 195-227. https://doi.org/10.1023/A:1009892720043

Guin, D y Truche, L. (2021). Revisiting the French Didactic Tradition through Technological Lenses. *MDPI 9* (6)*,* 629. *https://doi.org/10.3390/math9060629*

Gravemeijer, K. (1999). 'How emergent models may foster the constitution of formal mathematics', *Mathematical Thinking and Learning, 1*(2), 155–177.

Gravemeijer, K. P. E. (1994). *Developing realistic mathematics education* [Tesis doctoral, Utrecht University]. Freudenthal Institute.
Gravemeijer, K.P.E. (1994b). 'Educational development and developmental research in mathematics education', *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(5), 443–471.
Gravemeijer, K. y Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. En J. Van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research* (pp. 17-33). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203088364-12
Hackenberg, A. J. (2010). Mathematical caring relations in action. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(3), 236-273. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.41.3.0236
Hunting, R. (1983). Emerging methodologies for understanding internal processes governing children's mathematical behavior. *Australian Journal of Education, 27*(1), 45–61.
Jonker, J. y Pennink, B. J. W. (2009). The Essence of Research Methodology: A Concise Guide for Master and PhD Students in Management Science. En The Essence of Research Methodology: A Concise Guide for Master and PhD Students in Management Science. https://doi.org/10.1007/978-3-540-71659-4
Juárez-Hernández, L. G. y Tobón, S. (2018). Análisis de los elementos implícitos en la validación de contenido de un instrumento de investigación. *Revista Espacios, 39*(53), 23-35.
Khasanah, A. K., Wiryanto y Siswono, T. Y. E. (2025). The effectiveness of realistic mathematics education to improve students' problem-solving skills in elementary schools: Literature review. *Jurnal Cakrawala Pendas, 11*(1), 188-199. https://doi.org/10.31949/jcp.v11i1.12186
Michilena Delgado, L. M. y Pazmiño Campuzano, M. F. (2024). Diseño de una estrategia educativa basada en nuevas tecnologías para la enseñanza de las matemáticas en Bachillerato: Design of an educational strategy based on new technologies for the teaching of mathematics in high school. LATAM Revista Latinoamericana De Ciencias Sociales Y Humanidades, 5(2), 77–92. https://doi.org/10.56712/latam.v5i2.1859
Moore-Russo, D., Conner, A., & Rugg, K. (2011). Can slope be negative in 3-space? Studying concept image of slope through collective definition construction. *Educational Studies in Mathematics, 76*(1), 3–21. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9277-y
Netriwati, R., Sastra Negara, H. y Senja Tirani, K. (2025). The impact of the Realistic Mathematics Education (RME) learning model on students' understanding of mathematical concepts. *Jurnal Pendidikan Dasar Nusantara, 10*(2), 383-392. https://doi.org/10.29407/jpdn.v10i2.24244
Niss, M. (1992). Applications and modeling in school mathematics – Directions for future development. En I. Wirzup y R. Streit (Eds.), *Developments in school mathematics education around the world (Vol. 3*). Chicago: National Council of Teachers of Mathematics.
Norton, A. y D'Ambrosio, B. S. (2008). ZPCs in a dynamic learning environment: A design experiment study. *Journal of Mathematical Behavior, 27*(2), 150-163.
Ochoa, M. A. (2015). Muestreo no probabilístico en la investigación cualitativa. *Revista Mexicana de Ciencias Políticas y Sociales, 60*(223), 257-291.
Parra, F. V. y Ramírez, J. V. J. (2022). Matematizando figuras cotidianas mediante la aplicación Desmos: Mathematizing everyday figures using the Desmos application. South Florida Journal of Development, 3(2), 2017–2023. https://doi.org/10.46932/sfjdv3n2-033

Puhl, L. (2019). *The effect of using Desmos in high school algebra when teaching the slope of a line* (master's thesis, Southern Connecticut State University). Southern Connecticut State University.

Rivera, M., Salgado, G. y Dolores, C. (2019). Explorando las Conceptualizaciones de la Pendiente en Estudiantes Universitarios. *Bolema, Rio Claro, 33* (65). http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a03

Salgado, G., Rivera, M. y Dolores, C. (2019). Conceptualizaciones de pendiente: Contenido que enseñan los profesores del Bachillerato. *UNION- Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* (57), 41-56. https://union.fespm.es/index.php/UNION

Sánchez Santiesteban, J. L., Cruz Ramírez, M., Cabrera Martínez, A. y Sigarreta Almira, J. M. (2022). El significado del concepto de pendiente desde la perspectiva universitaria. *Revista Universidad y Sociedad*, 14(4), 156-171. ISSN: 2218-3620.

Sandín, M. P. (2003). Investigación cualitativa en educación: Fundamentos y tradiciones. McGraw-Hill.

Santamaría, J. (2013). Paradigmas de investigación educativa: de las leyes subyacentes a la modernidad reflexiva. ENTELEQUIA revista interdisciplinar, 16, 91-102. https://www.researchgate.net/publication/257842598_Paradigmas_de_Investigacion_Educativa_de_las_leyes_subyacentes_a_la_modernidad_reflexiva

Santos, M. (2002). Constructivismo y educación matemática. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 10(3), 215-229.

Secretaria de Educación Pública [SEP]. *MATEMÁTICAS TERCER SEMESTRE Pensamiento Matemático III.* Programas BGE 2018. https://sep.puebla.gob.mx/index.php/comunicados/content/programa-bge-2018

Steffe, L. P. y Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En A. Schoenfeld (Ed.), *Research in Collegiate Mathematics Education IV* (pp. 267-306). American Mathematical Society.

Steffe, L. P. y Ulrich, C. (2020). Constructivist teaching experiment. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 134–141). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_32

Strauss, A. y Corbin, J. (1998). Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory (2nd ed.). Sage Publications.

Streefland, L. (1985a). 'Wiskunde als activiteit en de realiteit als bron', *Nieuwe Wiskrant, 5*(1), 60–67.

Stump, S. (1999). Secondary mathematics teachers' knowledge of slope. *Mathematics Education Research Journal, 11*(2), 124-144.

Stump, S. (2001). Developing preservice teachers' pedagogical content knowledge of slope. *The Journal of Mathematical Behavior, 20*(2), 207-227. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(01)00071-2

Swan, M. (2020). Design research in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 192–195). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_180

Tójar, J. C. (2006). *Investigación cualitativa: Comprender y actuar*. La Muralla.

Treffers, A. (1978). *Wiskobas Doelgericht. IOWO, Utrecht,* The Netherlands.

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction – The Wiskobas Project.* Reidel Publishing Company, Dordrecht, The Netherlands.

Treffers, A. y Goffree, F. (1985). 'Rational analysis of realistic mathematics education – the Wiskobas program'. In L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, OWyOC, Utrecht University, Utrecht, The Netherlands, Vol. II, pp. 97–121.

Turner, E., Wilhelm, J. y Confrey, J. (2000). Exploring Rate of Change through Technology with Elementary Students. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, New Orleans, LA, April 24-28).

Van den Heuvel-Panhuizen, M. y Drijvers, P. (2020). Realistic mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 713–717). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_170

Vázquez Martínez, M. G. (2017). Muestreo probabilístico y no probabilístico. *Universidad del Istmo*. https://www.universoformulas.com/estadistica/inferencia/muestreo-por-conveniencia/

Vizcarra Parra, F., & Jiménez Ramírez, J. V. (2022). *Matematizando figuras cotidianas mediante la aplicación Desmos*. *South Florida Journal of Development, 3*(2), 2017–2023. Recuperado de https://ojs.southfloridapublishing.com/ojs/index.php/jdev/article/view/1277

Anexo I Primer instrumento diseñado

"Un Viaje Matemático por Nuestra Comunidad"

Nombre del Estudiante: ____________________ *Fecha:* _____________

Introducción: *En nuestra comunidad, nos enfrentamos a la emocionante tarea de promover los lugares más encantadores y significativos. La iniciativa es crear un material publicitario único que no solo destaque la belleza de estos lugares, sino que también integre la matemática de manera práctica y tangible. Los estudiantes se sumergirán en un viaje matemático, convirtiéndose en verdaderos exploradores de la topografía local.*

Escenario: *Imagina que somos un equipo de expertos matemáticos y cartógrafos encargados de diseñar un material publicitario que no solo informe sobre los lugares de interés, sino que también eduque a la comunidad sobre la topografía única que nos rodea. Para hacer esto, nos centraremos en el concepto de pendiente y cómo este elemento matemático puede ilustrar la inclinación y accesibilidad de nuestros lugares seleccionados.*

Justificación:

Algunas de las ventajas que resultan de la importancia del concepto de pendiente en esta situación se pueden establecer en afirmaciones tales como:

- *Accesibilidad y Seguridad:*

Al calcular las pendientes, se proporciona información valiosa sobre la inclinación del terreno en los lugares de interés. Esto puede ser crucial para aquellos que visitan estos lugares, ya que conocer la pendiente ayuda a evaluar la accesibilidad y seguridad de las rutas.

- *Experiencia del Visitante:*

La pendiente influye en la experiencia del visitante. Al mostrar visualmente las pendientes en el material publicitario, se brinda a los futuros visitantes una comprensión más completa de lo que *pueden esperar en términos de terreno. Esto permite una mejor preparación y aumenta la satisfacción de la experiencia.*

- *Diferenciación de Lugares de Interés:*

La pendiente puede diferenciar de manera única cada lugar de interés. Al resaltar las inclinaciones, el material publicitario puede transmitir la diversidad de los lugares y proporcionar a los residentes y visitantes potenciales una visión más rica y detallada de la comunidad.

Sesión 1 Introducción

Objetivo:
Entender cómo la pendiente influye en nuestras experiencias al explorar lugares y el cómo puede afectar el cansancio de una persona o el consumo de combustible en el rendimiento de los vehículos.

Actividades
1: Análisis de Imágenes
Presentación Visual:
Observa las imágenes o videos proporcionados que muestran lugares con diferentes pendientes.
Piensa en cómo la pendiente puede influir en tu experiencia al visitar diferentes lugares.

Discusión en Grupo:
Comparte tus observaciones sobre cada imagen.
¿En qué imagen un automóvil gasta más combustible?
¿En cuál una persona se cansa más si lo recorriese caminando?
Explica tus respuestas

2: Conclusiones
Reflexión:
Qué conclusiones puedes sacar de las imágenes en relación con la pendiente.
¿Cómo crees que la pendiente afecta al esfuerzo humano y al rendimiento del automóvil?
¿Cómo puedes definir con tus propias palabras el termino de pendiente?

3: Sitios de interés
Piensa e investiga sobre al menos 5 lugares de interés en tu comunidad o ciudad que podrían destacarse en nuestro proyecto. Incluye información sobre su importancia la topografía y posibles desafíos relacionados con la pendiente.
Actividad para la siguiente sesión: Imprime un mapa en 2D de la comunidad

Imagen A

Imagen B

Sesión 2: Cálculo y Representación de Pendientes

Objetivo:

Familiarizarse con herramientas de geolocalización.

Practicar la identificación de coordenadas y cálculos de distancias en el mapa.

Aplicar el concepto de pendiente en la medición y representación visual de los sitios de interés seleccionados.

Actividades:

1. Selección y Análisis de Sitios de Interés:

Discusión: *¿Por qué seleccionaron estos lugares? ¿Cómo creen que la pendiente influirá en la experiencia de disfrute y accesibilidad de quienes los visiten?*

2. Introducción a Herramientas de Geolocalización:

Google Maps: Explora Google Maps para identificar sitios de interés

¿Cómo la geolocalización en Google Maps ayuda a entender la ubicación precisa de lugares en el mapa y facilita la navegación en comparación con métodos tradicionales de búsqueda de direcciones?

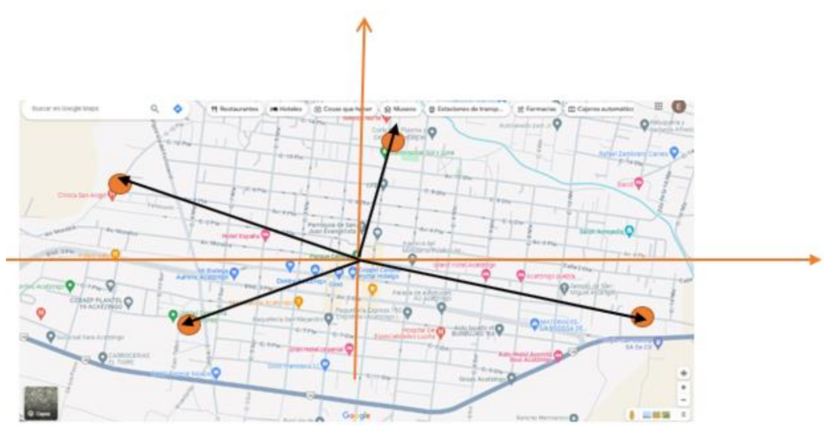
3. Representación Gráfica en Mapa 2D:

Actividad Práctica: *Utiliza Google Maps para encontrar y marcar cinco lugares de interés previamente seleccionados en nuestra comunidad. Representa los lugares en el mapa 2D que trajiste con puntos o círculos. Dibuja en un plano cartesiano rectas que unan el origen (escoge un punto que consideres intermedio, por ejemplo, el centro de la comunidad) con cada sitio de interés que elegiste. Observa la imagen proporcionada para obtener un ejemplo.*

Discusión: *¿Cómo ayuda esta representación gráfica a comunicar las percepciones de las pendientes en cada sitio de la comunidad?*

Reflexión al Final de la Sesión: Reflexiona sobre cómo la representación visual de la pendiente puede mejorar la comprensión de la comunidad sobre los lugares de interés.

¿Cómo la distancia entre dos puntos en el mapa puede vincularse con el concepto de pendiente?

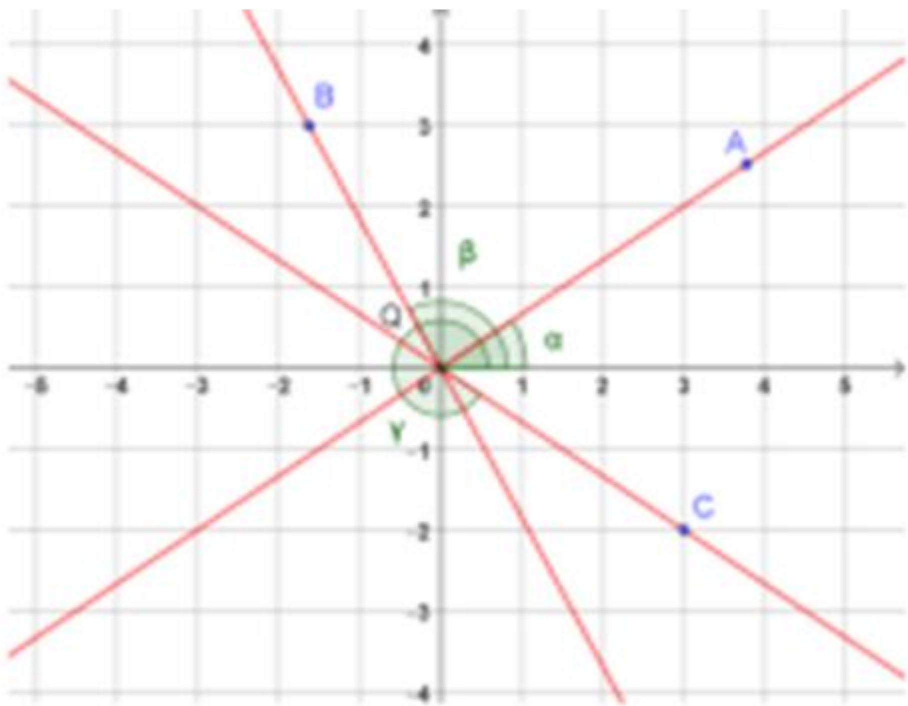


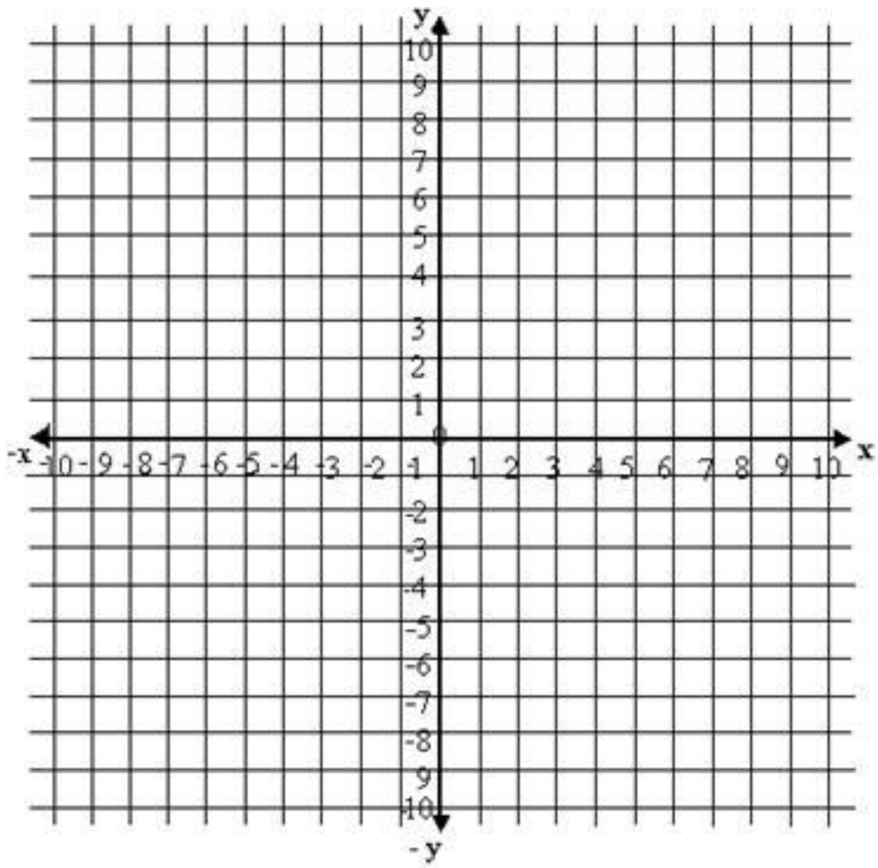
Sesión 3: Exploración Práctica de la Pendiente en Lugares de Interés

Actividad 1: Conexión entre la Realidad y los Datos Matemáticos
Objetivo:
Explorar la influencia de la pendiente en sitios específicos de la comunidad y reflexionar sobre su impacto en la experiencia humana.

Dibujo de Rectas y Medición de Ángulos:

Dibuja un plano cartesiano y coloca los sitios de interés de tu comunidad. Observa el ejemplo de abajo
Nombra cada punto con letras (A, B, C, etc.) de acuerdo a la que consideres que representa al sitio de interés. Al menos 5 sitios de interés.
Estima visualmente el ángulo de inclinación de cada recta.
Utiliza un transportador para medir con precisión el ángulo de inclinación con respecto al "eje x".





Ángulo de inclinación estimado:
Ángulo de inclinación medido:

Preguntas de Reflexión:
¿Cómo describirías la pendiente de la recta que une dos puntos específicos de la comunidad?
¿Cómo se relaciona la inclinación medida con la pendiente matemática?

Actividad 2: Exploración de Rutas y Pendientes
Representación Visual:
Traza rutas entre puntos de interés seleccionados, por ejemplo, del punto B a C, C a E, etc. Traza 3 rutas diferentes.
Crea representaciones visuales detalladas utilizando gráficos en papel para mostrar las variaciones de altura y distancia horizontal en cada ruta.

Preguntas de Reflexión:
¿Hay alguna relación evidente entre los cambios en la altura y la distancia horizontal en las rutas trazadas?
¿Cómo podríamos expresar matemáticamente la inclinación que acabamos de medir en las rutas?
¿Puedes anticipar cómo cambiaría la representación gráfica si la pendiente es positiva o negativa?

Sesión 4.: Pendiente y Distancia con Deducción de la Fórmula:

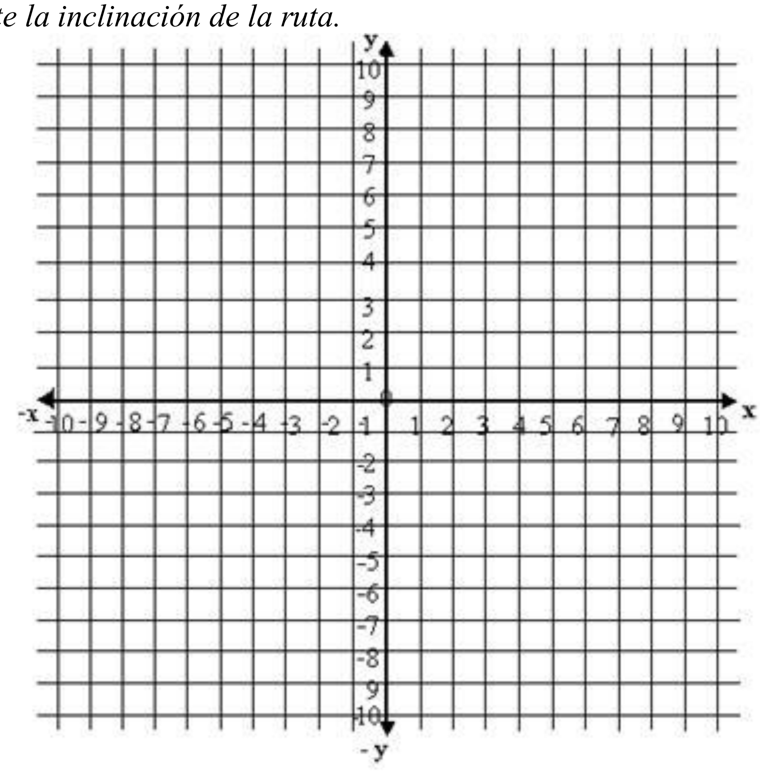
Objetivo:
Descubrir por ti mismo cómo se formula la pendiente Utilizando dos puntos de interés en tu comunidad, calcularás la distancia entre ellos y, a través de observaciones visuales, entenderás la inclinación de la ruta que los conecta. Al introducir las variables Δy y Δx, relacionarás estos cambios con la pendiente.

Actividad 1
Selecciona Dos Puntos de Interés:
Elige dos lugares de interés en tu comunidad y registra sus coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

Calcula la Distancia:
Utiliza la fórmula de distancia entre dos puntos en un plano. Considera tomar la escala de 1 unidad=1 km:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Dibuja la Ruta y Observa la Pendiente:
Dibuja una línea que conecte los dos puntos en un plano cartesiano.
Observa visualmente la inclinación de la ruta.



Introduce la Variable Δy y Δx:
Define Δy como la diferencia entre las coordenadas y de los dos puntos (Δy=y2−y1).
Define Δx como la diferencia entre las coordenadas x de los dos puntos (Δx=x2−x1).

Relación entre Pendiente y $\Delta y/\Delta x$:
Observa cómo la pendiente de la ruta (m) se relaciona con Δy y Δx.
¿Puedes expresar la pendiente (m) en términos de Δy y Δx) como la razón de cambio vertical (Δy) a la razón de cambio horizontal (Δx)?

¿Cuál sería la fórmula para calcular la pendiente?

Actividad 2
Aplica la Fórmula:
Utiliza la fórmula de pendiente para calcular la pendiente de la ruta entre los dos puntos que selecciones en tu mapa. R=
¿Cómo afecta la magnitud de la pendiente a la inclinación percibida de la ruta?

Relación entre Pendiente y Tangente del Ángulo de Inclinación:
¿Cómo el valor del (θ)de la recta podría representar la pendiente?

Deducción Intuitiva:
Si θ es el ángulo de inclinación, entonces $m=\tan(\theta)$.
¿Cómo la pendiente (m) se relaciona con la tangente del ángulo de inclinación, $\tan(\theta)$?

Sesión 5 Ecuación de la Recta $y = mx + b$ junto con Concepto de Punto Pendiente

Objetivo:
Comprender cómo la fórmula de la pendiente y la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta son esenciales para representar visualmente la topografía de rutas entre lugares de interés en tu comunidad.

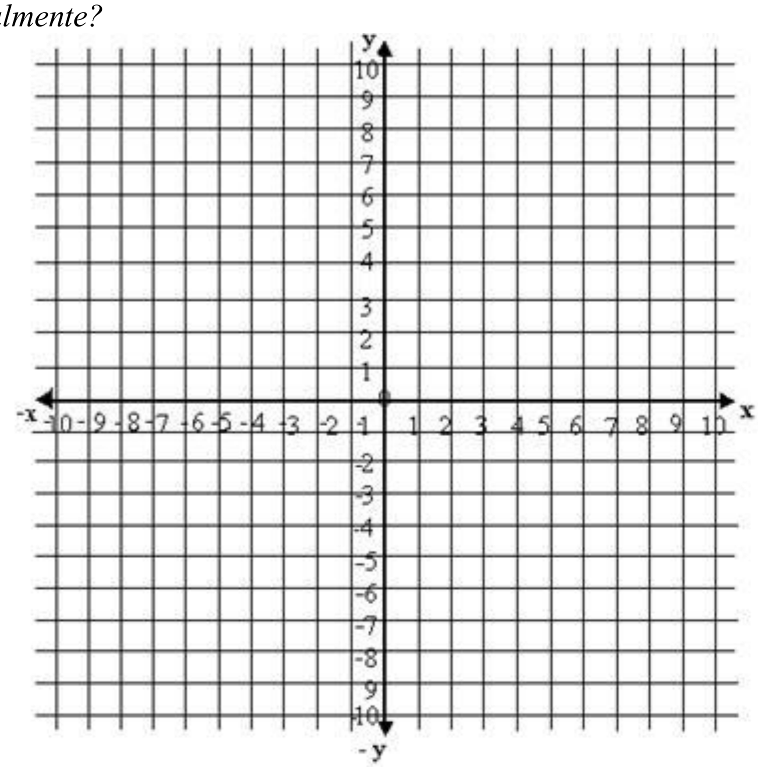
Actividad 1: Revisión de Pendiente:

- *Exploración Inicial:*

Ejercicio Matemático: Desglosa la fórmula de la pendiente (m= Δx/Δy) identificando qué representa cada componente.
Ejemplo: Si tienes dos puntos (3, 4) y (7, 10), ¿cómo calcularías la pendiente?

- *Interpretación Visual:*

Ejercicio Matemático: Dibuja líneas con diferente pendiente en un plano cartesiano.
¿Como dibujarías dos líneas, una con pendiente positiva y otra con pendiente negativa? ¿En qué se diferencian visualmente?



Actividad 2: Introducción a la Ecuación de la Recta:

- *Descubrimiento Guiado:*

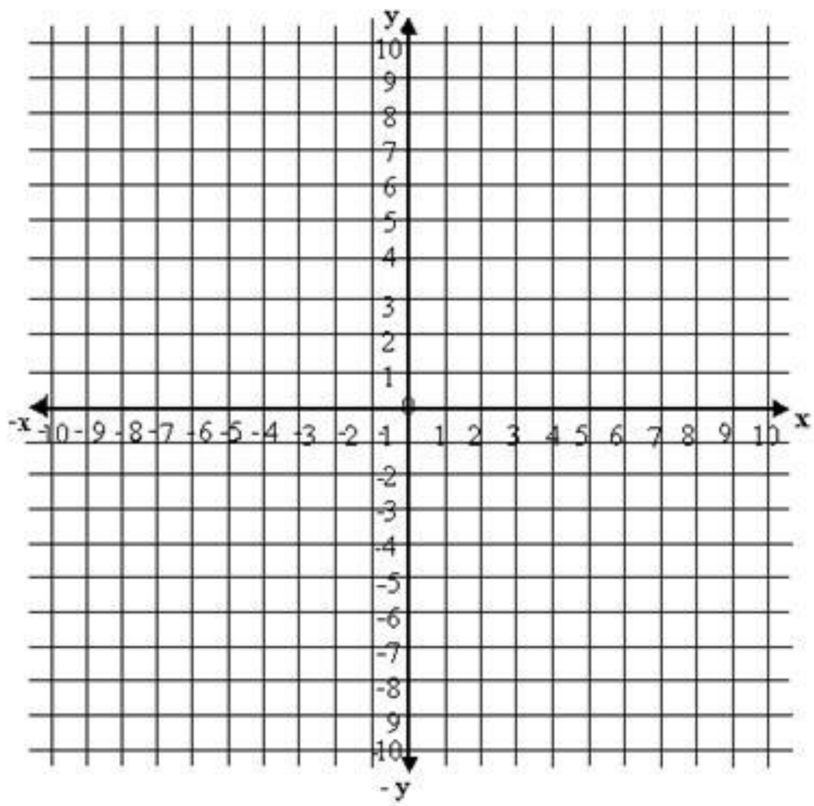
Ejercicio Matemático: Analiza la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, eligiendo un punto y comprendiendo su importancia.

Ejemplo: Utiliza la forma punto-pendiente para escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto (2, 5) con pendiente -3.

Actividad 3: Aplicación Práctica:

Ejercicio Matemático:

a) *Si los lugares son A (1, 3) y B (5, 7), ¿puedes usar la fórmula punto-pendiente para escribir la ecuación de la recta dela forma punto-pendiente ? Dibújalos en el plano cartesiano.*
b) *Selecciona dos lugares de interés que seleccionaste, registra sus coordenadas y dibuja visualmente la ruta entre ellos en un plano cartesiano. ¿Cuál sería la ecuación punto-pendiente de esta recta?*



Sesión 6: Explorando Pendientes y la Ecuación de la Recta $y = mx + b$

Objetivo:
Entender la pendiente a través de la forma punto-punto de la ecuación de la recta $y = mx + b$, centrándonos en analizar la constante 'b'

Actividad 1: Introducción al Concepto de Pendiente:

- *Exploración Guiada:*

¿Cómo expresar la pendiente usando dos puntos (punto-punto)?

¿Cuándo la forma punto-punto sería más útil que la forma punto-pendiente?

Actividad 2: Relación con Ecuación de la Recta y Análisis de 'b'

- *Exploración de la Ecuación General:*

Relacionaremos la fórmula de la pendiente (m) con la ecuación general de la recta $y = mx + b$.

Ejemplo práctico de cómo escribir la ecuación en la forma $y = mx + b$.

- *Análisis de 'b' a través de Gráficas:*

Ejercicio Práctico:
Tomemos la ecuación $y= 2x+b$ como ejemplo. Grafiquemos esta recta en un plano cartesiano utilizando tres valores distintos de 'b': $b=1$, $b=3$, y $b=-2$.

- *Preguntas de Reflexión:*

Para cada ejemplo ¿Cuál es el valor de la pendiente y de la ordenada al origen (corte con el eje "y")?

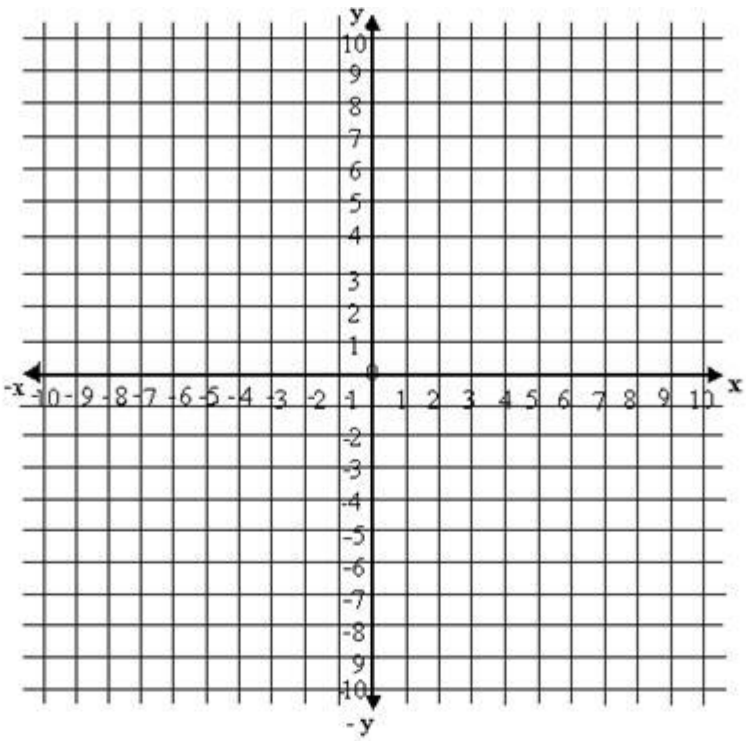
¿Qué diferencias notaste en la posición de las rectas al cambiar el valor de 'b'? Dibújalas

¿Cómo afecta 'b' al punto donde la recta corta el eje y?

¿Cómo se comportaría la recta si 'b' fuera negativo o cero?

- *Ejemplo Visual:*

Proporcionamos un gráfico que muestra las tres rectas con diferentes valores de 'b'. Etiquetamos claramente cada línea en el gráfico para visualizar las variaciones.



Actividad 3: Ejercicios Prácticos y Reflexión Personal

- *Aplicación Práctica:*

Ejercicio Matemático: Dados los puntos A (2, 4) y B (6, 8), ¿puedes escribir la ecuación de la recta en forma punto-punto y luego transformarla a la forma $y = mx + b$*?*

Selecciona una de las rutas que trazadas en tu proyecto y escribe la ecuación de la recta en forma punto-punto y luego transformarla a la forma $y = mx + b$

Sesión 7 Comprender la Pendiente en Formas Ordinaria y Simétrica

Objetivo:

Aplicar los conceptos de pendiente en las formas ordinaria ($Ax+By=C$*) y simétrica (*$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$*), así como transformar ecuaciones entre estas formas.*

Actividad 1: Introducción a la Pendiente en Formas Ordinaria y Simétrica:

- *Presentación Teórica:*

Explicación:
Aprenderás sobre las formas ordinaria y simétrica de la ecuación de la recta.

Ejemplo: La forma ordinaria tiene A*,* B*, C, y la simétrica tiene* a*,* b*,* x *e* y.

- *Discusión en Grupo:*

Actividad de Grupo:
Discute con tus compañeros las características únicas de cada forma de la ecuación de la recta.

¿Puedes identificar claramente qué letras, ya sea A y B en la forma ordinaria (Ax + By = C) o a y b en la forma simétrica (x/a + y/b = 1), representan la pendiente en cada ecuación de la recta? Explica cómo estas letras influyen directamente en la inclinación de la recta en el plano cartesiano.

Actividad 2: Transformación entre Formas:

- *Práctica Individual:*

Transforma ecuaciones entre las formas ordinaria y simétrica.

Ejemplo: Cambia la ecuación $3x-2y=6$ *a la forma simétrica.*

- *Revisión en Grupo:*

Discusión en Clase:
Revisen juntos los ejercicios, destacando los pasos esenciales para cambiar entre formas.

Pregunta: ¿Cuáles son las diferencias clave en la representación de la pendiente y las constantes en cada forma?

Actividad 3: Aplicación en el Proyecto:

- *Análisis de Rutas en el Proyecto:*

Ejercicio Práctico:
Aplica estos conceptos al proyecto, identificando cómo las ecuaciones en diferentes formas pueden representar las rutas ¿Cómo describirías la ecuación de la recta en su forma ordinaria y su forma simétrica que representa la ruta entre dos lugares de interés en tu proyecto?

Sesión 8: Exploración Avanzada de Pendientes en Desmos (Parte 1)

Objetivo: Utilizar eficientemente la plataforma Desmos para visualizar y comprender la relación entre las ecuaciones matemáticas de las rutas y su representación gráfica.

Actividad 1: Exploración Visual en Desmos:

- *Captura y Análisis de Imágenes:*
  *Ejercicio Práctico: Inicia tomando fotografías de los caminos seleccionados en tu proyecto. Asegúrate de capturar diferentes tramos y características significativas de cada ruta. (**al menos 5)** Estas imágenes serán la base para nuestra exploración en Desmos.*
  Ejemplo: Utiliza tu teléfono o capturas de pantalla de Google Maps para obtener imágenes detalladas.

- *Ingreso a Desmos y Carga de Imágenes:*
  Ejercicio Práctico: Accede a la plataforma Desmos y carga las imágenes previamente capturadas. Observa la topografía de los caminos, enfocándote en las variaciones en altura y distancia horizontal.
  Ejemplo: Utiliza Desmos para identificar visualmente cómo cambia la pendiente en diferentes partes de cada camino. Toma capturas de pantalla.

Actividad 2: Identificación de Ecuaciones en Desmos (Parte 1):

- *Análisis de Imágenes en Desmos:*
  Ejercicio Práctico: Utiliza las herramientas de Desmos para ajustar la escala y comparar visualmente la inclinación de dos caminos diferentes. Observa cómo la pendiente se manifiesta en la representación gráfica y compara las características clave de cada uno.
  Pregunta de Reflexión: ¿Qué diferencias notaste al comparar la inclinación de dos caminos diferentes en Desmos?
  Ejemplo: Ajusta la escala en Desmos para comparar la inclinación de dos caminos diferentes y resalta las diferencias.

- *Exploración de Herramientas en Desmos:*
  Ejercicio Práctico: Experimenta con las herramientas disponibles en Desmos para resaltar características significativas en los caminos. Puedes utilizar líneas para mostrar la dirección de la pendiente en diferentes segmentos y etiquetas para destacar puntos clave. Toma captura de pantalla.
  Ejemplo: Utiliza Desmos para explorar detalladamente cómo cambia la inclinación en diferentes secciones de las rutas.
  Reflexión: ¿De qué manera el uso de Desmos facilitó tu comprensión sobre la inclinación de los caminos? Describe específicamente qué herramientas o características de Desmos te resultaron más útiles para visualizar y comprender la variación de la pendiente en las rutas seleccionadas.

Sesión 9: Exploración Avanzada de Pendientes en Desmos (Parte 2)

Objetivo:
Aplicar las herramientas de Desmos para obtener ecuaciones de rectas pendientes en diferentes formas.

Actividad 1: Identificación de Ecuaciones en Desmos (Parte 2):

- *Análisis de Puntos y Pendientes:*

Ejercicio Práctico:
Utiliza Desmos para identificar los puntos clave en los caminos y deducir las ecuaciones de rectas pendientes.

Ejemplo: ¿Cómo se pueden expresar las ecuaciones de las rectas que representan los caminos?

- *Práctica de Escritura de Ecuaciones:*

Ejercicio Práctico:
Escribe las ecuaciones de las rectas en forma $y = mx + b$*, punto-pendiente, punto-punto, forma ordinaria y simétrica.*

Ejemplo: Escribe la ecuación de la recta en sus diferentes formas de las imágenes cargadas,

Realízalo para al menos 5 imágenes de diferentes caminos seleccionados de las rutas de tu proyecto. Toma capturas de pantalla
Actividad 2: Preguntas de Reflexión:

- *Reflexión sobre la Representación Visual:*

Ejercicio de Pensamiento:
Reflexiona sobre cómo la representación en Desmos contribuye a una comprensión más profunda de la topografía de la comunidad.

Pregunta: ¿Cómo Desmos te ha ayudado a entender mejor la relación entre las ecuaciones matemáticas y la topografía?

Anexo II Manual para evaluación cualitativa de expertos.

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Manual para Expertos en la Evaluación de Instrumentos de Recopilación de Datos

Título del Proyecto de Tesis: Propuesta de diseño de secuencia de aprendizaje para la compresión del concepto de pendiente apoyado por Desmos en estudiantes de nivel Medio Superior

Investigador: Eduardo Cruz Márquez

Director de tesis: Mtra. Ruth García Solano

Respetado juez, se le solicita su amable atención y participación para la evaluación del siguiente instrumento:

"Hoja de aprendizaje guiado al estudiante para la comprensión del concepto de pendiente "

La evaluación de los instrumentos es de gran relevancia para lograr que sean válidos para su posterior aplicación y que los resultados obtenidos a partir de éstos sean utilizados eficientemente. Agradecemos su valiosa colaboración para su evaluación.

Por favor escriba sus datos en la siguiente ficha según corresponda.

Datos del juez	
Nombres y Apellidos:	
Formación académica:	
Cargo actual:	
Áreas de experiencia profesional	
Institución:	

Objetivos del Manual:

Este manual tiene como objetivo guiar a los expertos en la evaluación del instrumento de recopilación de datos utilizado en el proyecto de tesis, asegurando una evaluación precisa y consistente.

Instrucciones para los Expertos:

- Lea cuidadosamente el instrumento de recopilación de datos proporcionado.
- Evalúe cada ítem del instrumento según los criterios establecidos.
- Utilice el cuadro de doble entrada proporcionado para registrar sus evaluaciones.
- Consulte el cuadro de categorías e indicadores de evaluación para guiar sus evaluaciones.
- Si es necesario, consulte la sección del marco teórico para obtener más información sobre el contexto y la fundamentación del instrumento.
- Complete todas las secciones del manual y devuélvalo según las instrucciones proporcionadas.

Instrumento de Recopilación de Datos:

"Explorando Nuestra Comunidad a Través de sus Caminos: Una Perspectiva Matemática"

Nombre del Estudiante: ______________________ *Fecha:* ______________

Introducción: *En nuestra comunidad, nos embarcamos en una emocionante aventura de descubrimiento y aprendizaje sobre los caminos que nos rodean. Este proyecto tiene como objetivo crear un recurso informativo que no solo destaque los caminos locales, sino que también proporcione información valiosa sobre sus pendientes y cómo estas afectan a las personas y vehículos que los utilizan. Nos convertiremos en exploradores de la topografía local y en investigadores de las implicaciones prácticas de las pendientes en la vida diaria, desde una perspectiva matemática.*

Escenario: *Imagina que somos un equipo de investigadores encargados de crear un recurso informativo detallado sobre los caminos de nuestra comunidad desde una perspectiva matemática. Este recurso contendrá fotografías de los diferentes caminos junto con información sobre sus pendientes y cómo estas afectan a las personas y vehículos que los recorren. Nos centraremos en aspectos como el desgaste físico experimentado por las personas al caminar cuesta arriba o cuesta abajo, el consumo de combustible de los vehículos al enfrentarse a diferentes pendientes, y cómo estos fenómenos pueden ser analizados y comprendidos utilizando conceptos matemáticos como la trigonometría y la geometría.*

Justificación: *La importancia de comprender las pendientes de los caminos en nuestra comunidad desde una perspectiva matemática se refleja en varios aspectos:*

- *Desgaste Físico: Es importante conocer qué caminos son más exigentes en términos de energía y esfuerzo físico para planificar actividades al aire libre y garantizar una experiencia segura y agradable para los residentes y visitantes. Al caminar por caminos con pendientes pronunciadas, las personas experimentan un mayor desgaste físico que puede ser cuantificado y analizado utilizando conceptos matemáticos como el trabajo y la energía. La trigonometría nos permite calcular la pendiente de un camino y predecir el esfuerzo requerido para recorrerlo, proporcionando así una comprensión más profunda de los desafíos físicos involucrados.*
- *Consumo de Combustible: Los conductores de vehículos también se ven afectados por las pendientes de los caminos, y este fenómeno puede ser analizado utilizando conceptos matemáticos como la cinemática y la mecánica de fluidos. La geometría nos permite calcular la inclinación de los caminos y predecir el impacto en el consumo de combustible, lo que ayuda a los conductores a tomar decisiones más informadas sobre rutas y a optimizar la eficiencia de sus viajes. Las subidas pronunciadas pueden aumentar el consumo de combustible, lo que no solo afecta a los conductores en términos de costos, sino que también tiene implicaciones ambientales. Proporcionar información sobre las pendientes de los caminos ayuda a los conductores a planificar rutas más eficientes y reducir el impacto ambiental de sus viajes.*

- *Seguridad Vial: Las pendientes pronunciadas pueden representar desafíos adicionales para la seguridad vial, especialmente en condiciones climáticas adversas El análisis de datos sobre accidentes de tráfico y condiciones de la carretera nos permite identificar patrones y tendencias relacionadas con las pendientes, lo que contribuye a mejorar la seguridad para todos los usuarios de la vía. Conocer la inclinación de los caminos permite a los conductores y peatones tomar precauciones adicionales cuando sea necesario, mejorando así la seguridad para todos los usuarios de la vía.*

Objetivos de Aprendizaje:

Concepto de Pendiente: Comprender y aplicar el concepto de pendiente en un contexto real.

Habilidades Matemáticas: Aplicar las fórmulas matemáticas para calcular la pendiente y representarla gráficamente.

Sesión 1 Introducción

Objetivo:

- *Entender cómo la pendiente influye en nuestras experiencias al explorar lugares y el cómo puede afectar el cansancio de una persona o el consumo de combustible en el rendimiento de los vehículos.*

Actividades
1: Análisis de Imágenes
Presentación Visual:
Observa las imágenes A y B proporcionadas en la parte de abajo que muestran lugares con diferentes pendientes. Piensa en cómo la pendiente puede influir en tu experiencia al visitar diferentes lugares.

Discusión en Grupo:
Comparte tus observaciones sobre cada imagen.
¿Cómo crees que la pendiente afecta al esfuerzo humano y al rendimiento del automóvil en cada una de las imágenes?
Explica tus respuestas

2: Conclusiones
Reflexión:
Qué conclusiones puedes sacar de las imágenes en relación con la pendiente.
¿Cómo puedes definir con tus propias palabras el termino de pendiente?

3: Sitios de interés
Piensa e investiga sobre al menos 3 caminos de interés en tu comunidad o ciudad que podrían destacarse en nuestro proyecto.

- *Captura y Análisis de Imágenes:*

  Ejercicio Práctico: Inicia tomando fotografías de los caminos seleccionados en tu proyecto. Asegúrate de capturar diferentes tramos y características significativas de cada ruta. Al menos tres rutas diferentes (Un camino inclinado hacia la izquierda, otro inclinado hacia la derecha y uno totalmente recto) Estas imágenes serán la base para nuestra exploración en Desmos.
  Ejemplo: Utiliza tu teléfono para tomar fotografías o capturas de pantalla de Google Maps para obtener imágenes detalladas.

Imagen A

Imagen B

Sesión 2: Exploración de Pendientes en Desmos (Parte 1)

Objetivos:
Utilizar eficientemente la plataforma Desmos para visualizar y comprender la relación entre las ecuaciones matemáticas de las rutas y su representación gráfica.

Actividad 1: Exploración Visual en Desmos:

- *Análisis de Imágenes:*

- *Ingreso a Desmos y Carga de Imágenes:*

  Ejercicio Práctico: Accede a la plataforma Desmos y carga las imágenes previamente capturadas. Observa la topografía de los caminos, enfocándote en las variaciones en altura y distancia horizontal.

  Ejemplo: Utiliza Desmos para identificar visualmente cómo cambia la pendiente en diferentes partes de cada camino. Toma capturas de pantalla.

  Ejemplos:

  Imagen C

Imagen D

Actividad 2: Identificación de Ecuaciones en Desmos (Parte 1):

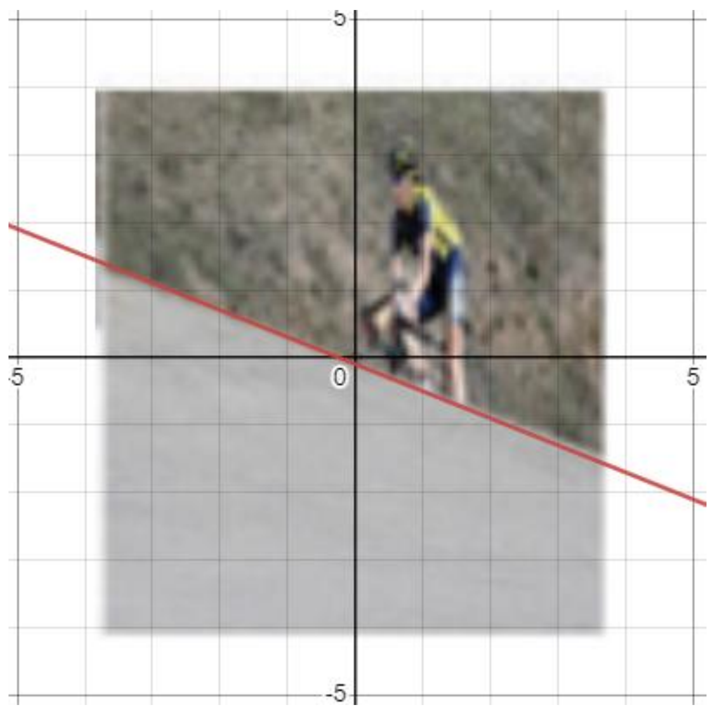
- *Análisis de Imágenes en Desmos:*

Ejercicio Práctico: Utiliza las herramientas de Desmos para ajustar la escala y comparar visualmente la inclinación de dos caminos diferentes. Observa cómo la pendiente se manifiesta en la representación gráfica y compara las características clave de cada uno.
Pregunta de Reflexión: ¿Qué diferencias notaste al comparar la inclinación de dos caminos diferentes en Desmos?
Ejemplo: Ajusta la escala en Desmos para comparar la inclinación de dos caminos diferentes y resalta las diferencias.

- *Exploración de Herramientas en Desmos:*

Ejercicio Práctico: Experimenta con las herramientas disponibles en Desmos para resaltar características significativas en los caminos. Puedes utilizar líneas para mostrar la dirección de la pendiente en diferentes segmentos y etiquetas para destacar puntos clave. Toma captura de pantalla.

Ejemplo:



Realiza lo mismo para el camino con inclinación a la derecha y el camino recto.

Ejemplo: Utiliza Desmos para explorar detalladamente cómo cambia la inclinación en diferentes secciones de las rutas.
Reflexión: ¿De qué manera el uso de Desmos facilitó tu comprensión sobre la inclinación de los caminos? Describe específicamente qué herramientas o características de Desmoste resultaron más útiles para visualizar y comprender la variación de la pendiente en las rutas seleccionadas.

Sesión 3: Exploración Práctica de la Pendiente en Lugares de Interés

Objetivo:

- *Comprender cómo la pendiente de los caminos afecta la experiencia de quienes los utilizan.*
- *Aplicar conceptos matemáticos para medir y representar visualmente la pendiente de los caminos.*
- *Reflexionar sobre la importancia de la pendiente en la topografía local y su impacto en la vida diaria.*

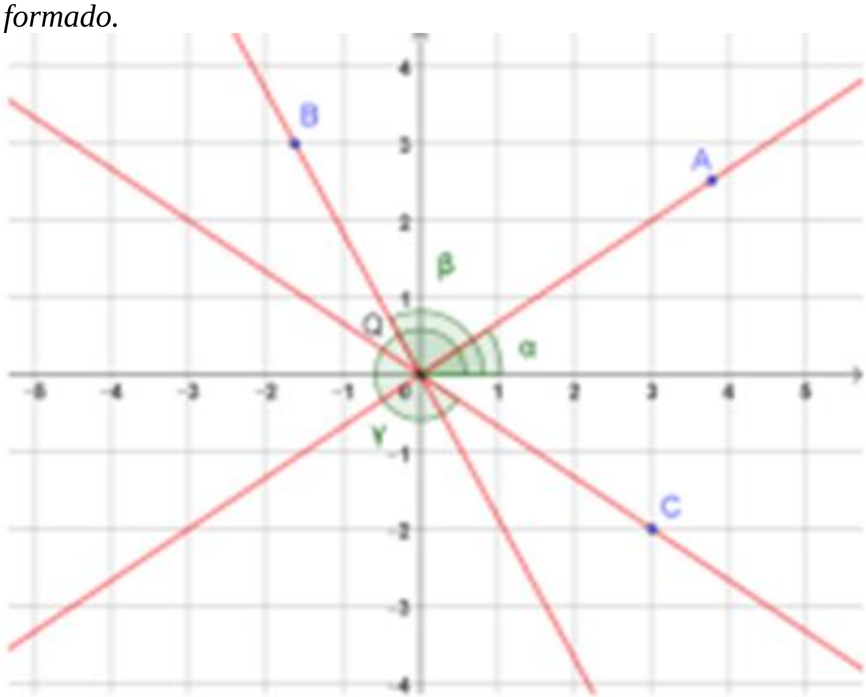
Actividades:

Reflexión sobre la Pendiente:

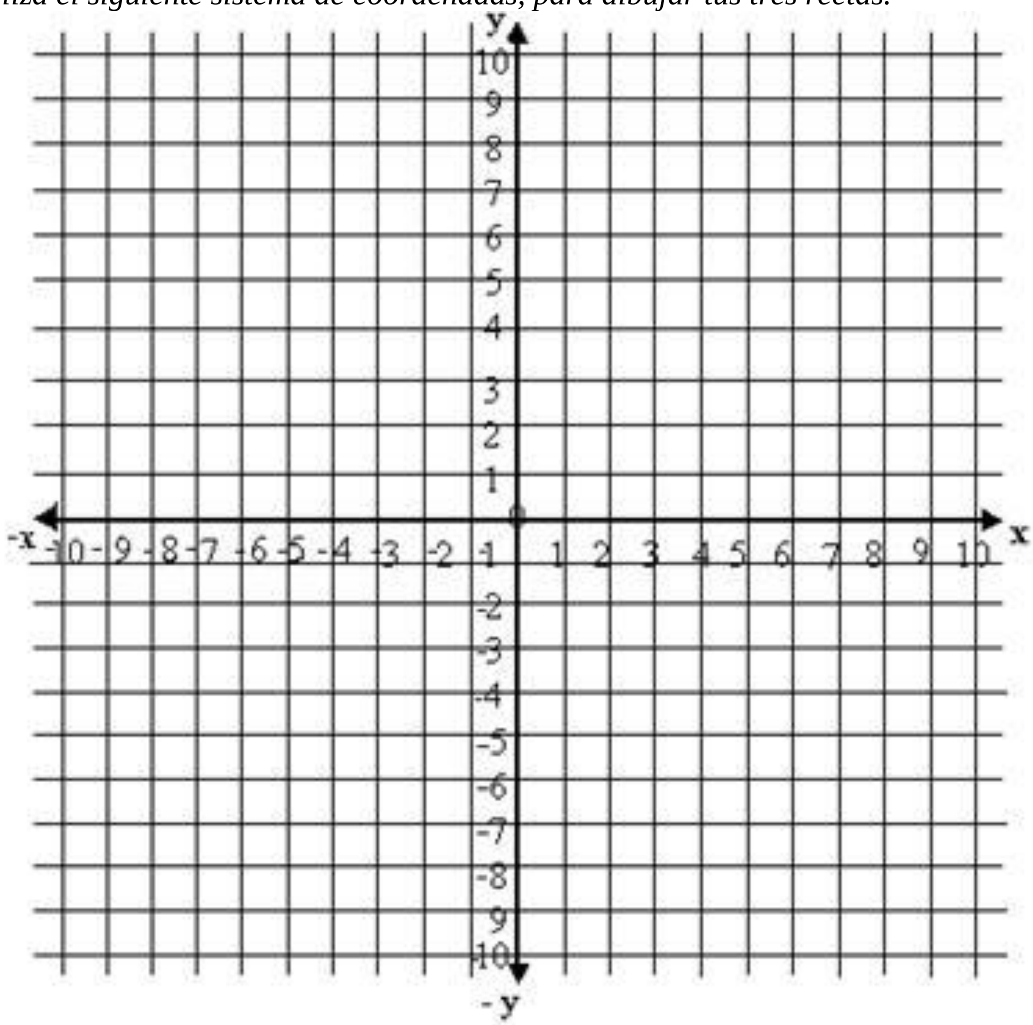
Reflexiona sobre cómo crees que la pendiente de los caminos seleccionados influirá en la experiencia de quienes los visiten. ¿Qué dificultades podrían enfrentar las personas al caminar o conducir en caminos con pendientes pronunciadas?

Representación Gráfica:

- *Utiliza el plano cartesiano proporcionado para representar los caminos seleccionados en la actividad anterior. Cada camino será representado por una línea inclinada en el plano de coordenadas.*
- *Traza una línea inclinada de referencia para cada uno de los tres caminos seleccionados. Asegúrate de que las líneas reflejen con precisión la pendiente de cada camino.*
- *Estima visualmente el ángulo de inclinación de cada camino. Observa la inclinación de las líneas y trata de determinar el ángulo aproximado que forman con respecto al eje horizontal (eje x).*
- *Utiliza un transportador para medir con precisión el ángulo de inclinación de cada camino con respecto al "eje x". Coloca el transportador sobre la línea inclinada y lee el ángulo formado.*



Utiliza el siguiente sistema de coordenadas, para dibujar tus tres rectas.



Ángulo de inclinación estimado:
Ángulo de inclinación medido:

Relación entre Ángulo e Inclinación:
Describe cómo se relaciona el ángulo medido con la inclinación matemática de los caminos. ¿Cómo se relaciona la inclinación medida (ángulo) con la pendiente matemática?

Sesión 4 Distancia con Deducción de la Fórmula,
Ecuación de la Recta $y = mx + b$ y Concepto de Punto Pendiente

Objetivos:

- *Descubrir por ti mismo cómo se formula la pendiente.*
- *Calcular la distancia entre dos puntos por los que pasa la recta que representa a una de las rutas seleccionadas.*
- *Comprender la relación entre la pendiente y los cambios en la altura y la distancia horizontal.*
- *Introducir las variables Δy y Δx y relacionarlas con la pendiente.*
- *Comprender la importancia de la fórmula de la pendiente para representar visualmente la topografía de rutas entre lugares de interés en la comunidad.*
- *Entender la pendiente a través de la forma $y = mx + b$, centrándonos en analizar la constante 'b'*

Actividades:

Actividad 1

- *Traza rutas entre puntos establecidos sobre las rectas generadas a partir de las rutas de interés seleccionadas, creando representaciones visuales detalladas en papel que muestren las variaciones de altura y distancia horizontal en cada ruta.*
- *Crea representaciones visuales detalladas utilizando gráficos en papel para mostrar las variaciones de altura y distancia horizontal en cada ruta.*

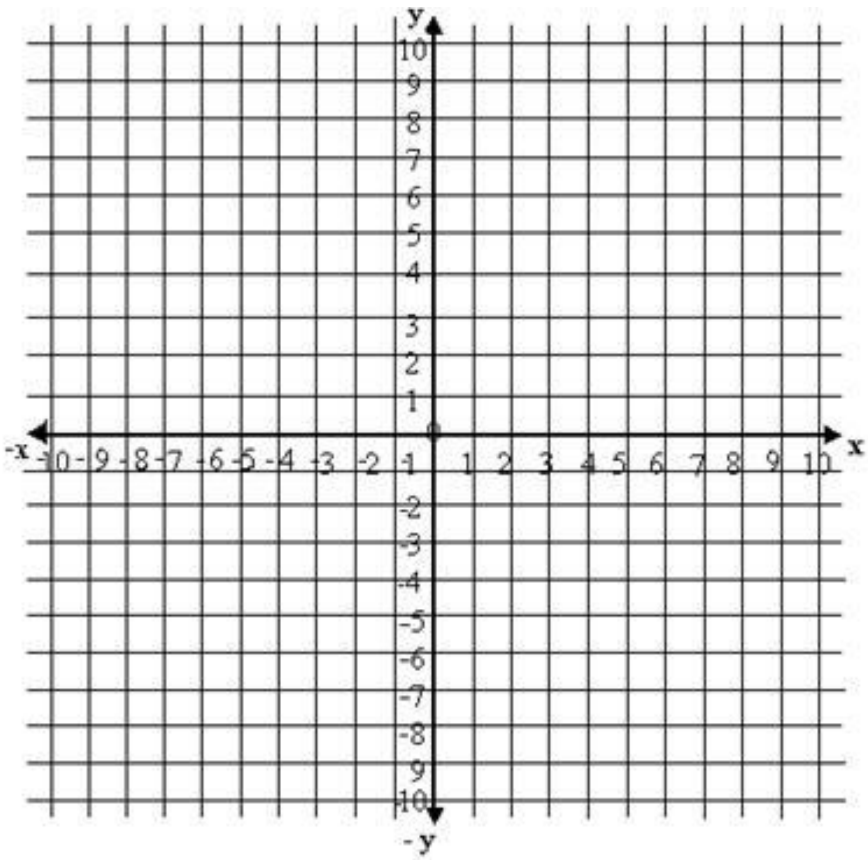
¿Hay alguna relación evidente entre los cambios en la altura y la distancia horizontal en las rutas trazadas?

Actividad 2
Selecciona una de las rutas de Interés:
Selecciona dos puntos por lo que pase la recta que representa esa ruta y registra sus coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

Calcula la Distancia:
Utiliza la fórmula de distancia entre dos puntos en un plano.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Dibuja la Ruta y Observa la Pendiente:
Gráfica la línea que representa a la ruta seleccionada en el plano cartesiano proporcionado que se encuentra en la parte de abajo.
Observa visualmente la inclinación de la ruta.



Introduce la Variable Δy y Δx:
Define Δy como la diferencia entre las coordenadas y de los dos puntos ($\Delta y = y2 - y1$*).*
Define Δx como la diferencia entre las coordenadas x de los dos puntos ($\Delta x = x2 - x1$*).*

Relación entre Pendiente y Δy/Δx:
*Observa cómo la pendiente de la ruta (*m*) se relaciona con Δy y Δx.*

*Puedes expresar la pendiente (m) en términos de Δy y Δx como la razón de cambio vertical (*Δy*) a la razón de cambio horizontal (*Δx*)*
¿Cuál sería la fórmula para calcular la pendiente?

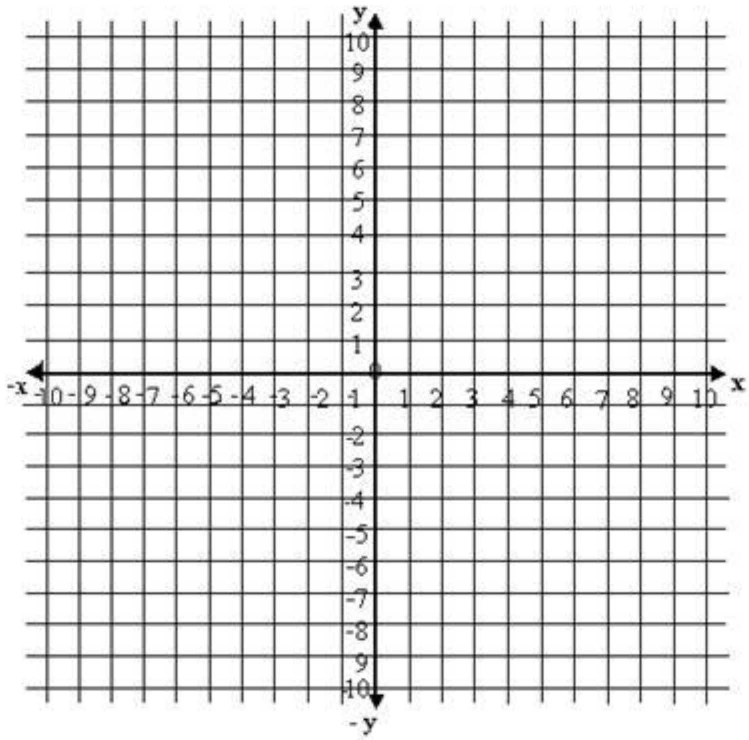
Si θ representa el ángulo de inclinación, entonces m=tan(θ).
¿Cómo la pendiente (m) se relaciona con la tangente del ángulo de inclinación, tan(θ)?

Aplica los conceptos aprendidos a un ejemplo específico, como calcular la pendiente entre dos puntos dados.
Ejemplo: Si tienes dos puntos A (3, 4) y B (7, 10), ¿cómo calcularías la pendiente?

- *Interpretación Visual:*

Ejercicio Matemático: Gráfica líneas con diferente pendiente en un plano cartesiano. Una con pendiente positiva y otra con pendiente negativa

¿En qué se diferencian visualmente?



Actividad 3: Introducción a la Ecuación de la Recta y Análisis de 'b':

- *Exploración de la Ecuación General:*

Relacionaremos la fórmula de la pendiente (m) con la ecuación general de la recta $y = mx + b$.

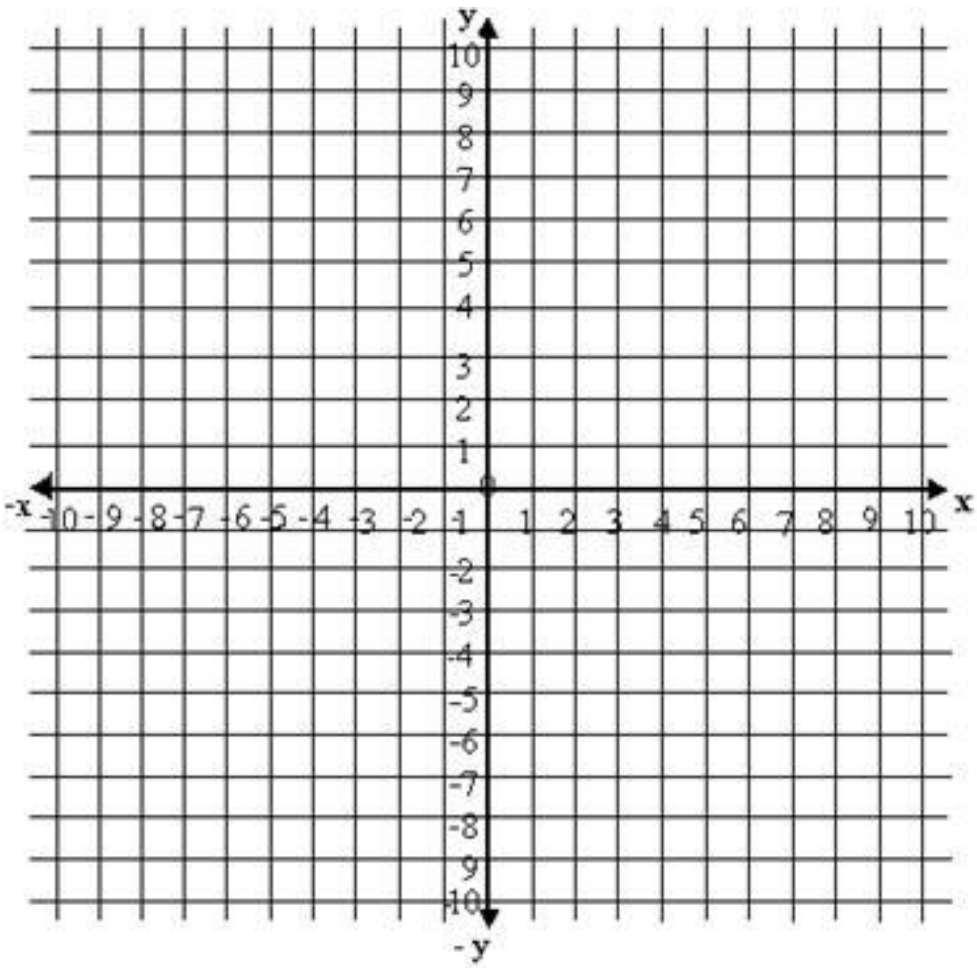
Ejemplo práctico de cómo escribir la ecuación en la forma $y = mx + b$.

- *Análisis de 'b' a través de Gráficas:*

Ejercicio Práctico:
Tomemos la ecuación $y = 2x + b$ *como ejemplo. Grafiquemos esta recta en un plano cartesiano utilizando tres valores distintos de 'b': b=1, b=3, b=−2, b=0*

- *Ejemplo Visual:*

Proporcionamos un gráfico que muestra las cuatro rectas con diferentes valores de 'b'. Etiquetamos claramente cada línea en el gráfico para visualizar las variaciones.



- *Preguntas de Reflexión:*

Para cada ejemplo ¿Cuál es el valor de la pendiente y de la ordenada al origen (corte con el eje "y")?

¿Qué diferencias notaste en la posición de las rectas al cambiar el valor de 'b'? Trázalas

¿Cómo se comportaría la recta cuando b=0, b=-2?

Sesión 5: Explorando Pendientes y la Ecuación de la Recta en sus formas Punto-pendiente, punto-punto, Ordinaria y Simétrica

Objetivos:

- *Comprender cómo la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta son esenciales para representar visualmente la topografía de rutas entre lugares de interés en tu comunidad.*
- *Entender la pendiente a través de la forma punto-punto de la ecuación de la recta*
- *Aplicar los conceptos de pendiente en las formas ordinaria (*Ax+By=C*) y simétrica (*$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$*), así como transformar ecuaciones entre estas formas.*

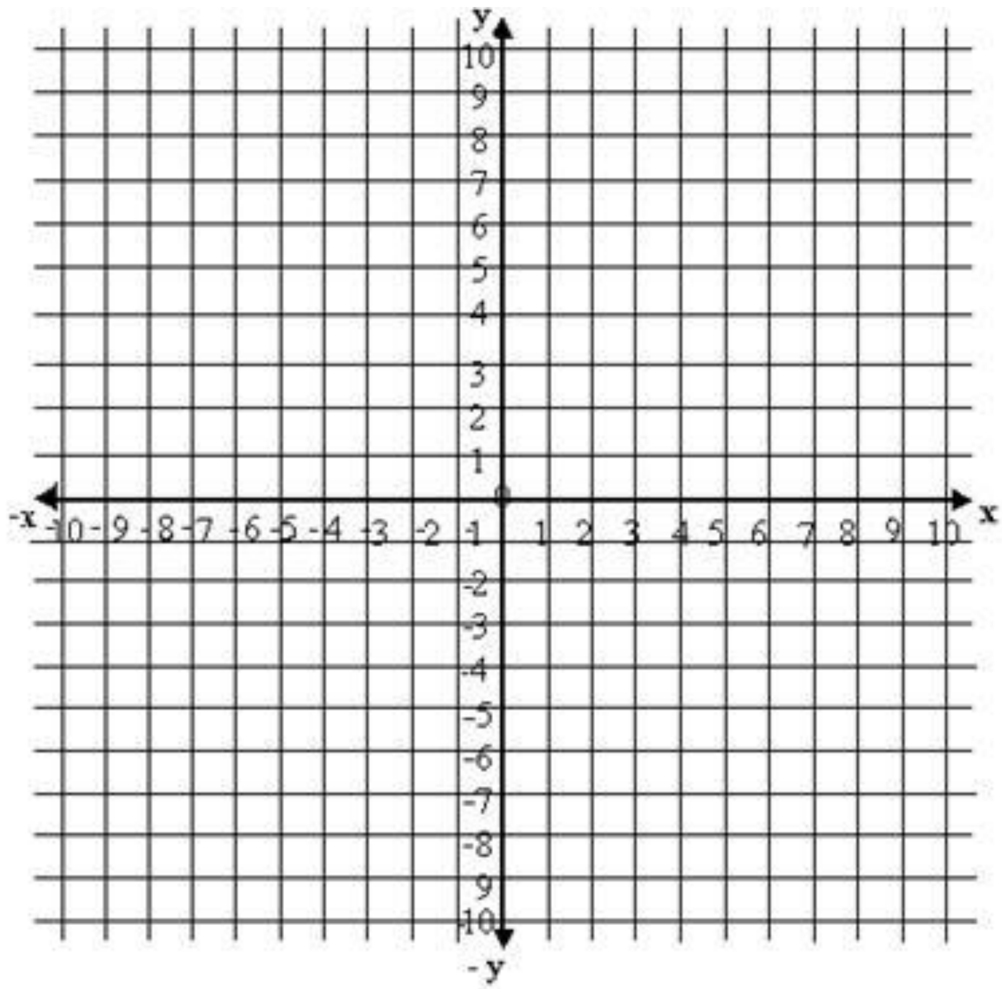
Actividad 1: Forma punto- pendiente
Descubrimiento Guiado:
Ejercicio Matemático: Analiza la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ejemplo: Utiliza la forma punto-pendiente para escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto C (2, 5) con pendiente -3.

Aplicación Práctica:

a) Selecciona dos puntos en una de las rectas que represente alguna de las rutas seleccionadas, registra sus coordenadas y analiza visualmente la ruta entre ellos en el plano cartesiano. Represéntala en el plano cartesiano de abajo ¿Cuál sería la ecuación punto-pendiente de esta recta que pasa por los dos puntos seleccionados?



Actividad 2: Forma punto- punto

Actividad: Ejercicios Prácticos y Reflexión Personal

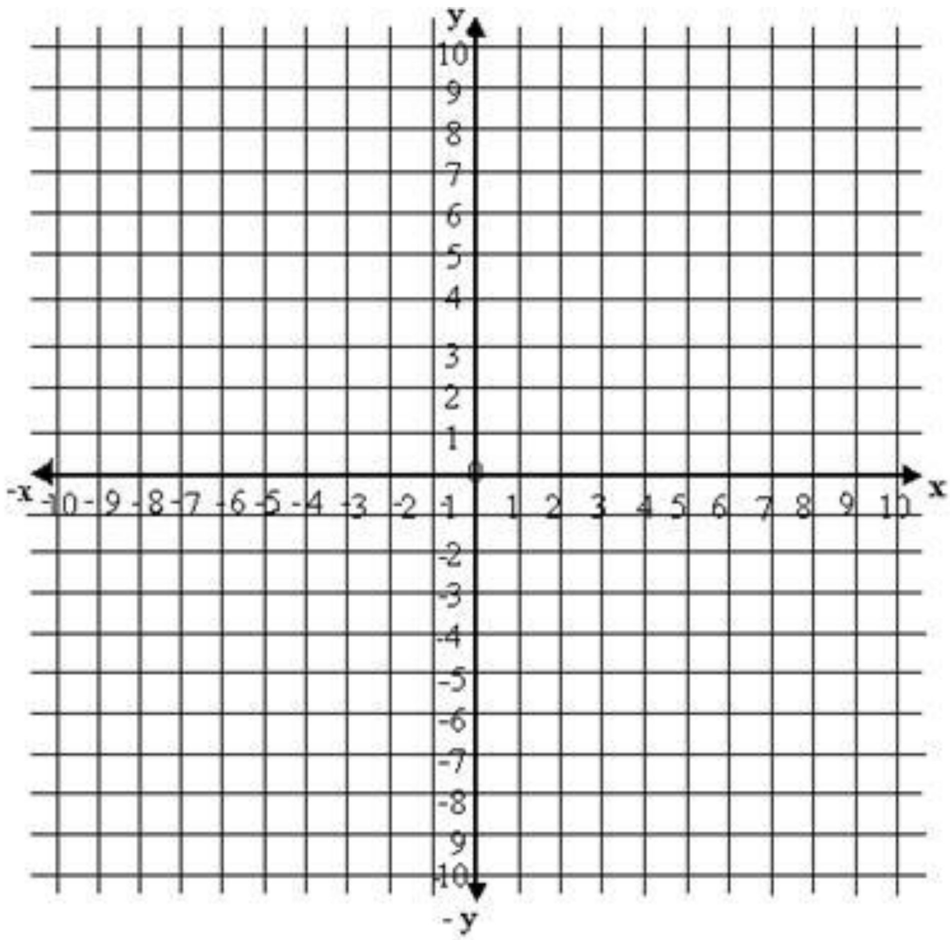
- *Aplicación Práctica:*

Ejemplo: Dados los puntos A (2, 4) y B (6, 8). Escribe la ecuación de la recta en forma punto-punto:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

- *Aplicación Práctica:*

Selecciona una de las rutas que trazadas en tu proyecto. ¿Cuál es la ecuación de la recta en forma punto-punto de esa ruta, luego transformarla a la forma $y = mx + b$? Trázala en el plano Cartesiano



Actividad 3: ***la Pendiente en Formas General y Simétrica***

Actividad 1: Introducción a la Pendiente en Formas Ordinaria y Simétrica:

- *Presentación Teórica:*

Explicación:
Aprenderás sobre las formas ordinaria y simétrica de la ecuación de la recta.

Ejemplo: La forma ordinaria tiene los parámetros A, B*, C, y la simétrica tiene* a, b, x *e* y.

Transformación entre Formas:

- *Práctica Individual:*

Transforma ecuaciones entre las formas:

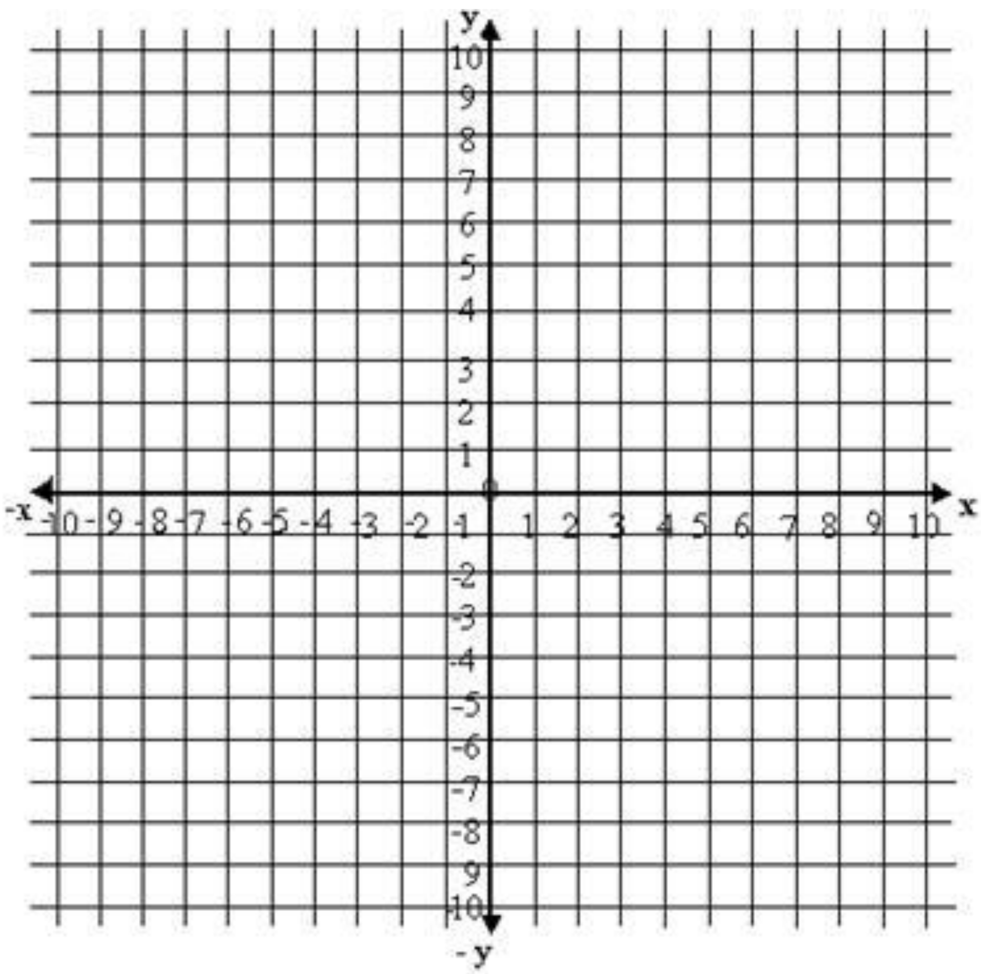
General:
$A_x + B_y = C$

y simétrica:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Ejemplo: Cambia la ecuación en su forma general $3x - 2y = 6$ *a las formas* $y = mx + b$ *y después simétrica. Trázala en el plano Cartesiano*

Pregunta: ¿Qué relación existe de los parámetros ya sea A y B en la forma general (Ax + By = C) o a y b en la forma simétrica (x/a + y/b = 1), con la pendiente de la recta?



Sesión 9: Exploración Avanzada de Pendientes en Desmos (Parte 2)

Objetivo:

- *Aplicar las herramientas de Desmos para obtener ecuaciones de rectas pendientes en diferentes formas.*

Actividad 1: Identificación de Ecuaciones en Desmos (Parte 2):

- *Análisis de Puntos y Pendientes:*

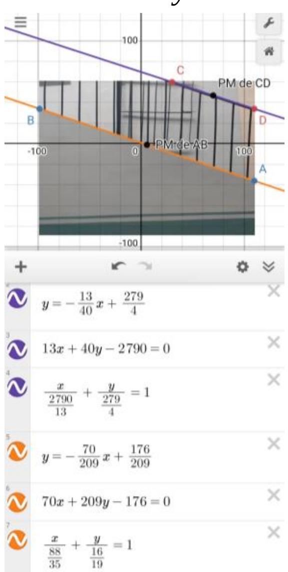
- *Práctica de Escritura de Ecuaciones:*

Ejercicio Práctico:
Utiliza Desmos para identificar los puntos clave en los caminos y deducir las ecuaciones de rectas pendientes. Escribe las ecuaciones de las rectas en forma $y = mx + b$, punto-pendiente, punto-punto, forma ordinaria y simétrica.

Ejemplo: Escribe la ecuación de la recta en sus diferentes formas de las imágenes cargadas, Toma capturas de pantalla

Preguntas de Reflexión:
¿Cómo se pueden expresar las ecuaciones de las rectas que representan los caminos?

Genera una imagen con los caminos y las ecuaciones como en el siguiente ejemplo:



Ejercicio de Pensamiento:
Reflexiona sobre cómo la representación en Desmos contribuye a una comprensión más profunda de la topografía de la comunidad.

Pregunta: ¿Cómo Desmos te ha ayudado a entender mejor la relación entre las ecuaciones matemáticas y la topografía?

Cuadro de Doble Entrada - Evaluación de Ítems:

Preguntas	¿Qué evalúa?
Sesión 1: *1:* *¿Cómo crees que la pendiente afecta al esfuerzo humano y al rendimiento del automóvil en cada una de las imágenes?* *2:* *¿Cómo puedes definir con tus propias palabras el termino de pendiente?*	*1: Esta pregunta fomentan la reflexión individual y la expresión de opiniones, conectando las experiencias personales con el concepto de pendiente. Contribuye al principio de actividad mental.* *2:* *Esta pregunta estimula la reflexión sobre el concepto de la pendiente en situaciones específicas. Contribuye al principio de realidad y entrelazamiento al conectar conceptos matemáticos con experiencias prácticas.*
Sesión 2: *Piensa e investiga sobre al menos 3 caminos de interés en tu comunidad o ciudad que podrían destacarse en nuestro proyecto.* • *Captura y Análisis de Imágenes:* *Ejercicio Práctico: Inicia tomando fotografías de los caminos seleccionados en tu proyecto.* *Asegúrate de capturar diferentes tramos y características significativas de cada ruta. Al menos tres rutas diferentes (Un camino inclinado hacia la izquierda, otro inclinado hacia la derecha y uno totalmente recto) Estas imágenes serán la base para nuestra exploración en Desmos.* *Ejemplo: Utiliza tu teléfono para tomar fotografías o capturas de pantalla de Google Maps para obtener imágenes detalladas.* • *Ingreso a Desmos y Carga de Imágenes:* *Ejercicio Práctico: Accede a la plataforma Desmos y carga las imágenes previamente capturadas.*	1: *Este ejercicio se alinea con el principio de Realidad al utilizar imágenes reales de los caminos, conectando la actividad con situaciones auténticas. Además, sigue el principio de Nivel, ya que los estudiantes aplican sus conocimientos matemáticos a un contexto realista.* *Conecta con el principio de Actividad al requerir que los estudiantes reflexionen sobre su experiencia comparando inclinaciones. Además, se relaciona con el principio de Realidad al alentar a los estudiantes a aplicar su comprensión a situaciones específicas, con un enfoque en la comparación entre dos caminos diferentes en Desmos.* *Este ejercicio, alineado con el principio de Realidad, usa imágenes reales para conectar con situaciones auténticas. Requiere que los estudiantes reflexionen*

Ejemplo: Utiliza Desmos para identificar visualmente cómo cambia la pendiente en diferentes partes de cada camino. Toma capturas de pantalla. • *Análisis de Imágenes en Desmos:* *Ejercicio Práctico: Utiliza las herramientas de Desmos para ajustar la escala y comparar visualmente la inclinación de dos caminos diferentes. Observa cómo la pendiente se manifiesta en la representación gráfica y compara las características clave de cada uno.* *Pregunta de Reflexión:* *1:* *¿Qué diferencias notaste al comparar la inclinación de dos caminos diferentes en Desmos* *Ejemplo: Utiliza Desmos para explorar detalladamente cómo cambia la inclinación en diferentes secciones de las rutas.* *Reflexión:* *2:* *¿De qué manera el uso de Desmos facilitó tu comprensión sobre la inclinación de los caminos? Describe específicamente qué herramientas o características de Desmoste resultaron más útiles para visualizar y comprender la variación de la pendiente en las rutas seleccionadas.*	*sobre su experiencia, comparando inclinaciones, lo que promueve una comprensión profunda. Además, al aplicar su comprensión a situaciones específicas en Desmos, refuerza aún más la conexión con la realidad* *Principios Aplicables de la RME: Nivel, Actividad, Realidad* 2: *Permite a los estudiantes experimentar con las herramientas disponibles en Desmos para resaltar características significativas en los caminos. Pueden explorar detalladamente cómo cambia la inclinación en diferentes secciones de las rutas, fortaleciendo aún más la conexión entre la teoría y la realidad.* *Orienta a los estudiantes hacia el principio de Orientación al pedirles que describan cómo el uso de Desmos facilitó su comprensión. También conecta con el principio de Realidad al fomentar la reflexión sobre la utilidad de la tecnología en la comprensión de situaciones reales.* *Principios Aplicables: Entrelazamiento Orientación, Realidad*
Sesión 3: *Reflexiona sobre cómo crees que la pendiente de los caminos seleccionados influirá en la experiencia de quienes los visiten.* *1:* *¿Qué dificultades podrían enfrentar las personas al caminar o conducir en caminos con pendientes pronunciadas?*	1: *La pregunta busca conectar la teoría matemática con la realidad, aplicando el principio de entrelazamiento al relacionar el concepto abstracto de pendiente con situaciones prácticas.* *Principios Aplicables: Realidad, Entrelazamiento.* *2: La pregunta relaciona la inclinación medida con la pendiente matemática,*

Representación Gráfica: • *Utiliza el plano cartesiano proporcionado para representar los caminos seleccionados en la actividad anterior. Cada camino será representado por una línea inclinada en el plano de coordenadas.* • *Traza una línea inclinada de referencia para cada uno de los tres caminos seleccionados. Asegúrate de que las líneas reflejen con precisión la pendiente de cada camino.* • *Estima visualmente el ángulo de inclinación de cada camino. Observa la inclinación de las líneas y trata de determinar el ángulo aproximado que forman con respecto al eje horizontal (eje x).* • *Utiliza un transportador para medir con precisión el ángulo de inclinación de cada camino con respecto al "eje x". Coloca el transportador sobre la línea inclinada y lee el ángulo formado.* *Relación entre Ángulo e Inclinación: Describe cómo se relaciona el ángulo medido con la inclinación matemática de los caminos.* *2:* *¿Cómo se relaciona la inclinación medida (ángulo) con la pendiente matemática?*	*fomentando la construcción activa del conocimiento matemático.* *La relación entre la inclinación y la pendiente orienta a los estudiantes hacia la aplicación práctica de la pendiente en su comunidad.* *Principios Aplicables: Interactividad, Orientación.*
Sesión 4: • *Traza rutas entre puntos establecidos sobre las rectas generadas a partir de las rutas de interés seleccionadas, creando representaciones visuales detalladas en papel que muestren las variaciones de altura y distancia horizontal en cada ruta.*	*1: La pregunta busca identificar relaciones entre los cambios en la altura y la distancia horizontal en las rutas, lo que enfatiza la conexión con la realidad de la experiencia de desplazamiento.* *Principios Aplicables: Realidad* 2: *La deducción de la fórmula de pendiente a través de la razón de cambio vertical a*

• *Crea representaciones visuales detalladas utilizando gráficos en papel para mostrar las variaciones de altura y distancia horizontal en cada ruta.* *1: ¿Hay alguna relación evidente entre los cambios en la altura y la distancia horizontal en las rutas trazadas?* *Define Δy como la diferencia entre las coordenadas y de los dos puntos* ($\Delta y = y2 - y1$). *Define Δx como la diferencia entre las coordenadas x de los dos puntos* ($\Delta x = x2 - x1$). *Relación entre Pendiente y Δy/Δx:* *Observa cómo la pendiente de la ruta* (m) *se relaciona con Δy y Δx.* *Puedes expresar la pendiente (m) en términos de Δy y Δx como la razón de cambio vertical* (Δy) *a la razón de cambio horizontal* (Δx) *2:* *¿Cuál sería la fórmula para calcular la pendiente?* *Si θ representa el ángulo de inclinación, entonces m=tan(θ).* *3:* *¿Cómo la pendiente (m) se relaciona con la tangente del ángulo de inclinación, tan(θ)?* *Aplica los conceptos aprendidos a un ejemplo específico, como calcular la pendiente entre dos puntos dados.* *Ejemplo: Si tienes dos puntos A (3, 4) y B (7, 10),* *4:* *¿cómo calcularías la pendiente?* • *Interpretación Visual:* *Ejercicio Matemático: Gráfica líneas con diferente pendiente en un plano cartesiano.*	*horizontal fomenta la reflexión sobre la relación entre diferentes elementos.* *La pregunta sobre la deducción de la fórmula de pendiente guía a los estudiantes hacia la formulación matemática precisa, mostrando la importancia de la orientación.* *Principios Aplicables: Reflexión, Orientación* *3: La pregunta aborda la relación matemática entre la pendiente (m) y la tangente del ángulo de inclinación (tan(θ)). Esta relación implica una interacción directa entre los conceptos matemáticos, alineándose con el principio de interactividad.* *Principios Aplicables: Entrelazamiento, Nivel.* *4: El ejercicio matemático de calcular la pendiente entre dos puntos estimula la reflexión sobre el proceso y consolida la comprensión.* *Principios Aplicables: Actividad, Reflexión* *5: La exploración visual de diferentes pendientes en el plano cartesiano involucra a los estudiantes activamente, facilitando la construcción de conocimiento.* *Principios Aplicables: Actividad* 6,7 y 8: *La relación entre la fórmula de la pendiente (m) y la ecuación general de la recta* $y = mx + b$ *proporciona una actividad significativa al vincular la teoría con aplicaciones prácticas. El ejercicio práctico de graficar la recta con diferentes valores de 'b' conecta la teoría con la representación visual gráfica.* *El análisis de cómo cambian las rectas al variar 'b' implica una interacción directa con la representación gráfica, permitiendo a los estudiantes observar y comprender visualmente las variaciones.*

Una con pendiente positiva y otra con pendiente negativa *5:* *¿En qué se diferencian visualmente?* *Ejercicio Práctico:* *Tomemos la ecuación y= 2x+b como ejemplo. Grafiquemos esta recta en un plano cartesiano utilizando tres valores distintos de 'b': b=1, b=3, b=−2, b=0* • *Ejemplo Visual:* *Proporcionamos un gráfico que muestra las cuatro rectas con diferentes valores de 'b'. Etiquetamos claramente cada línea en el gráfico para visualizar las variaciones.* *6:* *Para cada ejemplo ¿Cuál es el valor de la pendiente y de la ordenada al origen (corte con el eje "y")?* *7:* *¿Qué diferencias notaste en la posición de las rectas al cambiar el valor de 'b'? Trázalas* *8:* *¿Cómo se comportaría la recta cuando b=0, b=-2*	*Principios Aplicables: Actividad, Entrelazamiento*
Sesión 5 *Selecciona dos puntos en una de las rectas que represente alguna de las rutas seleccionadas, registra sus coordenadas y analiza visualmente la ruta entre ellos en el plano cartesiano. Represéntala en el plano cartesiano de abajo* *1:* *¿Cuál sería la ecuación punto-pendiente de esta recta que pasa por los dos puntos seleccionados?* *Selecciona una de las rutas que trazadas en tu proyecto.*	*1: La selección de dos lugares de interés y la aplicación de la fórmula punto-pendiente para escribir la ecuación de la recta conectan la actividad con la realidad, mostrando la utilidad de los conceptos matemáticos en situaciones reales.* *Principios Aplicables: Actividad, Realidad* *2: La instrucción de seleccionar una de las rutas en el proyecto para aplicar la ecuación refuerza la conexión entre la teoría y situaciones de la vida real.*

2: *¿Cuál es la ecuación de la recta en forma punto-punto de esa ruta luego transformarla a la forma $y = mx + b$? Trázala en el plano Cartesiano* *Cambia la ecuación en su forma general $3x - 2y = 6$ a las formas $y = mx + b$ y después simétrica. Trázala en el plano Cartesiano* *3: ¿Qué relación existe de los parámetros ya sea A y B en la forma general $A_x + B_y = C$ o a y b en la forma simétrica $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, con la pendiente de la recta?*	*Principios Aplicables: Realidad* 3: *La pregunta fomenta la aplicación de conocimientos matemáticos al contexto de las ecuaciones de la recta. Al solicitar a los estudiantes que identifiquen qué letras representan la pendiente, se les insta a aplicar conceptos abstractos (letras en las ecuaciones) a situaciones tangibles (la inclinación de la recta en el plano cartesiano).* *Principios Aplicables: Nivel, entrelazamiento.*
Sesión 6 *Utiliza Desmos para identificar los puntos clave en los caminos y deducir las ecuaciones de rectas pendientes. Escribe las ecuaciones de las rectas en forma $y = mx + b$, punto-pendiente, punto-punto, forma ordinaria y simétrica.* *Preguntas de Reflexión:* *1:* *¿Cómo se pueden expresar las ecuaciones de las rectas que representan los caminos?* *Reflexiona sobre cómo la representación en Desmos contribuye a una comprensión más profunda de la topografía de la comunidad.* *2:* *¿Cómo Desmos te ha ayudado a entender mejor la relación entre las ecuaciones matemáticas y la topografía?*	1: *La práctica de escribir las ecuaciones de las rectas en diferentes formas ($y = mx + b$, punto-pendiente, punto-punto, forma ordinaria y simétrica) aplica conceptos matemáticos en diversos contextos y fortalece la conexión entre la teoría y la aplicación. La escritura de ecuaciones en múltiples formas desafía a los estudiantes a un nivel de complejidad mayor, proporcionando una oportunidad para la consolidación y aplicación avanzada de los conceptos.* *Principios Aplicables: Actividad, Entrelazamiento, Realidad, Nivel* *2: La pregunta sobre cómo Desmos ha contribuido a una comprensión más profunda de la topografía de la comunidad estimula la reflexión, fomentando la conexión entre la representación visual y las ecuaciones matemáticas.* *Principios Aplicables: Entrelazamiento*

Cuadro de Categorías e Indicadores de Evaluación:

Tabla 1. Categorías de la herramienta virtual e indicadores

Categorías	Indicadores
Suficiencia Los ítems que pertenecen a una misma dimensión bastan para obtener la medición de esta	Los ítems no son suficientes para medir la dimensión Los ítems miden algún aspecto de la dimensión, pero no corresponden a la dimensión total Se deben incrementar algunos ítems para poder evaluar la dimensión completamente Los ítems no son suficientes
Claridad El ítem se comprende fácilmente, es decir, su sintáctica y semántica son adecuadas	El ítem no es claro El ítem requiere bastantes modificaciones o una modificación muy grande en el uso de las palabras de acuerdo con su significado o por la ordenación de estas Se requiere una modificación muy específica de algunos de los términos del ítem El ítem es claro, tiene semántica y sintaxis adecuada
Coherencia El ítem tiene relación lógica con la dimensión o indicador que está midiendo	El ítem no tiene relación lógica con la dimensión El ítem tiene una relación tangencial con la dimensión El ítem tiene una relación moderada con la dimensión que está midiendo El ítem se encuentra completamente relacionado con la dimensión que está midiendo
Relevancia El ítem es esencial o importante, es decir, debe ser incluido	El ítem puede ser eliminado sin que se vea afectada la medición de la dimensión El ítem tiene alguna relevancia, pero otro ítem puede estar incluyendo lo que mide este El ítem es relativamente importante El ítem es muy relevante y debe ser incluido

Fuente: adaptado de Escobar y Cuervo (2008, p. 37).
Nota: para la elaboración de la herramienta virtual se consideraron cuatro categorías; el indicador uno de las categorías se asigna cuando el ítem no cumple con la categoría, y así en lo sucesivo hasta el indicador cuatro, lo que representa que el ítem cumple totalmente con lo que se espera de acuerdo con la definición de la categoría. Solo en el caso de suficiencia se califica por dimensión y no por ítem.

Marco Teórico:

Educación Matemática Realista

El proceso de enseñanza-aprendizaje, como se exploró previamente, se convierte en una actividad sumamente compleja que requiere una atención cuidadosa y reflexiva. La Educación Matemática Realista (RME), como teoría instruccional específica para la enseñanza de las matemáticas, se desarrolló en Holanda desde la década de 1970 en respuesta a la necesidad de reformar la educación matemática (Treffers, 1987; De Lange, 1987). Esta perspectiva se sustenta en la visión revolucionaria de Freudenthal (1968, 1971) que concibe las matemáticas como una actividad humana intrínseca antes que como un mero cuerpo de conocimientos.

La RME se fundamenta en principios con una estrecha relación entre sí, entre los que se encuentran la de actividad, realidad, nivel, entrelazamiento, interactividad y orientación, los cuales ayudan a la enseñanza de las matemáticas.

El principio de entrelazamiento establece la conexión entre conceptos, dominios y contenidos matemáticos, considerando, así como una integración que a veces se combinan y otras llevan una secuencia entre sí, pero siempre se encuentran relacionados de alguna forma.

Otro pilar esencial de la RME es la teoría de **niveles** en el aprendizaje matemático (Freudenthal, 1973). Esta teoría postula que la matematización, inicialmente informal, se vuelve progresivamente más formal mediante la reflexión. Aquí, los modelos sirven como sustento para apoyar esta progresión (Treffers y Goffree, 1985). El poder de los modelos radica en su capacidad para elevar el nivel de comprensión matemática, transformándose de un "modelo de" una situación específica a un "modelo para" organizar nuevas situaciones matemáticamente (Streefland, 1985).

El concepto de "dos formas de matematización", introducido por Treffers (1978), destaca la dualidad entre la matematización "horizontal" y "vertical". La primera impulsa a los estudiantes a aplicar herramientas matemáticas para abordar y resolver problemas del **mundo real,** mientras que la segunda se centra en la reorganización y conexión de conceptos dentro del sistema matemático.

Una consideración crucial para la RME es la efectividad de los modelos. Estos no solo deben arraigarse en contextos realistas, sino que también deben ser lo suficientemente flexibles como para aplicarse en niveles más avanzados y, lo que es más importante, deben ser reinventados por los propios estudiantes (Treffers, 1987; Gravemeijer, 1994). Este enfoque no solo fomenta el entendimiento conceptual, sino que también estimula la creatividad y la **participación de los estudiantes en su propio proceso de aprendizaje.**

En esta dinámica, el estudiante se convierte en un participante activo en su propio viaje matemático, guiado por el docente, pero sintiendo que lidera este proceso. La RME, según Freudenthal (1991), abraza la noción de que el aprendizaje de las matemáticas no es simplemente **una actividad individual, sino una actividad social. Facilita discusiones en toda la clase y el trabajo en grupo**, proporcionando a los estudiantes oportunidades para compartir estrategias y descubrimientos (p. 523).

En última instancia, el papel del profesor en este contexto es esencial. La RME postula que el docente debe poseer las herramientas pedagógicas necesarias para implementar efectivamente los principios fundamentales, estableciendo así el **principio de orientación.** El profesor no solo transmite conocimientos matemáticos, sino que también actúa como guía y facilitador, creando un entorno propicio para el florecimiento del pensamiento matemático de los estudiantes.

Agradecimientos:

Agradecemos sinceramente su tiempo y esfuerzo dedicado a la evaluación de este instrumento de recopilación de datos.

Contacto:

Para cualquier pregunta o aclaración, no dude en ponerse en contacto con el Investigador Principal:

Eduardo Cruz Márquez

Correo: lalo.cruzmarq@gmail.com

Tel: 2224550176

Formulario en Línea para Registrar Calificaciones:

Acceda al formulario en línea para registrar sus calificaciones de los ítems aquí:

https://n95feucnltk.typeform.com/to/tV6QUnpv

Fecha de Devolución:

Por favor, devuelva este manual completado antes de la fecha especificada.

Anexo III Instrumento de Intervención Final

"Explorando Nuestra Comunidad a Través de sus Caminos: Una Perspectiva Matemática"

Nombre del Estudiante:

Fecha:

Introducción: *En nuestra comunidad, nos embarcamos en una emocionante aventura de descubrimiento y aprendizaje sobre los caminos que nos rodean. Este proyecto tiene como objetivo crear un recurso informativo que no solo destaque los caminos locales, sino que también proporcione información valiosa sobre la pendiente como objeto matemático y cómo estas afectan a las personas y vehículos que los utilizan. Nos convertiremos en exploradores de la topografía local y en investigadores de las implicaciones prácticas de las pendientes en la vida diaria, como objeto matemático*

Escenario: *Imagina que somos un equipo de investigadores encargados de crear un recurso informativo detallado sobre los caminos de nuestra comunidad desde una perspectiva matemática. Este recurso contendrá fotografías de los diferentes caminos junto con información sobre sus pendientes y cómo estas afectan a las personas y vehículos que los recorren. Nos centraremos en el desgaste físico experimentado por las personas al caminar cuesta arriba o abajo, el consumo de combustible de los vehículos al enfrentarse a diferentes pendientes y cómo estos fenómenos pueden analizarse y entenderse usando conceptos matemáticos de la trigonometría y la geometría analítica.*

Justificación: *La importancia de comprender las pendientes de los caminos en nuestra comunidad desde una perspectiva matemática se refleja en varios aspectos:*

- *Desgaste Físico: Es importante conocer qué caminos son más exigentes en términos de energía y esfuerzo físico para planificar actividades al aire libre y garantizar una experiencia segura y agradable para los residentes y visitantes. Al caminar por caminos con pendientes pronunciadas,* *las personas experimentan un mayor desgaste físico que puede ser cuantificado y analizado utilizando conceptos matemáticos como el trabajo y la energía. La trigonometría nos permite calcular la pendiente de un camino y predecir el esfuerzo requerido para recorrerlo, proporcionando así una comprensión más profunda de los desafíos físicos involucrados.*

- *Consumo de Combustible: El rendimiento de los vehículos también se ven afectados por las pendientes de los caminos, y este fenómeno puede ser analizado utilizando conceptos matemáticos como la cinemática y la mecánica de fluidos. La geometría nos permite calcular la inclinación de los caminos y predecir el impacto en el consumo de combustible, lo que ayuda a los conductores a tomar decisiones más informadas sobre rutas y a optimizar la eficiencia de sus viajes. Las subidas pronunciadas pueden aumentar el consumo de combustible impactando en los costos, con implicaciones ambientales también. Proporcionar información sobre las pendientes de los caminos ayuda a los conductores a planificar rutas más eficientes y reducir el impacto ambiental de sus viajes.*
- *Seguridad Vial: Las pendientes pronunciadas pueden representar desafíos adicionales para la seguridad vial, especialmente en condiciones climáticas adversas El análisis de datos sobre accidentes de tráfico y condiciones de la carretera nos permite identificar patrones y tendencias relacionadas con las pendientes, lo que contribuye a mejorar la seguridad para todos los usuarios de la vía. Conocer la inclinación de los caminos permite a los conductores y peatones tomar precauciones adicionales cuando sea necesario, mejorando así la seguridad para todos los usuarios de la vía.*

Objetivos de Aprendizaje:

- *Concepto de Pendiente: Comprender y aplicar el concepto de pendiente en un contexto real.*
- *Habilidades Matemáticas: Aplicar las fórmulas matemáticas para calcular la pendiente y representarla gráficamente.*

Sesión 1 Introducción

Objetivo:

- *Entender cómo la pendiente influye en nuestras experiencias al explorar lugares y el cómo puede afectar el cansancio de una persona o el consumo de combustible en el rendimiento de los vehículos.*

Actividades

Actividad 1: Análisis de Imágenes

Presentación Visual:

Observa las imágenes A y B proporcionadas en la parte de abajo que muestran lugares con diferentes inclinaciones. Piensa en cómo la inclinación de un lugar puede influir en tu experiencia al visitar diferentes lugares.

Imagen A

Imagen B

Comparte tus observaciones sobre cada imagen.

Pregunta 1: ¿Cómo afecta la inclinación del camino al esfuerzo humano y al rendimiento del automóvil en cada una de las imágenes? *Explica tu respuesta*

Actividad 2: Conclusiones y discusión en grupo

Reflexión:

Qué conclusiones puedes sacar de las imágenes en relación con la pendiente.

Después de observar las imágenes

Pregunta 2: ¿Cómo defines con tus propias palabras el termino de pendiente?

Actividad 3: Sitios de interés

Piensa e investiga sobre al menos 3 caminos de interés en tu comunidad o ciudad que podrían destacarse en nuestro proyecto.

- *Captura y Análisis de Imágenes:*

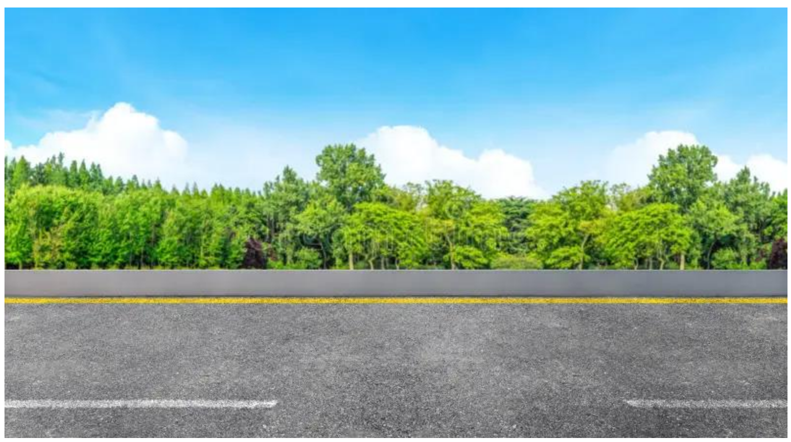
  Ejercicio Práctico:

- *Inicia tomando fotografías de los caminos seleccionados en tu proyecto.*
- *Captura diferentes tramos y características significativas de cada ruta. Al menos tres rutas diferentes (Un camino inclinado hacia la izquierda, otro inclinado hacia la derecha y uno totalmente recto) Estas imágenes serán la base para nuestra exploración en Desmos.*
- *Asegúrate de que las tomas de los caminos seleccionados tengan una vista lateral. Observa los ejemplos C, D, E que se encuentran en la parte de abajo.*
- *Ejemplo: Utiliza tu teléfono para tomar fotografías o capturas de pantalla de Google Maps para obtener imágenes detalladas.*
- *Ejemplos:*

Imagen C: Camino inclinado hacia la derecha

Imagen D: Camino inclinado hacia la izquierda

Imagen E: camino recto



Nombre del Estudiante: *Fecha:*

Sesión 2: Exploración de Pendientes en Desmos (Parte 1)

Objetivos:

Utilizar eficientemente la plataforma Desmos para visualizar y comprender la relación entre las ecuaciones matemáticas de las rutas y su representación gráfica.

Actividad 1: Exploración Visual en Desmos:

- *Análisis de Imágenes:*
- *Ingreso a Desmos y Carga de Imágenes:*

Ejercicio Práctico:

1. *Accede a la plataforma Desmos.*
2. *Carga las imágenes previamente capturadas.*
3. *Observa la topografía de los caminos, enfocándote en las variaciones en altura y distancia horizontal.*
4. *Utiliza Desmos para identificar visualmente cómo cambia la pendiente en la imagen.*
5. *Toma capturas de pantalla.*

Actividad 2: Identificación de Ecuaciones en Desmos (Parte 1):

- *Análisis de Imágenes en Desmos:*

Ejercicio Práctico: Utiliza las herramientas de Desmos para ajustar la escala de la imagen a 0.1 con un tamaño de gráfica de 20 x 20 y el centro en (0,0).

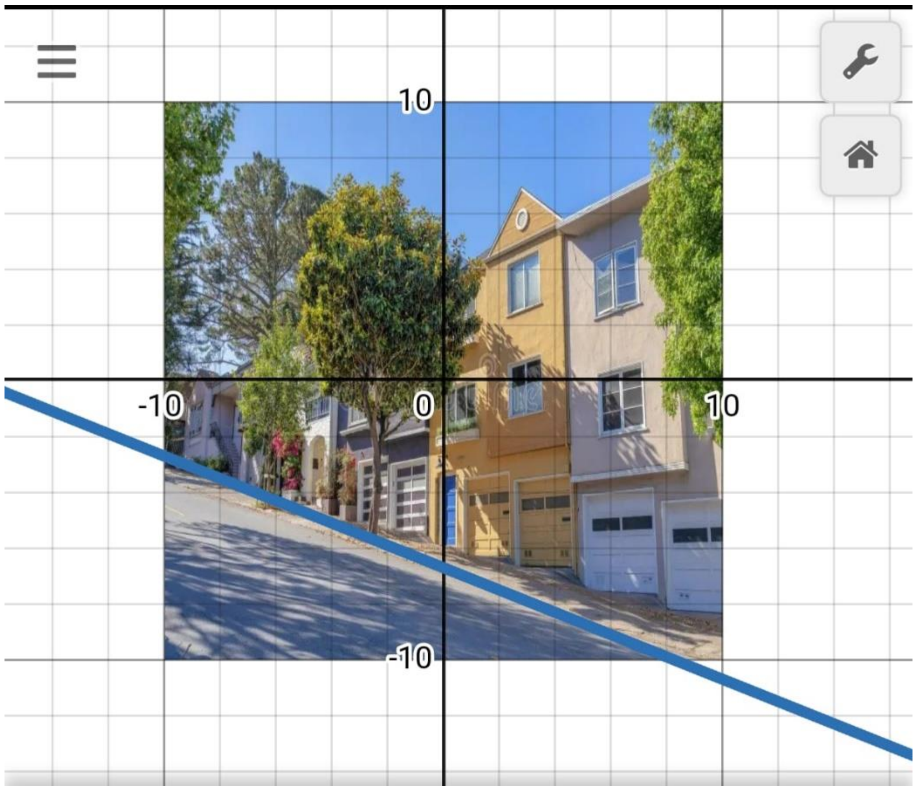
Compara visualmente la inclinación de dos caminos diferentes. Observa cómo la pendiente se manifiesta en la representación gráfica y compara las características clave y diferencias de cada uno.

Pregunta 3: ¿Cuáles son las diferencias al comparar la inclinación de dos caminos diferentes en Desmos?

- *Exploración de Herramientas en Desmos:*

Ejercicio Práctico: Experimenta con las herramientas disponibles en Desmos para resaltar características significativas en los caminos. Puedes utilizar líneas para mostrar la dirección de la pendiente a lo largo del segmento del camino. Toma captura de pantalla o fotografías.

Ejemplo:



Realiza lo mismo para el camino con inclinación a la derecha y el camino recto.

Ejemplo: Utiliza Desmos para explorar detalladamente cómo cambia la inclinación en diferentes secciones de las rutas.

Pregunta 4: ¿De qué manera Desmos facilitó tu comprensión sobre la inclinación de los caminos? *Describe específicamente qué herramientas o características de Desmos te resultaron más útiles para visualizar y comprender la variación de la pendiente en las rutas seleccionadas.*

Nombre del Estudiante: *Fecha:*

Sesión 3: Exploración Práctica de la Pendiente en Lugares de Interés y Formula del cálculo de Pendiente.

Objetivos:

- *Comprender cómo la pendiente de los caminos afecta la experiencia de quienes los utilizan.*
- *Reflexionar sobre la importancia de la pendiente en la topografía local y su impacto en la vida diaria.*
- *Descubrir por ti mismo cómo se formula la pendiente.*
- *Comprender la relación entre la pendiente y los cambios en la altura y la distancia horizontal.*
- *Introducir las variables Δy y Δx y relacionarlas con la pendiente.*
- *Comprender la importancia de la fórmula de la pendiente para representar visualmente la topografía de rutas entre lugares de interés en la comunidad.*

Actividades:

Reflexión sobre la Pendiente:

- *Reflexiona sobre cómo crees que la pendiente de los caminos seleccionados influirá en la experiencia de quienes los visiten.*
- *Preguntas 5 y 6* ***(Utiliza representaciones gráficas para responder a estas preguntas)***

Pregunta 5: ¿Qué dificultades podrían enfrentar las personas al caminar o conducir en caminos con diferentes pendientes?

- ***Discute***

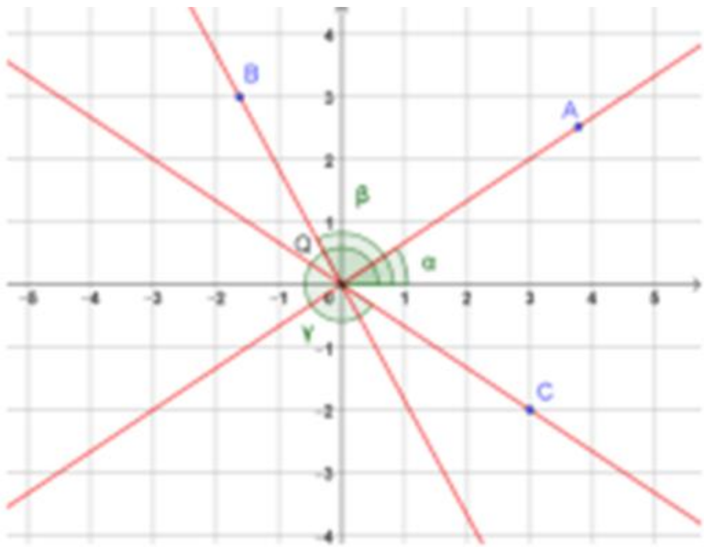
Pregunta 6: Considera dos caminos A y B para llegar a ciertos lugares A y B respectivamente. El lugar A se encuentra a una mayor altura que el lugar B. ¿Significa eso que el camino A esta más empinado que el camino B? ¿Por qué si o por qué no?

Actividades:

Actividad 1:

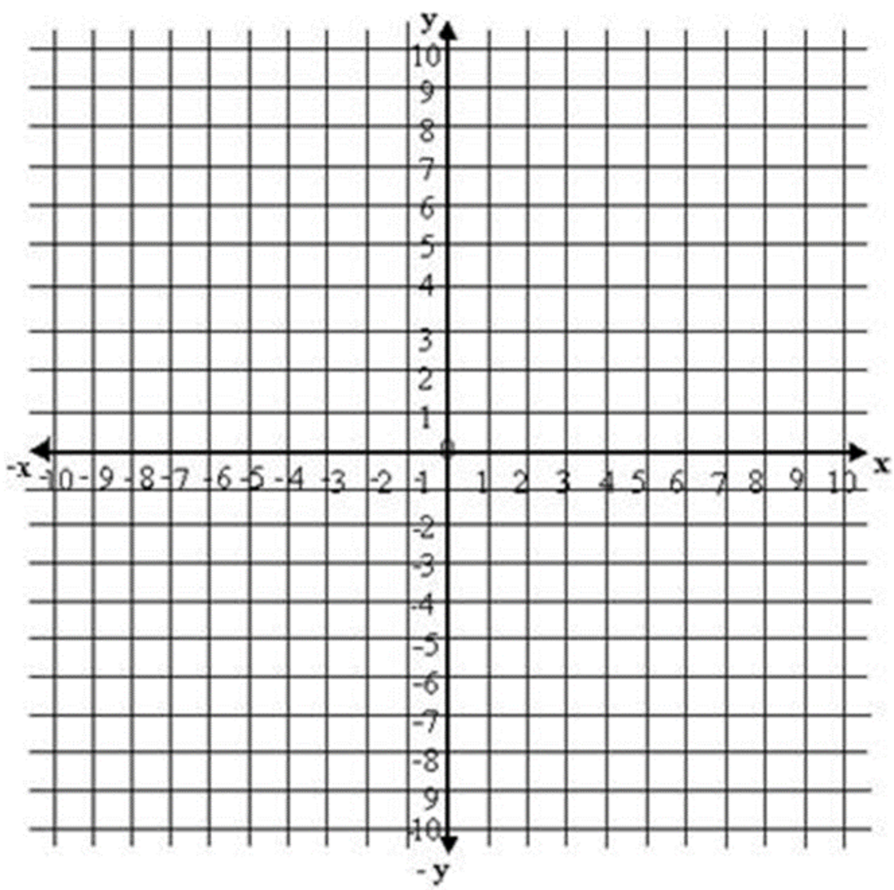
- *Utiliza el plano cartesiano proporcionado en la parte de abajo para representar los caminos seleccionados en la actividad anterior. Cada camino será representado por una línea inclinada en el plano de coordenadas.*
- *Traza una línea inclinada de referencia para los tres caminos seleccionados. Asegúrate de que las líneas reflejen con precisión la pendiente de cada camino. (Puedes tomar como guía el ejemplo de rectas trazadas que viene en la parte de abajo)*
- *Traza segmentos de línea entre puntos establecidos sobre las líneas rectas generadas a partir de las rutas de interés seleccionadas, creando representaciones visuales detalladas en papel que muestren las variaciones de altura y distancia horizontal en cada ruta medidos desde el punto de origen.*

EJEMPLO de líneas de recta trazadas



Utiliza el siguiente sistema de coordenadas, para dibujar tus tres rectas.

Plano Cartesiano:



Actividad 2:

- *Selecciona una de las rutas de interés que seleccionaste (una inclinada) representada por la línea recta que trazaste en la actividad anterior. Establece dos puntos por los que pase la recta que representa esa ruta y registra sus coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2).*
- *Observa la pendiente de la línea recta que representa a la ruta seleccionada en el plano cartesiano proporcionado de abajo.*

Pregunta 7: ¿Cuál es la relación entre los cambios en la altura y la distancia horizontal entre 2 puntos por los que pasa la línea recta de las rutas trazadas?

Actividad 3:

Introduce la Variable Δy y Δx:

- *Define Δy como la diferencia entre las coordenadas y de los dos puntos (Δy=$y_2 - y_1$).*
- *Define Δx como la diferencia entre las coordenadas x de los dos puntos (Δx=$x_2 - x_1$).*
- *Observa cómo la pendiente de la ruta (m) se relaciona con Δy y Δx*

Pregunta 8: ¿Cuál de las siguientes expresiones en términos de Δy (distancia entre puntos vertical) y Δx (distancia entre puntos horizontal) corresponde al cálculo de la pendiente de un segmento de línea recta? Subraya o encierra en un círculo la respuesta que consideres que es la correcta.

$$m = \frac{\Delta x}{\Delta y} \qquad\qquad m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Nombre del Estudiante: *Fecha:*

Sesión 4. Exploración integral de la pendiente en la ecuación de la Recta ordinaria $\boldsymbol{y = mx + b}$

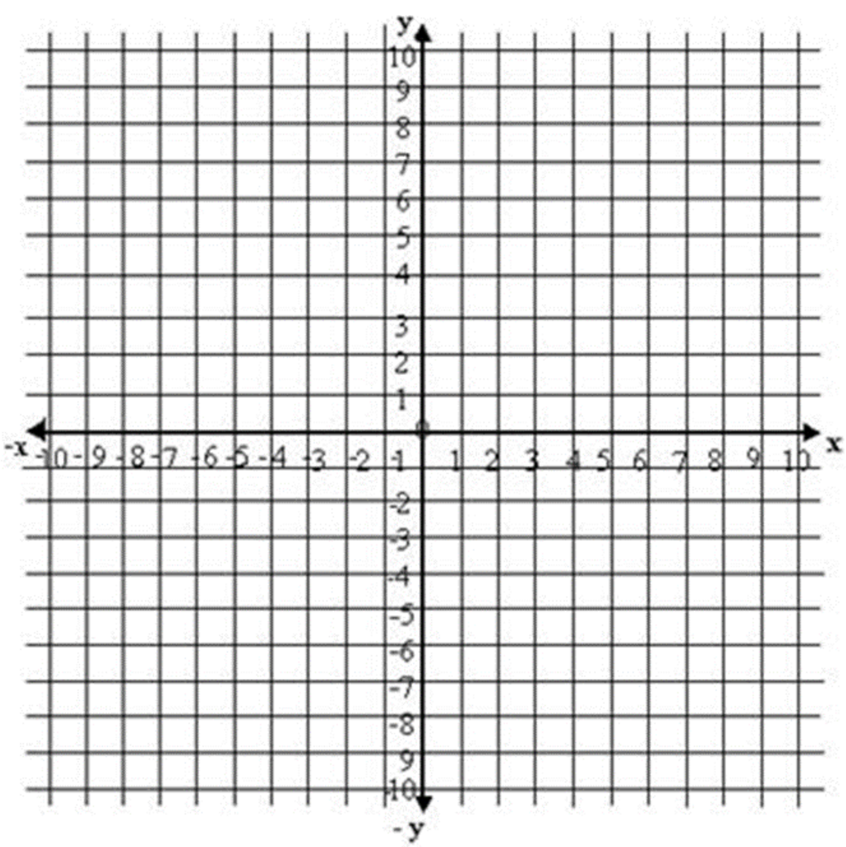
Objetivos:

- *Analizar cómo varía la pendiente en diferentes segmentos de una línea recta que pasa por puntos específicos.*
- *Comprender el concepto de pendiente (m) en el contexto de la ecuación de la recta* $y = mx + b$
- *Relacionar los valores de la pendiente (m) con la inclinación de las rectas en el plano cartesiano.*
- *Explorar visualmente la relación entre la pendiente (m) y la inclinación de la recta mediante gráficos y tablas de valores*

Actividades:

Actividad 1

Utiliza el plano cartesiano proporcionado para trazar lo que se te pide, además realiza los cálculos necesarios requeridos y ***después contesta las preguntas 9 y 10.***



Dados los puntos A (1,2), y B (5,6), vamos a explorar cómo se comporta la pendiente en una línea recta que pasa por estos puntos.

(a) *Traza el segmento de recta que pasa por los puntos A y B en un plano cartesiano.*

(b) *¿Cómo calculas el valor de la pendiente del segmento de recta que pasa por los puntos A y B? Anota este valor. Es decir* $m_{AB} =$

(c) *Considera un tercer punto C (3,4) que esté dentro del segmento que pasa de A y B en la línea recta. Grafícalo.*

(d) *Calcula el valor de la pendiente del segmento formado entre los puntos A y C. Anota este valor.* $m_{AC} =$

(e) *Luego, calcula el valor de la pendiente del segmento formado entre los puntos C y B. Anota este valor.*$m_{CB} =$

(f) *Considera un cuarto punto D (7,8) que esté fuera del segmento que pasa de A y B en la línea recta. Grafícalo y únelo al punto C*

(g) *Utiliza la fórmula de la pendiente para calcular su valor del segmento de recta que pasa entre los puntos A y D. Anota este valor.* $m_{AD} =$

(h) *Luego, calcula el valor de la pendiente del segmento de recta formado entre los puntos D y B. Anota este valor* $m_{DB} =$

Pregunta 9: Comparando las pendientes calculadas ¿Qué diferencia o similitud notable existe en el valor de las pendientes de los segmentos de rectas formadas entre los puntos que se te pidió calcular anteriormente?

Pregunta 10: Basándote en tus cálculos, ¿qué puedes inferir sobre la relación entre las pendientes en diferentes puntos de la misma línea recta que pasa por A y B?

Pregunta 11: ¿A que conclusión puedes llegar sobre la pendiente de cualquier línea recta que pasa por distintos puntos?

Actividad 2

Introducción a la Ecuación de la Recta ordinaria y Análisis de la pendiente 'm':

- *Exploración de la Ecuación General: Relacionaremos la fórmula de la pendiente (m) con la ecuación de la recta en su forma ordinaria* $y = mx + b$.
- *Análisis de 'm' con Gráficas a través de tabla de valores: Tomemos la ecuación de la recta en su forma ordinaria y= mx+b como ejemplo. Grafiquemos esta recta en un plano cartesiano utilizando cuatro valores distintos de 'm': m=-2, m=2, m=10, m=0*

x	m = -2	m = 2	m = 10	m = 0
-2	y=	y=	y=	y=
-1	y=	y=	y=	y=
0	y=	y=	y=	y=
1	y=	y=	y=	y=
2	y=	y=	y=	y=
3	y=	y=	y=	y=

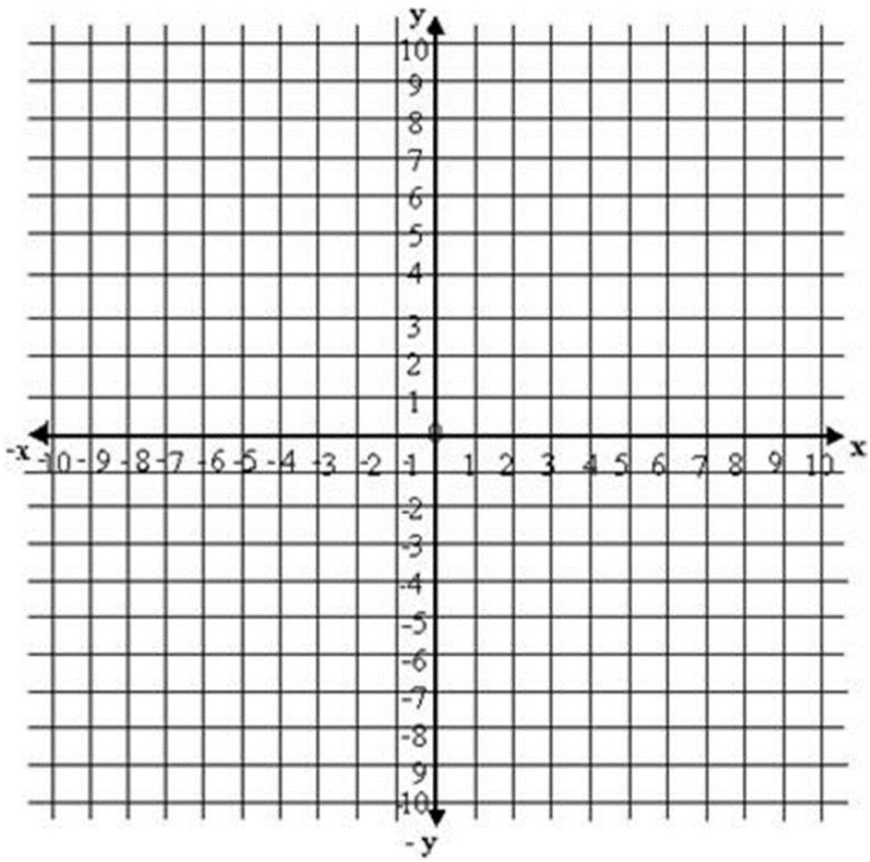
En la tabla anterior, calcularemos los valores correspondientes de "y" para cada valor de "x" utilizando la ecuación $y = mx + b$. donde b toma el valor de 2. Estos valores de "y" nos ayudarán a trazar los puntos que unirán a las rectas en el plano cartesiano.

- *Ejemplo Visual:*

Proporcionamos un gráfico que muestra las cuatro rectas con diferentes valores de 'm'. Etiquetamos claramente cada línea en el gráfico para visualizar las variaciones. Utiliza un color diferente para cada recta.

Realiza los cálculos necesarios para llenar la tabla, posteriormente traza las gráficas en el sistema de coordenadas proporcionado y responde las preguntas 12 y 13

Utiliza el siguiente espacio para realizar los cálculos necesarios para trazar la gráfica:
(si necesitas más espacio, anexa una hoja con tus cálculos)



Pregunta 12: ¿Qué diferencias notaste entre los segmentos de rectas al cambiar el valor de 'm'?

Pregunta 13: ¿Cómo describirías la relación entre el valor de "m" y la inclinación de cualquier línea recta en el plano cartesiano?

Nombre del Estudiante: *Fecha:*

Sesión 5: Explorando Pendientes y la Ecuación de la Recta en sus diferentes formas

Objetivo:

- *Conocer la pendiente en la ecuación de la recta a través de sus diferentes formas, así como transformar las ecuaciones a estas formas.*

Actividad 1: Ecuación de la recta dado un punto y su pendiente.

Descubrimiento Guiado:

Expresión matemática: $y - y_1 = m(x - x_1)$

- *Escribe la ecuación de la recta que pasa por el punto C (x_1= 1, y_1=4) con pendiente m= 2. Es decir, la ecuación de la recta dado un punto y su pendiente mediante su expresión matemática:*

  Respuesta:

- *Luego transfórmala para llegar a su forma ordinaria:*

$$y = mx + b$$

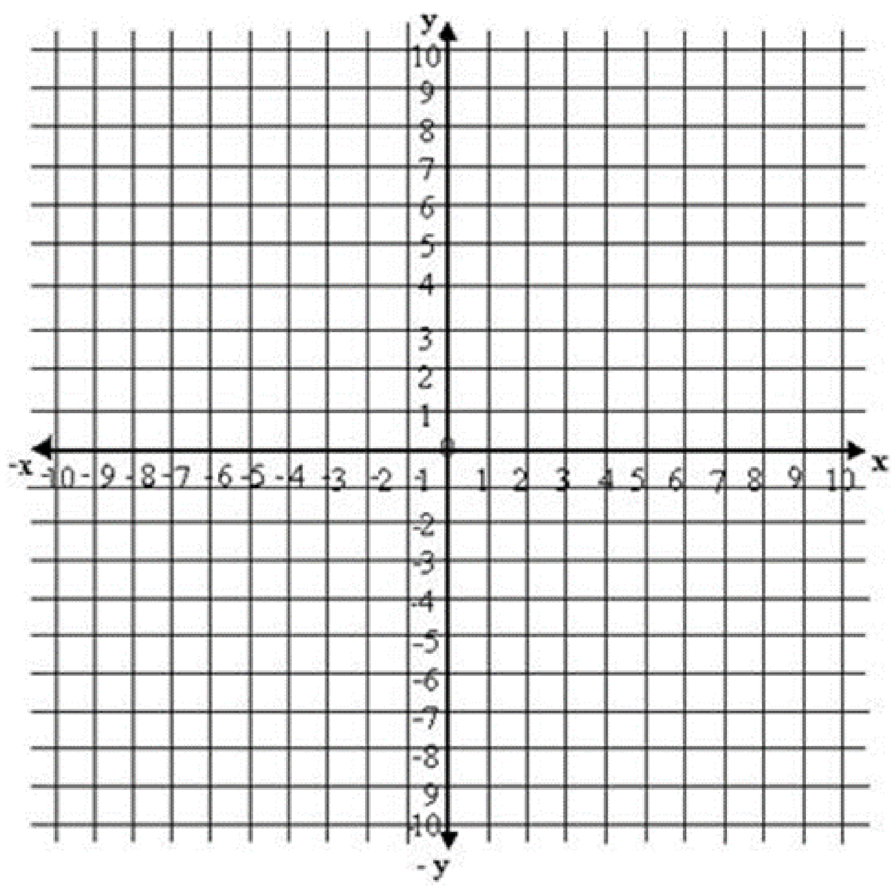
Respuesta:

- *Aplicación Práctica*

Utiliza los valores para la variable "x" propuestos en la tabla siguiente y traza la gráfica de la recta anterior en el plano cartesiano que se encuentra en la siguiente página.

x	$y = mx + b$
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

Puedes utilizar el siguiente espacio para realizar los cálculos necesarios para trazar la gráfica:



Actividad 2 Ecuación de la recta dados dos puntos

Dados dos puntos A (x_1=2, y_1=4) y B (x_2=6, y_2=8). Escribe la ecuación de la recta dados dos puntos, establecido de la forma:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Respuesta:

Luego transfórmala y escríbela de la forma ordinaria:

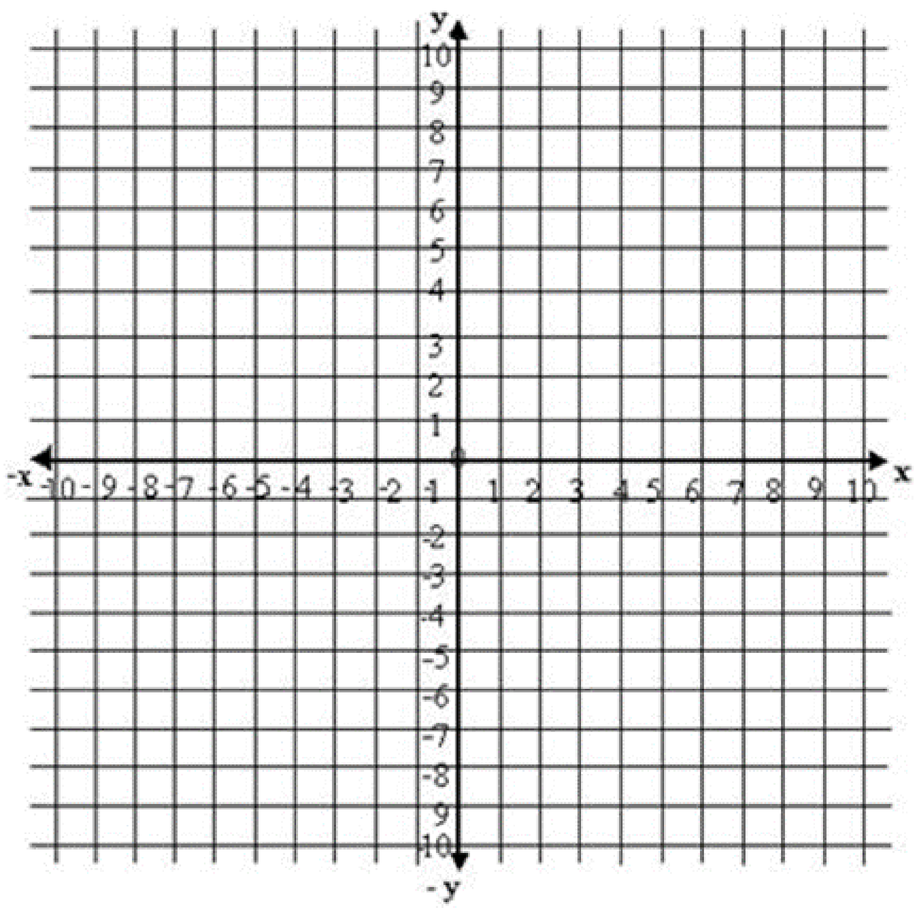
$$y = mx + b$$

Respuesta:

Utiliza los valores para la variable "x" propuestos en la tabla y traza la gráfica de la recta anterior en el plano cartesiano que se encuentra en la siguiente página.

x	$y = mx + b$
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

Utiliza el siguiente espacio para realizar los cálculos necesarios para trazar la gráfica:



Actividad 3: Ecuación de la recta en su forma General y Simétrica

- *Introducción a la Pendiente en su forma General*

La forma general tiene los parámetros a, b, c en su expresión. Tiene la siguiente forma:

$$ax + \text{by} = c$$

Por ejemplo, 3x-2y=6

Donde:

a= 3

b=+(-2)

c=6

- *Ejercicio: Dada la ecuación de la recta y=2x+2 dada en su forma* $y = mx + b$.
- *Identifica su pendiente m=*
- *Posteriormente transfórmala a la forma* $ax + \text{by} = c$, *luego identifica sus parámetros a, b, c.*

Respuesta:

a=

b=

m=

Actividad 4: Ecuación de la recta en su forma Simétrica o Canónica

La forma simétrica o canónica tiene los parámetros a, b, además las variables x e y, en su expresión matemática. Tiene la siguiente forma:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Por ejemplo, $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$

Donde:

a= 2

b=4

- *Ejercicio: Dada la ecuación de la recta y=2x+2 en su forma* $y = mx + b$.
- *Identifica su pendiente m*
- *Posteriormente transfórmala a la forma* $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, *luego identifica sus parámetros a, b.*

Respuesta:

a=

b=

m=

Nombre del Estudiante: *Fecha:*

Sesión 6: Exploración Avanzada de Pendientes en Desmos (Parte 2)

Objetivos:

- *Aplicar las herramientas de Desmos para obtener ecuaciones de rectas pendientes en diferentes formas.*
- *Identificar la pendiente en cada una de las formas de ecuación de la recta.*
- *Reflexionar sobre la asistencia de DESMOS para entender la pendiente a través de las ecuaciones de la recta.*

Actividad: Identificación de Ecuaciones en Desmos (Parte 2):

- *Utiliza Desmos para identificar los puntos clave en los caminos y deducir las ecuaciones de rectas pendientes.*
- *Escribe las ecuaciones de las rectas en forma ordinaria $y = mx + b$, dado punto y pendiente, dados dos puntos, forma general y simétrica, a partir de las imágenes cargadas*

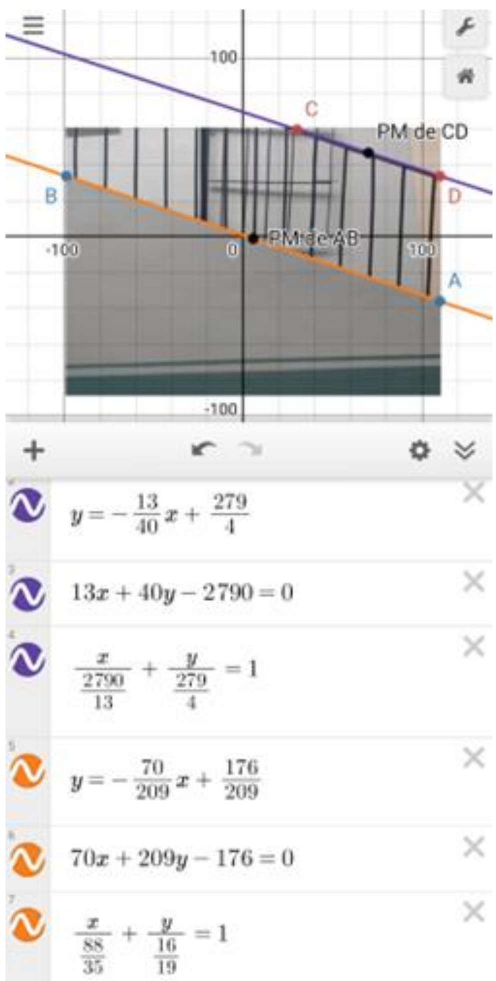
Pregunta 14 ¿Cómo se pueden expresar las ecuaciones de las rectas que representan los caminos?

Escribe las ecuaciones de cada camino en sus diferentes formas y determina su pendiente a partir de cada una de ellas:

Rutas	*Forma ordinaria* $y = mx + b$	*Ecuación de la recta dado un punto y su pendiente*	*Ecuación de la recta dados dos puntos*	*Valor de la pendiente*
Camino 1				
Camino 2				
Camino 3				

Rutas	Ecuación de la recta en su forma general	Ecuación de la recta en su forma simétrica	Valor de la pendiente
Camino 1			
Camino 2			
Camino 3			

Genera una imagen con los caminos y las ecuaciones parecido a la siguiente imagen de ejemplo y envíala a tu docente:



Pregunta 15: ¿Cómo se diferencian visual y numéricamente la pendiente de un camino inclinado hacia la derecha, un camino inclinado hacia la izquierda y un camino recto, y cómo sería visualmente un camino mientras el valor de su pendiente tiende a aumentar?

Actividad 2: Ejercicio de Pensamiento

Reflexiona sobre cómo la representación en Desmos contribuye a una comprensión más profunda de la topografía de la comunidad.

Pregunta 16: ¿Cómo Desmos te ha ayudado a entender mejor la relación entre las ecuaciones matemáticas y la topografía (inclinación de los caminos)?

Actividad 3: Ejercicio de Reflexión

- *En la aplicación de DESMOS, en la parte superior izquierda, pucha el icono de la tres "rayitas horizontales" y selecciona la tercera opción "Ecuación que pasa por dos puntos", manipula los valores de y_2, y_1 de tal forma que la expresión $\Delta y = (y_2 - y_1)$ sea igual al valor 0.*

Pregunta 17: ¿Cuál es el valor numérico de "m" que te da la calculadora gráfica DESMOS, y por qué crees que la línea recta resultante tiene esa forma?

- *Ahora realiza el mismo ejercicio, pero esta vez manipulando los valores de "x", es decir, juega cambiando los valores de x_2 e x_1 de tal forma que el valor de $\Delta x = (x_2 - x_1)$ sea un valor muy pequeño, cercano a 0 sin ser 0*

Pregunta 18: ¿Cuál es el valor numérico de "m" que te da la calculadora gráfica DESMOS, y por qué crees que la línea recta resultante tiene esa forma?

Pregunta 19: Después de responder las preguntas 18 y 19 ¿A que conclusión puedes llegar sobre la relación que existe entre el valor numérico de la endiente y la forma de su línea recta?

Pregunta 20: Después de haber realizado las actividades de todas las sesiones anteriores, proporciona una definición del término pendiente de una recta. Se lo más detallado posible.