

**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE
PUEBLA**

**Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Postgrado en Ciencias Matemáticas**

**INTEGRACIÓN GENERALIZADA Y SUS
APLICACIONES**

Tesis

Que para obtener el grado de:

Doctor en Ciencias Matemáticas

Presenta:

Diego Francisco Alcaraz Ubach

Directores de tesis:

Prof. Dr., Dr. Scient. Miguel Antonio Jiménez Pozo

Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna

Puebla, Puebla. Junio, 2025.

Agradecimientos

Quiero expresar mi profundo agradecimiento al Dr. Miguel Antonio Jiménez Pozo, quien dirigió mis trabajos de tesis tanto en la maestría como en el doctorado, por haberme dado la oportunidad de trabajar con él, por compartirme sus conocimientos y experiencias, y por todos estos años dedicados a mi formación académica y humana, siempre buscando lo mejor para mí. A pesar de las adversidades, nunca dejó de acompañarme con entusiasmo y compromiso. Estoy convencido de que, si algún mérito tengo como matemático en esta etapa, es haber logrado comprender, aunque sea parcialmente, algunas de sus ideas.

Al Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna, también director de esta tesis, le agradezco profundamente su disposición para ayudarme, su cercanía, su generosidad y por contagiarme constantemente su pasión y curiosidad. Su acompañamiento ha sido un refugio académico y personal en esta etapa.

Agradezco al Dr. Moisés Soto Bajo por la minuciosidad y profundidad de sus comentarios a este trabajo, y al Dr. Juan Héctor Arredondo Ruiz, por sus atinadas preguntas y observaciones. Al Dr. Jorge Bustamante González y al Dr. Francisco Javier Mendoza Torres, por haber acompañado el seguimiento de mis avances de tesis desde la maestría y por sus comentarios a lo largo de estos años. Al Dr. Slavisa Djordjević, por sus aportes para mejorar este trabajo. A todos ellos, mi sincero agradecimiento por haber formado parte del jurado de esta tesis doctoral.

También agradezco a la Dra. María Guadalupe Morales Macías, quien, revisó de manera constante mis avances durante el doctorado.

Agradezco a todos mis demás profesores, que también han sido parte fundamental en mi formación académica. A mis compañeros, colegas y amigos, gracias por el apoyo y la compañía.

A mi familia, gracias por su amor y apoyo incondicional en cada paso que doy, ya sea hacia adelante o hacia atrás. Todo lo que logre es también de ustedes, y con este trabajo aprovecho para expresarles todo mi cariño.

AL CONACYT por la beca que me otorgaron para cursar mis estudios de doctorado. También le agradezco a la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, en especial a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y a la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado.

Índice general

Introducción	1
1. Integrales generalizadas	7
1.1. Conceptos preliminares y notaciones	8
1.2. Definición de integral generalizada	10
1.2.1. Propiedades básicas	12
1.3. Teoremas de convergencia	15
1.4. Teoremas de reordenamiento	18
2. Definiciones de integrales impropias	31
2.1. Preliminares	32
2.2. Definiciones y propiedades básicas	35
2.2.1. Definición usando cubrimientos finitos . . .	39
2.3. Integral de Harnack	42
3. Propiedades de la J-integral	47
3.1. Linealidad de la J -integral	48
3.1.1. La J -integral como integral generalizada . .	52
3.2. Propiedades aditivas respecto al dominio de inte- gración	54
3.2.1. Un ejemplo importante	56
3.3. Un caso particular de la relación con la integral de Henstock–Kurzweil	60

4. Integrales impropias en espacios localmente compactos	65
4.1. Espacios totalmente acotados y de medida finita . . .	66
4.2. Espacios con la propiedad de Heine–Borel	67
4.2.1. Un caso particular de la relación con la integral de Henstock–Kurzweil	72
Conclusiones	75
Bibliografía	78

Introducción

Existen diversos problemas que han motivado el estudio y desarrollo de las integrales impropias. Particularmente, durante el desarrollo de la teoría de integración en la segunda mitad del siglo XIX, las integrales originalmente definidas con respecto a lo que después sería la medida de Lebesgue se definieron para funciones acotadas; no obstante, problemas de la Física, del estudio de series trigonométricas y de la recuperación de funciones derivables a través de sus derivadas, entre otros ejemplos, indicaban la necesidad de tener el concepto definido tanto para funciones no acotadas como para funciones definidas en intervalos no acotados. Para más detalles históricos al respecto, véase el primer capítulo de [29].

Desarrollos posteriores en el ámbito del Análisis funcional, en particular la introducción de espacios más generales como los espacios de Hilbert, requirieron de funciones de cuadrado integrable. Sin embargo, las integrales en \mathbb{R}^n de funciones cuadrado integrables no son siempre absolutamente integrables. Al considerar aquí integrales impropias, la densidad de $L^1 \cap L^2$ en L^2 permite definir la transformada de Fourier de funciones en L^2 , lo que lleva al famoso teorema de Plancherel (véase, por ejemplo, el Teorema 8.11 de [17]).

Estos solo son algunos de los muchos desarrollos motivados por la necesidad de extender los conceptos de integración clásica, que sigue siendo un área de investigación activa.

Históricamente, las definiciones tradicionales de integrales im-

propias se han tomado como límites de integrales sobre sucesiones de conjuntos medibles que cubren al dominio de integración casi en todas partes. Este enfoque, además de incluir integrales de funciones no acotadas y de funciones definidas en intervalos no acotados, por ejemplo, incluye la definición clásica de convergencia de una serie, donde el límite de las sumas parciales no es más que el límite de las integrales sobre los conjuntos $\{1, \dots, n\}$ respecto a la medida contadora. Sin embargo, estas definiciones tradicionales no son suficientes para solucionar algunos problemas, al menos no directamente; tal es el caso del problema de recuperar una función derivable a partir de su derivada.

Denjoy, en sus trabajos publicados en 1912 [6, 7], resolvió el problema de la recuperación de una función derivable a partir de su derivada mediante un método de integración conocido como *totalización*, el cual, aunque está inspirado en la integración impropia usual, se expresa y define de una manera muy diferente. Posteriormente, Perron en 1914 y, Henstock y Kurzweil alrededor de 1960, desarrollaron de manera independiente otros métodos de integración que resuelven el mismo problema. Estas cuatro integrales conducen a resultados equivalentes y extienden el espacio de funciones Lebesgue integrables. La teoría de estas integrales se puede consultar con mayor detalle en [9], entre otros textos.

Las integrales de Henstock y Kurzweil se suelen unificar bajo el nombre de *integral de Henstock–Kurzweil*, aunque para funciones vectoriales en general ya no son equivalentes y se tratan por separado.

Un ejemplo de una función que no es Lebesgue integrable, es la derivada de la función f definida como $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x^2)$ en $(0, 1]$ y $f(0) = 0$. En este caso, no es posible recuperar la función integrando su derivada con la integral de Lebesgue, pero sí con cualquiera de las integrales de Denjoy, Perron y Henstock–Kurzweil.

Para respetar las tradiciones al extender el concepto de función

integrable, este trabajo adopta el término *integrales generalizadas*, el cual incluye las integrales impropias; aunque, como se verá más adelante, muchas integrales generalizadas son también impropias. Por ahora, entiéndase por *integral generalizada* aquella que *extiende* el espacio de funciones integrables respecto a algún espacio de medida (la definición se precisará en el Capítulo 1). En cuanto al término *integral impropia*, se entenderá como el límite de integrales sobre sucesiones crecientes de conjuntos medibles que cubren el dominio de integración casi en todas partes.

Las integrales generalizadas usuales, como los ejemplos mencionados, comparten ciertas propiedades y características en común, lo cual motiva la búsqueda de un significado unificado y razonable del concepto de *integral generalizada*, que permita establecer bajo qué condiciones alguna regla dada es realmente un método de integración generalizada. En este sentido, Jiménez introduce en [17] una caracterización de integral generalizada para el caso de funciones definidas en \mathbb{R}^n . Uno de los objetivos de este trabajo es *revitalizar* dicha caracterización en un contexto más general y demostrar que las integrales que caen dentro de ese marco satisfacen diferentes propiedades, por ejemplo teoremas de convergencia.

En el Capítulo 1 de este trabajo, se presenta la *revitalización* de la caracterización de Jiménez en forma de una definición, cuya idea básica consiste en presentar de manera unificada las propiedades a satisfacer de una integral generalizada que extiende el espacio de funciones integrables respecto a una medida particular dada. En el contexto de dicha definición, se demuestran distintos resultados, como el teorema de la convergencia dominada, el teorema de la convergencia monótona y diversos teoremas de reordenamiento.

En la parte final del primer capítulo, se expone uno de los resultados principales del trabajo, el cual establece que, bajo ciertas condiciones *razonables*, cualquier integral generalizada puede interpretarse como una integral impropia. Esto motiva la búsqueda y construcción de métodos de integración generalizada que tengan

su punto de partida en las ideas tradicionales de la integración impropia, que es precisamente lo que se estudia y desarrolla en el resto de los capítulos. Todos los resultados presentados en el Capítulo 1 se encuentran publicados [3].

Si bien el enfoque unificado de la integración generalizada que se presenta en el primer capítulo no proporciona explícitamente métodos para integrar funciones específicas, sí establece las bases para su formulación. Uno de los objetivos de este trabajo es presentar métodos de integración generalizada que sean suficientemente amplios y permitan la aplicación directa de resultados conocidos de la teoría de la medida y de la topología, todo esto sin necesidad de desarrollar nuevas construcciones. En este sentido, en el Capítulo 2, en el marco de los espacios métricos compactos con medidas topológicas finitas, se definen distintas integrales generalizadas que a su vez son impropias en un sentido tradicional. Estas integrales provienen del trabajo de Jiménez [16], que tras ser objeto de estudio en la tesis de maestría [2] del autor del trabajo presente, fueron bautizadas como *J-integrales*

A partir de las definiciones de *J-integrales* presentadas en el Capítulo 2, no es inmediato notar que estas satisfacen la propiedad de linealidad. Para esto, en el Capítulo 3, titulado *Propiedades de la J-integral*, se demuestran diversos resultados que permiten establecer dicha propiedad. Además, se analizan resultados relacionados con la aditividad respecto al dominio de integración y se presenta un ejemplo concreto que muestra que esta propiedad no se cumple en todos los casos. Finalmente, se estudia un caso particular sobre la relación con la integral de Henstock–Kurzweil para el caso de funciones de variable real.

Otro objetivo del trabajo es extender la teoría de integración impropia, en particular la de las *J-integrales*, al caso de medidas topológicas σ -finitas, donde el escenario natural para su definición corresponde a los espacios métricos localmente compactos. De este modo, en el Capítulo 4 se presentan un par de extensiones de la

teoría de las J -integrales al caso de espacios métricos localmente compactos: una aplicable en espacios totalmente acotados y de medida finita, y la otra en espacios de medida σ -finita que satisfacen la propiedad de Heine–Borel.

Parte del desarrollo de la teoría de las J -integrales ha sido aceptado para su publicación, sujeto a correcciones menores, en *Poincaré Journal of Analysis and Applications* [18].

Capítulo 1

Integrales generalizadas

En este capítulo, antes de comenzar con el estudio de la integración generalizada, primero se establecen algunos conceptos, notaciones y propiedades de la teoría de la medida que son fundamentales para el trabajo presente.

El estudio de las integrales generalizadas comienza con la *re-vitalización* de la definición de integral generalizada introducida en [17] por Jiménez. A partir de esta definición, se formulan y demuestran versiones de teoremas de convergencia clásicos, como el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue y el teorema de la convergencia monótona. Estos resultados facilitan la aplicación de la teoría clásica de medida e integración en el contexto de las integrales generalizadas.

Después, se formulan y demuestran un par de teoremas de reordenamiento. Como se verá al final del capítulo, la relevancia de estos teoremas radica en que revelan la conexión entre ciertas integrales generalizadas con la integración impropia, la cual motiva gran parte del desarrollo de los capítulos posteriores.

Las definiciones y resultados presentados en este capítulo se encuentran en [3]. A lo largo del capítulo, no se hará referencia adicional a este artículo, ya que todo el contenido está basado en él.

1.1. Conceptos preliminares y notaciones

A lo largo del texto, y salvo que se indique lo contrario, una sucesión de conjuntos $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se denotará simplemente por $(A_n)_n$ o (A_n) (similarmente para sucesiones de números y de funciones), y en lugar de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, se escribirá $\bigcup_n A_n$. Además, para sucesiones crecientes y decrecientes de conjuntos, se emplearán las notaciones, $(A_n \uparrow)$ y $(A_n \downarrow)$, respectivamente. Asimismo, el símbolo \subset indicará la inclusión entre conjuntos, mientras que \subsetneq se usará para denotar la inclusión estricta, en caso de ser necesario.

Dado un conjunto X no vacío, una σ -álgebra \mathcal{M} de subconjuntos de X y una medida positiva μ definida en \mathcal{M} , se denota por (X, \mathcal{M}, μ) el espacio de medida correspondiente. La medida μ es finita si $\mu(X) < \infty$, y es σ -finita si existe una sucesión de subconjuntos $(X_n) \subset \mathcal{M}$ tal que $X = \bigcup_n X_n$ y cada X_n tiene medida finita. Obsérvese que toda medida finita también es σ -finita.

Definición 1.1.1 Dado un espacio de medida (X, \mathcal{M}, μ) , la medida μ es completa si para cada $A \in \mathcal{M}$ con $\mu(A) = 0$, se tiene que todo $B \subset A$ pertenece a \mathcal{M} .

Se demuestra que todo espacio de medida (X, \mathcal{M}, μ) puede ser *completado* en un sentido minimal: a partir de \mathcal{M} y μ , se obtienen una σ -álgebra $\overline{\mathcal{M}}$ y una medida $\overline{\mu}$ en $\overline{\mathcal{M}}$, tales que $\mathcal{M} \subset \overline{\mathcal{M}}$, $\overline{\mu}|_{\mathcal{M}} = \mu$ y $\overline{\mu}$ es completa, y si (X, \mathcal{N}, η) es un espacio de medida completa tal que $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ y $\eta|_{\mathcal{M}} = \mu$, entonces $\overline{\mathcal{M}} \subset \mathcal{N}$ y $\eta|_{\overline{\mathcal{M}}} = \overline{\mu}$. En este caso, se dirá que $\overline{\mathcal{M}}$ es la completación de \mathcal{M} .

Cuando X es espacio topológico de Hausdorff se tiene la definición siguiente:

Definición 1.1.2 Sean (X, \mathcal{O}) un espacio topológico de Hausdorff, \mathcal{K} la clase de conjuntos compactos de X y \mathcal{M} una σ -álgebra de X que contiene la σ -álgebra generada por los conjuntos abiertos de X . Se dice que una medida μ definida en \mathcal{M} es:

1. boreliana, si para todo $K \in \mathcal{K}$ se cumple que $\mu(K) < \infty$,

2. interiormente regular, si para todo $A \in \mathcal{M}$,

$$\mu(A) = \sup \{ \mu(K) : K \subset A \text{ y } K \in \mathcal{K} \},$$

3. exteriormente regular, si para todo $A \in \mathcal{M}$,

$$\mu(A) = \inf \{ \mu(U) : A \subset U \text{ y } U \in \mathcal{O} \},$$

4. regular, si es exteriormente regular e interiormente regular.

La medida de Lebesgue, que se denotará por ν , es un ejemplo de medida boreliana, completa y regular en \mathbb{R} con la topología usual.

De aquí en adelante, dado un espacio topológico X , se continuará utilizando la notación \mathcal{O} para la topología de X , y \mathcal{K} para la clase de conjuntos compactos de X . Además, al tratar con medidas borelianas, se asumirá que la medida es completa y está definida sobre la completación de la σ -álgebra generada por los conjuntos abiertos de X , es decir, sobre la σ -álgebra de Borel de X .

Dado un espacio de medida (X, \mathcal{M}, μ) , el espacio de funciones medibles definidas en X con valores reales se representa por $M(X, \mathbb{R})$, el cual, mientras no exista confusión, se abreviará como $M(X)$ o simplemente M . Además, se supondrá que M está conformado por las clases de equivalencia de funciones iguales μ -c.d. (μ -casi dondequiera).

Por otro lado, el espacio de funciones absolutamente integrables respecto a la medida μ se denotará por $L^1(\mu)$, y la integral de una función $f \in L^1(\mu)$ sobre todo su dominio X se expresará por $\int f d\mu$. Finalmente, para $A \in \mathcal{M}$, 1_A representará la función característica de A .

Para más detalles sobre los conceptos básicos y propiedades de la teoría de la medida, véanse [8, 17], por mencionar algunas referencias.

1.2. Definición de integral generalizada

Jiménez, en su libro *Medida, Integración y Funcionales* [17], en un epígrafe dedicado a la integración impropia, introduce la definición siguiente de integral generalizada, la cual, aunque originalmente formulada en el contexto de \mathbb{R}^m , se puede trasladar idénticamente al contexto general de espacios de medida:

Definición 1.2.1 El par (T, E) es una integral generalizada relativa a un espacio de medida (X, \mathcal{M}, μ) en una clase dada \mathcal{C} de espacios de medida, si $E \subset M$ es un espacio vectorial, T es un funcional lineal en E y se cumplen las condiciones siguientes:

1. $L^1(\mu) \subset E$.
2. Si $f \in E$ y $f \geq 0$, entonces $f \in L^1(\mu)$.
3. Si $f \in L^1(\mu)$, entonces $T(f) = \int f d\mu$.

La notación (T, E) puede simplificarse por T , las funciones pertenecientes a E pueden identificarse llamándolas T -integrables, y la T -integral de una función $f \in E$ puede denotarse mediante $T(f) = (T) \int f$. Al tratar con medidas contadoras y series, en lugar de “integrales generalizadas” se usará el término “métodos de sumación generalizados”, con idéntico significado.

Como ejemplos de integrales generalizadas en distintas clases \mathcal{C} de espacios de medida, están la sumación usual de series reales en la clase de los números naturales con la medida contadora, y las integrales de Denjoy, Perron, Henstock–Kurzweil en la clase de intervalos reales con la medida de Lebesgue.

Para el caso de series, dado el espacio de medida $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), \mu)$, con $P(\mathbb{N})$ el conjunto potencia de \mathbb{N} y μ la medida contadora, considérese E como el conjunto de sucesiones tales que su serie correspondiente converge en el sentido usual y T como el funcional que a cada sucesión en E le asigna el límite de su serie. Así, teniendo en cuenta que $(a_n) \in L^1(\mu)$ si y solo si $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < \infty$,

es evidente que el método de sumación usual es una integral generalizada en el sentido de la Definición 1.2.1. En este caso, por ejemplo, se tiene que la sucesión $((-1)^{n+1}/n)$ no está en $L^1(\mu)$ pero sí pertenece a E .

La suma de Cesàro y algunos métodos de sumación matricial (véase [12]) también caen en el contexto de la Definición 1.2.1 y además generalizan la sumación usual de series. Un ejemplo de la relevancia de estos métodos de sumación es el siguiente: se demuestra que, con la suma de Cesàro, la serie de Fourier de una función continua y 2π -periódica converge uniformemente a la función, y esta convergencia se puede alcanzar con un *mejor grado de aproximación* utilizando un método particular de sumación matricial, como lo hace P. Korovkin en [22].

Por otro lado, a diferencia de la sumación usual de series, no es directo notar que las integrales de Denjoy, Perron y Henstock–Kurzweil en la clase de intervalos reales compactos con la medida de Lebesgue son integrales generalizadas en el sentido de la Definición 1.2.1. Sin embargo, el teorema siguiente, que es una compilación de resultados consultados en [9], muestra que la integral de Henstock–Kurzweil, que se denotará por HK , efectivamente es una integral generalizada.

Teorema 1.2.2 *Considérese $[a, b] \subset \mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue ν , y sean $f, g \in M([a, b], \mathbb{R})$ y $r \in \mathbb{R}$.*

1. *Si f y g son funciones HK -integrables, entonces $rf + g$ es HK -integrable y*

$$(HK) \int (rf + g) = r(HK) \int f + (HK) \int g.$$

2. *Si $f \in L^1(\nu)$, entonces f es HK -integrable y*

$$\int f d\nu = (HK) \int f.$$

3. Si f es HK-integrable y $f \geq 0$, entonces $f \in L^1(\nu)$.

Como se mencionó en la Introducción, las integrales de Denjoy, Perron y Henstock–Kurzweil conducen a resultados equivalentes, por lo que el Teorema 1.2.2 también es válido para las integrales de Denjoy y Perron.

Otros ejemplos de integrales que también satisfacen la caracterización dada en la Definición 1.2.1 son la C -integral, introducida en [5], y el valor principal de Cauchy. La C -integral, al igual que la integral de Henstock–Kurzweil, se define a partir de integrales de Riemann e integra las derivadas de funciones derivables; además, es la integral *mínima* de este tipo que generaliza a la de Lebesgue y que integra derivadas.

En los ejemplos mencionados, las integrales generalizadas tienen lugar en clases de espacios de medida muy particulares, \mathbb{N} con la medida contadora o intervalos reales con la medida de Lebesgue. En los capítulos siguientes, se estudiarán algunas integrales generalizadas en clases de espacios métricos localmente compactos con medidas borelianas.

1.2.1. Propiedades básicas

Sean (X, \mathcal{M}, μ) un espacio de medida, $Y \in \mathcal{M}$ y $f \in M(X)$. Se denotará por $(Y, \mathcal{M}_Y, \mu_Y)$ al subespacio de medida correspondiente y por f_Y la función f restringida a Y . Se satisface que $1_Y f \in L^1(\mu)$ si y solo si $f_Y \in L^1(\mu_Y)$, y en tal caso, $\int_Y f d\mu = \int f_Y d\mu_Y$.

Ahora, supóngase que (T, E) es una integral generalizada relativa a (X, \mathcal{M}, μ) en una clase dada \mathcal{C} . Sean

$$E_Y = \{g \in M(Y) : 1_Y g \in E\}$$

y T_Y definido para $g \in E_Y$ por $T_Y(g) = T(1_Y g)$. Para hablar de la T -integrabilidad de f sobre Y podría ser suficiente preguntarse si $1_Y f \in E$, ¿pero qué pasa con la función $f_Y \in M(Y)$? En principio, el espacio de medida $(Y, \mathcal{M}_Y, \mu_Y)$ no tiene por qué pertenecer a

la clase \mathcal{C} ni (E_Y, T_Y) tiene por qué ser una integral generalizada respecto a $(Y, \mathcal{M}_Y, \mu_Y)$. Con la finalidad de evitar este tipo de complicaciones se introduce la definición siguiente:

Definición 1.2.3 Sea (T, E) una integral generalizada relativa a un espacio de medida (X, \mathcal{M}, μ) en una clase dada \mathcal{C} . Se dirá que (T, E) es μ -hereditaria compatible si para cada $Y \in \mathcal{M}$ que satisfaga $(Y, \mathcal{M}_Y, \mu_Y) \in \mathcal{C}$, se cumple:

1. (T_Y, E_Y) es integral generalizada relativa a $(Y, \mathcal{M}_Y, \mu_Y)$.
2. Para cada $g \in M(X)$, $g_Y \in E_Y$ si y solo si $1_Y g \in E$ y se satisface la igualdad $T(1_Y g) = T_Y(g_Y)$.

De la definición anterior, si (T, E) es una integral generalizada relativa a un espacio de medida (X, \mathcal{M}, μ) en una clase dada \mathcal{C} , $Y \in \mathcal{M}$, $(Y, \mathcal{M}_Y, \mu_Y) \in \mathcal{C}$, $g \in L^1(\mu_Y)$ y (T, E) tiene la propiedad de ser μ -hereditaria compatible, se deduce directamente que $1_Y g \in E$ y $T(1_Y g) = T_Y(g_Y) = \int g_Y d\mu_Y = \int_Y g d\mu$.

Asumir la propiedad de la Definición 1.2.3 permite demostrar propiedades básicas de las integrales generalizadas, por ejemplo:

Proposición 1.2.4 Sea (T, E) una integral generalizada relativa a un espacio de medida (X, \mathcal{M}, μ) en una clase dada \mathcal{C} y sean $A, B \in \mathcal{M}$ tales que $A \cup B = X$, $\mu(A \cap B) = 0$ y los subespacios de medida $(A, \mathcal{M}_A, \mu_A)$ y $(B, \mathcal{M}_B, \mu_B)$ pertenecen a \mathcal{C} . Si (T, E) tiene la propiedad de ser μ -hereditaria compatible y si una función f es T -integrable en dos de los tres espacios A , B ó X , entonces lo es en el tercero y se satisface

$$T(f) = T_A(f_A) + T_B(f_B) \quad (1.2.1)$$

Demostración: Sin pérdida de generalidad, supóngase que f es una función T -integrable en A y en B . Como $(A, \mathcal{M}_A, \mu_A)$, $(B, \mathcal{M}_B, \mu_B) \in \mathcal{C}$ y (T, E) es μ -hereditaria compatible, se tiene que

$$1_A f \in E, T(1_A f) = T_A(f), 1_B f \in E \text{ y } T(1_B f) = T_B(f).$$

Luego, como T es lineal en E y $f = 1_A f + 1_B f$ μ -c.d., se tiene $f \in E$ y $T(f) = T_A(f_A) + T_B(f_B)$. \square

A partir de este momento, al tratar con integrales generalizadas relativas a un espacio de medida en una clase dada, mientras no se especifique lo contrario se dará por hecho que satisfacen la propiedad *hereditaria compatible* de la Definición 1.2.3.

Otra propiedad básica tiene que ver con una de las ideas fundamentales detrás de la Definición 1.2.1. Si una función no es integrable en el sentido usual pero sí lo es mediante alguna integral generalizada, es porque de alguna manera hay *cancelación de áreas*, lo cual se ilustra en términos de las partes positiva y negativa de una función. Dada una función $f \in M$, se definen la parte positiva y la parte negativa de f como $f^+ = \max\{f, 0\}$ y $f^- = -\min\{f, 0\}$ respectivamente, y se satisface $f = f^+ - f^-$ y $|f| = f^+ + f^-$. Luego, se cumple lo siguiente:

Proposición 1.2.5 *Sea (T, E) una integral generalizada relativa a (X, \mathcal{M}, μ) en una clase dada \mathcal{C} . Si $f \in E$ y $f \notin L^1(\mu)$, entonces $f^+, f^- \notin L^1(\mu)$.*

Demostración: Sea $f \in E$ tal que $f \notin L^1(\mu)$ y supóngase que $f^+ \in L^1(\mu)$. Entonces, se tiene $f^+ \in E$. Luego, como $f^- = f^+ - f$ y E es espacio vectorial se tiene que $f^- \in E$, pero $f^- \geq 0$, así que $f^- \in L^1(\mu)$, de donde $f \in L^1(\mu)$, lo que lleva a una contradicción. \square

La propiedad de la Proposición 1.2.5 es fundamental para la existencia de teoremas de reordenamiento de tipo Riemann en el contexto de las integrales generalizadas, tema que se tratará más adelante en este mismo capítulo.

1.3. Teoremas de convergencia

Como se anunció anteriormente, uno de los objetivos de la Definición 1.2.1 es facilitar el uso de la teoría clásica de medida e integración en el contexto nuevo de las integrales generalizadas. Para ello, en esta sección se presentan y se demuestran versiones de los teoremas de la convergencia dominada de Lebesgue y de la convergencia monótona para integrales generalizadas.

En lo que sigue, se considera una integral generalizada (T, E) relativa a un espacio de medida positiva (X, \mathcal{M}, μ) en una clase dada \mathcal{C} .

Teorema 1.3.1 (convergencia dominada) *Sea $(f_n) \subset E$ una sucesión de funciones que converge a una función f μ -c.d. Si existen funciones $g, h \in E$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$, $h \leq f_n \leq g$ μ -c.d., entonces $f \in E$ y $\lim_n T(f_n) = T(f)$.*

Demostración: De las hipótesis, se tiene que $\lim_n (f_n - f_1) = f - f_1$ μ -c.d., y para cada $n \in \mathbb{N}$, $|f_n - f_1| \leq g - h$ μ -c.d. Luego, como $g - h \in E$ y $g - h \geq 0$, de la Definición 1.2.1, $g - h \in L^1(\mu)$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n - f_1 \in L^1(\mu)$. Entonces, por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue se tiene que

$$f - f_1 \in L^1(\mu) \quad \text{y} \quad \lim_n \int (f_n - f_1) d\mu = \int (f - f_1) d\mu.$$

Como $L^1(\mu) \subset E$, $f = (f - f_1) + f_1 \in E$, y como T restringido a $L^1(\mu)$ coincide con la integral usual,

$$\begin{aligned} T(f) &= T(f - f_1) + T(f_1) \\ &= \int (f - f_1) d\mu + T(f_1) \\ &= \lim_n \int (f_n - f_1) d\mu + T(f_1) & (1.3.1) \\ &= \lim_n T(f_n - f_1) + T(f_1) \\ &= \lim_n T(f_n), \end{aligned}$$

con lo cual se concluye la prueba. \square

El teorema anterior puede formularse con hipótesis más generales:

Teorema 1.3.2 Sean $(f_n), (h_n), (g_n) \subset E$ y $h, g \in E$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$, $h_n \leq f_n \leq g_n$ μ -c.d., $\lim_n h_n = h$ μ -c.d., $\lim_n g_n = g$ μ -c.d., $\lim_n T(h_n) = T(h)$ y $\lim_n T(g_n) = T(g)$. Si f_n converge a una función f μ -c.d., entonces $f \in E$ y $\lim_n T(f_n) = T(f)$.

Demostración: De las hipótesis, se tiene que $0 \leq g - h$, $g - h \in E$, y para cada $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq f_n - h_n \leq g_n - h_n$, $f_n - h_n \in E$ y $g_n - h_n \in E$. Entonces, todas estas funciones pertenecen a $L^1(\mu)$ y

$$\begin{aligned} \int (g - h) d\mu &= T(g - h) \\ &= T(g) - T(h) \\ &= \lim_n T(g_n) - \lim_n T(h_n) \\ &= \lim_n T(g_n - h_n) \\ &= \lim_n \int (g_n - h_n) d\mu. \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

Por una aplicación del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue con hipótesis más generales, véase [31] Teorema 19 pp. 89, se tiene

$$f - h \in L^1(\mu) \quad \text{y} \quad \lim_n \int (f_n - h_n) d\mu = \int (f - h) d\mu. \tag{1.3.3}$$

Entonces, como $f = (f - h) + h \in E$,

$$\begin{aligned}
 T(f) &= T(f - h) + T(h) \\
 &= \int (f - h)d\mu + T(h) \\
 &= \lim_n \int (f_n - h_n)d\mu + T(h) \\
 &= \lim_n T(f_n - h_n) + \lim_n T(h_n) \\
 &= \lim_n T(f_n),
 \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

lo que concluye la prueba. □

Siguiendo un esquema similar al de las pruebas de los dos teoremas anteriores, también se puede formular y demostrar el teorema de convergencia monótona:

Teorema 1.3.3 (convergencia monótona) *Sea $(f_n) \subset E$ una sucesión creciente μ -c.d. que converge a una función f μ -c.d., y supóngase que $\lim_n T(f_n)$ existe. Entonces, $f \in E$ y $\lim_n T(f_n) = T(f)$.*

Demostración: De las hipótesis se tiene que $\lim_n f_n - f_1 = f - f_1$ μ -c.d., y para cada $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq f_n - f_1 \leq f_{n+1} - f_1$ μ -c.d. Además, $f_n - f_1 \in L^1(\mu)$, debido a que $f_n - f_1 \in E$ y $f_n - f_1 \geq 0$. Entonces, por el teorema de la convergencia monótona de Lebesgue se tiene que

$$f - f_1 \in L^1(\mu) \quad \text{y} \quad \lim_n \int (f_n - f_1)d\mu = \int (f - f_1)d\mu. \tag{1.3.5}$$

Luego, como $f = (f - f_1) + f_1 \in E$,

$$\begin{aligned}
 T(f) &= T(f - f_1) + T(f_1) \\
 &= \int (f - f_1) d\mu + T(f_1) \\
 &= \lim_n \int (f_n - f_1) d\mu + T(f_1) \\
 &= \lim_n T(f_n - f_1) + T(f_1) \\
 &= \lim_n T(f_n),
 \end{aligned} \tag{1.3.6}$$

con lo cual se concluye la prueba. \square

El objetivo de esta sección no ha sido presentar nuevos teoremas de convergencia más profundos que los ya conocidos, sino presentar un enfoque unificado de los teoremas clásicos en el contexto de integrales generalizadas. Por supuesto, otros enfoques para integrales particulares son posibles. Por ejemplo, en el marco de la teoría de integración de Henstock–Kurzweil, están el teorema de convergencia dominada presentado por Jitan Lu y Peng-Yee Lee [24], y el teorema de convergencia monótona para funciones vectoriales presentado por Heikkilä [13].

1.4. Teoremas de reordenamiento

En esta sección, se plantean y se demuestran versiones abstractas del teorema de reordenamiento de Riemann para integrales generalizadas según la Definición 1.2.1. La relevancia de estos resultados radica en que muestran la conexión entre integrales generalizadas e integrales impropias.

Para series reales, el teorema de reordenamiento de Riemann establece lo siguiente:

Teorema 1.4.1 *Sea $(a_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $\sum_n a_n$ es condicionalmente convergente y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces, existe un reordenamiento $(a_{\varphi(n)})$ de (a_n) tal que $\sum_n a_{\varphi(n)} = \alpha$.*

Los ingredientes clave que permiten probar el resultado son dos. Primero, si (a_n^+) y (a_n^-) son la parte positiva y negativa de (a_n) respectivamente, entonces $\sum_n a_n^+ = \infty$ y $\sum_n a_n^- = \infty$, que es justamente la Proposición 1.2.5 para el caso de la sumación usual de series y la medida contadora en el conjunto de los naturales. Segundo, $\lim_n a_n = 0$. Para más detalles sobre este resultado, véase por ejemplo [35] (Capítulo 23, Series infinitas).

El Teorema 1.4.1 puede reformularse y extenderse al caso de series con coeficientes en el plano complejo o en el espacio euclidiano m -dimensional (véase [30]). El estudio del caso de series con coeficientes en otros espacios es extenso e interesante, pero se sale del enfoque de este trabajo. La intención aquí es plantear el resultado análogo considerando medidas distintas a la contadora, en específico, medidas *no-atómicas*.

Considérese un espacio de medida (X, \mathcal{M}, μ) . Un conjunto $A \in \mathcal{M}$ es un *átomo* si $\mu(A) > 0$ y para todo $B \subset A$ tal que $B \in \mathcal{M}$ se cumple que $\mu(B) = \mu(A)$ ó $\mu(B) = 0$. Se dice que μ es una medida *no-atómica* si \mathcal{M} no tiene átomos, es decir:

Definición 1.4.2 La medida μ es no-atómica si para todo $A \in \mathcal{M}$ de medida estrictamente positiva, existe $B \in \mathcal{M}$ tal que $B \subset A$ y $0 < \mu(B) < \mu(A)$.

La medida de Lebesgue en \mathbb{R} es un ejemplo de medida no-atómica.

Por otro lado, en [19] se define:

Definición 1.4.3 La medida μ es *puramente atómica* si existe $(A_n) \subset \mathcal{M}$ tal que $X = \bigcup_n A_n$ y cada A_n es un átomo.

La medida contadora en el conjunto de los números naturales es puramente atómica. Otro ejemplo es la medida de Dirac: dado $x \in X$, si $\{x\} \in \mathcal{M}$, la medida de Dirac δ_x (o medida concentrada en el punto x) se define para $A \in \mathcal{M}$ como $\delta_x(A) = 1$ si $x \in A$ y $\delta_x(A) = 0$ si $x \notin A$. En general, dadas $(a_n) \subset \mathbb{R}$ y $(x_n) \subset X$ con $\{x_n\} \in \mathcal{M}$, la medida $\sum_n a_n \delta_{x_n}$ es puramente atómica. En este

caso, la integral de una función respecto a la medida $\sum_n a_n \delta_{x_n}$ se puede expresar como una serie.

En [19] se demuestra el resultado siguiente:

Teorema 1.4.4 *Si (X, \mathcal{M}, μ) es un espacio de medida σ -finita, entonces existen medidas μ_1 y μ_2 definidas en \mathcal{M} tales que $\mu = \mu_1 + \mu_2$, μ_1 es puramente atómica y μ_2 es no-atómica.*

Del Teorema 1.4.4, la integral de una función $f \in M$ respecto a μ se escribe como la suma de las integrales respecto a cada una de las medidas μ_1 y μ_2 , y salvo ciertos casos particulares, la integral respecto a la medida puramente atómica se puede escribir como una serie, y puesto que ya existe una amplia teoría de sumación de series, el trabajo presente se enfoca en medidas no-atómicas.

Las medidas no-atómicas satisfacen la propiedad siguiente:

Teorema 1.4.5 *Sea (X, \mathcal{M}, μ) un espacio de medida σ -finita. Si μ es no-atómica, entonces para cada $A \in \mathcal{M}$ y para todo $t \in [0, \mu(A)]$ existe $B \in \mathcal{M}$ tal que $B \subset A$ y $\mu(B) = t$.*

Obsérvese que el recíproco del resultado se deduce directamente.

El Teorema 1.4.5 lo demostró W. Sierpiński [34] para la medida de Lebesgue, mientras que A. Lyapunov [25] lo demostró para el caso más general de medidas con valores en \mathbb{R}^m . Para una referencia más accesible, véase [11], sección 41, pp. 174.

Dados (X, \mathcal{M}, μ) y $f \in M$ no negativa, se demuestra que la medida λ definida para cada $A \in \mathcal{M}$ como $\lambda(A) = \int_A f d\mu$ (denotada por $d\lambda = f d\mu$), es no-atómica siempre que μ sea no-atómica y σ -finita:

Lema 1.4.6 *Sea μ una medida no-atómica y σ -finita. Dada una función no negativa $f \in M$, la medida $d\lambda = f d\mu$ también es no-atómica.*

Demostración: Para evitar el caso trivial, supóngase que f no es la función cero. Sea $A \in \mathcal{M}$. Si $(X_n) \subset \mathcal{M}$ es tal que $X = \bigcup_n X_n$

y $\mu(X_n) < \infty$, el caso $\lambda(A) = \infty$ se reduce al caso de medida finita al considerar para cada $k, n \in \mathbb{N}$ los conjuntos

$$Y_{k,n} = \{x \in X : f(x) \leq k\} \cap X_n. \quad (1.4.1)$$

Restringiéndose a un subconjunto de X si fuese necesario, se puede suponer que $f > 0$ μ -c.d. Entonces, la prueba se ha reducido al caso $0 < \lambda(A) < \infty$, $0 < \mu(A) < \infty$ y $f|_A > 0$ μ -c.d. Como μ es no-atómica, elijase $B \in \mathcal{M}$ tal que $B \subset A$ y $0 < \mu(B) < \mu(A)$. Es claro que $\int_B f d\mu > 0$ y $\int_{A \setminus B} f d\mu > 0$, por lo tanto $0 < \lambda(B) < \lambda(A)$. \square

Regresando por un momento a las series reales, se tiene que si $(a_n) \subset \mathbb{R}$ es tal que la serie $\sum_n a_n$ es absolutamente convergente, entonces para cualquier reordenamiento $(a_{\varphi(n)})$ de (a_n) se cumple $\sum_n a_{\varphi(n)} = \sum_n a_n$. Además, obsérvese que cada suma parcial de la forma $\sum_{i=1}^n a_i$ es la integral sobre el conjunto $\{1, \dots, n\}$ respecto a la medida contadora, de donde el límite $\lim_n \sum_{i=1}^n a_i$ es un límite de integrales sobre los elementos de una sucesión creciente de subconjuntos de \mathbb{N} .

Ahora, si (X, \mathcal{M}, μ) es un espacio de medida en general y $f \in M$ es tal que $f \in L^1(\mu)$, como consecuencia del teorema de la convergencia dominada clásico, para cualquier sucesión creciente de conjuntos medibles, $(A_n \uparrow) \subset \mathcal{M}$, con $\mu(X \setminus \bigcup_n A_n) = 0$, se cumple $\lim_n \int_{A_n} f d\mu = \int f d\mu$. En este sentido, se puede plantear una formulación análoga al teorema de reordenamiento de Riemann pero para integrales generalizadas: si $f \in M$ es tal $f \notin L^1(\mu)$, pero es T -integrable mediante algún método generalizado T , y $\alpha \in \mathbb{R}$, ¿existirá $(A_n \uparrow) \subset \mathcal{M}$ tal que

$$\mu\left(X \setminus \bigcup_n A_n\right) = 0, \quad 1_{A_n} f \in L^1(\mu) \quad \text{y} \quad \lim_n \int_{A_n} f d\mu = \alpha?$$

El teorema presentado a continuación responde afirmativamente la pregunta planteada para el caso de medidas σ -finitas y no-

atómicas.

Teorema 1.4.7 *Sea (T, E) una integral generalizada relativa al espacio de medida σ -finita y no-atómica (X, \mathcal{M}, μ) en una clase dada \mathcal{C} , y sea $f \in E$ tal que $f \notin L^1(\mu)$. Entonces, para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ existe $(C_n \uparrow) \subset \mathcal{M}$ tal que $X = \bigcup_n C_n$ y para cada $n \in \mathbb{N}$: $\mu(C_n) < \infty$, $1_{C_n} f \in L^1(\mu)$ y $\int_{C_n} f d\mu = \alpha$.*

Demostración: Sea $(X_n \uparrow) \subset \mathcal{M}$ una sucesión de conjuntos de medida finita tal que $X = \bigcup_n X_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tómesese

$$\begin{aligned} A_n &= \{x : f^+(x) \leq n\} \cap X_n \quad \text{y} \\ B_n &= \{x : 0 < f^-(x) \leq n\} \cap X_n. \end{aligned}$$

Entonces, las sucesiones de conjuntos (A_n) y (B_n) son crecientes y para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$\begin{aligned} A_n, B_n \in \mathcal{M}, \quad A_n \cap B_n = \emptyset, \quad 1_{A_n} f^+, 1_{B_n} f^- \in L^1(\mu) \quad \text{y} \\ \bigcup_n (A_n \cup B_n) = X. \end{aligned}$$

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y supóngase que $\alpha \geq 0$. Se construirá por inducción una sucesión creciente $(C_n \uparrow) \subset \mathcal{M}$ tal que $X = \bigcup_n C_n$, y para cada $n \in \mathbb{N}$, $\int_{C_n} f d\mu = \alpha$.

De la Proposición 1.2.5, se tiene que $f^+, f^- \notin L^1(\mu)$, lo que permite tomar $p_1, q_1 \in \mathbb{N}$ de forma que q_1 es el primer $m \in \mathbb{N}$ tal que $\int_{B_m} f^- d\mu > 0$, y p_1 es el primer $m \in \mathbb{N}$ tal que $\int_{A_m \cup B_{q_1}} f d\mu \geq \alpha$. Si $\int_{A_{p_1} \cup B_{q_1}} f d\mu = \alpha$, tómesese $C_1 = A_{q_1} \cup B_{p_1}$ y defínase $D_1 = \emptyset$. Si no, se tiene

$$\alpha < \int_{A_{p_1} \cup B_{q_1}} f d\mu = \int_{A_{p_1}} f d\mu + \int_{B_{q_1}} f d\mu, \quad (1.4.2)$$

de donde

$$0 \leq \alpha - \int_{B_{q_1}} f d\mu < \int_{A_{p_1}} f d\mu. \quad (1.4.3)$$

Por el Lema 1.4.6 y el Teorema 1.4.5, existe $E_1 \subset A_{p_1}$ tal que

$\int_{E_1} f d\mu = \alpha - \int_{B_{q_1}} f d\mu$. Entonces,

$$\int_{E_1 \cup B_{q_1}} f d\mu = \alpha. \quad (1.4.4)$$

Sea $D_1 = A_{p_1} \setminus E_1$ y tómesese $C_1 = (A_{p_1} \setminus D_1) \cup B_{q_1}$.

Para $n \geq 2$, el conjunto C_n se define por inducción de la forma siguiente:

Supóngase que se tienen

$$p_1, \dots, p_k \in \mathbb{N}, \quad q_1, \dots, q_k \in \mathbb{N}, \quad D_1, \dots, D_k \in \mathcal{M} \text{ y } C_1, \dots, C_k \in \mathcal{M}$$

tales que para cada $i \in \{1, \dots, k\}$,

$$D_i \subset A_{p_i}, \quad C_i = (A_{p_i} \setminus D_i) \cup B_{q_i} \quad \text{y} \quad \int_{C_i} f d\mu = \alpha.$$

Sea q_{k+1} el primer $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$m > q_k \quad \text{y} \quad \int_{A_{p_k} \cup B_m} f d\mu < \alpha,$$

y sea p_{k+1} el primer $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$m > p_k \quad \text{y} \quad \int_{A_m \cup B_{q_{k+1}}} f d\mu \geq \alpha.$$

Obsérvese que p_{k+1} y q_{k+1} se pueden tomar de esa forma por la Proposición 1.2.5.

Si $\int_{A_{p_{k+1}} \cup B_{q_{k+1}}} f d\mu = \alpha$, tómesese $C_{k+1} = A_{p_{k+1}} \cup B_{q_{k+1}}$ y $D_{k+1} = \emptyset$. Si no, se tiene que

$$\int_{A_{p_k} \cup B_{q_{k+1}}} f d\mu < \alpha < \int_{A_{p_{k+1}} \cup B_{q_{k+1}}} f d\mu, \quad (1.4.5)$$

de donde

$$0 < \alpha - \int_{A_{p_k} \cup B_{q_{k+1}}} f d\mu < \int_{A_{p_{k+1}} \setminus A_{p_k}} f d\mu. \quad (1.4.6)$$

Por el Lema 1.4.6 y el Teorema 1.4.5, existe $E_{k+1} \subset A_{p_{k+1}} \setminus A_{p_k}$ tal que $\int_{E_{k+1}} f d\mu = \alpha - \int_{A_{p_k} \cup B_{q_{k+1}}} f d\mu$. Entonces,

$$\int_{A_{p_k} \cup E_{k+1} \cup B_{q_{k+1}}} f d\mu = \alpha. \quad (1.4.7)$$

Sea $D_{k+1} = A_{p_{k+1}} \setminus (A_{p_k} \cup E_{k+1})$ y tómesese $C_{k+1} = (A_{p_{k+1}} \setminus D_{k+1}) \cup B_{q_{k+1}}$.

Por lo tanto, se ha construido $(C_n \uparrow) \subset \mathcal{M}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\int_{C_n} f d\mu = \alpha$. Para garantizar que se cumple $X = \bigcup_n C_n$, nótese que cada $x \in X$ es un elemento de $(A_n \cup B_n)$ para algún $n \in \mathbb{N}$, y por construcción, $(A_n \cup B_n) \subset C_{n+1}$.

Para $\alpha < 0$, es suficiente realizar el mismo análisis sustituyendo f por $-f$. \square

En lo que sigue, el objetivo es plantear y demostrar el resultado anterior para el caso de espacios de medida con estructura topológica. Para ello, considérese la clase \mathcal{R} de los espacios de medida localmente compactos con medida σ -finita, boreliana y regular.

Obsérvese que si una medida μ es boreliana y no-atómica, entonces los conjuntos unitarios son medibles y miden cero. A las medidas borelianas que se anulan en los puntos W. Rudin les llama *medidas continuas* [32], término que no parece tan ajeno considerando lo siguiente: las medidas borelianas sobre \mathbb{R} están asociadas a una función creciente y continua a la derecha (o continua a la izquierda, como lo presenta A. Kolmogorov [21]), y se cumple que la medida de un punto es cero si y solo si dicha función es continua. Sin embargo, en este trabajo se utilizará el término *medidas difusas*:

Definición 1.4.8 Dado un espacio de medida (X, \mathcal{M}, μ) , la medida μ es difusa si para cada $x \in X$ se tiene que $\{x\} \in \mathcal{M}$ y $\mu(\{x\}) = 0$.

Entonces, se tiene que toda medida no-atómica y boreliana es también difusa. El recíproco puede no ser cierto, pero para el caso de espacios de medida en la clase \mathcal{R} se satisface el resultado siguiente:

Proposición 1.4.9 *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu) \in \mathcal{R}$. Si μ es difusa, entonces es no-atómica.*

Demostración: Sea $A \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(A) > 0$. Si $\mu(A) = \infty$, por la regularidad interior de μ , se tiene $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A, K \in \mathcal{K}\}$, y como $\mu(K) < \infty$ para cada $K \in \mathcal{K}$, existe $J \in \mathcal{K}$ tal que $J \subset A$ y $0 < \mu(J) < \infty$.

Supóngase ahora que $0 < \mu(A) < \infty$ y sea $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < \mu(A)$. Tómese $K \in \mathcal{K}$ de forma que $K \subset A$ y $\mu(A \setminus K) < \epsilon$. Se tiene entonces que $0 < \mu(K)$. Luego, como μ es difusa y exteriormente regular, para cada $x \in K$ existe $V_x \in \mathcal{O}$ tal que $x \in V_x$ y $\mu(V_x) < \mu(K)$. Como K es compacto y la colección $\{V_x\}_{x \in K}$ es una cubierta abierta de K , existen $x_1, \dots, x_m \in K$ tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^m V_{x_i}$. Nótese que $K = \bigcup_{i=1}^m V_{x_i} \cap K$, y para cada $i = 1, \dots, m$,

$$\mu(V_{x_i} \cap K) \leq \mu(V_{x_i}) < \mu(K) \leq \mu(A).$$

Entonces, se tiene que

$$0 < \mu(K) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^m V_{x_i} \cap K\right) \leq \sum_{i=1}^m \mu(V_{x_i} \cap K). \quad (1.4.8)$$

Por lo tanto, existe $j \in \{1, \dots, m\}$ tal que $0 < \mu(V_{x_j} \cap K) < \mu(A)$.
□

Las hipótesis de la Proposición 1.4.9 dan lugar a la posibilidad de enunciar y demostrar el teorema de reordenamiento en una forma más familiar y accesible considerando subconjuntos compactos en lugar de los subconjuntos “ C_n ” de la prueba del Teorema 1.4.7:

Teorema 1.4.10 *Sea (T, E) una integral generalizada relativa al espacio de medida difusa (X, \mathcal{M}, μ) en la clase \mathcal{R} , y sea $f \in E$ tal*

que $f \notin L^1(\mu)$. Entonces, para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ existe una sucesión $(K_n \uparrow) \subset \mathcal{K}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $1_{K_n}f \in L^1(\mu)$,

$$\lim_n \int_{K_n} f d\mu = \alpha \quad \text{y} \quad \mu \left(X \setminus \bigcup_n K_n \right) = 0.$$

Demostración: De la Proposición 1.4.9 y del Teorema 1.4.7, tómesese una sucesión $(C_n \uparrow) \subset \mathcal{M}$ tal que $X = \bigcup_n C_n$ y para cada $n \in \mathbb{N}$: $\mu(C_n) < \infty$, $1_{C_n}f \in L^1(\mu)$ y $\int_{C_n} f d\mu = \alpha$.

Se demostrará que existe una sucesión creciente $(K_n \uparrow) \subset \mathcal{K}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$K_n \subset C_n, \quad \mu(C_n \setminus K_n) < \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad \left| \int_{K_n} f d\mu - \alpha \right| < \frac{1}{n}. \quad (1.4.9)$$

Los conjuntos K_n se construyen por inducción de la manera siguiente:

Como $1_{C_1}f \in L^1(\mu)$, existe $\delta_1 > 0$ de forma que, si $D \in \mathcal{M}$, $D \subset C_1$ y $\mu(D) < \delta_1$, entonces $\int_D |f| d\mu < 1$. Sea $K_1 \in \mathcal{K}$ tal que $K_1 \subset C_1$ y $\mu(C_1 \setminus K_1) < \min\{1, \delta_1\}$. Entonces,

$$\left| \int_{C_1 \setminus K_1} f d\mu \right| \leq \int_{C_1 \setminus K_1} |f| d\mu < 1, \quad (1.4.10)$$

Por lo tanto, como $\int_{C_1 \setminus K_1} f d\mu = \alpha - \int_{K_1} f d\mu$, se tiene

$$\left| \int_{K_1} f d\mu - \alpha \right| < 1. \quad (1.4.11)$$

Para $n \geq 2$, el conjunto K_n se define por inducción de la forma siguiente:

Supóngase que se han definido $K_1, \dots, K_m \in \mathcal{K}$ tales que para cada $i \in \{1, \dots, m\}$,

$$K_{i-1} \subset K_i, \quad K_i \subset C_i, \quad \mu(C_i \setminus K_i) < \frac{1}{i} \quad \text{y} \quad \left| \int_{K_i} f d\mu - \alpha \right| < \frac{1}{i}.$$

Como $1_{C_{m+1}}f \in L^1(\mu)$, existe $\delta_{m+1} > 0$ de forma que, si $D \in \mathcal{M}$, $D \subset C_{m+1}$ y $\mu(D) < \delta_{m+1}$, entonces $\int_D |f|d\mu < \frac{1}{m+1}$. Sea $K'_{m+1} \in \mathcal{K}$ tal que $K'_{m+1} \subset C_{m+1}$ y $\mu(C_{m+1} \setminus K'_{m+1}) < \min \left\{ \frac{1}{m+1}, \delta_{m+1} \right\}$, y sea $K_{m+1} = C_m \cup K'_{m+1}$. Entonces,

$$\mu(C_{m+1} \setminus K_{m+1}) < \min \left\{ \frac{1}{m+1}, \delta_{m+1} \right\} \quad (1.4.12)$$

y

$$\left| \int_{C_{m+1} \setminus K_{m+1}} f d\mu \right| \leq \int_{C_{m+1} \setminus K_{m+1}} |f| d\mu < \frac{1}{m+1}. \quad (1.4.13)$$

Luego, como $\int_{C_{m+1} \setminus K_{m+1}} f d\mu = \alpha - \int_{K_{m+1}} f d\mu$, se tiene

$$\left| \int_{K_{m+1}} f d\mu - \alpha \right| < \frac{1}{m+1}. \quad (1.4.14)$$

Por lo tanto, se ha construido $(K_n \uparrow) \subset \mathcal{K}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se satisface (1.4.9). Entonces, es claro que $\lim_n \int_{K_n} f d\mu = \alpha$.

Para demostrar que $\mu(X \setminus \bigcup_n K_n) = 0$, tómesese $Z = X \setminus \bigcup_n K_n$, y para cada $m \in \mathbb{N}$ defínase

$$Z_m = \{z \in Z \mid z \in C_m \setminus K_m\}. \quad (1.4.15)$$

Si $z \in Z$, entonces $z \in C_m$ para algún $m \in \mathbb{N}$, y para cada $n \in \mathbb{N}$, $z \notin K_n$. Luego, como (C_n) es creciente, se tiene que (Z_m) es creciente y $\bigcup_m Z_m = Z$, por lo que $\lim_m \mu(Z_m) = \mu(Z)$. Además, cada Z_m está contenido en $C_m \setminus K_m$. Entonces, para todo $m \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\mu(Z_m) \leq \mu(C_m \setminus K_m) < \frac{1}{m}, \quad (1.4.16)$$

de donde $\lim_m \mu(Z_m) = 0$. Por lo tanto, $\mu(Z) = 0$. \square

Nótese que la hipótesis de T -integrabilidad en el teorema anterior no es necesaria, basta con suponer que $f^+, f^- \notin L^1(\mu)$ (de

igual manera en el Teorema 1.4.7).

En los enunciados de los Teoremas 1.4.7 y 1.4.10, se puede considerar $\alpha = T(f)$. A continuación se presenta como corolario el resultado correspondiente al Teorema 1.4.10:

Corolario 1.4.11 *Sea (T, E) una integral generalizada relativa al espacio de medida difusa (X, \mathcal{M}, μ) en la clase \mathcal{R} , y sea $f \in E$ tal que $f \notin L^1(\mu)$. Entonces, existe una sucesión $(K_n \uparrow) \subset \mathcal{K}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $1_{K_n} f \in L^1(\mu)$,*

$$\lim_n \int_{K_n} f d\mu = T(f) \quad y \quad \mu \left(X \setminus \bigcup_n K_n \right) = 0.$$

En [4] y [9], referencias que se pueden consultar para un estudio detallado de la integral de Henstock–Kurzweil, se enfatiza que la integral de Henstock–Kurzweil *no tiene integrales impropias*. El argumento se basa en el teorema de Hake [10]:

Teorema 1.4.12 (de Hake) *Sea $f \in M([a, b], \mathbb{R})$ tal que para todo $[c, d] \subset (a, b)$ la función f es HK -integrable en $[c, d]$. Si los límites*

$$\lim_{c \rightarrow a^+} (HK) \int_c^d f \quad y \quad \lim_{d \rightarrow b^-} (HK) \int_c^d f$$

existen, entonces f es HK -integrable y

$$(HK) \int_a^b f = \lim_{\substack{c \rightarrow a^+ \\ d \rightarrow b^-}} (HK) \int_c^d f. \quad (1.4.17)$$

En el Teorema 1.4.12, se toman límites de HK -integrales, de ahí que tiene sentido afirmar que cualquier función que tenga HK -integral impropia ya es HK -integrable, es decir, la clase de funciones HK -integrables no *crece* usando la idea detrás de la integración impropia clásica. Sin embargo, el Corolario 1.4.11 muestra que cualquier integral generalizada, incluyendo la integral de

Henstock–Kurzweil, puede ser interpretada como una integral impropia en un sentido clásico tomando el límite de integrales respecto a la medida de Lebesgue. Aunque claro, el Corolario 1.4.11 es un resultado de existencia y no proporciona una regla de cómo tomar la sucesión creciente de conjuntos compactos.

Tanto el Teorema 1.4.10 como el Corolario 1.4.11 pueden plantearse en términos de sucesiones de conjuntos abiertos:

Teorema 1.4.13 *Sea (T, E) una integral generalizada relativa al espacio de medida difusa (X, \mathcal{M}, μ) en la clase \mathcal{R} , y sea $f \in E$ tal que $f \notin L^1(\mu)$. Entonces, para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ existe una sucesión $(V_n \downarrow) \subset \mathcal{O}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $1_{V_n^c} f \in L^1(\mu)$,*

$$\lim_n \int_{V_n^c} f d\mu = \alpha \quad y \quad \mu \left(\bigcap_n V_n \right) = 0.$$

Demostración: Sea $(K_n \uparrow) \subset \mathcal{K}$ como en el Teorema 1.4.10 y para cada $n \in \mathbb{N}$ tómesese $V_n = K_n^c$. Entonces se tiene $\lim_n \int_{V_n^c} f d\mu = \alpha$ y

$$\begin{aligned} \mu \left(X \setminus \bigcup_n K_n \right) &= \mu \left(\left(\bigcup_n K_n \right)^c \right) \\ &= \mu \left(\bigcap_n K_n^c \right) \\ &= \mu \left(\bigcap_n V_n \right). \end{aligned}$$

□

Corolario 1.4.14 *Sea (T, E) una integral generalizada relativa al espacio de medida difusa (X, \mathcal{M}, μ) en la clase \mathcal{R} , y sea $f \in E$ tal que $f \notin L^1(\mu)$. Entonces, existe una sucesión $(V_n \downarrow) \subset \mathcal{O}$ tal que*

para cada $n \in \mathbb{N}$, $1_{V_n^c} f \in L^1(\mu)$,

$$\lim_n \int_{V_n^c} f d\mu = T(f) \quad y \quad \mu \left(\bigcap_n V_n \right) = 0.$$

El resultado anterior, con el cual se concluye el presente capítulo, motiva la búsqueda y construcción de métodos de integración impropia que proporcionen una regla explícita de cómo tomar el límite de integrales sobre el complemento de conjuntos abiertos, ya que de alguna manera, el Corolario 1.4.14 asegura que cualquier integral generalizada relativa a un espacio de medida en la clase \mathcal{R} , es de esta forma. En el próximo capítulo se introducen definiciones de integrales impropias en este sentido.

Capítulo 2

Definiciones de integrales impropias

En este capítulo se introducen y se estudian algunas definiciones de integrales generalizadas (que a su vez son integrales impropias) y tienen su punto de partida en la conclusión del capítulo anterior, donde a partir de los teoremas de reordenamiento, se estableció una conexión entre integrales generalizadas e integrales impropias.

El Corolario 1.4.14 muestra cualquier integral generalizada T en la clase \mathcal{R} puede considerarse como una integral impropia en un sentido clásico. En particular, se demostró que si f es T -integrable, entonces existe una sucesión $(V_n \downarrow) \subset \mathcal{O}$ tal que $\lim_n \int_{V_n^c} f d\mu = T(f)$ y $\mu(\bigcap_n V_n) = 0$. Sin embargo, es un resultado de *existencia* y no indica cómo elegir los conjuntos abiertos V_n .

La idea de lo que se presenta a continuación, consiste en introducir un método de integración generalizada que satisfaga la caracterización dada en la Definición 1.2.1, pero en el cual se muestre explícitamente cómo elegir las sucesiones de conjuntos abiertos correspondientes para definir la integrabilidad como un límite de integrales.

A lo largo del capítulo, se considerará un espacio métrico com-

pacto (X, d) y una medida μ boreliana, completa, regular, finita y difusa, definida en la completación de la σ -álgebra de Borel de X , denotada por \mathcal{M} . Obsérvese que el espacio de medida (X, \mathcal{M}, μ) pertenece a la clase \mathcal{R} introducida en el capítulo anterior.

2.1. Preliminares

Dada una función $f \in M$, se define el conjunto de *puntos de no sumabilidad* respecto a f como:

$$N_f = \{x \in X : \forall U \text{ vecindad abierta de } x, 1_U f \notin L^1(\mu)\}.$$

Se demuestra directamente que el conjunto N_f es compacto. Luego, como μ es finita, se satisface que $f \in L^1(\mu)$ si y sólo si $N_f = \emptyset$. Tomando en cuenta esta observación, para descartar casos triviales de funciones en $L^1(\mu)$, por ahora se considerarán funciones cuyo conjunto de puntos de no sumabilidad sea distinto del vacío.

Dado un conjunto $A \subset X$, se dirá que φ es un *cubrimiento por bolas* de A (relativo a la métrica d) si φ es una función de A a la colección de bolas abiertas de X de forma que para cada $x \in A$, $\varphi(x) = B_x$, donde B_x denota una bola abierta que contiene a x . La colección de todos los cubrimientos por bolas de A se denotará por $\Phi^d(A)$. Dado $\varphi \in \Phi^d(A)$, defínase el conjunto $V_\varphi = \bigcup_{x \in A} \varphi(x)$. Nótese que V_φ es el conjunto (formado por bolas) que *cubre* a A .

Dada una función $f \in M$, considérese la colección $\Phi^d(N_f)$, que mientras no exista confusión se denotará como Φ . Para todo $\varphi \in \Phi$, se demuestra que $1_{V_\varphi} f \in L^1(\mu)$; de hecho, en general se cumple el resultado siguiente:

Proposición 2.1.1 *Si $U \in \mathcal{O}$ es tal que $N_f \subset U$, entonces $1_{U^c} f \in L^1(\mu)$.*

Demostración: Sea $U \in \mathcal{O}$ tal que $N_f \subset U$. Para cada $x \in U^c$, existe $V_x \in \mathcal{O}$ tal que $x \in V_x$ y $1_{V_x} f \in L^1(\mu)$. Luego, como U^c es compacto y la colección $\{V_x\}_{x \in U^c}$ es una cubierta abierta de U^c ,

existen $x_1, \dots, x_n \in U^c$ tales que $U^c \subset \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$. Entonces, se tiene

$$\int_{U^c} |f| d\mu \leq \int_{\bigcup_{i=1}^n V_{x_i}} |f| d\mu \leq \sum_{i=1}^n \int_{V_{x_i}} |f| d\mu < \infty. \quad (2.1.1)$$

□

Las notaciones y definiciones introducidas hasta este punto se encuentran con mayor detalle en los trabajos [2] y [16].

Antes de continuar con las definiciones de integral impropia, es importante tener en cuenta los conceptos de *conjunto dirigido*, *red* y convergencia de una red.

Definición 2.1.2 El par (A, \geq) es un conjunto dirigido si A es distinto del vacío y \geq una relación binaria en A que satisface:

1. si $a \in A$, entonces $a \geq a$ (reflexividad),
2. dados $a, b, c \in A$, si $a \geq b$ y $b \geq c$, entonces $a \geq c$ (transitividad),
3. dados $a, b \in A$, existe $c \in A$ tal que $c \geq a$ y $c \geq b$.

En tal caso, se dice que \geq dirige al conjunto A .

Si (A, \geq) es un conjunto dirigido, T es un espacio topológico y g es una función con dominio A y valores en T , entonces la función g es una red. Luego, se dice que la red g converge a cierto valor $t \in T$ si para toda vecindad de t , U , existe $a_0 \in A$ de manera que para todo $a \in A$ con $a \geq a_0$ se cumple que $g(a) \in U$.

Obsérvese que el conjunto de los números naturales es un conjunto dirigido con el orden usual, y cualquier red en \mathbb{N} es simplemente una sucesión en el espacio topológico donde se defina. Esto bastaría para decir que las redes son una generalización de las sucesiones, sin embargo, merece la pena agregar algunos comentarios relativos al estudio de las redes en espacios topológicos y su relación con las sucesiones.

En espacios métricos, ciertas propiedades topológicas pueden caracterizarse mediante sucesiones. Por ejemplo, una función entre espacios métricos es continua si y solo si es *secuencialmente continua*, y un subconjunto de un espacio métrico es cerrado si y solo si es *secuencialmente cerrado*. Estos dos resultados no se satisfacen en espacios topológicos en general, sin embargo a partir de la teoría de redes se obtienen caracterizaciones análogas al reemplazar las sucesiones por redes. Para estudiar con mayor detalle la Teoría de Redes en espacios topológicos, consúltese [20].

Por otro lado, el concepto de red permite definir la integral de Riemann mediante la convergencia de una red al considerar el conjunto de particiones de un intervalo real como un conjunto dirigido. Para más detalles al respecto, véase [26].

Regresando al punto central, considérese Φ , la colección de cubrimientos por bolas del conjunto de puntos de no sumabilidad de una función dada. La idea de lo que sigue se basa en que la colección Φ puede *dirigirse* de distintas maneras, lo que dará lugar a distintas definiciones de integral.

Lema 2.1.3 *Considérense las relaciones binarias \geq , \succcurlyeq y \triangleright definidas en Φ de la manera siguiente:*

Dados $\gamma, \varphi \in \Phi$,

1. $\gamma \geq \varphi$ si para todo $x \in N_f$, $\gamma(x) \subset \varphi(x)$,
2. $\gamma \succcurlyeq \varphi$ si $V_\gamma \subset V_\varphi$,
3. $\gamma \triangleright \varphi$ si $\mu(V_\gamma) \leq \mu(V_\varphi)$.

Entonces, Φ es un conjunto dirigido con cualquiera de las tres relaciones binarias definidas.

El Lemma 2.1.3 se demuestra directamente. Para distinguir cada uno de los conjuntos dirigidos correspondiente a cada *dirección*, se utilizará la notación siguiente: $\Phi_1 = (\Phi, \geq)$, $\Phi_2 = (\Phi, \succcurlyeq)$, $\Phi_3 = (\Phi, \triangleright)$.

Para una función f , denótese por Φ^* la colección de cubrimientos por bolas centradas de N_f . Es decir, dado $\varphi \in \Phi^*$ y $x \in N_f$, $\varphi(x)$ es una bola con centro x ; obsérvese que $\Phi^* \subset \Phi$. Luego, también es posible considerar los conjuntos dirigidos $\Phi_1^* = (\Phi^*, \geq)$, $\Phi_2^* = (\Phi^*, \succcurlyeq)$ y $\Phi_3^* = (\Phi^*, \succ)$.

Obsérvese que, bajo la hipótesis $\mu(N_f) = 0$, al tomar una colección de cubrimientos $(\gamma)_{\gamma \in \Phi} \subset \Phi$ de forma que sean “cada vez más *pequeños* (o más *finos*) a partir de cierto cubrimiento φ ” en el sentido de las relaciones \geq , \succcurlyeq ó \succ , se podría obtener que $\mu(\cap_\gamma V_\gamma) = 0$. Además, de la Proposición 2.1.1, para cada γ se cumple que $1_{V_\gamma^c} f \in L^1(\mu)$. Esta observación, en conjunto con el Corolario 1.4.14 del capítulo anterior, sugiere una idea de cómo podría definirse la integral impropia para funciones cuyo conjunto de puntos de no sumabilidad tenga medida cero, que precisamente es lo que se presenta a continuación: definiciones de integrales como la convergencia de redes en el conjunto dirigido Φ .

2.2. Definiciones y propiedades básicas

Definición 2.2.1 Dada $f \in M$ con $\mu(N_f) = 0$, para cada $i = 1, 2, 3$, considérese la red $\Gamma_{f,i} : \Phi_i \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$\Gamma_{f,i}(\varphi) = \int_{V_\varphi^c} f d\mu. \quad (2.2.1)$$

Mientras no haya confusión, $\Gamma_{f,i}$ se denotará simplemente como Γ .

De esta manera, se pueden definir distintas integrales mediante la convergencia de la red Γ definida en los distintos conjuntos dirigidos Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 o algún Φ_i^* :

Definición 2.2.2 Una función $f \in M$ con $\mu(N_f) = 0$ es J_1 -integrable si la red $\Gamma_{f,1}$ definida en Φ_1 converge.

Definición 2.2.3 Una función $f \in M$ con $\mu(N_f) = 0$ es J_2 -integrable si la red $\Gamma_{f,2}$ definida en Φ_2 converge.

Definición 2.2.4 Una función $f \in M$ con $\mu(N_f) = 0$ es J_3 -integrable si la red $\Gamma_{f,2}$ definida en Φ_3 converge.

Definición 2.2.5 Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, una función $f \in M$ con $\mu(N_f) = 0$ es J_i^* -integrable si la red $\Gamma_{f,i}$ restringida Φ_i^* converge.

Si f es una función integrable según alguna de las definiciones anteriores, como Γ_f es una red real y \mathbb{R} es un espacio de Hausdorff, de la Teoría de Redes se tiene que el límite es único [20].

Considerando la definición de red convergente, la Definición 2.2.2 se puede escribir de la manera siguiente:

Definición 2.2.6 Una función $f \in M$ con $\mu(N_f) = 0$ es J_1 -integrable si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\epsilon > 0$, existe $\varphi \in \Phi_1$ de manera que, para todo $\psi \in \Phi_1$ con $\psi \geq \varphi$ se cumple

$$\left| \int_{V_\psi^c} f d\mu - \alpha \right| < \epsilon. \quad (2.2.2)$$

En tal caso, se dirá que α es el valor de la J_1 -integral de f y se escribirá $(J_1) \int f = \alpha$. Similarmente para las integrales J_2 , J_3 y J_i^* con las *direcciones* correspondientes en la colección Φ .

En lo anterior, la desigualdad (2.2.2) se puede escribir como $|\Gamma_f(\psi) - \alpha| < \epsilon$, pero para no perder de vista que el método consiste en *ir tomando* integrales en conjuntos cerrados cada vez más *grandes* y contenidos en el complemento de N_f , es conveniente escribir $\int_{V_\psi^c} f d\mu$ en lugar de $\Gamma_f(\psi)$.

La integral J_1 es precisamente la integral impropia desarrollada en [2] y [16]. Luego, durante el desarrollo de la investigación fue natural considerar distintas direcciones en Φ para las demás definiciones. En particular, la integral J_3 , como se verá más adelante,

tiene relación con la integral de Harnack (véase [15,29]). Por otro lado, la Definición 2.2.5 se puede interpretar en ciertos casos como una integral del tipo Valor Principal de Cauchy (véase [29]). En lo que sigue, se analiza la relación entre estas integrales.

Existe una relación evidente entre las *direcciones* \geq , \succcurlyeq y \succ definidas en Φ , que se destaca en el lema siguiente:

Lema 2.2.7 *Sean $\gamma, \varphi \in \Phi$. Si $\gamma \geq \varphi$, entonces $\gamma \succcurlyeq \varphi$; luego, si $\gamma \succcurlyeq \varphi$, entonces $\gamma \succ \varphi$.*

A partir del Lema 2.2.7, se demuestran directamente las dos proposiciones siguientes:

Proposición 2.2.8 *Si f es una función J_3 -integrable, entonces f es J_2 -integrable y el valor de las integrales coincide.*

Proposición 2.2.9 *Si f es una función J_2 -integrable, entonces f es J_1 -integrable y el valor de las integrales coincide.*

Por otro lado, dado $\varphi \in \Phi$, para cada $x \in N_f$ existe una bola $B_{r_x}(x)$ centrada en x contenida en $\varphi(x)$. Entonces se puede definir $\varphi' \in \Phi^*$ como $\varphi'(x) = B_{r_x}(x)$ para cada $x \in N_f$. Con esta observación se tiene lo siguiente:

Proposición 2.2.10 *Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, si f es J_i -integrable, entonces f es J_i^* -integrable y el valor de las integrales coincide.*

Otra manera de concluir directamente los resultados de las tres proposiciones anteriores, es notar que la red definida en Φ_3 es *subred* de la red definida en Φ_2 , que a su vez es subred de la red definida en Φ_1 . Y para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, la red definida en Φ_i es subred de la red definida en Φ_i^* . La definición de subred se puede consultar en [20].

En la proposición siguiente se establece la equivalencia de las integrales J_1 y J_2 para el caso en que el conjunto de puntos de no sumabilidad es finito.

Proposición 2.2.11 *Sea $f \in M$. Si N_f tiene una cantidad finita de elementos, entonces f es J_2 -integrable si y sólo si f es J_1 -integrable.*

Demostración: Supóngase que $N_f = \{x_1, \dots, x_n\}$. Si f es J_2 -integrable, de la Proposición 2.2.9 también es J_1 -integrable.

Si f es J_1 -integrable con integral α , entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $\varphi \in \Phi_1$ tal que para todo $\gamma \in \Phi_1$ con $\gamma \geq \varphi$, se tiene

$$\left| \int_{V_\gamma^c} f d\mu - \alpha \right| < \epsilon. \quad (2.2.3)$$

Como X es de Hausdorff, para cada $i = 1, \dots, n$ existe una vecindad U_{x_i} abierta del punto x_i de forma que U_{x_1}, \dots, U_{x_n} son disjuntos dos a dos. Para cada $i = 1, \dots, n$, x_i es punto interior de $\varphi(x_i) \cap U_{x_i}$, entonces existe $r_i > 0$ tal que $B_{r_i}(x_i) \subset U(x_i)$. Defínase $\varphi' \in \Phi_2$ para cada $x_i, i = 1, \dots, n$, como $\varphi'(x_i) = B_{r_i}(x_i)$. Si $\gamma \in \Phi_2$ y $\gamma \succcurlyeq \varphi'$, es claro que para cada $i = 1, \dots, n$, $\gamma(x_i) \subset \varphi'(x_i)$, es decir, $\gamma \geq \varphi'$ y se satisface la desigualdad (2.2.3). Por lo tanto, f es J_2 integrable y $(J_2) \int f = \alpha$. \square

Las integrales J_1 y J_3 también son equivalentes cuando el conjunto de puntos de no sumabilidad es finito, resultado que se demostrará más adelante en la Sección 2.3, dedicada a la integral de Harnack.

La tarea de demostrar que las J -integrales son integrales generalizadas en el sentido de la Definición 1.2.1 se dejará para el Capítulo 3, titulado *Propiedades de la J -integral*.

Nota 2.2.12 Las definiciones de J -integrabilidad aplican a funciones cuyo conjunto de puntos de no sumabilidad tiene medida cero. Sin embargo, cabe resaltar que existen funciones f con $\mu(N_f) > 0$. Por ejemplo, en [23], para cada $k \in (0, 1)$ se demuestra la existencia de una función $f \in M([0, 1], \mathbb{R})$ que es Henstock-Kurzweil integrable y satisface $\mu(N_f) = k$.

2.2.1. Definición usando cubrimientos finitos

El objetivo de esta sección es demostrar que las definiciones de integrales introducidas en la sección anterior se pueden simplificar al caso de cubrimientos finitos. Primero, obsérvese el resultado siguiente, que es aplicable para cualquiera de las *direcciones* \geq , \succ y \triangleright definidas en Φ .

Proposición 2.2.13 Sean $f \in M$ y $\varphi \in \Phi$. Si $x_1, \dots, x_m \in N_f$ son tales que $N_f \subset \bigcup_{i=1}^m \varphi(x_i)$, entonces existe $\psi \in \Phi$ tal que $\psi \geq \varphi$ y

$$V_\psi = \bigcup_{i=1}^m \psi(x_i) = \bigcup_{i=1}^m \varphi(x_i). \quad (2.2.4)$$

Demostración: Sean $x_1, \dots, x_m \in N_f$ tales que $N_f \subset \bigcup_{i=1}^m \varphi(x_i)$. Nótese que cada $x \in N_f$ es punto interior del conjunto $\varphi(x) \cap \bigcup_{i=1}^m \varphi(x_i)$, entonces, para cada $x \in N_f \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$ defínase $\psi(x) = B_{r_x}(x)$, donde $r_x > 0$ es tal que $B_{r_x}(x) \subset \varphi(x) \cap \bigcup_{i=1}^m \varphi(x_i)$. Luego, para cada $i = 1, \dots, m$, defínase $\psi(x_i) = \varphi(x_i)$. De esta forma, se tiene que $V_\psi = \bigcup_{i=1}^m \psi(x_i) = \bigcup_{i=1}^m \varphi(x_i)$ y $\psi \geq \varphi$. \square

Para lo que sigue, será de interés considerar cubrimientos $\psi \in \Phi$ como el de la proposición anterior, que cumplan que el conjunto V_ψ sea una unión finita de elementos de $\{\psi(x)\}_{x \in N_f}$; a estos cubrimientos se les llamará *exactos*.

Definición 2.2.14 Dada $f \in M$, un cubrimiento $\varphi \in \Phi$ es exacto si existen $x_1, \dots, x_m \in N_f$ tales que

$$V_\varphi = \bigcup_{x \in N_f} \varphi(x) = \bigcup_{i=1}^m \varphi(x_i), \quad (2.2.5)$$

y se dirá que es *minimal* si para todo $j \in \{1, \dots, m\}$ se cumple

$$N_f \not\subset \bigcup_{i \neq j} \varphi(x_i). \quad (2.2.6)$$

Nótese que la compacidad de N_f y la Proposición 2.2.13 garantizan la existencia de cubrimientos exactos de N_f .

Nota 2.2.15 Si $\varphi \in \Phi$ es un cubrimiento exacto y $x_1, \dots, x_m \in N_f$ son tales que $V_\varphi = \bigcup_{i=1}^m \varphi(x_i)$, entonces es posible tomar $\{y_1, \dots, y_k\} \subset \{x_1, \dots, x_m\}$ de forma que $V_\varphi = \bigcup_{i=1}^k \varphi(y_i)$ y, si $j \in \{1, \dots, k\}$, entonces $N_f \not\subset \bigcup_{i \neq j} \varphi(y_i)$. Es decir, los cubrimientos exactos se pueden considerar minimales sin perder generalidad.

Denótese como Φ' la colección de cubrimientos exactos y minimales de N_f . Obsérvese que $\Phi' \subset \Phi$. También, es directo notar que Φ' se puede *dirigir* con las relaciones binarias \geq , \succcurlyeq y \succ definidas en la sección anterior, obteniendo así conjuntos dirigidos Φ'_1 , Φ'_2 y Φ'_3 , de donde se pueden definir las integrales J'_1 , J'_2 y J'_3 de forma análoga a las Definiciones 2.2.2, 2.2.3 y 2.2.4.

Definición 2.2.16 Una función $f \in M$ es J'_1 -integrable si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para cada $\epsilon > 0$, existe $\varphi \in \Phi'_1$ tal que para todo $\gamma \in \Phi'_1$ con $\gamma \geq \varphi$ se satisface

$$\left| \int_{V_\gamma^c} f d\mu - \alpha \right| < \epsilon. \quad (2.2.7)$$

En términos de redes, f es J'_1 -integrable si la red $\Gamma'_f : \Phi'_1 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $\Gamma'_f(\varphi) = \int_{V_\varphi^c} f d\mu$ converge.

A continuación se expone el resultado principal de esta sección:

Teorema 2.2.17 Una función $f \in M$ es J_1 -integrable si y solo si es J'_1 -integrable.

Demostración: Supóngase que f es J_1 -integrable con integral $\alpha \in \mathbb{R}$ y sea $\epsilon > 0$. Sea $\varphi \in \Phi_1$ tal que para todo $\gamma \in \Phi_1$ con $\gamma \geq \varphi$ se satisface la desigualdad siguiente

$$\left| \int_{V_\gamma^c} f d\mu - \alpha \right| < \epsilon. \quad (2.2.8)$$

Por la Proposición 2.2.13 y la compacidad de N_f , existe $\psi \in \Phi'_1$ tal que $\psi \geq \varphi$. Entonces, dado $\gamma \in \Phi'_1 \subset \Phi_1$ tal que $\gamma \geq \psi$, se tiene que $\gamma \geq \varphi$ y se satisface la desigualdad (2.2.8). Es decir, f es J'_1 -integrable con integral α .

Supóngase ahora que $J'_1 \int f = \alpha$ y sea $\epsilon > 0$. Sea $\varphi \in \Phi'_1$ tal que para todo $\gamma \in \Phi'_1$ con $\gamma \geq \varphi$ se satisface la desigualdad

$$\left| \int_{V_\gamma^c} f d\mu - \alpha \right| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (2.2.9)$$

Sea $\gamma \in \Phi_1$ tal que $\gamma \geq \varphi$. Sea U abierto tal que $N_f \subset U$ y $\bar{U} \subset V_\gamma$. Como $1_{U^c} f \in L^1(\mu)$, existe $\delta > 0$ tal que si $A \subset U^c$ y $\mu(A) < \delta$, entonces $\int_A |f| d\mu < \frac{\epsilon}{2}$.

Sea $K' \subset V_\gamma$ compacto tal que $\mu(V_\varphi \setminus K') < \delta$ (se puede tomar K' de esa forma por la regularidad interior de μ) y sea $K = N_f \cup K' \cup \bar{U}$. Obsérvese que K es compacto y $K \subset V_\gamma$. Entonces, existen $x_1, \dots, x_m \in N_f$ tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^m \gamma(x_i)$ y además $\mu(V_\gamma \setminus \bigcup_{i=1}^m \gamma(x_i)) < \delta$. Sin pérdida de generalidad, supóngase que para cada $j \in \{1, \dots, m\}$ se tiene que $N_f \not\subset \bigcup_{i \neq j} \gamma(x_i)$.

Sea $x \in N_f$. Si $x \in \{x_1, \dots, x_m\}$, defínase $\psi(x) = \gamma(x)$. En otro caso, como x es punto interior de $\gamma(x) \cap \bigcup_{i=1}^m \gamma(x_i)$, existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset \gamma(x) \cap \bigcup_{i=1}^m \gamma(x_i)$; defínase $\psi(x) = B_r(x)$. De esta forma, $\psi \in \Phi_1$ y se satisface

$$V_\psi = \bigcup_{i=1}^m \psi(x_i), \quad \psi \geq \gamma \quad \text{y} \quad \mu(V_\gamma \setminus V_\psi) < \delta. \quad (2.2.10)$$

Nótese que $V_\gamma^c = V_\psi^c \setminus (V_\gamma \setminus V_\psi)$, $(V_\gamma \setminus V_\psi) \subset V_\psi^c$ y $(V_\gamma \setminus V_\psi) \subset U^c$.

Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left| \int_{V_\gamma^c} f d\mu - \alpha \right| &= \left| \int_{V_\psi^c} f d\mu - \int_{V_\gamma \setminus V_\psi} f d\mu - \alpha \right| \\
&\leq \left| \int_{V_\psi^c} f d\mu - \alpha \right| + \left| \int_{V_\gamma \setminus V_\psi} f d\mu \right| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \int_{V_\gamma \setminus V_\psi} |f| d\mu \\
&< \epsilon
\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Es decir, f es J_1 -integrable con integral α . □

Las equivalencias entre las integrales J_2 y J'_2 , así como entre J_3 y J'_3 , se demuestran de manera análoga. De hecho, la demostración del Teorema 2.2.17 puede replicarse paso a paso, sustituyendo directamente J_1 , J'_1 y Φ_1 por J_2 , J'_2 y Φ_2 , o por J_3 , J'_3 y Φ_3 . En particular, en la construcción del cubrimiento ψ , véase la expresión (2.2.10) en la prueba, obsérvese que $\psi \geq \gamma$ implica que $\psi \succcurlyeq \gamma$ y $\psi \succ \gamma$, según el Lemma 2.1.3.

Más allá de agregar estas otras definiciones a la lista de integrales impropias, lo fundamental de esta sección es resaltar la propiedad de que, en el proceso de integración impropia desarrollado en la sección presente, es posible tomar cubrimientos finitos (exactos).

2.3. Integral de Harnack

En [2] se hace referencia a la integral de Harnack cuando se introduce la definición de la J_1 -integral, dando a entender que hay cierta relación entre estas integrales. Sin embargo, a diferencia de las integrales J_1 y J_2 , en la integral de Harnack se compara la medida de los cubrimientos que se toman, en lugar de la contención entre éstos. Introducir el orden “ \succ ” en la colección Φ_3 y definir la

J_3 -integral es un medio para conectar la integral de Harnack con algunas ideas del trabajo presente.

La integral de Harnack fue desarrollada un par de décadas antes que la Teoría de Integración de Lebesgue y se basa en la integral de Riemann, sin embargo, así como lo presenta E. W. Hobson en [15], es más general y más práctico considerar la integral de Lebesgue en lugar de la de Riemann en la definición original de Harnack. Por otro lado, Harnack utiliza en su definición la noción de *contenido cero*, sin embargo, para el caso de conjuntos compactos, las nociones de contenido cero y medida cero son equivalentes.

Siguiendo a Hobson [15], se presenta a continuación la definición de integral de Harnack a partir de la integral de Lebesgue, definida para funciones medibles en intervalos reales $[a, b]$ con la medida de Lebesgue ν .

Definición 2.3.1 Sea $f \in M([a, b])$ con $\nu(N_f) = 0$. La función f es Harnack integrable si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que, para toda colección finita de intervalos abiertos $\{\Delta_i\}_{i=1}^n$ cuya unión contenga a N_f (de forma que cada intervalo Δ_i contenga al menos un punto de N_f) y tal que $\sum_{i=1}^n \nu(\Delta_i) < \delta$, se cumple

$$\left| \int_{(\cup_{i=1}^n \Delta_i)^c} f d\nu - \alpha \right| < \epsilon. \quad (2.3.1)$$

En la Definición 2.3.1, si no se incluyera la condición de que cada intervalo Δ_i contenga al menos un punto de N_f , cualquier función integrable en el sentido de Harnack sería absolutamente integrable. Este comentario se resalta en [29], donde se presenta un estudio detallado sobre la evolución de la Teoría de Integración, incluyendo las ideas de Harnack y su definición original de integral.

A continuación, se demuestra una caracterización de la J_3 -integral que resulta ser *más familiar* a la definición de integral de Harnack (Definición 2.3.1). En este resultado, se retoma el contexto de espacios de medida considerado previamente, donde X

es compacto, μ es una medida con las propiedades establecidas al inicio del capítulo y M es el espacio de funciones medibles.

Proposición 2.3.2 $f \in M$ es J_3 -integrable con $(J_3) \int f = \alpha$ si y sólo si, para cualquier $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $\gamma \in \Phi_3$ con $\mu(V_\gamma) < \delta$, se tiene que

$$\left| \int_{V_\gamma^c} f d\mu - \alpha \right| < \epsilon. \quad (2.3.2)$$

Demostración: Supóngase que $(J_3) \int f = \alpha$ y sea $\epsilon > 0$. Entonces existe $\varphi \in \Phi$ tal que para todo $\gamma \in \Phi_3$ con $\gamma \succ \varphi$, se satisface

$$\left| \int_{V_\gamma^c} f d\mu - \alpha \right| < \epsilon. \quad (2.3.3)$$

Es claro que, tomando $\delta = \mu(V_\varphi)$ se obtiene el resultado.

Supóngase ahora que existe $\delta > 0$ tal que para todo $\gamma \in \Phi_3$ con $\mu(V_\gamma) < \delta$ se satisface la desigualdad (2.3.2), y sea $\varphi \in \Phi_3$. Por la Proposición 2.2.13 y la compacidad de N_f , existen $x_1, \dots, x_n \in N_f$ y $\psi \in \Phi_3$ tales que $V_\psi = \bigcup_{i=1}^n \psi(x_i) = \bigcup_{i=1}^n \varphi(x_i)$. Como $\mu(N_f) = 0$ y μ es regular, existe $A \subset X$ abierto tal que $N_f \subset A$ y $\mu(A) < \frac{\delta}{n}$. Tómesese $\varphi' \in \Phi_3$ de manera que para cada $x \in N_f$, se tenga $\varphi'(x) \subset \psi(x) \cap A$. Entonces, como $V_{\varphi'} \subset \bigcup_{x \in N_f} (\psi(x) \cap A)$ y $\bigcup_{x \in N_f} (\psi(x) \cap A) = \bigcup_{i=1}^n (\varphi(x_i) \cap A)$, se tiene que

$$\mu(V_{\varphi'}) \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^n \varphi(x_i) \cap A\right) \leq \sum_{i=1}^n \mu(\varphi(x_i) \cap A) < \delta. \quad (2.3.4)$$

Sea $\gamma \in \Phi_3$ tal que $\gamma \succ \varphi'$. Como $\mu(V_\gamma) \leq \mu(V_{\varphi'}) < \delta$, se satisface la desigualdad (2.3.2). Por lo tanto, f es J_3 -integrable con $(J_3) \int f = \alpha$. \square

En el resultado siguiente, se demuestra la equivalencia entre las integrales J_1 y J_3 para el caso en que el conjunto de puntos de no sumabilidad de una función sea finito.

Teorema 2.3.3 *Sea $f \in M$. Si N_f es finito, entonces f es J_3 -integrable si y sólo si f es J_1 -integrable.*

Demostración: Si f es J_3 -integrable, por las Proposiciones 2.2.8 y 2.2.9 se cumple que f es J_1 -integrable y $(J_1) \int f = (J_3) \int f$.

Supóngase ahora que f es J_1 -integrable con J_1 -integral α . Sea $\epsilon > 0$ y tómesese $\varphi \in \Phi$ tal que para todo $\gamma \in \Phi$ con $\gamma \geq \varphi$, se satisface

$$\left| \int_{V_\gamma^c} f d\mu - \alpha \right| < \epsilon. \quad (2.3.5)$$

Se considerará inicialmente el caso particular en que N_f es un solo punto x_0 . Como el espacio X es compacto, el diámetro D de X (definido por $D = \sup\{d(x, y) : x, y \in X\}$) es finito. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $\varphi(x_0) = B_R(x_0)$, con $2R < D$.

Defínase $Y = X \times [0, D]$ y $Z = X \times [\frac{R}{2}, D]$ y considérese la métrica del máximo en Y . Se tiene que Y es compacto y Z es un subespacio compacto de Y . Como $\frac{R}{2} < D$, $Z \neq \emptyset$. Defínase la función $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ para todo $(x, t) \in Y$ como $g(x, t) = \mu(B_t(x))$. Se demostrará que g es continua. Primero, obsérvese que para todo $(x, t) \in Y$,

$$g(x, t) = \mu(B_t(x)) = \int 1_{B_t(x)} d\mu. \quad (2.3.6)$$

Considérese una sucesión (x_n, t_n) convergente en Y con límite (x, t) . Para cada n , se tiene que $g(x_n, t_n) = \int 1_{B_{t_n}(x_n)} d\mu$. Además, $1_{B_{t_n}(x_n)} \leq 1_X$ y $\lim_n 1_{B_{t_n}(x_n)} = 1_{B_t(x)}$. Entonces, considerando que $\mu(X) < \infty$, por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, se tiene que

$$\lim_n \int 1_{B_{t_n}(x_n)} d\mu = \int 1_{B_t(x)} d\mu, \quad (2.3.7)$$

es decir, $\lim_n g(x_n, t_n) = g(x, t)$. Por lo tanto, g es continua en Y . En particular, g es continua en Z , y como Z es compacto y no

vacío, entonces g alcanza el valor mínimo en Z . Sea

$$\delta = \min\{g(x, t) : (x, t) \in Z\}. \quad (2.3.8)$$

Sin pérdida de generalidad, se puede asumir que μ es estrictamente positiva, ya que se puede restringir μ a su soporte (que es subconjunto compacto de X) sin perder las hipótesis originales. Con ello, se garantiza que $\delta > 0$.

Sea $\gamma \in \Phi$ tal que $\mu(\gamma(x_0)) < \delta$, y sean $x \in X$ y $r > 0$ tales que $\gamma(x_0) = B_r(x)$. Supóngase que existe $z \in \gamma(x_0)$ tal que $z \notin \varphi(x_0)$. Entonces

$$R \leq d(z, x_0) \leq d(z, x) + d(x, x_0) < 2r, \quad (2.3.9)$$

de donde $r > \frac{R}{2}$. Es decir, $(x, r) \in Z$ y $\delta \leq g(x, t) = \mu(B_t(x)) = \mu(\gamma(x_0))$, que es una contradicción. Por lo tanto, $\gamma(x_0) \subset \varphi(x_0)$ y $\gamma \geq \varphi$. Luego, se satisface la desigualdad (2.3.5) y por la Proposición 2.3.2, f es J_3 -integrable y $(J_3) \int f = \alpha$.

Ahora, supóngase que $N_f = \{x_1, \dots, x_n\}$. Se puede suponer que para cada $i = 1, \dots, n$, $\varphi(x_i)$ es una bola centrada en x_i y $\varphi(x_i) \cap \varphi(x_j) = \emptyset$ para $i \neq j$. Mediante el procedimiento anterior, para cada $i = 1, \dots, n$, se puede tomar $\delta_i > 0$ tal que si una bola $B_r(x)$ contiene a x_i y $\mu(B_r(x)) < \delta_i$, entonces $B_r(x) \subset \varphi(x_i)$. Sea

$$\delta = \frac{\min\{\delta_i : i = 1, \dots, n\}}{n}. \quad (2.3.10)$$

Sea $\gamma \in \Phi$ tal que $\mu(V_\gamma) < \delta$. Entonces, como $V_\gamma = \bigcup_{i=1}^n \gamma(x_i)$, para cada $i = 1, \dots, n$ se tiene que $\mu(\gamma(x_i)) < \delta \leq \delta_i$, por lo que $\gamma(x_i) \subset \varphi(x_i)$ y $\gamma \geq \varphi$. Por lo tanto, se satisface la desigualdad (2.3.5), y por la Proposición 2.3.2, se tiene que f es J_3 -integrable y $(J_3) \int f = \alpha$. \square

Capítulo 3

Propiedades de la J -integral

En este capítulo se presentan algunas propiedades de la J_1 -integral. Obsérvese que cualquier propiedad de la integral J_1 también se satisface para las integrales J_2 y J_3 , ya que, como se establece en las Proposiciones 2.2.8 y 2.2.9, toda función que es integrable según J_2 ó J_3 también es J_1 -integrable. Por esta razón, es suficiente presentar y demostrar propiedades de la integral J_1 , que se denotará simplemente como J -integral mientras no exista confusión.

En primer lugar, se prueba la linealidad de la J -integral, lo que permite situar a las J -integrales en el marco de las integrales generalizadas en el sentido de la Definición 1.2.1. Después, se presentan algunas propiedades relacionadas con la descomposición del dominio de integración y se desarrolla un ejemplo de una función definida en un subconjunto de \mathbb{R}^2 , el cual muestra que, en general, la J -integral no es aditiva con respecto al dominio de integración.

En la parte final del capítulo, se establece la relación entre la J -integral y la integral de Henstock–Kurzweil para el caso particular de funciones reales de variable real con un número finito de puntos de no sumabilidad.

Al igual que en el capítulo anterior, considérese un espacio métrico compacto (X, d) y una medida μ boreliana, completa, regular, finita y difusa, definida en la completación de la σ -álgebra de Borel de X , la cual se denota por \mathcal{M} .

3.1. Linealidad de la J -integral

Dadas dos funciones J -integrables, como se verá a continuación, no es directo demostrar que la función suma es J -integrable.

Sean f y g dos funciones J -integrables tales que $(J) \int f = \alpha$ y $(J) \int g = \beta$. En términos de redes y considerando la notación del capítulo anterior, se tiene que la red $\Gamma_f : \Phi(N_f) \rightarrow \mathbb{R}$ definida para $\varphi \in \Phi(N_f)$ como

$$\Gamma_f(\varphi) = \int_{V_\varphi^c} f d\mu \quad (3.1.1)$$

converge a α , y la red $\Gamma_g : \Phi(N_g) \rightarrow \mathbb{R}$ definida para $\gamma \in \Phi(N_g)$ como

$$\Gamma_g(\gamma) = \int_{V_\gamma^c} g d\mu \quad (3.1.2)$$

converge a β .

Luego, se puede definir naturalmente la *red suma* $\Gamma_f + \Gamma_g$ en el conjunto $\Phi(N_f) \times \Phi(N_g)$ de la manera siguiente:

Dados $(\varphi_1, \varphi_2), (\gamma_1, \gamma_2) \in \Phi(N_f) \times \Phi(N_g)$, se tiene que

$$(\gamma_1, \gamma_2) \geq (\varphi_1, \varphi_2) \quad \text{si} \quad \gamma_1 \geq \varphi_1 \text{ y } \gamma_2 \geq \varphi_2,$$

y dado $(\varphi_1, \varphi_2) \in \Phi(N_f) \times \Phi(N_g)$, se define

$$(\Gamma_f + \Gamma_g)(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{V_{\varphi_1}^c} f d\mu + \int_{V_{\varphi_2}^c} g d\mu. \quad (3.1.3)$$

En tal caso, se demuestra que la red $\Gamma_f + \Gamma_g$ converge a $\alpha + \beta$, sin embargo, lo que se desea probar es que la red Γ_{f+g} , definida en $\Phi(N_{f+g})$, converge a $\alpha + \beta$. Para lograrlo, será necesario el resultado siguiente:

Teorema 3.1.1 *Sea $f \in M$ J -integrable con $(J) \int f = \alpha$ y sea $P \in \mathcal{K}$ de medida cero. Entonces, para cada $\epsilon > 0$, existe $\varphi \in \Phi(N_f \cup P)$ de manera que, para todo $\gamma \in \Phi(N_f \cup P)$ con $\gamma \geq \varphi$, se cumple*

$$\left| \int_{V_\gamma^c} f d\mu - \alpha \right| < \epsilon. \quad (3.1.4)$$

Demostración: Sea $\epsilon > 0$ y sea $\varphi \in \Phi(N_f)$ tal que para todo $\gamma \in \Phi(N_f)$ con $\gamma \geq \varphi$ se satisface la desigualdad (3.1.4).

Para el caso $P = \emptyset$ o $P \subset N_f$, el mismo cubrimiento φ funciona para obtener el resultado. Supóngase entonces que $P \not\subset N_f$ y sea $Q = P \setminus N_f$. Se extenderá el cubrimiento φ al conjunto Q de manera que se cumpla la propiedad deseada. Para esto, para cada $n \in \mathbb{N}$ defínase

$$Q_n = \left\{ x \in Q : d(x, N_f) \geq \frac{1}{n} \right\}, \quad (3.1.5)$$

y sea $Q_0 = \emptyset$. Como N_f y cada Q_n son compactos, existen $V_n, W_n \in \mathcal{O}$ tales que $N_f \subset V_n$, $Q_n \subset W_n$ y $V_n \cap W_n \neq \emptyset$. Obsérvese que $Q = \bigcup_n Q_n$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, considerando que $1_{V_n^c} f \in L^1(\mu)$, tómese $\delta_n > 0$ de forma que si $A \in \mathcal{M}$ y $\mu(A) < \delta_n$, entonces

$$\int_{A \cap V_n^c} |f| d\mu < \frac{\epsilon}{2^{n+1}}. \quad (3.1.6)$$

Como μ es regular y $\mu(Q_n) = 0$, es posible tomar $S_n \in \mathcal{O}$ tal que $Q_n \subset S_n$ y $\mu(S_n) < \delta_n$, así que $\mu(S_n \cap W_n) \leq \mu(S_n \cap V_n^c) < \delta_n$ y

$$\int_{S_n \cap W_n} |f| d\mu < \frac{\epsilon}{2^{n+1}}. \quad (3.1.7)$$

Sea $x \in N_f \cup P$. Si $x \in Q = P \setminus N_f$, entonces $x \in Q_n \setminus Q_{n-1}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. En este caso, tómese una bola abierta B_x tal que $x \in B_x$ y $B_x \subset S_n \cap W_n$, y defínase $\varphi'(x) = B_x$. Nótese que

$\varphi'(x) \subset S_n \cap V_n^c$. Luego, si $x \in N_f$, defínase $\varphi'(x) = \varphi(x)$. De esta forma, se ha definido $\varphi' \in \Phi(N_f \cup P)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$Z_n = \bigcup_{x \in Q_n \setminus Q_{n-1}} \varphi'(x) \quad (3.1.8)$$

y tómesese $Z = \bigcup_n Z_n$. Se tiene entonces que

$$Z = \bigcup_{x \in Q} \varphi'(x). \quad (3.1.9)$$

Obsérvese que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mu(Z_n) < \delta_n$, de donde

$$\int_Z |f| d\mu \leq \sum_n \int_{Z_n} |f| d\mu < \sum_n \frac{\epsilon}{2^{n+1}} = \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.1.10)$$

Si $\gamma' \in \Phi(N_f \cup P)$ tal que $\gamma' \geq \varphi'$, y si $\gamma \in \Phi(N_f)$ es la restricción de γ' a N_f . Nótese que $\gamma \geq \varphi$ y $V_{\gamma'} \setminus V_\gamma \subset Z$. Entonces,

$$\begin{aligned} \left| \int_{V_{\gamma'}^c} f d\mu - \alpha \right| &= \left| \int_{V_{\gamma'}^c} f d\mu - \int_{V_\gamma^c} f d\mu + \int_{V_\gamma^c} f d\mu - \alpha \right| \\ &\leq \left| \int_{V_{\gamma'} \setminus V_\gamma} f d\mu \right| + \left| \int_{V_\gamma^c} f d\mu - \alpha \right| \\ &< \int_{V_{\gamma'} \setminus V_\gamma} |f| d\mu + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq \int_Z |f| d\mu + \frac{\epsilon}{2} \\ &< \epsilon. \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

□

El resultado siguiente, que es consecuencia del teorema anterior, establece que en la definición de J -integrabilidad (Definición 2.2.6), es equivalente considerar cubrimientos de conjuntos compactos de medida cero que contengan al conjunto de puntos de no

sumabilidad de la función en cuestión.

Teorema 3.1.2 *Sea $f \in M$ una función con $\mu(N_f) = 0$. Entonces, f es J -integrable con $(J) \int f = \alpha$ si y solo si, para cualesquiera $P \in \mathcal{K}$ de medida cero y $\epsilon > 0$, existe $\varphi \in \Phi(N_f \cup P)$ de manera que, si $\gamma \in \Phi(N_f \cup P)$ con $\gamma \geq \varphi$ se satisface*

$$\left| \int_{V_\gamma^c} f d\mu - \alpha \right| < \epsilon. \quad (3.1.12)$$

Demostración: Si f es J -integrable con $(J) \int f = \alpha$, el resultado se obtiene por el Teorema 3.1.1.

Supóngase ahora que dado cualquier $P \in \mathcal{K}$ de medida cero y para todo $\epsilon > 0$, existe $\varphi \in \Phi(N_f \cup P)$ de manera que, si $\gamma \in \Phi(N_f \cup P)$ con $\gamma \geq \varphi$ se satisface la desigualdad (3.1.12). Al tomar $P = \emptyset$ se obtiene el resultado. \square

Teniendo en cuenta el Teorema 3.1.2, el resultado deseado se presenta en el corolario siguiente:

Corolario 3.1.3 *Sean $f, g \in M$ funciones J -integrables. Entonces, $f + g$ es J -integrable y*

$$(J) \int (f + g) = (J) \int f + (J) \int g. \quad (3.1.13)$$

Demostración: Supóngase que $(J) \int f = \alpha$ y $(J) \int g = \beta$ y sea $\epsilon > 0$. Por el Teorema 3.1.2, como $N_f, N_g \subset N_f \cup N_g$ y $\mu(N_f \cup N_g) = 0$, existen $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi(N_f \cup N_g)$ tales que si $\gamma \geq \varphi_1$ y $\gamma \geq \varphi_2$, entonces

$$\left| \int_{V_\gamma^c} f d\mu - \alpha \right| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{y} \quad \left| \int_{V_\gamma^c} g d\mu - \beta \right| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.1.14)$$

Tómese $\varphi \in \Phi(N_f \cup N_g)$ de forma que $\varphi \geq \varphi_1$ y $\varphi \geq \varphi_2$, y sea

$\gamma \in \Phi(N_f \cup N_g)$ tal que $\gamma \geq \varphi$. Entonces, se cumple que

$$\begin{aligned} \left| \int_{V_\gamma^c} (f + g) d\mu - (\alpha + \beta) \right| &= \left| \int_{V_\gamma^c} f d\mu - \alpha + \int_{V_\gamma^c} g d\mu - \beta \right| \\ &\leq \left| \int_{V_\gamma^c} f d\mu - \alpha \right| + \left| \int_{V_\gamma^c} g d\mu - \beta \right| \\ &< \epsilon. \end{aligned} \tag{3.1.15}$$

Luego, como $N_{f+g} \subset N_f \cup N_g$, por el Teorema 3.1.2 se tiene que $f + g$ es J -integrable con integral $\alpha + \beta$. \square

Obsérvese además que, si f es J -integrable y $(J) \int f = \alpha$, se demuestra directamente que dado $c \in \mathbb{R}$, la función cf es J -integrable y

$$(J) \int cf = c(J) \int f. \tag{3.1.16}$$

Por lo tanto, la J -integral es lineal.

3.1.1. La J -integral como integral generalizada

En lo que sigue, se demostrará que la J -integral es una *integral generalizada* en el sentido de la Definición 1.2.1, que se recuerda a continuación para facilitar la lectura:

Definición 1.2.1 *El par (T, E) es una integral generalizada relativa a un espacio de medida (X, \mathcal{M}, μ) en una clase dada \mathcal{C} de espacios de medida, si $E \subset M$ es un espacio vectorial, T es un funcional lineal en E y se cumplen las condiciones siguientes:*

1. $L^1(\mu) \subset E$.
2. Si $f \in E$ y $f \geq 0$, entonces $f \in L^1(\mu)$.
3. Si $f \in L^1(\mu)$, entonces $T(f) = \int f d\mu$.

Osérvese que si E es el espacio de funciones J -integrables, y para cada $f \in E$ se define T como $T(f) = (J) \int f$, entonces, por el Corolario 3.1.3, $E \subset M$ es un espacio vectorial y T es un funcional lineal. Queda por verificar que la J -integral satisface las propiedades 1, 2 y 3 de la Definición 1.2.1.

Al inicio del Capítulo 2, al definir la J -integral se omitió por practicidad el caso trivial de funciones en $L^1(\mu)$. Sin embargo, nada impide argumentar lo siguiente: dada una función f en $L^1(\mu)$, se tiene que $N_f = \emptyset$, por lo que el único cubrimiento posible es la *función vacía*, definida del conjunto vacío a la colección de bolas abiertas de X . Entonces, la integral sobre el complemento de este cubrimiento es justamente la integral $\int f d\mu$. Por lo tanto, si $f \in L^1(\mu)$, entonces f es J -integrable y $(J) \int f = \int f d\mu$; es decir, la J -integral satisface las propiedades 1 y 3 de la Definición 1.2.1.

Para la propiedad 2, se tiene la siguiente proposición:

Proposición 3.1.4 *Si f es J -integrable y $f \geq 0$, entonces $f \in L^1(\mu)$.*

Demostración: Sea f tal que $(J) \int f = \alpha$. Se tiene entonces que la red Γ_f definida para cada $\varphi \in \Phi(N_f)$ como $\Gamma_f(\varphi) = \int_{V_\varphi} f d\mu$ converge a α . Además, como $f \geq 0$, la red Γ_f es creciente. Luego, de la teoría de redes (véase [20]), existe una subred de Γ_f numerable, que también converge a α . Es decir, existe $(\varphi_n)_n \subset \Phi(N_f)$ tal que la sucesión creciente $\left(\int_{V_{\varphi_n}} f d\mu \right)_n$ converge a α . Entonces, tomando en cuenta que

$$\lim_n 1_{V_{\varphi_n}} f = f \quad \mu\text{-c.d.}, \quad (3.1.17)$$

por el teorema de la convergencia monótona clásico, se tiene que $f \in L^1(\mu)$. \square

Como comentario adicional, en virtud de la linealidad de la J -integral, ahora sería posible considerar funciones con valores complejos.

3.2. Propiedades aditivas respecto al dominio de integración

Antes de demostrar propiedades aditivas de la J -integral, el resultado siguiente, que es consecuencia de la condición de Cauchy para redes (véase [20]), será de utilidad.

Proposición 3.2.1 *Una función $f \in M$ con $\mu(N_f) = 0$ es J -integrable si y solo si, para cada $\epsilon > 0$ existe $\varphi \in \Phi(N_f)$, de modo que para todo $\gamma, \psi \in \Phi(N_f)$ con $\gamma \geq \varphi$ y $\psi \geq \varphi$, se cumple*

$$\left| \int_{V_\psi \setminus V_\gamma} f d\mu - \int_{V_\gamma \setminus V_\psi} f d\mu \right| < \epsilon. \quad (3.2.1)$$

Demostración: Sea $f \in M$ con $\mu(N_f) = 0$. Como la J -integral de una función se define como la convergencia de una red real, se satisface que f es J -integrable si y solo si, para cada $\epsilon > 0$ existe $\varphi \in \Phi(N_f)$, de modo que para todo $\gamma, \psi \in \Phi(N_f)$ con $\gamma \geq \varphi$ y $\psi \geq \varphi$, se cumple

$$\left| \int_{V_\gamma^c} f d\mu - \int_{V_\psi^c} f d\mu \right| < \epsilon. \quad (3.2.2)$$

Luego, sustituyendo

$$V_\gamma^c = (V_\psi \setminus V_\gamma) \cup (V_\psi \cup V_\gamma)^c \quad \text{y} \quad V_\psi^c = (V_\gamma \setminus V_\psi) \cup (V_\psi \cup V_\gamma)^c$$

en la desigualdad (3.2.2), se obtiene la desigualdad (3.2.1). \square

Además de la propiedad aditiva de la Proposición 1.2.4, se satisface el resultado siguiente:

Teorema 3.2.2 *Sea $f \in M$ y sean $X_1, X_2 \in \mathcal{K}$ tales que $X = X_1 \cup X_2$, $\mu(X_1 \cap X_2) = 0$ y $N_f \cap (X_1 \cap X_2) = \emptyset$. Si f es J -integrable, entonces f es J -integrable en X_1 y en X_2 , y se satisface*

$$(J) \int f = (J) \int 1_{X_1} f + (J) \int 1_{X_2} f. \quad (3.2.3)$$

Demostración: Supóngase que f es J -integrable y sea $\epsilon > 0$. De la Proposición 3.2.1, existe $\varphi \in \Phi(N_f)$ de manera que, para todo $\gamma, \psi \in \Phi(N_f)$ con $\gamma, \psi \geq \varphi$ se satisface

$$\left| \int_{V_\psi \setminus V_\gamma} f d\mu - \int_{V_\gamma \setminus V_\psi} f d\mu \right| < \epsilon. \quad (3.2.4)$$

Sean $f_1 = 1_{X_1} f$, $f_2 = 1_{X_2} f$, $N_1 = N_{f_1}$ y $N_2 = N_{f_2}$. Como $N_f = N_1 \cup N_2$ y $N_f \cap (X_1 \cap X_2) = \emptyset$, se puede suponer que φ satisface lo siguiente: si $x \in N_1$, entonces $\varphi(x) \subset X \setminus X_2 \subset X_1$; y si $x \in N_2$, entonces $\varphi(x) \subset X \setminus X_1 \subset X_2$.

Defínase φ_1 en $\Phi(N_1)$ como $\varphi_1 = \varphi|_{N_1}$ y sean $\gamma_1, \psi_1 \in \Phi(N_1)$ tales que $\gamma_1, \psi_1 \geq \varphi_1$. Sea $\gamma_2 \in \Phi(N_2)$ de forma que para todo $x \in N_2$, $\gamma_2(x) \subset \varphi(x)$, y tómesese $\psi_2 \in \Phi(N_2)$ como $\psi_2 = \gamma_2$.

Ahora, defínase γ y ψ en $\Phi(N_f)$ de la siguiente forma: para $x \in N_1$, $\gamma(x) = \gamma_1(x)$ y $\psi(x) = \psi_1(x)$; y para $x \in N_2$, $\gamma(x) = \gamma_2(x) = \psi_2(x)$. Obsérvese que $\gamma, \psi \geq \varphi$.

Entonces, se tiene

$$\begin{aligned} \int_{V_{\psi_1} \setminus V_{\gamma_1}} f_1 d\mu &= \int_{V_{\psi_1} \setminus V_{\gamma_1}} f_1 d\mu + \int_{V_{\psi_2} \setminus V_{\gamma_2}} f_2 d\mu \\ &= \int_{V_{\psi_1} \setminus V_{\gamma_1}} (f_1 + f_2) d\mu + \int_{V_{\psi_2} \setminus V_{\gamma_2}} (f_1 + f_2) d\mu \\ &= \int_{(V_{\psi_1} \setminus V_{\gamma_1}) \cup (V_{\psi_2} \setminus V_{\gamma_2})} (f_1 + f_2) d\mu \\ &= \int_{V_\psi \setminus V_\gamma} f d\mu. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Similarmente,

$$\int_{V_{\gamma_1} \setminus V_{\psi_1}} f_1 d\mu = \int_{V_\gamma \setminus V_\psi} f d\mu, \quad (3.2.6)$$

de donde

$$\left| \int_{V_{\psi_1} \setminus V_{\gamma_1}} f_1 d\mu - \int_{V_{\gamma_1} \setminus V_{\psi_1}} f_1 d\mu \right| = \left| \int_{V_{\psi} \setminus V_{\gamma}} f d\mu - \int_{V_{\gamma} \setminus V_{\psi}} f d\mu \right| < \epsilon. \quad (3.2.7)$$

Por lo tanto, f_1 es J -integrable. Luego, como f y f_1 son J -integrables y $f_2 = f - f_1$ μ -c.d., se tiene que f_2 es J -integrable. \square

Para el caso de una función $f \in M([a, b], \mathbb{R})$, el resultado anterior se cumple aun cuando la división del dominio de f incluye puntos de N_f , ya que la intersección de N_f con las divisiones sería un solo punto. Es decir, se satisface el teorema siguiente:

Teorema 3.2.3 *Sea $f \in M([a, b], \mathbb{R})$ una función J -integrable y sea $x \in (a, b)$. Entonces, f es J -integrable en los intervalos $[a, x]$ y $[x, b]$, y se satisface*

$$(J) \int f = (J) \int 1_{[a, x]} f + (J) \int 1_{[x, b]} f \quad (3.2.8)$$

En resumen, si se divide el dominio de integración de una función J -integrable y la división no incluye puntos de no sumabilidad, la J -integral es aditiva. Sin embargo, así como se muestra en el ejemplo desarrollado a continuación, en general no se puede dividir el dominio de integración arbitrariamente y esperar que la función sea J -integrable en cada parte de la división.

3.2.1. Un ejemplo importante

En lo que sigue, se construyen una función f definida en $X = [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$ y dos subconjuntos $X_1, X_2 \subset X$ tales que

$X = X_1 \cup X_2$, de manera que f es J -integrable en X con $(J) \int f = 0$, pero f no es J -integrable en X_1 ni en X_2 .

Ejemplo 3.2.4 *Considérese $X = [-1, 1] \times [-1, 1]$ con la métrica del máximo y ν la restricción a X de medida de Lebesgue en \mathbb{R}^2 . Sea $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida para cada $x \in (0, 1]$ por $g(x) = x^2 \sin(1/x)$ y para $x \in [-1, 0]$ como $g(x) = 0$. La gráfica de la función g divide a X en los conjuntos*

$$X_1 = \{(x, y) : y \leq g(x)\} \quad y \quad X_2 = \{(x, y) : g(x) \leq y\}.$$

Nótese que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\text{sen}(1/x) = 0$ en $x = 1/(n\pi)$. Además, si $x = 2/[(2n + 1)\pi]$, entonces $\text{sen}(1/x) = 1$ para n par, y $\text{sen}(1/x) = -1$ para n impar.

En general, se cumple que $2n\pi < (2n + 1)\pi < 2(n + 1)\pi$, de donde

$$\frac{1}{(n + 1)\pi} < \frac{2}{(2n + 1)\pi} < \frac{1}{n\pi}. \quad (3.2.9)$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defínase

$$b_n = \frac{2}{(2n + 1)\pi}. \quad (3.2.10)$$

Sea n par. Como la función $\text{sen}(1/x)$ es continua en el intervalo $\left[\frac{1}{(n+1)\pi}, \frac{1}{n\pi}\right]$, existen a_n, c_n tales que

$$a_n \in \left(\frac{1}{(n + 1)\pi}, b_n\right), \quad c_n \in \left(b_n, \frac{1}{n\pi}\right),$$

y

$$\text{sen}\left(\frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{2}, \quad \text{sen}\left(\frac{1}{c_n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Defínase el rectángulo R_n como

$$R_n = (a_n, c_n) \times \left(-\frac{a_n^2}{2}, \frac{a_n^2}{2}\right). \quad (3.2.11)$$

Obsérvese que $1/[(n + 1)\pi] < a_n < b_n < c_n < 1/(n\pi)$. Luego, para todo $x \in (a_n, c_n)$ se tiene que $1/2 \leq \text{sen}(1/x)$, por lo

que $x^2/2 \leq x^2 \text{sen}(1/x)$. Además, para todo $x \in (a_n, c_n)$ se tiene que $a_n^2/2 < x^2/2$. Por lo tanto la región R_n queda totalmente por debajo de la gráfica de g en el intervalo

$$\left[\frac{1}{(n+1)\pi}, \frac{1}{n\pi} \right]$$

y $R_n \subset X_1$. Si A_n representa el área de R_n , se tiene que $A_n = a_n^2(c_n - a_n)$.

Defínase ahora

$$R_{n-1} = (b_{n-1} - |b_n - a_n|, b_{n-1} + |c_n - b_n|) \times \left(-\frac{a_n^2}{2}, \frac{a_n^2}{2} \right).$$

Es directo notar que R_{n-1} queda totalmente por arriba de la gráfica de g en el intervalo

$$\left[\frac{1}{n\pi}, \frac{1}{(n-1)\pi} \right].$$

Nótese que el área de R_{n-1} es la misma que el área de R_n , es decir, $A_{n-1} = A_n$. Además, $R_{n-1} \subset X_2$.

Ahora, se definirá la función f de la forma siguiente:

Sea $x \in X$. Si para todo $n \in \mathbb{N}$, $x \notin R_n$, defínase $f(x) = 0$, y si $x \in R_n$ defínase

$$f(x) = \frac{1}{nA_n} \quad \text{si } n \text{ es par}, \quad (3.2.12)$$

y

$$f(x) = -\frac{1}{nA_n} \quad \text{si } n \text{ es impar}. \quad (3.2.13)$$

Entonces, se tiene que

$$\int_{X_1} f d\nu = \sum_n \int_{R_{2n}} f d\nu = \sum_n \frac{1}{n} \quad (3.2.14)$$

y

$$\int_{X_2} f d\nu = \sum_n \int_{R_{2n+1}} f d\nu = \sum_n \frac{-1}{n}. \quad (3.2.15)$$

Por lo tanto f no es J -integrable en X_1 ni en X_2 , ya que si lo fueran, del hecho de que $1_{X_1}f \geq 0$ y $1_{X_2}f \leq 0$ se tendría que $1_{X_1}f, 1_{X_2}f \in L^1(\nu)$.

Sin embargo, como se comprueba a continuación, la función f es J -integrable en X y el valor de la integral es cero.

Primero, nótese que $N_f = \{(0,0)\}$. Sean $\epsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $1/N < \epsilon$.

Defínase

$$V_\varphi = \varphi(0,0) = \left(-k, \frac{1}{N\pi}\right) \times \left(-\frac{a_N^2}{2}, \frac{a_N^2}{2}\right), \quad (3.2.16)$$

con $k \in (0,1)$.

Sea $\gamma \geq 0$. Si γ es de la forma $\gamma(0,0) = (a,b) \times (c,d)$, se tiene que $b \leq 1/N\pi$, y existe $n \geq N$ tal que

$$b \in \left[\frac{1}{(n+1)\pi}, \frac{1}{n\pi}\right].$$

Si n es par, el conjunto V_γ^c incluye a la porción $V_\gamma^c \cap R_n$ (que puede ser vacío), a R_{n-1} y al resto de pares de rectángulos R_m y R_{m-1} que están “a la derecha” de R_{n-1} , con $m = 2, \dots, n-2$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \left| \int_{V_\gamma^c} f \right| &= \left| \int_{V_\gamma^c \cap R_n} f + \int_{R_{n-1}} f + \sum_{m=2}^{n-2} \int_{R_m} f \right| \\ &= \left| \int_{V_\gamma^c \cap R_n} f + \int_{R_{n-1}} f \right| \\ &\leq \left| \int_{R_{n-1}} f \right| \\ &= \frac{1}{n} \\ &\leq \frac{1}{N} \\ &< \epsilon. \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

Por otra parte, si n es impar, el conjunto V_γ^c incluye a la porción $V_\gamma^c \cap R_n$ y al resto de pares de rectángulos R_m y R_{m-1} que están “a la derecha” de R_n , con $m = 2, \dots, n-1$. En este caso, se tiene

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{V_\gamma^c} f \right| &= \left| \int_{V_\gamma^c \cap R_n} f + \sum_{m=2}^{n-1} \int_{R_m} f \right| \\
 &= \left| \int_{V_\gamma^c \cap R_n} f \right| \\
 &\leq \left| \int_{R_n} f \right| & (3.2.18) \\
 &= \frac{1}{n} \\
 &\leq \frac{1}{N} \\
 &< \epsilon.
 \end{aligned}$$

Se concluye entonces que $(J) \int f = 0$.

Obsérvese que, si en el Ejemplo 3.2.4 se consideran

$$Y_1 = \{(x, y) : y \geq 0\} \quad \text{y} \quad Y_2 = \{(x, y) : y \leq 0\},$$

se tendría un caso donde $N_f \subset Y_1 \cap Y_2$ y la función f es J -integrable tanto Y_1 como en Y_2 .

3.3. Un caso particular de la relación con la integral de Henstock–Kurzweil

El objetivo de esta sección, es analizar la relación que tiene la integral de Henstock–Kurzweil con la J -integral para un caso particular. Concretamente, primero se expone un panorama resumido de la integral de Henstock–Kurzweil, y luego se presentan un par de resultados sobre la equivalencia entre esta integral y la J -integral para el caso de funciones con un número finito de puntos de no sumabilidad.

Es necesario introducir algunas notaciones antes de presentar la definición de integral de Henstock–Kurzweil:

Considérese $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Un intervalo etiquetado $([c, d], x)$ consiste de un intervalo $[c, d] \subset [a, b]$ y una *etiqueta* $x \in [c, d]$. Si δ es una función de la forma $\delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$, se le llama función medidora, y un intervalo etiquetado $([c, d], x)$ se dice que es δ -fino si $[c, d] \subset [x - \delta(x), x + \delta(x)]$. Por otro lado, una partición etiquetada de $[a, b]$ es una colección de intervalos no traslapados $P = \{([a_i, b_i], x_i)\}_{i=1}^n$ tal que $[a, b] = \bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i]$, y P se dice que es δ -fina si para cada $i = 1, \dots, n$ se cumple que $[a_i, b_i]$ es δ -fino. Se demuestra que dada una función medidora δ en $[a, b]$, existe una partición etiquetada de $[a, b]$ que es δ -fina.

Definición 3.3.1 (Integral de Henstock–Kurzweil) Una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es Henstock–Kurzweil integrable si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\epsilon > 0$, existe una función medidora δ en $[a, b]$ de forma que para toda partición $P = \{([a_i, b_i], x_i)\}_{i=1}^n$ de $[a, b]$ que sea δ -fina, se cumple que

$$\left| \sum_{i=1}^n f(x_i)(b_i - a_i) - \alpha \right| < \epsilon, \quad (3.3.1)$$

En tal caso, se escribe $(HK) \int_a^b f = \alpha$.

El resultado siguiente es el mismo Teorema de Hake mencionado al final del Capítulo 1 (Teorema 1.4.12), pero enunciado de una forma simplificada:

Teorema 3.3.2 *Una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es HK-integrable si y solo si, para todo $x \in (a, b)$ f es HK-integrable en $[a, x]$ y existe el límite*

$$\lim_{x \rightarrow b^-} (HK) \int_a^x f.$$

En tal caso,

$$(HK) \int_a^b f = \lim_{x \rightarrow b^-} (HK) \int_a^x f. \quad (3.3.2)$$

Las definiciones, notaciones y resultados expuestos hasta este punto de la presente sección, se encuentran en [4] y [9], referencias que se pueden consultar para un estudio detallado de la integral integral de Henstock–Kurzweil.

Como se verá, la equivalencia entre la integral de Henstock–Kurzweil y la J -integral para el caso específico de funciones reales de variable real con un número finito de puntos de no sumabilidad, es consecuencia directa del Teorema de Hake 3.3.2. Por otra parte, como se comenta a continuación, la comparación entre ambas integrales para el caso más general de funciones reales definidas en espacios métricos, es más compleja.

Nota 3.3.3 El punto de partida para extender las ideas de integración de Henstock–Kurzweil para funciones definidas en espacios más generales que \mathbb{R} , así como lo expone el mismo Henstock en su libro *The General Theory of Integration* [14], consiste en encontrar o construir conjuntos adecuados para sustituir el papel de los intervalos en \mathbb{R} . En [28], por ejemplo, se presenta un estudio detallado de una extensión de la integral de Henstock para funciones reales definidas en espacios de medidas borelianas, en el cual se introduce una definición de integral del tipo Henstock–Kurzweil y se demuestra una versión del Teorema de Radon–Nikodym para esta integral.

De acuerdo con la Nota 3.3.3, si se quisiera estudiar la posible relación entre la J -integral y la definición de integral introducida en [28] para el caso de funciones reales definidas en espacios métricos, la comparación quedaría limitada a funciones cuyo dominio sean los subconjuntos que, de alguna manera, generalizan a los intervalos, y no todo el espacio. Por otro lado, como se verá a continuación, para el caso funciones reales definidas en intervalos reales sí existe un punto claro de comparación.

Continuando con el objetivo de la presente sección, si $f \in M([a, b])$ es una función medible con $N_f = \{b\}$, es directo notar que $(J) \int f = \alpha$ si y solo si

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \int_{[a, x]} f d\nu = \alpha. \quad (3.3.3)$$

De esta observación y del Teorema 3.3.2 se demuestra la proposición siguiente:

Proposición 3.3.4 *Sea $f \in M([a, b])$ y supóngase que $N_f = \{b\}$. Entonces, f es J -integrable si y solo si f es HK -integrable y las integrales valen lo mismo.*

Demostración: Supóngase que f es J -integrable y $(J) \int f = \alpha$. Sea $\epsilon > 0$. Existe $\varphi \in \Phi(\{b\})$ tal que para todo $\gamma \in \Phi(\{b\})$ con $\gamma \geq \varphi$,

$$\left| \int_{V_\gamma^c} f d\nu - \alpha \right| < \epsilon. \quad (3.3.4)$$

Es decir, existe $\delta > 0$ tal que $\varphi(b) = (b - \delta, b]$, y para todo $x \in (b - \delta, b]$,

$$\left| \int_{[a, x]} f d\nu - \alpha \right| < \epsilon, \quad (3.3.5)$$

por lo que

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \int_{[a, x]} f d\nu = \alpha. \quad (3.3.6)$$

Luego, como para todo $x \in (b - \delta, b]$, $1_{[a, x]} f \in L^1(\nu)$, en particular para todo $x \in (b - \delta, b]$ se tiene que $1_{[a, x]} f$ es HK -integrable. Entonces, por el Teorema 3.3.2 se tiene que f es HK integrable y

$$(HK) \int_a^b f = \lim_{x \rightarrow b^-} (HK) \int_a^x f = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_{[a, x]} f d\nu = \alpha. \quad (3.3.7)$$

Ahora supóngase que f es HK -integrable y $(HK) \int f = \alpha$.

Por el Teorema 3.3.2 se tiene que

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow b^-} (HK) \int_a^x f. \quad (3.3.8)$$

Sea $\epsilon > 0$. Existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in (b - \delta, \delta]$ se cumple

$$\left| (HK) \int_a^x f - \alpha \right| < \epsilon. \quad (3.3.9)$$

Pero como para todo $x \in (a, b)$ se tiene que $1_{[a,x]}f \in L^1(\nu)$, entonces se cumple

$$\left| \int_{[a,x]} f d\nu - \alpha \right| < \epsilon. \quad (3.3.10)$$

Tomando $\varphi \in \Phi(\{b\})$ como $\varphi(b) = (b - \delta, b]$ se comprueba directamente que f es J -integrable y $(J) \int f = \alpha$. \square

Tanto el Teorema de Hake como la proposición anterior se pueden demostrar para el caso en que $N_f = \{a\}$ de forma análoga, pero considerando límites por la derecha. De esta manera, el resultado se puede extender para un número finito de puntos de no sumabilidad considerando el Teorema 3.2.3 y aplicando la Proposición 3.3.4 a cada subintervalo. Es decir, se cumple el resultado siguiente:

Teorema 3.3.5 *Sea $f \in M([a, b])$ y supóngase que N_f es finito. Entonces, f es J -integrable si y solo si f es HK -integrable y el valor de las integrales coincide.*

Del Teorema 3.3.5, y recordando los Teoremas y 2.2.11 y 2.3.3 del Capítulo 2, se tiene la afirmación siguiente: para funciones reales definidas en $[a, b] \subset \mathbb{R}$ con un número finito de puntos de no sumabilidad, las J -integrales (J_1 , J_2 y J_3) y la integral de Henstock–Kurzweil son equivalentes entre sí.

Capítulo 4

Integrales impropias en espacios localmente compactos

En la teoría de las J -integrales desarrollada en los Capítulos 2 y 3, se consideran funciones reales definidas en espacios métricos compactos de medida finita. En este capítulo, se presentan distintas extensiones de la teoría al caso de espacios localmente compactos.

Concretamente, se introducen dos definiciones de integral impropia partiendo de dos escenarios distintos. En el primer escenario, se parte de la hipótesis de que el espacio es completo y de medida finita. En el segundo caso, se supone que el espacio tiene la propiedad de Heine–Borel y se siguen las ideas de la integración impropia clásica en \mathbb{R}^n . En ambos casos, la definición de integral se presenta como extensión de la J_1 -integral, que por simplicidad, mientras no exista confusión se denotará como J -integral.

En la parte final del capítulo, se establece la relación entre la J -integral y la integral de Henstock–Kurzweil para el caso particular de funciones con un número finito de puntos de no sumabilidad, pero ahora para funciones definidas en intervalos de la forma

$[a, \infty)$.

A lo largo del capítulo, se considerará un espacio métrico localmente compacto (X, d) y una medida μ boreliana, completa, regular y difusa definida en la completación de la σ -álgebra de Borel de X , denotada por \mathcal{M} .

4.1. Espacios totalmente acotados y de medida finita

Supóngase que (X, d) es totalmente acotado y que μ es finita. Considérese los dos teoremas siguientes:

Teorema 4.1.1 *Un espacio métrico es compacto si y sólo si es totalmente acotado y completo.*

Teorema 4.1.2 *Si un espacio métrico (X, d) es totalmente acotado, entonces su completación, denotada por $(\widehat{X}, \widehat{d})$, también es un espacio totalmente acotado.*

El Teorema 4.1.1 es conocido y se encuentra en la mayoría de los libros de topología, y la demostración del Teorema 4.1.2 es directa.

Como (X, d) es totalmente acotado, entonces su completación $(\widehat{X}, \widehat{d})$ es una compactación. Extiéndase μ definiendo la medida $\widehat{\mu}$ como $\widehat{\mu}(A) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{M}$ y $\widehat{\mu}(\widehat{X} \setminus X) = 0$. Luego, para una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ medible, defínase $\widehat{f} : \widehat{X} \rightarrow \mathbb{R}$ como $\widehat{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in X$, y para $x \in \widehat{X} \setminus X$, defínase $\widehat{f}(x)$ por continuidad donde sea posible, y donde no, $\widehat{f}(x) = 0$.

Obsérvese que la medida extendida $\widehat{\mu}$ es de Borel, finita, completa, se anula en los puntos y está definida en la σ -álgebra de Borel de \widehat{X} . Además, se demuestra directamente que $\widehat{\mu}$ es regular (véase [2]). Entonces, el espacio $(\widehat{X}, \widehat{d})$ con la medida $\widehat{\mu}$ satisface las mismas propiedades consideradas en las secciones anteriores, por lo tanto, se puede introducir la definición de integral impropia de

forma análoga a como se hizo en el Capítulo 2, pero considerando \widehat{f} en lugar de f .

Dada una función $f \in M$ con $\mu(N_f) = 0$, defínase

$$\Gamma_{\widehat{f}}: \Phi^{\widehat{d}}(N_{\widehat{f}}) \longrightarrow \mathbb{R} \tag{4.1.1}$$

como $\Gamma_{\widehat{f}}(\varphi) = \int_{V_{\varphi}^c} \widehat{f}d\widehat{\mu}$. Como $(\widehat{X}, \widehat{d})$ es compacto, la definición de $\Gamma_{\widehat{f}}$ tiene sentido. En este caso, como la idea es extender la J -integral, la relación binaria (*dirección*) que se considerará en $\Phi^{\widehat{d}}(N_{\widehat{f}})$ está dada por la relación \geq , donde $\gamma \geq \varphi$ en $\Phi^{\widehat{d}}(N_{\widehat{f}})$ si para todo $x \in N_f$ se tiene que $\gamma(x) \subset \varphi(x)$ ((véase el Lema 2.1.3)).

Definición 4.1.3 Una función $f \in M$ con $\mu(N_f) = 0$ es J -integrable si la red $\Gamma_{\widehat{f}}$ definida en $\Phi^{\widehat{d}}(N_{\widehat{f}})$ converge.

La Definición 4.1.3 incluye casos de integrales impropias de funciones reales definidas en intervalos abiertos de \mathbb{R} o en discos abiertos de \mathbb{R}^2 , por ejemplo.

Es directo notar que el Teorema 3.1.2 de la sección pasada se satisface para este caso, por tanto también el Corolario 3.1.3. Es decir, la suma de dos funciones integrables en este sentido también es integrable, y la integral de la suma es la suma de las integrales.

4.2. Espacios con la propiedad de Heine–Borel

Supóngase que μ es σ -finita pero no finita, y que el espacio (X, d) tiene la propiedad de Heine–Borel, es decir, todo subconjunto cerrado y acotado de X es compacto. Considérese la compactación por un punto de X , denotada como $X^* = X \cup \{\infty\}$, donde las vecindades abiertas del punto ∞ son conjuntos cuyo complemento es un subconjunto compacto de X . Extiéndase μ definiendo $\widehat{\mu}$ como $\widehat{\mu}(A) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{M}$ y $\widehat{\mu}(\{\infty\}) = 0$. Sea $f \in M$ y denótese por \widehat{f} la extensión de f a X^* . En este caso, la función

$f(x) = x$ definida en \mathbb{R} , por ejemplo, cumple que $N_f = \emptyset$ pero $N_{\widehat{f}} = \infty$.

Se comprueba directamente que, en general, la medida $\widehat{\mu}$ es completa, interiormente regular y está definida en la σ -álgebra de Borel de X^* . Si μ es finita, se tiene que $\widehat{\mu}$ es finita, de Borel y regular; es decir, la medida $\widehat{\mu}$ tiene las mismas propiedades en X^* que la medida μ tiene en X . Por otro lado, si μ es infinita, evidentemente $\widehat{\mu}$ no es de Borel, además, $\widehat{\mu}$ no es exteriormente regular, ya que cualquier vecindad abierta de ∞ es de medida $\widehat{\mu}$ infinita.

Considérese una función $f \in M$ con $\mu(N_f) = 0$. Obsérvese que, este caso, es posible que $N_{\widehat{f}}$ incluya al punto ∞ . Entonces, considerar los mismos cubrimientos por bolas de antes puede presentar dificultades, ya que, al menos hasta este punto, no se ha extendido la métrica d al punto ∞ .

Para este caso, se considerarán cubrimientos φ de $N_{\widehat{f}}$ del siguiente tipo: para cada $x \in N_{\widehat{f}} \setminus \{\infty\}$, $\varphi(x)$ es una bola (en X) que contiene al punto x , y $\varphi(\infty)$ es un subconjunto de X^* tal que $\infty \in \varphi(\infty)$ y $[\varphi(\infty)]^c$ es una bola cerrada de X ; es claro que $\varphi(\infty)$ es vecindad abierta de ∞ , ya que las bolas cerradas en X son subconjuntos compactos de X . Continuando con la misma notación que antes, mientras no haya confusión se denotará como $\Phi(N_{\widehat{f}})$ a la colección de estos cubrimientos, y dado $\varphi \in \Phi(N_{\widehat{f}})$, defínase el conjunto V_φ como $V_\varphi = \bigcup_{x \in N_{\widehat{f}}} \varphi(x)$.

Considérese $\Gamma_{\widehat{f}} : \Phi(N_{\widehat{f}}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$\Gamma_{\widehat{f}}(\varphi) = \int_{V_\varphi^c} \widehat{f} d\widehat{\mu}. \quad (4.2.1)$$

Como X^* es compacto, la definición de $\Gamma_{\widehat{f}}$ tiene sentido. Así como el caso anterior, la *dirección* que se considerará en $\Phi(N_{\widehat{f}})$ está dada por la relación \geq (véase el Lema 2.1.3).

Definición 4.2.1 Una función $f \in M$ con $\mu(N_f) = 0$ es J -integrable si la red $\Gamma_{\widehat{f}}$ definida en $\Phi(N_{\widehat{f}})$ converge.

Nótese que, esta definición de integral impropia, incluye casos como el de la integral impropia de la función $\frac{\text{sen } x}{x}$ definida en \mathbb{R} , que típicamente se define como un límite de integrales de Riemann.

Como es de esperarse, el siguiente paso a seguir es preguntarse si la suma de dos funciones integrables en el sentido de la Definición 4.2.1 también es integrable. En virtud de los resultados presentados a continuación, la respuesta a esa pregunta es afirmativa.

Proposición 4.2.2 *Sea $f \in M$, supóngase que $\infty \notin N_{\widehat{f}}$ y sea $\varphi \in \Phi(N_{\widehat{f}})$. Entonces, dado $\epsilon > 0$, se puede extender φ a ∞ de manera que*

$$\int_{\varphi(\infty)} |\widehat{f}| d\widehat{\mu} < \epsilon. \quad (4.2.2)$$

Demostración: Como $\infty \notin N_{\widehat{f}}$, existe una vecindad $U \subset X^*$ del punto ∞ tal que $1_U \widehat{f} \in L^1(\widehat{\mu})$. Nótese que, como $\widehat{\mu}(\{\infty\}) = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} \int 1_U |\widehat{f}| d\widehat{\mu} &= \int 1_{U \setminus \{\infty\}} |\widehat{f}| d\widehat{\mu} \\ &= \int 1_{U \setminus \{\infty\}} |f| d\mu. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Sea $\epsilon > 0$. Como $1_{U \setminus \{\infty\}} f \in L^1(\mu)$, existe $K \in \mathcal{K}$ tal que

$$\int_{K^c} 1_{U \setminus \{\infty\}} |f| d\mu < \epsilon. \quad (4.2.4)$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned} \int_{K^c} 1_{U \setminus \{\infty\}} |f| d\mu &= \int 1_{(U \setminus \{\infty\}) \cap K^c} |f| d\mu \\ &= \int 1_{(U \setminus \{\infty\}) \cap K^c} |\widehat{f}| d\widehat{\mu} \\ &= \int 1_{U \cap K^c} |\widehat{f}| d\widehat{\mu}. \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Luego, como U^c y K son subconjuntos acotados de X , el con-

junto $U^c \cup K$ también es acotado en X . Sean $r > 0$ y $x \in X$ tales que $U^c \cup K \subset B_r(x)$, y defínase $\varphi(\infty) = B^c$, donde B es una bola cerrada de X tal que $B_r(x) \subset B$. Nótese que que

$$\varphi(\infty) \subset B_r^c(x) \subset (U^c \cup K)^c = U \cap K^c, \quad (4.2.6)$$

por lo tanto, se satisface

$$\int_{\varphi(\infty)} |\widehat{f}| d\widehat{\mu} < \epsilon. \quad (4.2.7)$$

□

Teorema 4.2.3 *Sea $f \in M$ J -integrable con $(J) \int f = \alpha$ y sea P un subconjunto compacto de X^* de medida cero. Entonces, para cada $\epsilon > 0$, existe $\varphi \in \Phi(N_{\widehat{f}} \cup P)$ de manera que, para todo $\gamma \in \Phi(N_{\widehat{f}} \cup P)$ con $\gamma \geq \varphi$ se satisface*

$$\left| \int_{V_\varphi^c} \widehat{f} d\widehat{\mu} - \alpha \right| < \epsilon. \quad (4.2.8)$$

Demostración: Si μ es finita, la medida $\widehat{\mu}$ es exteriormente regular, por lo tanto se puede seguir paso a paso la demostración del Teorema 3.1.1 para definir un cubrimiento $\varphi \in \Phi(N_{\widehat{f}} \cup P)$ adecuado.

Por otro lado, si μ es infinita, los cubrimientos de ∞ son de medida infinita y no se puede proceder como antes, sin embargo, se tiene que $\widehat{\mu}$ restringida a X es exteriormente regular. Entonces, así como en la demostración del Teorema 3.1.1, defínase $\varphi \in \Phi(N_{\widehat{f}} \cup (P \setminus \{\infty\}))$ de forma que para cada $\gamma \in \Phi(N_{\widehat{f}} \cup (P \setminus \{\infty\}))$ con $\gamma \geq \varphi$, se cumple

$$\left| \int_{V_\gamma^c} \widehat{f} d\widehat{\mu} - \alpha \right| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (4.2.9)$$

Considerando la Proposición 4.2.2, defínase $\varphi(\infty)$ de forma que

$$\int_{\varphi(\infty)} |\widehat{f}| d\widehat{\mu} < \frac{\epsilon}{2}. \quad (4.2.10)$$

Si $\gamma \in \Phi(N_{\widehat{f}} \cup P)$ es tal que $\gamma \geq \varphi$, y γ_0 es la restricción de γ a $N_{\widehat{f}} \cup (P \setminus \{\infty\})$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \int_{V_\gamma^c} \widehat{f} d\widehat{\mu} - \alpha \right| &= \left| \int_{V_\gamma^c} \widehat{f} d\widehat{\mu} - \int_{V_{\gamma_0}^c} \widehat{f} d\widehat{\mu} + \int_{V_{\gamma_0}^c} \widehat{f} d\widehat{\mu} - \alpha \right| \\ &\leq \left| \int_{V_\gamma^c} \widehat{f} d\widehat{\mu} - \int_{V_{\gamma_0}^c} \widehat{f} d\widehat{\mu} \right| + \left| \int_{V_{\gamma_0}^c} \widehat{f} d\widehat{\mu} - \alpha \right| \\ &< \left| \int_{V_{\gamma_0}^c} \widehat{f} d\widehat{\mu} - \int_{V_\gamma^c} \widehat{f} d\widehat{\mu} \right| + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \left| \int_{V_{\gamma_0}^c \setminus V_\gamma^c} \widehat{f} d\widehat{\mu} \right| + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

Luego, obsérvese que

$$\begin{aligned} V_{\gamma_0}^c \setminus V_\gamma^c &= V_\gamma \setminus V_{\gamma_0} \\ &= (V_{\gamma_0} \cup \gamma(\infty)) \setminus V_{\gamma_0} \\ &= (V_{\gamma_0} \cup \gamma(\infty)) \cap V_{\gamma_0}^c \\ &= \gamma(\infty) \cap V_{\gamma_0}^c. \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{V_\gamma^c} \widehat{f} d\widehat{\mu} - \alpha \right| &< \left| \int_{\gamma(\infty) \cap V_{\gamma_0}^c} \widehat{f} d\widehat{\mu} \right| + \frac{\epsilon}{2} \\
 &\leq \int_{\gamma(\infty) \cap V_{\gamma_0}^c} |\widehat{f}| d\widehat{\mu} + \frac{\epsilon}{2} \\
 &\leq \int_{\varphi(\infty) \cap V_{\gamma_0}^c} |\widehat{f}| d\widehat{\mu} + \frac{\epsilon}{2} \\
 &\leq \int_{\varphi(\infty)} |\widehat{f}| d\widehat{\mu} + \frac{\epsilon}{2} \\
 &\leq \epsilon
 \end{aligned} \tag{4.2.13}$$

□

Como consecuencia del teorema anterior, se tiene la equivalencia siguiente (resultado análogo al Teorema 3.1.2):

Teorema 4.2.4 *Sea $f \in M$ una función con $\mu(N_f) = 0$. Entonces, f es J -integrable con $(J) \int f = \alpha$ si y solo si, para cualesquiera $P \subset X^*$ compacto de medida cero y $\epsilon > 0$, existe $\varphi \in \Phi(N_{\widehat{f}} \cup P)$ de manera que, si $\gamma \in \Phi(N_{\widehat{f}} \cup P)$ con $\gamma \geq \varphi$ se satisface*

$$\left| \int_{V_\gamma^c} \widehat{f} d\widehat{\mu} - \alpha \right| < \epsilon. \tag{4.2.14}$$

A partir del Teorema 4.2.4 se demuestra la linealidad de forma análoga a como se demostró el Corollario 3.1.3.

Corolario 4.2.5 *Sean $f, g \in M$ funciones J -integrables en el sentido de la Definición 4.2.1. Entonces, $f + g$ es J -integrable y*

$$(J) \int (f + g) = (J) \int f + (J) \int g. \tag{4.2.15}$$

En resumen, se ha extendido la definición de J -integral para dos casos específicos:

1. espacios localmente compactos, totalmente acotados y de medida finita,
2. y espacios localmente compactos con la propiedad de Heine–Borel y de medida σ -finita,

de forma que el espacio de funciones integrables en cada caso preserve la estructura vectorial.

4.2.1. Un caso particular de la relación con la integral de Henstock–Kurzweil

En esta sección se presentan resultados análogos a los de la sección 3.3, pero ahora para el caso de funciones reales definidas en intervalos de la forma $[a, \infty)$.

Para definir la integral de Henstock–Kurzweil en este caso, dada una función $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, se consideran particiones del intervalo $[a, \infty]$, funciones medidoras definidas en $[a, \infty]$ y se extiende f definiendo $f(\infty) = 0$.

Dada una partición etiquetada $P = \{([a_i, b_i], x_i)\}_{i=1}^n$ de $[a, \infty]$, el último subintervalo, $[a_n, b_n]$, es de la forma $[a_n, \infty]$. Luego, dada una función medidora $\delta : [a, \infty] \rightarrow \mathbb{R}^+$, la partición P es δ -fina si para cada $i = 1, \dots, n - 1$ se cumple que $[a_i, b_i]$ es δ -fino, y $[a_n, \infty] \subset \left[\frac{1}{\delta(\infty)}, \infty \right]$, de esta forma, $x_n = \infty$ y el sumando $f(x_n)(b_n - a_n)$ es igual a cero. En este caso, también se prueba que, dada una función medidora δ en $[a, \infty]$, existe una partición etiquetada de $[a, \infty]$ que es δ -fina.

Definición 4.2.6 Una función $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es Henstock–Kurzweil integrable si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\epsilon > 0$, existe una función medidora δ en $[a, \infty]$ de forma que para toda partición

$P = \{([a_i, b_i], x_i)\}_{i=1}^n$ de $[a, \infty]$ que sea δ -fina, se cumple que

$$\left| \sum_{i=1}^n f(x_i)(b_i - a_i) - \alpha \right| < \epsilon, \quad (4.2.16)$$

En tal caso, se escribe $(HK) \int_a^\infty f = \alpha$.

El resultado siguiente es el Teorema de Hake para el caso de funciones definidas intervalos de la forma $[a, \infty)$.

Teorema 4.2.7 *Una función $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es HK-integrable si y solo si, para todo $x \in (a, \infty)$ f es HK-integrable en $[a, x]$ y existe el límite*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (HK) \int_a^x f.$$

En tal caso,

$$(HK) \int_a^\infty f = \lim_{x \rightarrow \infty} (HK) \int_a^x f. \quad (4.2.17)$$

Para consultar más detalles sobre la integral de Henstock-Kurzweil de funciones definidas en intervalos de la forma $[a, \infty)$ véase [4]

Dada una función $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ con $\mu(N_{\hat{f}}) = \{\infty\}$, es directo notar que $(J) \int f = \alpha$ si y solo si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{[a, x]} f d\nu = \alpha, \quad (4.2.18)$$

donde la J -integrabilidad es en el sentido de la Definición 4.2.1. De esta observación y del Teorema 4.2.7, se demuestra la proposición siguiente de forma análoga a como se hizo en el caso de $[a, b]$ (Proposición 3.3.4):

Proposición 4.2.8 *Sea $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ y supóngase que $N_f = \{\infty\}$. Entonces, f es J -integrable si y solo si f es HK-integrable y las integrales valen lo mismo.*

Tanto el Teorema de Hake como la proposición anterior se pueden demostrar de forma análoga para el caso en que $N_f = \{-\infty\}$.

Con esto, obsérvese que el Teorema 3.3.5 del Capítulo 3 se puede *actualizar* a una versión más general:

Teorema 4.2.9 *Sea $f \in M(X)$ donde $X = [a, b]$ ó $X = [a, \infty)$, y supóngase que N_f es finito. Entonces, f es J -integrable si y solo si f es HK -integrable y el valor de las integrales coincide.*

Conclusiones

El punto de partida de este trabajo es la caracterización de integrals generalizadas presentada en la Definición 1.2.1. Un hecho algo sorprendente, es que cualquier integral que caiga en el marco de dicha definición (es decir, que satisfaga unas cuantas propiedades básicas) cumple con resultados clásicos e importantes como el teorema de la convergencia dominada y el teorema de la convergencia monótona, o bien, teoremas de reordenamiento. Todo esto se desarrolla en el Capítulo 1 y se encuentra publicado en [3].

Los teoremas de reordenamiento presentados permiten establecer la relación entre integrales generalizadas e impropias, lo cual motiva el desarrollo de las J -integrales. En particular, se demostró que cualquier integral generalizada en la clase \mathcal{R} (espacios de medida localmente compactos con medida σ -finita, boreliana y regular), puede considerarse como una integral impropia en un sentido clásico; otro resultado igualmente sorprendente. Sin embargo, se trata de un resultado de *existencia*. Precisamente, las J -integrales desarrolladas y estudiadas del Capítulo 2 en adelante, son métodos de integración generalizada que proporcionan una regla explícita para definir *integrabilidad* como un límite de integrales, a partir de cubrimientos por bolas del conjunto de puntos de no sumabilidad de la función en cuestión.

El estudio de la integración generalizada del Capítulo 1 proporciona los fundamentos teóricos para el desarrollo de las J -integrales. No obstante, estas integrales también se inspiran en

construcciones clásicas como la integral de Harnack. En ese sentido, se recuperan ideas tradicionales de la integración impropia pero con una justificación teórica rigurosa dentro del marco de la integración generalizada. Además, estos métodos de integración permiten aplicar directamente resultados conocidos de la teoría de la medida y de la topología, sin necesidad de desarrollar nuevas construcciones.

Líneas de investigación futura

A continuación se presentan algunas posibles líneas de investigación futura y problemas abiertos relacionados con este trabajo:

- Extender las ideas desarrolladas al caso de funciones que toman valores en espacios de Banach ordenados. En particular, formular una caracterización análoga a la Definición 1.2.1 pero para integrales que generalizan la integral de Bochner. Cabe resaltar que, por ejemplo, a diferencia de lo que sucede en el caso real, la integral de Henstock vectorial no satisface en general la condición de que toda función Henstock-integrable no negativa es Bochner-integrable (véase la condición 2 de la Definición 1.2.1). Sin embargo, en [1] demuestran condiciones suficientes bajo las cuales esta propiedad sí se cumple.
- Estudiar la posible relación entre las J -integrales y la integral de Henstock–Kurzweil en el caso real. En este contexto, se demostró que para funciones con un número finito de puntos de no sumabilidad (un caso bastante particular), ambas definiciones son equivalentes, pero queda abierta la pregunta sobre la equivalencia en el caso general de funciones con conjunto de puntos de no sumabilidad de medida cero.
- Es de interés preguntarse si se puede obtener una versión satisfactoria del Teorema Fundamental del Cálculo con las J -integrales. Explorar esta cuestión puede traducirse en con-

tinuar estudiando la relación con la integral de Henstock–Kurzweil en general, incluyendo funciones cuyo conjunto de puntos de no sumabilidad tenga medida estrictamente positiva.

- En la construcción de los cubrimientos por bolas del conjunto de los puntos de no sumabilidad, las bolas se toman respecto a una métrica dada, lo que implica las definiciones de J -integral dependen de la métrica. Un resultado deseable sería demostrar que las definiciones no dependen de métrica, al menos para métricas fuertemente equivalentes (Lipschitz equivalentes).
- En el Capítulo 2, se demostró que las J -integrales son equivalentes entre sí para el caso de funciones con un número finito de puntos de no sumabilidad. Sin embargo, se sospecha que las integrales no son equivalentes en general, por lo que un objetivo sería construir ejemplos donde dicha equivalencia no se cumpla.
- Respecto a las extensiones de las J -integrales presentadas en el Capítulo 4, sería de utilidad extender las definiciones a espacios localmente compactos de medida σ -finita en general, sin más hipótesis sobre la métrica. Por otro lado, también es de interés seguir las ideas desarrolladas en [27] para establecer resultados relacionados con la transformada de Fourier.

Bibliografía

- [1] Alanís-López, L., Escamilla-Rocha, A., Escamilla-Reyna, J. A., *A note on the comparison between the Henstock and Bochner integrals for non-negative functions with values in an ordered Banach space*, Poincare Journal of Analysis and Applications, 12(1), pp. 61-74, 2025.
- [2] Alcaraz-Ubach, D. F., *Métodos de Integración Impropia*. Tesis de Maestría FCFM-BUAP. 2010.
- [3] Alcaraz-Ubach, D. F., y Jiménez-Pozo, M. A., *Generalized integrals and convergence theorems*, Results in Mathematics, 80, artículo 98, 2025.
- [4] Bartle, R. G., *A modern Theory of Integration*. American Mathematical Society. No. ISBN 0-8218-0845-1. 2001.
- [5] Bongiorno, B., Di Piazza, L., Preiss, D., *A constructive minimal integral which includes Lebesgue integrable functions and derivatives*, J. London Math. Soc., 62(1), pp. 117–126, 2000.
- [6] Denjoy, A. *Une extension de l'intégrale de M. Lebesgue*, Paris, Ac. Sci. C. R., 154, pp. 859-862, 1912.
- [7] Denjoy, A., *Calcul de la primitive de la fonction dérivée la plus générale*, Paris, Ac. Sci. C. R., 154, pp. 1075-1078, 1912.
- [8] Folland, G. B., *Real Analysis*. John Wiley & Sons. No. ISBN 0-471-31716-0. 1999.

- [9] Gordon, R. A., *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock*. American Mathematical Society. No. ISBN 0-8218-3805-9. 1994.
- [10] Hake, H., *Über de la Vallée Poussins Ober-und Unterfunktionen einfacher Integrale und die Integraldefinition von Perron*, Math. Annalen., 83, pp. 119-142, 1921.
- [11] Halmos, P. R., *Measure Theory*. Springer-Verlag. No. ISBN 0-387-90088-8. 1950.
- [12] Hardy, G. H., *Divergent Series*. Clarendon Press. 1949.
- [13] Heikkilä, S., *Monotone convergence theorems for Henstock-Kurzweil integrable functions and applications*, J. Math. Anal. Appl., 377(1), pp. 286-295, 2011.
- [14] Henstock, R., *The General Theory of Integration*. Clarendon Press, Oxford. No. ISBN 0-19-853566-X. 1991.
- [15] Hobson, E. W., *The Theory of Functions of Real Variable and the Theory of Fourier's Series*. Cambridge University Press. 1921.
- [16] Jiménez Pozo, M. A., *Improper integrals in topological finite measure spaces*. Preprint FCFM-BUAP. 2018.
- [17] Jiménez Pozo, M. A., *Medida, Integración y Funcionales*, Editorial Pueblo y Educación. 1989.
- [18] Jiménez Pozo, M. A., Alcaraz-Ubach, D. F., *Improper integrals in topological measure spaces*, aceptado sujeto a correcciones menores en Poincaré Journal of Analysis and Applications, 2025.
- [19] Kadets, V. *A Course in Functional Analysis and Measure Theory*. Springer. No ISBN 978-3-319-92003-0. 2018.

-
- [20] Kelley, J. L., *General Topology*. Springer-Verlag. No. ISBN 0-387-90125-6. 1955.
- [21] Kolmogorov, A. N., Fomin, S. V., *Introductory Real Analysis*. Dover Publications. No. ISBN 0-486-61226-0 1975
- [22] Korovkin, P. P. *Linear Operators and Approximation Theory*. Hindustan Publishing Corp. 1960.
- [23] Lu, J., y Lee, P. Y., *On singularity of Henstock integrable functions*, Real Analysis Exchange, 25, pp. 795-798, 2000.
- [24] Lu, J., y Lee, P. Y., *A dominated convergence theorem in the K - H integral*, Taiwanese Journal of Math., 7(3), pp. 507-512, 2003.
- [25] Lyapunov, A., *Sur les fonctions-vecteurs completement additives*. Bull. Acad. Sci. URSS, 6, pp. 465-478, 1940.
- [26] McShane, E. J., *Partial orderings and Moore-Smith limits*. The American Mathematical Monthly, 59(1), pp. 1-11, 1952.
- [27] Mendoza, F. J., Arredondo, J. H., Sánchez-Perales, S., Flores-Medina, O., Torres-Teutle, E., *The double Fourier transform of non-Lebesgue integrable functions of bounded Hardy—Krause variation*, Georgian Mathematical Journal, 30(3), pp. 403-415, 2023.
- [28] Ng, W. L., *Nonabsolute Integration on Measure Spaces*. World Scientific. No. ISBN 1793-1134. 2018.
- [29] Pesin, I., *Classical and Modern Integration Theories*. Academic Press. 1970.
- [30] Rosenthal, P., *The remarkable Theorem of Lévy and Steinitz*, The American Mathematical Monthly, 94(4), pp. 342-351, 1987
- [31] Royden, H. L., Fitzpatrick P. M., *Real Analysis*, fourth ed., Pearson. 2010.

- [32] Rudin, W., *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill. No. ISBN 0-07-054234-1. 1986.
- [33] Rudin, W., *Functional Analysis*. McGraw-Hill. No. ISBN 0-07-100944-2. 1991.
- [34] Sierpiński, W., *Sur les fonctions d'ensemble additives and continues*. Fund. Math. Vol. 3, pp. 240-246. 1922.
- [35] Spivak, M., *Calculus*, third ed., Publish or Perish. 1994.