



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Dinámica cuántica en modelos tipo Jaynes-Cummings
generalizados: la dependencia en las energías propias

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

Ivan Arellano Melendez

Asesorado por

Dr. Juan Mauricio Torres Gonzalez
Dra. María del Rosario Pastrana Sánchez

Puebla Pue.
Febrero 2024



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Dinámica cuántica en modelos tipo Jaynes-Cummings
generalizados: la dependencia en las energías propias

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

Ivan Arellano Melendez

Asesorado por

Dr. Juan Mauricio Torres Gonzalez
Dra. María del Rosario Pastrana Sánchez

Puebla Pue.
Febrero 2024

Título: Dinámica cuántica en modelos tipo Jaynes-Cummings generalizados: la dependencia en las energías propias

Estudiante: IVAN ARELLANO MELENDEZ

COMITÉ

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero
Presidente

Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco
Secretario

Dr. Eduardo Jonathan Torres Herrera
Vocal

Dra. Marcela Maribel Méndez Otero
Vocal

Dr. Juan Mauricio Torres Gonzalez
Dra. María del Rosario Pastrana Sánchez
Asesor

Agradecimientos

Este trabajo esta dedicado a las personas, instituciones y profesionales que ayudaron a la culminación del mismo. Me es imposible establecer una jerarquía en mención, pues considero que en cada etapa desarrollaron un papel importante. Dicho esto elegí el orden que a mi parecer es el más lógico, el cronológico; a mis padres y mi hermano, sin cuyo apoyo constante e incondicional no habría proporcionado las comodidades para dedicarme a esto. A mis compañeros de la facultad, cuya amistad sirvió en muchas ocasiones como un paliativo tras los cursos académicos. A mis profesores, que transmitieron esa pasión por su disciplina y siempre exhibieron una dedicación constante en su labor de enseñarme. A mi asesor Mauricio Torres, quien nunca dejó reservas de cualquier tipo de apoyo y por su disponibilidad en este trabajo, y sobre todo por su paciencia en cada etapa del mismo. A mi asesora María del Rosario Pastrana, cuyo apoyo en este trabajo siempre estuvo acompañado de su amabilidad y disposición, características que me fueron familiares desde que fue mi profesora en mi época de estudiante. Por último me gustaría agradecer a las instancias correspondientes que colaboran en mi formación académica, a la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas cuyo ambiente fue el adecuado para desarrollarme profesionalmente. A todos en su conjunto, gracias.

Índice general

Resumen	XI
Introducción	XIII
1. Conceptos preliminares	1
1.1. Vector de estado	1
1.2. Ecuación de autovalores y autovectores	1
1.3. Representación del campo electromagnético	2
1.4. Operador densidad $\hat{\rho}$	6
1.5. Función de Wigner	7
1.6. Traza parcial	10
1.7. Imagen de interacción	10
2. Dinámica no lineal del campo electromagnético	11
2.1. Hamiltoniano no lineal	11
2.2. Evolución del vector de estado	11
3. Modelo de Jaynes-Cummings	13
3.1. Hamiltoniano de Jaynes-Cummings-Paul	13
3.2. Representación matricial	15
3.3. Solución modelo de Jaynes-Cummings	16
3.4. Aproximaciones al modelo de Jaynes-Cummings	17
3.5. Modelo de Jaynes-Cummings no lineal	22
4. Modelo de trampa de iones	25
4.1. Hamiltoniano de trampa de iones	25
4.2. Aproximación lineal y cuadrática	26
5. Conclusión	33

Índice de figuras

1.1. Función de Wigner $W(x, y)$ para un estado puro coherente $ \alpha_0\rangle$ con $\text{Re}\{\alpha_0\} = x_0 = 2$ y $\text{Im}\{\alpha_0\} = y_0 = 0$	8
1.2. Función de Wigner para un estado coherente $ \alpha\rangle$ bajo un Hamiltoniano $\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}$. Los valores de los parámetros son $\omega = 1$, $\alpha = 4$ y convenimos en usar $\hbar = 1$. El radio de la trayectoria circular es $\sqrt{2}\alpha$, [13].	9
2.1. Función de Wigner a un mismo tiempo t para el Hamiltoniano (2.1)	12
3.1. Esquema del modelo de Jaynes-Cummings: un átomo de dos niveles $ e\rangle$ y $ g\rangle$ con frecuencia de transición atómica $\omega_a = \omega_e - \omega_g$, interactuando con un sólo modo del campo de radiación de frecuencia ω_c	13
3.2. Evolución temporal de la inversión de la población $W(t)$ para un estado coherente inicial con $\langle n \rangle = 25$ y constante de acoplamiento $g = 1$, con tiempos $t_R \approx 0,6$, $t_c \approx 3,1$ y $t_r \approx 32,03$ asociados a la oscilaciones de Rabi, de colapso y resurgimiento, respectivamente.	17
3.3. Aproximación lineal de ω_n para modelo de Jaynes-Cummings en torno al número promedio de fotones N , junto con la función de distribución para un estado coherente $ \alpha\rangle$. Elegimos $N = 100$, así $\delta_N = 5$ y $\omega'_N = 0,05$ (en unidades $\hbar g$).	18
3.4. Función de probabilidad entre los estados del campo para el modelo de Jaynes-Cummings y su aproximación lineal, con el valor reescalado $T = gt$	18
3.5. Comparación de la función de Wigner entre el modelo de Jaynes-Cummings y su aproximación lineal para distintos valores del parámetro T que coincide numéricamente con gt , esto es una constante de acoplamiento $g = 1$, con $N = 25$	19
3.6. Aproximaciones lineales de ω_n y la correspondiente función P_n para distintos valores de N	19
3.7. Aproximación cuadrática de las eigenfrecuencias ω_n para el modelo de Jaynes-Cummings, con un estado coherente inicial $\alpha = 4$ y con coeficientes $\alpha_N = 1,5$, $\beta_N = 0,18$ y $\omega_N = -0,0019$ (en unidades $\hbar g$).	20
3.8. Aproximación cuadrática de ω_n para distintos valores de N	21
3.9. Comparación de la función de Wigner entre el modelo de Jaynes-Cummings y aproximación cuadrática en ω_n . Con $N = 25$, y coeficientes $\alpha_N = 1,875$, $\beta_N = 0,15$ y $\gamma_N = -0,001$ (en unidades $\hbar g$).	22
3.10. Función de probabilidad entre los estados del modelo de Jaynes-Cummings y su aproximación cuadrática en ω_n , con $N = 25$ y coeficientes $\alpha_N = 1,875$, $\beta_N = 0,15$ y $\gamma_N = -0,001$ (en unidades $\hbar g$).	22
4.1. Comparación de Ω_n para el ITM su aproximación en funciones de Bessel J_n . Nótese el intercambio de signos en (4.7).	26

4.2.	Aproximación lineal a Ω_n para el modelo de trampa de iones, incluyendo la función de distribución P_n de un estado coherente inicial $ \alpha\rangle$, con $N = 85$ y por lo tanto $\delta_N = 0,9$, $\omega'_N = -0,007$ y $\eta = 0,170585$	27
4.3.	Función de probabilidad entre los estados del campo para el ITM y su modelo lineal aproximado.	28
4.4.	Comparación en el espacio fase del estado del campo entre el ITM y su aproximación lineal, con $\delta_N = 0,9$, $\omega'_N = -0,007$, $\eta = 0,1705$ y $N = 85$	28
4.5.	Aproximación cuadrática de ω_n para el modelo de trampa de iones, junto con la gráfica de P_n para un estado coherente inicial.	29
4.6.	Distintas aproximaciones cuadráticas a ω_n con distintos valores de N y η	30
4.7.	Distintas funciones de probabilidad entre los estados del campo para el modelo de trampa de iones y su aproximación cuadrática, con un valor de x_0 fijo dado por la relación (4.8).	30
4.8.	Distintas funciones de probabilidad entre los estados del campo para el modelo de trampa de iones y su aproximación cuadrática, con un valor de η fijo dado por la relación (4.8).	31
4.9.	Comparación en el espacio fase entre los estados del campo del ITM y su aproximación cuadrática, los parámetros corresponden a los indicados en la fila 4 en (Tabla.4.1).	31
4.10.	Función de probabilidad entre los estados del campo del ITM y su aproximación cuadrática, los parámetros corresponden a los indicados en la fila 4 en (Tabla.4.1).	32

Resumen

En la última década el progreso tanto teórico como experimental en el campo de la óptica cuántica ha tenido un crecimiento notable. El modelo de Jaynes-Cummings [6] para la descripción de la interacción de *un átomo de dos niveles y un sólo modo del campo* ha tenido una gran importancia tanto práctica como teórica para entender la interacción fotón-átomo así como sus posibles implicaciones tanto teóricas como experimentales en otros modelos como la trampa de iones. El análisis así realizado en dicho modelo considera un *hamiltoniano de interacción* con una dependencia no lineal en las *energías propias*, además de esto, un análisis más general puede ser llevado a cabo considerando funciones más complejas de la energía y examinar el modelo así descrito por tal hamiltoniano, como es en el caso del modelo de trampa de iones y su respectiva función de la energía, que en este caso corresponde con cierta aproximación a una función de Bessel de primer orden. Así se examinan posibles funciones para dicho modelo que sean aproximadas en ciertas circunstancias con los parámetros adecuados.

Palabras clave: *hamiltoniano de interacción, Jaynes-Cummings, energías propias, trampa de iones, interacción fotón-átomo*

Introducción

La Óptica Cuántica [QO] ¹ se ha convertido en una de las ramas más prolíficas de la ciencia de las últimas décadas. Sin embargo, en sus inicios la QO fue considerada por algunos como una parte de la física estadística más que como una disciplina separada. Fue hasta 1963 que Edwin Jaynes junto con su ex estudiante y ahora colega Frederick Cummings propondrían un modelo de la interacción de la materia con la luz con un enfoque completamente cuántico [6]. Entre las partes que más destacaban en dicho modelo es la presencia de los así denominados *colapsos* y *resurgimientos*, una característica inusual hallada en el comportamiento temporal y descrita en el trabajo hecho por Sanchez-Mondragon, Narozhny y Eberly en 1981 [8]. No fue hasta 1987 que el grupo de Herbert Walther verificó de manera experimental el fenómeno de los colapsos y resurgimientos en el máser de un átomo [10]. Aunque la evidencia experimental de los resurgimientos y colapsos que predecía el modelo de Jaynes-Cummings [JCM] tardó en llegar, el JCM contribuyó en diversas áreas de la física y también potenció la capacidad experimental en el control de preparación, manipulación y detección en sistemas individuales o de un solo cuerpo. Dos áreas de especial importancia que trataron dichos sistemas individuales fueron la física de iones atrapados, en cuya investigación destaca la contribución de Wolfgang Paul con la trampa de iones [9] y por otro lado tenemos las investigaciones sobre átomos en cavidades llevadas a cabo por D. Wineland, Serge Haroche, Daniel Kleppner, entre otros. Dichas investigaciones contribuirían para que en 1985 fueran llevadas a cabo las primeras realizaciones experimentales del JCM mediante la transición de *una molécula* de dos niveles con un modo resonante de una cavidad [7]. No fue hasta los años 90 que se llevarían a cabo las primeras demostraciones experimentales de la trampa de iones [16]. La influencia del JCM para dichas investigaciones demostraría una vez más la importancia de las investigaciones llevadas a cabo por Jaynes y Cummings en los años 60. Actualmente la investigación cubre amplias ramas de la física, tanto de manera experimental como teórica, con una fuerte influencia tanto en la física atómica, la QO, la física del estado sólido y la ciencia de la información cuántica, con grandes dividendos en la realización de circuitos QED tan importantes en el área de la Computación cuántica [QC].

Mostrada así la importancia del JCM dedicaremos este ensayo a su presentación, que aunque breve, recoge los elementos esenciales del trabajo original. Analizaremos el fenómeno de los resurgimientos (o *revivals*) y más generalmente la dinámica del JCM. Examinaremos de igual manera la relación entre el JCM y el modelo de la trampa de iones que como veremos, guardan una sutil diferencia en la expresión de su Hamiltoniano y por lo tanto también en la dependencia no lineal de sus eigenfrecuencias. Para propósito de una mejor comprensión de los modelos anteriores propondremos algunos modelos de un aspecto más teórico que práctico, esto facilitará el estudio de la dinámica en dichos modelos. Como última parte notaremos que a pesar del comportamiento no lineal de las eigenfrecuencias tanto en el JCM como en la trampa de iones, dichas funciones pueden, sin embargo, exhibir un comportamiento lineal (o hasta cuadrático como lo es el caso del modelo de trampa de iones) aproximado dentro de cierto intervalo para los parámetros correspondientes. Así, estudiamos tales modelos aproximados y analizamos los parámetros adecuados para su realización teórica. Aunque la implementación práctica queda más allá de la investigación de este

¹Algunas siglas han sido expresadas en su forma más popular del idioma inglés para una búsqueda de referencias más sencilla.

trabajo hacemos mención de algunas posibilidades para los modelos aproximados en la realización experimental.

Dicho esto, comenzaremos nuestra discusión con un breve repaso de los conceptos básicos en la teoría cuántica. Posteriormente presentaremos algunos conceptos más comunes en QO que serán fundamentales para la presentación del JCM y el estudio de su dinámica. Luego en la presentación del JCM haremos énfasis en los resultados más destacados, como los resurgimientos y colapsos, finalizando con la función de las eigenfrecuencias y realizando algunas aproximaciones lineales de éstas. Pasando del estudio del JCM propondremos algunos modelos con funciones sencillas en la eigenfrecuencias y estudiaremos la dinámica en breves casos. Por último presentaremos el modelo de la trampa de iones y haremos una comparación con la expresión correspondiente del hamiltoniano del JCM, así como también en la función de las eigenfrecuencias. Nuevamente haremos algunas aproximaciones (lineales y cuadráticas) para el modelo de trampa de iones y trataremos de encontrar algunos parámetros adecuados para encajar un estado coherente dentro de dicha aproximación, por último veremos como se refleja esto en la dinámica en el espacio fase y discutiremos la realización de tales aproximaciones. Concluimos con unos comentarios sobre las realizaciones experimentales llevadas al momento y las posibilidades futuras de su implementación.

Capítulo 1

Conceptos preliminares

1.1. Vector de estado

En mecánica cuántica describimos un estado dinámico mediante cierto ente abstracto que denominamos *ket*, el cual contiene la información máxima que podemos obtener del sistema. Así, para hacer referencia a un estado dinámico, digamos ψ , el ket correspondiente a dicho estado lo denotaremos:

$$|\psi\rangle.$$

El estado anterior se le denomina *estado puro* y en el cual tenemos total conocimiento del estado en que se encuentra nuestro sistema. Sin embargo en muchas ocasiones no tenemos un conocimiento completo del estado de nuestro sistema si no solamente conocemos la *probabilidad* P_i de que nuestro sistema se encuentre en el estado $|\psi_i\rangle$ en este caso decimos que nuestro estado se encuentra en un *estado mezclado*, que explicaremos más adelante.

1.2. Ecuación de autovalores y autovectores

De la teoría cuántica conocemos la importancia de los entes matemáticos denominados *operadores* y su relación con las cantidades físicas que podemos medir en nuestro sistema cuántico. Todo esto viene representado por la ecuación de *eigenvalores* y *eigenvectores* de cierto operador que representa una variable física. Si \hat{P} denota algún operador ¹, la ecuación de autovalores y autovectores es la siguiente:

$$\hat{P}|A\rangle = a|A\rangle. \tag{1.1}$$

En la ecuación anterior buscamos los kets $|A\rangle$ y los números a que satisfagan la igualdad para algún operador \hat{P} . Los kets que cumplen con dicha ecuación son los *autokets* (o autoestados) del operador \hat{P} y los números a son llamados *autovalores* correspondientes a dichos autokets.

La conexión entre la teoría matemática y física se pone de manifiesto por el hecho de que a cada *variable física* de nuestro sistema, esto es, toda cantidad que podemos medir, le corresponde un cierto operador abstracto. Sin embargo dicho operador debe cumplir con ciertas propiedades:

1. Los autovalores de algún operador $\hat{\xi}$ son números reales y corresponden a los valores posibles de obtener al realizar una medición de la variable ξ

¹Hemos utilizado una notación con circunflejo para evitar confusión entre un operador $\hat{\xi}$ y su autovalor correspondiente ξ

2. Los autoestados de dicho operador forman un *conjunto completo*; es decir, que todo ket $|P\rangle$ puede expresarse como una combinación lineal de los autoestados del operador ξ :

$$|P\rangle = \int |\xi'\rangle d\xi' + \sum_r |\xi^r\rangle \quad (1.2)$$

donde la integral se extiende a un dominio de medida no nula.²

3. El *valor esperado* de la variable física P para el estado $|A\rangle$ es:

$$\langle P \rangle = \langle A | \hat{P} | A \rangle \quad (1.3)$$

Las letras ξ' y ξ^r que aparecen en los autokets denotan el autovalor correspondiente a dicho autoket, esto es:

$$\hat{\xi} |\xi'\rangle = \xi' |\xi'\rangle$$

y de manera análoga para ξ^r .

Los autovalores de dicho operador corresponden a los valores que podemos obtener al realizar una medición de la variable física ξ ³ sobre nuestro sistema cuántico y los autokets corresponden a los estados en que el sistema puede *saltar* al realizar una medición, por tal motivo nos referimos a dichos autokets también como *autoestados*.

De esta manera se pone de manifiesto la importancia de resolver la ecuación de autovalores y autovectores (1.1) para un observable de nuestro sistema cuántico.

1.3. Representación del campo electromagnético

Un ejemplo útil de lo antes mencionado corresponde a la representación del campo electromagnético en la teoría cuántica que esta relacionada por los operadores de *aniquilación* y *creación*. La representación del campo nos permite reconocer ciertas propiedades de éste como lo son la amplitud promedio y la intensidad. A continuación discutiremos el proceso de cuantización del campo electromagnético y posteriormente presentaremos las dos representaciones más usadas para éste, que son la representación en *estados de número* o *estados de Fock* y la representación en *estados coherentes*.

Cuantización del campo electromagnético

Históricamente fue en la teoría de la radiación misma que surgió la necesidad de modificar la teoría clásica. Los resultados experimentales de la radiación de cuerpo negro llevaron a Plank a formular su hipótesis de que la energía era absorbida o emitida por ciertos múltiplos de una cantidad, lo que hoy denominamos *cuanto* de energía [1]. La misma naturaleza dual de las partículas elementales nos conducen de manera natural a la cuantización del campo electromagnético. Para ello utilizamos el método de cuantización usual, en el que nuestras variables físicas en la teoría clásica son promovidas a operadores en la teoría cuántica.

Partimos así del caso del campo electromagnético libre, gobernado por las ecuaciones de Maxwell, que en este caso particular son las siguientes:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

²Para los problemas de autovalores considerados aquí, únicamente el término de la sumatoria aparecerá. Este caso es conocido como un *espectro discreto*.

³Cuando un operador cumple con las propiedades antes mencionadas le damos el nombre de *observable* para diferenciarlo de los operadores que no corresponden a ninguna variable física que se pueda medir

donde $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ y $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$, con μ_0 y ϵ_0 la permeabilidad y permitividad en el espacio libre.

De las ecuaciones (1.4) se sigue que el campo eléctrico obedece a la ecuación de onda:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.5)$$

Analizamos ahora el campo eléctrico en una cavidad de longitud L y por simplicidad consideramos que dicho campo está polarizado linealmente en la dirección x , así expandimos los modos normales de la cavidad:

$$E_x(z, t) = \sum_j A_j q_j(t) \sin(k_j z) \quad (1.6)$$

donde q_j es la amplitud del modo normal j definido por $k_j = j\pi/L$ y

$$A_j = \left(\frac{2\omega_j^2 m_j}{V \epsilon_0} \right)^2$$

siendo ω_j la frecuencia de la cavidad, V el volumen del resonador y m_j una constante añadida a conveniencia.

De igual modo de (1.4) y haciendo uso de (1.6) podemos obtener la expresión para el campo magnético:

$$H_y = \sum_j A_j \left(\frac{\dot{q}_j \epsilon_0}{k_j} \right) \cos(k_j z) \quad (1.7)$$

De (1.6) y (1.7) llegamos finalmente a la expresión de la función Hamiltoniana clásica:

$$H = \frac{1}{2} \int_V (\epsilon_0 E_x^2 + \mu_0 H_y^2) d\tau = \frac{1}{2} \sum_j \left(m_j \omega_j^2 q_j^2 + \frac{p_j^2}{m_j} \right) \quad (1.8)$$

donde $p_j = m_j \dot{q}_j$ es el momento canónico del j -ésimo modo. Como podemos observar de la última expresión en (1.8) la función H es así una suma de energías de osciladores independientes de los modos j .

Promovemos así a nuestras coordenadas y momentos canónicos q_j y p_j a operadores con las siguientes leyes de conmutación:

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij} \hat{\mathbf{1}} \quad [\hat{q}_j, \hat{q}_k] = [\hat{p}_j, \hat{p}_k] = \hat{0}$$

ahora introducimos los operadores de aniquilación (\hat{a}_j) y de creación (\hat{a}_j^\dagger) que siguen las regla de conmutación

$$[\hat{a}_j, \hat{a}_k^\dagger] = \delta_{jk} \hat{\mathbf{1}}$$

Así podemos escribir nuestro operador hamiltoniano \hat{H}_F para el campo electromagnético de la siguiente manera:

$$\hat{H}_F = \hbar \sum_j \omega_j \left(\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{1}} \right) \quad (1.9)$$

es decir, el campo electromagnético en su versión cuántica es expresado por la suma de osciladores armónicos cuánticos [12], uno por cada modo j del campo.

Estados de Fock

La representación del campo electromagnético en estados de Fock o estados de número $|n\rangle$ se caracteriza por un número de fotones n bien definidos presentes en el campo. Como ejemplo consideramos el campo electromagnético compuesto de un solo modo, cuyo Hamiltoniano es el siguiente

$$\hat{H}_F = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \hat{\mathbb{1}} \right) \quad (1.10)$$

definimos así al estado de número $|n\rangle$ como un eigenestado del operador de número $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ con autovalor n , esto es

$$\hat{n} |n\rangle = \hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = n |n\rangle \quad (1.11)$$

haciendo uso de (1.11) en (1.10) tenemos que

$$\hat{H}_F |n\rangle = \hbar\omega(n + 1/2) |n\rangle \quad (1.12)$$

notamos que el estado de fotón cero $|0\rangle$ o *estado vacío* tiene energía $\frac{1}{2}\hbar\omega$

$$\hat{H}_F |0\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega |0\rangle$$

El estado de número $|n\rangle$ puede ser generado por la aplicación repetida del operador de creación sobre el estado vacío, expresado de la siguiente manera

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle$$

además obedece a las siguientes relaciones con los operadores de aniquilación y creación

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad \text{y} \quad \hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad (1.13)$$

Como ejemplo de esta representación del campo electromagnético calculamos el valor esperado de la amplitud de un solo modo del campo electromagnético de la polarización en la dirección x y propagándose en la dirección z

$$\hat{E}_x = E (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \sin(kz)$$

en este caso el valor esperado de la amplitud del campo en el estado de número $|n\rangle$ es

$$\langle n | \hat{E}_x | n \rangle = E \langle n | \hat{a} + \hat{a}^\dagger | n \rangle \sin(kz) = 0$$

el resultado anterior es válido para cualquier n . Una explicación de esto es que el valor esperado del campo en el estado $|n\rangle$ tiene una amplitud definida pero una fase distribuida aleatoriamente en un intervalo 2π .

Estados coherentes

Como vimos anteriormente los estados de Fock dan una visualización del campo con una amplitud definida pero no así su fase. Existe sin embargo ciertos estados para representar el campo electromagnético que en el límite de una gran amplitud ($n \rightarrow \infty$) reproducen el estado de un campo clásico, con una amplitud y una fase bien definidos.

Definimos a un estado coherente $|\alpha\rangle$ como un eigenestado del operador de aniquilación \hat{a} con eigenvalor $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \quad (1.14)$$

Debido a que \hat{a} no es un operador Hermitiano, no podemos usar el estado coherente como eigenestado de ninguna observable. Sin embargo aún podemos utilizarlos para investigar ciertas características medibles.

Antes hallemos una expresión más precisa de un estado coherente $|\alpha\rangle$, notemos que

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha\rangle \langle n|\alpha\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \quad (1.15)$$

donde $c_n = \langle n|\alpha\rangle$ corresponde a la amplitud de probabilidad del estado coherente al estado de número n y así $|\langle n|\alpha\rangle|^2$ es la probabilidad de que haya n fotones en el estado $|\alpha\rangle$. Para determinar los coeficientes c_n usamos la primera igualdad en (1.13) y escribimos

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \sum_n c_n \hat{a} |n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (1.16)$$

por otro lado de (1.14) y (1.15) tenemos que

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha c_n |n\rangle \quad (1.17)$$

comparando (1.16) y (1.17) tenemos que

$$c_{n+1} \sqrt{n+1} = \alpha c_n \quad (1.18)$$

aplicando iteradamente la expresión anterior llegamos a que

$$c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0 \quad (1.19)$$

Por lo tanto el estado coherente es expresado finalmente como

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0 |n\rangle \quad (1.20)$$

por último determinamos el valor de c_0 imponiendo la condición de normalización $\langle \alpha|\alpha\rangle = 1$, así encontramos que

$$|c_0|^2 = e^{-|\alpha|^2}$$

y por lo tanto

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (1.21)$$

Así, la probabilidad de encontrar n fotones en el campo representado por un estado coherente $|\alpha\rangle$ está dado por

$$P_n = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2} \quad (1.22)$$

que corresponde a una distribución de Poisson. Notamos además que

$$\langle n\rangle = \langle \alpha|\hat{a}^\dagger \hat{a}|\alpha\rangle = |\alpha|^2, \quad (1.23)$$

es decir, el valor esperado del número de fotones para el campo electromagnético representado por un estado coherente $|\alpha\rangle$ es igual a $|\alpha|^2$.

Por último cabe mencionar que los estados coherentes no son ortogonales, es decir que en general

$$\langle\alpha|\beta\rangle \neq 0 \tag{1.24}$$

sin embargo, éstos estados sí forman un conjunto sobre-completo, teniendo la siguiente relación de completéz:

$$\frac{1}{\pi} \int d\alpha |\alpha\rangle \langle\alpha| = \mathbf{1} \tag{1.25}$$

1.4. Operador densidad $\hat{\rho}$

En la sección anterior hemos dos tipos de estados puros del campo electromagnético; los estados de Fock o estados de número y los estados coherentes, siendo estos últimos los que presentan un comportamiento del campo más cercano al clásico. Sin embargo estas representaciones no suelen ser las más generales, la descripción del cuántico más general es mediante el uso del *operador densidad*. Antes de pasar a la definición del operador densidad, recordemos que en física estadística, un valor esperado o promedio de una cantidad física A , denotado como $\langle A \rangle$ es obtenido considerando cada valor medido A_i con una probabilidad asociada P_i y sumando sobre todas las medidas posibles:

$$\langle A \rangle = \sum_{i=1}^N P_i A_i. \tag{1.26}$$

Podemos así hacer una analogía para un sistema cuántico, que puede estar ya sea en un estado puro o en un estado mezclado.

Si el estado del sistema es determinado por un solo vector $|\psi\rangle$ decimos que el sistema se encuentra en un estado puro. Por otro lado si el sistema no puede ser especificado si no solamente las probabilidades de que el sistema se halle en un rango de posibles estados, decimos entonces que el estado se encuentra en un estado mezclado.

Introducimos entonces el operador densidad en términos de el valor de una observable con respecto a un estado puro de la siguiente manera. Para un operador \hat{A} y un estado puro $|\psi\rangle$ el valor esperado de la cantidad A según (1.3) es:

$$\langle A \rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle. \tag{1.27}$$

introducimos ahora una relación de completéz de los estados $|n\rangle$ y reescribimos:

$$\begin{aligned} \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle &= \sum_n \langle\psi|\hat{A}|n\rangle \langle n|\psi\rangle \\ &= \sum_n \langle n|\psi\rangle \langle\psi|\hat{A}|n\rangle \\ &= Tr(\hat{\rho}\hat{A}) \end{aligned} \tag{1.28}$$

donde la última expresión denota la *traza* del operador entre paréntesis. Definimos así $\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle\psi|$ como el operador densidad para un estado puro $|\psi\rangle$. Como vemos en la última expresión dicho operador será esencial para calcular los valores esperados de interés en nuestro sistema cuántico.

Por otro lado para un estado mezclado donde solo conocemos las probabilidades P_i de que el sistema se encuentre en el estado $|\psi_i\rangle$ podemos aún definir de manera análoga a (1.26) un operador densidad de la siguiente manera:

$$\hat{\rho} = \sum_i P_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (1.29)$$

es decir, en un estado mezclado el operador densidad se expresa como una superposición de operadores densidad de estados puros $|\psi_i\rangle$.

Si asumimos a los estados $|\psi_i\rangle$ normalizados, no necesariamente ortogonales, vemos que si alguna $P_i = 1$ necesariamente todas las demás probabilidades serán iguales a cero y el operador densidad será el correspondiente para un estado puro.

Propiedades del operador densidad

Algunas propiedades del operador densidad son las siguientes:

1. El operador densidad es hermitiano

$$\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho} \quad (1.30)$$

2. El operador densidad está normalizado, esto es:

$$Tr(\hat{\rho}) = 1 \quad (1.31)$$

3. El operador densidad es positivo semidefinido, es decir, para cualquier estado $|\phi\rangle$:

$$\langle \phi | \hat{\rho} | \phi \rangle \geq 0 \quad (1.32)$$

4. Para un estado puro:

$$\hat{\rho}^2 = \hat{\rho} \quad (1.33)$$

5. Por último

$$Tr(\hat{\rho}^2) \leq 1 \quad (1.34)$$

1.5. Función de Wigner

Una vez definido el operador densidad $\hat{\rho}$, podemos representarlo en el espacio fase. Como ejemplo consideramos la llamada representación de Wigner del campo electromagnético en un estado general $\hat{\rho}$ esta definida de la siguiente manera [2]:

$$W(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2z \chi_S(z) e^{-z^* \alpha^*} e^{-z \alpha} \quad (1.35)$$

donde la función χ_S puede interpretarse como un mapeo de nuestro operador $\hat{\rho}$ a una función de variable compleja z .

$$\chi_S(z) = Tr \left(\hat{\rho} e^{-z^* \hat{a}^\dagger} e^{z \hat{a}} \right) e^{\frac{1}{2}|z|^2} \quad (1.36)$$

la función χ_S es la función característica para un orden simétrico de los operadores \hat{a}, \hat{a}^\dagger :

$$\chi_S(z) = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} e^{-z^* \alpha_0^*} e^{z \alpha_0}. \quad (1.37)$$

Reuniendo las expresiones (1.35) y (1.37) obtenemos

$$W(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2z \exp\{z^*(\alpha^* - \alpha_0^*)\} \exp\{-z(\alpha - \alpha_0)\} \exp\left\{-\frac{1}{2}|z|^2\right\} \quad (1.38)$$

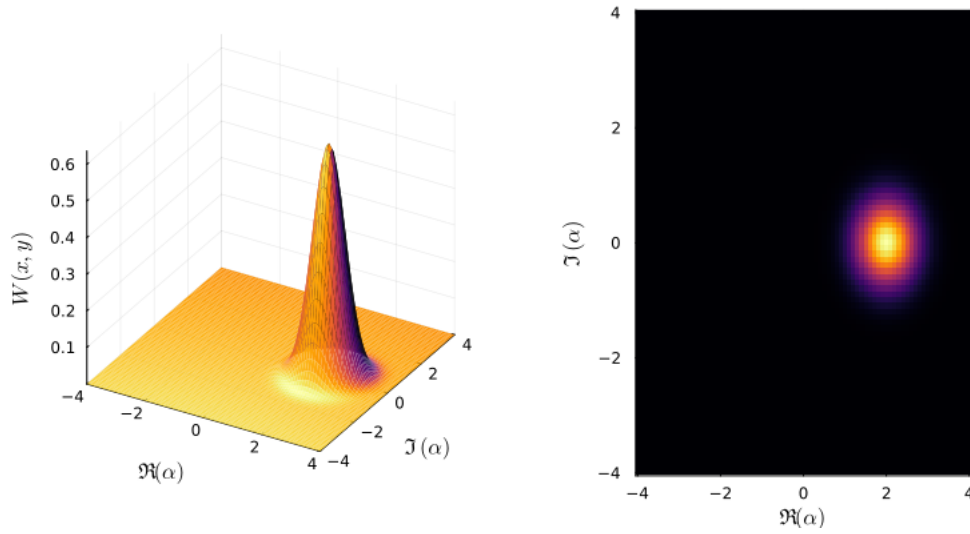


Figura 1.1: Función de Wigner $W(x, y)$ para un estado puro coherente $|\alpha_0\rangle$ con $\text{Re}\{\alpha_0\} = x_0 = 2$ y $\text{Im}\{\alpha_0\} = y_0 = 0$

donde para evaluar la expresión anterior usamos la identidad

$$\frac{1}{\pi} \int d^2z \exp\{-\gamma|z|^2 + \mu z + \nu z^*\} = \frac{1}{\gamma} \exp\left\{\frac{\mu\nu}{\gamma}\right\}.$$

Llegamos finalmente a:

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi} \exp\{-2|\alpha - \alpha_0|^2\}, \quad (1.39)$$

donde el parámetro α es un número complejo en general, así podemos expresar lo anterior en términos de $x, y \equiv \text{Re}\{\alpha\}, \text{Im}\{\alpha\}$

$$W(x, y) = \frac{2}{\pi} \exp\left\{-2\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right]\right\}. \quad (1.40)$$

Notamos de esta última expresión que la función de Wigner de un estado coherente puro $|\alpha_0\rangle$ es una función gaussiana centrada en α_0 , ver la Fig. 1.1.

Dinámica de la función de Wigner

Una característica importante de la función de Wigner es que ésta presenta comportamiento en esencia clásico. Para potenciales $U(x)$ que dependen de hasta términos de segundo orden en la posición, la ecuación de Liouville cuántica resulta ser idéntica a la obtenida de la mecánica estadística clásica. Por lo tanto cada punto de la función de Wigner se mueve conforme a las leyes de la mecánica clásica. Con las propiedades cuánticas del sistema ocultas bajo las condiciones iniciales del mismo [13], es decir

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p}{M} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{dU(x)}{dx} \frac{\partial}{\partial p}\right) W(x, p; t) = 0.$$

Como ejemplo consideramos la evolución temporal de la función de Wigner para un estado coherente $|\alpha\rangle$ con el Hamiltoniano que representa al campo electromagnético de un solo modo, es decir el Hamiltoniano del Oscilador Armónico Cuántico ⁴:

⁴Hemos omitido el término constante, dicha omisión no cambia la dinámica del sistema

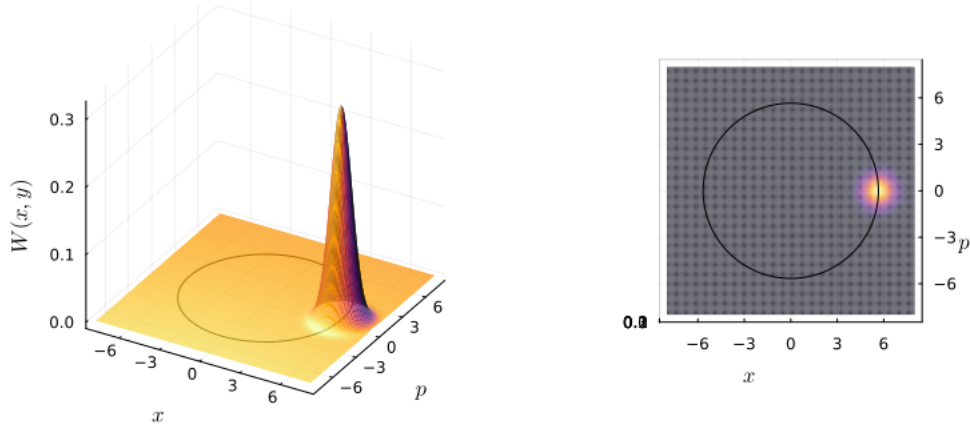


Figura 1.2: Función de Wigner para un estado coherente $|\alpha\rangle$ bajo un Hamiltoniano $\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}$. Los valores de los parámetros son $\omega = 1$, $\alpha = 4$ y convenimos en usar $\hbar = 1$. El radio de la trayectoria circular es $\sqrt{2}\alpha$, [13].

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} \quad (1.41)$$

así, la solución formal a la ecuación de Schrödinger se lee de la siguiente manera:

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right\} |\alpha\rangle \quad (1.42)$$

haciendo uso de (1.21) en (1.42) tenemos que:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right\} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \alpha^n |n\rangle \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right\} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \alpha^n \exp\{-i\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}t\} |n\rangle \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right\} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \alpha^n \exp\{-i\omega nt\} |n\rangle \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right\} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \alpha^n \exp\{-i\omega t\}^n |n\rangle \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right\} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} (\alpha \exp\{-i\omega t\})^n |n\rangle \\ &= |\alpha \exp\{-i\omega t\}\rangle \end{aligned}$$

Es decir nuestro vector de estado $|\psi(t)\rangle$ al tiempo t es nuevamente un estado coherente $|\alpha'\rangle$ con un parámetro $\alpha' = \alpha \exp\{-i\omega t\}$. Ya que el parámetro α es en general un número complejo, el parámetro α' no es más que α rotado en un ángulo ωt en dirección de las manecillas del reloj en el plano imaginario. Así, el comportamiento en el espacio fase es representado por una campana Gaussiana que se mueve a lo largo de una trayectoria circular (la esperada en un oscilador armónico) como puede verse en la Figura 1.2.

1.6. Traza parcial

El operador densidad (1.29) corresponde a nuestro sistema completo, para hacer un análisis de algún subsistema particular debemos expresar nuestros operadores de manera adecuada, de tal modo que sólo contengan la información que nos interese. Consideremos por ejemplo un espacio de Hilbert que es el producto de dos espacios $H_A \otimes H_B$, y sea un operador \hat{O} actuando en esta base compuesta. El operador \hat{O} puede ser escrito como:

$$\hat{O} = \sum_{ij} c_{ij} \hat{M}_i \otimes \hat{N}_j$$

donde los operadores \hat{M}_i, \hat{N}_j actúan sobre los espacios H_A y H_B respectivamente. Definimos la traza parcial sobre H_A del operador \hat{O} como:

$$Tr_{H_A}(\hat{O}) = \sum_{ij} c_{ij} Tr(\hat{M}_i) \hat{N}_j \quad (1.43)$$

y de manera análoga para Tr_{H_B} . La parte implícita a notar es que dejamos intacta la parte del operador \hat{O} que actúa sobre H_B . De esta manera la traza parcial resulta útil si una vez obtenido un operador compuesto queremos analizar un espacio en particular.

1.7. Imagen de interacción

La imagen de interacción consiste en dividir el sistema en dos partes, considerando a una ellas una perturbación de la otra. Consideremos un operador hamiltoniano de la forma:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}, \quad (1.44)$$

donde \hat{H}_0 denota la parte del hamiltoniano que describe la evolución libre del sistema, mientras que \hat{V} es una perturbación externa añadida. Del resultado general (1.28) sabemos que el valor medio del operador $\hat{O}(t)$ es dado por:

$$\langle \hat{O}(t) \rangle = Tr \left(\hat{O}(t) \hat{\rho}(0) \right) = Tr \left(\hat{O}(0) e^{-i\hat{H}t/\hbar} \hat{\rho}(0) e^{i\hat{H}t/\hbar} \right). \quad (1.45)$$

En la última igualdad hicimos uso de las relaciones entre las imágenes de Heisenberg y Schrödinger [12], considerando que nuestro hamiltoniano \hat{H} no depende explícitamente del tiempo.

Ahora hacemos uso de la regla cíclica de la traza $Tr(\hat{A}\hat{B}\hat{C}\dots) = Tr(\hat{B}\hat{C}\dots\hat{A})$ para introducir un operador identidad $\mathbb{1} = e^{-i\hat{H}_0t/\hbar} e^{i\hat{H}_0t/\hbar}$.

Así reescribimos (1.45) como

$$\langle \hat{O}(t) \rangle = Tr \left[\left(e^{i\hat{H}_0t/\hbar} \hat{O}(0) e^{-i\hat{H}_0t/\hbar} \right) \left(e^{i\hat{H}_0t/\hbar} e^{-i\hat{H}t/\hbar} \hat{\rho}(0) e^{i\hat{H}t/\hbar} e^{-i\hat{H}_0t/\hbar} \right) \right] \quad (1.46)$$

La última expresión nos motiva a definir la forma en la imagen de interacción (denotado por el superíndice) de los operadores $\hat{O}(t)$ y $\hat{\rho}(t)$:

$$\begin{aligned} \hat{O}^I(t) &= e^{iH_0t/\hbar} \hat{O}(0) e^{-iH_0t/\hbar} \\ \hat{\rho}^I(t) &= e^{iH_0t/\hbar} \hat{\rho}(0) e^{-iH_0t/\hbar} \end{aligned} \quad (1.47)$$

con todo esto, llegamos finalmente a la expresión:

$$\langle \hat{O}(t) \rangle = Tr \left(\hat{O}^I(t) \hat{\rho}^I(t) \right) \quad (1.48)$$

donde el operador $\hat{\rho}^I(t)$ obedece la así llamada ecuación de Liouville-von Neumann en la imagen de interacción:

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}^I(t) = -i \left[\hat{V}^I(t), \hat{\rho}^I(t) \right].$$

Capítulo 2

Dinámica no lineal del campo electromagnético

2.1. Hamiltoniano no lineal

Hemos visto anteriormente que la representación en el espacio fase del campo electromagnético de un solo modo en un estado coherente es una función gaussiana y debido a la forma del hamiltoniano, que es el correspondiente al del oscilador armónico cuántico, la campana gaussiana se moverá en el espacio fase en una trayectoria circular.

Investigamos ahora la dinámica en el espacio fase para un estado coherente inicial $|\alpha\rangle$ y un hamiltoniano de la siguiente forma:

$$\hat{H} = \hbar \left(\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \nu (\hat{a}^\dagger \hat{a})^2 \right) \quad (2.1)$$

es decir, hemos añadido una dependencia cuadrática en las eigenfrecuencias¹. El término cuadrático es de especial interés pues representa el hamiltoniano efectivo para el campo cuantizado que sufre una autointeracción mediante el efecto Kerr [15].

Podemos claramente que:

$$\hat{H} |n\rangle = \left(\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + (\hat{a}^\dagger \hat{a})^2 \right) |n\rangle = (\omega n + \nu n^2) |n\rangle \quad (2.2)$$

con una eigenfrecuencia $\omega_n = \omega n + \nu n^2$ para el estado $|n\rangle$.

$$E_n = \hbar (\omega n + \nu n^2) \quad (2.3)$$

La dinámica de nuestro vector de estado bajo un Hamiltoniano del tipo (2.1) dependerá del valor relativo de las frecuencias ω y ν . Así, por ejemplo, para $\omega = 1$ y $\nu = 0$, éste corresponde al oscilador armónico cuántico.

2.2. Evolución del vector de estado

Consideramos ahora la evolución bajo el hamiltoniano (2.1) y un estado coherente inicial $|\alpha\rangle$. Entonces, la solución a la ecuación de Schrödinger nos permite escribir el vector de estado $|\psi(t)\rangle$ para cualquier tiempo t , como:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar} |\alpha\rangle \quad (2.4)$$

¹Hemos omitido el término $\frac{1}{2}\mathbb{1}$ que no modifica la dinámica del sistema original

Sin embargo a diferencia del caso del oscilador armónico cuántico, nuestro estado final no es nuevamente un estado coherente, en efecto, haciendo uso de (2.1) y (1.21) en (2.4) tenemos que:

$$\begin{aligned}
 |\psi(t)\rangle &= \exp\{-i(\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \nu(\hat{a}^\dagger\hat{a})^2)t\} \exp\left\{-\frac{|\alpha|^2}{2}\right\} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\
 &= \exp\left\{-\frac{|\alpha|^2}{2}\right\} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp\{-i(\omega n + \nu n^2)t\} |n\rangle \\
 &= \exp\left\{-\frac{|\alpha|^2}{2}\right\} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} \exp\{-i\nu n^2 t\} |n\rangle
 \end{aligned}$$

El efecto añadido por el término cuadrático (la última exponencial a la derecha en la expresión anterior) es apreciado si analizamos el espacio fase con la ayuda de la función de Wigner, como se muestra en la Fig.3.9 ².

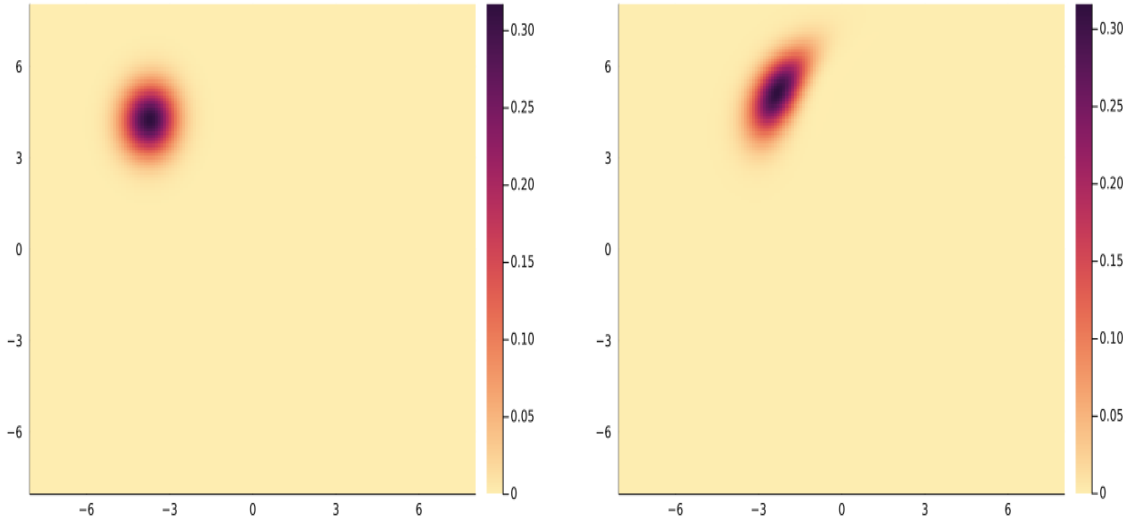


Figura 2.1: Función de Wigner a un mismo tiempo t para el Hamiltoniano (2.1) y un estado coherente inicial $|\alpha\rangle$ con $\alpha = 4$. La figura izquierda corresponde a $\omega_i = 1$ y $\nu_i = 0,0007$, es decir un cociente $\nu_i/\omega_i = 0,0007$, mientras que la figura derecha tiene un cociente $\nu_d/\omega_d = 0,003$

Como podemos notar el valor relativo del término ν con respecto de ω , añade una deformación a nuestro estado coherente inicial $|\alpha\rangle$ conforme el término cuadrático se vuelve más dominante que el término lineal, de ahí el hecho anterior de que nuestro estado $|\psi(t)\rangle$ no pueda expresarse como un estado coherente nuevamente, como si ocurría en el caso del oscilador armónico cuántico. O dicho de otra forma, el efecto por el término cuadrático en las eigenfrecuencias es una extensión en el espacio fase de nuestro vector de estado.

²Las gráficas del espacio fase se graficaron con ayuda de la librería de Quantum Optics de Julia, ver [4] para una mayor referencia.

Capítulo 3

Modelo de Jaynes-Cummings

3.1. Hamiltoniano de Jaynes-Cummings-Paul

El modelo de Jaynes-Cummings-Paul describe la interacción de un solo modo del campo con un átomo de dos niveles, como se representa de manera esquemática en la Fig.3.1.

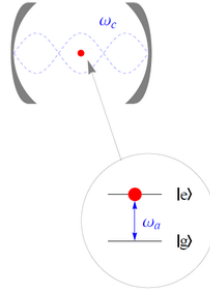


Figura 3.1: Esquema del modelo de Jaynes-Cummings: un átomo de dos niveles $|e\rangle$ y $|g\rangle$ con frecuencia de transición atómica $\omega_a = \omega_e - \omega_g$, interactuando con un sólo modo del campo de radiación de frecuencia ω_c .

La función hamiltoniana del sistema puede escribirse como:

$$H = H_a + H_c - e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} \quad (3.1)$$

donde H_a y H_c son las energías del átomo y de la radiación del campo, respectivamente, en la ausencia de interacción y \mathbf{r} es el vector de posición del electrón y el campo escrito en su aproximación dipolar.

Para construir el operador Hamiltoniano de nuestro sistema, escribimos primeramente el Hamiltoniano correspondiente a un solo modo del campo (1.9), esto es:

$$\hat{H}_c = \hbar\omega_c \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{1}} \right) \quad (3.2)$$

donde ω_c denota la frecuencia del campo.

Por otro lado los estados internos del átomo pueden ser descritos por los kets $|e\rangle$ y $|g\rangle$ que denotan al estado del átomo con energía E_e y E_g respectivamente. Estos estados son eigenestados del operador Hamiltoniano del átomo \hat{H}_a :

$$\hat{H}_a |i\rangle = E_i |i\rangle$$

con la etiqueta $i = e, g$ que representa al estado excitado o al estado base. Haciendo uso de una doble relación de completez sobre nuestros estados del átomo y de la ecuación de autovalores, podemos finalmente expresar nuestro estado del átomo de la siguiente manera:

$$\hat{H}_a = \sum_i E_i \hat{\sigma}_{ii} \quad (3.3)$$

donde $\hat{\sigma}_{ij} = |i\rangle \langle j|$ representa el operador de transición atómica y E_i el valor de la energía del átomo en el estado $|i\rangle$.

Luego tenemos que:

$$\mathbf{er} \stackrel{\circ}{=} \sum_{ij} e |i\rangle \langle i| \hat{r} |j\rangle \langle j| = \sum_{ij} \wp_{ij} \hat{\sigma}_{ij} \quad (3.4)$$

donde \wp_{ij} es el elemento de la matriz de transición del dipolo eléctrico.

Por último el operador del campo eléctrico es [14]:

$$\hat{\mathbf{E}} \equiv \bar{\epsilon} \mathcal{E} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (3.5)$$

con $\mathcal{E} = (\hbar\omega_c/2\epsilon_0 V)^{1/2}$. Ahora denotando:

$$g^{ij} = -\frac{\wp_{ij} \cdot \bar{\epsilon} \mathcal{E}}{\hbar},$$

podemos escribir nuestro operador hamiltoniano como:

$$\hat{H} = \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + E_e \hat{\sigma}_{ee} + E_g \hat{\sigma}_{gg} + \hbar(g^{ee} \hat{\sigma}_{ee} + g^{eg} \hat{\sigma}_{eg} + g^{ge} \hat{\sigma}_{ge} + g^{gg} \hat{\sigma}_{gg}) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (3.6)$$

Para nuestro caso de un átomo de dos niveles tenemos que $\wp_{ij} = \wp_{ji}$ y así escribimos simplemente:

$$g = g^{ij} = g^{ji}$$

Por último desarrollamos las sumatorias en (3.6) y hacemos una aproximación que consiste en eliminar los productos del tipo $\hat{a} \hat{\sigma}_-$ y $\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_+$, conocida como la aproximación de la onda rotante [14]. Además de la siguiente igualdad ¹:

$$E_e \sigma_{ee} + E_g \sigma_{gg} = \frac{1}{2} \hbar\omega_a (\sigma_{ee} - \sigma_{gg}) + \frac{1}{2} (E_e + E_g) \quad (3.7)$$

y haciendo uso de la notación:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_z &= \sigma_{ee} - \sigma_{gg} = |e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g| \\ \hat{\sigma}_+ &= \sigma_{eg} = |e\rangle \langle g| \\ \hat{\sigma}_- &= \sigma_{ge} = |g\rangle \langle e| \end{aligned} \quad (3.8)$$

finalmente al hamiltoniano ²:

$$\hat{H} = \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \hbar\omega_a \hat{\sigma}_z + \hbar g (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-) \quad (3.9)$$

¹Hemos hecho uso de las igualdades $\sum_i \hat{\sigma}_{ii} = \mathbf{1}$ y $E_e - E_g = \hbar\omega_a$

²Una vez más hemos ignorado el término constante de energía en (3.7)

Imagen de interacción

Para el análisis de nuestro hamiltoniano (3.9) será conveniente trabajar en la imagen de interacción (1.44) con:

$$\begin{aligned}\hat{H}_0 &= \hbar\omega_c\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hbar\omega_a\hat{\sigma}_z \\ \hat{V} &= \hbar g(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-)\end{aligned}\tag{3.10}$$

Así de acuerdo a las expresiones (1.47) nuestro operador hamiltoniano en la imagen de interacción \hat{H}^I es:

$$\hat{H}^I = \exp\left\{i\hat{H}_0t/\hbar\right\}\hat{V}\exp\left\{-i\hat{H}_0t/\hbar\right\}\tag{3.11}$$

hacemos uso de la identidad de Baker-Campbell-Hausdorff

$$e^{\alpha\hat{A}}\hat{B}e^{-\alpha\hat{A}} = \hat{B} + \alpha[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{\alpha^2}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots\tag{3.12}$$

y así llegamos a las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\exp\{i\omega_c\hat{a}^\dagger\hat{a}t\}\hat{a}\exp\{-i\omega_c\hat{a}^\dagger\hat{a}t\} &= \hat{a}\exp\{-i\omega_c t\} \\ \exp\{i\omega_a\hat{\sigma}_z t/2\}\hat{\sigma}_+\exp\{-i\omega_a\hat{\sigma}_z t/2\} &= \hat{\sigma}_+\exp\{i\omega_a t\}\end{aligned}\tag{3.13}$$

Reuniendo (3.10), (3.11) y (3.13) tenemos que:

$$\hat{H}^I = \hbar g(\hat{\sigma}_+\hat{a}e^{i\Delta t} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-e^{-i\Delta t})\tag{3.14}$$

donde $\Delta = \omega_a - \omega_c$ denota la *desintonía*. De aquí en adelante consideraremos el caso resonante ($\Delta = 0$), por lo que nuestro Hamiltoniano en la imagen de interacción queda finalmente expresado como:

$$\hat{H}^I = \hbar g(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-)\tag{3.15}$$

3.2. Representación matricial

El hamiltoniano de interacción (3.15) puede solo causar transiciones del tipo $|e, n-1\rangle \iff |g, n\rangle$, por lo tanto para n fija, la dinámica del sistema queda confinada al espacio dos dimensional de los productos formados por $|e, n-1\rangle, |g, n\rangle$. La representación matricial en dicha base es escrita entonces como:

$$\hat{H}^{(n)} \equiv \hbar \begin{pmatrix} (n-1)\omega_c + \frac{1}{2}\omega_a & g\sqrt{n} \\ g\sqrt{n} & n\omega_c - \frac{1}{2}\omega_a \end{pmatrix}\tag{3.16}$$

Los eigenvalores de $\hat{H}^{(n)}$ están dados por ³:

$$E_{\pm} = \left(n - \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c \pm \hbar g\sqrt{n},\tag{3.17}$$

Sin embargo para el hamiltoniano de interacción (3.15), que es el que contiene la dinámica del sistema átomo-campo, las eigenenergías se escriben como:

$$E_{\pm} = \pm\hbar g\sqrt{n}\tag{3.18}$$

³Nuevamente consideramos el caso resonante $\Delta = \omega_a - \omega_c = 0$.

Emplearemos más las eigenfrecuencias ω_n que están relacionadas con las eigenenergias por un factor de \hbar . Donde además usamos el tiempo reescalado con g igual a la unidad. Así, esta relación simple con el número de fotones n nos permitirá construir ciertos hamiltonianos aproximados al modelo de Jaynes-Cummings, ya sea una aproximación lineal o hasta un término cuadrático para lo cual basta hacer una expansión en serie de Taylor para la función \sqrt{n} y despreciar los términos de orden más alto que n^2 .

3.3. Solución modelo de Jaynes-Cummings

La solución a la ecuación de Schrödinger de (3.15) nos brinda un conjunto de ecuaciones acopladas para las amplitudes de probabilidad de las posibles transiciones entre los estados $\{|e, n-1\rangle, |g, n\rangle\}$, las soluciones a dichas ecuaciones son:

$$\begin{aligned} c_{e,n}(t) &= c_{e,n}(0) \cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) - i c_{g,n+1}(0) \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \\ c_{g,n+1}(t) &= c_{g,n+1}(0) \cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) - i c_{e,n}(0) \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

en este caso $\Omega_n = 2g\sqrt{n+1}$ y donde por ejemplo, el coeficiente $c_{a,n}$ denota la amplitud de probabilidad cuyo valor absoluto al cuadrado denota la probabilidad de que el átomo se encuentre en el estado $|a\rangle$ y el campo tenga n fotones.

Podemos continuar nuestro análisis de la ecuaciones (3.19) y calcular por ejemplo la probabilidad $p(n)$ de que haya n fotones al tiempo t , obtenida tomando la traza sobre los estados atómicos:

$$\begin{aligned} p(n) &= |c_{a,n}(t)|^2 + |c_{b,n}(t)|^2 \\ &= p_{nn}(0) \cos^2\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) + p_{n-1,n-1}(0) \left(\frac{4g^2 n}{\Omega_{n-1}^2}\right) \sin^2\left(\frac{\Omega_{n-1} t}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

con $p_{nn}(0)$ la probabilidad de que haya n fotones presentes en el campo en $t = 0$. Si el estado inicial del campo es un estado coherente, entonces de (1.23) podemos escribir:

$$p_{nn}(0) = \frac{\langle n \rangle^n e^{-\langle n \rangle}}{n!}$$

por último podemos calcular la inversión $W(t)$ definida por:

$$\begin{aligned} W(t) &= \sum_n \left(|c_{a,n}(t)|^2 - |c_{b,n}(t)|^2 \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{nn}(0) \cos \Omega_n t \end{aligned} \quad (3.21)$$

El comportamiento mostrado en la Fig. 3.2 es la diferencia más notable con respecto al tratamiento semi-clásico. El colapso y resurgimiento mostrado en el gráfico es una consecuencia puramente cuántica que no tiene un análogo clásico o semi-clásico. Los tiempos asociados a las oscilaciones, denotados por t_R, t_c y t_r corresponden a las oscilaciones de Rabi, el tiempo de colapso y resurgimiento, respectivamente y pueden ser evaluados por la relaciones siguientes [14]:

$$\begin{aligned}
 t_R &\sim \frac{2\pi}{\Omega_{\langle n \rangle}} = \frac{2\pi}{2g\sqrt{\langle n \rangle} + 1} \\
 t_c &\sim \frac{2\pi}{\Omega_{\langle n \rangle + \sqrt{\langle n \rangle}} - \Omega_{\langle n \rangle - \sqrt{\langle n \rangle}}} \simeq \frac{\pi}{g} \\
 t_r &= \frac{2\pi m}{\Omega_{\langle n \rangle} - \Omega_{\langle n \rangle - 1}} = \frac{2\pi m\sqrt{\langle n \rangle} + 1}{g}
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

donde m en t_r es un número entero, demostrando que los resurgimientos aparecen en tiempos regulares.

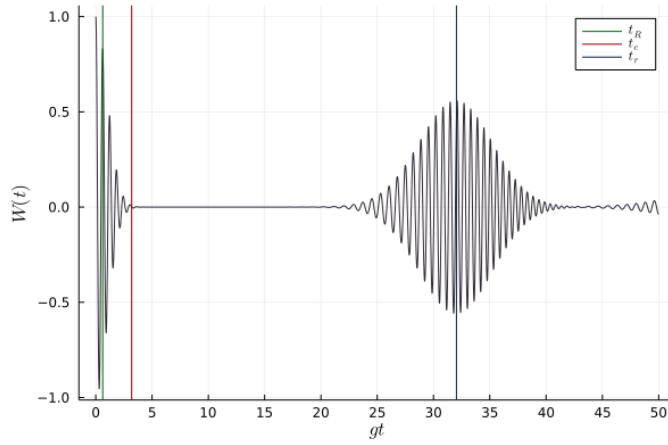


Figura 3.2: Evolución temporal de la inversión de la población $W(t)$ para un estado coherente inicial con $\langle n \rangle = 25$ y constante de acoplamiento $g = 1$, con tiempos $t_R \approx 0,6$, $t_c \approx 3,1$ y $t_r \approx 32,03$ asociados a la oscilaciones de Rabi, de colapso y resurgimiento, respectivamente.

3.4. Aproximaciones al modelo de Jaynes-Cummings

Aproximación lineal

Ahora que conocemos la expresión de las eigenfrecuencias ω_n para el modelo de Jaynes-Cummings, que es una función proporcional a \sqrt{n}^4 podemos realizar una primera aproximación lineal. Antes recordemos que para un estado coherente inicial $|\alpha\rangle$, el número promedio de fotones $\langle n \rangle = |\alpha|^2$. Iniciamos con una aproximación lineal sencilla en torno al número promedio de fotones $\langle n \rangle = N$ donde encajaremos un estado coherente. De manera general la función ω_n puede ser aproximada como

$$\omega_n \simeq \omega_N + \omega'_N(n - N) \tag{3.23}$$

donde ω_N (ω'_N) denota la función ω_n (derivada) evaluada en N , que en este caso particular $\omega_n = \sqrt{n}$ y $\omega'_n = \sqrt{n}/2$. Simplificando la expresión anterior quedaría finalmente

$$\omega_n \simeq \delta_N + \omega'_N n, \tag{3.24}$$

donde $\delta_N = \omega_N - \omega'_N N = \sqrt{N}/2$.

⁴Podemos hacer $\hbar g = 1$ para facilitar el cálculo

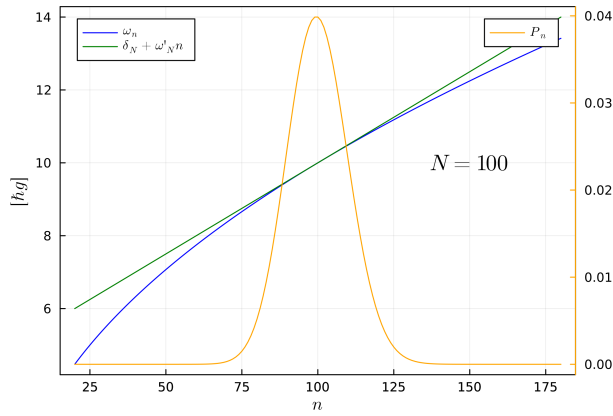


Figura 3.3: Aproximación lineal de ω_n para modelo de Jaynes-Cummings en torno al número promedio de fotones N , junto con la función de distribución para un estado coherente $|\alpha\rangle$. Elegimos $N = 100$, así $\delta_N = 5$ y $\omega'_N = 0,05$ (en unidades $\hbar g$).

En la Fig.3.3 mostramos una aproximación lineal en una vecindad del número promedio de fotones N para un estado coherente, esta aproximación es aceptable solo dentro de un intervalo donde hemos encajado el estado coherente $|\alpha\rangle$, es decir que la mayor parte de las contribuciones de la función de distribución de nuestro estado $|\alpha\rangle$ están dentro del intervalo donde las eigenfrecuencias exhiben un comportamiento lineal.

Tenemos entonces que los estados del campo para el modelo original cuyas eigenfrecuencias son ω_n son muy parecidos a los estados del campo cuyas eigenfrecuencias dependen linealmente de n , como puede visualizarse de la comparación de las funciones de Wigner correspondientes, ver Fig.3.5 y del cálculo de la probabilidad entre los estados, ver Fig.3.4.

$$|\langle \psi_{jc} | \psi_a \rangle|^2, \tag{3.25}$$

donde el subíndice jc y a hace referencia al estado del campo para el JCM y el modelo aproximado, respectivamente.

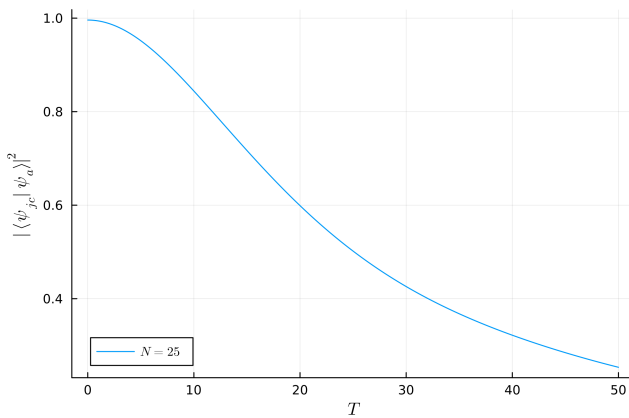


Figura 3.4: Función de probabilidad entre los estados del campo para el modelo de Jaynes-Cummings y su aproximación lineal, con el valor reescalado $T = gt$.

Podemos observar que la imagen anterior que la aproximación lineal es buena únicamente para valores pequeños de T . Comparando con la Fig.3.2 vemos que para el primer resurgimiento la

aproximación lineal ya es bastante distinta como puede observarse en la Fig.3.5.

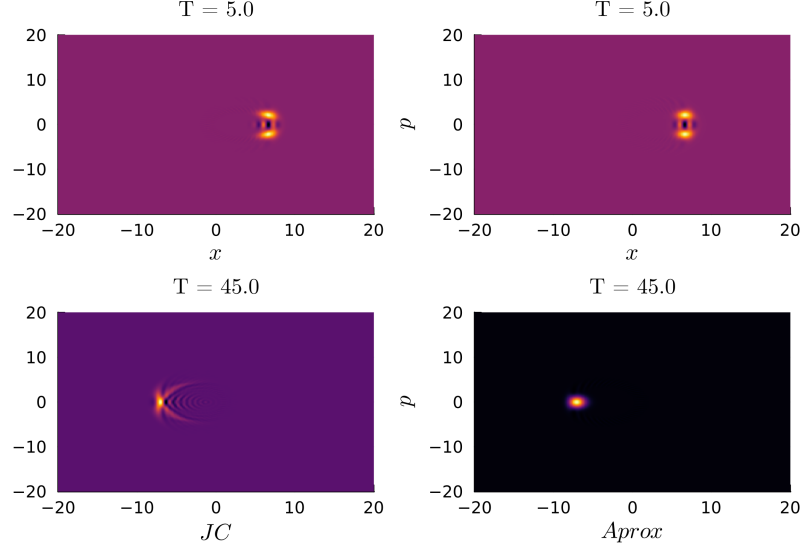


Figura 3.5: Comparación de la función de Wigner entre el modelo de Jaynes-Cummings y su aproximación lineal para distintos valores del parámetro T que coincide numéricamente con gt , esto es una constante de acoplamiento $g = 1$, con $N = 25$.

Como podemos observar en la Fig.3.5 los estados son parecidos únicamente para tiempos pequeños, debe notarse que los tiempos mostrados corresponden a los tiempos de colapso t_r y t_c de la Fig.3.2. Es decir que para el primer resurgimiento la aproximación lineal no es tan buena, algo que podemos observar también en la Fig.3.4.

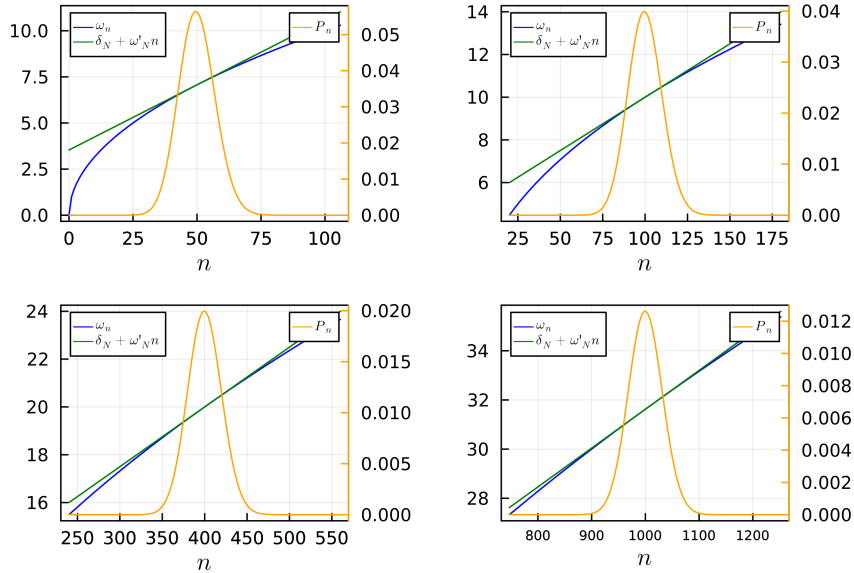


Figura 3.6: Aproximaciones lineales de ω_n y la correspondiente función P_n para distintos valores de N .

Por último verificamos lo dicho anteriormente, realizando distintas aproximaciones para varios

valores de N , sin embargo como puede observarse en (Fig.3.6) donde para valores más grandes de N el estado coherente $|\alpha\rangle$ encaja mejor dentro del comportamiento lineal de ω_n . Podemos a su vez realizar una aproximación más de $\omega_n \propto \sqrt{n}$ considerando no únicamente el término lineal sino también un término cuadrático en n .

Aproximación cuadrática

Procedemos a realizar la aproximación cuadrática para ω_n , para ello realizamos una expansión en serie de Taylor para entorno al número promedio de fotones N y consideramos únicamente los términos hasta de segundo orden en n . De manera general la aproximación sería:

$$\omega_n \simeq \omega_N + \omega'_N(n - N) + \frac{\omega''_N}{2}(n - N)^2 = \alpha_N + \beta_N n + \gamma_N n^2 \quad (3.26)$$

donde ω''_N denota la segunda derivada de ω_n evaluada en N , el número promedio de fotones y con las siguientes relaciones para los demás coeficientes:

$$\begin{aligned} \alpha_N &= \omega_N - \omega'_N N + \frac{1}{2}\omega''_N N^2 \\ \beta_N &= \omega'_N - N\omega''_N \\ \gamma_N &= \frac{1}{2}\omega''_N \end{aligned} \quad (3.27)$$

la aproximación (3.26) es general, y en nuestro caso presente ya que $\omega_n \propto \sqrt{n}$, tenemos las siguientes relaciones para los términos constante, lineal y cuadrático $\alpha_N, \beta_N, \gamma_N$ respectivamente:

$$\alpha_N = \frac{3\sqrt{N}}{8} \quad \beta_N = \frac{3}{4\sqrt{N}} \quad \gamma_N = -\frac{1}{8\sqrt{N}^3} \quad (3.28)$$

recordemos que para un estado coherente inicial $|\alpha\rangle$ el número promedio de fotones $\langle n \rangle$ es justamente $N = |\alpha|^2$, así en última instancia dichos coeficientes están determinados por el valor de α del estado coherente inicial.

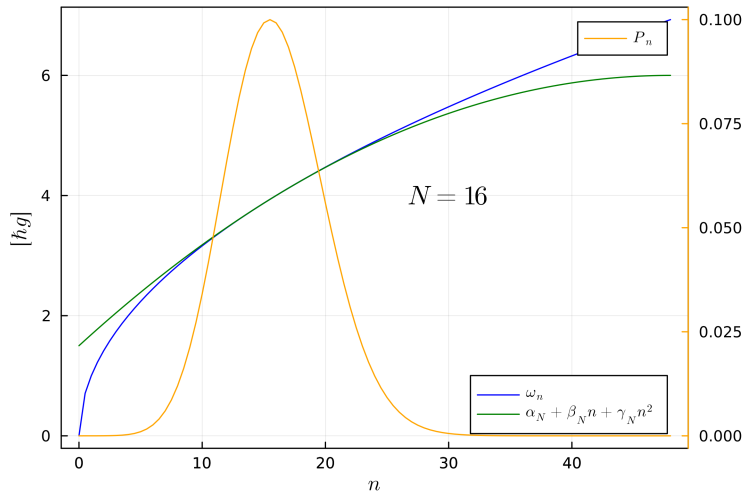


Figura 3.7: Aproximación cuadrática de las eigenfrecuencias ω_n para el modelo de Jaynes-Cummings, con un estado coherente inicial $\alpha = 4$ y con coeficientes $\alpha_N = 1,5, \beta_N = 0,18$ y $\omega_N = -0,0019$ (en unidades $\hbar g$).

De manera similar en la Fig.3.7 mostramos junto a la gráfica ω_n y su aproximación cuadrática, la función de distribución P_n para un estado coherente inicial $|\alpha\rangle$, como anteriormente la mayor parte de las contribuciones de P_n caen dentro del intervalo donde ω_n presenta un comportamiento cuadrático aproximado.

Podemos nuevamente comparar los estados del campo entre ambos modelos para distintos valores de N , ver la Fig.3.8 tomando los mismos valores que usamos en la aproximación lineal, observamos que P_n encaja mejor ya que casi todas las contribuciones caen dentro del intervalo donde ω_n exhibe un comportamiento cuadrático. Como en el caso anterior para valores de N cada vez mayores la función P_n encaja, sin embargo será útil comparar esto en el espacio fase y con las función de probabilidad entre los estados para valorar los tiempos en los que la aproximación es aceptable.

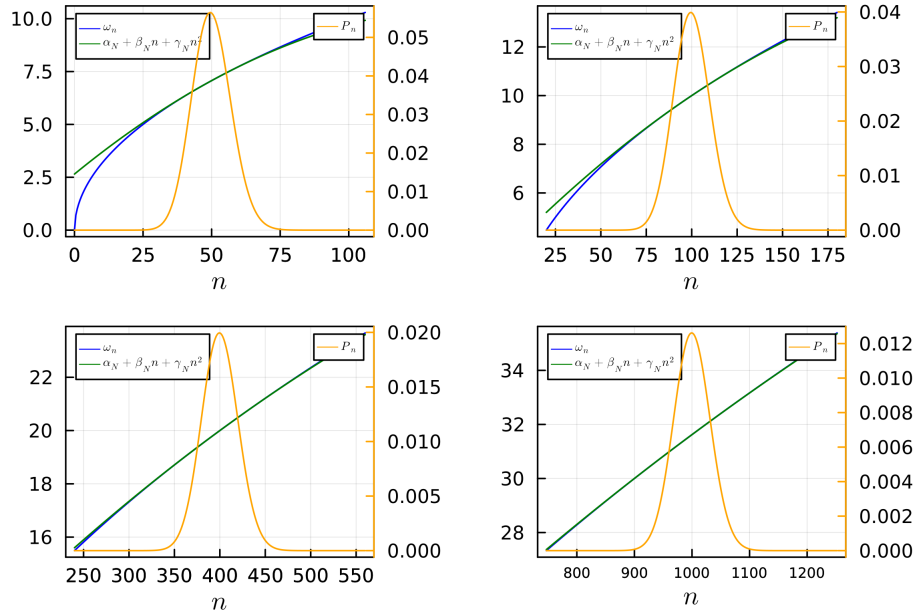


Figura 3.8: Aproximación cuadrática de ω_n para distintos valores de N

Finalmente la aproximación cuadrática ahora tiene la misma forma que (2.3) cuya dinámica ya ha sido analizada en el espacio fase (donde el término constante α_N no afecta la dinámica del sistema) y recordamos que el término lineal β_N corresponde por sí solo al del oscilador armónico cuántico y finalmente, el término cuadrático γ_N añade una deformación a nuestro estado coherente inicial. Lo mencionado anteriormente puede observarse en la Fig.3.9 donde ambos modelos tienen un comportamiento muy parecido al inicio ⁵. Sin embargo conforme evolucionan ambos modelos, los términos de mayor orden en n que fueron omitidos al hacer la expansión cobran relevancia y la aproximación ya no es tan buena, como se muestra en la segunda fila de la serie de imágenes en la Fig.3.9 donde el estado del campo en el modelo de Jaynes-Cummings parece más deformado que en el modelo aproximado, estos tiempos nuevamente coinciden con los tiempos de colapso y resurgimiento con los mismos parámetros considerados en la aproximación lineal.

Nuevamente podemos comparar la probabilidad entre los estados del campo entre ambos modelos para observar hasta que punto es buena la aproximación (3.10).

Como podemos observar en la Fig.3.10 nuestros estados son muy parecidos, incluso para valores T comparables al tiempo del primer resurgimiento, lo que nos indica que la evolución es muy parecida para tiempos mayores que éste. Esto se observa más claramente en la Fig.3.10 donde los

⁵Puede consultar las animaciones en el espacio fase de estos ejemplos en [ref-git-hub]

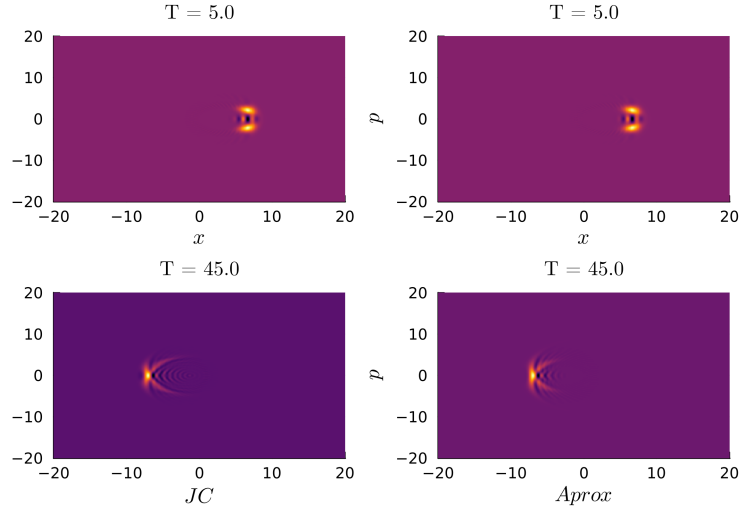


Figura 3.9: Comparación de la función de Wigner entre el modelo de Jaynes-Cummings y aproximación cuadrática en ω_n . Con $N = 25$, y coeficientes $\alpha_N = 1,875$, $\beta_N = 0,15$ y $\gamma_N = -0,001$ (en unidades $\hbar g$).

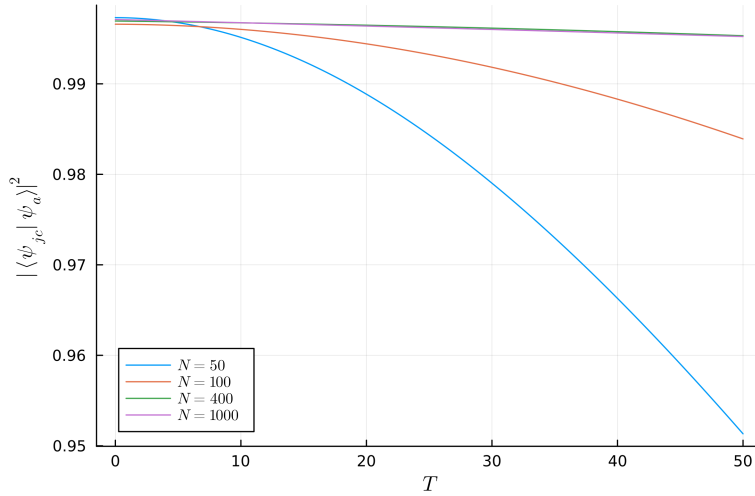


Figura 3.10: Función de probabilidad entre los estados del modelo de Jaynes-Cummings y su aproximación cuadrática en ω_n , con $N = 25$ y coeficientes $\alpha_N = 1,875$, $\beta_N = 0,15$ y $\gamma_N = -0,001$ (en unidades $\hbar g$).

estados ahora son más parecidos incluso hasta el primer resurgimiento. Así hemos reducido nuestro modelo a uno más familiar cuyas eigenfrecuencias son dadas por (2.1), de esta manera podemos estudiar modelos más complejos realizando una aproximación lineal o de preferencia una cuadrática en sus eigenfrecuencias.

3.5. Modelo de Jaynes-Cummings no lineal

Para finalizar el capítulo correspondiente a la teoría del modelo de Jaynes-Cummings presentamos el modelo de Jaynes-Cummings no lineal, aunque pueda parecer un pleonismo, en este caso la

no linealidad hace referencia a la dependencia sobre los operadores de aniquilación y de creación. La distinción que hace más clara la no linealidad viene dada por las ecuaciones de Heisenberg, que en el caso de JCM son lineales mientras que en este modelo con genérico no lo son. Para aclarar todo esto proponemos un nuevo Hamiltoniano introduciendo una función ⁶ $f(\hat{a}^\dagger \hat{a})$ en la expresión (3.15) de la siguiente manera :

$$\hat{\mathcal{V}} = \hbar g (\hat{a} f(\hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{\sigma}_+ + f(\hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-) \quad (3.29)$$

donde la función $f(\hat{a}^\dagger \hat{a})$ es de la forma:

$$f(\hat{a}^\dagger \hat{a}) = \sum_k c_k (\hat{a}^\dagger \hat{a})^k \quad (3.30)$$

con c_k ciertos coeficientes en general complejos. La forma especial de la función f determinará la dinámica de nuestro sistema. Como ejemplo podemos notar que si nuestra función f es en particular el operador identidad $\hat{\mathbf{1}}$, entonces el Hamiltoniano $\hat{\mathcal{V}}$ es el correspondiente al modelo de Jaynes-Cummings.

Representación matricial

Como hicimos anteriormente para el modelo de Jaynes-Cummings calculamos la representación matricial de nuestro nuevo hamiltoniano (3.29), para ello usamos nuevamente nuestra base $\{|e, n-1\rangle, |g, n\rangle\}$. Antes notemos que:

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger \hat{a} |e, n\rangle &= \hat{a}^\dagger \sqrt{n} |e, n-1\rangle = n |e, n\rangle \\ (\hat{a}^\dagger \hat{a})^2 |e, n\rangle &= (\hat{a}^\dagger \hat{a})(\hat{a}^\dagger \hat{a}) |e, n\rangle = (\hat{a}^\dagger \hat{a}) n |e, n\rangle = n^2 |e, n\rangle \\ &\vdots \\ (\hat{a}^\dagger \hat{a})^k |e, n\rangle &= n^k |e, n\rangle \end{aligned}$$

usando (3.30) y el resultado anterior vemos que:

$$\begin{aligned} f(\hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- |e, n-1\rangle &= \sum_k c_k (\hat{a}^\dagger \hat{a})^k \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- |e, n-1\rangle \\ &= \sum_k c_k (\hat{a}^\dagger \hat{a})^k \hat{a}^\dagger |g, n-1\rangle \\ &= \sum_k c_k (\hat{a}^\dagger \hat{a})^k \sqrt{n} |g, n\rangle \\ &= \sqrt{n} \sum_k c_k n^k |g, n\rangle \\ &= \sqrt{n} f(n) |g, n\rangle \end{aligned}$$

y de manera similar

⁶Dicha función será en realidad un polinomio

$$\begin{aligned}
 \hat{a}f(\hat{a}^\dagger\hat{a})\hat{\sigma}_+|g, n\rangle &= \hat{a} \sum_k c_k (\hat{a}^\dagger\hat{a})^k \hat{\sigma}_+|g, n\rangle \\
 &= \hat{a} \sum_k c_k (\hat{a}^\dagger\hat{a})^k |e, n\rangle \\
 &= \hat{a} \sum_k c_k n^k |e, n\rangle \\
 &= f(n)\sqrt{n}|e, n-1\rangle
 \end{aligned}$$

Con ayuda de los resultados anteriores, la representación matricial $\hat{\mathcal{V}}^{(n)}$, es decir la representación en bloques por la base $\{|e, n-1\rangle, |g, n\rangle\}$ queda finalmente como:

$$\hat{\mathcal{V}}^{(n)} \equiv \hbar g \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{n}f(n) \\ \sqrt{n}f(n) & 0 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

cuyas eigenenergías son de la forma:

$$E_{\pm}^n = \pm \hbar g \sqrt{n} f(n) \quad (3.32)$$

A diferencia del modelo de Jaynes-Cummings ahora las eigenenergías dependen de una forma más compleja (dependiendo de la forma de f). Analizaremos la dinámica del Hamiltoniano (3.29) para algunas f 's en particular, lo cual nos dará una función de las eigenenergías que representará en ciertos casos modelos físicos reales de interés, estudiados ampliamente en la Óptica Cuántica [11].

Capítulo 4

Modelo de trampa de iones

4.1. Hamiltoniano de trampa de iones

Un ejemplo interesante que nos provee con un Hamiltoniano del tipo (3.29) es el Modelo de Trampa de Iones [ITM] cuya función f resulta ser más compleja y al mismo tiempo ideal para su estudio. Con respecto a la imagen de interacción el hamiltoniano libre correspondiente sería el siguiente:

$$\hat{H}_0 = \hbar\nu\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega\hat{\sigma}_z \quad (4.1)$$

que describe los estados internos y el movimiento de un ion de dos niveles dentro de un potencial de atrape armónico. Aquí ν es la frecuencia del potencial de atrape y ω es la diferencia de frecuencia entre los dos estados del ion.

Por otro lado el hamiltoniano de interacción entre el ion y un campo láser de frecuencia ω_L sería [5]:

$$\hat{V}_L = \hbar\Omega(f(\hat{a}^\dagger\hat{a})\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger f(\hat{a}^\dagger\hat{a})\hat{\sigma}_-) \quad (4.2)$$

donde la función f dependiente de la intensidad tiene la siguiente expresión [5] :

$$f(\hat{a}^\dagger\hat{a}) = \eta \exp\{-\eta^2/2\} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\eta^2)^m}{m!(m+1)!} \hat{a}^{\dagger m} \hat{a}^m \quad (4.3)$$

donde η es conocido como el *parámetro de Lamb-Dicke*. Consideramos nuevamente nuestra base $\{|e, n-1\rangle, |g, n\rangle\}$ en donde \hat{V} tiene la siguiente representación matricial:

$$\hat{V}^{(n)} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \Omega_n \\ \Omega_n & 0 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

donde Ω_n tiene la siguiente expresión:

$$\Omega_n = \Omega\eta\sqrt{\frac{1}{n+1}} e^{-\eta^2/2} L_n^{(1)}(\eta^2) \quad (4.5)$$

aquí $L_n^{(1)}$ denota el polinomio asociado de Laguerre de orden n . A partir de (4.4) es fácil calcular las *eigenfrecuencias* de \hat{V} , lo único que tenemos que hacer es diagonalizar dicha matriz, así las eigenfrecuencias son:

$$\omega_n = \pm\Omega_n \quad (4.6)$$

4.2. Aproximación lineal y cuadrática

La función (4.5) claramente presenta un comportamiento no lineal, sin embargo para una elección del parámetro de Lamb-Dicke η es posible encontrar un intervalo entorno a cierto valor de N que muestre un comportamiento lineal aproximado. Para simplificar esta tarea será conveniente aproximar los polinomios de Laguerre en términos de funciones de Bessel [3] lo cual nos permitirá reescribir (4.5) de la siguiente manera:

$$\pm\Omega_n \simeq \mp\Omega J_1(2\eta\sqrt{n+1}) \quad (4.7)$$

donde J_1 denota la función de Bessel de primer tipo de orden uno (4.1).

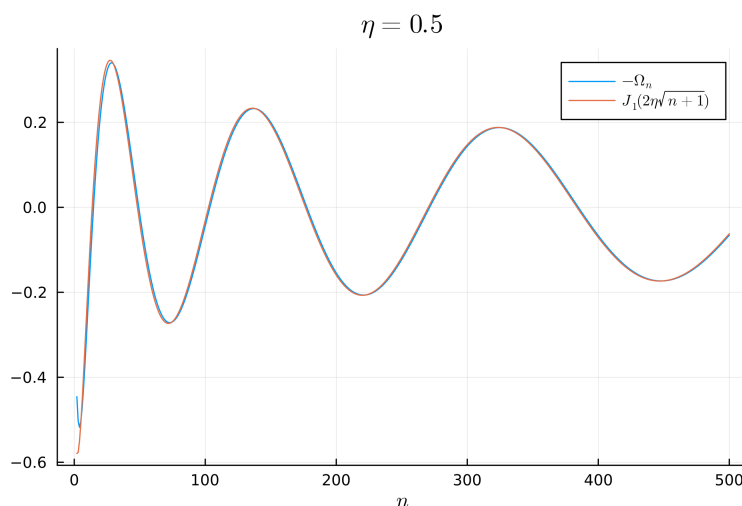


Figura 4.1: Comparación de Ω_n para el ITM su aproximación en funciones de Bessel J_n . Nótese el intercambio de signos en (4.7).

Además de la aproximación a funciones de Bessel será útil relacionar el argumento de la función de Bessel para un análisis para valores arbitrarios de η [5]:

$$n = \frac{x}{4\eta^2} - 1 \quad (4.8)$$

podremos así escribir

$$\Omega_n = \Omega J_1(\sqrt{x}) \quad (4.9)$$

De la Fig.4.1 podemos observar que en ciertos intervalos Ω_n exhibe un comportamiento lineal y más evidente aún tiene una forma parabólica dentro de ciertos intervalos, esto es, un comportamiento cuadrático en n , así realizamos primeramente una aproximación lineal para la función de las eigenfrecuencias (4.7) mediante una expansión en serie de Taylor entorno al número medio de fotones N . De la relación (4.8) podemos observar que para un valor n particular quedará determinada nuestra nueva variable x al fijar el valor de η , denotemos entonces por x_0 el valor correspondiente para el número promedio de fotones N con un η dado. La aproximación será, al igual que antes:

$$\omega_n \simeq \delta_N + \omega'_N n \quad (4.10)$$

donde en este caso particular, tenemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 \omega_N &= \Omega J_1 \left(2\eta\sqrt{N+1} \right) \\
 \omega'_N &= \frac{\Omega\sqrt{x_0}}{4(N+1)} [J_0(\sqrt{x_0}) - J_2(\sqrt{x_0})] \\
 \delta_N &= \omega_N - \omega'_N N
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

llegando finalmente a la aproximación lineal:

$$\omega_n \simeq \Omega J_1(\sqrt{x_0}) - \frac{N\Omega\sqrt{x_0}}{4(N+1)} [J_0(\sqrt{x_0}) - J_2(\sqrt{x_0})] + \frac{\Omega\sqrt{x_0}}{4(N+1)} [J_0(\sqrt{x_0}) - J_2(\sqrt{x_0})] n \tag{4.12}$$

Notamos de la expresión anterior la dependencia del valor N , que esta relacionado con el valor de η , así esta aproximación será evaluada modificando alguno de estos dos parámetros, en (Fig.4.2) podemos observar esta aproximación lineal en una vecindad de N , además como en los casos anteriores, mostramos también la función de distribución P_n para un estado coherente inicial $|\alpha\rangle$, recordando que $N = \alpha^2$.

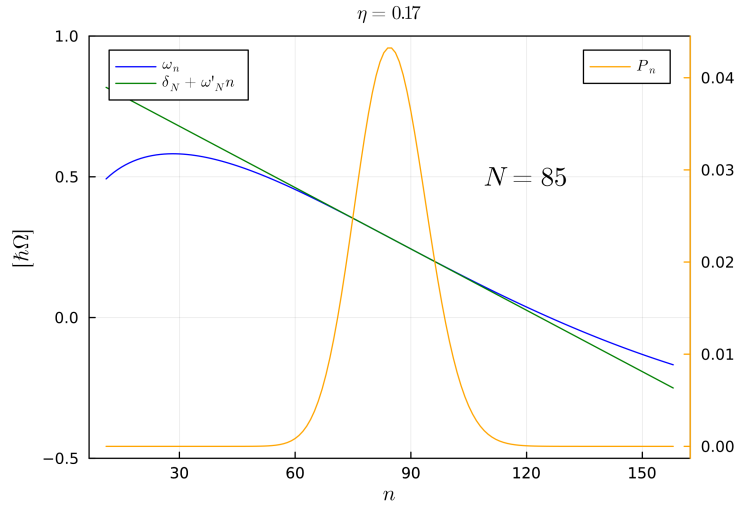


Figura 4.2: Aproximación lineal a Ω_n para el modelo de trampa de iones, incluyendo la función de distribución P_n de un estado coherente inicial $|\alpha\rangle$, con $N = 85$ y por lo tanto $\delta_N = 0,9$, $\omega'_N = -0,007$ y $\eta = 0,170585$.

Como vemos en la Fig.4.2 obtenemos una buena aproximación dentro intervalo que incluye a N , donde nuevamente hemos encajado un estado coherente. Comparamos así la evolución para ambos modelos y valoramos nuevamente dicha aproximación calculando la función de probabilidad entre ambos estados, ver la Fig.4.3 , así como la evolución del estado del campo con la ayuda de la función de Wigner, ver Fig.4.4. Este análisis es realizado considerando las escalas de tiempo reelevantes [5]:

$$\begin{aligned}
 t_R &= \frac{2\pi}{\omega_N}, \\
 t_c &= \frac{2}{\sqrt{N}|\omega'_N|}, \\
 t_r &= \frac{2\pi}{|\omega'_N|}
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

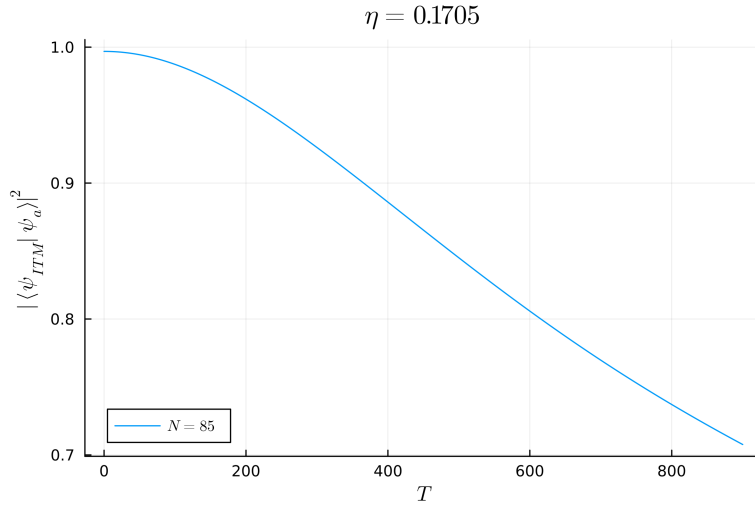


Figura 4.3: Función de probabilidad entre los estados del campo para el ITM y su modelo lineal aproximado.

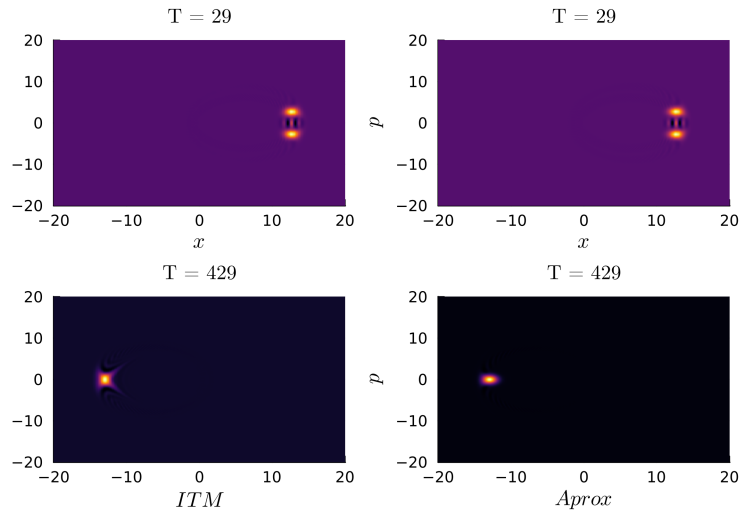


Figura 4.4: Comparación en el espacio fase del estado del campo entre el ITM y su aproximación lineal, con $\delta_N = 0,9$, $\omega'_N = -0,007$, $\eta = 0,1705$ y $N = 85$.

Como podemos observar nuestra aproximación lineal al ITM es aceptable dentro de las escalas de tiempo relevantes (4.13) comparada con la aproximación lineal en el JCM donde la función de probabilidad entre los estados decaía demasiado antes del primer resurgimiento, en este caso los estados son parecidos, sin embargo podemos mejorar la aproximación como hicimos con el JCM considerando una aproximación cuadrática.

Dicho lo anterior, continuamos así nuestro estudio de Ω_n y ahora realizamos la aproximación cuadrática para ω_n , para hacer dicha aproximación hemos de elegir algún punto extremo (ya sea un máximo o un mínimo local) de ω_n y hacer la aproximación cuadrática escogiendo los valores que mejor se ajusten. La aproximación nuevamente tendrá la forma general de (3.26):

$$\omega(n) \simeq \alpha_N + \beta_N n + \gamma_N n^2 \tag{4.14}$$

donde $\alpha_N, \beta_N, \gamma_N$ están dados por las relaciones (3.27), donde:

$$\begin{aligned}\omega_N &= \Omega J_1(\sqrt{x_0}) \\ \omega'_N &= \frac{\Omega \sqrt{x_0}}{4(N+1)} [J_0(\sqrt{x_0}) - J_2(\sqrt{x_0})] \\ \omega''_N &= \frac{\Omega}{N+1} \left[\frac{J_3(\sqrt{x_0})}{2} - J_1(\sqrt{x_0}) \left(\frac{1+x_0^2}{x_0^{3/2}} \right) \right]\end{aligned}\tag{4.15}$$

Cabe mencionar que la forma de obtener nuestro punto extremal fue mediante el procesamiento de Newton-Rapson sobre (4.9), posteriormente usamos las relaciones (4.15) y de este modo regresamos a nuestra función $\Omega_n(n)$ original para hacer la aproximación cuadrática en n . Dicho esto, tenemos todo listo para hacer la aproximación cuadrática para algún valor de N y una elección del parámetro de Lamb-Dicke η ¹.

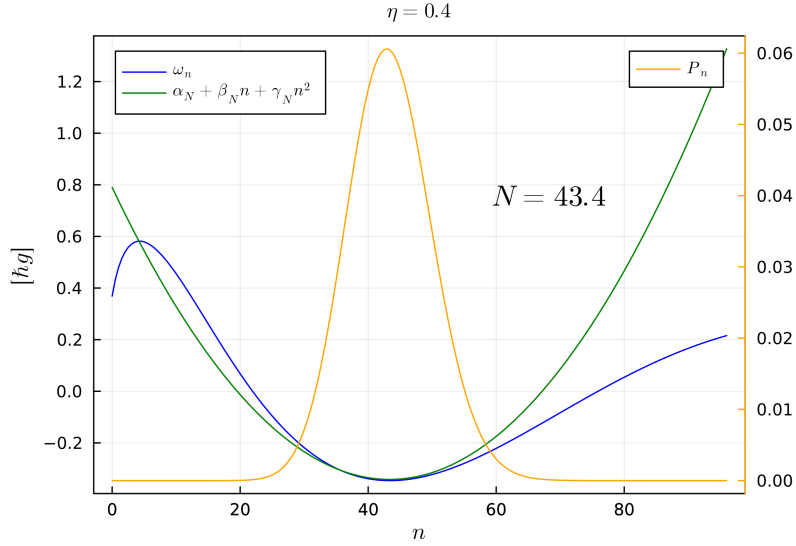


Figura 4.5: Aproximación cuadrática de ω_n para el modelo de trampa de iones, junto con la gráfica de P_n para un estado coherente inicial.

Como podemos observar en la Fig.4.5 la aproximación cuadrática es muy buena para un pequeño intervalo de n . Al igual que antes podemos encajar un estado coherente dentro de dicho intervalo en el que la mayor parte de las contribuciones de la distribución de probabilidad del estado coherente P_n caen dentro del intervalo de aproximación. Podemos sin embargo mejorar la aproximación modificando los valores de N y η como se muestra en la sección de figuras (Fig.4.6).

Al igual que antes podemos comparar los estados del campo para ambos modelos y graficar la función de probabilidad entre los estados, una manera de hacerlo es manteniendo un valor de x_0 fijo y variar el parámetro η , esto nos dará un valor de N correspondiente dado por la relación (4.8) ver la Fig.4.7. Por otro lado podemos mantener el valor de η fijo y variar el valor de x_0 como lo hicimos anteriormente para el caso lineal, ver (Fig.4.8), con esto sabremos bajo que parámetros la aproximación es mejor.

Consideramos algún caso de las gráficas anteriores y comparamos evolución de los estados del campo entre ambos modelos como hemos en los casos anteriores, como se muestra en la Fig.4.9 y la Fig.4.10.

¹Nos restringiremos a un valor $\eta < 1$

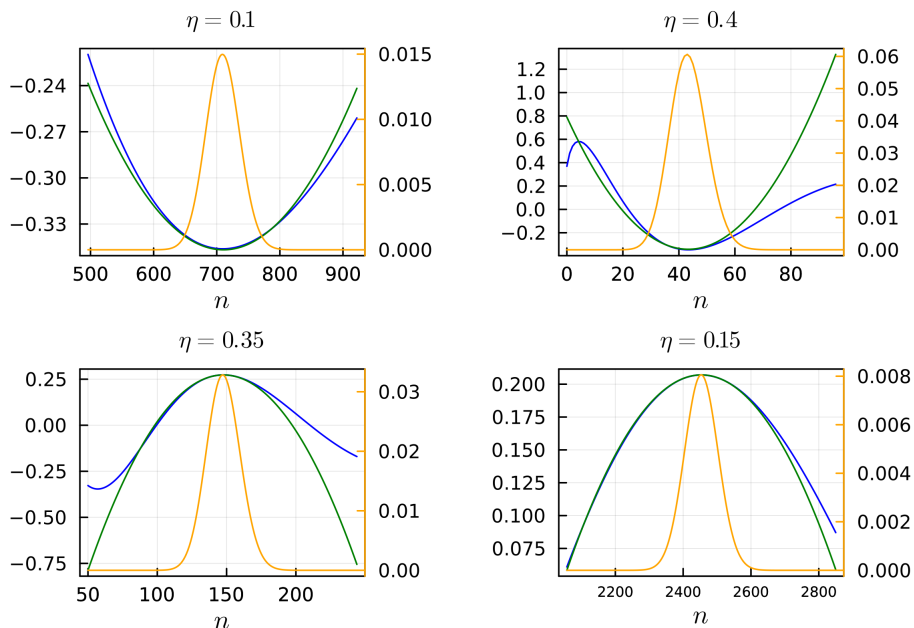


Figura 4.6: Distintas aproximaciones cuadráticas a ω_n con distintos valores de N y η .

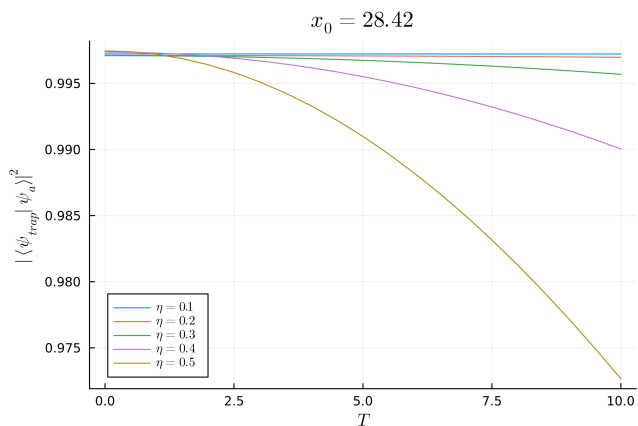


Figura 4.7: Distintas funciones de probabilidad entre los estados del campo para el modelo de trampa de iones y su aproximación cuadrática, con un valor de x_0 fijo dado por la relación (4.8).

Los resultados obtenidos de este análisis se resumen a continuación en la siguiente tabla, donde hemos registrado los valores de los coeficientes de la aproximación cuadrática $\alpha_N, \beta_N, \gamma_N$, al igual que el valor del máximo (mínimo) elegido x_0 y su correspondiente valor promedio de fotones N para un valor de η elegido, por último cabe mencionar que conocemos el intervalo de n donde P_n se encuentra contenida, esto en vista de que P_n tiene una varianza $\sqrt{\langle n \rangle}$ al ser una distribución de poisson ².

Los parámetros de la tabla (4.1) nos indican los valores que hemos de considerar al hacer nuestra aproximación cuadrática sobre las eigenfrecuencias ω_n para el ITM, algunos de estos casos corresponden a valores muy grandes en N , los cuales hemos visto resultan dar las mejores apro-

²En realidad corresponde a una distribución gaussiana y esto es más preciso conforme el valor de N es más grande [13].

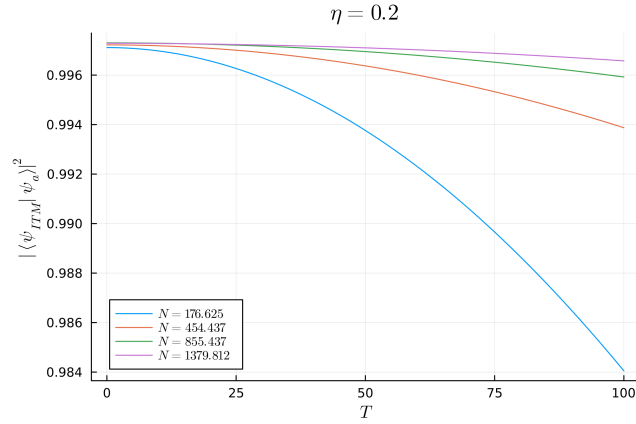


Figura 4.8: Distintas funciones de probabilidad entre los estados del campo para el modelo de trampa de iones y su aproximación cuadrática, con un valor de η fijo dado por la relación (4.8).

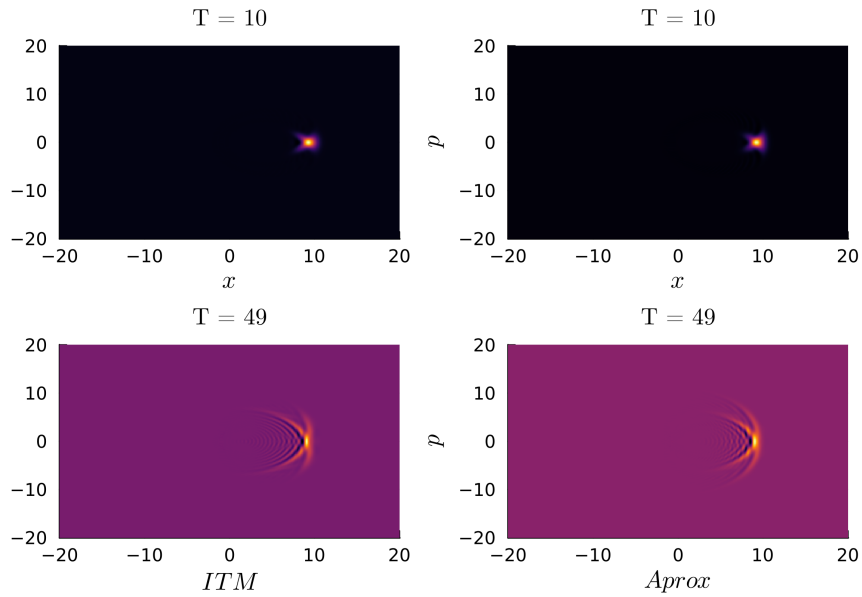


Figura 4.9: Comparación en el espacio fase entre los estados del campo del ITM y su aproximación cuadrática, los parámetros corresponden a los indicados en la fila 4 en (Tabla.4.1).

ximaciones vistas en las gráficas de probabilidad entre los estados o en el espacio fase. Por otro lado los distintos máximos o mínimos elegidos nos darán un valor distinto de N para algún η de nuestra elección, todo esto nos permite jugar con los parámetros ajustando nuestra aproximación a digamos, por ejemplo, un valor de N grande.

Concluimos esta última sección resaltando el hecho de que un modelo más complejo como el ITM aún puede ser analizado de una manera más sencilla con una aproximación en sus eigenfrecuencias ω_n , lo que hace de éste análisis algo mucho más conveniente que tratar con la forma más compleja en (4.5). La aproximación se podrá valorar dependiendo del interés que se tenga en el modelo, si nos interesa la exactitud en nuestra aproximación o el tiempo en el cuál la aproximación es válida siempre podremos elegir los parámetros que más nos convengan, como lo muestra explícitamente la tabla mostrada anteriormente.

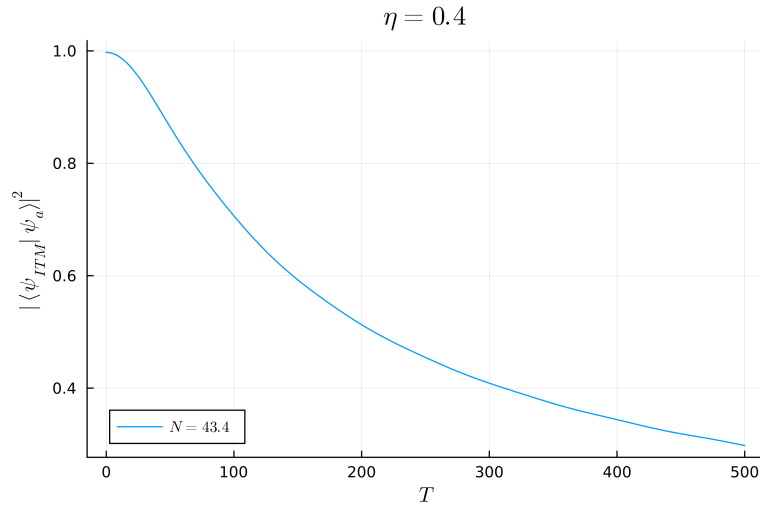


Figura 4.10: Función de probabilidad entre los estados del campo del ITM y su aproximación cuadrática, los parámetros corresponden a los indicados en la fila 4 en (Tabla.4.1).

Distintos ejemplos de aproximaciones cuadráticas a ω_n						
	α_N	β_N (E-2)	γ_N (E-6)	η	x_0	N
1	0,84	-33,4	2,35	0,1	28,42	709,49
2	0,83	-1,33	37,6	0,2	28,42	176,62
3	0,81	-2,97	190	0,3	28,42	77,94
4	0,79	-5,22	602	0,4	28,42	43,4
5	-2,18	0,27	-0,74	0,1	72,87	1820,74
6	-2,17	1,08	-11,8	0,2	72,87	454,43
7	-2,16	2,41	-59,9	0,3	72,87	201,41
8	-2,14	2,47	-189	0,4	72,87	112,85
9	3,73	-0,23	0,34	0,1	137,03	3424,74
10	3,72	-0,92	5,41	0,2	137,03	855,43
11	3,71	-2,08	0,27	0,3	137,03	379,63
12	3,70	-3,69	0,86	0,4	137,03	213,1
13	-5,48	0,20	-0,19	0,1	220,93	5522,24
14	-5,48	0,82	-2,98	0,2	220,93	1379,81
15	-5,47	1,85	-15,1	0,3	220,93	612,69
16	-5,45	3,29	-47,8	0,4	220,93	344,2
17	-2,12	6,39	-426	0,49	72,87	74,87
18	0,80	-4,02	353	0,35	28,42	57
19	3,65	-8,25	438	0,6	137,03	94,15
20	-2,15	3,28	-111	0,35	72,87	147,71
21	-5,48	0,46	-0,94	0,15	220,93	2453,77
22	-14,17	0,60	-0,65	0,2	753,89	4710,81
23	0,84	-0,33	2,35	0,1	28,42	709,49

Tabla 4.1: Parámetros de la aproximación cuadrática para el modelo de trampa de iones

Capítulo 5

Conclusión

Hemos presentado un análisis teórico de las eigenfrecuencias para distintos modelos conocidos de la Óptica Cuántica, primeramente comenzamos con el modelo de Jaynes-Cummings que es encontrado en la literatura y cuya dinámica ya ha sido ampliamente estudiada. Este modelo nos sirvió como base para explicar el análisis posterior con otros modelos cuyas eigenfrecuencias tienen una dependencia más compleja en el número de fotones n , presentamos los aspectos más importantes del modelo de Jaynes-Cummings, como las gráficas de las oscilaciones de Rabi (en donde pueden verse los *colapsos y resurgimientos*) y su relación con la dinámica del estado del campo en el espacio fase. Posteriormente estudiamos un modelo más sencillo introduciendo un término cuadrático de tipo Kerr junto con un término lineal y analizamos las imágenes del estado del campo en el espacio fase, apreciamos el efecto que cada término tiene sobre la dinámica del sistema para un estado coherente $|\alpha\rangle$ inicial, el resultado fue una deformación del estado que es más evidente conforme el término de tipo Kerr es más dominante. Con todo lo anterior presentamos el ITM, cuyas eigenfrecuencias exhiben un comportamiento más complejo que los modelos vistos anteriormente. Reducimos posteriormente nuestro modelo a uno más sencillo donde solo consideramos el término lineal y cuadrático en n , la función en cuestión para el ITM es expresada en términos de los polinomios de Laguerre, esta función pudo ser aproximada en términos de funciones de Bessel lo cual nos permitió realizar algunas aproximaciones tanto lineales como cuadráticas en n . Usando las gráficas de la función de probabilidad entre los estados de ambos modelos y la función de Wigner para el estado del campo nos permitió ver cuál era el comportamiento de nuestro estado bajo un modelo aproximado y así poder valorar nuestra aproximación. Con ayuda de las gráficas de la función de probabilidad entre los estados valoramos mejor la aproximación realizada, notando que un valor de N grande era más conveniente, esto por supuesto, para un parámetro de Lamb-Dicke previamente elegido.

Finalmente la importancia en el estudio del ITM y sus distintas aproximaciones es evidente al permitirnos emular sistemas más sencillos simplemente ajustando los parámetros del experimento. Esto quiere decir que el ITM sirve como una herramienta para emular sistemas con una dependencia lineal (como el caso del oscilador armónico cuántico) o como de tipo Kerr. El análisis de estas aproximaciones está reflejado tanto en las figuras mostradas anteriormente o de manera más compacta en la Tabla (4.1) donde las aproximaciones fueron realizadas modificando diversos valores de los parámetros N y η , consideramos que existen valores para los cuales la aproximación resulta ser mejor. Esto puede apreciarse en las gráficas de la probabilidad entre los estados, donde para ciertos parámetros los estados resultan ser muy parecidos por un periodo de tiempo considerable. Esta comparación puede verificarse con las imágenes en el espacio fase ¹ que se muestran aquí.

¹Recomendamos consultar las animaciones directas del código para apreciar mejor la dinámica del sistema [4]

Bibliografía

- [1] L. de Broglie. *La física nueva y los cuantos*. Ciencia y vida. Losada, 1941. URL: <https://books.google.com.uy/books?id=FX1dAAAAAAAJ>.
- [2] Zbigniew Ficek y Mohamed Ridza Wahiddin. *Quantum Optics for Beginners*. en. Singapore, Singapore: Pan Stanford Publishing, dic. de 2014.
- [3] Szegő G y G. Szegő. *Orthogonal Polynomials*. American Math. Soc: Colloquium publ. American Mathematical Society, 1939. ISBN: 9780821810231. URL: <https://books.google.com.mx/books?id=ZOhmnsXlcY0C>.
- [4] Github®. *Github*. <https://github.com/Ofey65/tesis>. Accedido en mayo de 2023. Mayo de 2023.
- [5] Rocío Gómez-Rosas, Carlos A. González-Gutiérrez y Juan Mauricio Torres. «Entangling operations in nonlinear two-atom Tavis-Cummings models». En: *Phys. Rev. A* 104 (6 dic. de 2021), pág. 063701. DOI: 10.1103/PhysRevA.104.063701. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.104.063701>.
- [6] E.T. Jaynes y F.W. Cummings. «Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser». En: *Proceedings of the IEEE* 51.1 (1963), págs. 89-109. DOI: 10.1109/proc.1963.1664. URL: <https://doi.org/10.1109/proc.1963.1664>.
- [7] Jonas Larson y Th. K. Mavrogordatos. «The Jaynes-Cummings model and its descendants». En: (2022). DOI: 10.48550/ARXIV.2202.00330. URL: <https://arxiv.org/abs/2202.00330>.
- [8] N. B. Narozhny, J. J. Sanchez-Mondragon y J. H. Eberly. «Coherence versus incoherence: Collapse and revival in a simple quantum model». En: *Phys. Rev. A* 23 (1 ene. de 1981), págs. 236-247. DOI: 10.1103/PhysRevA.23.236. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.23.236>.
- [9] Wolfgang Paul. «Electromagnetic traps for charged and neutral particles». En: *Rev. Mod. Phys.* 62 (3 jul. de 1990), págs. 531-540. DOI: 10.1103/RevModPhys.62.531. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.62.531>.
- [10] Gerhard Rempe, Herbert Walther y Norbert Klein. «Observation of quantum collapse and revival in a one-atom maser». En: *Phys. Rev. Lett.* 58 (4 ene. de 1987), págs. 353-356. DOI: 10.1103/PhysRevLett.58.353. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.58.353>.
- [11] Candida S. Punla et al. «Are we there yet?: An analysis of the competencies of BEED graduates of BPSU-DC». En: *International Multidisciplinary Research Journal* 4.3 (sep. de 2022), págs. 50-59.
- [12] J J Sakurai. *Modern Quantum Mechanics, Revised Edition*. en. Upper Saddle River, NJ: Pearson, ago. de 1993.
- [13] Wolfgang P Schleich. *Quantum Optics in Phase Space*. en. Weinheim, Germany: Wiley-VCH Verlag, feb. de 2001.

BIBLIOGRAFÍA
BIBLIOGRAFÍA

- [14] Marlan O Scully y M Suhail Zubairy. «Preface». En: *Quantum Optics*. Cambridge: Cambridge University Press, sep. de 1997, págs. xix-xxii.
- [15] D F Walls y Gerard J Milburn. *Quantum optics*. en. 2.^a ed. Berlin, Germany: Springer, dic. de 2007.
- [16] Carl E. Wieman, David E. Pritchard y David J. Wineland. «Atom cooling, trapping, and quantum manipulation». En: *Rev. Mod. Phys.* 71 (2 mar. de 1999), S253-S262. DOI: 10.1103/RevModPhys.71.S253. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.71.S253>.