# Cómputo de medidas fractales para imágenes médicas

por

Violeta Maceda Macario

Tesis presentada en cumplimiento parcial de los requisitos para la obtención del grado de

Licenciada en Ciencias de la Computación

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias de la Computación

Asesores:
Dr. Daniel Alejandro Valdés Amaro
Dr. Carlos Guillén Galván

México, Puebla, Diciembre de 2014

*"Porque en él fueron creadas todas las cosas, las que hay en los cielos y las que hay en la tierra, visibles e invisibles; sean tronos, sean dominios, sean principados, sean potestades; todo fue creado por medio de él y para él". "Porque las cosas invisibles de él, su eterno poder y deidad, se hacen claramente visibles desde la creación del mundo, siendo entendidas por medio de las cosas hechas, . . . ". "Al que está sentado en el trono, y al Cordero, sea la alabanza, la honra, la gloria y el poder, por los siglos de los siglos". Amén.*

*Col. 1:16, Ro. 1:20, Ap. 5:13.*

*"El científico no estudia la naturaleza porque es útil; él la estudia porque se deleita en ella, y se deleita en ella porque es hermosa. Si la naturaleza no fuera hermosa, no sería digna de ser conocida, y si la naturaleza no fuera digna de ser conocida, la vida no sería digna de ser vivida".*

*Henry Poincaré.*

# Resumen

La lagunaridad es una medida fractal que permite diferenciar fractales con la misma dimensión fractal pero diferente apariencia, por ello es considerada una medida de heterogeneidad o textura y puede ser calculada en patrones fractales, no fractales o multifractales. El objetivo de este trabajo es implementar algoritmos para el cálculo de lagunaridad en imágenes binarias y en escala de grises, así como analizar su comportamiento en imágenes médicas con objetos fractales. Las pruebas realizadas con estos algoritmos corresponden a imágenes de resonancia magnética de un simulador de cerebros sanos y cerebros con esclerosis múltiple. Se utilizaron también imágenes de resonancia magnética de cerebros de neonatos prematuros e imágenes de la retina con segmentaciones del nervio óptico. Los resultados muestran que el índice de lagunaridad detecta cambios en las estructuras así como en el desarrollo del cerebro. Con las pruebas realizadas también se confirma que la lagunaridad es una buena medida para discriminar imágenes con diferentes de texturas de patrones fractales o no fractales y, al ser una medida dependiente de la escala, su análisis puede realizarse en rangos específicos de los tamaños de escalas.

# Índice general

**Resumen** ii

**Agradecimientos** v

**Lista de Figuras** viii

**Lista de Tablas** xii

**1. Introducción** 1

**2. Geometría Fractal** 9
2.1. Fractales . . . . . 11
2.2. Dimensión Fractal . . . . . 13
2.2.1. Dimensión Hausdorff . . . . . 15
2.2.2. Dimensión de Auto-Similitud . . . . . 15
2.2.3. Dimensión Box Counting . . . . . 19
2.3. Lagunaridad . . . . . 20
2.3.1. Definición . . . . . 22
2.3.2. Análisis de lagunaridad . . . . . 23
2.3.2.1. Textura . . . . . 23
2.3.2.2. Invarianza translacional . . . . . 23
2.3.2.3. Dependencia de la escala . . . . . 24

**3. Método para el cálculo de lagunaridad** 25
3.1. Introducción . . . . . 25
3.2. Cálculo de lagunaridad . . . . . 25
3.2.1. Método de la caja deslizante o *Gliding Box* . . . . . 26
3.2.2. Cálculo de la masa de la caja deslizante . . . . . 27
3.2.2.1. Analizando alturas relativas . . . . . 28
3.2.2.2. Promedio de los valores dentro de la caja . . . . . 28
3.2.2.3. Creación de una "nube"de puntos . . . . . 29
3.3. Descriptores de lagunaridad . . . . . 30

**4. Experimentos** 31
4.1. Pruebas con imágenes binarias . . . . . 31

4.1.1. Pruebas con matrices y mapas simulados . . . . . 31
4.1.2. Pruebas con imágenes de curvas de llenado del espacio . . . 38
4.1.3. Pruebas con imágenes de RM de cerebros sanos . . . . . 39
4.2. Pruebas con imágenes en escala de grises . . . . . 40
4.2.1. Pruebas con imágenes de texturas . . . . . 41
4.2.2. Pruebas con imágenes de RM de cerebros sanos . . . . . 45
4.2.3. Pruebas con imágenes de RM de neonatos prematuros . . . . 45
4.2.4. Pruebas con imágenes de RM de esclerosis múltiple . . . . . 51
4.2.5. Pruebas con imágenes del nervio óptico . . . . . 51

**5. Conclusiones y trabajo a futuro 60**
5.1. Discusión . . . . . 60
5.2. Conclusiones . . . . . 63
5.3. Trabajo a futuro . . . . . 64

**Bibliografía 65**

# *Agradecimientos*

Este trabajo es el resultado de la colaboración de muchas personas, a lo largo de esta investigación pude ver la mano de Dios obrando en mi vida y el apoyo incondicional de mi familia y amigos. Así que en primer lugar quiero agradecer a mi inspiración, en quién encontré la motivación para tomar este tema de tesis, al único y sabio Dios. Por qué lo hago? Porque puedo ver su perfección en toda la creación, en todo lo que me rodea, desde las personas hasta la naturaleza. Porque todo lo que existe aún con su irregularidad y complejidad, con una función y tamaño, trabajan en perfecta armonía, bajo leyes ya establecidas desde el principio de los tiempos. Este trabajo es por Él y para Él, por haberme sostenido en todo tiempo, por aceptarme como soy, por hacerme libre en Él, por rodearme de personas hermosas de las cuales no puedo nombrar a todas, pero están presentes en mis pensamientos, y a continuación quiero hablar sobre algunas de ellas.

Quiero agradecer a mi familia por su amor, su apoyo, sus consejos, aún por los regaños, por ser quienes son. Gracias a mi papá Francisco Maceda Rodríguez y a mi mamá María del Carmen Macario Merino, gracias por su confianza, gracias por su paciencia, gracias por todo lo que han dado por mi hasta este día de mi vida y lo que harán, este trabajo es por ustedes también, por enseñarme a pensar, a analizar, por su sensibilidad, su humildad, gracias. A mi tía Guillermina, a mis hermanos Anahi, Elizabeth, Olga, Gabriela y Gabriel, a Tomás Martínez y a Lizbeth Orea, ustedes siempre serán mis mejores amigos, no importa si nos molestamos entre nosotros, siempre estamos unidos ante cualquier adversidad. A mis hermanitos más pequeños David, Gustavo, Eduardo, a mis sobrinos Alaní, Santiago, Javier, Moisés y Ariela, a mis primos Tania y Brandon, espero esto pueda ser, si bien no el mejor, un ejemplo a seguir, un camino que también puedan recorrer a su manera, en el que puedan disfrutar el aprender y descubrir más del conocimiento de nuestro Dios a través de la ciencia. En especial quiero agradecer a mi hermana Elizabeth, gracias por tus palabras siempre llenas de amor, tan dulces y entendibles para vivirlas, gracias por no dejarme desistir cuando empecé con esta tesis, gracias por los consejos que han cambiado mi vida. A mi hermana Olga por impulsarme a alcanzar cosas que no esperaba, por ayudarme a vencer mis miedos.

A mis asesores quiero dar un merecido agradecimiento también, por la oportunidad de trabajar con ustedes, gracias al Dr. Carlos Guillén Galván por ser accesible desde el momento en que le solicité un tema de tesis, gracias por su apoyo y

disposición, por el tiempo dedicado para explicarme, por su comprensión gracias. Al Dr. Daniel A. Valdés Amaro, gracias por no desistir en trabajar conmigo y siempre buscar la forma de tratar conmigo para que avanzara, creo que le tocó la parte más difícil, pero quiero reconocer su esfuerzo y dedicación como docente, por el seguimiento de mi trabajo y el tiempo dispuesto para revisar, interpretar y corregirlo. Llevo presente como ha sido flexible y comprensivo ante diferentes circunstancias adversas en el desarrollo de esta tesis, veo una persona con una mente abierta y dispuesta al cambio, Dr. Daniel gracias por su trabajo, por su apoyo y por su amistad.

Quiero compartir que fue complicado para mí de alguna manera trabajar tanto en la tesis como en el servicio, no hubiera podido empezar ni terminar el proyecto del servicio social sin la ayuda de un gran amigo, gracias Carlos Celma, gracias por invertir esfuerzo y tiempo sin recibir un pago o algo a cambio, por tus consejos y los desvelos programando, por ayudarme a ver siempre a Dios en mi vida, gracias. Gracias a Maricela Teopanican por ayudarme a programar parte de este proyecto también, gracias por los buenos momentos compartidos, por los ánimos.

Este trabajo lo hice pensando también en todos mis amigos, con el objetivo de compartirles esta investigación que me ha gustado demasiado. A mis amigos de la generación y en general de la FCC, a la artillería pesada, a mi equipo de la ACM, a mis amigos del MIES, a mis amigos y hermanos en la fe de Eben-Ezer, a mis amigos del Instituto Bíblico Eben-Ezer, a mis amigos del Coro Unido. De manera especial quiero agradecer al Hno. Mario Sánchez de Tehuacán, al Hno. Moisés Gutiérrez, al Hno. Raúl Cabrea, al Hno. Perfecto Mendoza, al Hno. Noé Jiménez y a sus respectivas esposas, por ser padres espirituales y consejeros para mí. Gracias a Adriana Mendoza, Marianela Oyarzabal, Mónica Martínez, Martín González (Mando), Luis Hernández, Inámic Meza, por su amistad durante la carrera, por aceptarme como soy y seguir conmigo. Gracias a mis amigos Nuyoo Cabrera y Juan Carlos Cervantes por sus aportaciones con mi documento de tesis.

Finalmente, quiero agradecer a la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, a la Facultad de Ciencias de la Computación por se mi hogar durante mucho tiempo, y a la Secretaría de Educación Pública por otorgarme la beca PROMEP. Quiero hacer un agradecimiento especial a João Florindo, de la Universidad de São Carlos, Brazil, por su ayuda con el análisis de descriptores de textura.

Gracias!

# Índice de figuras


1.1. Puntos importantes en el proceso de sistemas de diagnóstico. . . . . 3
1.2. (a) Brocoli y el conjunto de Mandelbrot, (b) Helecho natural y helecho de un sistema de funciones iteradas (Iterated Function Systems IFS), (c) Vasos sanguíneos (del pulmón) y ramas de un IFS, y (d) Montaña Llullaillaco y simulación generada por computadora del valle de la muerte [5]. . . . . 5
1.3. (Imágenes superiores) Modelo del árbol de Koch de las vías respiratorias comparado con el modelo del árbol de las vías respiratorias de un humano, (imágenes inferiores) modelo de las ramas de un árbol arterial del corazón comparada con la red de Peano simulando la estructura la arteria y la red vascular (adaptado de [60]). . . . . 6

2.1. Galería Fractal. (a) Polvo de Cantor, (b) Triángulo y carpeta de Sierpinski, (c) Curvas llenando el espacio de Hilbert, (d) Conjuntos de Julia, (e) Curva de Koch. (Adaptado de [53]) . . . . . 10
2.2. Muestras de imágenes que participaron en el concurso de arte fractal Benoit B. Mandelbrot, en: a)2006, b)2007, c)2009, d)2011. (Adaptado de [22, 23, 25, 27]) . . . . . 11
2.3. Autosimilitud a diversas escalas en fractales naturales. De arriba hacia abajo: coliflor, romanescu, brócoli, romanescu. (Adaptado de [21, 26, 20, 24] ) . . . . . 13
2.4. Fractales generados con matrices de sistemas de funciones iteradas. 14
2.5. Principio de autosimilitud de una línea, un cuadrado y un cubo. . . 16
2.6. Auto-similitud en el cuadrado y la curva de Koch. . . . . 18
2.7. Triángulo de Sierpinski en diferentes etapas. En cada triángulo se observará el mismo patrón fractal, pero para poder diferenciarlos se puede medir cómo varían al llenar el espacio, es decir, analizando su lagunaridad [53]. . . . . 21
2.8. Carpeta de Sierpinski en diferentes etapas. Ambas corresponden al mismo patrón fractal, pero su apariencia es diferente [46]. . . . . 21

3.1. El valor de $\lambda$ se puede encontrar ajustando una línea recta, una exponencial o una hipérbola a la gráfica de $r$ contra $\Lambda(r)$ (Adaptado de [4, 61, 36]). . . . . 27
3.2. El valor de la masa de la caja deslizante para el método DBC (conteo de cajas diferencial) es calculando las alturas relativas (Adaptado de [49]). . . . . 28

3.3. En este método propuesto en [19], antes de hacer el conteo de masa, se genera una nube de puntos, donde los ejes X e Y tienen una correspondencia con la posición de cada pixel en la imagen de $M$, y en el eje $Z$ se debe indicar el nivel de gris de cada pixel. . . . . 29
3.4. Método de la caja deslizante mapeando una textura a 3D, generando una nube de puntos, (Adaptado de [19]). . . . . 30

4.1. Matrices de 12x12: a) Matriz aleatoria (Mat1), b) Matriz con una laguna grande (Mat2), c) Matriz perfectamente regular (Mat3), d) Gráfica de lagunaridad de las tres matrices, donde se pueden observar los cambios en las curvas de lagunaridad con sólo colocar de diferente manera la misma cantidad de puntos, representados por el número 1. . . . . 32
4.2. Arriba: Mapas simulados tomados de [55] que fueron generados con algoritmos fractales para analizar las propiedades de la lagunaridad. Abajo: Gráfica de lagunaridad para los mapas simulados. . . . . 33
4.3. **Izquierda**: Imágenes de diferentes iteraciones del llenado del espacio de un cuadrado tomadas de [57]. **Derecha**: Gráfica de lagunaridad sin logaritmo para diferentes iteraciones del llenado del espacio de un cuadrado. . . . . 38
4.4. **Izquierda**: Imágenes de diferentes iteraciones del llenado del espacio de un cuadrado tomadas de [57]. **Derecha**: Gráfica de lagunaridad en escala log-log, para diferentes iteraciones del llenado del espacio de un cuadrado. . . . . 39
4.5. **Izquierda**: Imágenes simuladas binarias de RM de cerebros sanos, tomadas de [12]. **Derecha**: Gráfica de lagunaridad para la sustancia blanca, sustancia gris y líquido cefalorraquídeo, de dos cerebros sanos simulados. . . . . 40
4.6. Texturas: D1(Clase1), D4(Clase2) y D7(Clase3). Tomadas de la base de datos Brodatz [9]. . . . . 41
4.7. Gráfica de lagunaridad de imágenes de texturas en escala de grises, basada en promedios. . . . . 42
4.8. Gráfica de lagunaridad de imágenes de texturas en escala de grises basada, en promedios. Para este cálculo se consideró una escala más pequeña para obtener mejores resultados de discriminación entre las texturas. . . . . 43
4.9. Gráfica de lagunaridad de imágenes de texturas en escala de grises, basada en una nube de puntos. . . . . 43
4.10. Gráfica de lagunaridad de imágenes de texturas en escala de grises basada, en alturas relativas. . . . . 44
4.11. Imágenes de RM de la sustancia blanca en cerebros sanos tomadas de [12]. . . . . 45
4.12. Gráfica de lagunaridad en imágenes de RM de cerebros sanos, basada en promedios. . . . . 46
4.13. Lagunaridad en imágenes de RM de cerebros sanos, basada en una nube de puntos. . . . . 46

4.14. Lagunaridad en imágenes de RM de cerebros sanos, basada en alturas relativas. . . . . 48
4.15. Imágenes de RM de la sustancia blanca de neonatos prematuros, que van de la semana 29 a la semana 44 de gestación [41]. . . . . 48
4.16. Lagunaridad de imágenes de RM de neonatos prematuros, basada en promedios. . . . . 49
4.17. Lagunaridad de imágenes de RM de neonatos prematuros, basada en una nube de puntos. . . . . 49
4.18. Lagunaridad de imágenes de RM de neonatos prematuros, basada en una nube de puntos. A diferencia de la gráfica 4.17, el valor más pequeño que puede tomar la caja es 10, que es donde se comienzan a separar las curvas de lagunaridad y da un resultado parecido a las gráficas de los otros algoritmos. . . . . 50
4.19. Lagunaridad de imágenes de RM de neonatos prematuros, basada en alturas relativas. . . . . 50
4.20. **(a)**: Imágenes de RM de tres sujetos con esclerosis múltiple con tres tipos de lesiones: leve, moderada y severa, e imágenes de tres sujetos con cerebros sanos [12]. **(b)**: Lagunaridad de imágenes en escala de grises de RM de tres sujetos con esclerosis múltiple y tres sujetos sanos, cálculo basado en promedios. . . . . 52
4.21. Lagunaridad de imágenes en escala de grises de RM de tres sujetos con esclerosis múltiple y tres sujetos sanos, cálculo basado en una nube de puntos. . . . . 53
4.22. Lagunaridad de imágenes en escala de grises de RM de tres sujetos con esclerosis múltiple y tres sujetos sanos, cálculo basado en alturas relativas. . . . . 53
4.23. **Arriba**: Imágenes de la retina de cuatro sujetos, por columnas de izquierda a derecha se tienen: imagen original, canal verde de la imagen original, segmentación de Chaudhuri, segmentación de Niemeijer, y segmentación de Staal [58]. **Abajo**: Gráfica de lagunaridad calculada para tres segmentaciones y el canal verde de imágenes del nervio óptico de 4 sujetos, cálculo basado en promedios. . . . . 55
4.24. Gráfica de lagunaridad calculada para tres segmentaciones y el canal verde de imágenes del nervio óptico de 4 sujetos, cálculo basado en una nube de puntos. . . . . 56
4.25. Gráfica de lagunaridad calculada para tres segmentaciones y el canal verde de imágenes del nervio óptico de 4 sujetos, cálculo basado en alturas relativas. . . . . 56

5.1. Histograma muestra de imágenes de cerebros sanos del simulador BrainWeb [12]. . . . . 61
5.2. Histograma muestra de imágenes de cerebros son esclerosis múltiple del simulador BrainWeb [12]. . . . . 61
5.3. Histograma muestra de imágenes de cerebros de neonatos prematuros, obtenidas de [41]. . . . . 61

# Índice de tablas


4.1. Cálculo de lagunaridad para $r = 2$ en mat1. $N(2) = 121$, $Z_1 = 2.0331$, $Z_2 = 5.0248$ y $\Lambda(2) = 1.2157$. . . . . 32
4.2. Cálculo de lagunaridad en mat1, para escalas donde $r = 1$ hasta 12, sin logaritmo. . . . . 34
4.3. Distribución de frecuencias de masa de las matrices de la figura 4.1, para un tamaño de caja r=2. De izquierda a derecha, distribución de Mat1, Mat2 y Mat3. . . . . 34
4.4. Distribución de frecuencias de masa de las matrices de la figura 4.1, para un tamaño de caja r=3. De izquierda a derecha, distribución de Mat1, Mat2 y Mat3. . . . . 35
4.5. Cálculo de lagunaridad para cinco mapas simulados tomados de [55]. 36
4.6. Cálculo de lagunaridad sin logaritmo para imágenes binarias que corresponden a 6 iteraciones de la curva de llenado del espacio de Hilbert. . . . . 39
4.7. Cálculo de lagunaridad con logaritmo para imágenes binarias que corresponden a 6 iteraciones de la curva de llenado del espacio de Hilbert. . . . . 39
4.8. Lagunaridad calculada para imágenes binarias simuladas de RM de cerebros sanos de dos sujetos, basada en promedios. . . . . 40
4.9. Cálculo de lagunaridad de imágenes de texturas en escala de grises, basado en promedios. . . . . 44
4.10. Cálculo de lagunaridad de imágenes de texturas en escala de grises, basado en promedios. Para este cálculo se consideró una escala menor a la de 4.9, para obtener mejores resultados de discriminación entre las texturas. . . . . 44
4.11. Cálculo de lagunaridad de imágenes de texturas en escala de grises, basado en una nube de puntos. . . . . 44
4.12. Cálculo de lagunaridad de imágenes de texturas en escala de grises, basado en alturas relativas. . . . . 57
4.13. Lagunaridad calculada para imágenes en escala de grises simuladas de RM de cerebros sanos de dos sujetos, basada en promedios. . . . 57
4.14. Lagunaridad calculada para imágenes en escala de grises simuladas de RM de cerebros sanos de dos sujetos, basada en una nube de puntos. . . . . 57
4.15. Lagunaridad calculada para imágenes en escala de grises simuladas de RM de cerebros sanos de dos sujetos, basada en alturas relativas. 57

4.16. Cálculo de lagunaridad para neonatos prematuros de la semana 29 a la 32, basado en promedios. . . . . 57
4.17. Cálculo de lagunaridad para neonatos prematuros de la semana 29 a la 32, basado en una nube de puntos. . . . . 57
4.18. Cálculo de lagunaridad para neonatos prematuros de la semana 29 a la 32, basado en una nube de puntos. A diferencia de la gráfica 4.17, el valor más pequeño que puede tomar la caja para este cálculo es 10, que es donde se comienzan a separar las curvas de lagunaridad. Al igual que en la tabla de promedios 4.16, los valores van decreciendo gradualmente. . . . . 58
4.19. Cálculo de lagunaridad para neonatos prematuros de la semana 29 a la 32, basado en alturas relativas. . . . . 58
4.20. Cálculo de lagunaridad para imágenes de RM de tres sujetos con esclerosis múltiple y tres sujetos sanos, basado en promedios. . . . . 58
4.21. Cálculo de lagunaridad para imágenes de RM de tres sujetos con esclerosis múltiple y tres sujetos sanos, basado en una nube de puntos. 58
4.22. Cálculo de lagunaridad para imágenes de RM de tres sujetos con esclerosis múltiple y tres sujetos sanos, basado en alturas relativas. . 58
4.23. Lagunaridad calculada para tres segmentaciones y el canal verde de imágenes del nervio óptico de 4 sujetos, basada en promedios. . . . 59
4.24. Lagunaridad calculada para tres segmentaciones y el canal verde de imágenes del nervio óptico de 4 sujetos, basada en una nube de puntos. . . . . 59
4.25. Lagunaridad calculada para tres segmentaciones y el canal verde de imágenes del nervio óptico de 4 sujetos, basada en alturas relativas. 59

# Capítulo 1

# Introducción

La esperanza de vida en México ha mejorado debido a cambios sociales y económicos que han dado lugar a un envejecimiento de la población o una mayor sobrevivencia a edades adultas. Sin embargo, este envejecimiento demográfico también hace que los individuos estén expuestos a otros factores de riesgo, y da lugar a la presencia de padecimientos crónicos y degenerativos.

Según la Organización Mundial de la Salud [50], las enfermedades no transmisibles o crónicas (ENT) se caracterizan porque su duración es prolongada y su progresión es lenta. Las cuatro principales son las siguientes: enfermedades cardiovasculares (como los infartos al miocardio o accidentes cerebrovasculares), el cáncer, enfermedades respiratorias crónicas, y la diabetes.

Mientras mayor sea la sobrevivencia a edades adultas también aumentará el riesgo asociado con las enfermedades crónico degenerativas (ECD), y en la manera que aumente la proporción de personas de edad avanzada también aumentará la presencia de padecimientos crónicos y degenerativos.

Estas enfermedades son responsables de un 63 % de muertes anuales a nivel mundial, es decir 36 de 57 millones de defunciones globales, por lo que son consideradas la causa de defunción más importante en el mundo. Es importante destacar de esta cantidad que casi el 80 % de estas muertes se dan en países de ingresos bajos y medios [50].

Las ECD no sólo deben ser consideradas como un problema de salud sino un desafío para los países en desarrollo, pues esto puede llevar a las personas a una permanente pobreza debido a las grandes dimensiones de los gastos médicos que éstas implican [51, 52].

El proceso de degeneración en este tipo de enfermedades hace que un órgano o tejido vaya perdiendo sus características más importantes que provoca la disminución de su actividad. Pueden ser congénitas o hereditarias y aunque en general se presentan en personas de edad avanzada también pueden afectar a personas entre 20 y 40 años.

Algunas de estas enfermedades están asocidas con la edad como el Alzheimer y el Parkinson que afectan el cerebro; enfermedades degenerativas articulares como la artrosis de cadera, columna o rodilla; degenerativas oculares de la córnea o de la retina; entre otras como la osteoporosis, la hipertensión, diabetes, cáncer y hasta el SIDA [1].

Mientras mayor sea la sobrevivencia a edades adultas también aumentará el riesgo asociado con ECD, y en la manera que aumente la proporción de personas de edad avanzada también aumentará la presencia de padecimientos crónicos y degenerativos.

Si bien es un problema mundial, a nivel nacional debe ser una prioridad para el sector salud, es importante trabajar en su prevención, control y un tratamiento eficaz con el objetivo de reducir la mortalidad consecutiva a las ECD. Es necesario considerar además que para la población este tipo de enfermedades son muy complejas y su tratamiento tiene un costo elevado por lo que la mayoría de las instituciones de salud no están preparadas para brindar los cuidados necesarios [13].

Esto obliga a analizar la magnitud de los costos, el impacto social y laboral implicados en el proceso salud-enfermedad, para realizar una adecuada planeación, con el objetivo de que los servicios de salud tengan la capacidad de atender de forma

adecuada la creciente demanda de servicios médicos especializados, que actualmente requieren cada vez más de las nuevas tecnologías, que si bien son un apoyo innegable para el actuar médico, también aumentan los costos de una forma muy importante y, al ser inaccesible a toda la población, su impacto en la seguridad social es mucho más bajo del que se desea alcanzar.

Es importante que en México se atienda esta necesidad de apoyar la investigación para desarrollar y optimizar las herramientas para el diagnóstico de enfermedades en el sector salud. Ya que de esta manera, se contribuye al desarrollo de técnicas basadas en el análisis de imágenes médicas con métodos propios, que apoyen a los especialistas como a la población en general.

En la actualidad muchos sistemas de diagnóstico son usados, y el diseño, implementación y validación de estos sistemas implica el trabajo tanto de médicos y biólogos, como ingenieros, físicos, y científicos en computación. Los sistemas basados en imágenes médicas analizan diferentes tipos de imágenes como rayos X, resonancia magnética (RM), tomografía axial computarizada (TAC), tomografía por emisión de positrones (*Positron Emision Tomography*, PET).

El proceso de extraer, cuantificar e interpretar efectivamente el contenido de una imagen, así como su análisis, permite adquirir una mayor comprensión y conocimiento acerca de la estructura y función de los órganos de los que se adquiere la imagen, lo que ayuda en el diagnóstico de diferentes enfermedades [16] (figura 1.1).

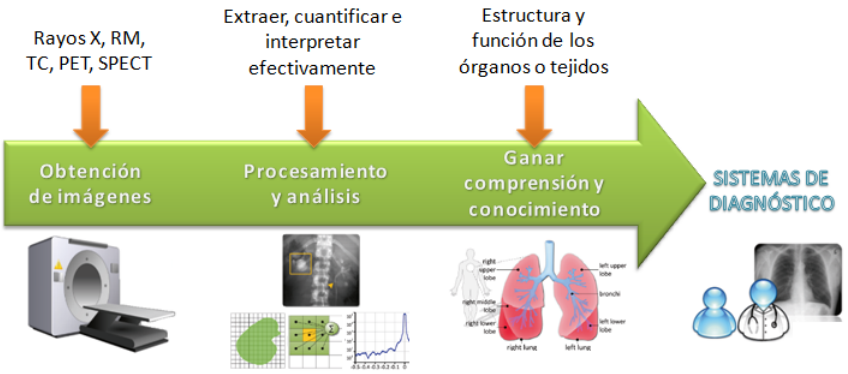



FIGURA 1.1: Puntos importantes en el proceso de sistemas de diagnóstico.

El análisis inicial de las imágenes resultantes de estos sistemas hecho por humanos es visual, sin embargo un análisis cuantitativo puede ayudar a evitar ciertas limitaciones como errores por fatiga, distracción, o una experiencia limitada. Un análisis computacional, con el cuidado y lógica apropiados, puede potencialmente mejorar la precisión del diagnóstico.

Es importante enfatizar que los estudios de imagen en sí mismos no tienen valor diagnóstico si no son analizados a la luz del conocimiento y juicio de un médico entrenado, quien dará valor a los hallazgos obtenidos en la imagen con base en su conocimiento de los síntomas, signos y la semiología de los mismos dentro del contexto clínico de cada paciente y es el médico quien finalmente establecerá el diagnóstico definitivo.

La tecnología entonces nos ha llevado a explorar el cuerpo humano desde un nivel celular (microscópico) hasta el nivel de órganos y sistemas (macroscópico). En la naturaleza y en particular en el cuerpo humano se han podido observar estructuras que inevitablemente y naturalmente, poseen una estructura fractal [37].

Un fractal es un objeto matemático que a pequeñas y grandes escalas posee la misma apariencia o sigue un mismo patrón de forma, textura o color. Este término fue introducido en 1975 por el matemático polaco Benoit Mandelbrot, considerado como el padre de la geometría fractal, cuando publicó su libro "Fractales: forma, azar y dimensión"[46]. Algunos ejemplos pueden verse en la figura 1.2, la imagen muestra fractales naturales y otros que han sido creados artificialmente a partir de las reglas que establece la geometría fractal. La geometría fractal permite analizar de una manera eficiente estructuras bio-sistémicas, y comprender muchos procesos reales, desde estructuras físico-químicas hasta los sistemas económicos [37].

La geometría fractal ha traído una nueva visión al diseño de las estructuras biológicas, ya que por su complejidad es más fácil describirlas y entender su funcionamiento y desarrollo, y por su característica de autosimilitud, su construcción de aparentemente alta complejidad mediante la geometría fractal se reduce a un simple código. Algunas de estas que se encuentran en el cuerpo humano pueden ser muy notorias como: la red vascular, el árbol tráqueo-bronquial, la red biliar, los

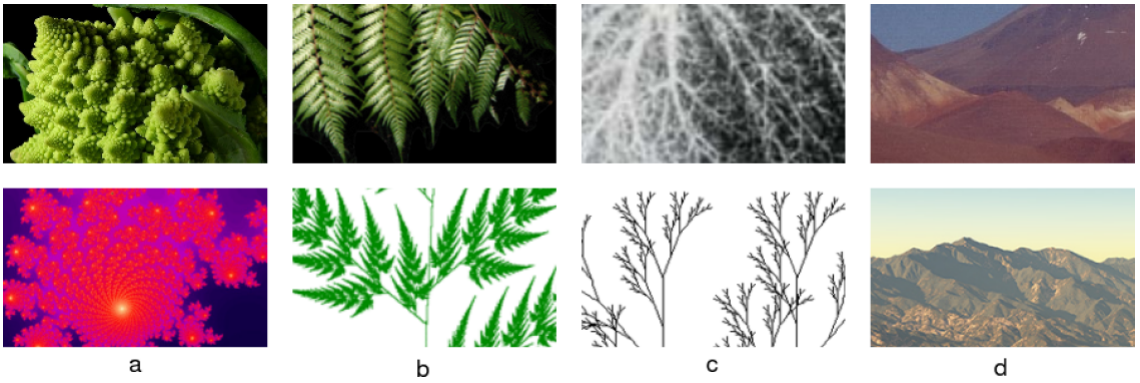



FIGURA 1.2: (a) Brocoli y el conjunto de Mandelbrot, (b) Helecho natural y helecho de un sistema de funciones iteradas (Iterated Function Systems IFS), (c) Vasos sanguíneos (del pulmón) y ramas de un IFS, y (d) Montaña Llullaillaco y simulación generada por computadora del valle de la muerte [5].

ductos pancreáticos, el sistema His-Purkinje, entre otras [30]. Estas geometrías o estructuras biológicas son conocidas como fractales de llenado del espacio, cuyo diseño tiene el objetivo de producir sistemas funcionales y eficientes. En [60, 42], encontramos que las redes de distribución como la de los vasos sanguíneos y las vías respiratorias son fractales y la naturaleza de sus ramificaciones es porque deben alcanzar cada rincón del organismo, es decir, deben cumplir la tarea de llenar el espacio (Figura 1.3). En cuanto a eficiencia, los acinares en los pulmones de mamíferos tienen un tamaño que es justo el adecuado para asegurar un eficiente intercambio de gas, no más, no menos. Lo anterior es sólo un ejemplo de cómo los conceptos fractales permiten entender los principios de construcción y funcionamiento de los organismos que trabajan aún con toda su complejidad.

Al igual que los ejemplos previos, el cerebro humano y su complejidad geométrica, se puede asumir posee una estructura auto-similar. En diferentes trabajos el análisis tanto estructural como funcional ha sido realizado para comprobar que el cerebro es fractal. En [28] realizan un análisis fractal tridimensional para cuantificar la complejidad de la superficie de la sustancia blanca, concluyendo que la dimensión fractal puede describir la superficie sobre un estrecho y específico rango de escalas y además medir la complejidad de la misma. También en [62, 45] se hace un análisis más extenso midiendo la estructura interior y su esqueleto, la superficie y la estructura general de la sustancia blanca que incluye tanto al cerebro

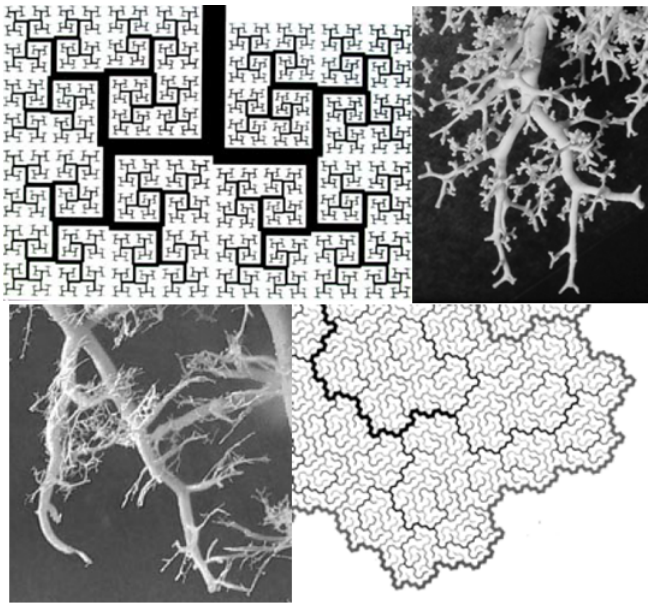


FIGURA 1.3: (Imágenes superiores) Modelo del árbol de Koch de las vías respiratorias comparado con el modelo del árbol de las vías respiratorias de un humano, (imágenes inferiores) modelo de las ramas de un árbol arterial del corazón comparada con la red de Peano simulando la estructura la arteria y la red vascular (adaptado de [60]).

como al cerebelo. El método utilizado calcula la dimensión fractal tridimensional y demuestra ser sensible a cambios estructurales relacionados con la edad. En [38] se analiza la corteza cerebral para probar estadísticamente que se trata de una estructura auto-similar. Su método volumétrico basado en la transformada rápida de Fourier considera escalas espaciales, desde la corteza completa como tamaño inicial hasta una de 3mm. Así, los resultados obtenidos confirman la naturaleza fractal de la corteza cerebral humana. Para complementar la información anterior en [32] se realizó un análisis de la superficie cortical del cerebro en IRM calculando la dimensión fractal tridimensional y con esto se comprueba que la dimensión fractal puede ser un indicador de alto valor para estudiar las anormalidades estructurales del cerebro en desórdenes mentales. Kontos et al. [39] provee un estudio de activación de imágenes de resonancia magnética (IRM) usando curvas que llenan el espacio para relacionar las estructuras del cerebro con las funciones del cerebro. El enfoque propuesto está basado en un mapeo del espacio 3D al espacio de 1D usando una transversal de la curva de llenado del espacio de Hilbert.

La dimensión fractal como se puede notar ha sido ampliamente usada como un

descriptor de la complejidad de estructuras biológicas ya que permite cuantificar la forma de dichas estructuras. También se puede resaltar que en varios de los estudios anteriores fueron enfocados a detectar anormalidades consecuencia de desordenes mentales como esquizofrenia, desorden obsesivo-compulsivo [32], Alzheimer [39], o para detectar o medir los efectos de desarrollo de una enfermedad, la progresión del envejecimiento o la intervención médica en la sustancia blanca del cerebro [62, 38]. En [45] se remarca cómo la dimensión fractal (DF) puede servir como un índice para cuantificar la complejidad funcional y estructural del sistema neural en las etapas de desarrollo, degeneración, reorganización o evolución ya que la DF puede estar cambiando dinámicamente en esos procesos. Estos estudios del cerebro, por otro lado, también se direccionaron a analizar estructuras macroscópicas de la sustancia gris, surcos de la superficie y la estructura interior de la sustancia blanca.

La mayoría de estudios en medicina que tratan con fractales se han enfocado al cálculo de dimensión fractal, y esto es válido dependiendo de cada aplicación, sin embargo, para los casos en que la dimensión fractal no permite discriminar una vez que se tiene el mismo patrón fractal, se complementa haciendo el cálculo de lagunaridad. *La lagunaridad así, permite diferenciar entre fractales que siguen el mismo patrón de forma pero que en apariencia o textura son diferentes.*

Encontramos en [33] la combinación de estas dos medidas para detectar la simetría plana en neuro-imágenes de RM. En [35] se realiza también el cálculo de la DF y lagunaridad con el objetivo de clasificar células microgliales del cerebro, lo que les permite mejorar la comprensión de la participación de dichas células en varios trastornos. Los estudios implican entonces una investigación más allá de sus resultados actuales, ya que aún se necesitan pruebas que consideren estados de transición que pueden ser relevantes para las enfermedades crónicas neurodegenerativas y las respuestas prolongadas tales como la respuesta inicial y más tarde la curación después de un accidente cerebrovascular o un traumatismo. En general, el estudio del cerebro humano es amplio y a pesar de la gran variedad de trabajos que han sido hechos, muchos siguen presentando deficiencias de acuerdo

a su utilidad en el entorno clínico, ya que el objetivo de cada método es cumplir con las siguientes características: ser rápido, robusto, preciso y automático.

El objetivo de este trabajo es la implementación de algoritmos para el cálculo de lagunaridad y poder analizar esta propiedad fractal, así como su comportamiento en imágenes médicas binarias y en escala de grises que contienen objetos fractales naturales. Esto se hace con el propósito de analizar si la lagunaridad puede complementar a la dimensión fractal como caractarizador de la forma de los objetos fractales en el cuerpo humano.

En los siguientes capítulos se abordarán los siguientes temas: en el capítulo dos se habla acerca de la geometría fractal y se da una explicación de dimensión fractal y lagunaridad con conceptos generales. Una vez explicado lo anterior, en el capítulo tres se describe el método para el cálculo de lagunaridad en imágenes binarias, así como las variantes del método de la caja deslizante aplicado a imágenes en escala de grises. En el capítulo cuatro se presentan los resultados y análisis al aplicar el algoritmo implementado a imágenes simuladas del cerebro y el nervio óptico. Finalmente en el capítulo cinco se dan las conclusiones considerando las limitaciones de este trabajo así como el trabajo a futuro.

# Capítulo 2

# Geometría Fractal

La geometría fractal nace bajo la concepción de una nueva geometría de la naturaleza, permitiendo describir de manera cuantitativa términos como "rugoso", "irregular" o "intermitente"[44].

Un **fractal** es un objeto matemático que a grandes y pequeñas escalas tiene la misma forma o sigue el mismo patrón, de manera que si se observa el objeto completo o parte de él, tiene la misma apariencia. De otra forma, podemos decir que un fractal es una forma geométrica que posee una estructura irregular y autosimilar a un rango amplio de escalas [44].

Benoit B. Mandelbrot (1924-2010), matemático nacido en Varsovia, Polonia, fue quien acuñó este término para hacer referencia a objetos que presentaban una estructura compleja, publicado por primera vez en su libro "Fractales: forma, azar y dimensión" en 1975 en el idioma francés. El mismo libro fue publicado en inglés en 1977, y posteriormente daría una nueva versión con el título "La geometría fractal de la naturaleza", en 1982 [7].

Dentro de la historia de las matemáticas podemos hacer notoria la crisis que sufrió de 1875-1925, tiempo en el cual matemáticos como George Cantor (1872), Giussepe Peano (1890), David Hilbert (1891), Helge von Koch (1904), Waclaw Sierpinski (1916), Gaston Julia (1918) y Felix Hausdorff (1919), jugaron un papel clave para el trabajo de Mandelbrot [53]. Los anteriormente mencionados tuvieron

aportaciones fundamentales para la construcción de una nueva geometría o el complemento de lo que hasta entonces se conocía como geometría, que sólo consideraba los formalismos de Euclides. Sus creaciones fueron consideradas como una patología, como algo extravagante, y en algún momento nombrados como: una *galería de monstruos* (Figura 2.1) [46]. Y esta consideración la merecieron ya que estas creaciones venían a demostrar que las matemáticas no estaban listas para explicar comportamientos diferentes a los conocidos, se podían considerar contraejemplos de lo regular y suave de las formas, y lo limitado de éstas.

Dentro de esta galería podemos nombrar algunos que no se pueden pasar por alto en la historia de los fractales, todos ellos haciendo alusión a su creador, tenemos: el conjunto o polvo de Cantor (figura 2.1 (a)), la carpeta y el triángulo de Sierpinski (figura 2.1 (b)), las curvas llenando el espacio de Hilbert y Peano (figura 2.1 (c)), los conjuntos de Julia (figura 2.1 (d)) y la curva de Koch (figura 2.1 (e)), entre otros.

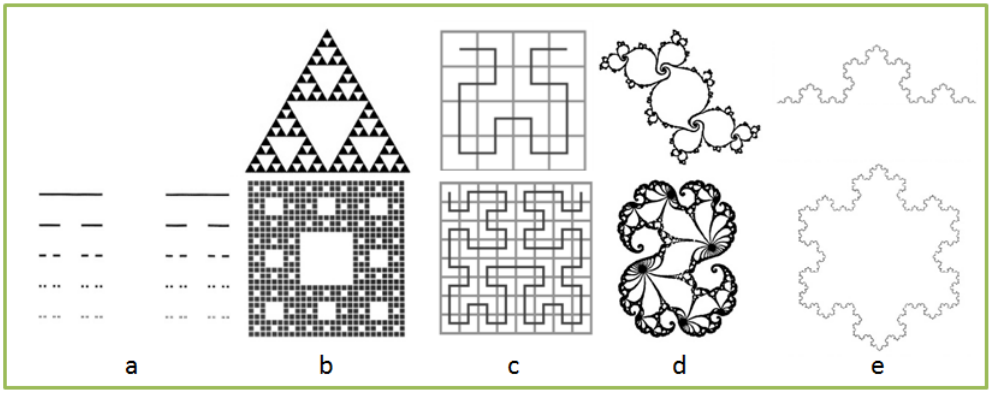



FIGURA 2.1: Galería Fractal. (a) Polvo de Cantor, (b) Triángulo y carpeta de Sierpinski, (c) Curvas llenando el espacio de Hilbert, (d) Conjuntos de Julia, (e) Curva de Koch. (Adaptado de [53])

Mandelbrot ha sido considerado como el Padre de esta geometría, debido a que fue él quién formalizó todos los conceptos necesarios para establecerla con un lenguaje matemático. Sin quitar mérito a los creadores de los fractales, aunque los fractales existieron mucho antes de que pudiese haber nombre para ellos.

Benoit B. Mandelbrot falleció el 14 de Octubre de 2010 en Cambridge, Massachusetts, a la edad de 85 años. En 2006, 2007 y 2009 se llevó a cabo el concurso

de arte fractal donde él fue presidente honorario, sin embargo, en 2011 hubo un concurso más dedicado a su memoria, en el que su esposa Aliette Mandelbrot y Michael Barnsley fueron nombrados presidentes en su lugar. En la figura 2.2 se pueden observar imágenes muestra de estos concursos.

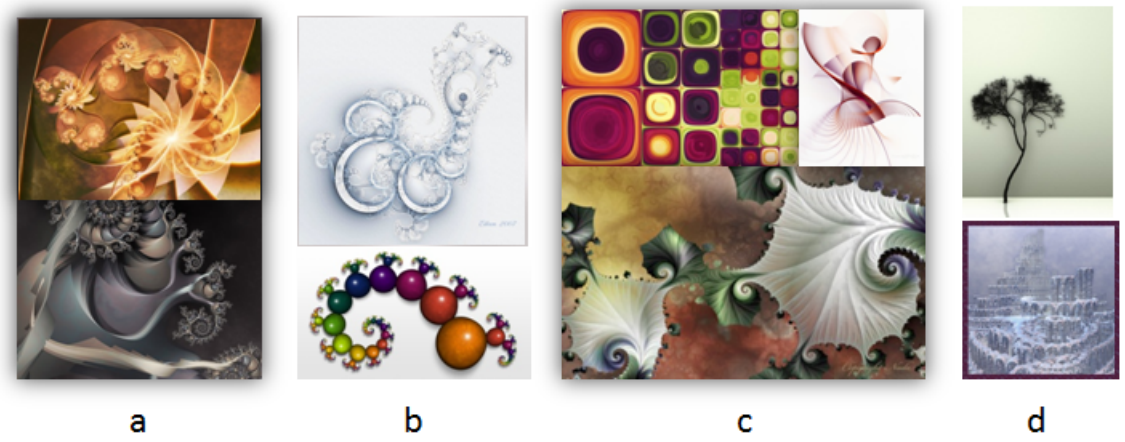



FIGURA 2.2: Muestras de imágenes que participaron en el concurso de arte fractal Benoit B. Mandelbrot, en: a)2006, b)2007, c)2009, d)2011. (Adaptado de [22, 23, 25, 27])

## 2.1. Fractales

Un fractal es una estructura o forma geométrica que presenta auto-similud en un amplio rango de escalas. Pero de manera formal Mandelbrot dio, en un principio, la siguiente definición: un fractal es por definición un conjunto para el que la dimensión Hausdorff excede estrictamente su dimensión topológica. Tiempo después esta aseveración la reemplazó por: un fractal es una forma hecha de partes similares al todo en alguna manera [2].

La raíz de la palabra fractal, viene del adjetivo en latín *fractus*, y del verbo *frangere*, que significa romper o fragmentar, es decir, crear fragmentos irregulares; un significado muy adecuado para el tipo de estructuras que Mandelbrot quería nombrar [46].

Cuando se hace referencia a un fractal, es bajo las siguientes consideraciones [18]:

1) tiene una estructura fina, es decir, tiene detalles en escalas pequeñas arbitrariamente;

2) es tan irregular tanto local como globalmente, como para ser descrito mediante un lenguaje geométrico tradicional;

3) presenta de alguna manera autosimilitud, aproximada o estadística;

4) es en general más grande que su dimensión topológica;

5) puede ser definido de una manera simple o recursiva.

Los fractales, a simple vista o en primera instancia pueden ser percibidos como imágenes o formas, pero en realidad, son un concepto matemático. De la misma forma como sucede en la geometría euclidiana, ellos permiten modelar y relacionar características del mundo real.

Los fractales se crean bajo los principios de iteración y retroalimentación, y pueden ser generados a partir de algoritmos recursivos con o sin la ayuda de computadoras dependiendo de su complejidad, ya que pueden ser necesarios cálculos exhaustivos para finalmente poder visulizarlos.

Estos objetos pueden ser encontrados fácilmente en la naturaleza, en el cuerpo humano, incluso en el espacio; van desde lo microscópico hasta las galaxias, montañas, nubes, árboles, son ejemplos de ellos.

Tomemos como ejemplo un brócoli, si de éste a su vez tomamos una rama o una parte considerable, notaremos que tiene la misma forma que el brócoli completo inicialmente. Si repetimos el proceso con la rama de tamaño menor, y tomamos de él también una rama, seguiremos viendo el mismo patrón de forma (ver figura 2.3). Por lo tanto podemos decir que el brócoli tiene estructura fractal. Esto mismo puede ser observado si se toma una coliflor o un romanescu.

Debido a la irregularidad que presentan y sus características, los fractales pueden seguir el mismo patrón a diferentes escalas considerando algunas excepciones. De

FIGURA 2.3: Autosimilitud a diversas escalas en fractales naturales. De arriba hacia abajo: coliflor, romanescu, brócoli, romanescu. (Adaptado de [21, 26, 20, 24] )

aquí la importancia de analizar en ellos sus rasgos de auto-similitud y escalabilidad, y así poder clasificarlos en deterministas, aleatorios y multifractales. En la figura 2.4 se muestran algunos fractales creados con sistemas de funciones iteradas (*Iterated Function Systems*, IFS).

El proceso mediante el que se van generando es más importante y útil, que sólo su forma, pues al considerarlo, éste puede ser relacionado fácilmente con fenómenos en la naturaleza. Por ejemplo, en la botánica, al observar los cambios que presenta una planta a través del tiempo, es de gran utilidad ya que se tendría el plan de crecimiento dinámico de ella y no sólo su forma final [44].

## 2.2. Dimensión Fractal

Definir el concepto de dimensión puede ser un poco difícil de tal manera que es posible encontrar una gran cantidad de ellas. Podemos mencionar algunas como: dimensión topológica, dimensión de auto-similitud, dimensión de capacidad,

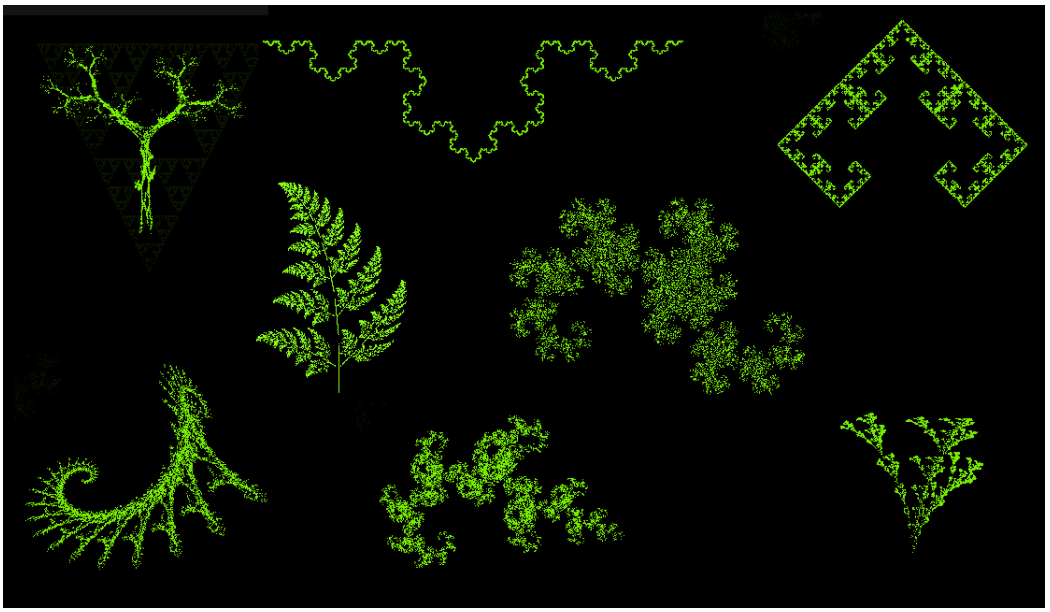


FIGURA 2.4: Fractales generados con matrices de sistemas de funciones iteradas.

dimensión de Hausdorff, dimensión fractal, dimensión box-counting, entre otras. Cada una analiza una característica especial en los fractales, y en algunos casos puede coincidir, pero no siempre es así [53].

Para introducir el concepto de dimensión se puede considerar un ejemplo muy básico. Dado un segmento de recta unitario, éste se divide en tres partes y se borra el tercio medio, en los tercios restantes el proceso de división y borrado se repite, y así sucesivamente con cada una de las partes que van quedando. Después de llevar a cabo muchas veces este proceso, si al principio era una línea con una longitud de una unidad, ahora son una gran cantidad de puntos que se extienden al infinito y no pertenecen ya a la dimensión uno y su dimensión estará entre cero y uno. Este conjunto es conocido como el polvo de Cantor (ver figura 2.1). En general los fractales tienen dimensión fraccionaria ya que no llenan completamente el plano o el espacio.

Hablar de dimensión fractal es asociar a este tipo de estructuras un número que refleja, entre otras cosas, sus propiedades de escala, es decir, cómo cambia su estructura cuando es magnificado. Podríamos decir también, que la dimensión es una medida cuantitativa de cuán rugoso es el fractal [44]. En otras palabras con la dimensión podemos saber cuán fractal es una forma o estructura.

### 2.2.1. Dimensión Hausdorff

La **dimensión de Hausdorff** está definida como una estimación de cuánto espacio ocupa un conjunto cerca de cada uno de sus puntos. Es relativamente fácil de manipular, pero tiene la desventaja de que en muchos casos es difícil calcularla computacionalmente.

La dimensión de Hausdorff puede ser definida para cualquier conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ formalmente como:

$$dim_H F = inf\,\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = sup\{s : \mathcal{H}^s(F) = \infty\} \tag{2.1}$$

donde $s$ es considerado un número real positivo ($s \geq 0$).

Esto significa, que para un conjunto dado $F$, hay un único valor $dim_H \in [0, \infty]$ tal que:

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{Si } 0 \leq s < dim_H F \\ 0 & \text{Si } s > dim_H F\,, \end{cases} \tag{2.2}$$

donde $\mathcal{H}^s(F)$ se refiere a la medida de Hausdorff [18].

### 2.2.2. Dimensión de Auto-Similitud

Esta definición de dimensión es de gran ayuda para entender cómo se da la relación en un cuerpo geométrico de la geometría euclidiana, y a la vez, como eso puede ser adaptado a un fractal.

En la geometría tradicional podríamos medir en curvas, superficies y volúmenes, su longitud, área o volumen, respectivamente. Pero estas medidas en un fractal no entran en función a menos de que se analice como van creciendo con respecto a escalas cada vez más pequeñas, debido a la complejidad de su forma.

De lo anterior, la idea principal es que existe una relación entre la escala y longitud, o superficie, o volumen, que nos permiten cuantificar una de la otra, mediante una ley que veremos más adelante.

Como su nombre lo dice, esta dimensión analiza la auto-similitud en un objeto fractal. En general, una estructura se dice estrictamente auto-similar si puede ser fragmentada en piezas pequeñas arbitrariamente, y cada una de esas piezas es una copia de la estructura entera, y a su vez estas piezas pueden ser obtenidas o generadas a partir de la estructura entera, mediante una transformación de similitud.

Aunque esta característica se encuentra todo el tiempo en los fractales, no todas las figuras o estructuras que la presentan lo son. Como ejemplo tomemos una línea, un cuadrado y un cubo. Éstos pueden ser divididos o fragmentados de tal forma que obtengamos pequeñas réplicas a partir de transformaciones de similitud, pero no son fractales, (figura 2.5).

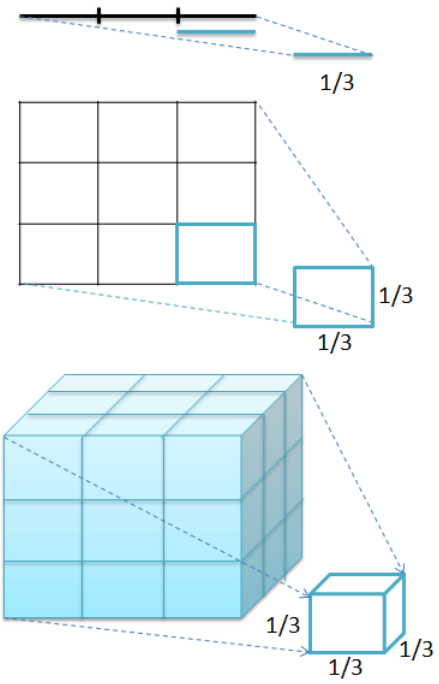



FIGURA 2.5: Principio de autosimilitud de una línea, un cuadrado y un cubo.

Para este caso, cada pieza es obtenida a partir de la reducción en $\frac{1}{3}$ de cada una de las dimensiones que se manejan, y cada pieza representa $\frac{1}{N}$ del todo, donde $N$ es el número de piezas en que se ha dividido ya sea la línea, el cuadrado o el cubo.

La relación que vemos en cada uno de ellos, es un factor de reducción $s$ y el número de piezas resultantes $a$, que llevan a esta ley [53].

$$a = \frac{1}{s^D} \tag{2.3}$$

donde $D$ puede ser 1,2 o 3, para la línea, cuadrado o cubo respectivamente, coincidiendo con su dimensión en la geometría euclidiana.

Para hacer más entendible la relación, se puede ver la fórmula anterior de otra manera:

$$1 = a \cdot s^D \tag{2.4}$$

donde por ejemplo, aplicando esta fórmula a un cuadrado que es dividido en nueve partes, tenemos:

$$\begin{aligned} 1 &= 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= 9 \cdot \left(\frac{1}{9}\right) \\ &= \left(\frac{9}{9}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

lo que inicialmente era una unidad, es decir un todo, es equivalente a tener 9 piezas, cada una de ellas obtenidas al reducir en 1/3 las dimensiones del cuadrado, en este caso 2 (figura 2.6).

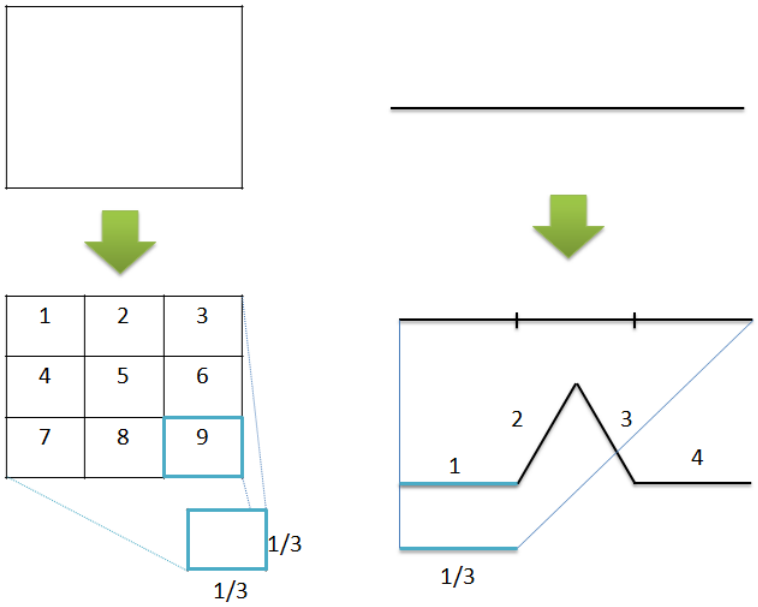



FIGURA 2.6: Auto-similitud en el cuadrado y la curva de Koch.

Ahora, este mismo proceso puede ser aplicado a la curva de Koch. Partimos de una línea inicialmente, y esta es dividida en tres partes iguales, pero por ser de naturaleza fractal, además de ser dividido, tiene una transformación donde el tercio medio se elimina y es reemplazado por dos segmentos de la misma longitud, que se unen formando un ángulo de 60 grados (figura 2.6).

Los datos con los que contamos ahora son, un factor de reducción $s = 1/3$ y un número total de piezas $a = 4$. Pero desconocemos el exponente $D$ que permita se mantenga la equivalencia de la ecuación 2.3.

Despejando $D$ en la ecuación 2.3 tenemos que:

$$D = \frac{log(a)}{log(1/s)} \tag{2.5}$$

donde $D$ es llamada dimensión de auto-similitud.

Realizando los cálculos para la curva de Koch con la ecuación 2.5, finalmente obtenemos $D \approx 1.2619$, que es su respectiva dimensión de auto-similitud [53].

### 2.2.3. Dimensión Box Counting

Esta dimensión es de las más usadas, ya que su cálculo matemático y estimación empírica son fáciles de calcular. Su definición se remonta hacia la década de 1930 y fue conocida con diferentes nombres como entropía de Kolmogorov, dimensión de entropía, dimensión de capacidad, dimensión métrica, dimensión de información o densidad logarítmica.

Ahora se define de manera formal la **dimensión de conteo de cajas** o dimensión *box counting*. Sea $F$ un subconjunto no vacío acotado en $\mathbb{R}^n$ y sea $N_\delta(F)$ el número más pequeño de conjuntos con un diámetro a lo más de tamaño $\delta$ con el que se puede cubrir $F$. Si las dimensiones *box counting* inferior y superior de $F$ son iguales, entonces nos referimos al valor común como la dimensión *box counting* o **dimensión de conteo de cajas** de $F$ [18]:

$$dim_B F = \lim_{\delta \to \infty} \frac{log N_\delta(F)}{-log\delta}. \tag{2.6}$$

El concepto de esta dimensión está relacionado a la dimensión de auto-similitud, en algunos casos pueden coincidir sus valores, y en otros diferir, sólo que la dimensión *box counting* propone una dimensión sistemática, que se aplica a cualquier estructura en el plano y puede ser adaptada fácilmente a estructuras en el espacio.

De manera sencilla, para calcular esta dimensión podemos decir que colocamos una "rejilla", con un tamaño de malla $s$ o un conjunto de cajas de tamaño $s$, sobre la superficie de la estructura si se trabaja en el plano. Este valor hace referencia al factor de escala, si se compara con la dimensión de auto-similitud.

A continuación se hace un conteo del número de cajas en la "rejilla"que contienen algo de la estructura y tendremos $N$, que sería el número de piezas necesarias que forman el fractal. Como para cada valor de $s$ se tiene una correspondencia con $N$, se denotará como $N(s)$.

Ahora $s$ deberá tomar diferentes valores decrementando su tamaño inicial, y por cada uno de esos valores tendremos su correspondiente número de piezas $N(s)$

asociado. El siguiente paso será graficar $N(s)$ contra $1/s$ en la escala log-log. La pendiente de la recta que mejor se ajuste a la gráfica corresponde a la dimensión *box counting*, $D_b$.

Podemos notar que en la dimensión de auto-similitud sólo se realiza el cálculo una vez, es decir, sólo necesitamos el valor de $s$ y $N$ para encontrar $D$, y en la dimensión *box counting* $D$ es obtenida a partir de diferentes valores para $s$ y su respectivo $N$.

## 2.3. Lagunaridad

Esta medida viene a complementar el concepto de dimensión fractal, y hace referencia hacia la textura de un objeto, ya que dos fractales pueden tener la misma dimensión porque siguen el mismo patrón para ser generados, pero su apariencia es diferente al presentar huecos o lagunas en una mayor o menor cantidad.

Para entender este concepto se puede considerar el siguiente ejemplo, dado un triángulo inicialmente lleno de un color oscuro (ver figura 2.7), se toman los tres puntos medios de cada uno de sus lados para formar cuatro triángulos congruentes y se elimina el triángulo de en medio. Ahora con cada uno de los triángulos restantes se vuelve a repetir este proceso de división y borrado varias veces. El resultado del proceso anterior después de cinco repeticiones será algo como la figura 2.7. El patrón es el mismo en todos los triángulos (su dimensión fractal será la misma), pero su apariencia es diferente, por lo tanto, su lagunaridad es la que los diferencía. Un ejemplo similar se da tomando ahora un cuadrado, como el de la figura 2.8.

Mandelbrot hace referencia a la raíz del término **lagunaridad**, diciendo al mismo tiempo que la geometría fractal bien podría pasar como un estudio implícito de la textura. *Lacuna* (relacionada a *lago*) es la palabra en Latín para laguna o hueco, por lo tanto un fractal puede ser llamado *lacunar* si sus lagunas o huecos tienden a ser grandes, en el sentido de que ellos incluyen grandes intervalos (discos, o esferas) [46].

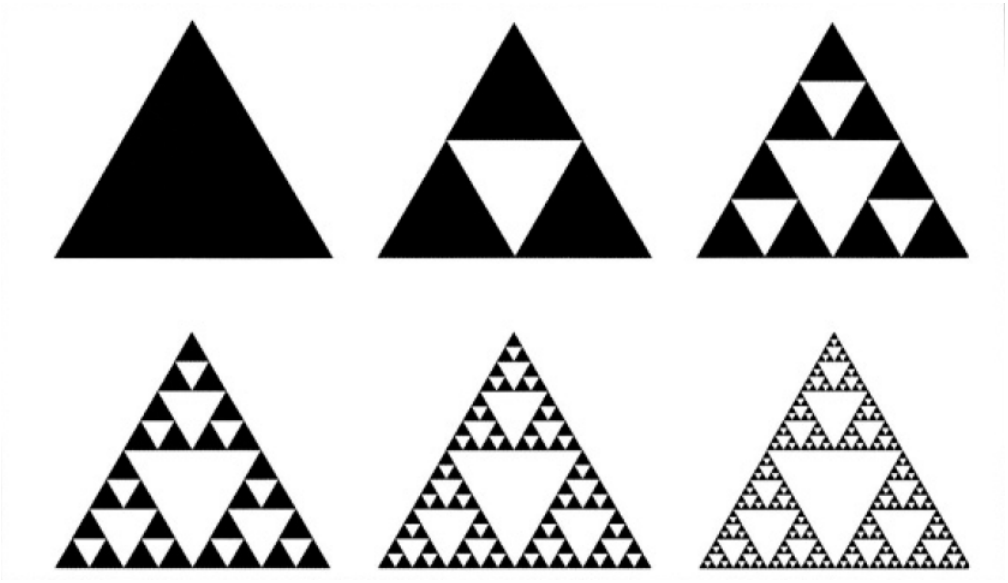


FIGURA 2.7: Triángulo de Sierpinski en diferentes etapas. En cada triángulo se observará el mismo patrón fractal, pero para poder diferenciarlos se puede medir cómo varían al llenar el espacio, es decir, analizando su lagunaridad [53].

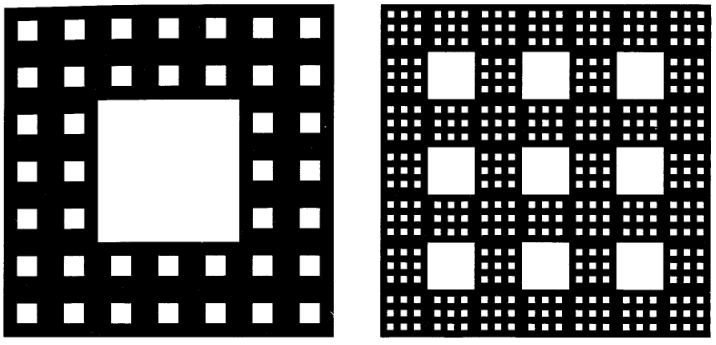


FIGURA 2.8: Carpeta de Sierpinski en diferentes etapas. Ambas corresponden al mismo patrón fractal, pero su apariencia es diferente [46].

La **lagunaridad** en los fractales, asocia un número que proporciona una medida de qué tan bien llena el espacio un fractal. Una definición formal se puede hallar en [54] que explica que la lagunaridad es un método multiescalado para describir patrones de dispersión espacial, y aunque originalmente fue desarrollado para objetos fractales, puede aplicarse tanto a patrones fractales como no fractales. En [4, 55] se menciona que es una medida dependiente de la escala, que indica la heterogeneidad de una textura.

### 2.3.1. Definición

La lagunaridad es una función que analiza la fluctuación de una distribución de frecuencias de masa asociado a un tamaño de escala $r$, y queda definida estadísticamente en términos de su primer y segundo momentos como:

$$\Lambda(r) = \frac{Z_2(r)}{[Z_1(r)]^2}. \tag{2.7}$$

También se puede definir como la amplitud o rango de la función de distribución de masa para el conjunto de puntos dado. De manera cuantitativa en [4, 36], la **lagunaridad** se define como la desviación de la media al cuadrado de las fluctuaciones de la función de distribución de masa dividido por la media al cuadrado. Lo anterior queda expresado como:

$$\Lambda(r) = \frac{V + \mu^2}{\mu^2} = \frac{V}{\mu^2} + 1, \tag{2.8}$$

donde, el primer momento es igual a la media ($Z_1(r) = \mu$) y el segundo momento queda expresado en términos de la varianza y la media como $Z_2 = V + \mu^2$. Al mismo tiempo la lagunaridad queda expresada en términos de la varianza relativa $V/\mu^2$ [55], y es equivalente al cuadrado del coeficiente de variación [35], es decir:

$$\frac{V}{\mu^2} = \left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2, \tag{2.9}$$

donde $\sigma$ es la desviación estándar.

La varianza es una medida de dispersión absoluta, que nos da información de la variabilidad de una distribución. Tanto la varianza como la desviación estándar proporcionan una medida del punto hasta el cual los datos están dispersos con respecto a la media. Cuanto más grande sea la varianza los valores están más alejados de la media y varían mucho entre ellos, es decir, los datos son más dispersos [48, 59]. Sin embargo, lo son con respecto a una sola muestra o distribución.

El coeficiente de variación *(cv)* por otro lado, es una medida de dispersión relativa que permite analizar la variabilidad en los datos de varias muestras y es independiente de las unidades de medición [59]. Esto permite hacer la comparación a diferentes escalas. La lagunaridad entonces al quedar expresada como el cuadrado del *cv*, es también una medida adimensional de la dispersión de los datos.

### 2.3.2. Análisis de lagunaridad

#### 2.3.2.1. Textura

La **textura** es una propiedad que frecuentemente se utiliza en muchas aplicaciones de visión por computadora. Aunque no existe una definición ampliamente aceptada para textura, en muchas investigaciones se utilizan palabras como, "órden" u "homogeneidad"para definirla[36].

La lagunaridad es una medida fractal de la heterogeneidad de una textura, y es aplicable para el análisis de imágenes, y ya que las texturas son definidas como dependientes de la escala [36], esta medida se adapta muy bien.

Si la lagunaridad es alta, indica que en la textura es heterogénea y se observarán pixeles agrupados con una amplia variedad de tamaños de islas, rodeados por una gran variedad de lagunas, ya sea que se hable de imágenes en escala de grises o binarias.

Por el contrario, si la lagunaridad es baja, es muy invariante translacionalmente y significa que la textura es homogénea. Lo anterior se observa para el caso de imágenes en escala de grises, donde la masa de sus niveles de gris no presenta mucha variedad [36].

#### 2.3.2.2. Invarianza translacional

La invarianza translacional es un concepto útil que permite entender la lagunaridad, y para expresarla en términos de esta medida, se puede decir que un patrón

invariante translacionalmente no exhibe agrupamiento, porque todos los tamaños de las lagunas son iguales.

Consideremos el siguiente ejemplo, dada una secuencia de 1's y 0's alternados como 10101010... hasta una longitud deseada. Esta secuencia seguirá siendo la misma si se toma una copia y ésta se traslada o mueve dos dígitos, de manera que el original no pueda ser distinguido de la copia trasladada. Esta propiedad es llamada **invarianza translacional**.

El comportamiento anterior no es observado en el caso de una secuencia un poco más heterogénea, como 101000101..., donde las lagunas tienen un rango de tamaños, incluyendo un grupo de tres lagunas en medio. Cuanto mayor sea el grado de agrupamiento de lagunas, mayor es la lagunaridad [56].

Es importante resaltar que invarianza translacional no es lo mismo que autosimilitud. En [55] se nos da el ejemplo del polvo de Cantor, y aunque es generado bajo un proceso que garantiza auto-similitud, la secuencia entera tiene un amplio rango de tamaños de lagunas, por lo que no es translacionalmente invariante.

#### 2.3.2.3. Dependencia de la escala

La lagunaridad nos dice que tan heterogénea es una textura analizando su invarianza translacional a una escala dada, sin embargo, un sólo valor de lagunaridad da información limitada de un conjunto en el mejor de los casos. Podemos resaltar entonces que su utilidad viene al calcularla sobre un amplio rango de escalas o tamaños de caja, ya que si una textura es homogénea a pequeñas escalas, también puede suceder que cuando se examina a escalas más grandes sea heterogénea, o viceversa. Por la razón anterior, la lagunaridad se considera una medida dependiente de la escala, que nos da información de la heterogeneidad o textura de un conjunto [55].

# Capítulo 3

# Método para el cálculo de lagunaridad

## 3.1. Introducción

La lagunaridad, es una propiedad fractal, que nos indica la capacidad que tiene el fractal de llenar el espacio y además describe la textura del objeto. Su análisis fue inicialmente introducido por Mandelbrot [46], para diferenciar entre varios objetos fractales que presentan la misma dimensión, $D_f$, por seguir el mismo patrón de forma, pero su apariencia es diferente al presentar huecos o lagunas en una mayor o menor cantidad. Sin embargo, su análisis se ha extendido hasta ser usada como una técnica general para determinar la textura asociada con patrones de dispersión espacial, sean éstos o no fractales, o multifractales. Y puede ser usada tanto para datos binarios como cuantitativos, en una, dos o tres dimensiones [54].

## 3.2. Cálculo de lagunaridad

Existen varios métodos para el cálculo de los valores de lagunaridad en imágenes, el más conocido es el de Allain y Cloitre llamado **algoritmo de caja deslizante** [4]. En [54, 55], este método de estimación se generaliza para cualquier conjunto

de datos y lo que se analiza son la variaciones de la función de distribución de masa de un patrón dado.

### 3.2.1. Método de la caja deslizante o *Gliding Box*

En general el método trabaja de la siguiente manera, dada la distribución espacial del patrón o la imagen:

- Una caja de tamaño $r$ se desliza por toda la imagen y cada vez que la caja es posicionada, se hace el conteo de los puntos del patrón que caen en ella, produciendo una distribución de frecuencias de masa $q(s, r)$, que indica el número de cajas con masa $s$ dado el tamaño de caja $r$.
- Esta distribución de frecuencias $q(s, r)$, se convierte en una distribución de probabilidad $Q(s, r)$ al dividir $q(s, r)$ entre $N(r)$, donde $N(r)$ que es el número de cajas de tamaño $r$ usadas para cubrir toda la imagen.
- Ahora se calculan el primer y segundo momento $Z_1$ y $Z_2$ de la distribución de probabilidad:

$$Z_1(r) = \sum_{s=1}^{s_{max}} sQ(s, r) \tag{3.1}$$

y

$$Z_2(r) = \sum_{s=1}^{s_{max}} s^2 Q(s, r). \tag{3.2}$$

- De los momentos se calcula la lagunaridad $\Lambda$ con respecto a una escala $r$ como el segundo momento entre el primero al cuadrado (3.1).
- La función $\Lambda(r)$ se evalúa entonces para diferentes valores de $r$, es decir, para diferentes escalas, con un valor inicial de $r$ que después debe irse decrementando a intervalos y puede llegar a la unidad mínima del conjunto, en este caso, el valor mínimo es un pixel.

- Finalmente para obtener un sólo valor $\lambda$ que describa el comportamiento de la lagunaridad considerando diferentes escalas, se grafica $r$ contra $\Lambda(r)$, con o sin escala log-log. El valor de $\lambda$ será igual a la recta que mejor se ajuste a los puntos de lagunaridad en la gráfica, y puede obtenerse calculando mínimos cuadrados o con la siguiente derivada [4, 19]:

$$\lambda = \frac{d\log(\Lambda(r))}{d\log(r)}. \tag{3.3}$$

Aunque el ajuste de mínimos cuadrados fue la opción implementada en este trabajo, también hay trabajos en los que el ajuste se realiza con una exponencial [36] o una hipérbola [61] (ver figura 3.1). Es importante mencionar que antes de este paso también puede haber una normalización para la función de lagunaridad $\Lambda(r)$ [56, 17, 16].

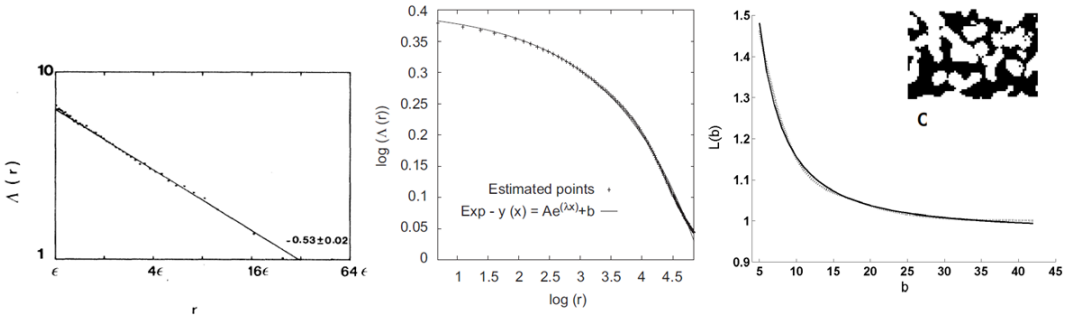



FIGURA 3.1: El valor de $\lambda$ se puede encontrar ajustando una línea recta, una exponencial o una hipérbola a la gráfica de $r$ contra $\Lambda(r)$ (Adaptado de [4, 61, 36]).

El algoritmo de la caja deslizante de Allain y Cloitre [4], se diseñó para datos binarios, sin embargo, hay adaptaciones del mismo para poder aplicarlo a imágenes en escala de grises donde $q(s, r)$ se obtiene de diferentes maneras, pero los cálculos del resto del algoritmo se mantienen. Ésto será explicado en la siguiente sección.

### 3.2.2. Cálculo de la masa de la caja deslizante

Hay varias adaptaciones al algoritmo de caja deslizante para el cálculo de lagunaridad con datos cuantitativos, de ellas se han considerado tres para este trabajo

de tesis y se dará una breve explicación de cómo cada una hace el cálculo de la masa $q(s, r)$ de la caja deslizante.

#### 3.2.2.1. Analizando alturas relativas

Este método también es llamado conteo de cajas diferencial (DBC - Differential Box Counting) [6, 49], donde los valores dentro de la caja deslizantes $r \times r$ se verán como relieves. Así para calcular la masa $q(s, r)$, una columna de cajas $r \times r \times r$ se construye apilando $u$ cajas para cubrir el valor mínimo dentro de la caja y $v$ cajas para el valor máximo. La altura relativa para esa columna sería entonces $h(r) = v - u + 1$.

Finalmente $q(s, r)$ sería la distribución de las frecuencias de las alturas relativas encontradas en la imagen, es decir, tendríamos $q(h, r)$.

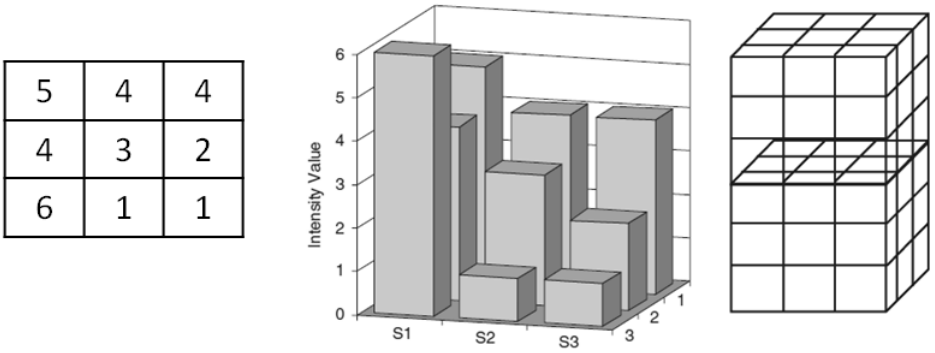



FIGURA 3.2: El valor de la masa de la caja deslizante para el método DBC (conteo de cajas diferencial) es calculando las alturas relativas (Adaptado de [49]).

#### 3.2.2.2. Promedio de los valores dentro de la caja

En [36, 6], para calcular $q(s, r)$, cada vez que la caja $c$ de dimensiones $r \times r$ se desliza, se calcula el promedio de los valores dentro de ella. Por lo tanto, la masa de caja se calcula como:

$$q(s,r) = \frac{\sum_{i=1,j=1}^{r} c(i,j)}{r^2}. \tag{3.4}$$

#### 3.2.2.3. Creación de una "nube" de puntos

En este método propuesto recientemente en [19], se hace un modelo tridimensional de la imagen, donde el plano o la superficie, corresponde a las coordenadas de los pixeles $(x, y)$, y el valor del pixel con respecto a esas coordenadas es mapeado al eje $z$.

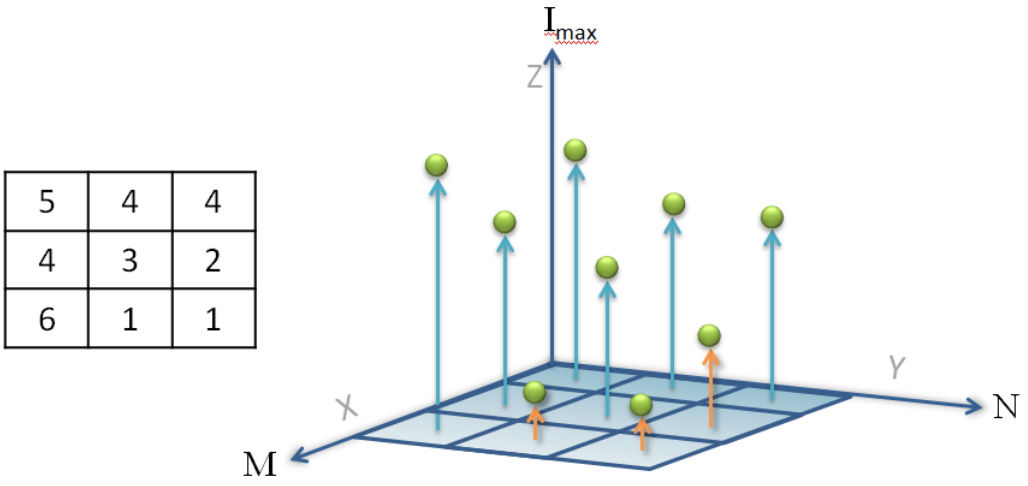



FIGURA 3.3: En este método propuesto en [19], antes de hacer el conteo de masa, se genera una nube de puntos, donde los ejes X e Y tienen una correspondencia con la posición de cada pixel en la imagen de $M$, y en el eje $Z$ se debe indicar el nivel de gris de cada pixel.

Lo anterior resulta en una nube de puntos contenida en un prisma de dimensiones $M \times N \times I_{max}$, donde $M, N$ son las dimensiones de la imagen, e $I_{max}$ es el valor de intensidad máximo encontrado en la imagen completa.

Así, una caja cúbica de dimensiones $r \times r \times r$, se desliza por todo el prisma haciendo el conteo de los puntos de la nube que caen dentro de ella, y esa cantidad será la correspondiente a $q(s, r)$.

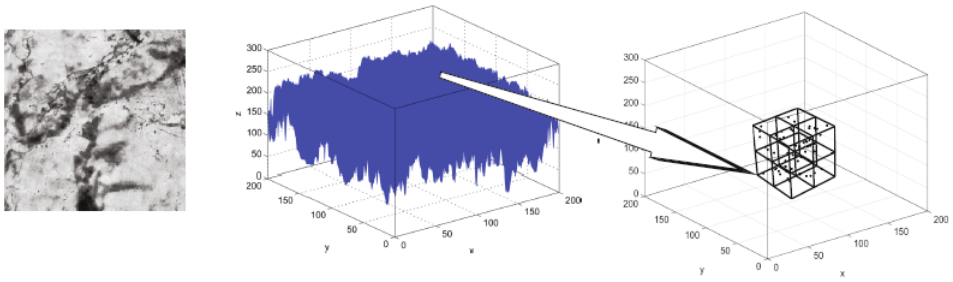


FIGURA 3.4: Método de la caja deslizante mapeando una textura a 3D, generando una nube de puntos, (Adaptado de [19]).

## 3.3. Descriptores de lagunaridad

En [19] se encuentra una propuesta para analizar la textura de imágenes a través del cálculo de lagunaridad, obteniendo descriptores al aplicar a la función de lagunaridad una transformación de espacio de escala. Esto logra mostrar la diferencia de patrones y subpatrones, detalles e irregularidades.

Para obtener los descriptores se hace la convolución de la función de lagunaridad con un filtro gaussiano, así la funcion de descriptores queda formulada de la siguiente manera:

$$\mathcal{D}(\sigma) = \Lambda(t) * g_\sigma(t) \tag{3.5}$$

donde $t$ debe ser adaptada a $log(r)$ para que $\Lambda(t)$ pueda tomar los mismos valores que $\Lambda(r)$, y $g_\sigma$ es la función Gaussiana:

$$g_\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp(-t^2/2\sigma) \tag{3.6}$$

donde $\sigma$ es la desviación estándar, o en este caso el parámetro de “suavidad”.

# Capítulo 4

# Experimentos

## 4.1. Pruebas con imágenes binarias

### 4.1.1. Pruebas con matrices y mapas simulados

Para probar qué tan correcta fue la implementación del algoritmo de la caja deslizante para imágenes binarias se consideraron los experimentos de Plotnick et al. [55] dadas 3 matrices de dimensiones 12×12 (ver figura 4.1) y cinco mapas más grandes (figura 4.2). Tanto las matrices como los mapas simulados, son usados para interpretar el índice de lagunaridad dependiendo de la cantidad de sitios ocupados y su distribución. Para el caso de los mapas, éstos se generaron con un algoritmo derivado de métodos de geometría fractal [55].

En las tres matrices de la figura 4.1, sólo la mitad de los 144 sitios disponibles son ocupados, y están representados por un uno. Los 72 sitios a ocupar se seleccionaron de manera aleatoria en Mat1, en Mat2 formando una gran laguna en el centro y en Mat3 de forma regular alternando unos y ceros. Lo anterior se hizo para probar que la lagunaridad es susceptible a los cambios en la distribución de la misma cantidad de puntos en diferente forma.

El valor de lagunaridad para la matriz Mat1 (figura 4.1-a) para un tamaño de caja (escala) dos es igual a $\Lambda(2) = 1.2157$. Los cálculos de la distribución de frecuencias

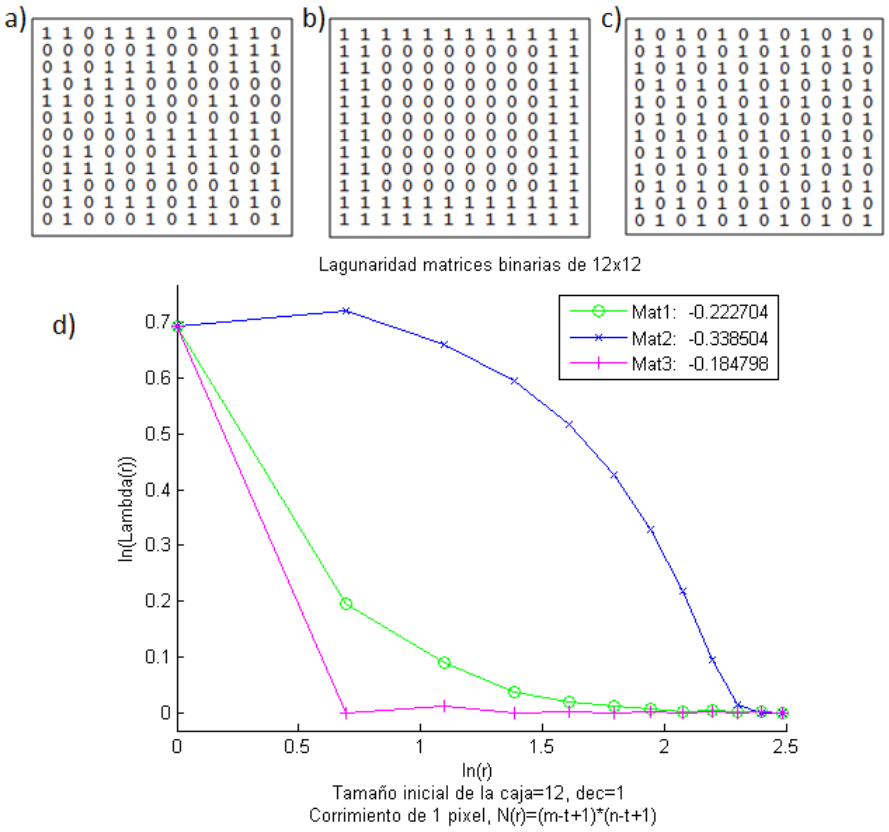



FIGURA 4.1: Matrices de 12x12: a) Matriz aleatoria (Mat1), b) Matriz con una laguna grande (Mat2), c) Matriz perfectamente regular (Mat3), d) Gráfica de lagunaridad de las tres matrices, donde se pueden observar los cambios en las curvas de lagunaridad con sólo colocar de diferente manera la misma cantidad de puntos, representados por el número 1.

| $s$ | $q(s,r)$ | $Q(s,r)$ | $sQ(s,r)$ | $s^2Q(s,r)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 3 | 0.0248 | 0 | 0 |
| 1 | 35 | 0.2893 | 0.2893 | 0.2893 |
| 2 | 46 | 0.3802 | 0.7603 | 1.5207 |
| 3 | 29 | 0.2397 | 0.7190 | 2.1570 |
| 4 | 8 | 0.0661 | 0.2645 | 1.0579 |
| | | | $\Sigma = 2.0331$ | $\Sigma = 5.0248$ |

TABLA 4.1: Cálculo de lagunaridad para $r = 2$ en mat1. $N(2) = 121$, $Z_1 = 2.0331$, $Z_2 = 5.0248$ y $\Lambda(2) = 1.2157$.

de masa para $\Lambda(2)$ de Mat1 se muestran en la tabla 4.1. En este caso el número de sitios $N(r)$ donde se debe colocar la caja a través de toda la matriz es $N(2) = 121$, considerando un corrimiento de una unidad. Ahora $s$, que es la masa que puede contener la caja, tomará su rango de valores entre 0-4. De esta manera en $q(s,r)$ las

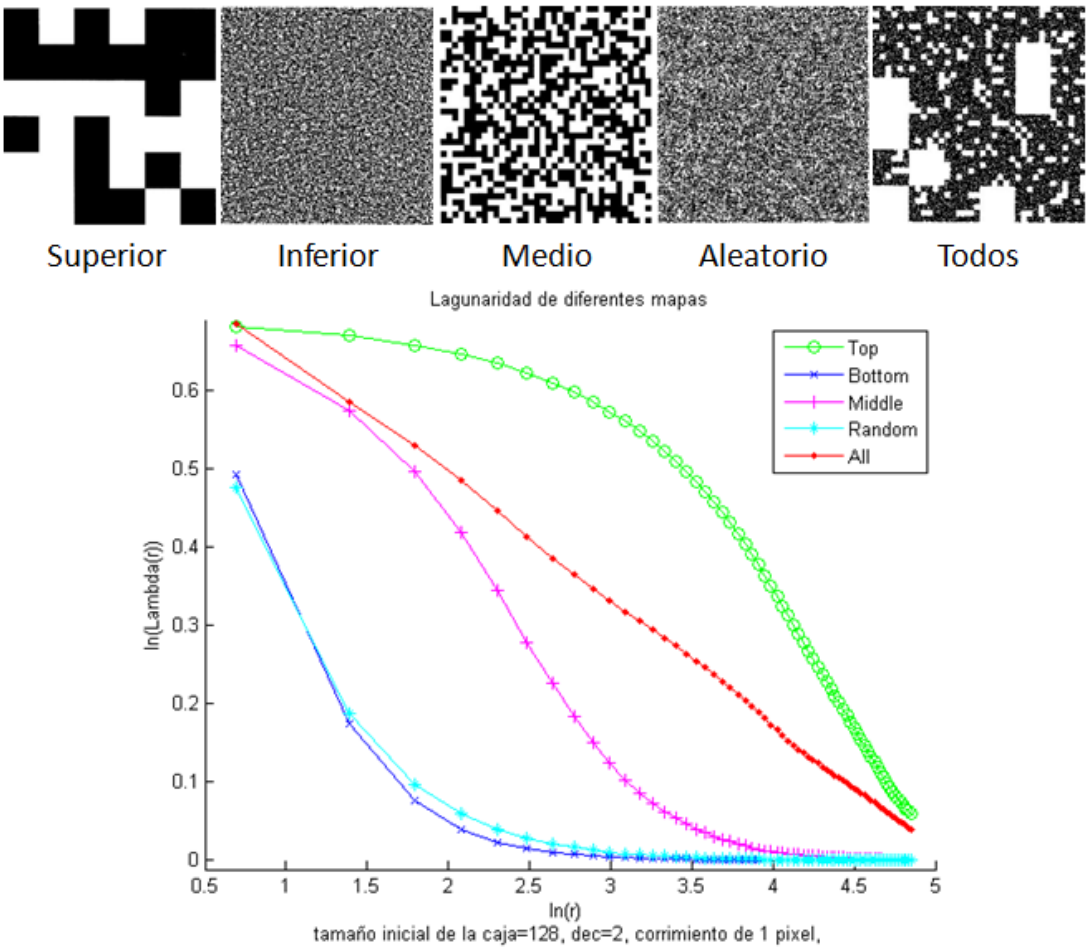



FIGURA 4.2: Arriba: Mapas simulados tomados de [55] que fueron generados con algoritmos fractales para analizar las propiedades de la lagunaridad. Abajo: Gráfica de lagunaridad para los mapas simulados.

121 cajas quedan distribuidas como se muestra en la tabla 4.1, y esta distribución es la frecuencia con la que apareció cada uno de los valores de masa en las cajas. Los valores que puede tomar $q(s,r)$ son importantes, porque dependiendo de la variabilidad o varianza en la distribución de las masas de caja, la lagunaridad tomará valores más grandes o pequeños.

En $Q(s,r)$ tenemos entonces la probabilidad al dividir esta frecuencia $q(s,r)$ entre $N(r)$. Por ejemplo, la frecuencia con que apareció una cantidad de masa $s = 1$ dado el tamaño de caja $r = 2$ es $q(1,2) = 35$, y al dividirlo entre $N(r) = 121$ tiene una probabilidad de aparecer $Q(1,2) = 0.2893$ (tabla 4.1 segunda fila). El primer y segundo momentos de probabilidad son entonces calculados con las fórmulas de las ecuaciones (3.1) y (3.2), donde $Z1 = 2.0331$ y $Z2 = 5.0248$. Como se explica

en la sección 2.3.1, el cociente del segundo momento entre el primer momento al cuadrado, definen a la lagunaridad como una medida adimensional que indica la proporción en que los datos se alejan o se acercan a la media. Finalmente el valor de $\Lambda(2) = 1.2157$.

Los valores de $Z1$ y $Z2$ para Mat1 evaluados desde $r = 1$ hasta $r = 12$ se muestran en la tabla 4.2, junto con el valor respectivo de lagunaridad y su varianza relativa.

| $r$ | $Z1$ | $Z2$ | $\Lambda(r)$ | $V/\mu^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.5 | 0.5 | 2 | 1 |
| 2 | 2.0331 | 5.0248 | 1.2157 | 0.2157 |
| 3 | 4.54 | 22.54 | 1.0936 | 0.0936 |
| 4 | 8.0864 | 67.8148 | 1.0371 | 0.0371 |
| 5 | 12.6250 | 162.6250 | 1.0203 | 0.0203 |
| 6 | 18.2245 | 335.9388 | 1.0115 | 0.0115 |
| 7 | 24.8056 | 619.5833 | 1.0069 | 0.0069 |
| 8 | 32.32 | 1046.880 | 1.0022 | 0.0022 |
| 9 | 40.9375 | 1680.1875 | 1.0026 | 0.0026 |
| 10 | 50.4444 | 2548 | 1.0013 | 0.0013 |
| 11 | 61.50 | 3784.5 | 1.0006 | 0.0006 |
| 12 | 72 | 5184 | 1 | 0 |

Tabla 4.2: Cálculo de lagunaridad en mat1, para escalas donde $r = 1$ hasta 12, sin logaritmo.

| $s$ | $q(s,r)$ |
|---|---|
| 0 | 3 |
| 1 | 35 |
| 2 | 46 |
| 3 | 29 |
| 4 | 8 |

| $s$ | $q(s,r)$ |
|---|---|
| 0 | 56 |
| 1 | 0 |
| 2 | 30 |
| 3 | 4 |
| 4 | 31 |

| $s$ | $q(s,r)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 0 |
| 2 | 121 |
| 3 | 0 |
| 4 | 0 |

Tabla 4.3: Distribución de frecuencias de masa de las matrices de la figura 4.1, para un tamaño de caja r=2. De izquierda a derecha, distribución de Mat1, Mat2 y Mat3.

Los cálculos anteriores se realizaron para las tres matrices (Mat1, Mat2, Mat3) de la figura 4.1, y así poder hacer el mismo análisis de Plotnick et al. Las gráficas de lagunaridad se muestran en la misma figura 4.1. Las distribuciones para las tres matrices cuando $r = 2$ y $r = 3$ se muestran en las tablas 4.3 y 4.4 respectivamente.

Analizando los cálculos de las tres matrices, se confirmó lo dicho en [55], donde indican que la lagunaridad es una función dependiente del tamaño de caja, ya

| $s$ | $q(s,r)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 0 |
| 2 | 6 |
| 3 | 20 |
| 4 | 24 |
| 5 | 23 |
| 6 | 19 |
| 7 | 7 |
| 8 | 1 |
| 9 | 0 |

| $s$ | $q(s,r)$ |
|---|---|
| 0 | 42 |
| 1 | 0 |
| 2 | 0 |
| 3 | 26 |
| 4 | 0 |
| 5 | 4 |
| 6 | 20 |
| 7 | 6 |
| 8 | 2 |
| 9 | 0 |

| $s$ | $q(s,r)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 0 |
| 2 | 0 |
| 3 | 0 |
| 4 | 50 |
| 5 | 50 |
| 6 | 0 |
| 7 | 0 |
| 8 | 0 |
| 9 | 0 |

Tabla 4.4: Distribución de frecuencias de masa de las matrices de la figura 4.1, para un tamaño de caja r=3. De izquierda a derecha, distribución de Mat1, Mat2 y Mat3.

que conforme se incrementa el tamaño de la caja, la lagunaridad decrece. Esto sucede porque al incrementar su tamaño, la caja puede contener una cantidad más grande de masa y menos cajas son necesarias para recorrer la imagen, por lo que estos cambios provocan que el primer momento ($Z1$) o masa promedio también se incremente. Luego, la probabilidad de que la masa difiera considerablemente del promedio decrece al punto en que la varianza es igual a cero para un tamaño de caja igual al del conjunto entero, y de la fórmula (2.8) sólo se tendría $\mu^2/\mu^2 = 1$, que es el punto al que llegan todas las gráficas sin aplicar logaritmo cuando $r$ toma el valor del tamaño de caja más grande. Lo anterior se observa para el caso de Mat1, en el último renglón de la tabla 4.2 cuando $r = 12$. En ese caso, $Z1$ es el promedio máximo de cajas y $[Z1^2]$ es igual a $Z2$, y esto indica que en $Z2$ la varianza es cero (el coeficiente de variación es cero) y por lo tanto $\Lambda(12) = 1$.

En [55] se indica que la lagunaridad es una función del promedio de sitios ocupados $P$ (se llega a P cuando se calcula $\Lambda(1)$). Para el caso de las tres matrices $P = 0.5$, y esto se ve reflejado para Mat1 cuando $r = 1$ en el primer renglón de la tabla 4.2. Se puede observar que los valores más altos de lagunaridad se obtendrán conforme la media ($Z1$) se acerca a cero, y esto corresponde a tamaños de caja más pequeños. El valor de lagunaridad entonces tiende a infinito conforme el número de sitios ocupados tiende a cero [55, 54].

Finalmente la lagunaridad también es una función de la geometría del mapa, ya

que cuanto más grande sea su valor, indica que hay más pocas lagunas pero más grandes (alto contagio). Para analizar esto, se pueden observar las tablas 4.3 y 4.4, cuando $r = 2$ los valores que puede tomar $s$ van de 0-4 y las distribuciones para cada matriz son diferentes. Mientras que para Mat1 $q(0, 2) = 3$ y $q(4, 2) = 8$, en Mat2 $q(0, 2) = 56$ y $q(4, 2) = 31$, es decir, hay mayor agrupamiento en Mat2 de sitios ocupados y de lagunas.

Por el contrario, cuando el valor de lagunaridad es más pequeño hay más lagunas pero de menor tamaño. Así cuanto más pequeño sea su valor, el conjunto es más invariante translacionalmente y se usa menos el rango de valores que puede haber dentro de la caja. Es decir, el conjunto es altamente regular como el caso de Mat3 (ver tabla 4.3), donde para $r = 2$ la masa de la caja es constante, en este caso 2. Cuando $r = 3$ (ver tabla 4.4), la masa siempre es 4 o 5.

| Superior | Todos | Medio | Aleatorio | Inferior |
|---|---|---|---|---|
| -0.2015 | -0.1588 | -0.1417 | -0.0484 | -0.0456 |

Tabla 4.5: Cálculo de lagunaridad para cinco mapas simulados tomados de [55].

El análisis anterior de lagunaridad puede ser aún más gráfico y entendible con las siguientes pruebas de Plotnick et al. [55], usando cinco mapas simulados (ver figura 4.2). Estos mapas varían en la fracción de sitios ocupados y su distribución para las escalas 36, 6 y 1 (escala de aleatoriedad). Para calcular la lagunaridad en estos mapas los tamaños de caja fueron desde $r = 2$ hasta 128, en múltiplos de 2.

En la tabla 4.5 aparecen en orden decreciente los valores de lagunaridad de cada mapa. Estos valores corresponden a la pendiente de la recta que mejor se ajusta a cada una de las curvas de la lagunaridad de los mapas en la gráfica de la figura 4.2. A pesar de que el porcentaje de sitios ocupados es un poco similar, en la gráfica la forma de las curvas es diferente. Cada punto en las curvas para un tamaño de caja en particular, representa el valor lagunaridad como una medida de contagio. Valores más altos de lagunaridad representan más grande agrupamiento relativo a sitios ocupados, o bien, un amplio rango de tamaños de lagunas en la distribución.

Si las cajas son más pequeñas que la escala de aleatoriedad, el mapa se verá heterogéneo a esa escala y el valor de lagunaridad será más grande. Por el contrario, si los tamaños de las cajas son más grandes que la escala de aleatoriedad, la lagunaridad decrece rápidamente a cero.

En la gráfica 4.2, para el caso del mapa *Superior*, la escala de aleatoriedad es 36 y se confirma que valores de cajas más pequeños a $ln(36) = 3.58$ dan valores muy altos de lagunaridad, y una vez que se excede esta escala los valores decrecen muy rápido. Para el mapa *Medio*, en el que la escala de aleatoriedad es 6, la curva decrece más rápido después de que se llega a $ln(6) = 1.79$. En el caso de los mapas *Inferior* y *Aleatorio*, la escala de aleatoriedad es 1, entonces su valores en la gráfica declinan muy rápido a cero ya que todos los tamaños de caja exceden la escala de aleatoriedad, es decir, este decremento es casi inmediato mientras que en el mapa *Superior* sucede hasta que se excede la escala 36. El mapa *Todos*, tiene la misma probabilidad de aleatoriedad para las tres escalas y la curva de lagunaridad es más bien muy lineal y muy cercana a ser autosimilar [55, 4]. Otra característica a observar en la gráfica de los mapas es que mientras más lagunares sean, la curvas son cóncavas hacia arriba, y para valores bajos de lagunaridad las curvas son cóncavas hacia abajo.

Con el análisis anterior se confirma y concluye lo establecido en [55, 29]. Objetos geométricos con baja lagunaridad son homogéneos y translacionalmente invariantes porque todos los tamaños de lagunas son el mismo. En contraste, objetos con un amplio rango de tamaños de lagunas son heterogéneos y no invariantes translacionalmente, y por lo tanto, tienen alta lagunaridad. Así la lagunaridad puede ser pensada como una medida de los huecos o lagunas de una estructura geométrica o como una medida de la desviación de un objeto geométrico de ser invariante translacionalmente, esto es, a una escala dada, cuán similares son las partes de diferentes regiones de otras en un objeto geométrico.

### 4.1.2. Pruebas con imágenes de curvas de llenado del espacio

Imágenes binarias de curvas de llenado del espacio de Hilbert en diferentes etapas fueron usadas para analizar el valor de lagunaridad [57]. En las gráficas de las figuras 4.3, 4.4, se puede observar que a mayores iteraciones para el llenado del cuadrado, el valor de la lagunaridad va decreciendo (ver tabla 4.6,4.7). La figura 4.3 muestra la gráfica de los cálculos de lagunaridad sin aplicar logaritmo al tamaño de la caja $r$ y a $\Lambda(r)$ y donde se puede observar que conforme el tamaño de caja incrementa, la lagunaridad decrece hasta 1, y en general para imágenes binarias, en las gráficas de lagunaridad sin la escala log-log sucede lo mismo. Nuevamente, esto se hizo para mostrar experimentalmente que este es el punto al que llegan todas las gráficas sin aplicar logaritmo cuando $r$ toma el valor del tamaño de caja más grande, de acuerdo a la fórmula (2.8).

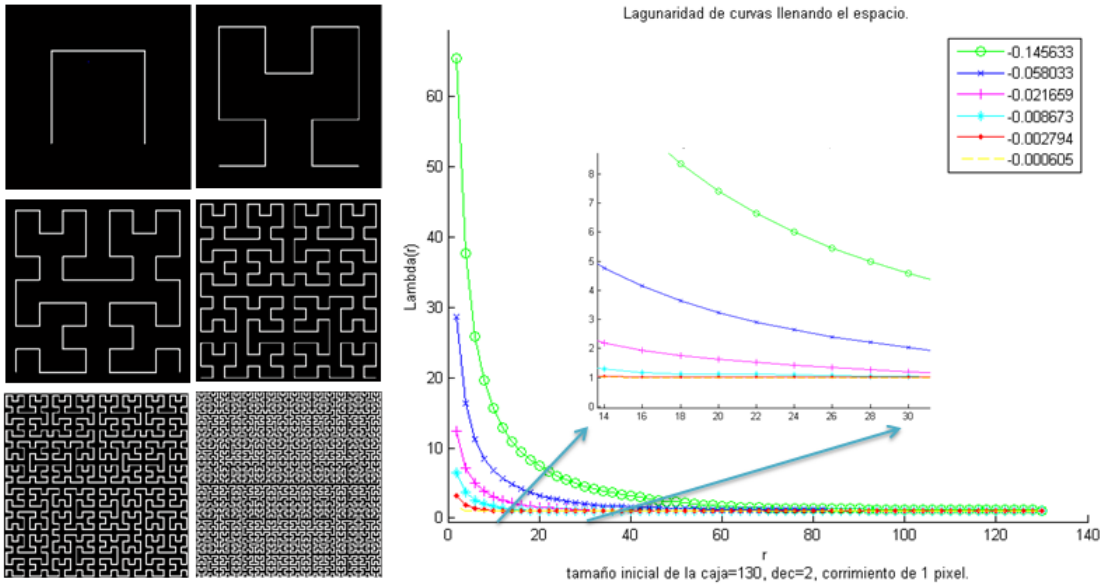



FIGURA 4.3: **Izquierda**: Imágenes de diferentes iteraciones del llenado del espacio de un cuadrado tomadas de [57]. **Derecha**: Gráfica de lagunaridad sin logaritmo para diferentes iteraciones del llenado del espacio de un cuadrado.

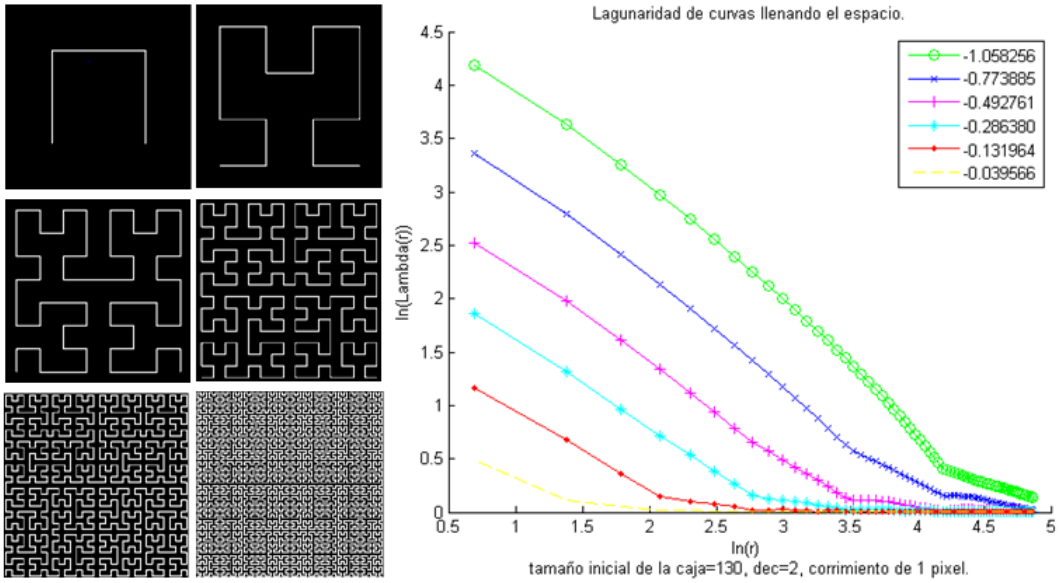



FIGURA 4.4: **Izquierda**: Imágenes de diferentes iteraciones del llenado del espacio de un cuadrado tomadas de [57]. **Derecha**: Gráfica de lagunaridad en escala log-log, para diferentes iteraciones del llenado del espacio de un cuadrado.

| Iteración | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Lagunaridad | -0.1456 | -0.0580 | -0.0217 | -0.0087 | -0.0028 | -0.0006 |

TABLA 4.6: Cálculo de lagunaridad sin logaritmo para imágenes binarias que corresponden a 6 iteraciones de la curva de llenado del espacio de Hilbert.

| Iteración | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Lagunaridad | -1.0582 | -0.7739 | -0.4928 | -0.2864 | -0.1320 | -0.0396 |

TABLA 4.7: Cálculo de lagunaridad con logaritmo para imágenes binarias que corresponden a 6 iteraciones de la curva de llenado del espacio de Hilbert.

### 4.1.3. Pruebas con imágenes de RM de cerebros sanos

Las pruebas de lagunaridad siguientes corresponden a imágenes binarias de resonancia magnética (RM) del cerebro de dos sujetos (figura 4.5). Las imágenes fueron tomadas de una base de datos de cerebros sanos simulados llamada *BrainWeb* [12]. Los valores de lagunaridad se calcularon para tres segmentaciones: sustancia blanca (SB), sustancia gris (SG) y líquido cefalorraquídeo (LCR). Como se puede ver en la gráfica 4.5, las curvas de lagunaridad separan cada una de las segmentaciones y numéricamente esto se comprueba con los valores de la tabla 4.5, los valores para

el LCR se diferencian por dos décimas de las otras dos segmentaciones, y la SB y la SG varían entre ellas en centésimas. El valor de lagunaridad en esta prueba logra una buena discriminación.

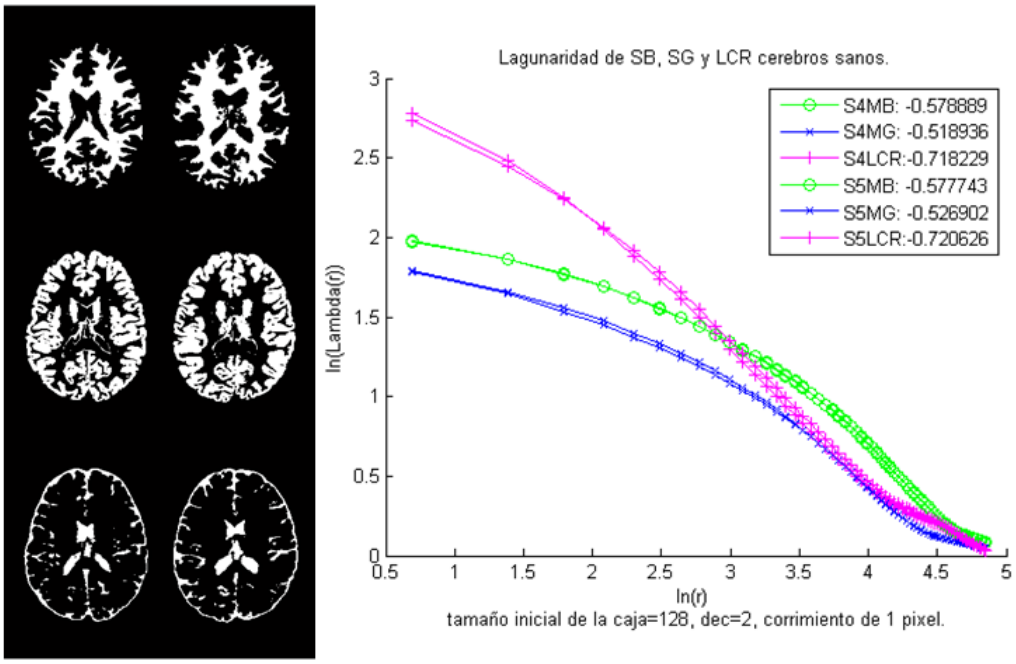



FIGURA 4.5: **Izquierda**: Imágenes simuladas binarias de RM de cerebros sanos, tomadas de [12]. **Derecha**: Gráfica de lagunaridad para la sustancia blanca, sustancia gris y líquido cefalorraquídeo, de dos cerebros sanos simulados.

| Sujeto | Sustancia Blanca | Sustancia Gris | LCR |
|---|---|---|---|
| 4 | -0.5789 | -0.5189 | -0.7182 |
| 5 | -0.5777 | -0.5269 | -0.7206 |

TABLA 4.8: Lagunaridad calculada para imágenes binarias simuladas de RM de cerebros sanos de dos sujetos, basada en promedios.

## 4.2. Pruebas con imágenes en escala de grises

Para trabajar con imágenes en escala de grises para el cálculo de lagunaridad se implementaron tres adaptaciones (ver sección 3.2.2) del algoritmo de la caja deslizante: por promedios, creando una nube de puntos y con alturas relativas. La diferencia en el conteo de la masa de caja es porque en imágenes binarias sólo

podían haber dos valores, cero o uno, y en una imágen en escala de grises, cada pixel puede tomar 256 valores.

### 4.2.1. Pruebas con imágenes de texturas

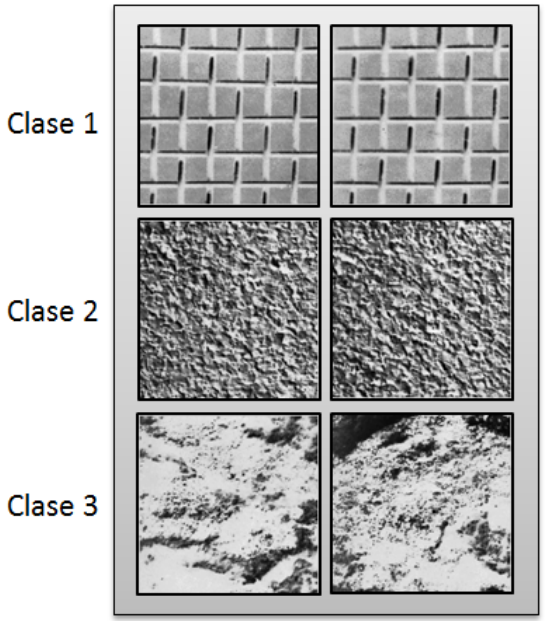



FIGURA 4.6: Texturas: D1(Clase1), D4(Clase2) y D7(Clase3). Tomadas de la base de datos Brodatz [9].

En esta primera prueba para imágenes en escala de grises se usaron las texturas de libro *Texturas* de Brodatz [9], en particular las imágenes D1, D4 y D7. Estas imágenes con dimensiones de 640×640 pixeles se consideraron como clases, y para probar el índice de lagunaridad en la clasificación de texturas del mismo tipo, se tomaron dos sub-imágenes de dimensiones 200×200 pixeles de cada clase.

Las gráficas 4.7,4.9,4.10 y las tablas 4.9,4.11,4.12 corresponden a los cálculos de lagunaridad con los tres algoritmos basados en: promedios, una nube de puntos, y alturas relativas. Para esto, $r$ toma un valor inicial de 100 pixeles, y se va decrementando en 2 pixeles, y el corrimiento de la caja es sin traslape, igual al tamaño de la caja. Con los valores anteriores, el cálculo por promedios tiene valores similares para la clase 2 y la clase3 (ver tabla 4.7). El cálculo simulando una nube de puntos y con alturas relativas en esta prueba tienen mejores resultados ya que

los valores en las tablas están notablemente agrupados aunque en algunas clases sea por centésimas.

Para el caso de la prueba con promedios se puede usar una escala menor para poder discriminar las texturas, ya que se puede observar que la clase 2 es muy invariante y sus valores decáen muy rápido en la gráfica 4.7. Si ahora se considera un tamaño inicial de 50 pixeles para $r$ con un decremento de 1 pixel, los resultados son aún mejores a esta escala (ver figura 4.8 y tabla 4.10).

Se concluye que haciendo un análisis para el ajuste de la escala y dependiendo del algoritmo, la lagunaridad también puede discriminar mejor entre estas texturas.

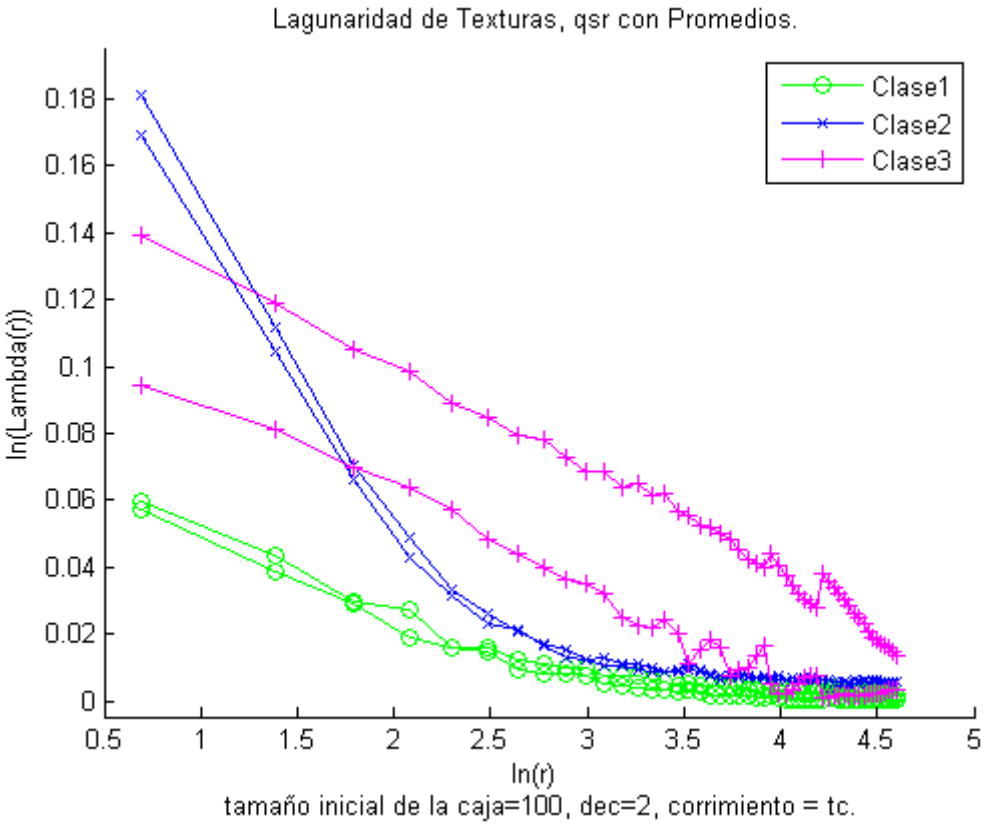



FIGURA 4.7: Gráfica de lagunaridad de imágenes de texturas en escala de grises, basada en promedios.

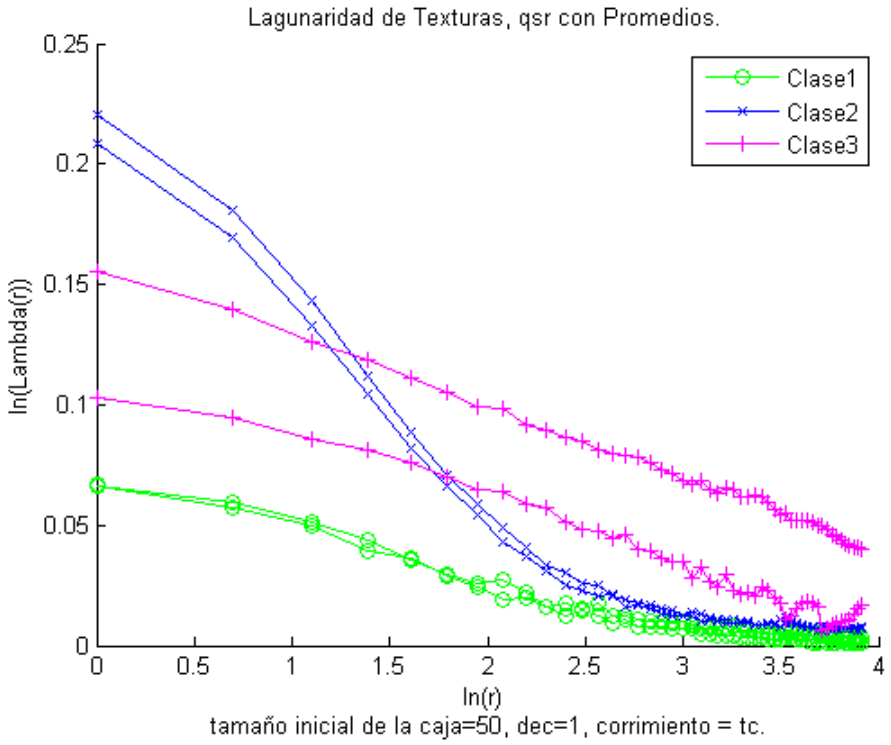



FIGURA 4.8: Gráfica de lagunaridad de imágenes de texturas en escala de grises basada, en promedios. Para este cálculo se consideró una escala más pequeña para obtener mejores resultados de discriminación entre las texturas.

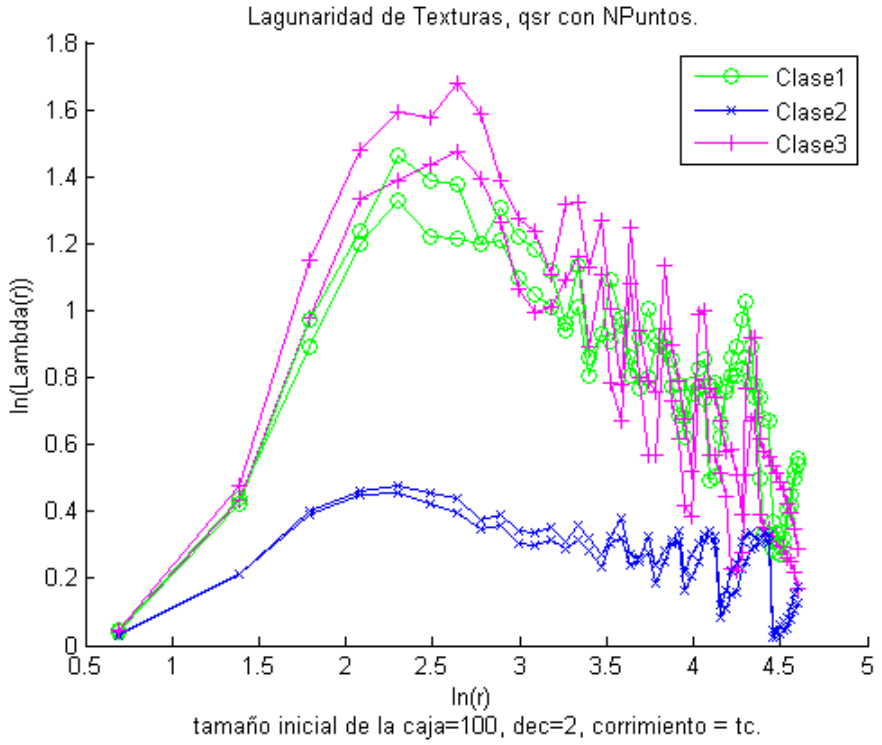



FIGURA 4.9: Gráfica de lagunaridad de imágenes de texturas en escala de grises, basada en una nube de puntos.

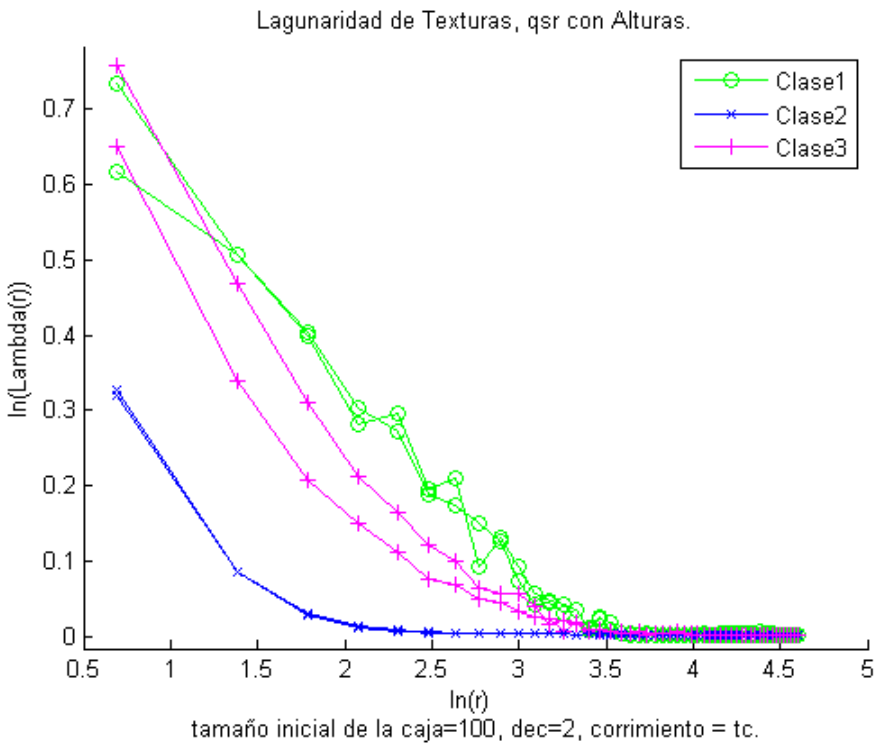



FIGURA 4.10: Gráfica de lagunaridad de imágenes de texturas en escala de grises basada, en alturas relativas.

| Clase 1 | Clase2 | Clase3 |
|---|---|---|
| -0.0106 | -0.0275 | -0.0317 |
| -0.0110 | -0.0253 | -0.0250 |

TABLA 4.9: Cálculo de lagunaridad de imágenes de texturas en escala de grises, basado en promedios.

| Clase 1 | Clase2 | Clase3 |
|---|---|---|
| -0.0162 | -0.0461 | -0.0296 |
| -0.0160 | -0.0431 | -0.0274 |

TABLA 4.10: Cálculo de lagunaridad de imágenes de texturas en escala de grises, basado en promedios. Para este cálculo se consideró una escala menor a la de 4.9, para obtener mejores resultados de discriminación entre las texturas.

| Clase 1 | Clase2 | Clase3 |
|---|---|---|
| -0.1194 | -0.0548 | -0.2280 |
| -0.1228 | -0.0453 | -0.1987 |

TABLA 4.11: Cálculo de lagunaridad de imágenes de texturas en escala de grises, basado en una nube de puntos.

### 4.2.2. Pruebas con imágenes de RM de cerebros sanos

Las mismas imágenes de la sección anterior de resonancia magnética (RM) de cerebros sanos simuladas obtenidas de [12], fueron usadas con estos algoritmos pero en escala de grises (figuras 4.12,4.13,4.14). Aunque en las gráficas es un poco difícil distinguir entre las curvas de lagunaridad, en las tablas 4.13, 4.14, 4.15, hay una separación entre los valores con los tres algoritmos, aunque la variación no es tan grande, pero es suficiente para confirmar cuantitativamente que la SB y la SG son más parecidas entre sí que al LCR, lo que se aprecia en los valores de la SB y SG para el caso de promedios y una nube de puntos.

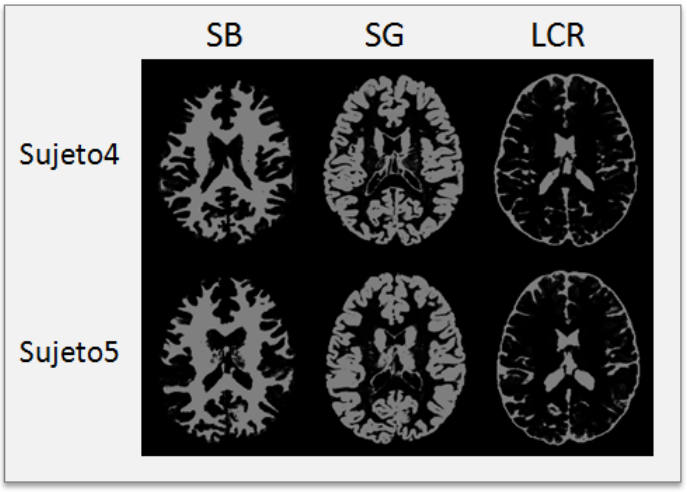



FIGURA 4.11: Imágenes de RM de la sustancia blanca en cerebros sanos tomadas de [12].

### 4.2.3. Pruebas con imágenes de RM de neonatos prematuros

Las siguientes pruebas se realizaron con imágenes de un atlas cerebral neonatal (ver figura 4.15) [41]. Los atlas probabilísticos se usan ampliamente como herramienta, dando un espacio estándar, para la comparación de sujetos y tejidos con el objetivo de mejorar la clasificación de imágenes de RM del cerebro basada en intensidades. Este atlas probabilístico fue creado a partir de la segmentación de 142 sujetos neonatales a diferentes edades y provee mapas probabilísticos de tejido para seis

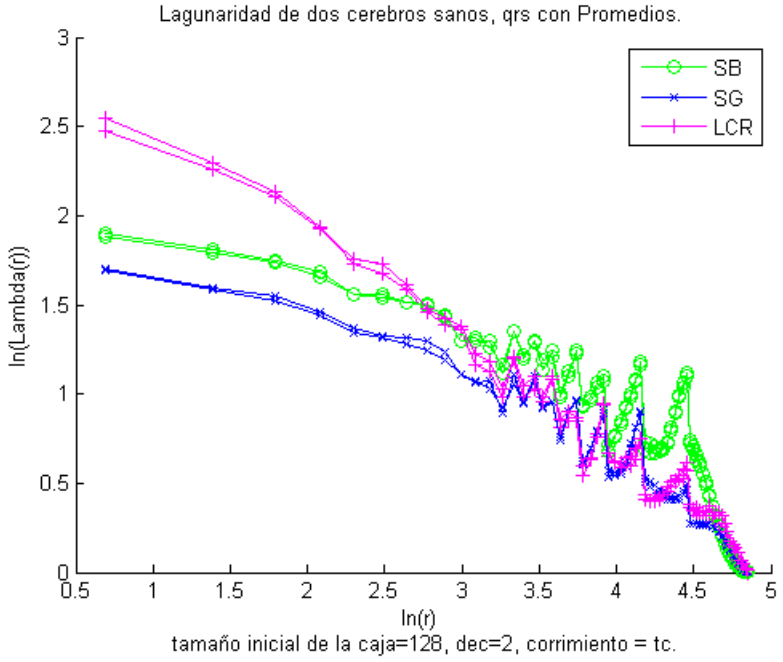



FIGURA 4.12: Gráfica de lagunaridad en imágenes de RM de cerebros sanos, basada en promedios.

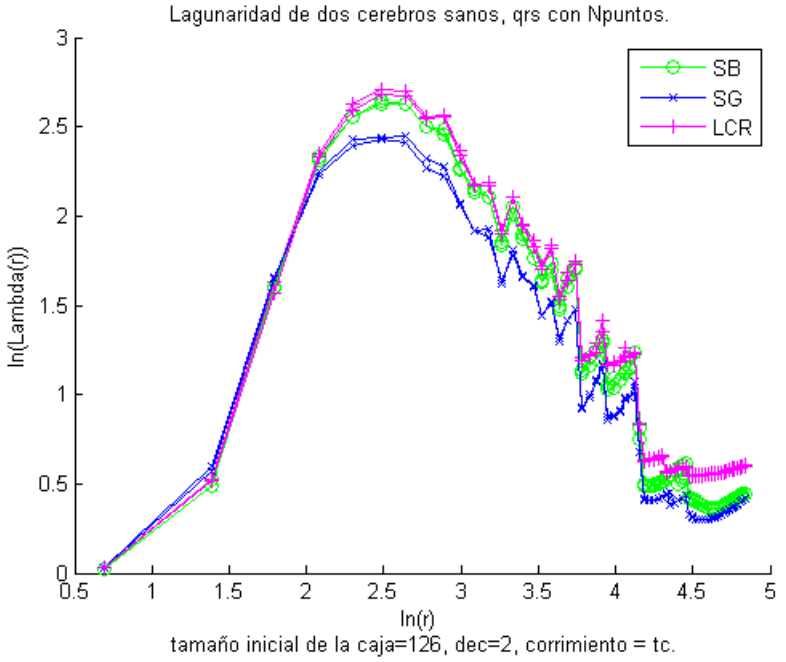



FIGURA 4.13: Lagunaridad en imágenes de RM de cerebros sanos, basada en una nube de puntos.

estructuras, pero en este caso sólo se usó la sustancia blanca. Las imágenes de RM van desde la semana 29 hasta la semana 44 de gestación de sujetos que nacieron prematuramente (ver figura 4.16).

En las gráficas 4.16,4.17,4.19, se puede observar que la lagunaridad va decreciendo conforme incrementa el tamaño del cerebro y la sustancia blanca ocupa más espacio. Numéricamente, se puede observar también en las tablas 4.16, 4.17, 4.19, que la lagunaridad va decreciendo gradualmente cada semana.

Analizando numéricamente la lagunaridad para estas imágenes, en la tabla del algoritmo promedios 4.16 se observa que dicho algoritmo da como resultado un decremento gradual de la lagunaridad, desde la primera hasta la última semana. Esto es visible con las imágenes donde el tamaño del cerebro era pequeño y conforme se desarrolla va incrementando de volumen y la sustancia blanca va llenando más el espacio. Para el caso del algoritmo simulando una nube de puntos, la lagunaridad va decreciendo durante las primeras 7 semanas, y en las siguientes su valor va cambiando, incrementando y decrementando. Estos cambios pueden ser debidos también a que las imágenes del atlas son un promedio de varios sujetos y no se analiza el crecimiento en uno sólo. En el caso del algoritmo de alturas relativas, cada cuatro semanas se detecta un cambio donde la lagunaridad aumenta para después ir decreciendo en las tres semanas restantes.

Un ajuste hecho para la gráfica con el algoritmo de una nube de puntos, fue poner un límite para el valor mínimo de la caja con $r = 10$, que es donde se comienzan a separar las curvas en la gráfica ($ln(10) = 2.30$ en 4.17). El resultado se ve en la gráfica 4.18, donde las curvas son muy parecidas a las de la tabla promedios y los valores de $\lambda$ para esas curvas en la tabla 4.18, también se van decrementando gradualmente como en el algoritmo de promedios.

Con esta prueba se puede notar que la lagunaridad puede analizarse en un rango intermedio de escalas, así que dependiendo de las imágenes hay varios parámetros que se pueden ajustar para obtener mejores resultados. Este análisis además sería de gran valor si a la vez es supervisado por médico experto.

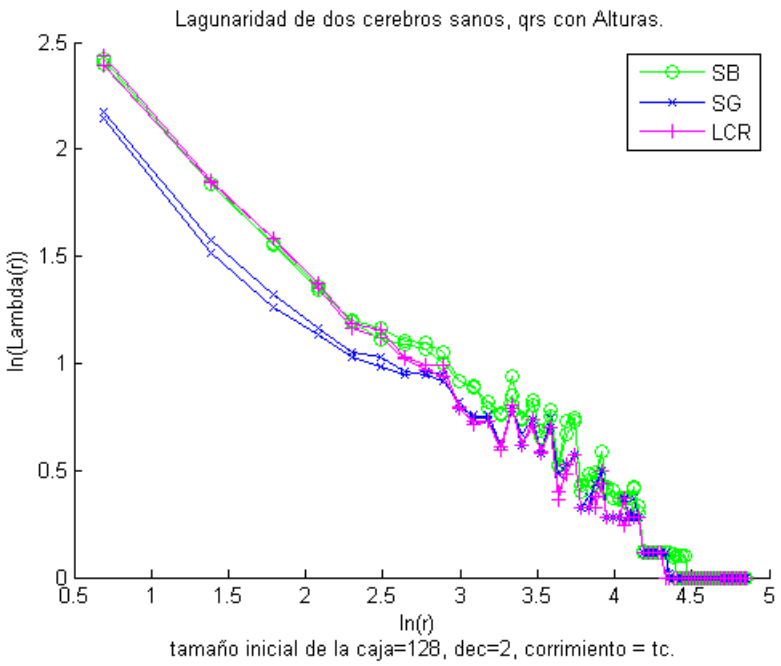



FIGURA 4.14: Lagunaridad en imágenes de RM de cerebros sanos, basada en alturas relativas.

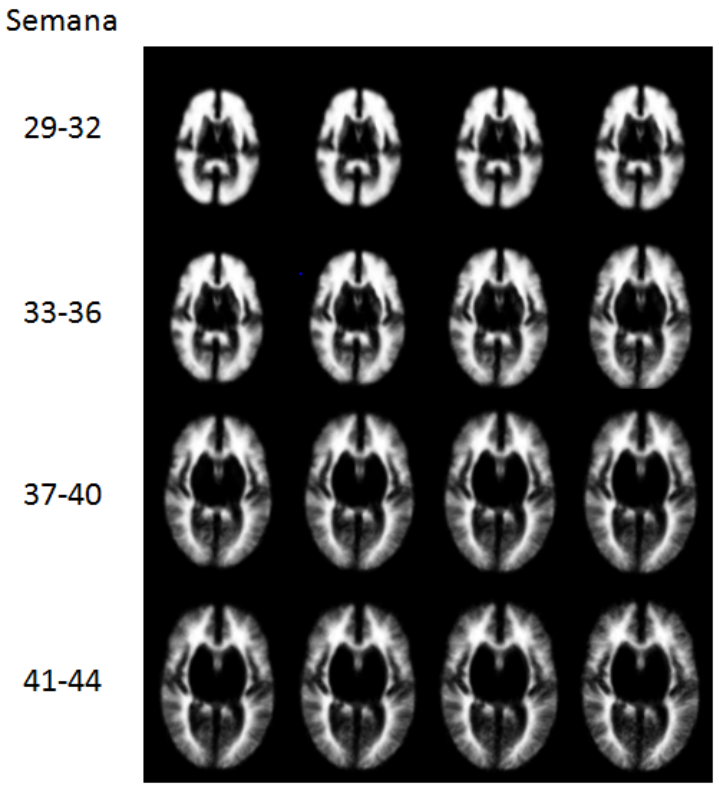



FIGURA 4.15: Imágenes de RM de la sustancia blanca de neonatos prematuros, que van de la semana 29 a la semana 44 de gestación [41].

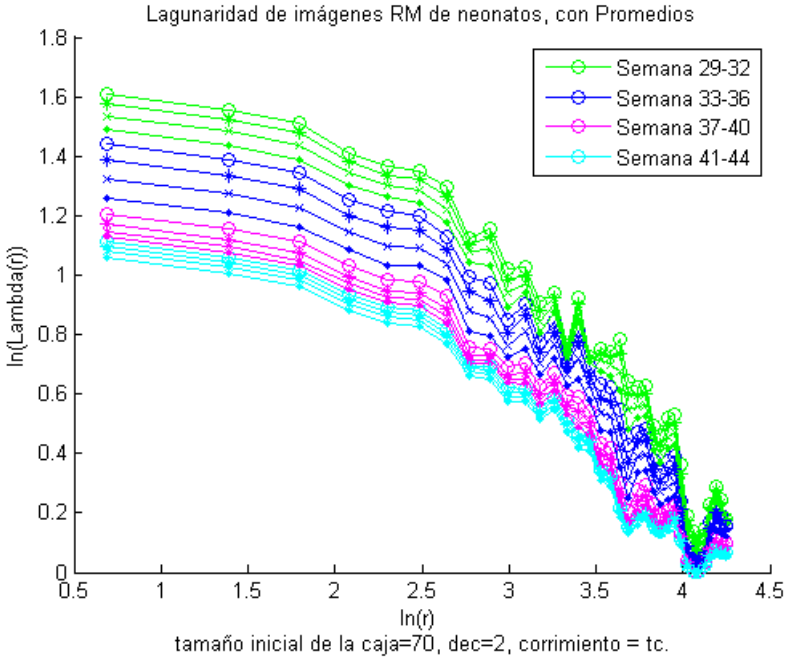



FIGURA 4.16: Lagunaridad de imágenes de RM de neonatos prematuros, basada en promedios.

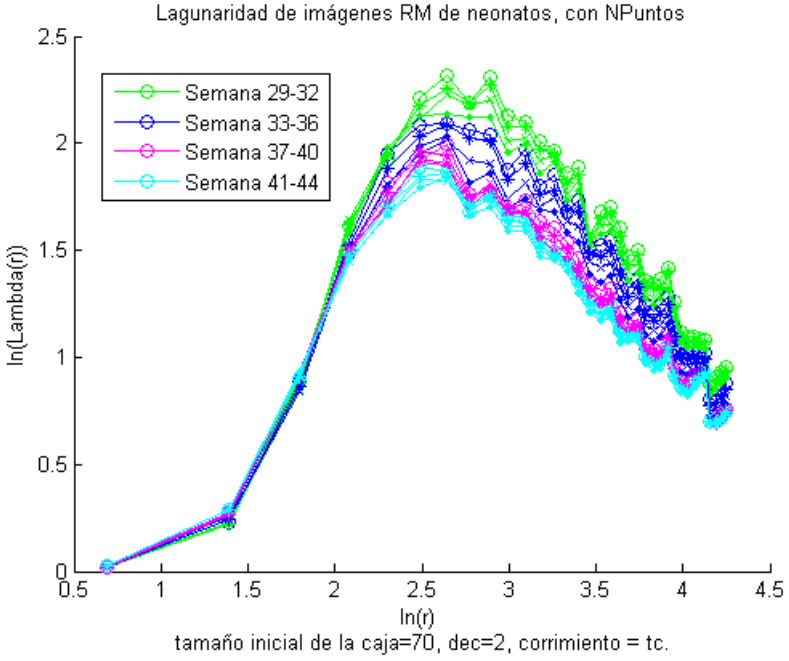



FIGURA 4.17: Lagunaridad de imágenes de RM de neonatos prematuros, basada en una nube de puntos.

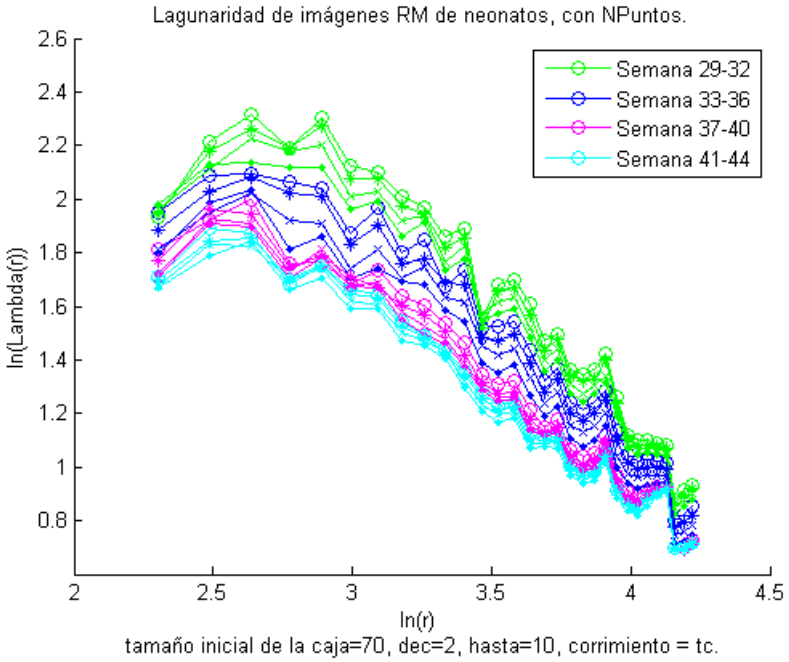



FIGURA 4.18: Lagunaridad de imágenes de RM de neonatos prematuros, basada en una nube de puntos. A diferencia de la gráfica 4.17, el valor más pequeño que puede tomar la caja es 10, que es donde se comienzan a separar las curvas de lagunaridad y da un resultado parecido a las gráficas de los otros algoritmos.

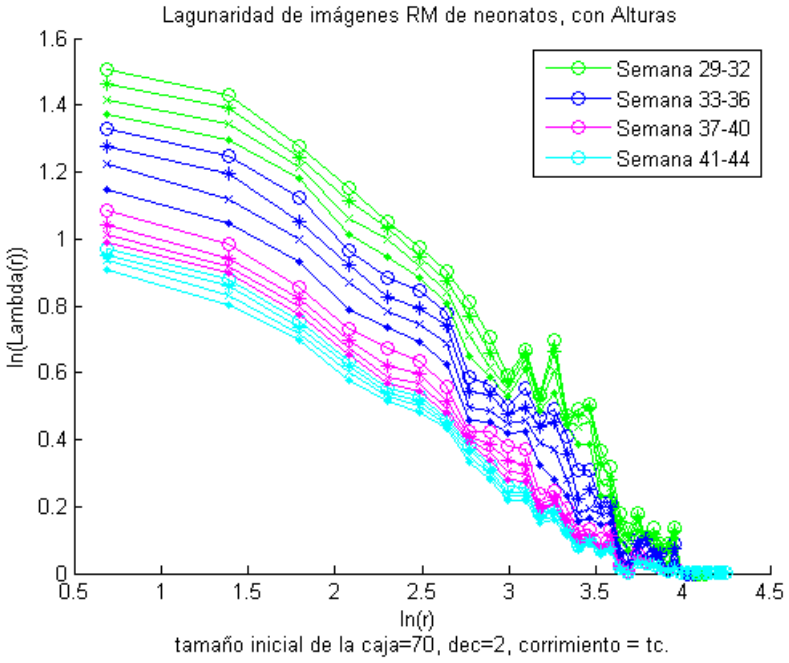



FIGURA 4.19: Lagunaridad de imágenes de RM de neonatos prematuros, basada en alturas relativas.

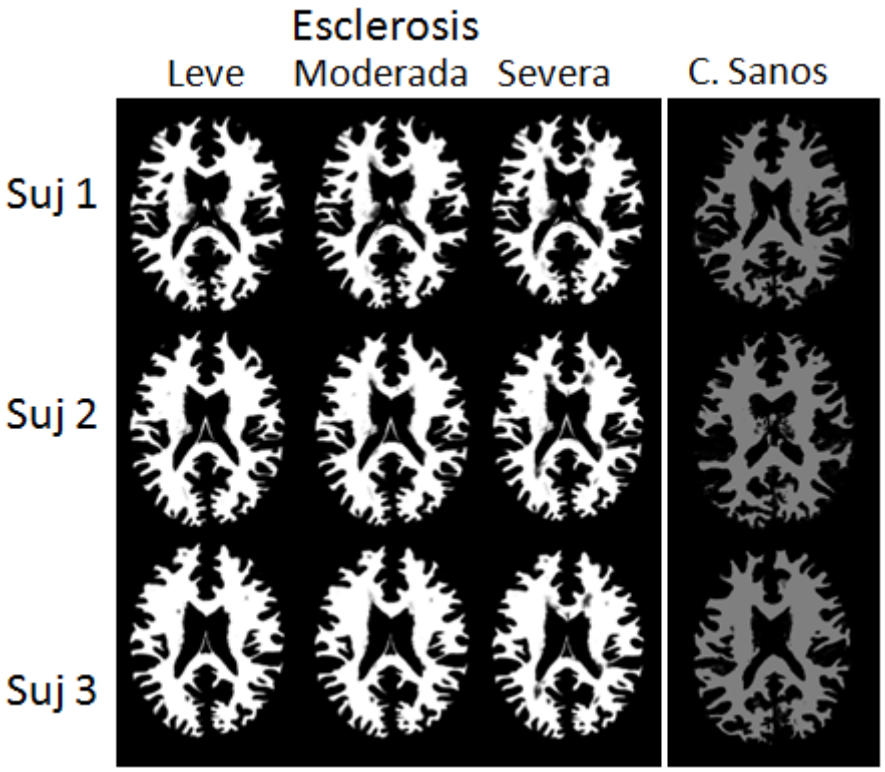
### 4.2.4. Pruebas con imágenes de RM de esclerosis múltiple

La lagunaridad también fue obtenida en imágenes cerebrales de RM de tres sujetos con esclerosis múltiple, con lesiones de tres tipos: leve, moderada y severa [12]. A la vez se compararon los resultados con imágenes de RM de tres sujetos sanos. Las gráficas 4.20,4.21,4.22, muestran valores de lagunaridad muy parecidos para los tres tipos de lesión, en las tres gráficas las curvas de lagunaridad no logran separarse, excepto para el caso del algoritmo basado en una nube de puntos, donde los cerebros sanos se separan de los cerebros dañados. Numéricamente también se puede observar en las tablas que los valores calculados con el algoritmo de promedios 4.20 y alturas relativas 4.22 tienen valores similares que no permiten agrupar los tipos de lesiones. Y en la tabla del algoritmo simulando una nube de puntos 4.21, sólo los valores para los cerebros sanos son mayores y más alejados que los valores de lagunaridad para los cerebros enfermos. Esto se debe a que los valores en los pixeles son muy parecidos, es decir el rango dinámico que usan de la escala de grises es muy pequeño.

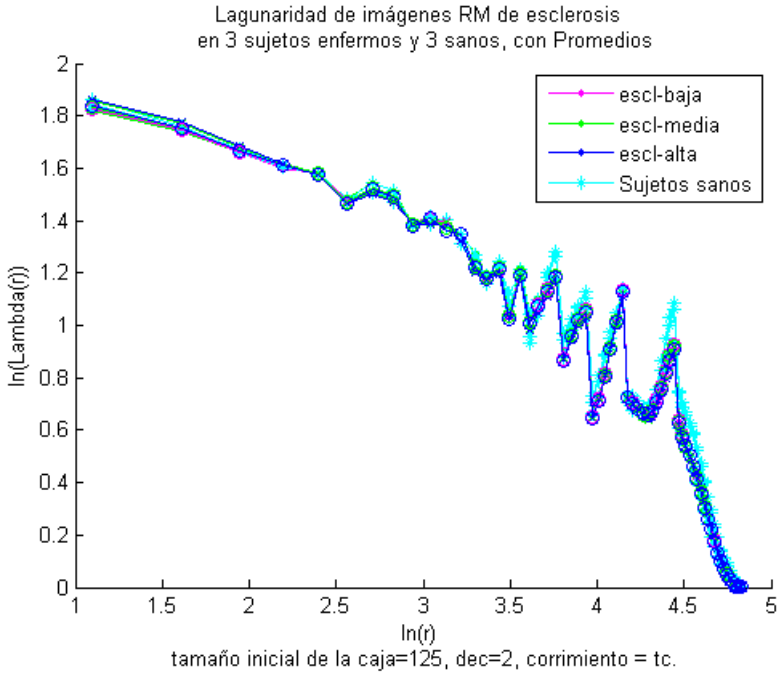
### 4.2.5. Pruebas con imágenes del nervio óptico

Imágenes del nervio óptico de cuatro sujetos obtenidas de [58], fueron usadas para analizar si el índice de lagunaridad es capaz de discriminar entre imágenes que corresponden a tres diferentes segmentaciones de la imagen original con los algoritmos de: Chaudhuri, Niemeijer y Staal. Estas imágenes se consideraron ya que los patrones ramificados de los vasos sanguíneos en la circulación de la retina humana normal son fractales y tienen una estructura auto-similar [47].

En las gráficas 4.23,4.24,4.25, se comparan los resultados de lagunaridad con los tres algoritmos de segmentación y el canal verde de la imagen original, este canal se usa ya que tiene un alto contraste entre las venas y el fondo de la imagen [58, 43]. De las gráficas se puede observar que el algoritmo de promedios separa las curvas de lagunaridad de acuerdo a los tipos de segmentación, y los otros dos algoritmos




**(a)**




**(b)**

FIGURA 4.20: **(a)**: Imágenes de RM de tres sujetos con esclerosis múltiple con tres tipos de lesiones: leve, moderada y severa, e imágenes de tres sujetos con cerebros sanos [12]. **(b)**: Lagunaridad de imágenes en escala de grises de RM de tres sujetos con esclerosis múltiple y tres sujetos sanos, cálculo basado en promedios.

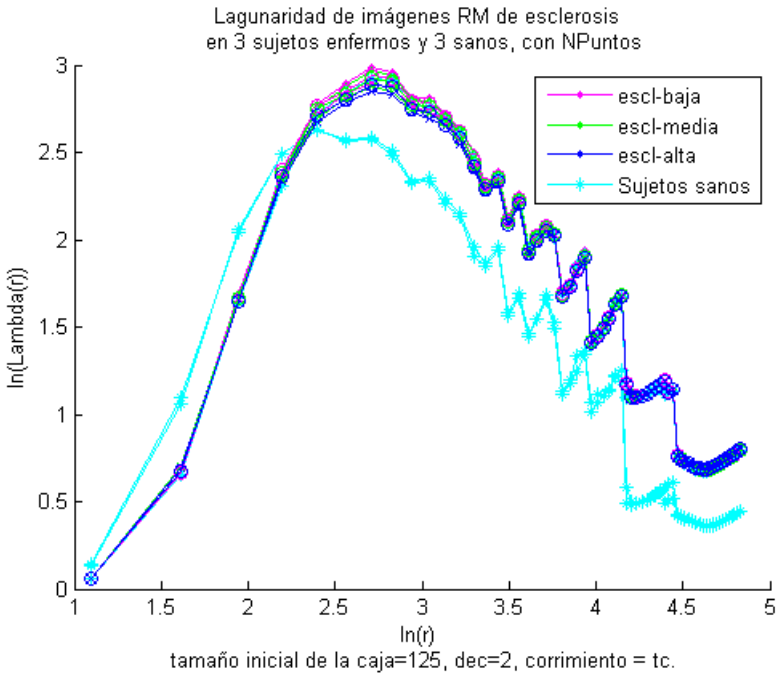



FIGURA 4.21: Lagunaridad de imágenes en escala de grises de RM de tres sujetos con esclerosis múltiple y tres sujetos sanos, cálculo basado en una nube de puntos.

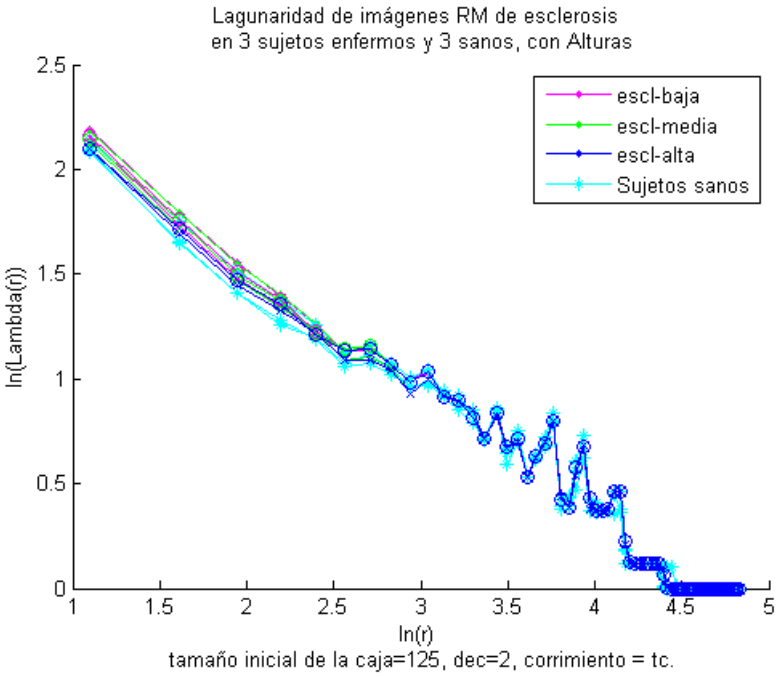



FIGURA 4.22: Lagunaridad de imágenes en escala de grises de RM de tres sujetos con esclerosis múltiple y tres sujetos sanos, cálculo basado en alturas relativas.

separan a ciertas escalas las segmentaciones de Niemeijer y Staal, pero las curvas de lagunaridad para el canal verde y la segmentación de Chaud son muy parecidas.

Revisando los valores de $\lambda$ en las tablas 4.23,4.24,4.25, se puede ver que en efecto, en la tabla del algoritmo de promedios los valores son muy parecidos en cada columna, agrupando los valores de la lagunaridad por tipo de segmentación. Sin embargo, para el algoritmo simulando una nube de puntos, los valores de la columna del canal verde son parecidos a los de la segmentación de Chaudhuri, y las segmentaciones de Niemeijer y Staal son similares numéricamente. Además, de los datos en la tabla de este algoritmo, se puede observar que se forman dos grupos de las imágenes por su rango dinámico. Para el algoritmo de alturas relativas en todas las columnas se ven resultados parecidos, lo que evita poder hacer alguna agrupación.

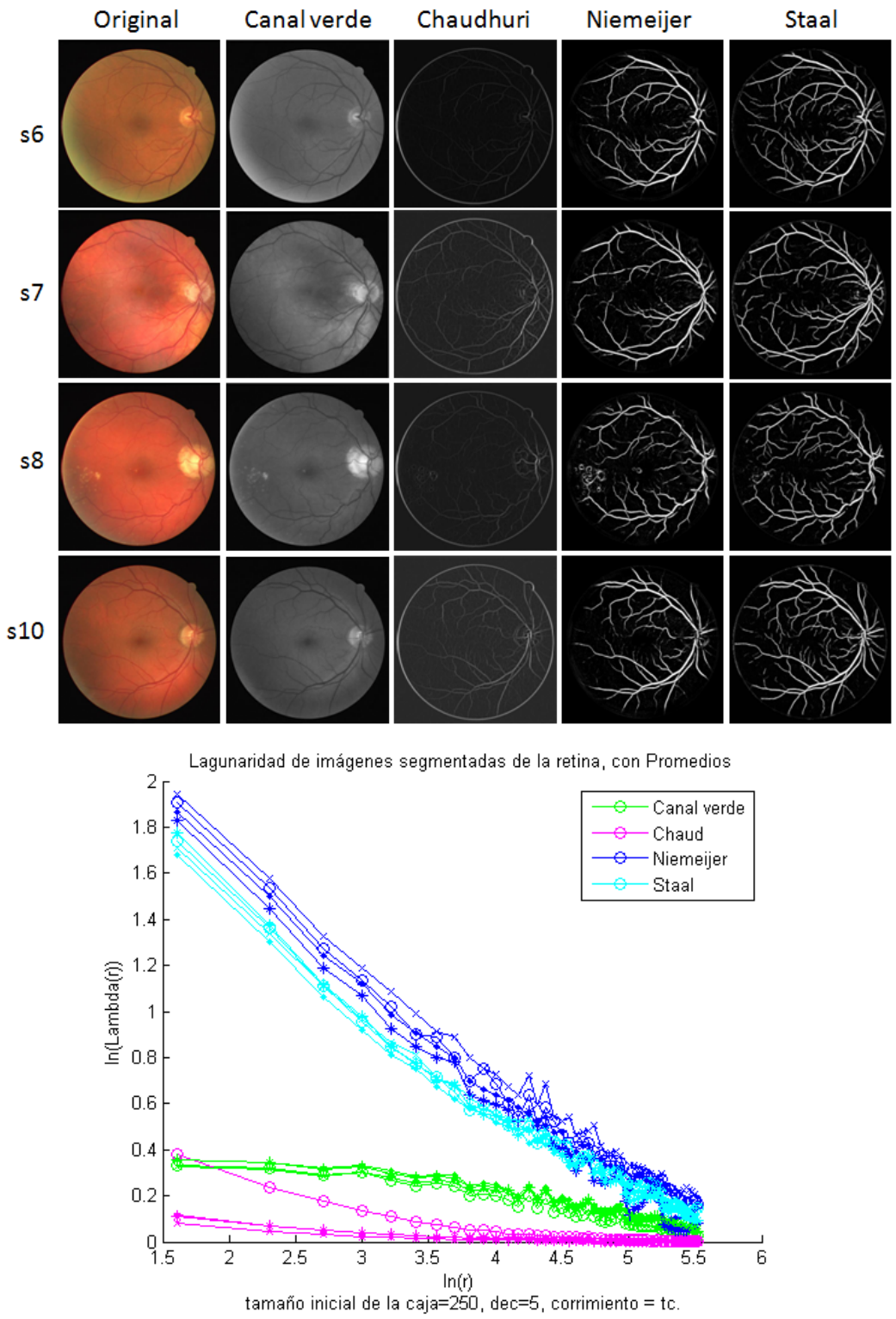



FIGURA 4.23: **Arriba**: Imágenes de la retina de cuatro sujetos, por columnas de izquierda a derecha se tienen: imagen original, canal verde de la imagen original, segmentación de Chaudhuri, segmentación de Niemeijer, y segmentación de Staal [58]. **Abajo**: Gráfica de lagunaridad calculada para tres segmentaciones y el canal verde de imágenes del nervio óptico de 4 sujetos, cálculo basado en promedios.

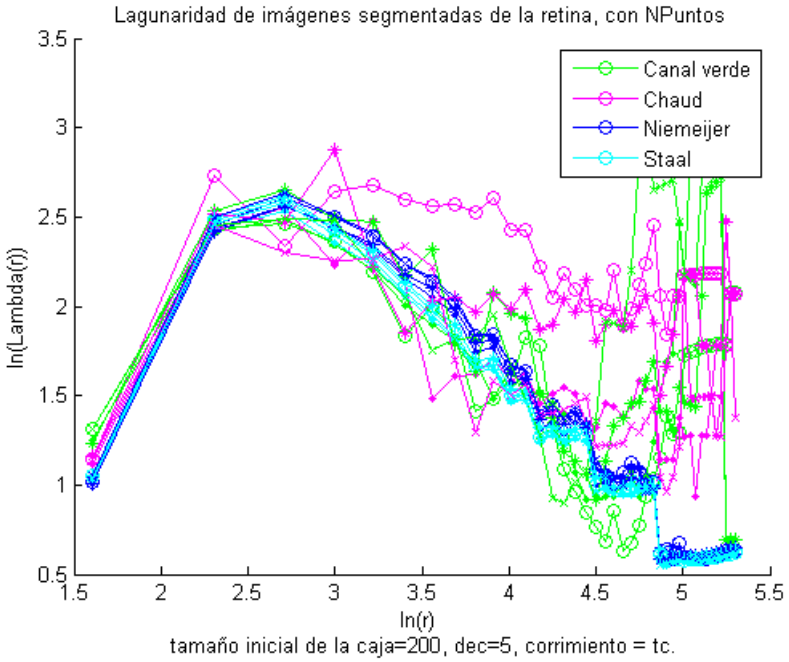



FIGURA 4.24: Gráfica de lagunaridad calculada para tres segmentaciones y el canal verde de imágenes del nervio óptico de 4 sujetos, cálculo basado en una nube de puntos.

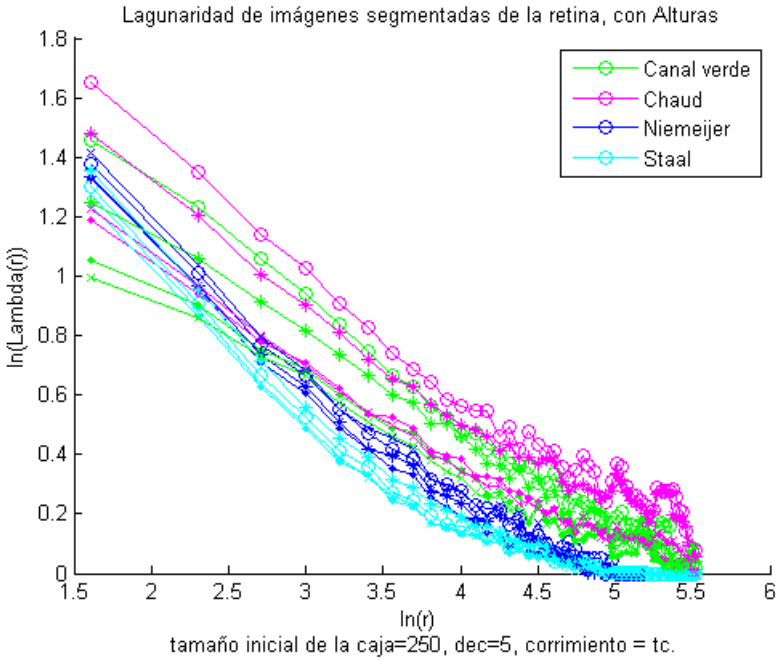



FIGURA 4.25: Gráfica de lagunaridad calculada para tres segmentaciones y el canal verde de imágenes del nervio óptico de 4 sujetos, cálculo basado en alturas relativas.

| Clase 1 | Clase2 | Clase3 |
|---|---|---|
| -0.1469 | -0.0322 | -0.0969 |
| -0.1371 | -0.0317 | -0.1254 |

Tabla 4.12: Cálculo de lagunaridad de imágenes de texturas en escala de grises, basado en alturas relativas.

| Sujeto | Sustancia Blanca | Sustancia Gris | LCR |
|---|---|---|---|
| 4 | -0.4952 | -0.4674 | -0.6301 |
| 5 | -0.4908 | -0.4735 | -0.6226 |

Tabla 4.13: Lagunaridad calculada para imágenes en escala de grises simuladas de RM de cerebros sanos de dos sujetos, basada en promedios.

| Sujeto | Sustancia Blanca | Sustancia Gris | LCR |
|---|---|---|---|
| 4 | -0.5204 | -0.5034 | -0.4781 |
| 5 | -0.5179 | -0.5094 | -0.4714 |

Tabla 4.14: Lagunaridad calculada para imágenes en escala de grises simuladas de RM de cerebros sanos de dos sujetos, basada en una nube de puntos.

| Sujeto | Sustancia Blanca | Sustancia Gris | LCR |
|---|---|---|---|
| 4 | -0.5683 | -0.4893 | -0.5545 |
| 5 | -0.5649 | -0.5005 | -0.5553 |

Tabla 4.15: Lagunaridad calculada para imágenes en escala de grises simuladas de RM de cerebros sanos de dos sujetos, basada en alturas relativas.

| Semana | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 29 32 | -0.4919 | -0.4869 | -0.4800 | -0.4716 |
| 33 36 | -0.4622 | -0.4500 | -0.4362 | -0.4222 |
| 37 40 | -0.4111 | -0.4030 | -0.3971 | -0.3923 |
| 41 44 | -0.3877 | -0.3826 | -0.3771 | -0.3703 |

Tabla 4.16: Cálculo de lagunaridad para neonatos prematuros de la semana 29 a la 32, basado en promedios.

| Semana | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 29 32 | 0.0234 | 0.0196 | 0.0146 | 0.0075 |
| 33 36 | 0.0050 | -0.0010 | -0.0021 | -0.0244 |
| 37 40 | -0.0306 | -0.0362 | -0.0347 | -0.0375 |
| 41 44 | -0.0366 | -0.0364 | -0.0359 | -0.0395 |

Tabla 4.17: Cálculo de lagunaridad para neonatos prematuros de la semana 29 a la 32, basado en una nube de puntos.

| Semana | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 29 32 | -0.7734 | -0.7675 | -0.7588 | -0.7515 |
| 33 36 | -0.7342 | -0.7240 | -0.6925 | -0.7027 |
| 37 40 | -0.6925 | -0.6896 | -0.6731 | -0.6677 |
| 41 44 | -0.6582 | -0.6514 | -0.6420 | -0.6350 |

Tabla 4.18: Cálculo de lagunaridad para neonatos prematuros de la semana 29 a la 32, basado en una nube de puntos. A diferencia de la gráfica 4.17, el valor más pequeño que puede tomar la caja para este cálculo es 10, que es donde se comienzan a separar las curvas de lagunaridad. Al igual que en la tabla de promedios 4.16, los valores van decreciendo gradualmente.

| Semana | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 29 32 | -0.5189 | -0.4548 | -0.3592 | -0.3135 |
| 33 36 | -0.5050 | -0.4340 | -0.3417 | -0.3063 |
| 37 40 | -0.4901 | -0.4112 | -0.3304 | -0.2983 |
| 41 44 | -0.4740 | -0.3847 | -0.3213 | -0.2885 |

Tabla 4.19: Cálculo de lagunaridad para neonatos prematuros de la semana 29 a la 32, basado en alturas relativas.

| Esclerosis | leve | Moderada | Severa | Sujeto Normal |
|---|---|---|---|---|
| Sujeto 1 | -0.5372 | -0.5374 | -0.5366 | -0.5116 |
| Sujeto 2 | -0.5364 | -0.5371 | -0.5376 | -0.5076 |
| Sujeto 3 | -0.5381 | -0.5393 | -0.5412 | -0.5102 |

Tabla 4.20: Cálculo de lagunaridad para imágenes de RM de tres sujetos con esclerosis múltiple y tres sujetos sanos, basado en promedios.

| Esclerosis | leve | Moderada | Severa | Sujeto Normal |
|---|---|---|---|---|
| Sujeto 1 | -0.4949 | -0.4900 | -0.4827 | -0.6337 |
| Sujeto 2 | -0.5070 | -0.5028 | -0.4931 | -0.6317 |
| Sujeto 3 | -0.5160 | -0.5116 | -0.5008 | -0.6457 |

Tabla 4.21: Cálculo de lagunaridad para imágenes de RM de tres sujetos con esclerosis múltiple y tres sujetos sanos, basado en una nube de puntos.

| Esclerosis | leve | Moderada | Severa | Sujeto Normal |
|---|---|---|---|---|
| Sujeto 1 | -0.5785 | -0.5756 | -0.5700 | -0.5616 |
| Sujeto 2 | -0.5886 | -0.5854 | -0.5784 | -0.5604 |
| Sujeto 3 | -0.5981 | -0.5977 | -0.5900 | -0.5704 |

Tabla 4.22: Cálculo de lagunaridad para imágenes de RM de tres sujetos con esclerosis múltiple y tres sujetos sanos, basado en alturas relativas.

| Sujeto | Canal verde | Chaudhuri | Niemeijer | Staal |
|---|---|---|---|---|
| 6 | -0.0928 | -0.0688 | -0.4102 | -0.3617 |
| 7 | -0.0973 | -0.0202 | -0.4239 | -0.3520 |
| 8 | -0.0984 | -0.0196 | -0.4274 | -0.3804 |
| 10 | -0.0803 | -0.0133 | -0.4223 | -0.3597 |

Tabla 4.23: Lagunaridad calculada para tres segmentaciones y el canal verde de imágenes del nervio óptico de 4 sujetos, basada en promedios.

| Sujeto | Canal verde | Chaudhuri | Niemeijer | Staal |
|---|---|---|---|---|
| 6 | -0.1782 | -0.0762 | -0.5951 | -0.5775 |
| 7 | -0.0683 | -0.1902 | -0.5826 | -0.5637 |
| 8 | -0.2116 | -0.0577 | -0.5762 | -0.5826 |
| 10 | -0.1271 | -0.2155 | -0.6117 | -0.5772 |

Tabla 4.24: Lagunaridad calculada para tres segmentaciones y el canal verde de imágenes del nervio óptico de 4 sujetos, basada en una nube de puntos.

| Sujeto | Canal verde | Chaudhuri | Niemeijer | Staal |
|---|---|---|---|---|
| 6 | -0.3551 | -0.3495 | -0.3056 | -0.2586 |
| 7 | -0.2677 | -0.2821 | -0.2816 | -0.2423 |
| 8 | -0.3149 | -0.3087 | -0.2904 | -0.2770 |
| 10 | -0.2456 | -0.2715 | -0.3163 | -0.2492 |

Tabla 4.25: Lagunaridad calculada para tres segmentaciones y el canal verde de imágenes del nervio óptico de 4 sujetos, basada en alturas relativas.

# Capítulo 5

# Conclusiones y trabajo a futuro

## 5.1. Discusión

De los resultados obtenidos en los experimentos, se puede observar que las imágenes usadas del simulador no son adecuadas para este tipo de pruebas ya que el rango dinámico que usan es muy bajo. Para el caso de cerebros sanos obteniendo el histograma de una de las imágenes (ver figura 5.1), se puede ver que la mayoría de los pixeles se concentran en dos valores de la escala de grises, y una cantidad muy pequeña de pixeles queda distribuida a lo largo del rango. Algo similar sucede con las imágenes de esclerosis múltiple tomadas del mismo simulador (ver figura 5.2). Obteniendo el histograma de dichas imágenes se observa que su rango dinámico también es bajo y los valores de lagunaridad son demasiado similares.

Contrario a las imágenes del simulador, las imágenes usadas del atlas de neonatos prematuros, dieron más información para poder diferenciar las semanas de desarrollo. Comparando también el histograma de una de éstas imágenes, se puede ver que una cantidad mayor de pixeles está distribuida a través de todo el rango dinámico (ver figura 5.3). Con esto, se puede inferir que la lagunaridad dará mejores resultados mientras mayor información tenga por tener un rango dinámico más completo.

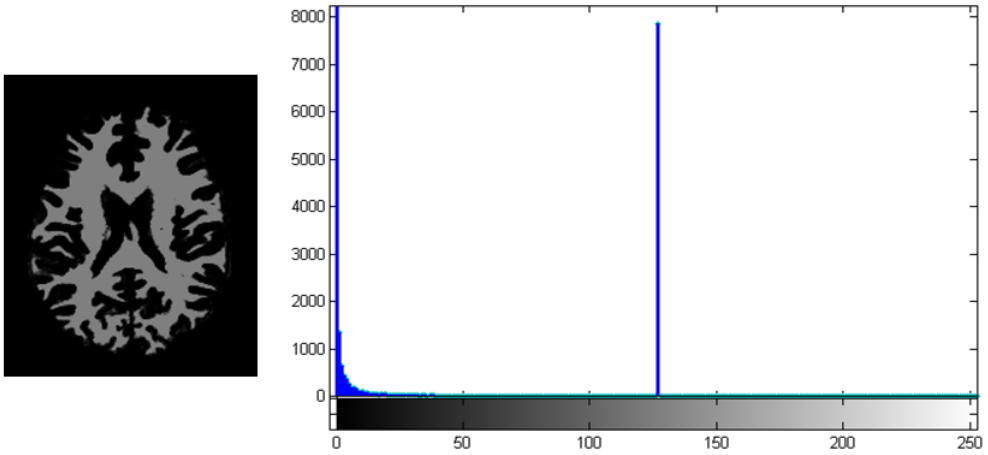



FIGURA 5.1: Histograma muestra de imágenes de cerebros sanos del simulador BrainWeb [12].

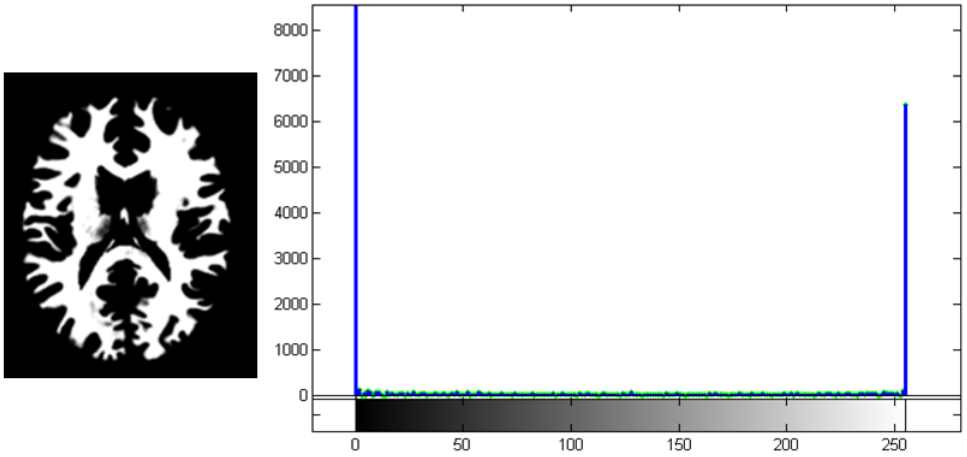



FIGURA 5.2: Histograma muestra de imágenes de cerebros son esclerosis múltiple del simulador BrainWeb [12].

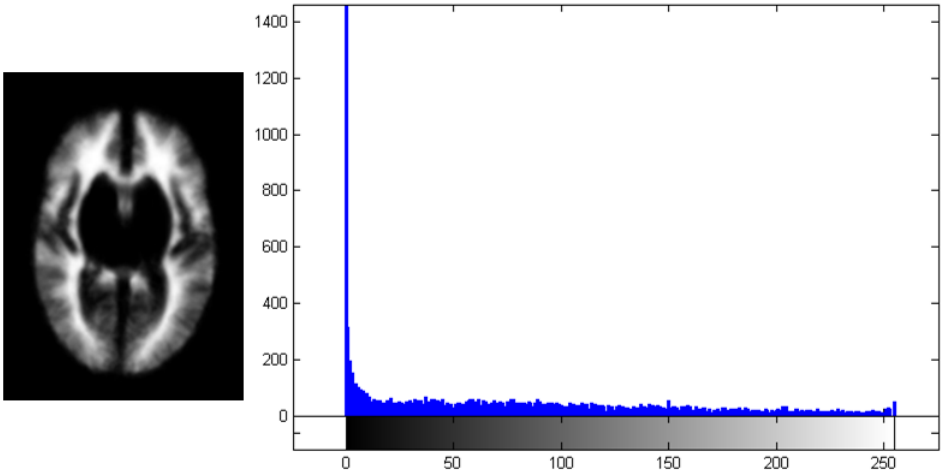



FIGURA 5.3: Histograma muestra de imágenes de cerebros de neonatos prematuros, obtenidas de [41].

Trabajando con imágenes binarias, al realizar las pruebas base de Plotnick et al. [55] usando mapas simulados se comprueba que la lagunaridad es una medida de la textura de un conjunto o imagen (ver sección 4.1). Tomando imágenes de curvas llenando el espacio de Hilbert, también se confirma que la lagunaridad es un índice que mide el grado en que un fractal llena un espacio acotado. Este experimento se realizó como una primera prueba para ejemplificar la analogía de este tipo de curvas con la forma del cerebro. Al usar imágenes binarias simuladas de cerebros sanos (ver experimentos en 4.1), la lagunaridad es capaz de discriminar entre las segmentaciones de sustancia blanca, sustancia gris y líquido cefalorraquídeo.

De los primeros experimentos utilizando imágenes en escala de grises del libro de texturas Brodatz, se puede decir que la definición dada en Plotnick et al. [55], de considerar la lagunaridad como una medida de la desviación de un objeto geométrico de ser invariante translacionalmente, se cumple. Esto se ve reflejado en las gráficas de las texturas (ver figuras 1.2.3), donde puede verse que la clase1 (líneas verdes) y la clase3 (líneas rosas) son más similares entre ellas que con la clase2 (líneas azules). Este hecho se debe a que con tamaños pequeños de caja el patrón en esos casos no se nota hasta que dicho tamaño aumenta, mientras que en el caso de la clase2 con una escala pequeña el patrón puede ser distinguido fácilmente.

Al probar con imágenes de RM en el plano axial de cerebros sanos, el cálculo de lagunaridad con promedios dio mejores resultados. En el caso de imágenes de RM de la sustancia blanca en el plano axial de neonatos prematuros los tres algoritmos detectaron los cambios en la lagunaridad en cada semana. Sin embargo, para el caso de las imágenes de RM de esclerosis múltiple en las que las lesiones afectan una región o zona específica y no son muy notorias, los algoritmos no son capaces de detectar cambios pequeños en este tipo de imágenes.

En los últimos experimentos realizados con imágenes de la retina, el algoritmo de promedios y el que simula una nube de puntos hacen cuatro y dos grupos de acuerdo a los valores de lagunaridad obtenidos, ya que ambos hacen mejor uso del rango dinámico en las imágenes.

## 5.2. Conclusiones

La lagunaridad es una medida fractal que mide cuán bien llena un fractal el espacio, y su cálculo es con respecto a la variación de la función de distribución de frecuencias de masa de un patrón dado. En esta distribución, mientras la masa promedio disminuya la lagunaridad aumenta, su coeficiente de variación es más grande, e indica que la imágen o conjunto a analizar es disperso o heterogéneo. De lo contrario es denso u homogéneo, es decir, es más invariante translacionalmente.

En este trabajo se implementó el algoritmo de la caja deslizante para imágenes binarias, y así poder analizar esta propiedad fractal y analizar su comportamiento en imágenes médicas con objetos fractales. El algoritmo propuesto por Allain and Cloitre [4], inicialmente se diseñó para imágenes binarias, pero en la literatura se encuentran adaptaciones de éste para aplicarlo a imágenes en escala de grises de los cuales se implementaron tres: con promedios, alturas relativas y simulando una nube de puntos. La diferencia en estos algoritmos recae en la forma en la que se hace el cálculo de la masa de la caja deslizante.

Así que con imágenes del simulador utilizado, donde no se tiene suficiente información en la imágen para que los algoritmos trabajen correctamente, la lagunaridad no es una medida muy sensible para detectar estos cambios y discriminar entre tipos de estructuras y niveles de lesiones por enfermedad.

El índice de lagunaridad detecta cambios tanto en las estructuras (SB, SG y LCR) como en el desarrollo del cerebro (por ejemplo, en neonatos), sin embargo, también se necesita la colaboración de médicos expertos que puedan hacer un análisis de la relación numérica con datos reales, en busca de una aplicación más definida en el contexto médico.

Con las pruebas realizadas también se confirma que la lagunaridad es una buena medida para discriminar imágenes con diferentes de texturas de patrones fractales o no fractales y, al ser una medida dependiente de la escala, su análisis puede realizarse en rangos específicos de los tamaños de caja, como se hizo con las imágenes de texturas y las imágenes de neonatos.

## 5.3. Trabajo a futuro

Como trabajo a futuro se pretende usar el índice de lagunaridad para analizar imágenes de RM de sujetos reales, mismas que no fueron probadas en este trabajo ya que es difícil obtenerlas y además requieren ser segmentadas, lo que implica mayor tiempo. Se espera que con imágenes de mejor resolución y mayor rango dinámico se puedan obtener mejores resultados, y la lagunaridad pueda ser probada de manera global en la imagen o por regiones, ya que algunas enfermedades se dan en zonas específicas del cerebro. Por ejemplo, aunque para el caso de las pruebas con esclerósis múltiple el método no es muy sensible, se requiere la ayuda de especialistas que den orientación de dichas regiones específicas donde se puede trabajar para que los cambios por el daño de la enfermedad sean detectados. Algo similar puede ser probado con imágenes de RM de pacientes con Alzheimer.

Se pretende trabajar también con imágenes de otro tipo, como imágenes satelitales donde la lagunaridad pueda dar información de heterogeneidad urbana y con otros patrones fractales. Para complementar el análisis, se espera también obtener el índice $\lambda$ ajustando una hipérbola o una exponencial, y también hacer una normalización a los valores de $\Lambda$ [56, 17, 16].

Otra posible dirección para extender el trabajo es probar el concepto de los descriptores de lagunaridad presentado en [19], donde se utiliza la medida de lagunaridad para crear una manera alternativa de describir la textura de las imágenes.

Finalmente, se puede extender este análisis a imágenes en tres dimensiones adaptando el algoritmo simulando una nube de puntos. En [15] se menciona otra medida fractal denominada sucolaridad que complementa a la dimensión fractal y a la lagunaridad, por lo que se puede explorar su uso en imágenes médicas.

# Bibliografía


[1] Enfermedades degenerativas. `http://www.discapacidadonline.com/enfermedadesdegenerativas.html`, Junio 2010.

[2] P.S. Addison. *Fractals and Chaos: An illustrated course.* Taylor & Francis, 1997.

[3] P.S. Addison. *Fractals and Chaos: An illustrated course.* Taylor & Francis, 2002.

[4] C. Allain and M. Cloitre. Characterizing the lacunarity of random and deterministic fractal sets. *Phys. Rev. A*, 44:3552–3558, Sep 1991.

[5] Daniel Alejandro Valdés Amaro. Statistical shape analysis for bio-structures : local shape modelling, techniques and applications. October 2009.

[6] MNM Barros Filho and FJA Sobreira. Accuracy of lacunarity algorithms in texture classification of high spatial resolution images from urban areas. In *XXI Congress of International Society of Photogrammetry and Remote Sensing*, 2008.

[7] Christopher C. Barton, Shaun Lovejoy, Daniel J. Schertzer, and Donald L. Turcotte. Benoit b. mandelbrot (19242010). *Eos, Transactions American Geophysical Union*, 93(4):44–44, 2012.

[8] Joydeep Bhattacharya, Jessica Edwards, Adam Mamelak, and ErinM. Schuamn. Ongoing hippocampal neuronal activity in human: Is it noise or correlated fractal process? In Gabriele A. Losa, Danilo Merlini, Theo F. Nonnenmacher, and Ewald R. Weibel, editors, *Fractals in Biology and Medicine*,

Mathematics and Biosciences in Interaction, pages 95–106. Birkhuser Basel, 2005.

[9] P. Brodatz. *Textures: A Photographic Album for Artists and Designers*. Dover photography collections. Dover Publications, 1966.

[10] Victoria Castro, Héctor Gómez, Jesús Negrete, and Tapia Roberto. Las enfermedades crónicas en las personas de 60-69 años. *Salud Pública*, 38:438–447, 1996.

[11] L. Ciompi and M. Baatz. Do mental and social processes have a self-similar structure? the hypothesis of fractal affect-logic. In GabrieleA. Losa, Danilo Merlini, TheoF. Nonnenmacher, and EwaldR. Weibel, editors, *Fractals in Biology and Medicine*, Mathematics and Biosciences in Interaction, pages 107–119. Birkhuser Basel, 2005.

[12] Chris A. Cocosco, Vasken Kollokian, Remi K.-S. Kwan, G. Bruce Pike, and Alan C. Evans. Brainweb: Online interface to a 3d mri simulated brain database. *NeuroImage*, 5:425, 1997.

[13] José Ángel Córdova-Villalobos, Jorge Armando Barriguete-Meléndez, Agustín Lara-Esqueda, Simón Barquera, Martín Rosas-Peralta, Mauricio Hernández-Ávila, María Eugenia de León-May, and Carlos A Aguilar-Salinas. Las enfermedades crónicas no transmisibles en méxico: sinopsis epidemiológica y prevención integral. *Salud Pública de México*, 50:419 – 427, 10 2008.

[14] M.R.T. Dale. Lacunarity analysis of spatial pattern: A comparison. *Landscape Ecology*, 15:467–478, 2000.

[15] Rafael Heitor Correia de Melo. Using fractal characteristics such as fractal dimension , lacunarity and succolarity to characterize texture patterns on images. Agosto 2007.

[16] Geoff Dougherty. *Medical Image Processing*. Springer, 2011.

[17] Geoffrey Dougherty and Geoffrey M. Henebry. Fractal signature and lacunarity in the measurement of the texture of trabecular bone in clinical {CT} images. *Medical Engineering Physics*, 23(6):369 – 380, 2001.

[18] K. Falconer. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. Wiley, 2013.

[19] João Batista Florindo and Odemir Martinez Bruno. Texture classification based on lacunarity descriptors. In Abderrahim Elmoataz, Driss Mammass, Olivier Lezoray, Fathallah Nouboud, and Driss Aboutajdine, editors, *Image and Signal Processing*, volume 7340 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 513–520. Springer Berlin Heidelberg, 2012.

[20] Teoría del caos, hacia el conocimiento de la realidad. `http://www.iac.es/gabinete/difus/ciencia/silbia/c3.htm`.

[21] Fractales en su aula. `http://www.cientec.or.cr/matematica/fractales.html`, 2001.

[22] Benoit mandelbrot fractal art contest 2006. `http://www.fractalartcontests.com/2006/`, 2006.

[23] Benoit mandelbrot fractal art contest 2007. `http://www.fractalartcontests.com/2007/`, 2007.

[24] Síntomas, atractores y fractales. `http://pacotraver.wordpress.com/2008/11/13/sintomas-atractores-y-fractales/`, Nov 2008.

[25] Benoit mandelbrot fractal art contest 2009. `http://www.fractalartcontests.com/2009/`, 2009.

[26] La ciencia de la complejidad. `http://fractalesphinito.blogspot.mx/`, 2009.

[27] Benoit mandelbrot fractal art contest 2011. `http://www.fractalartcontests.com/2011/`, 2011.

[28] S. L. Free, S. M. Sisodiya, M. J. Cook, D. R. Fish, and S. D. Shorvon. Three-dimensional fractal analysis of the white matter surface from magnetic resonance images of the human brain. *Cerebral Cortex*, 6(6):830–836, 1996.

[29] Yuval Gefen, Yigal Meir, Benoit B. Mandelbrot, and Amnon Aharony. Geometric implementation of hypercubic lattices with noninteger dimensionality by use of low lacunarity fractal lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 50:145–148, Jan 1983.

[30] Ary L Goldberger and Bruce J West. Fractals in physiology and medicine. *The Yale journal of biology and medicine*, 60(5):421, 1987.

[31] César A González and Roberto Ham-Chande. Funcionalidad y salud: una tipología del envejecimiento en México. *Salud Pública de México*, 49:S448 – S458, 2007.

[32] Tae Hyon Ha, Uicheul Yoon, Kyung Jin Lee, Yong Wook Shin, Jong-Min Lee, In Young Kim, Kyoo Seob Ha, Sun I. Kim, and Jun Soo Kwon. Fractal dimension of cerebral cortical surface in schizophrenia and obsessive-compulsive disorder. *Neuroscience Letters*, 384(12):172 – 176, 2005.

[33] Surani Anuradha Jayasuriya and Alan Wee-Chung Liew. Fractal analysis for symmetry plane detection in neuroimages. In João M. Sanches, Luisa Micó, and Jaime S. Cardoso, editors, *Pattern Recognition and Image Analysis*, volume 7887 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 181–188. Springer Berlin Heidelberg, 2013.

[34] H.F. Jelinek, N. Elston, and B. Zietsch. Fractal analysis: Pitfalls and revelations in neuroscience. In Gabriele A. Losa, Danilo Merlini, Theo F. Nonnenmacher, and Ewald R. Weibel, editors, *Fractals in Biology and Medicine*, Mathematics and Biosciences in Interaction, pages 85–94. Birkhuser Basel, 2005.

[35] Audrey Karperien, Herbert Jelinek, and Nebojsa Milosevic. Reviewing lacunarity analysis and classification of microglia in neuroscience. In *European Congress of Mathematics and Theoretical Biology*, 2011.

[36] Kemal Ihsan Kilic and Rahib Hidayat Abiyev. Exploiting the synergy between fractal dimension and lacunarity for improved texture recognition. *Signal Processing*, 91(10):2332 – 2344, 2011.

[37] A.P. Kirilyuk. Complex-dynamical extension of the fractal paradigm and its applications in life sciences. In Gabriele A. Losa, Danilo Merlini, Theo F. Nonnenmacher, and Ewald R. Weibel, editors, *Fractals in Biology and Medicine*, Mathematics and Biosciences in Interaction, pages 233–244. Birkhäuser Basel, 2005.

[38] Valerij G. Kiselev, Klaus R. Hahn, and Dorothee P. Auer. Is the brain cortex a fractal? *NeuroImage*, 20(3):1765 – 1774, 2003.

[39] D. Kontos, V. Megalooikonomou, N. Ghubade, and C. Faloutsos. Detecting discriminative functional MRI activation patterns using space filling curves. In *Engineering in Medicine and Biology Society, 2003. Proceedings of the 25th Annual International Conference of the IEEE*, volume 1, pages 963–966 Vol.1, Sept 2003.

[40] S.H. Koslow, S. Subramaniam, and S.P. Subramaniam. *Databasing the brain: from data to knowledge (neuroinformatics)*. Wiley-Liss, 2005.

[41] Maria Kuklisova-Murgasova, Paul Aljabar, Latha Srinivasan, Serena J. Counsell, Valentina Doria, Ahmed Serag, Ioannis S. Gousias, James P. Boardman, Mary A. Rutherford, A. David Edwards, Joseph V. Hajnal, and Daniel Rueckert. A dynamic 4d probabilistic atlas of the developing brain. *NeuroImage*, 54(4):2750 – 2763, 2011.

[42] M. Latka, M. Turalska, D. Kolodziej, D. Latka, B. Goldstein, and B.J. West. Scaling properties of cerebral hemodynamics. In Gabriele A. Losa, Danilo Merlini, Theo F. Nonnenmacher, and Ewald R. Weibel, editors, *Fractals in Biology and Medicine*, Mathematics and Biosciences in Interaction, pages 121–129. Birkhäuser Basel, 2005.

[43] S.S. Lee, M. Rajeswari, D. Ramachandram, and B. Shaharuddin. Screening of diabetic retinopathy - automatic segmentation of optic disc in colour fundus

images. In *Distributed Frameworks for Multimedia Applications, 2006. The 2nd International Conference on*, pages 1–7, May 2006.

[44] N. Lesmoir-Gordon. *The Colours of Infinity: The Beauty and Power of Fractals*. Springer, 2010.

[45] Jing Z. Liu, Lu D. Zhang, and Guang H. Yue. Fractal dimension in human cerebellum measured by magnetic resonance imaging. *Biophysical Journal*, 85(6):4041 – 4046, 2003.

[46] B.B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. Henry Holt and Company, 1983.

[47] Barry R. Masters. Fractal analysis of the vascular tree in the human retina. *Annual Review of Biomedical Engineering*, 6(1):427–452, 2004. PMID: 15255776.

[48] Medidas de dispersión. `http://es.wikipedia.org/wiki/Medidas_de_dispersi%C3%B3n`, Nov 2014.

[49] Soe W. Myint, Victor Mesev, and Nina Lam. Urban textural analysis from remote sensor data: Lacunarity measurements based on the differential box counting method. *Geographical Analysis*, 38(4):371–390, 2006.

[50] 10 datos sobre las enfermedades no transmisibles. `http://www.who.int/features/factfiles/noncommunicable_diseases/es/`, Marzo 2013.

[51] Datos y cifras, enfermedades no transmisibles (ent). `http://www.who.int/features/factfiles/noncommunicable_diseases/facts/es/`, Marzo 2013.

[52] Enfermedades no transmisibles. `http://www.who.int/mediacentre/factsheets/fs355/es/`, Marzo 2013.

[53] H.O. Peitgen, H. Jürgens, and D. Saupe. *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*. Springer, 2004.

[54] Roy E. Plotnick, Robert H. Gardner, William W. Hargrove, Karen Prestegaard, and Martin Perlmutter. Lacunarity analysis: A general technique for the analysis of spatial patterns. *Phys. Rev. E*, 53:5461–5468, May 1996.

[55] Roy E. Plotnick, Robert H. Gardner, and Robert V. O'Neill. Lacunarity indices as measures of landscape texture. *Landscape Ecology*, 8(3):201–211, 1993.

[56] Ankur Roy, Edmund Perfect, William M. Dunne, Noelle Odling, and Jung-Woo Kim. Lacunarity analysis of fracture networks: Evidence for scale-dependent clustering. *Journal of Structural Geology*, 32(10):1444 – 1449, 2010.

[57] Space-filling curve. `http://en.wikipedia.org/wiki/Space-filling_curve`, 2014.

[58] J. Staal, M.D. Abramoff, M. Niemeijer, M.A. Viergever, and B. van Ginneken. Ridge-based vessel segmentation in color images of the retina. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 23(4):501–509, April 2004.

[59] Mario O. Suárez Ibujes and Fausto A. Tapia Zambrano. *Interaprendizaje de Estadística Básica*. Universidad Técnica del Norte, 2013.

[60] Ewald R. Weibel. Mandelbrots fractals and the geometry of life: A tribute to benot mandelbrot on his 80th birthday. In Gabriele A. Losa, Danilo Merlini, Theo F. Nonnenmacher, and Ewald R. Weibel, editors, *Fractals in Biology and Medicine*, Mathematics and Biosciences in Interaction, pages 3–16. Birkhuser Basel, 2005.

[61] A. Zaia, R. Eleonori, P. Maponi, R. Rossi, and Roberto Murri. Medical imaging and osteoporosis: fractal's lacunarity analysis of trabecular bone in mr images. In *Computer-Based Medical Systems, 2005. Proceedings. 18th IEEE Symposium on*, pages 3–8, June 2005.

[62] Luduan Zhang, Jing Z. Liu, David Dean, Vinod Sahgal, and Guang H. Yue. A three-dimensional fractal analysis method for quantifying white matter

structure in human brain. *Journal of Neuroscience Methods*, 150(2):242 – 253, 2006.