



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Entrelazamiento y teleportación cuántica en sistemas  
multiniveles

Tesis presentada al

**Colegio de Física**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**LICENCIADO EN FÍSICA APLICADA**

por

Miguel Armando Tenorio Suñer

Asesorado por

Dr. Juan Mauricio Torres González

Puebla Pue.  
Enero de 2021





Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Entrelazamiento y teleportación cuántica en sistemas  
multiniveles

Tesis presentada al

**Colegio de Física**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**LICENCIADO EN FÍSICA APLICADA**

por

Miguel Armando Tenorio Suñer

Asesorado por

Dr. Juan Mauricio Torres González

Puebla Pue.  
Enero de 2021



**Título:** Entrelazamiento y teleportación cuántica en sistemas multiniveles

**Estudiante:** MIGUEL ARMANDO TENORIO SUÑER

COMITÉ

---

Cupatitzio Ramírez Romero  
Presidente

---

María del Rosario Pastrana Sánchez  
Secretario

---

Germán Luna Acosta  
Vocal

---

José Antonio Méndez Bermúdez  
Vocal

---

Dr. Juan Mauricio Torres González  
Asesor

## Agradecimientos

En agradecimiento a mis padres Miguel Ángel Tenorio Vélez y Angélica Suñer Amador, por brindarme la formación necesaria para convertirme en la persona que soy en la actualidad.

En agradecimiento a mi hermana Laura Angélica Tenorio Suñer, quien me motiva a superarme cada día.

En agradecimiento a mis abuelos Armando Suñer Castillo y Evangelina Amador Ramos, quienes día con día muestran lo orgullosos que están con cada paso que doy hacia cumplir mis objetivos.

En agradecimiento a mi tío Jorge Salcedo Suñer, quien siempre está al pendiente de mis logros y me ofrece su apoyo siempre que lo necesite.

En memoria de Jorge Abraham Tenorio Vélez y Jesús Tenorio Márquez.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Conceptos básicos</b>	<b>3</b>
1.1. Definiciones . . . . .	3
1.2. Descomposición de Schmidt . . . . .	6
1.3. Descomposición en valores singulares . . . . .	6
1.4. Descomposición de Schmidt de dos qubits . . . . .	7
1.5. Operador de densidad . . . . .	8
1.6. Operador de densidad reducido . . . . .	9
<b>2. Entrelazamiento cuántico</b>	<b>11</b>
2.1. Pureza . . . . .	11
2.2. Entropía lineal . . . . .	13
2.3. Entropía de Von Neumann . . . . .	14
2.4. Concurrencia de estados puros . . . . .	16
2.5. Estados de Bell con qubits . . . . .	17
2.6. Estados de Bell con qutrits . . . . .	18
2.7. Estados de Bell con sistemas multiniveles . . . . .	19
2.8. Entrelazamiento de estados mixtos . . . . .	21
<b>3. Hacia una generalización de la concurrencia</b>	<b>27</b>
3.1. Sistema de dos qubits . . . . .	27
3.2. Sistema de dos qutrits . . . . .	29
3.3. Sistemas multiniveles . . . . .	33
<b>4. Entrelazamiento cuántico como recurso</b>	<b>35</b>
4.1. Teleportación 2-dimensional . . . . .	35
4.2. Teleportación cuántica en altas dimensiones (qudits) . . . . .	37
<b>Conclusiones</b>	<b>39</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>41</b>



# Índice de figuras

1.1. Esfera de Bloch. el estado $\psi$ se encuentra sobre la superficie de la esfera unitaria y es de la forma de la ecuación (1.1). $\theta$ y $\phi$ permiten representar el estado como un vector en coordenadas esféricas. Figura tomada de [5] . . . . .	4
2.1. Visualización de estados puros y mixtos en la esfera de Bloch [13]. . . . .	12
2.2. Gráfico de la pureza del operador de densidad reducido del sistema A, obtenido de la ecuación (2.12) . . . . .	13
2.3. Entropía lineal obtenida a partir de la ecuación (2.15). Gracias al factor de normalización, se obtiene una función monótonamente creciente de 0 a 1. . . . .	14
2.4. Gráfico de la entropía de entrelazamiento. La función es la descrita en la ecuación (2.23) . . . . .	16
2.5. Concurrencia de un estado puro arbitrario. La gráfica muestra la concurrencia descrita en la ecuación (2.26) . . . . .	17
2.6. Representación gráfica de la ecuación (2.67), donde la concurrencia C está en función de los coeficientes $\mu$ y $\eta$ . . . . .	25
3.1. Gráfico del estado $ \mu\rangle = \sqrt{\mu} 00\rangle + \sqrt{1-\mu} 11\rangle$ : a) $4 \text{ Det}[\tilde{A}]$ , b) concurrencia $C(\psi)$	29
3.2. Entropía de entrelazamiento descrita en la ecuación (3.20) . . . . .	31
3.3. Gráficas del estado de la ecuación (3.19): a) pureza del estado, con un límite inferior $\frac{1}{3}$ para los operadores de densidad reducidos de un estado de entrelazamiento máximo; b) determinante de la matriz A, con límite superior $\frac{1}{3^2}$ . . . . .	32



# Introducción

Durante las primeras décadas del siglo pasado, el desarrollo de la mecánica cuántica, su naturaleza probabilística y la aparición de fenómenos sin análogo clásico, llevaron a una serie de debates entre grandes científicos de renombre tales como Albert Einstein, Erwin Schrödinger, Niels Bohr, Werner Heisenberg, entre otros. Propiedades como la superposición y el entrelazamiento cuántico llevaron a creer que la teoría cuántica podría no ser una teoría completa (la famosa paradoja EPR) y podía presentar variables ocultas que definían el comportamiento del sistema [1]. En 1964, el problema de variables ocultas fue resuelto por John Bell [2]. A partir de esta década, se comenzó una etapa de profundización teórica y una búsqueda de aplicaciones tecnológicas que permitieran mejorar la capacidad de experimentación y al mismo tiempo otras que permitan desarrollar tecnología utilizada en la vida cotidiana.

A pesar de que estos avances han sido considerables, siguen existiendo problemas tanto teóricos como experimentales que se deben resolver para obtener un entendimiento más completo de la naturaleza y por tanto, culminar su estudio y comenzar un futuro desarrollo de tecnologías emergentes. Un problema que se presenta en la actualidad está relacionado al entrelazamiento cuántico, fenómeno que, a pesar de que se tiene comprensión sobre él, aún presenta incógnitas sobre su comportamiento y asimismo presenta retos al aplicarlo a distintas áreas. El problema surge cuando se busca una medida teórica de qué tan entrelazado se encuentra un sistema de dos partículas. Existe una solución sencilla para el caso de estados puros en cualquier dimensión, mas no existe una solución para estados mixtos de dimensión mayor a 2 de manera explícita. Este problema es importante de abordar debido a que nos permitiría comprender mejor la naturaleza misma de este fenómeno, lo cual conllevaría una mejora considerable en la forma de aplicarlo a distintas áreas como criptografía, biología, comunicaciones, entre otros. Un ejemplo de implementación del entrelazamiento cuántico en el área de comunicaciones es la teleportación cuántica. La teleportación cuántica de qubits es bien conocida de forma teórica desde hace tiempo, pero no ha sido hasta los últimos años en los que se ha realizado el protocolo de manera experimental con éxito. Debido a esto, se ha estudiado el protocolo aplicado para altas dimensiones (o qudits) para dar un paso más allá, lográndose realizar para qutrits hace tan sólo un año [3]. El problema de esta aplicación es que el arreglo experimental que presenta aún es complejo, y conforme aumenten las dimensiones, esta complejidad aumentará igualmente. Por otra parte, el implementar el uso de qudits en protocolos de comunicaciones implica que el sistema no sólo será capaz de enviar una mayor cantidad de información sino que será más robusto que en el caso de un protocolo de qubits [4]. El problema sobre qué tan entrelazado se encuentra un sistema de dos partículas y el problema de la teleportación cuántica en altas dimensiones son los que se abordarán en este trabajo.

Esta tesis se divide en cuatro capítulos: el capítulo 1 se enfocará en realizar una revisión de conceptos utilizados en computación cuántica. Dentro de este capítulo también se abordan algunos teoremas que servirán durante el desarrollo de los capítulos subsecuentes. El capítulo 2 aborda el estudio de sistemas entrelazados, así como el problema de la medición del entrelazamiento de sistemas puros de dimensión mayor a 2. Para esto se realiza un repaso acerca de lo que son los estados de Bell y la solución de la medición de entrelazamiento de sistemas de dos qubits. En el capítulo 3, se estudia a profundidad la entropía de entrelazamiento para sistemas de dos qubits, dos qutrits y dos qudits, con el objetivo de mostrar las dificultades de definir la concurrencia para sistemas de dimensiones mayores a 2, lo cual sigue siendo un problema abierto. Finalmente, el capítulo 4 se enfoca en la teleportación cuántica, comenzando por el protocolo para qubits y finalizando con el protocolo para qudits, donde se elabora un circuito cuántico análogo al circuito de 2 dimensiones identificando la estructura de las compuertas correspondientes.

Existen dos objetivos principales en este trabajo de tesis: estudiar a detalle la generalización del protocolo de teleportación cuántica y encontrar un circuito cuántico que corresponda a dicha generalización y sea análogo al caso del protocolo de qubits; y analizar el problema de generalizar la medida de entrelazamiento para estados mixtos de dos qudits que debido a que sigue siendo un problema abierto, se busca identificar las dificultades que impiden la resolución del problema.

# Capítulo 1

## Conceptos básicos

Tomaremos como punto de partida un conjunto de definiciones acerca de conceptos básicos del área de computación cuántica. Estos conceptos brindarán la base que se necesita para desarrollar los siguientes capítulos. El concepto principal por el que se requiere comenzar es por definir la unidad fundamental que se utilizará, la cual tiene un análogo ampliamente utilizado en computación clásica conocido como bit.

### 1.1. Definiciones

- Bit: el bit es un concepto fundamental en computación e información clásica que representa la unidad mínima de información en computación clásica. El bit puede adquirir valores de 0 ó 1, y es representado como una compuerta abierta (que representa el valor 1) o cerrada (que representa el valor 0). En la computadoras modernas, los dispositivos electrónicos encargados de actuar como compuertas son los transistores, los cuales permiten o no el paso de corriente eléctrica dependiendo del valor del bit.
- Qubit: abreviatura de quantum bit. Como se mencionó al principio del capítulo, es un concepto análogo al bit clásico. El qubit es un sistema cuántico de dos niveles (o dimensiones) cuya principal diferencia respecto al bit clásico es que el qubit no sólo puede adquirir valores 0 ó 1, sino que debido a que el qubit puede ser representado como un vector de estado, puede tener un valor definido como una combinación lineal de ambos estados  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$ ; es decir,

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad (1.1)$$

con  $\alpha$  y  $\beta$  definidos como números complejos con la propiedad de que  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ ;  $|\alpha|^2$  y  $|\beta|^2$  denotan la probabilidad de obtener ya sea el estado  $|0\rangle$  ó el estado  $|1\rangle$  al realizar una medición, y siendo  $|\cdot\rangle$  la notación de Dirac para definir vectores de estado. Debido a que es un sistema cuántico, este puede ser representado físicamente de distintas maneras como por medio del spin de una partícula, o utilizando un átomo con un estado base y un estado excitado, entre otras. Por convención, podemos representar a los estados  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  de forma matricial de la siguiente forma

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

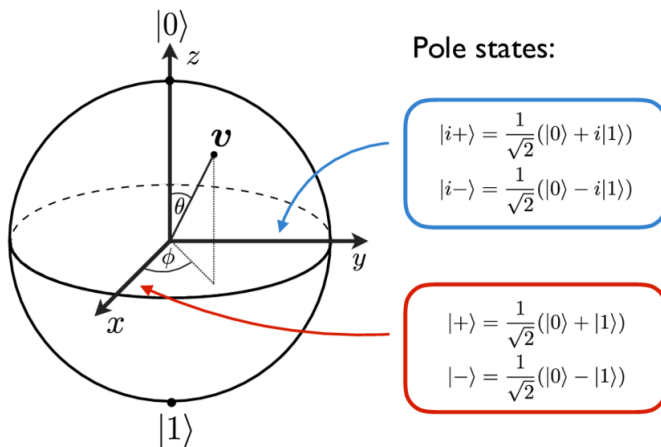


Figura 1.1: Esfera de Bloch. el estado  $v$  se encuentra sobre la superficie de la esfera unitaria y es de la forma de la ecuación (1.1).  $\theta$  y  $\phi$  permiten representar el estado como un vector en coordenadas esféricas. Figura tomada de [5]

- Esfera de Bloch: la esfera de Bloch es una esfera unitaria que permite obtener una representación geométrica de un qubit. Cualquier estado de la forma de la ecuación (1.1) se representa sobre la superficie de la esfera de Bloch como puede verse en la figura 1.1. Todo estado cuya representación en la esfera de Bloch se encuentre sobre su superficie, se le conoce como estado puro. Por otra parte, si se tiene un estado cuya representación geométrica sea dentro de la esfera de Bloch, este estado se conoce como estado mixto (Durante la sección 2.1 se mostrará esta representación a detalle).
- Qudit: es un sistema cuántico de  $N$  dimensiones. Debido a que en la naturaleza existen sistemas cuánticos multiniveles, es posible implementar una base de dimensión mayor a 2. La forma general de un qudit se denota como

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^N \alpha_i |i\rangle, \quad (1.3)$$

donde nuevamente se cumple que los coeficientes  $\alpha_i$  son números complejos y  $\sum |\alpha_i| = 1$ . Así como en computación clásica se requiere de compuertas lógicas para operar sobre los bits, en el caso de sistemas cuánticos, esto se realiza mediante operadores unitarios a los que se les llama compuerta cuántica.

- Compuerta cuántica: Una compuerta cuántica es una transformación unitaria que permite ir de un estado  $|\psi_1\rangle$  a un estado  $|\psi_2\rangle$ . Para qubits, estas compuertas se pueden representar en forma de una matriz unitaria que puede ser descompuesta de la siguiente forma [6, 7]

$$U = e^{i\alpha} \begin{pmatrix} e^{-i\beta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\beta/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\gamma}{2} & -\sin \frac{\gamma}{2} \\ \sin \frac{\gamma}{2} & \cos \frac{\gamma}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\delta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\delta/2} \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

donde  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\delta$  son números reales. La ecuación (1.4) cada matriz representa una rotación sobre la esfera de Bloch alrededor de distintos ejes. La ecuación (1.4) es la descripción general de una compuerta que actúa sobre qubits individuales; sin embargo, existen compuertas cuánticas que pueden actuar sobre múltiples qubits, entre las cuales se encuentra un tipo de compuertas conocidas como compuertas controladas que se describirán a continuación.

- Compuertas controladas: las compuertas controladas se caracterizan por no poder ser descompuestas como producto tensorial. En este tipo de compuertas podemos tener dos tipos de qubits: de control y objetivo. Los qubits de control determinan el comportamiento de la compuerta según el estado en el que se encuentren; los qubits objetivo son aquellos que serán afectados por la compuerta dependiendo del estado de los qubits de control. La compuerta controlada más común es la compuerta Controlled-not, la cual está conformada por un qubit de control y un qubit objetivo: Si el qubit de control se encuentra en estado  $|0\rangle$ , entonces el qubit objetivo permanece en su estado  $|a\rangle$ ; si el qubit de control se encuentra en estado  $|1\rangle$ , entonces el qubit objetivo cambia de estado a  $|a \oplus 1\rangle$ .  $\oplus$  representa la operación suma módulo 2, donde 2 representa la dimensión del estado  $|a\rangle$ , y se comporta de la siguiente forma

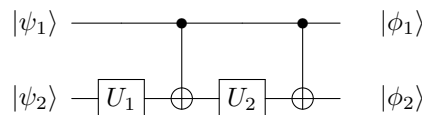
$$\left. \begin{array}{l} 0 \oplus 1 = 1 \\ 1 \oplus 1 = 0 \end{array} \right\} \text{Operación suma módulo 2} \quad (1.5)$$

La compuerta Controlled-not puede ser representada por medio de un diagrama conocido como circuito cuántico



La compuerta Controlled-not en conjunto con las compuertas de qubits individuales forman un conjunto universal de las compuertas cuánticas utilizadas en computación cuántica.

- Circuito cuántico: es una representación en forma de diagrama que describe un proceso cuántico. Este diagrama está compuesto por los estados de entrada (colocados a la izquierda del diagrama, son los estados iniciales), líneas horizontales que representan la línea de vida de un qubit (esta puede ser en el espacio o en el tiempo), compuertas cuánticas y estados de salida (colocados a la derecha del diagrama, son los estados finales) [8]. Un ejemplo de circuito cuántico es el siguiente



En este ejemplo, vemos que tenemos dos compuertas que actúan sobre el qubit en estado  $|\psi_2\rangle$ , así como dos compuertas controladas que actúan sobre los qubits  $|\psi_1\rangle$  y  $|\psi_2\rangle$ . En esta representación, el punto sólido indica que el qubit  $|\psi_1\rangle$  es el qubit de control, mientras el símbolo  $\oplus$  indica que  $|\psi_2\rangle$  es el qubit objetivo y que realiza la operación suma módulo 2 descrita anteriormente. Los circuitos cuánticos siempre se leen de izquierda a derecha, por lo que el ejemplo indica que al introducir los qubits con estados iniciales  $|\psi_1\rangle$  y  $|\psi_2\rangle$  dentro del circuito, darán como resultado los estados de salida  $|\phi_1\rangle$  y  $|\phi_2\rangle$  respectivamente.

## 1.2. Descomposición de Schmidt

Una vez que se han introducido las compuertas cuánticas que actúan sobre múltiples qubits, hablemos sobre estados de qubits múltiples, específicamente de estados de dos qubits que no pueden ser representados como un producto tensorial  $|\psi\rangle = |\phi\rangle_A \otimes |\eta\rangle_B$ ; es decir, estados que no son separables. De manera más explícita, podemos escribir este otro tipo de estados como

$$|\psi\rangle = \sum_j \sum_k A_{jk} |j\rangle_A |k\rangle_B, \quad (1.6)$$

donde  $|\psi\rangle$  es un estado puro de un sistema compuesto AB,  $|j\rangle$  y  $|k\rangle$  son una base ortonormal y C es una matriz que podemos escribir en términos de dos matrices unitarias y una matriz diagonal D:  $C = U_1 D U_2$  (más adelante en la sección 1.3 se explicará a detalle porqué esto es posible). Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \sum_j \sum_k A_{jk} |j\rangle_A |k\rangle_B &= \sum_j \sum_k \sum_i (U_1)^{ji} (D)_i (U_2)^{ik} |j\rangle_A |k\rangle_B \\ &= \sum_i (D)_i \sum_j (U_1)^{ji} |j\rangle_A \sum_k (U_2)^{ik} |k\rangle_B. \end{aligned} \quad (1.7)$$

En esta última ecuación, el súperíndice de las matrices unitarias fue colocado para seguir recalando por medio de los subíndices 1 y 2 que las matrices son distintas sin confundir al lector con potencias de matrices. Luego, definiendo  $(D)_i = \alpha_i$ ,  $\sum_j (U_1)^{ji} |j\rangle = |e_i^A\rangle$  y  $\sum_k (U_2)^{ik} |k\rangle = |e_i^B\rangle$ , obtenemos la ecuación

$$|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i |e_i^A\rangle |e_i^B\rangle, \quad (1.8)$$

donde  $\alpha_i$  son los coeficientes de Schmidt, y tienen la propiedad de que  $\sum \alpha_i^2 = 1$ . Es importante mencionar que debido a que las matrices U son unitarias,  $|e_i^A\rangle$  y  $|e_i^B\rangle$  son ortonormales. Esta última ecuación es la descomposición de Schmidt, una descomposición que simplifica el estudio de sistemas puros bipartitas, por lo que es una herramienta bastante útil al momento de estudiar este tipo de sistemas. Un ejemplo claro de esto es que si se calculan los operadores de densidad reducidos de ambos sistemas A, B y usando esta descomposición para un estado puro, obtenemos  $\rho^A = \sum_i \alpha_i^2 |e_i^A\rangle \langle e_i^A|$  y  $\rho^B = \sum_i \alpha_i^2 |e_i^B\rangle \langle e_i^B|$ . Por lo tanto, ambos operadores de densidad tienen los mismos eigenvalores  $\alpha_i^2$ . Para volver más claro este ejemplo, se expondrá qué es el operador de densidad y el operador de densidad reducido más adelante en las secciones 1.5 y 1.6.

## 1.3. Descomposición en valores singulares

Durante la sección anterior se mencionó la gran utilidad de la descomposición de Schmidt para el estudio de sistemas bipartitas y se mostró su desarrollo. Para esta sección, profundizaremos con más detalle sobre porqué la matriz A en la ecuación (1.6) puede ser reescrita de manera que podamos reescribir (1.6) como (1.7). Para realizar una breve introducción a este tema, se requiere recordar un teorema importante que lleva al desarrollo de la descomposición en valores singulares [6, 9, 10]

**Teorema 1.3.1** (Descomposición polar). *Sea A un operador lineal que actúa en un espacio vectorial. Entonces existen operadores unitarios (que denotaremos E) y operadores positivos (denotados J y K) tales que*

$$A = EJ = KE. \quad (1.9)$$

Donde J y K satisfacen  $J \equiv \sqrt{A^\dagger A}$  y  $K \equiv \sqrt{AA^\dagger}$

Esta descomposición es análoga a la representación polar de un número complejo  $z = re^{i\phi}$ , donde el módulo  $r$  es de valor no negativo. En esta descomposición, los eigenvalores de  $J$  y  $K$  son positivos y son conocidos como los valores singulares de  $A$ . Si tomamos la descomposición en eigenvalores de  $J$  o  $K$  en (1.9), veremos que obtendremos un producto de matrices unitarias, que es igual a otra matriz unitaria, llegando de esta forma a la descomposición de valores singulares.

**Teorema 1.3.2** (Descomposición en valores singulares). *Sea  $A$  una matriz cuadrada o rectangular;  $E_1, E_2$  matrices unitarias distintas y  $J$  matriz diagonal descrita por el teorema espectral. Entonces existe una descomposición de  $A$  tal que*

$$A = E_1 D E_2 \quad (1.10)$$

Donde los elementos diagonales de  $D$  son los valores singulares de  $A$ . Los valores singulares corresponden a las raíces cuadradas positivas de los eigenvalores de  $AA^\dagger$  (como consecuencia de utilizar la descomposición polar de la ecuación (1.9)).

## 1.4. Descomposición de Schmidt de dos qubits

A partir de los teoremas expuestos en la sección anterior, podemos ver que la descomposición de Schmidt surge de aplicar la descomposición en valores singulares a la ecuación (1.6), dando como resultado el proceso de la ecuación (1.7) y finalmente llegando a la ecuación (1.8). Como ejemplo, consideremos un estado arbitrario de dos qubits [8]. Tomando la base computacional, definamos  $|\psi\rangle$  como

$$|\psi\rangle = \alpha_{00} |00\rangle + \alpha_{01} |01\rangle + \alpha_{10} |10\rangle + \alpha_{11} |11\rangle, \quad (1.11)$$

y definamos la matriz  $A$  como una matriz de  $2 \times 2$  cuyas entradas son los coeficientes de  $|\psi\rangle$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

Después se procederá a calcular la matriz  $D$ . Esto se realizará resolviendo el polinomio característico de  $AA^\dagger$

$$\lambda_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4|\alpha_{00}\alpha_{11} - \alpha_{01}\alpha_{10}|^2}}{2} \quad (1.13)$$

Debido a la norma dentro del radical, podemos ver que los eigenvalores de  $A^\dagger A$  y  $AA^\dagger$  son los mismos. Una vez teniendo estos eigenvalores, La matriz  $D$  será una matriz diagonal cuyas entradas son las raíces cuadradas de los eigenvalores obtenidos en (1.13) como se mencionó en el teorema. El siguiente paso es obtener las matrices  $E_1$  y  $E_2$ , las cuales tienen como columnas los eigenvectores de  $A^\dagger A$  y  $AA^\dagger$  respectivamente

$$E_1 = \begin{pmatrix} x_1(\lambda_-) & x_1(\lambda_+) \\ x_2(\lambda_-) & x_2(\lambda_+) \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} x_1^*(\lambda_-) & x_1^*(\lambda_+) \\ x_2^*(\lambda_-) & x_2^*(\lambda_+) \end{pmatrix}$$

Los eigenvectores no serán escritos de manera explícita debido a que el ejemplo no lo requiere. A partir de estos resultados, obtenemos las matrices para la descomposición en valores singulares. Estos resultados nos permiten escribir el estado  $|\psi\rangle$  como

$$|\psi\rangle = \sqrt{\lambda_-} |A_0\rangle |B_0\rangle + \sqrt{\lambda_+} |A_1\rangle |B_1\rangle, \quad (1.14)$$

donde

$$|A_i\rangle = E_1 |i\rangle, \quad |B_j\rangle = E_2 |j\rangle.$$

La ecuación (1.14) es la misma que la ecuación (1.8) escrita con una notación distinta y aplicada a un sistema de dos qubits.

## 1.5. Operador de densidad

Recordemos la ecuación (1.1). A pesar de ser la forma general de escribir un qubit, no todo estado de dos dimensiones puede ser escrito de esta forma como cuando se tiene un ensamble de partículas por ejemplo; por lo que se requiere de una forma general de describir cualquier sistema de dos niveles. Comencemos considerando un ensamble de estados puros  $\{|\psi\rangle\}_{i=1}^N$  con su respectiva probabilidad  $\{p_i\}_{i=1}^N$  tales que  $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ . Para realizar este procedimiento recordemos la regla de Born [11]

$$\Pr(\sigma_i|z) \equiv |\langle z|\sigma_i\rangle|^2 = \langle z|\sigma_i\rangle \langle \sigma_i|z\rangle. \quad (1.15)$$

Esta regla nos dice qué probabilidad hay de que se obtenga un estado  $|\sigma_i\rangle$  cuando el sistema está preparado en un estado  $|z\rangle$ . Si realizamos esto para un ensamble de partículas obtenemos

$$\begin{aligned} \Pr(\sigma_i|\{p_j, \psi_j\}) &= \sum_{j=1}^N p_j \Pr(\sigma_i|\psi_j) = \\ \sum_{j=1}^N p_j \langle \psi_j|\sigma_i\rangle \langle \sigma_i|\psi_j\rangle &= \langle \sigma_i|\sum_{j=1}^N p_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j|\sigma_i\rangle = \langle \sigma_i|\rho|\sigma_i\rangle. \end{aligned} \quad (1.16)$$

De este desarrollo, podemos definir el operador de densidad como:

$$\rho \equiv \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (1.17)$$

Siendo  $|\psi_i\rangle$  un estado arbitrario. La matriz de densidad (u operador de densidad) permite describir un sistema conformado por un ensamble de estados, y tiene tres propiedades importantes:

- $\text{Tr}(\rho) = \sum_i p_i \text{Tr}(|\psi_i\rangle \langle \psi_i|) = \sum_i p_i = 1$ ;
- $\rho$  es un operador positivo;
- $\rho$  es Hermitiano.

A partir de estas propiedades es posible obtener una definición de estados puros y mixtos. Considérese un conjunto de  $N$  estados tales que  $|a_i\rangle = |a_j\rangle = |a\rangle$  para todo  $j, i$ ; es decir, un conjunto de estados iguales. Debido a que todos los estados del conjunto son iguales, cada estado tiene una probabilidad de ser medido de  $\frac{1}{N}$ . Al obtener el operador de densidad veremos que

$$\rho = \frac{1}{N} \sum_i^N |a_i\rangle \langle a_i| = \frac{N}{N} |a\rangle \langle a| = |a\rangle \langle a|. \quad (1.18)$$

Todo ensamble de estados cuyo operador de densidad cumpla la ecuación (1.18) es un ensamble puro; cualquier otro ensamble cuyo operador de densidad no cumpla esta última ecuación es un ensamble mixto. Es importante recalcar de (1.17) que el operador de densidad puede ser escrito de infinitas formas diferentes.

**Teorema 1.5.1** (Teorema de mezcla de Schrödinger). *Sea  $\rho$  una matriz de densidad diagonal*

$$\rho = \sum_{i=1}^N \lambda_i |e_i\rangle \langle e_i|. \quad (1.19)$$

*Entonces  $\rho$  puede escribirse como*

$$\rho = \sum_{i=1}^M p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|.$$

Si y sólo si existe una matriz unitaria  $U$  tal que

$$|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{p_i}} \sum_{j=1}^N U_{ij} \cdot \sqrt{\lambda_j} |e_j\rangle \quad (1.20)$$

A pesar de tomar estados normalizados al escribir el teorema, estos no necesariamente tienen que ser ortogonales entre si [9].

## 1.6. Operador de densidad reducido

El operador de densidad reducido permite estudiar los subsistemas de un sistema compuesto. Por medio de este, podemos conocer si un estado de un subsistema es un estado puro o mixto. Si tenemos dos sistemas A y B, podemos definir al operador traza parcial como

$$\rho^A = \text{Tr}_B[\rho] = \text{Tr}_B(|a\rangle\langle a| \otimes |b\rangle\langle b|) = |a\rangle\langle a| \text{Tr}(|b\rangle\langle b|). \quad (1.21)$$

o bien

$$\rho^B = \text{Tr}_A[\rho] = \text{Tr}_A(|a\rangle\langle a| \otimes |b\rangle\langle b|) = |b\rangle\langle b| \text{Tr}(|a\rangle\langle a|). \quad (1.22)$$

Siendo  $|a_1\rangle, |a_2\rangle$  vectores de estado del sistema A y  $|b_1\rangle, |b_2\rangle$  vectores de estado del sistema B. Teniendo una base ortonormal  $|0\rangle, |1\rangle$ , podemos definir la traza parcial de forma matricial como:

$$\rho^A = \langle 0|_B \rho |0\rangle_B + \langle 1|_B \rho |1\rangle_B \quad (1.23)$$

$$\rho^B = \langle 0|_A \rho |0\rangle_A + \langle 1|_A \rho |1\rangle_A, \quad (1.24)$$

donde por convención definimos

$$|0\rangle_A = |0\rangle \otimes I, \quad |0\rangle_B = I \otimes |0\rangle$$

y  $\langle 0|_A, \langle 0|_B$  son sus respectivos transpuestos conjugados. Para un sistema de dos qubits,  $\rho$  se puede escribir como la siguiente matriz:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{44} \end{pmatrix}$$

Recordando las definiciones dadas por la ecuación (1.2), si realizamos  $\rho^A$  y  $\rho^B$  de forma matricial obtenemos:

$$\rho^A = \langle 0|_B \rho |0\rangle_B + \langle 1|_B \rho |1\rangle_B = \begin{pmatrix} \rho_{11} + \rho_{33} & \rho_{12} + \rho_{34} \\ \rho_{21} + \rho_{43} & \rho_{22} + \rho_{44} \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

$$\rho^B = \langle 0|_A \rho |0\rangle_A + \langle 1|_A \rho |1\rangle_A = \begin{pmatrix} \rho_{11} + \rho_{22} & \rho_{13} + \rho_{24} \\ \rho_{31} + \rho_{42} & \rho_{33} + \rho_{44} \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

Una vez teniendo claro los conceptos de operador de densidad y operador de densidad reducido, recordemos el ejemplo mencionado al final de la sección 1.2. En este ejemplo se menciona que es posible escribir el operador de densidad reducido como

$$\rho^A = \sum_i \alpha_i^2 |e_i^A\rangle\langle e_i^A| \quad \rho^B = \sum_i \alpha_i^2 |e_i^B\rangle\langle e_i^B|. \quad (1.27)$$

Se puede mostrar que esto es cierto a partir de la ecuación (1.19). Si en esta ecuación  $\lambda_i = \alpha_i^2$  y  $|e_i\rangle = |e_i^A\rangle |e_i^B\rangle$ ; y sustituimos posteriormente este resultado en (1.21) y (1.22), obtendremos las expresiones para  $\rho^A$  y  $\rho^B$  respectivamente.



## Capítulo 2

# Entrelazamiento cuántico

Una vez teniendo las definiciones del capítulo anterior, se procederá al estudio del entrelazamiento de sistemas bipartitas. Para este estudio, se introducirán algunas medidas de entrelazamiento para estados puros. Durante la sección 1.5, se revisó la forma del operador de densidad para un estado puro, llegando a la ecuación (1.18). A partir de esta ecuación podemos notar que para todo estado puro se cumple

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \rho^2, \quad (2.1)$$

mientras que para un estado mixto esto no ocurre. Este último resultado es de suma importancia, ya que brindará una información importante acerca de la pureza.

### 2.1. Pureza

La pureza, como lo dice su nombre, nos indica qué tan puro es un estado, y está definido como

$$P(\rho) = \text{Tr}[\rho^2]. \quad (2.2)$$

Esta operación tiene esta utilidad debido a lo siguiente: recordemos que los coeficientes  $p_i$  del operador de densidad definido en la ecuación (1.17) tienen valores entre 0 y 1 y cumplen la condición de normalización. Es muy importante tener en cuenta esto último, ya que de esto obtendremos no sólo el límite superior de los valores, sino que veremos por qué esta operación nos permite diferenciar estados puros de estados mixtos. En el caso de un estado puro, por definición, sabemos que todos los coeficientes son iguales a 0 a excepción de 1 (cuyo valor es 1); por lo tanto,  $p_1^2 = p_1 = 1$  y

$$P(\rho_{\text{puro}}) = \text{Tr}[\rho_{\text{puro}}^2] = \text{Tr}[\rho_{\text{puro}}] = 1. \quad (2.3)$$

La ecuación anterior es la condición que cumple todo estado puro, como puede verse si se sustituye la ecuación (2.1) en (2.2), que lleva igualmente la ecuación (2.3); si no se cumple esta condición, entonces es un estado mixto. Esto último es debido a que para todo estado mixto se cumple que

$$\begin{aligned} \sum_i p_i^2 &< \sum_i p_i = 1 \\ \Rightarrow P(\rho_{\text{mixto}}) &= \text{Tr}[\rho_{\text{mixto}}^2] < \text{Tr}[\rho_{\text{mixto}}] = 1. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Asimismo, debido a que un estado completamente mixto es aquel cuyos coeficientes  $p_i$  son iguales a  $\frac{1}{N}$ , entonces la pureza de un estado completamente mixto es

$$\frac{1}{N} \leq \text{Tr}[\rho_{\text{mixto}}^2]. \quad (2.5)$$

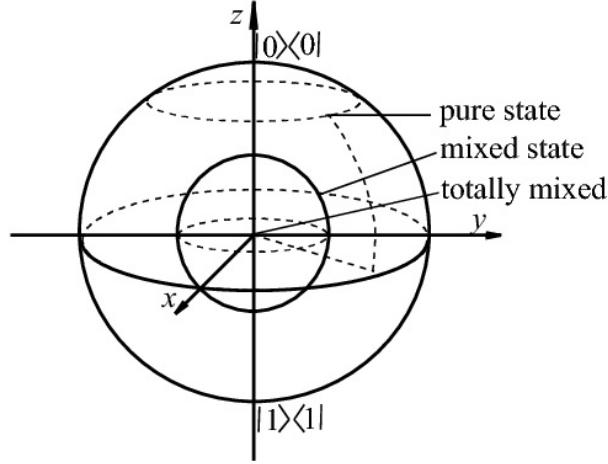


Figura 2.1: Visualización de estados puros y mixtos en la esfera de Bloch [13].

Por lo tanto, podemos ver los límites superior e inferior que tiene la pureza combinando las ecuaciones (2.3), (2.4) y (2.5)

$$\frac{1}{N} \leq P(\rho) = \text{Tr}[\rho^2] \leq 1 \quad (2.6)$$

Asimismo, es posible ver estos límites si reescribimos la pureza de forma geométrica [12]. Recordemos que un qubit puede ser representado como un vector en una esfera de Bloch, y su operador de densidad está dado por

$$\rho = \frac{1}{2}(I + r_x\sigma_x + r_y\sigma_y + r_z\sigma_z) \quad (2.7)$$

En esta representación, el módulo del vector de Bloch  $|\vec{r}|$  (que en la ecuación anterior está dividido en componentes  $r_x, r_y, r_z$ ) nos indica si tenemos un estado puro o mixto: si  $|\vec{r}| = 1$ , entonces el vector se encuentra sobre la superficie de la esfera de Bloch y es un estado puro; en cambio, si  $|\vec{r}| < 1$ , se tiene un estado dentro de la esfera de Bloch y es un estado mixto; si  $|\vec{r}| = 0$ , tenemos un estado completamente mixto y se encuentra en el centro de la esfera de Bloch. La pureza en dos dimensiones se puede escribir entonces como

$$P = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|\vec{r}|^2, \quad (2.8)$$

donde  $0 \leq |\vec{r}|^2 \leq 1$ . Para generalizar esto, escribimos el operador de densidad como

$$\rho = \frac{1}{N}I + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N^2-1} r_i \hat{Q}_i, \quad (2.9)$$

donde  $Q_i$  son las matrices generadoras del grupo  $SU(N)$  que satisfacen  $\text{Tr}[\hat{Q}_i \hat{Q}_j] = (N-1)\delta_{ij}$ , y  $r_i$  son las componentes del vector de Bloch para una hipersfera de dimensión  $N^2 - 1$ . Entonces la pureza para un estado  $N$ -dimensional se define como

$$P = \frac{1}{N} + \frac{N-1}{N}|\vec{r}|^2. \quad (2.10)$$

A partir de esta forma geométrica, podemos notar fácilmente los límites mencionados en (2.6). Igualmente, de la forma geométrica vemos que podemos tomar  $|\vec{r}|$  como una medida de pureza; sin embargo, esta no será utilizada (así como la forma geométrica de la pureza) debido a que no es el objetivo de este trabajo, por lo que optaremos por la forma escrita en (2.2).

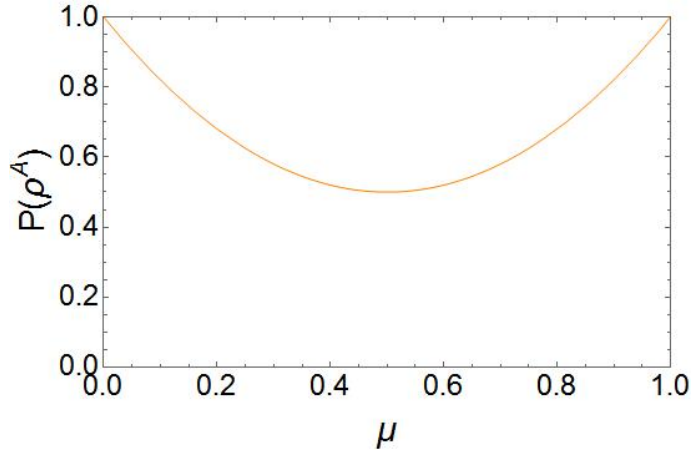


Figura 2.2: Gráfico de la pureza del operador de densidad reducido del sistema A, obtenido de la ecuación (2.12)

Otro resultado muy importante que podemos obtener al aplicar lo visto acerca de la pureza, es que nos permite reconocer entre estados separables y estados entrelazados. Esto se realizará mediante el uso del operador de densidad reducido

$$|\psi\rangle \begin{cases} \text{Si } P(\rho_a) = 1 & \text{el estado es separable} \\ \text{Si } P(\rho_a) < 1 & \text{el estado está entrelazado} \end{cases}$$

Cuando tenemos que  $P(\rho_a) = \frac{1}{N}$ , entonces  $|\psi\rangle$  es un estado máximamente entrelazado. Tomemos como ejemplo el estado

$$|\mu\rangle = \sqrt{\mu}|00\rangle + \sqrt{1-\mu}|11\rangle, \quad (2.11)$$

para visualizar la pureza de uno de sus operadores de densidad reducidos representado en la figura 2.2

$$P(\rho^A) = 1 - 2(\mu - \mu^2). \quad (2.12)$$

## 2.2. Entropía lineal

Al analizar la figura 2.2 de la sección anterior, es sencillo notar que la pureza es una función monótonamente decreciente de 1 a  $\frac{1}{N}$ , siendo  $N = 2$  en la figura. Esta característica podría llegar a ser confusa al momento de utilizar la pureza como medida de entrelazamiento, ya que lo que se espera de medir entrelazamiento es una función monótonamente creciente de 0 a 1, siendo 0 un estado sin entrelazamiento y 1 un estado con entrelazamiento máximo. Sin embargo, es posible aprovechar el resultado de la pureza para obtener una medida de entrelazamiento que cumpla la característica deseada. Esto es posible por medio de la entropía lineal. La entropía lineal permite conocer qué tan mezclado se encuentra un estado (al contrario de la pureza), y está dada por la siguiente expresión

$$S_L = \frac{N}{N-1}(1 - P(\rho^2)), \quad (2.13)$$

donde  $P(\rho^2)$  es la pureza y el factor  $\frac{N}{N-1}$  permite normalizar la función para obtener como valores límite 0 y 1; de otra forma, el límite superior sería  $\frac{1}{N}$ .

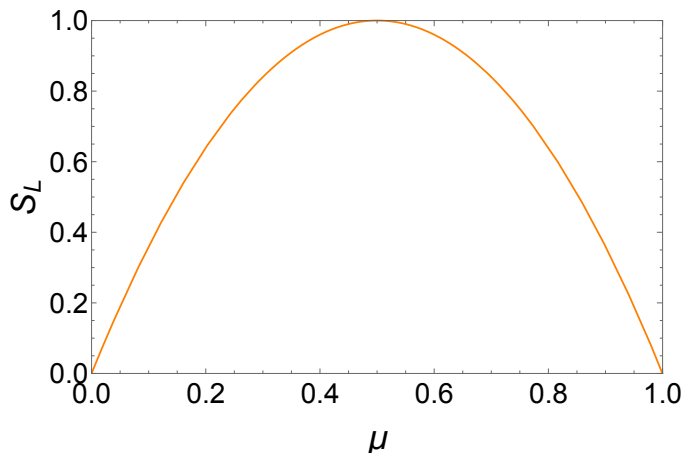


Figura 2.3: Entropía lineal obtenida a partir de la ecuación (2.15). Gracias al factor de normalización, se obtiene una función monótonamente creciente de 0 a 1.

Si se tomara la pureza por medio de su definición geométrica como en la ecuación (2.10), al sustituir en la entropía lineal se obtiene

$$S_L = 1 - |\vec{r}|^2. \quad (2.14)$$

De esta última ecuación, es posible ver nuevamente que un estado puro es aquel estado cuyo módulo de su vector de Bloch es igual a 1, que implica que el vector se encuentra sobre la superficie de la esfera; mientras que para un estado mixto  $|\vec{r}|^2 < 1$ .

Al tomar un ejemplo a partir de la ecuación (2.12), es posible obtener la entropía lineal y visualizarla de manera gráfica a través de la figura 2.3

$$S_L = 4(\mu - \mu^2) \quad (2.15)$$

## 2.3. Entropía de Von Neumann

Una vez definidas las primeras formas de medir entrelazamiento de estados puros, se procederá a profundizar sobre el porqué es posible darle connotación de entropía a las medidas que se introducirán en esta sección: la entropía de Shannon y la entropía de von Neumann. Recordemos que la entropía representa el número total de estados diferentes en las que un sistema puede existir [14]. Entonces si se toma un sistema termodinámico clásico conformado por un ensamble de  $n$  estados distintos y cada uno teniendo una probabilidad  $P_i$  de existir, su entropía estará dada por la entropía de Gibbs

$$S = -k_B \sum_i P_i \ln P_i, \quad (2.16)$$

donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann. En cambio, cuando se estudian sistemas cuánticos (donde un estado de energía) se utiliza el operador de densidad (definido en la sección 1.5) para describir los estados posibles del sistema [15], dando como resultado que la entropía sea

$$S = -k_B \text{Tr}[\rho \ln \rho] \quad (2.17)$$

**CAPÍTULO 2. ENTRELAZAMIENTO CUÁNTICO**  
**2.3. ENTROPÍA DE VON NEUMANN**

---

Cuando se trata de la información se requiere que la probabilidad conjunta de  $n$  eventos independientes sea  $p_{12\dots n} = p_1 p_2 \dots p_n$  y al mismo tiempo se requiere que la información total sea igual a la suma de la información de cada evento independiente; es decir,  $I_{12\dots n} = I_1 + \dots + I_n$ . Es por este motivo que para medir información se aplica la función logaritmo para realizar esta medición. Si esta vez tomamos una variable aleatoria que puede asumir un conjunto de  $n$  valores con su respectiva probabilidad (recordando que la suma de todas las probabilidades es 1), es posible calcular la incertidumbre media sobre la variable aleatoria (la cantidad de información) utilizando entropía de Shannon

$$H(p) = - \sum_{i=1}^n p_i \log_n p_i, \quad (2.18)$$

donde  $p$  es una distribución de probabilidad. Comparando esta última ecuación con la ecuación (2.16), vemos que la estructura de ambas ecuaciones (salvo la constante  $k_B$  y la base del logaritmo) es la misma, por lo que es posible tomar esta medida de información como entropía.

Teniendo en cuenta esto, pasemos a desarrollar la entropía de von Neumann. Para esto, es necesario recordar las propiedades del operador de densidad discutidas en la sección 1.5 ya que la entropía de von Neumann es la versión cuántica de la entropía de Shannon. Debido a que los coeficientes de  $\rho$  en la ecuación (1.17) representan la probabilidad de obtener cierto estado, podemos tomar al operador de densidad como una distribución de probabilidad (razón por la que la suma de sus coeficientes es igual a 1)

$$S(\rho) = -\text{Tr}[\rho \log_N \rho]. \quad (2.19)$$

Esta ecuación tiene la misma estructura que la versión cuántica de la entropía de la ecuación (2.17) (nuevamente salvo la constante  $k_B$  y la base del logaritmo), por lo que esta operación también puede tener una connotación de entropía. Sin embargo, hay que tener en cuenta las infinitas descomposiciones que existen para el operador de densidad (como se mencionó en la sección 1.5). Que los valores de los coeficientes puedan cambiar implica que no es posible aplicar la entropía de Shannon a un estado cuántico usando cualquier descomposición, ya que el valor cambia para cada descomposición. La solución a este inconveniente es tomar la descomposición diagonal de  $\rho$  (donde los elementos diagonales son sus eigenvalores), ya que los eigenvalores del operador de densidad son invariantes sin importar qué descomposición se utilice. Al tomar  $\rho$  en su forma diagonalizada y sustituirlo en la ecuación (2.19), se llega al resultado

$$S(\rho) = -\text{Tr}[\rho \log_N \rho] = - \sum_{i=1}^N \lambda_i \log_N \lambda_i. \quad (2.20)$$

De esta última ecuación podemos ver que se cumple la equivalencia con la entropía de Shannon si y sólo si

$$S(\rho) = H(\lambda). \quad (2.21)$$

Es de suma importancia resaltar este último resultado, debido a que la entropía de von-Neumann es útil para calcular el entrelazamiento de estados puros, lo cual se realiza por medio del operador de densidad reducido

$$E(\psi) = -\text{Tr}[\rho_a \log_N \rho_a] = -\text{Tr}[\rho_b \log_N \rho_b] = H(\alpha^2), \quad (2.22)$$

donde  $\rho_a$  es la traza parcial del estado  $|\psi\rangle\langle\psi|$  sobre el subsistema B, y  $\rho_B$  siendo una definición similar aplicada al subsistema B. Tanto  $\rho_a$  como  $\rho_b$  fueron definidas durante la sección 1.6 en las ecuaciones (1.21) y (1.22) respectivamente. La igualdad presentada en la última ecuación se debe a la equivalencia que existe con la entropía de Shannon por la ecuación (2.21) y debido a la descomposición de Schmidt, ya que los eigenvalores de ambos operadores (denotados como  $\alpha^2$ ) son los mismos, resultado expuesto en la ecuación (1.27) durante la sección 1.2.

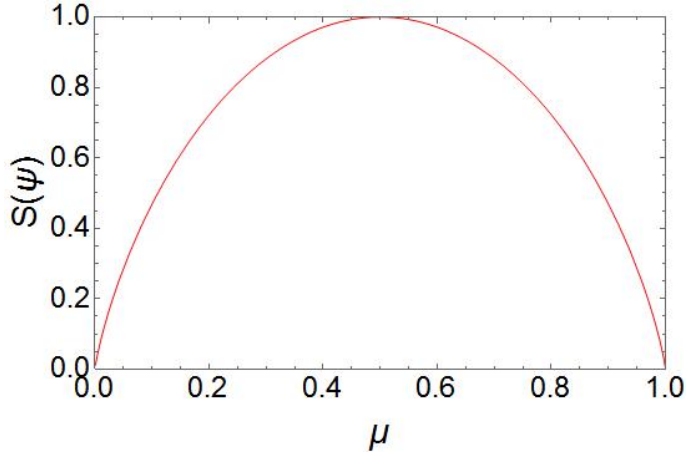


Figura 2.4: Gráfico de la entropía de entrelazamiento. La función es la descrita en la ecuación (2.23)

Si tomamos el ejemplo utilizado al principio de la sección 2.4, la entropía de von-Neumann está dada por

$$E(\psi) = S(\psi) = \mu \log_2(\mu) + (1 - \mu) \log_2(1 - \mu). \quad (2.23)$$

De esta forma, se logra ver por medio de la figura 2.4 que esta función es monótonamente creciente de 0 a 1 al igual que la entropía lineal.

## 2.4. Concurrencia de estados puros

Una vez definidas la entropía lineal y la entropía de von Neumann, comenzaremos por definir la concurrencia. Durante la sección 3.1, se verá que esta medida está relacionada con la entropía de von Neumann. Para llegar a la concurrencia, se comenzará definiendo la operación "*spin-flip*" para un sistema puro de dos qubits como

$$|\tilde{\psi}\rangle = (\sigma_y \otimes \sigma_y) |\psi^*\rangle, \quad (2.24)$$

siendo  $|\psi^*\rangle$  el complejo conjugado de  $|\psi\rangle$  en la base computacional. Si se tienen n qubits, el estado spin-flip se obtendrá al aplicar el operador  $\sigma_y$  a cada uno de los qubits individuales. Una vez teniendo esta operación, podemos definir la concurrencia

$$C(\psi) = |\langle \psi | \tilde{\psi} \rangle|. \quad (2.25)$$

Esta concurrencia es una función monótonamente creciente de 0 a 1, donde el valor 0 corresponde a un estado separable y el valor 1 a un estado maximalmente entrelazado, por lo que puede ser utilizado como una medida de entrelazamiento de estados puros. Durante la sección 2.8, veremos que la definición concurrencia para sistemas de dos qubits puede ser extendida para estados mixtos. Asimismo, se mostrará que la definición de la ecuación (2.25) puede ser útil para calcular la entropía de entrelazamiento, la cual se introducirá durante la siguiente sección y se realizará una profundización durante el capítulo 3. Pongamos un ejemplo para visualizar esta operación en la figura 3.1: Sea  $|\mu\rangle = \sqrt{\mu}|00\rangle + \sqrt{1-\mu}|11\rangle$ , estado definido previamente en la ecuación (2.11). La concurrencia entonces es

$$C(\psi) = 2\sqrt{\mu - \mu^2}. \quad (2.26)$$

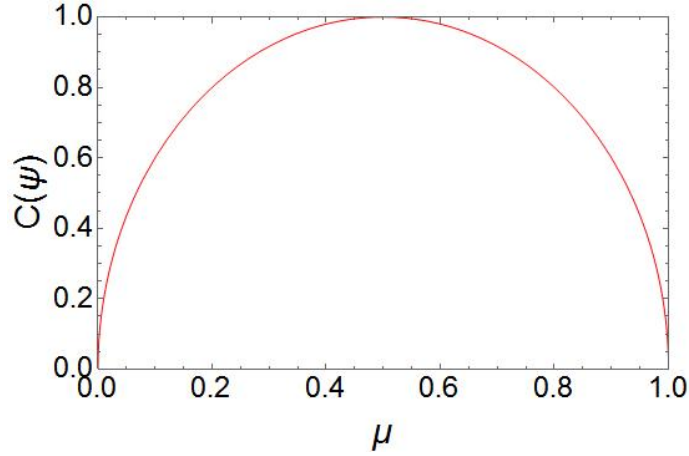


Figura 2.5: Concurrencia de un estado puro arbitrario. La gráfica muestra la concurrencia descrita en la ecuación (2.26)

## 2.5. Estados de Bell con qubits

Los estados de Bell (también conocidos como estados EPR [1]) son estados de máximo entrelazamiento conseguidos entre dos qubits al aplicar una compuerta conocida como Hadamard (la cual transforma un estado cualquiera a un estado de superposición con pesos iguales) seguida de una compuerta Controlled-not definida durante la sección 1 (esta invierte el estado del qubit objetivo cuando el qubit de control se encuentra en estado  $|1\rangle$  en la base computacional). La compuerta Controlled-not realiza un mapeo  $|n, m\rangle \rightarrow |n, n \oplus m\rangle$ , donde  $\oplus$  representa la operación suma módulo 2 definida en la ecuación (1.5). La compuerta Hadamard se comporta de la siguiente forma

$$H|n\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} |n\rangle = \frac{|0\rangle + (-1)^n |1\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (2.27)$$

Mientras que la compuerta Controlled-not tiene la forma

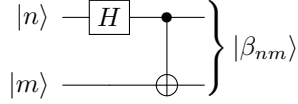
$$C_{not} \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes \sigma_X \quad (2.28)$$

Por lo tanto, los estados de Bell se obtienen de la siguiente forma

$$|\beta_{nm}\rangle = C_{not}H|n\rangle|m\rangle = \frac{|0m\rangle + (-1)^n |1, m \oplus 1\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (2.29)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{(|00\rangle + |11\rangle)}{\sqrt{2}} &= |\beta_{00}\rangle \\ \frac{(|01\rangle + |10\rangle)}{\sqrt{2}} &= |\beta_{01}\rangle \\ \frac{(|00\rangle - |11\rangle)}{\sqrt{2}} &= |\beta_{10}\rangle \\ \frac{(|01\rangle - |10\rangle)}{\sqrt{2}} &= |\beta_{11}\rangle \end{aligned} \right\} \text{Estados de Bell para qubits}$$

El circuito cuántico que describe los estados de Bell es el siguiente



donde  $|n\rangle$  y  $|m\rangle$  toman valores 0 o 1.

Si tomamos el estado  $\beta_{00}$  y calculamos la pureza de cualquiera de los operadores de densidad reducidos (ambos operadores de densidad reducidos llevan a un estado completamente mixto  $\frac{I}{2}$ ), el resultado es el mínimo posible debido justamente a que el entrelazamiento es máximo

$$\text{Tr}[(\rho^A)^2] = \text{Tr}\left[\frac{I}{4}\right] = \frac{1}{2}. \quad (2.30)$$

En el caso de utilizar la entropía lineal, el resultado también coincide con el valor de un estado de entrelazamiento máximo

$$S_L = 2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1 \quad (2.31)$$

## 2.6. Estados de Bell con qutrits

Una vez definidos los estados de Bell para qubits, se realizará el procedimiento para un sistema de qutrits. Como preliminar, se definirá la notación que se utilizará por el resto del documento para la operación suma módulo N

$$[j + m]_N \equiv (j + m) \pmod{N}, \quad (2.32)$$

donde  $j, m$  son números naturales y  $N$  es la dimensión del estado.

Teniendo esta definición, es momento de proseguir con los estados de Bell. El conjunto de compuertas que se tomarán como partida son aquellas utilizadas por Anton Zeilinger, Chao-Yang Lu y sus respectivos grupos de investigación [3]. Comencemos por la compuerta que sustituye a la compuerta Hadamard, la cual se denotará por  $F_3$ , que se comporta de la siguiente forma

$$F_3 |n\rangle = \frac{|0\rangle + e^{i\pi \frac{2n}{3}} |1\rangle + e^{i\pi \frac{4n}{3}} |2\rangle}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{j=0}^2 e^{i\pi \frac{2jn}{3}} |j\rangle, \quad (2.33)$$

cuya forma matricial es

$$F_3 \doteq \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

siendo  $w = e^{i\pi \frac{2j}{3}}$ . En el caso de la compuerta controlada, denotada por  $X_3$ , su comportamiento se encuentra de forma explícita en la tabla 2.1, donde es posible ver que  $X_3$  realiza el mapeo  $|n, m\rangle \rightarrow |n, [n + m]_3\rangle$ , siendo  $m$  el valor inicial del qutrit objetivo y  $n$  el valor del qutrit de control

$$X_3 = \sum_{l=0}^2 |l\rangle \langle l| \otimes V_3^l, \quad (2.35)$$

donde

$$V_3 \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

**CAPÍTULO 2. ENTRELAZAMIENTO CUÁNTICO**  
**2.7. ESTADOS DE BELL CON SISTEMAS MULTINIVELES**

---

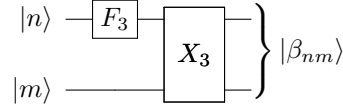
qutrit de control	qutrit objetivo inicial	qutrit objetivo final
$ 0\rangle$	$ m\rangle$	$ m\rangle$
$ 1\rangle$	$ m\rangle$	$ [1+m]_3\rangle$
$ 2\rangle$	$ m\rangle$	$ [2+m]_3\rangle$

Tabla 2.1: Compuerta controlada  $X_3$ .  $m$  puede tener valor 0, 1 ó 2

Por lo tanto, los estados de Bell para qutrits se obtienen de la siguiente forma

$$|\beta_{nm}\rangle = X_3 F_3 |n\rangle |m\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{j=0}^2 e^{i\pi \frac{2jn}{3}} |j\rangle |[j+m]_3\rangle. \quad (2.37)$$

El circuito cuántico que representa a estos estados es muy similar al circuito de 2 dimensiones con la diferencia de que ahora tanto la línea de vida de  $|n\rangle$  como de  $|m\rangle$  representan un qutrit



## 2.7. Estados de Bell con sistemas multiniveles

Durante las secciones anteriores se mostró un circuito cuántico mediante el cual se puede obtener un estado maximalmente entrelazado de dos qubits y dos qutrits [3, 6]. En esta siguiente sección abordaremos la generalización de estos estados, llegando a la generalización tomada por el grupo Zeilinger [3]. Para esto, se mostrará que es posible realizar un circuito cuántico análogo al circuito de dos qubits. Primero, partamos observando la forma matricial de la compuerta Hadamard utilizada en la ecuación (2.27)

$$H \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Inicialmente se podría pensar que la generalización radica en utilizar las compuertas Hadamard, pero esto no es así debido que estas matrices son de dimensión  $2^N$ , por lo que se requiere una compuerta que generalice el resto de dimensiones. Debido a esto, el camino que se tomará será el siguiente: Recordemos que  $-1 = e^{i\pi}$ , y reescribamos la compuerta Hadamard utilizando notación de Dirac y la base computacional

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| + e^{i\pi} |1\rangle\langle 1|) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 e^{i\pi(jk)} |j\rangle\langle k|. \quad (2.38)$$

Ahora, reescribamos la compuerta  $F_3$  definida en la sección anterior de esta misma forma

$$\begin{aligned} F_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |0\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 0| + e^{i\frac{2\pi}{3}} |1\rangle\langle 1| + e^{i\frac{4\pi}{3}} |1\rangle\langle 2| \\ &\quad + |2\rangle\langle 0| + e^{i\frac{4\pi}{3}} |2\rangle\langle 1| + e^{i\frac{2\pi}{3}} |2\rangle\langle 2|) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{j=0}^2 \sum_{k=0}^2 e^{i\pi \frac{2(jk)}{3}} |j\rangle\langle k| \end{aligned} \quad (2.39)$$

Al escribir las compuertas de esta forma, podemos notar algunas propiedades importantes acerca de la fases (que denotaremos con la letra  $w$  durante el resto del documento)

- $w^2 = 1$  para qubits
- $w^3 = 1$  para qutrits

**CAPÍTULO 2. ENTRELAZAMIENTO CUÁNTICO**  
**2.7. ESTADOS DE BELL CON SISTEMAS MULTINIVELES**

---

- $w^0 + w^1 = 0$  para qubits
- $w^0 + w^1 + w^2 = 0$  para qutrits

Note que estas propiedades pertenecen a las de la raíz cuadrada de la unidad, por lo que podemos asumir que de forma general se cumple

- $w = e^{i\frac{2\pi}{N}}$
- $w^N = 1$
- $\sum_{i=0}^{N-1} w^i = 0$

Por lo tanto, la matriz que representa la generalización de fase buscada sería

$$F_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j,k=0}^{N-1} w^{jk} |j\rangle \langle k| \doteq \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & w^2 & w^3 & \cdots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & w^6 & \cdots & w^{2(N-1)} \\ 1 & w^3 & w^6 & w^9 & \cdots & w^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & w^{3(N-1)} & \cdots & w^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

Como se puede ver, este operador generalizado no es más que la transformada de Fourier. En esta notación el subíndice de F es la dimensión del sistema, de la misma forma que en el caso de qutrits. Una vez generalizada la compuerta que pondrá al estado en superposición, desarrollemos una generalización de compuerta controlada. Escribamos la compuerta Controlled-not de forma matricial y utilizando notación de Dirac en la base computacional como en la ecuación (2.28)

$$C_{not} \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = |0\rangle \langle 0| \otimes I + |1\rangle \langle 1| \otimes \sigma_X$$

Donde  $\sigma_X$  es matriz de Pauli. Recordemos que para toda matriz se cumple que  $A^0 = I$ . Así que podemos reescribir  $C_{not}$  como

$$C_{not} = |0\rangle \langle 0| \otimes \sigma_X^0 + |1\rangle \langle 1| \otimes \sigma_X = \sum_{l=0}^1 |l\rangle \langle l| \otimes \sigma_X^l. \quad (2.41)$$

Luego, escribimos la compuerta  $X_3$  usando esta misma notación

$$X_3 = |0\rangle \langle 0| \otimes V_3^0 + |1\rangle \langle 1| \otimes V_3 + |2\rangle \langle 2| \otimes V_3^2 = \sum_{l=0}^2 |l\rangle \langle l| \otimes V_3^l, \quad (2.42)$$

donde recordemos que

$$V_3 \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**CAPÍTULO 2. ENTRELAZAMIENTO CUÁNTICO**  
**2.8. ENTRELAZAMIENTO DE ESTADOS MIXTOS**

---

Observemos que el comportamiento de la compuerta  $\sigma_x$  es realizar el mapeo  $|m\rangle \rightarrow |m+1\rangle_2$ , mientras que  $V_3$  realiza el mapeo  $|m\rangle \rightarrow |[m+1]_3$ . De estos mapeos podemos notar que se realiza una operación suma módulo 2 o 3 respectivamente debido a que es la dimensión del sistema. Por lo tanto, una generalización de esta matriz debe realizar un mapeo  $|m\rangle \rightarrow |[m+1]_N$  (denotemos esta operación como V)

$$V_N \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} = \sum_{l=0}^{N-1} |l+1\rangle \langle l| \quad (2.43)$$

Analizando la forma de las matrices  $V_N$  y  $F_N$ , es posible ver que estas coinciden con aquellas definidas por James Joseph Sylvester [16] y desarrolladas posteriormente por Julian Schwinger [17], siendo  $V_N$  la matriz llamada *shift matrix*. Estas matrices siguen un conjunto de relaciones descritas tanto por Julian Schwinger como por James Joseph Sylvester (con su respectiva notación)

$$F^{-1}VF = Q \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & w^{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & w^N \end{pmatrix}$$

$$V^N = Q^N = I$$

$$VQ = wQV = P \quad (2.44)$$

De estas tres relaciones, James Joseph Sylvester menciona las relaciones cíclicas (la segunda y tercera), mientras Julian Schwinger agrega la primera. Veamos en estas relaciones se definieron dos operaciones más P y Q. Este conjunto de matrices para dimensión N=2, conducen a las matrices de Pauli, siendo V generalización de  $\sigma_x$ , Q generalización de  $\sigma_z$  y P generalización de  $\sigma_y$ . Una vez obtenido este resultado, podemos continuar con la generalización de la compuerta controlada, la cual podemos definir como

$$X_N = \sum_{j=0}^N |j\rangle \langle j| \otimes V_N^j, \quad (2.45)$$

que realiza el mapeo deseado. Una vez obtenidos estos operadores, podemos utilizarlos para definir una generalización de estados de Bell n-dimensionales, llevándonos así al resultado propuesto [3]

$$|\beta_{nm}\rangle = X_N F_N |nm\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} w^{jn} |j\rangle |[j+m]_N\rangle. \quad (2.46)$$

## 2.8. Entrelazamiento de estados mixtos

La ecuación (2.22) expuesta en la sección 2.3 es una ecuación de gran utilidad como una medida de entrelazamiento para estados puros (incluyendo dimensiones mayores a 2, desarrollos que se expondrán en el siguiente capítulo). Sin embargo, calcular el entrelazamiento de estados mixtos no es tan sencillo como en el caso de estados puros. Recordemos primeramente que usar dicha ecuación es posible debido a que para estados puros, esta medida es única. Esto es discutido por Sandu Popescu y Daniel Rohrlich en su artículo donde muestran el desarrollo de esta ecuación

**CAPÍTULO 2. ENTRELAZAMIENTO CUÁNTICO**  
**2.8. ENTRELAZAMIENTO DE ESTADOS MIXTOS**

---

junto con su respectiva demostración [18]. En el caso de estados mixtos, recordemos la definición del operador de densidad dada por la ecuación (1.17)

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (2.47)$$

donde  $p_i$  es la probabilidad de obtener el estado  $|\psi_i\rangle$  al realizar una medición. Al utilizar esta definición, se podría suponer que una forma directa de extender una medida de entrelazamiento puede ser

$$E(\rho) \stackrel{?}{=} \sum_i p_i E(\psi_i). \quad (2.48)$$

Sin embargo, debido a que existe un número infinito de descomposiciones en estados puros distintas que resultan en el mismo operador de densidad con distintas distribuciones de probabilidad, el entrelazamiento de estados mixtos dependería de la descomposición que se tome si utilizamos la ecuación (2.48) [19]. Para visualizar mejor este problema, hay que recordar la definición del operador de densidad dada en la ecuación (1.17) y la de entrelazamiento de estados puros por medio de la entropía de von Neumann dada en la ecuación (2.22) y aplicar ambas a un ejemplo [20]. Supongamos que se tiene un operador de densidad  $\rho = \frac{1}{4}I$ . Es posible obtener este operador de densidad utilizando la descomposición

$$\rho = \frac{1}{4}I = \frac{1}{4}(|00\rangle \langle 00| + |01\rangle \langle 01| + |10\rangle \langle 10| + |11\rangle \langle 11|). \quad (2.49)$$

El entrelazamiento de esta descomposición sería

$$\begin{aligned} E(\rho) &\stackrel{?}{=} \frac{1}{4}(E(|00\rangle) + E(|01\rangle) + E(|10\rangle) + E(|11\rangle)) \\ &= -\frac{1}{4}(1 \log_2 1 + 1 \log_2 1 + 1 \log_2 1 + 1 \log_2 1) = -1 \log_2 1 = 0. \end{aligned} \quad (2.50)$$

En cambio, si la descomposición que se toma es

$$\rho = \frac{1}{4}I = \frac{1}{4}(|\beta_{00}\rangle \langle \beta_{00}| + |\beta_{01}\rangle \langle \beta_{01}| + |\beta_{10}\rangle \langle \beta_{10}| + |\beta_{11}\rangle \langle \beta_{11}|). \quad (2.51)$$

El entrelazamiento obtenido sería

$$\begin{aligned} E(\rho) &\stackrel{?}{=} \frac{1}{4}(E(|\beta_{00}\rangle) + E(|\beta_{01}\rangle) + E(|\beta_{10}\rangle) + E(|\beta_{11}\rangle)) \\ &= -\frac{1}{4}(\log_2 \frac{1}{2} + \log_2 \frac{1}{2} + \log_2 \frac{1}{2} + \log_2 \frac{1}{2}) = -\log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2 = 1. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Este problema podría llevar a suponer que si se toma una descomposición que lleve a la ecuación (1.19), donde los coeficientes serían los eigenvalores del operador de densidad, esta descomposición debería ser la adecuada, mas esto no resolvería el problema, ya que no existe justificación que indique que esta descomposición es privilegiada respecto a otras. Este conjunto de dificultades nos lleva a definir el entrelazamiento de formación, que es una generalización de la entropía de entrelazamiento para estudiar estados mixtos. El entrelazamiento de formación nos dice que se requiere encontrar una descomposición tal que el entrelazamiento promedio de los estados puros se minimice. Esto se puede escribir como

$$E(\rho) = \min \sum_i p_i E(\psi_i) \quad (2.53)$$

Esta operación, al contrario de la entropía de entrelazamiento en (2.22), representa una gran complejidad al momento de calcular, consecuencia directa proveniente de tener que calcular para

**CAPÍTULO 2. ENTRELAZAMIENTO CUÁNTICO**  
**2.8. ENTRELAZAMIENTO DE ESTADOS MIXTOS**

---

todas las descomposiciones posibles, por lo que se requiere del uso de optimización numérica para hallar la solución. Sin embargo, es posible obtener una solución analítica para la ecuación (2.53) para el caso de un sistema de dos qubits. Para lograr esto, se utiliza nuevamente la concurrencia y se busca una solución para el entrelazamiento de formación en términos de esta. Esto implica que se requiere definir la concurrencia en términos del operador de densidad para luego calcular el entrelazamiento

$$E(\rho) = \mathcal{E}(C(\rho)). \quad (2.54)$$

Para obtener esta expresión, es necesario tener expresiones análogas tanto para la operación spin-flip definida en la ecuación (2.24) como para la concurrencia definida en la ecuación (2.25)

$$\begin{aligned} |\tilde{\psi}\rangle &= (\sigma_y \otimes \sigma_y) |\psi^*\rangle \rightarrow \tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y) \\ C &= |\langle \psi | \tilde{\psi} \rangle| \rightarrow C = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\} \end{aligned} \quad (2.55)$$

donde  $\rho^*$  es el complejo conjugado de  $\rho$  en la base computacional y  $\lambda_i$  son las raíces cuadradas de los eigenvalores de la matriz  $\rho\tilde{\rho}$  en orden decreciente. Asimismo los coeficientes  $\lambda_i$  son los eigenvalores de la matriz

$$R = \sqrt{\sqrt{\rho\tilde{\rho}}\sqrt{\rho}}. \quad (2.56)$$

Para llegar al resultado de la concurrencia de la ecuación (2.55), Wootters parte de escribir el operador de densidad en forma diagonal a partir de los vectores  $|v_i\rangle$  (los cuales no se encuentran normalizados)

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_i |v_i\rangle \langle v_i|; \\ \langle v_i | v_j \rangle &= p_i \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (2.57)$$

donde los coeficientes  $p_i$  corresponden a los eigenvalores de  $\rho$ . A partir de la descomposición se puede llegar a cualquier otra por medio de una matriz unitaria como se mostró en la ecuación (1.20) en la sección 1.5

$$\begin{aligned} |w_i\rangle &= \sum_{j=1}^N U_{ij}^* |v_j\rangle; \\ \rho &= \sum_{i=1}^m |w_i\rangle \langle w_i| \end{aligned} \quad (2.58)$$

Es necesario resaltar adicionalmente que para cada vector  $|v_i\rangle$  es posible aplicar la operación spin-flip y obtener un vector  $|\tilde{v}_i\rangle$ , por lo que es posible definir una matriz simétrica  $\tau$

$$\tau_{ij} \equiv \langle v_i | \tilde{v}_j \rangle, \quad (2.59)$$

donde podemos ver que cada una de las entradas tiene similitud con la concurrencia de estados puros (salvo la norma) de la ecuación (2.25) y que se mencionó nuevamente en la ecuación (2.55) para definir las ecuaciones análogas.

Partiendo de las últimas dos ecuaciones, se puede definir una descomposición  $|x_i\rangle$  que cumpla

$$\begin{aligned} \langle x_i | \tilde{x}_j \rangle &= \lambda_i \delta_{ij}; \\ \langle x_i | \tilde{x}_j \rangle &= (U\tau U^T)_{ij}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Es posible ver que esta descomposición existe ya que la última ecuación no es más que aplicar la descomposición en valores singulares mencionada en la sección 1.3 y aplicada a la matriz  $\tau$  de la

**CAPÍTULO 2. ENTRELAZAMIENTO CUÁNTICO**  
**2.8. ENTRELAZAMIENTO DE ESTADOS MIXTOS**

---

ecuación (2.59) donde la operación  $U^T$  es consecuencia de que la matriz  $\tau$  sea simétrica. Partiendo de esta descomposición  $|x_i\rangle$ , se elije una descomposición de estados  $|y_i\rangle$  tal que se cumpla

$$\begin{aligned}\langle y_1|\tilde{y}_j\rangle &= \lambda_1\delta_{1j}; \\ \langle y_i|\tilde{y}_j\rangle &= -\lambda_i\delta_{ij} \text{ para } i \neq 1,\end{aligned}\tag{2.61}$$

donde  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \dots \geq \lambda_i$  y  $|\tilde{y}\rangle$  es la operación spin-flip definida en la ecuación (2.24). Esta descomposición es importante para llegar a la descomposición que minimice el entrelazamiento. Una vez teniendo esta descomposición, se define la preconcurrencia como

$$c(\psi) = \frac{\langle \psi|\tilde{\psi}\rangle}{\langle \psi|\psi\rangle}\tag{2.62}$$

Como vemos, esta definición coincide con la de concurrencia definida en (2.25) salvo el valor absoluto y un factor que permite tener estados subnormalizados. El motivo de utilizar la descomposición (2.61) en especial surge al momento de calcular la preconcurrencia promedio (o valor de expectación de la preconcurrencia)

$$\langle c \rangle = \sum_i \langle y_i|y_i\rangle \frac{\langle y_i|\tilde{y}_i\rangle}{\langle y_i|y_i\rangle} = \sum_i \langle y_i|\tilde{y}_i\rangle = \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = C(\rho)\tag{2.63}$$

Esto no es más que es realizar la concurrencia (2.55) para cada uno de los estados puros que conforman la descomposición (a excepción de aplicar la norma) y sumarlas.

El último paso para lograr minimizar el entrelazamiento de formación es que preconcurrencia promedio sea igual a la concurrencia, para lo que se necesita que cada una de las preconcurrencias de los estados individuales sean iguales. Para este último procedimiento, se debe utilizar una descomposición tal que la preconcurrencia promedio se mantenga invariante, para luego realizar transformaciones unitarias que vuelvan a cada una de las preconcurrencias individuales iguales

$$\begin{aligned}|z_i\rangle &= \sum_{j=1}^N V_{ij}^* |y_i\rangle \\ \langle c \rangle &= \sum_i \langle z_i|\tilde{z}_i\rangle = \sum_i (VYV^T)_{ii} = \text{Tr}[VYV^T],\end{aligned}\tag{2.64}$$

donde  $Y_{ij} = \langle y_i|\tilde{y}_j\rangle$  y  $V$  es una matriz unitaria. Este último paso es de suma importancia, ya que es el motivo por el cuál se busca la descomposición que minimice el entrelazamiento. Recordemos que el problema de medir el entrelazamiento de estados mixtos radica en que no toda descomposición lleva a calcular el mismo entrelazamiento; sin embargo, vemos que la ecuación (2.64) requiere aplicar una operación traza, la cual permanece invariante ante cambios de base.

Al realizar todo este proceso y calcular la concurrencia promedio llegamos a la inecuación

$$\langle C \rangle = \sum_i |(VYV^T)_{ii}| \geq C(\rho) = \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4,$$

y, debido a que la concurrencia se encuentra en un rango entre 0 y 1, podemos reescribirla como

$$C(\rho) = \text{máx}\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\},\tag{2.65}$$

donde nuevamente recordamos que  $\lambda_i$  son las raíces cuadradas de los eigenvalores del operador  $\rho\tilde{\rho}$ , ordenados de forma decreciente. Esta última ecuación por si misma es posible utilizarla como medida de entrelazamiento. De esta forma, vemos que la concurrencia resuelve el problema de calcular el entrelazamiento de formación para estados mixtos en sistemas de dos qubits, brindando una solución analítica y sencilla, ya que basta con sustituir (2.65) de forma que se cumpla (2.54). El desarrollo de este último paso se realizará durante el siguiente capítulo.

Para visualizar la ecuación (2.65), utilicemos un ejemplo: sea  $|\psi\rangle = \sqrt{\mu}|00\rangle + \sqrt{1-\mu}|11\rangle$  y sea  $\rho = \eta|\psi\rangle\langle\psi| + (1-\eta)|01\rangle\langle 01|$ . Utilizando la operación spin-flip definida en la ecuación (2.55) para el operador de densidad, obtenemos  $\tilde{\rho}$  para luego obtener  $\rho\tilde{\rho}$

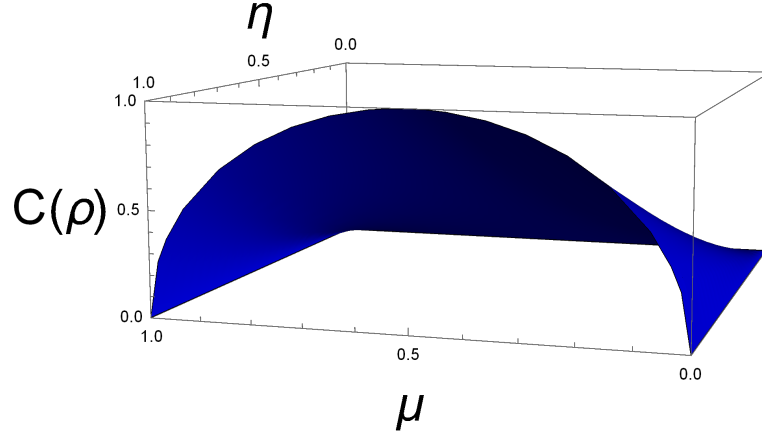


Figura 2.6: Representación gráfica de la ecuación (2.67), donde la concurrencia  $C$  está en función de los coeficientes  $\mu$  y  $\eta$

$$\begin{aligned} \rho\tilde{\rho} &= \eta^2 |\psi\rangle \langle \tilde{\psi}| \langle \psi| \tilde{\psi}\rangle = -2\eta^2 \sqrt{\mu - \mu^2} |\psi\rangle \langle \tilde{\psi}| \\ &\doteq 2\eta^2 \sqrt{\mu - \mu^2} \begin{pmatrix} \sqrt{\mu - \mu^2} & \mu \\ 1 - \mu & \sqrt{\mu - \mu^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.66)$$

Al obtener el polinomio característico, vemos que uno de los eigenvalores es igual a 0 y el segundo eigenvalor es  $\lambda = 4\eta^2(\mu - \mu^2)$ . Por lo tanto, la concurrencia es

$$C = 2\eta\sqrt{\mu - \mu^2}. \quad (2.67)$$

Es importante notar que para  $\eta = 1$ , la ecuación (2.67) pasa a ser la expresión de la concurrencia de estados puros de la ecuación (2.26); también puede ser visto gráficamente al comparar la figura 2.6 para este valor de  $\eta$  con la figura 2.5.

Cabe mencionar que la concurrencia de estados mixtos se encuentra relacionada a la fidelidad, la cual recordemos esta definida como

$$F(\rho, \sigma) = \left( \text{Tr} \left[ \sqrt{\sqrt{\rho}\sigma\sqrt{\rho}} \right] \right)^2, \quad (2.68)$$

donde  $\rho$  y  $\sigma$  son operadores de densidad. Veamos que si  $\sigma = \tilde{\rho}$ , la ecuación anterior se puede reescribir a partir de la matriz  $R$  definida en la ecuación (2.56)

$$F(\rho, \tilde{\rho}) = (\text{Tr} [R])^2 = (C(\rho))^2, \quad (2.69)$$

donde la última igualdad se debe a que  $R$  es una matriz diagonal obtenida a partir de la descomposición de vectores  $|y_i\rangle$  que es la que minimiza el entrelazamiento.



## Capítulo 3

# Hacia una generalización de la concurrencia

Hasta el momento se ha visto la posibilidad de utilizar tanto la concurrencia como la entropía de von-Neumann como medida de entrelazamiento, por lo que profundizaremos un poco en el tema analizando sistemas de dos qubits como lo realizaron William K. Wootters y Hill Scott en su artículo en 1997 [19, 21], para luego mostrar lo necesario para llevar a cabo una generalización de la concurrencia para sistemas de más de dos niveles, ya que es necesario reconsiderar la definición en términos de estados puros, así como recordar la definición de concurrencia.

### 3.1. Sistema de dos qubits

El sistema de dos qubits es un caso interesante debido a que no sólo se puede calcular el entrelazamiento de estados puros de manera sencilla, sino que de forma simultánea se puede mostrar la relación que existe entre la concurrencia de estados puros y la descomposición de Schmidt, resultado que a pesar de ser conocido no es usual encontrarlo descrito explícitamente en la literatura y se describirá durante esta sección. Para medir el entrelazamiento de un sistema de dos qubits (siendo este un estado puro), se toma como base un estado de dos qubits arbitrarios en la base computacional dado por la ecuación (1.11) y se define la matriz  $A$ , dada en la ecuación (1.12), tal que sus entradas son cada uno de sus coeficientes. Recordemos que ambas cosas fueron definidas en la sección 1.3 como

$$|\psi\rangle = \alpha_{00} |00\rangle + \alpha_{01} |01\rangle + \alpha_{10} |10\rangle + \alpha_{11} |11\rangle,$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix}$$

Posteriormente se define  $\tilde{A} = A^\dagger A$  (donde  $\text{Tr}[\tilde{A}] = \sum_i \alpha_i^2 = 1$ ) y se obtuvo el polinomio característico de la matriz

$$\lambda^2 - \text{Tr}[\tilde{A}]\lambda + \text{Det}[\tilde{A}] = 0. \quad (3.1)$$

Para este polinomio, los eigenvalores siguen las relaciones

$$\left. \begin{aligned} \text{Tr}[\tilde{A}] &= \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \text{Tr}[\tilde{A}^2] &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \\ \text{Det}[\tilde{A}] &= \lambda_1 \lambda_2 \end{aligned} \right\}$$

**CAPÍTULO 3. HACIA UNA GENERALIZACIÓN DE LA CONCURRENCIA**  
**3.1. SISTEMA DE DOS QUBITS**

---

por medio de las cuales podemos reescribir (3.1)

$$\lambda^2 - \lambda + \frac{1 - \text{Tr}[\tilde{A}^2]}{2} = 0. \quad (3.2)$$

Es interesante notar que el término independiente de esta última ecuación corresponde a la entropía lineal definida en la ecuación (2.13) para  $N=2$  y dividido entre 4. Retomando la ecuación (3.1) como se realiza en el artículo [19], obtenemos los eigenvalores

$$\lambda_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - (2|\text{Det}[A]|)^2}}{2}. \quad (3.3)$$

Utilizando estos eigenvalores, es posible calcular la entropía de entrelazamiento definida en la ecuación (2.20) durante el capítulo anterior. Es importante notar que este procedimiento no es más que calcular los cuadrados de los valores singulares (y por tanto, calcular los cuadrados de los coeficientes de Schmidt) de la matriz  $A$  justo como se realizó en la sección 1.3.

Luego, si recordamos la ecuación (2.43), es posible escribir el entrelazamiento de formación en términos de la concurrencia, que al mismo tiempo depende del operador de densidad. Debido a que el entrelazamiento de formación no es más que una generalización para estados mixtos de la entropía de entrelazamiento, entonces es posible escribir esta en términos de la concurrencia de estados puros

$$E(\psi) = \mathcal{E}(C(\psi)). \quad (3.4)$$

Para lograr esto, se parte de la definición de concurrencia de estados puros dada por la ecuación (2.25). Si sustituimos (1.11) en (2.25) y desarrollamos, vemos que

$$\begin{aligned} |\langle \psi | \tilde{\psi} \rangle| &= |(\alpha_{00}^* \langle 00| + \alpha_{01}^* \langle 01| + \alpha_{10}^* \langle 10| + \alpha_{11}^* \langle 11|) \\ &\quad (-\alpha_{00}^* |11\rangle + \alpha_{01}^* |10\rangle + \alpha_{10}^* |01\rangle - \alpha_{11}^* |00\rangle)| = \\ &= |-\alpha_{00}^* \alpha_{11}^* + \alpha_{01}^* \alpha_{10}^* + \alpha_{10}^* \alpha_{01}^* - \alpha_{11}^* \alpha_{00}^*| = \\ &= 2|\alpha_{00}^* \alpha_{11}^* - \alpha_{01}^* \alpha_{10}^*| = 2|\alpha_{00} \alpha_{11} - \alpha_{01} \alpha_{10}| = 2|\text{Det}[A]| = C(\psi). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Este resultado permite escribir los eigenvalores en términos de la concurrencia al sustituir (3.5) en (3.3)

$$\lambda_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - C^2}}{2}. \quad (3.6)$$

Esto último implica que la entropía de entrelazamiento no sólo puede ser escrita como en (2.20), sino que adicionalmente puede ser escrita de tal forma que sea dependiente de la concurrencia, como se mencionó previamente en (3.4)

$$\begin{aligned} E(\psi) &= \mathcal{E}(C(\psi)) = H\left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2}\right); \\ H(x) &= -x \log_2 x - (1 - x) \log_2 (1 - x). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Esta última ecuación no es más que un caso especial de la entropía de Von Neumann descrita en (2.20) tomando  $N=2$ , conocida como entropía binaria [6, 11]. De la ecuación (3.6), se tiene que  $1 - \lambda_+ = \lambda_-$ , de donde resulta claro la estructura de la ecuación (3.7). De igual forma, esta última ecuación puede ser utilizada en conjunto con la ecuación (2.62), siendo este el paso final mencionado al término la sección 2.8 para cumplir la ecuación (2.43).

Para visualizar todo este procedimiento, tomemos el estado ejemplo mencionado en el capítulo anterior  $|\mu\rangle = \sqrt{\mu}|00\rangle + \sqrt{1-\mu}|11\rangle$  y visualicemos  $\text{Det}[\tilde{A}]$  y  $C(\psi)$ . De la figura (3.1) podemos ver que los valores del determinante de  $\tilde{A}$  multiplicado por 4 corresponden al cuadrado de los valores de la concurrencia. Asimismo, al comparar la gráfica 3.1 con la gráfica 2.3, vemos que  $4|\text{Det}[\tilde{A}]|$  es igual a la entropía lineal. Este resultado también es posible obtenerlo al comparar la ecuación (3.1) con la ecuación (3.2). Asimismo, si se utiliza el polinomio característico (3.2) para obtener los eigenvalores y se compara con la ecuación (3.6), es posible ver que la entropía lineal es igual al cuadrado de la concurrencia.

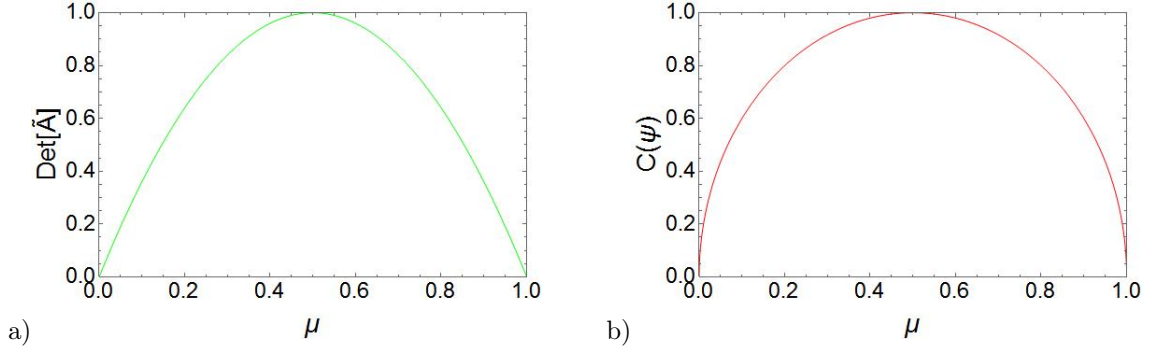


Figura 3.1: Gráfico del estado  $|\mu\rangle = \sqrt{\mu}|00\rangle + \sqrt{1-\mu}|11\rangle$ : a)  $\text{Det}[\tilde{A}]$ , b) concurrencia  $C(\psi)$

### 3.2. Sistema de dos qutrits

En esta sección, realizaremos un procedimiento similar al de la sección anterior para obtener una expresión de medición de entrelazamiento y mostraremos la complejidad de obtener una expresión de concurrencia para un sistema de dos qutrits. Primero, definamos nuestra matriz A para un sistema arbitrario de dos qutrits

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j=0}^2 \alpha_{ij} |ij\rangle \quad (3.8)$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \alpha_{02} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{20} & \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Como se mencionó en la sección anterior, se requieren obtener los cuadrados de los valores singulares de la matriz A, por lo que nuevamente se obtendrán por medio del polinomio característico de  $\tilde{A} = A^\dagger A$

$$\lambda^3 - \text{Tr}[\tilde{A}]\lambda^2 + \frac{\lambda}{2}(\text{Tr}[\tilde{A}]^2 - \text{Tr}[\tilde{A}^2]) - \text{Det}[\tilde{A}] = 0. \quad (3.10)$$

Antes de comenzar la resolución, recordemos que  $\text{Tr}[\tilde{A}] = 1$ . Asimismo, recordemos dos propiedades acerca de los determinantes [10]

- Sean A y B matrices tales que existe una matriz C definida como  $C = AB$ . Entonces  $\text{Det}[C] = \text{Det}[A]\text{Det}[B]$ .
- Sea A una matriz y  $A^\dagger$  su transpuesta conjugada. Entonces  $\text{Det}[A] = \text{Det}[A^\dagger]$ .

Tomando en cuenta estas dos propiedades, podemos concluir la igualdad  $\text{Det}[\tilde{A}] = \text{Det}[A^\dagger]\text{Det}[A] = |\text{Det}[A]|^2$ . Sustituyendo este valor y el de  $\text{Tr}[\tilde{A}]$  en (3.10) obtenemos

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \frac{\lambda}{2}(1 - \text{Tr}[\tilde{A}^2]) - |\text{Det}[A]|^2 = 0. \quad (3.11)$$

De esta forma, los eigenvalores dependen del valor de la traza de  $\tilde{A}^2$  y el determinante de A. Una forma sencilla de obtener los eigenvalores es resolviendo el sistema de ecuaciones que nos proporcionan las relaciones de Cardano-Vieta, que para nuestro problema son

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= \text{Tr}[\tilde{A}] = 1 \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 &= \frac{1 - \text{Tr}[\tilde{A}^2]}{2} \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 &= |\text{Det}[A]|^2 \end{aligned} \right\} \text{Relaciones de Cardano-Vieta}$$

**CAPÍTULO 3. HACIA UNA GENERALIZACIÓN DE LA CONCURRENCIA**  
**3.2. SISTEMA DE DOS QUTRITS**

---

de las cuales la primera y tercera de estas relaciones nos pueden ayudar a comprobar si el determinante de  $\tilde{A}$  es dependiente de la traza de  $\tilde{A}^2$ . Comencemos notando que

$$\left. \begin{aligned} \text{Tr}[\tilde{A}^2] &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ \text{Tr}[\tilde{A}^3] &= \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 \end{aligned} \right\}$$

Utilizando estos valores y las dos relaciones ya mencionadas podemos reescribir (3.11) sustituyendo  $|\text{Det}[A]|^2$  como

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \frac{\lambda}{2}(1 - \text{Tr}[\tilde{A}^2]) - \frac{1}{6}(1 + 2 \text{Tr}[\tilde{A}^3] - 3 \text{Tr}[\tilde{A}^2]) = 0. \quad (3.12)$$

De esta forma podemos notar que el determinante de A y  $\text{Tr}[\tilde{A}^2]$  son valores independientes entre sí. Otra cosa que es importante mencionar es que si  $\text{Det}[A] = 0$ , podemos regresar al polinomio característico de la ecuación (3.2) mencionado en la sección anterior.

Para resolver el polinomio característico se hará uso del método de Tartaglia-Cardano [22, 23]. Al comenzar el procedimiento se definen p y q como

$$\begin{aligned} p &= \frac{1 - 3 \text{Tr}[\tilde{A}^2]}{6}, \\ q &= \frac{1}{27}(-2 + \frac{9}{2}(1 - \text{Tr}[\tilde{A}^2]) - 27 |\text{Det}[A]|^2). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Utilizando estos valores podemos llegar a la expresión

$$\lambda - \frac{1}{3} = \left[ -\frac{q}{2} + \left[ \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right]^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} + \left[ -\frac{q}{2} - \left[ \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right]^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (3.14)$$

Debido a los posibles valores de  $\text{Tr}[\tilde{A}^2]$  y  $|\text{Det}[A]|^2$ , podemos notar que el discriminante cumple que  $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \leq 0$ . Partiendo de  $\Delta < 0$ , podemos realizar las raíces cúbicas de ambos sumandos en (3.14) (donde el segundo es el complejo conjugado del primero) para obtener una expresión general de  $\lambda$ . La forma trigonométrica de las raíces cúbicas de estos números complejos (que definiremos como Z y su complejo conjugado) dependerá del valor del módulo y el argumento

$$\begin{aligned} |Z| &= \left[ \frac{-p}{3} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \theta &= \arccos \left( -\frac{3q}{2p} \left( \frac{-3}{p} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Al realizar las raíces cúbicas, utilizar identidades trigonométricas y simplificar, obtendremos la forma general de los eigenvalores

$$\lambda_1 = 2 \left[ -\frac{1 - 3 \text{Tr}[\tilde{A}^2]}{18} \right]^{\frac{1}{2}} \cos \left( \frac{\theta}{3} \right) + \frac{1}{3} \quad (3.16)$$

$$\lambda_2 = \left[ -\frac{1 - 3 \text{Tr}[\tilde{A}^2]}{18} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ -\cos \left( \frac{\theta}{3} \right) - 3^{\frac{1}{2}} \sin \left( \frac{\theta}{3} \right) \right] + \frac{1}{3} \quad (3.17)$$

$$\lambda_3 = \left[ -\frac{1 - 3 \text{Tr}[\tilde{A}^2]}{18} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ -\cos \left( \frac{\theta}{3} \right) + 3^{\frac{1}{2}} \sin \left( \frac{\theta}{3} \right) \right] + \frac{1}{3} \quad (3.18)$$

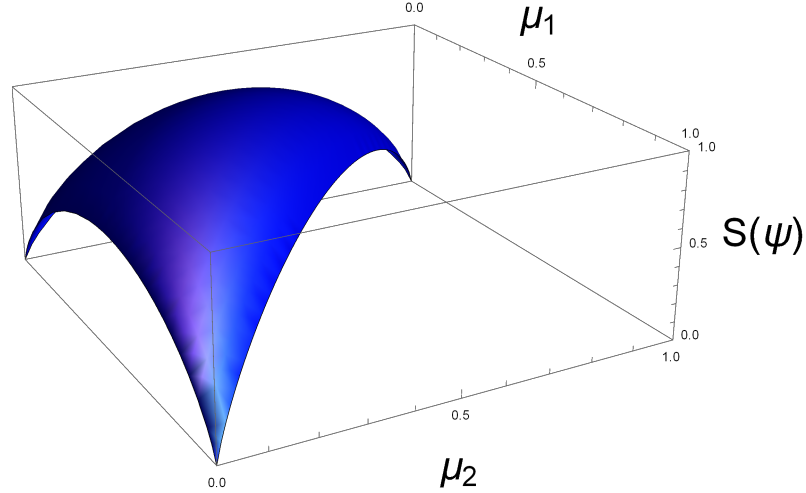


Figura 3.2: Entropía de entrelazamiento descrita en la ecuación (3.20)

Notemos que en estas soluciones ya se encuentra la condición  $\Delta = 0$ , para la cual  $\theta = 0$ . Debido a que cuando  $\Delta = 0$  y  $p, q \neq 0$  se obtienen dos eigenvalores iguales y uno distinto, podemos confirmar al realizar un poco de álgebra que este caso se trata de un estado separable con  $\text{Tr}[\tilde{A}^2] = 1$  y  $\text{Det}[A]^2 = 0$ . Esto también se puede obtener del polinomio característico (3.11). Asimismo, podemos ver que los eigenvalores de un estado maximalmente entrelazado son iguales a  $\frac{1}{3}$  debido a que  $\text{Tr}[\tilde{A}^2] = \frac{1}{3}$ , que lleva a que  $|Z| = 0$ .

Una vez obtenidos los eigenvalores, basta con utilizar la entropía de entrelazamiento (2.20) con  $N=3$  [6, 11]. En el caso de estados mixtos, nuevamente se tendría que encontrar una descomposición tal que el entrelazamiento se minimice como en la sección anterior. Podemos visualizar la entropía de entrelazamiento en 3 dimensiones por medio de la figura 3.2, donde se grafica como ejemplo la entropía del estado

$$|\mu\rangle = \sqrt{\mu_1}|00\rangle + \sqrt{\mu_2}|11\rangle + \sqrt{1 - \mu_1 - \mu_2}|22\rangle, \quad (3.19)$$

por lo que la entropía es

$$H(\mu) = \mu_1 \log_3[\mu_1] + \mu_2 \log_3[\mu_2] + (1 - \mu_1 - \mu_2) \log_3[1 - \mu_1 - \mu_2] \quad (3.20)$$

Como comparación, veamos cómo se visualiza la pureza de  $\rho^A$  en la figura 3.3. La diferencia del caso de dos dimensiones surge de la definición de concurrencia. En el caso de dos dimensiones, esta puede ser escrita en términos de  $\text{Tr}[\tilde{A}^2]$  o  $\text{Det}[A]$  debido a que estos valores son dependientes; sin embargo, en el caso de tres dimensiones esto no es posible, ya que se mostró que estos valores son independientes, por lo que definir una concurrencia implicaría dependencia de dos valores en lugar de uno. De forma gráfica, el determinante de A se vería como en la figura 3.3 b).

Al colocar de manera gráfica el determinante, vemos que tiene una forma muy similar a la de la entropía de entrelazamiento salvo un factor  $3^{\frac{3}{2}}$  que normalizaría el determinante a valores de 0 a 1. Estas diferencias también son visibles al comparar estas dos operaciones para un sistema de dos qubits, con la diferencia de que el factor que multiplica al determinante es 2.

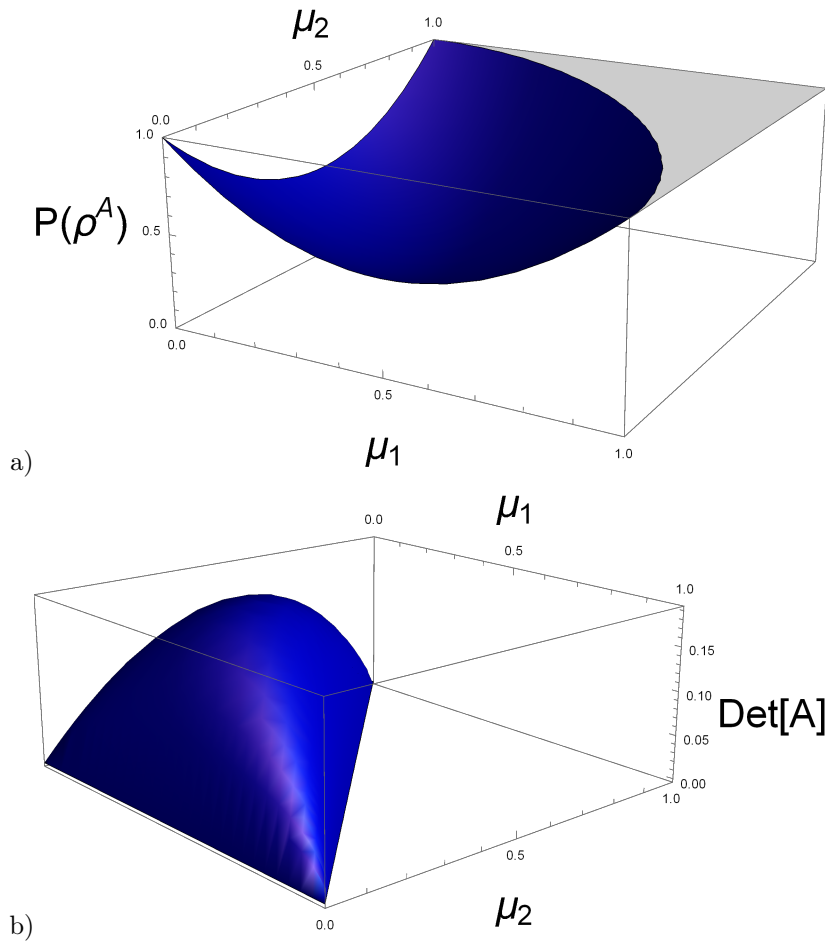


Figura 3.3: Gráficas del estado de la ecuación (3.19): a) pureza del estado, con un límite inferior  $\frac{1}{3}$  para los operadores de densidad reducidos de un estado de entrelazamiento máximo; b) determinante de la matriz A, con límite superior  $\frac{1}{3^{\frac{3}{2}}}$

### 3.3. Sistemas multiniveles

Durante esta sección analizaremos sistemas N-dimensionales, generalizando lo discutido en las secciones anteriores para estados puros, así como mostrar las dificultades que presenta para estados mixtos. La matriz A para N dimensiones esta dada por

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \alpha_{02} & \dots & \alpha_{0N} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1N} \\ \alpha_{20} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{N0} & \alpha_{N1} & \alpha_{N2} & \dots & \alpha_{NN} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

De esta forma, es posible obtener los casos abordados anteriormente para N=2 y N=3. Una vez obtenemos la matriz  $\tilde{A}$  como se realizó para los casos de dimensión 2 y 3, obtenemos el polinomio característico con el objetivo de encontrar los eigenvalores de  $A^\dagger A$  (los cuadrados de los valores singulares de A) [9]

$$\text{Det}[\lambda I - \tilde{A}] = \sum_{k=0}^N (-1)^k s_k \lambda^{N-k}, \quad (3.22)$$

con  $s_0 = 1$  y

$$s_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} s_{k-i} \text{Tr}[\tilde{A}^i] = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_k}. \quad (3.23)$$

A partir de la ecuación (3.22), es posible obtener una ecuación de grado N que nos dará los eigenvalores buscados. Luego, se sustituyen los eigenvalores obtenidos en (3.22) en (2.20) para tener la entropía de entrelazamiento. El procedimiento, como podemos ver, es el mismo que en los casos anteriores, con la diferencia de que la complejidad aumenta debido a que es necesario resolver una ecuación de mayor grado. Como podemos ver, si usamos N=3 en (3.23), es claro que los coeficientes  $s_k$  se reducen a las relaciones de Cardano-Vieta expuestas en la sección anterior. Esto último es de suma importancia, ya que estos coeficientes nos muestran de forma clara cuál es el problema al momento de intentar definir la concurrencia para dimensiones mayores a 2. Veamos que para 2 dimensiones,  $\text{Det}[A]$  y  $\text{Tr}[\tilde{A}^2]$  están relacionadas, pero a partir de 3 dimensiones, el determinante sólo puede ser representado por las trazas de las primeras N potencias de la matrix  $\tilde{A}$ , por lo que para definir una concurrencia esta dependerá de N-1 variables. No es posible escribir una concurrencia de la forma  $|\langle \psi | \tilde{\psi} \rangle|$  como en el caso de qubits expuesto en la sección 3.1



## Capítulo 4

# Entrelazamiento cuántico como recurso

Una vez que ya se ha profundizado en qué es el entrelazamiento cuántico y qué estructura tienen los estados de entrelazamiento máximo, es momento de hablar acerca de aplicaciones de este fenómeno, específicamente sobre la teleportación cuántica. La teleportación cuántica aprovecha el fenómeno de entrelazamiento cuántico para transmitir información. Para realizar este proceso, la teleportación depende adicionalmente del uso de un canal clásico para enviar ciertas mediciones que permiten realizar el proceso completo (se desarrollará más adelante).

### 4.1. Teleportación 2-dimensional

La teleportación de qubits consiste de tres sistemas A, B y C, donde BC es un sistema maximalmente entrelazado. Este entrelazamiento se prepara antes de comenzar el proceso, el sistema B lo tendrá el emisor y el sistema C el receptor. Ambos sistemas se encuentran apartados el uno del otro por una distancia grande. El estado del sistema A (el estado que se va a teleportar) está dado por  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ . El estado inicial del sistema BC estará dado por un estado de Bell. El estado de Bell puede ser cualquiera de los cuatro, mas tiene que haber un acuerdo entre el emisor y receptor debido a que la última operación depende de cuál estado de Bell se utilice. Supongamos que el estado inicial acordado es  $|\beta_{00}\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$  [6]. Entonces el estado inicial de todo el sistema está dado por

$$|\psi_0\rangle = |\psi\rangle |\beta_{00}\rangle. \quad (4.1)$$

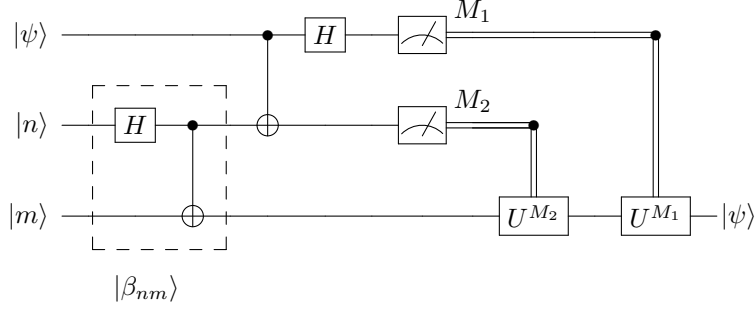
Este estado se puede reescribir en términos de una base de Bell

$$|\psi\rangle_A |\beta_{00}\rangle_{BC} = \sum_{n,m=0}^{N-1} |\beta_{nm}\rangle_{AB} |\phi_{nm}\rangle_C, \quad (4.2)$$

donde  $|\phi_{nm}\rangle$  son los estados escritos explícitamente más adelante en la ecuación 4.6. El circuito cuántico que describe el protocolo de teleportación cuántica de qubits es el siguiente

**CAPÍTULO 4. ENTRELAZAMIENTO CUÁNTICO COMO RECURSO**  
**4.1. TELEPORTACIÓN 2-DIMENSIONAL**

---



donde  $|\beta_{00}\rangle$  es el estado entrelazado que se preparó antes de comenzar el protocolo. Siguiendo el circuito cuántico, el siguiente paso es aplicar una compuerta Controlled-not a los sistemas A y B, y posteriormente una compuerta Hadamard sobre el canal A

$$|\psi_1\rangle = \sum_{n,m=0}^{N-1} H_A C_{\text{not } AB} |\beta_{nm}\rangle_{AB} |\phi_{nm}\rangle_C \quad (4.3)$$

Si sustituimos el valor del estado de Bell tenemos

$$|\psi_1\rangle = \sum_{n,m=0}^{N-1} H_A C_{\text{not } AB} C_{\text{not } AB} H_A |nm\rangle_{AB} |\phi_{nm}\rangle_C \quad (4.4)$$

Debido a que tanto la compuerta Hadamard como la Controlled-not son operaciones Hermitianas, al aplicar ambas operaciones el resultado es

$$|\psi_1\rangle = \sum_{n,m=0}^{N-1} |nm\rangle_{AB} |\phi_{nm}\rangle_C \quad (4.5)$$

Al realizar una medición sobre el qubit A y el qubit B se obtendrá uno de cuatro diferentes estados en C

$$\left. \begin{array}{l} \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \\ \alpha |0\rangle - \beta |1\rangle \\ \alpha |1\rangle + \beta |0\rangle \\ \alpha |1\rangle - \beta |0\rangle \end{array} \right\} |\phi_{nm}\rangle \quad (4.6)$$

Dependiendo de la medida que sea obtenida, se aplicará una operación unitaria sobre el qubit C para recuperar el estado que inicialmente se envió en A

$$\left. \begin{array}{l} I(\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \\ \sigma_Z(\alpha |0\rangle - \beta |1\rangle) = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \\ \sigma_X(\alpha |1\rangle + \beta |0\rangle) = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \\ i\sigma_Y(\alpha |1\rangle - \beta |0\rangle) = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \end{array} \right\} |\psi\rangle \quad (4.7)$$

Este protocolo presenta la interesante característica de que todas sus compuertas son Hermitianas, lo cual permite que el circuito cuántico sea muy sencillo, ya que sólo se requieren de tres compuertas para realizar el proceso.

## 4.2. Teleportación cuántica en altas dimensiones (qudits)

En la sección anterior se mostró la forma de teleportar estados de dimensión 2; es decir, qubits. Ahora se mostrará que se puede realizar una generalización de este procedimiento para N dimensiones [3]. Para esto se implementarán las compuertas descritas en la sección 2.7. Definamos el estado arbitrario de dimensión N que se pretende teleportar como

$$|\psi\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k |k\rangle. \quad (4.8)$$

De forma análoga al protocolo de teleportación de 2 dimensiones, podemos comenzar preparando un estado inicial  $|\psi_0\rangle$ :

$$|\psi_0\rangle = |\psi\rangle_A |\beta_{nm}\rangle_{BC} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k,j=0}^{N-1} w^{jn} \alpha_k |kj\rangle_{AB} |[j+m]_N\rangle_C. \quad (4.9)$$

Veamos que  $|kj\rangle$  puede ser representado en una base de Bell

$$|kj\rangle = \sqrt{N} \sum_{l=0}^{N-1} w^{l(N-k)} |\beta_{l,[2k+j]_N}\rangle,$$

por lo que podemos reescribir (4.9) como

$$|\psi_0\rangle = |\psi\rangle_A |\beta_{nm}\rangle_{BC} = \sum_{k,j,l=0}^{N-1} w^{jn} \alpha_k w^{l(N-k)} |\beta_{l,[2k+j]_N}\rangle_{AB} |[j+m]_N\rangle_C. \quad (4.10)$$

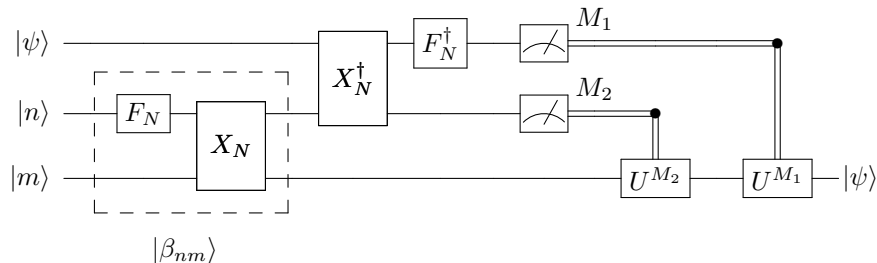
Recordando la ecuación (4.2) en el caso de dos dimensiones, podemos definir un  $|\phi\rangle$  tal que

$$|\phi_{l,[2k+j]_N}\rangle_C = \sum_{k,j,l=0}^{N-1} \alpha_k w^{l(N-k)} |[j+m]_N\rangle_C, \quad (4.11)$$

así que podemos reescribir nuevamente (4.10)

$$|\psi_0\rangle = \sum_{k,j,l=0}^{N-1} w^{jn} |\beta_{l,[2k+j]_N}\rangle_{AB} |\phi_{l,[2k+j]_N}\rangle_C. \quad (4.12)$$

Note que para N=2, la ecuación (4.12) se reduce a la forma en que reescribimos la ecuación (4.2). Recordemos que en el caso de dos dimensiones, las operación Hadamard y Controlled-not son Hermitianas, por lo que ellas mismas son sus respectivas operaciones transpuestas conjugadas. En el caso de las operaciones generalizadas que definimos, esto no ocurre. Sin embargo, ambos operadores cuentan con una operación transpuesta conjugada, por lo que un circuito cuántico para esta generalización quedaría de la siguiente forma:



**CAPÍTULO 4. ENTRELAZAMIENTO CUÁNTICO COMO RECURSO**  
**4.2. TELEPORTACIÓN CUÁNTICA EN ALTAS DIMENSIONES (QUDITS)**

---

Luego, siguiendo el circuito cuántico y aplicando las operaciones transpuestas conjugadas tenemos:

$$\begin{aligned}
 |\psi_1\rangle &= \sum_{k,j,l=0}^{N-1} w^{jn} (F_N)_A^\dagger (X_N)_{AB}^\dagger |\beta_{l,[2j+k]_N}\rangle_{AB} |\phi_{l,[2j+k]_N}\rangle_C = \\
 &= \sum_{k,j,l=0}^{N-1} w^{jn} (F_N)_A^\dagger (X_N)_{AB}^\dagger (X_N)_{AB} (F_N)_A |l,[2j+k]_N\rangle_{AB} |\phi_{l,[2j+k]_N}\rangle_C = \\
 &= \sum_{k,j,l=0}^{N-1} w^{jn} |l,[2j+k]_N\rangle_{AB} |\phi_{l,[2j+k]_N}\rangle_C. \tag{4.13}
 \end{aligned}$$

Al realizar una medición sobre el canal A y B, se obtendrá uno de los N estados  $|\phi_{l,(2j+k) \bmod N}\rangle$  definidos anteriormente. Finalmente, sea U una operación unitaria tal que

$$U_{lm} = \sum_{k=0}^{N-1} w^{kl} |k\rangle \langle [k+m]_N|. \tag{4.14}$$

Al aplicar esta operación sobre el estado del sistema C, se obtiene

$$\begin{aligned}
 &U_{lm} |\phi_{l,[2j+k]_N}\rangle_C = \\
 &\sum_{k,l=0}^{N-1} \alpha_k w^{l(N-k)} w^{kl} |k\rangle \langle [k+m]_N | [k+m]_N \rangle_C, \tag{4.15}
 \end{aligned}$$

y como para todo l se cumple  $w^{lN} = 1$

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k,l=0}^{N-1} \alpha_k w^{l(N-k)} w^{kl} |k\rangle \langle [k+m]_N | [k+m]_N \rangle_C = \\
 &\sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k |k\rangle = |\psi\rangle. \tag{4.16}
 \end{aligned}$$

Como podemos ver, el estado final en la ecuación (4.16) es justamente el estado que queríamos teleportar, por lo que podemos concluir que esta generalización es correcta. Asimismo, de este procedimiento podemos obtener el proceso de teleportación cuántica para qubits [6] de la sección anterior eligiendo  $N = 2$ , donde se recuperan las compuertas Hermitianas discutidas en la sección 2.5. Esto último es la parte más importante de esta generalización, ya que si este protocolo generalizado no se reduce al caso de teleportación de qubits, entonces no podríamos escribir el circuito cuántico de forma análoga al circuito de dos dimensiones de la manera en la que se realizó en este trabajo.

# Conclusiones

Durante la sección 2.7 se recapituló una generalización del álgebra que se requiere para realizar procesos de computación cuántica, encontrando así compuertas unitarias que pueden ser implementadas para qudits, llegando de esta manera a mostrar la generalización de los estados de Bell. Luego, se realizó el desarrollo teórico de la aplicación de compuertas unitarias generalizadas para qudits en la sección 4.2, obteniendo así un circuito cuántico para realizar el proceso de teleportación cuántica para qudits análogo al protocolo para qubits, lo cual es el primer objetivo de este trabajo. A diferencia del circuito para qubits, las compuertas no son Hermitianas (como se vio en el en la sección 2.7 y 4.2 cuando las dimensiones son mayores a 2.

Continuando con las medidas de entrelazamiento, en el capítulo 3.2 se realizó el desarrollo del polinomio característico para un sistema de dos qutrits y se determinó que los eigenvalores dependen de dos valores independientes, lo que conlleva a que no se pueda definir una concurrencia como en el caso de dos qubits mencionado en el capítulo 3.1, volviendo la expresión más compleja; es por este aumento en la complejidad que no se tiene una expresión de concurrencia en sistemas de dos qutrits aún definida.

Como última parte, en la sección 3.2 se mostró que es posible utilizar la entropía de Shannon para determinar el grado de entrelazamiento de un sistema de dos qutrits por dos métodos: obteniendo la solución general del polinomio característico de tercer grado y utilizando las relaciones de Cardano-Vieta, que forman un sistema de ecuaciones al obtener los valores  $\text{Tr}[\tilde{A}]$  y  $\text{Det}[A]$ . De este polinomio en (3.11) se mostró cómo se reduce al caso de 2 dimensiones de la ecuación (3.2). Gracias a este desarrollo es posible notar las dificultades de definir la concurrencia para qudits, cumpliendo así el segundo objeto de este trabajo.



# Bibliografía

- [1] A. Einstein, B. Podolsky y N. Rosen, «Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?», *Phys. Rev.* **47**, 777-780 (1935).
- [2] J. S. Bell, «On the Einstein Podolsky Rosen paradox», *Physics Physique Fizika* **1**, 195-200 (1964).
- [3] Y.-H. Luo, H.-S. Zhong, M. Erhard, X.-L. Wang, L.-C. Peng, M. Krenn, X. Jiang, L. Li, N.-L. Liu, C.-Y. Lu, A. Zeilinger y J.-W. Pan, «Quantum Teleportation in High Dimensions», *Phys. Rev. Lett.* **123**, 070505 (2019).
- [4] M. Mirhosseini, O. S. Magaña-Loaiza, M. N. O'Sullivan, B. Rodenburg, M. Malik, M. P. J. Lavery, M. J. Padgett, D. J. Gauthier y R. W. Boyd, «High-dimensional quantum cryptography with twisted light», *New Journal of Physics* **17**, 033033 (2015).
- [5] A. Ketterer, «Modular variables in quantum information», Tesis doct. (oct. de 2016).
- [6] N. M. A. y C. I. L., *Quantum Computation and Quantum Information*, 10th Aniversary (Cambridge University Press, 2010), págs. 1-704.
- [7] N. K. Langford, «Encoding, manipulating and measuring quantum information in optics», en (2007).
- [8] D. Quiñones, «Síntesis de Circuitos Cuánticos», Tesis doct. (sep. de 2012).
- [9] I. Bengtsson y K. Życzkowski, *Geometry of quantum states: An introduction to quantum entanglement*, vol. 9780521814515 (Cambridge University Press, ene. de 2006), págs. 1-466.
- [10] S. H. Friedberg, A. J. Insel y L. E. Spence, *Linear algebra*, 4.<sup>a</sup> ed. (Pearson PLC), pág. 526.
- [11] J. Maziero, «Entendiendo a entropía de von Neumann», pt, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **37**, 1314- (2015).
- [12] O. Gamel y D. F. V. James, «Measures of quantum state purity and classical degree of polarization», *Phys. Rev. A* **86**, 033830 (2012).
- [13] C. Shuang, «The analysis of two-level quantum system states and control in the Bloch ball», en 2008 27th Chinese Control Conference (2008), págs. 618-622.
- [14] S. J. Blundell y K. M. Blundell, *Concepts in Thermal Physics*, 2.<sup>a</sup> ed. (Oxford University Press, 2010).
- [15] W. Greiner, L. Neise y H. Stöcker, *Concepts in Thermal Physics* (Springer-Verlag, 1995).
- [16] J. J. Sylvester, «A Word on Nonions», *John Hopkins University Circulars* **7**, 241-242 (1882).
- [17] J. Schwinger, «Unitary Operator Bases», *Proceedings of the National Academy of Sciences* **46**, 570-579 (1960).
- [18] S. Popescu y D. Rohrlich, «Thermodynamics and the measure of entanglement», *Phys. Rev. A* **56**, R3319-R3321 (1997).
- [19] W. K. Wootters, «Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits», *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2245-2248 (1998).

- [20] M. Orszag, *Quantum Optics Including Noise Reduction, Trapped Ions, Quantum Trajectories, and Decoherence*, 3.<sup>a</sup> ed. (Springer Nature, 2016).
- [21] H. Scott y W. K. Wootters, «Entanglement of a Pair of Quantum Bits», *Phys. Rev. Lett.* **78**, 5022-5025 (1997).
- [22] C. Ivorra, *Las fórmulas de Cardano-Ferrari* ().
- [23] M. Abramowitz e I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* (United States Department of Commerce, National Bureau of Standards, 1972), págs. 1-470.