

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Propiedades electromagnéticas diagonales y de transición de
leptones inducidas por neutrinos masivos

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Mónica Salinas Ibañez

asesorada por

Dr. Héctor Novales Sánchez
Dr. J. Jesús Toscano Chavéz

Puebla Pue.
Diciembre 2015

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Propiedades electromagnéticas diagonales y de transición de
leptones inducidas por neutrinos masivos

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Mónica Salinas Ibañez

asesorada por

Dr. Héctor Novales Sánchez

Dr. J. Jesús Toscano Chavéz

Puebla Pue.
Diciembre 2015

Título: Propiedades electromagnéticas diagonales y de transición de leptones inducidas por neutrinos masivos

Estudiante: MÓNICA SALINAS IBAÑEZ

COMITÉ

Dr. Roberto Cartas Fuentevilla
Presidente

Dr. Arturo Fernández Téllez
Secretario

Dr. Gilberto Tavares Velasco
Vocal

Dr. Alfonso Rosado Sánchez
Vocal

Dr. Héctor Novales Sánchez
Dr. J. Jesús Toscano Chavéz
Asesor

Índice general

Resumen	v
Introducción	vii
1. La teoría electrodébil	1
1.1. El sector de Higgs	2
1.2. El sector de Yang-Mills	4
1.3. El sector de Yukawa	5
1.3.1. El sector de quarks de Yukawa	5
1.3.2. El sector de leptones de Yukawa	7
1.4. El sector de corrientes	8
1.4.1. El sector de corrientes de quarks	8
1.4.2. El sector de corrientes leptónicas	9
2. Física de los neutrinos más allá del Modelo Estándar	11
2.1. Matriz PMNS	11
2.2. Términos de masa: Dirac vs Majorana	12
2.3. Evidencias de masas de neutrinos	15
2.3.1. Derivación estándar de la probabilidad de la oscilación del neutrino	15
2.4. Invariancia CP	18
2.5. Mecanismo del sube y baja (seesaw)	19
3. Propiedades electromagnéticas de neutrinos	21
3.1. Reglas de Feynman	22
3.2. Factores de forma electromagnéticos	24
3.3. Cálculo de factores de forma	26
3.4. Momentos dipolar eléctrico y anapolar magnético de transición	28
3.5. Momentos dipolar eléctrico y anapolar magnético diagonales	28
4. Análisis de resultados	31
4.1. Expresiones finales del dipolo eléctrico y magnético	31
4.2. Amplitud al cuadrado	36
4.3. Tasa de decaimiento (Decay-Rate)	40
4.4. Branching ratio	44
4.5. Condiciones de consistencia	45
5. Conclusiones	47

Resumen

En este trabajo de tesis se estudian las propiedades electromagnéticas y de transición de leptones, inducidas por neutrinos masivos. Se utiliza la parametrización más general del vértice electromagnético, la cual contempla la posibilidad de que los leptones externos tengan sabor diferente, se calculan las contribuciones de los neutrinos masivos de Dirac al vértice $\gamma l_\alpha l_\beta$ a nivel de un lazo y con el fotón en la capa de masa (on-shell). De los resultados que se obtienen, se extraen las contribuciones de la nueva física a los factores de forma del momento dipolar eléctrico y anómalo magnético, así como algunas características esenciales de éstos. Obtenido lo anterior, y comparando con los datos experimentales, se derivan cotas sobre los parámetros de nueva física. Así mismo se calcula el Branching Ratio de los diferentes decaimientos posibles y finalmente se obtienen condiciones de consistencia para verificar que son correctos los cálculos que se realizaron.

Introducción

En la frontera de gran longitud de escala, la masa del neutrino está relacionada con la composición y la evolución estructural del Universo [1]. Fue uno de los primeros inventos de la nueva física que nació en los años 20, se considera literalmente un invento porque el físico Wolfgang Pauli lo creó con el objetivo de resolver un problema que se presentaba en las ecuaciones que describían la desintegración radiactiva β [2]. Al descubrimiento de la radiactividad se sumaba una serie de fenómenos, a finales del siglo XIX, para los que las teorías clásicas no tenían explicación. En este caso, la experimentación fue mostrando que no había teoría posible, en el marco de la física clásica, que pudiera describir completamente lo que estaba sucediendo.

Y así nacieron los neutrinos. En 1914 se comprobó que los electrones de la radiación Beta se emiten en un rango continuo de energías. Sin embargo se notaba que esos electrones se producían en una extraña reacción que convertía a un neutrón en un protón. De acuerdo a las leyes de la conservación de la energía y el momento, esos electrones que escapaban del núcleo debían tener alguna energía determinada, pero no era así. O bien la leyes de conservación fallaban o se estaba escapando otra partícula más que el electrón. Aunque, aún, no se había descubierto la existencia del neutrón, esta partícula era demasiado pesada como para que funcionara en la explicación de la radiación Beta. Desesperado por no encontrar alguna solución, Wolfgang Pauli manda una carta [3] a varios físicos, el 4 de diciembre de 1930, en la que sugiere “la posibilidad de que en el núcleo pudieran existir partículas eléctricamente neutras” que se emitieran al mismo tiempo que el electrón. Esto con el fin de asegurar la conservación de la energía y el momento [4]. Enrico Fermi, físico italiano, estudió a detalle estos procesos y nombró a las partículas “neutrinos”, porque tenían que ser menos pesados que los neutrones, pero sin carga eléctrica.

Además Fermi desarrolló la primera teoría de lo que se llamaría “Interacción débil” [5], una de las fuerzas fundamentales responsables de fenómenos naturales como la desintegración radiactiva. Hay además una simetría entre partículas y antipartículas, son partículas similares, pero con cargas opuestas y otras propiedades invertidas. Ahora la gran duda era: ¿Se podría llegar a observar esas nuevas partículas?. Fue hasta 1956, tras casi un cuarto de siglo de la búsqueda de evidencias experimentales, cuando se encontraron los neutrinos. Usando la radiación que escapa de un reactor nuclear se consigue detectar al misterioso neutrino. Posteriormente se detectaron mejor y de manera más eficiente, no solo aquellos neutrinos que se producían en reactores nucleares, sino aquellos que venían del núcleo del sol y de la atmósfera. Fue para 1998 que en un detector, del centro japonés de la mina de Kamioka Mozumi, un tanque de 50,000 toneladas de líquido, llamado Super-Kamiokande [6], se encontró que los neutrinos son las partículas más abundantes del universo y que pueden oscilar mientras viajan por el espacio. Los experimentos más recientes confirman esta teoría y explicar por qué en los experimentos que se han hecho durante los últimos cuarenta años, siempre se detectaban menos neutrinos provenientes del sol de los que teóricamente debían producirse [7].

Al igual que al estudiar la radiación Beta, hace ya cien años, el neutrino apareció para explicar el misterio de la conservación de la energía y el momento. Ahora el misterio de la oscilación de

los neutrinos implica también una contradicción con el Modelo Estándar de la física, ya que por una parte, los experimentos implican que los neutrinos han de tener masa [8], aunque sean muy ligeros, y tienen gran aporte a la materia de todo el Universo. Los neutrinos constituyen al menos el 0.1 % de la densidad crítica del Universo [9], comparable con la fracción compartida por la materia visible. La otra implicación es que las oscilaciones no están bien descritas teóricamente, por lo que se está en espera de resultados experimentales para poder comprender con mayor detalle que es lo que está pasando con estas partículas. El estudio de la física de neutrinos y las implicaciones de los resultados conectan muchas disciplinas en conjunto, desde la física de partículas a la física nuclear, a la Astrofísica y a la Cosmología. Estas investigaciones se realizan con un amplio espectro de técnicas experimentales extendidas sobre diversas escalas de energía con diferentes fuentes de neutrinos. Además, los neutrinos se han utilizado como prueba para estudiar la física electrodébil, QCD, física nuclear o proveer información inaccesible del interior de estrellas y supernovas[10].

En la tesis se tratan las propiedades electromagnéticas de los leptones inducidas por los neutrinos masivos, se estudia el decaimiento $l_\alpha \rightarrow \gamma l_\beta$ a nivel de un lazo y se obtienen los factores de forma del momento dipolar eléctrico y el momento anómalo magnético. Luego se analizan las contribuciones de la nueva física a los factores de forma electromagnéticos y se comparan con datos experimentales para derivar cotas sobre los parámetros de la nueva física. Esto nos permite estudiar el impacto de los neutrinos masivos en las propiedades electromagnéticas diagonales y de transición de los leptones cargados. Se realizaron cálculos fenomenológicos, que involucran correcciones radiativas, para los cuales se hace uso de la paquetería FeynCalc de Mathematica.

La estructura de la tesis es la siguiente: En el capítulo 1 se presenta de manera general la teoría electrodébil y, a partir de las lagrangianas que describen las interacciones bosónicas y fermiónicas, se da una breve descripción del sector de Higgs, el sector de Yang-Mills, el sector de Yukawa y el sector de Corrientes. En el capítulo 2 se trata la física de neutrinos más allá del Modelo Estándar, aquí se mencionan algunos temas relevantes como la matriz PMNS, que es el acrónimo de Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata, los neutrinos de Dirac y Majorana, la evidencia de la masa de los neutrinos, la invariancia CP y el mecanismo de sube y baja (see-saw). En el capítulo 3 se derivan las propiedades electromagnéticas de los leptones por medio de los factores de forma electromagnéticos, para esto se utilizan las identidades de Gordon. El estudio se centra en los factores de forma del momento dipolar eléctrico y el momento anómalo magnético diagonal y de transición. Se describen algunas características de estos factores y se realizan algunas aproximaciones que nos permiten ver cuáles son las contribuciones de la nueva física. Finalmente en el capítulo 4 se muestra el análisis de los resultados. Utilizando propiedades de las funciones de Passarino-Veltman, se dan las expresiones finales para los factores electromagnéticos. Se muestra el cálculo de la amplitud al cuadrado, para después utilizar este resultado en la expresión del Branching Ratio del decaimiento $l_\alpha \rightarrow \gamma l_\beta$. Se obtienen condiciones de consistencia para la masa efectiva del neutrino del muón y para el momento magnético del muón, los cuales se comparan con los datos obtenidos experimentalmente.

Es interesante mencionar que el análisis que se hizo es independiente de modelos (con respecto a las corrientes cargadas, por ejemplo). En la parametrización de corrientes cargadas vectorial y axial se utilizan parámetros ¹, $a_{i\alpha}$ y $v_{i\alpha}$ ², con la finalidad de no comprometerse con algún modelo que describa la interacción entre partículas, éstos adquieren diferentes expresiones en distintos modelos. Se supuso que los neutrinos son masivos y que, en alguna extensión del Modelo Estándar, existen nuevos bosones de norma cargados. Por otra parte, las condiciones para que existan los factores de forma diagonales, es que deben ser cantidades reales, lo cual garantiza que se conserva CP [11]. Una característica importante de los factores de forma electromagnéticos diagonales es la siguiente: el

¹En un principio, estos parámetros pueden ser cantidades complejas

²donde los subíndices i, α etiquetan los sabores de los leptones y los eigenestados de masa de los neutrinos respectivamente

momento dipolar eléctrico se puede expresar en términos de la diferencia $v_{i\alpha}a_{i\alpha}^* - a_{i\alpha}v_{i\alpha}^*$. Mientras que el momento anómalo magnético se puede expresar en términos de sumas y diferencias de las normas de los parámetros $a_{i\alpha}$ y $v_{i\alpha}$. Por otra parte, los factores de forma de transición se pueden expresar como sumas y diferencias de los productos: $a_{i\alpha}v_{i\beta}^*$ y $v_{i\alpha}a_{i\beta}^*$, en el caso del dipolo eléctrico, y de $a_{i\alpha}a_{i\beta}^*$ y $v_{i\alpha}v_{i\beta}^*$ para el momento magnético. Se debe enfatizar que en todos los factores de forma electromagnético se cancelan las divergencias, es decir son cantidades finitas. Una vez que se encontraron los resultados, en los cuales no existen divergencias y que están en términos de los parámetros $a_{i\alpha}$ y $v_{i\alpha}$, ya se aplica a un modelo en particular conocido como *Modelo mínimamente extendido del Modelo Estándar*³[12] y de acuerdo con el modelo de corrientes cargadas corresponde a $a_{i\alpha} = v_{i\alpha} = -\frac{g}{2\sqrt{2}}U_{\alpha i}^*$. Por lo tanto, las propiedades electromagnéticas de los fermiones se pueden emplear como herramientas en la búsqueda de efectos asociados a nueva física, no incluidos en el Modelo Estándar.

³En este modelo se agregan neutrinos derechos al Modelo Estándar

Capítulo 1

La teoría electrodébil

El modelo electrodébil fue introducido por Sheldon Glashow, Abdus Salam y Steven Weinberg (GWS) [13]. Este modelo da una descripción unificada de las interacciones débil y electromagnética. Esta teoría contiene un fotón, el cual es un bosón de norma sin masa que corresponde a una combinación particular de generadores de simetría y tres bosones de norma que adquieren masa por medio del *mecanismo de Higgs* [14].

Este mecanismo, el cual fue descubierto en 1964 por P.W. Higgs [15, 16, 17], F. Englert y R. Brout [18], ocasiona que los bosones de Goldstone ¹ desaparezcan y el campo de norma adquiere masa. Este mecanismo deja el conteo de los estados de espín de la partícula sin cambios: una partícula de espín uno sin masa tiene dos estados de espín, pero una masiva tiene tres estados. Ahora los bosones de Goldstone han convertido el tercer estado (o estado longitudinal) en el campo de norma masivo [20]. Podríamos decir que el mecanismo permite que los bosones de norma sin masa que aparecen en el modelo de grupo de norma local adquieran grados de libertad longitudinales, haciendos finalmente masivos, como lo requiere la teoría [10].

Una característica de la interacción débil es que distingue los estados de helicidad de los fermiones, es decir, los bosones de norma W^\pm y Z se acoplan con diferentes intensidades a dichos estados. Este acoplamiento se cuantifica mediante la representación del grupo electrodébil. Los estados izquierdos de los quarks y los leptones se agrupan en la representación fundamental del grupo $SU_L(2)$ de la siguiente manera:

$$Q_i = \begin{pmatrix} u_i \\ d_i \end{pmatrix}_L, \tag{1.1}$$

$$L_i = \begin{pmatrix} \nu_i \\ l_i \end{pmatrix}_L, \tag{1.2}$$

donde i es un índice de sabor: $u_i = u, c, t$, $d_i = d, s, b$ para los quarks y $l_i = e, \mu, \tau$, $\nu_i = \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ para los leptones. Por otra parte, los estados de helicidad derecha se introducen como singletes de $SU_L(2)$, es decir l_{iR}, u_{iR} y d_{iR} . Los estados de helicidad izquierdos y derechos de un fermión Ψ se definen por

$$\Psi_{L,R} = \frac{1 \mp \gamma_5}{2} \psi \equiv P_{L,R} \Psi. \tag{1.3}$$

¹El rompimiento espontáneo de la simetría global conduce a la presencia de campos escalares de masa cero, los cuales se conocen con el nombre de bosones de Goldstone [19].

CAPÍTULO 1. LA TEORÍA ELECTRODÉBIL
1.1. EL SECTOR DE HIGGS

El valor de la hipercarga, Y , de los estados izquierdo y derecho satisfacen la siguiente relación:

$$Q = T^3 + \frac{Y}{2}, \quad (1.4)$$

donde $T^3 = \frac{\sigma^3}{2}$, siendo σ^3 la matriz de Pauli y Q el operador de carga eléctrica, el cual es una combinación lineal de los generadores del grupo $SU_L(2) \times U_Y(1)$. En la Teoría electrodébil (TED), los neutrinos solo aparecen en sus estados de helicidad izquierda debido a que se considera que tienen masa exactamente igual a cero. Pero experimentos recientes indican que éstas partículas poseen masas diferentes de cero, aunque, en efecto, son muy pequeñas. Otra característica importante de la interacción débil, es que los bosones de norma correspondientes son masivos (a diferencia del fotón, por ejemplo, que tiene masa en reposo igual a cero). Las masas de éstos bosones de norma se introducen en la teoría a través del rompimiento espontáneo de la simetría. El grupo electrodébil es roto espontáneamente, a la escala de Fermi, $v = (\sqrt{2}G_F)^{-1/2} = 246 \text{ GeV}$, al grupo electromagnético por medio de un sector de campos escalares (dados en una representación no trivial del grupo). Para generar las masas de los tres bosones de norma asociados con la interacción débil, se requiere de al menos tres campos escalares, pero el número mínimo de tales campos que se pueden introducir de manera consistente son los cuatro contenidos en un doblete complejo de $SU_L(2)$. Después del rompimiento espontáneo de la simetría (RES) electrodébil, se obtiene la presencia de tres pseudobosones de Goldstone y un nuevo campo escalar neutro físico (conocido como escalar de Higgs). Asignando el número de hipercarga $Y = +1$ al doblete escalar de Higgs, el grupo $SU_L(2) \times U_Y(1)$ es roto espontáneamente al grupo electromagnético $U_e(1)$, cuyo generador queda expresado como una combinación lineal del generador del grupo $U_Y(1)$, $\frac{Y}{2}$ y del generador del grupo $SU_L(2)$, T^3 , de acuerdo con la ecuación (1.4).

El lagrangiano de la TED se divide en dos partes:

- a) Contiene únicamente a los campos bosónicos (W^\pm, Z, γ, H): se divide en los sectores de **Higgs** y **Yang-Mills**.
- b) Contiene mezclas de bosones y fermiones (sector bosónico-fermiónico): se divide en los sectores de **Corrientes** y de **Yukawa**

Por lo tanto, el lagrangiano se puede escribir en la forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^B + \mathcal{L}^F, \quad (1.5)$$

donde

$$\mathcal{L}^B = \mathcal{L}^H + \mathcal{L}^{YM}, \quad (1.6)$$

$$\mathcal{L}^F = \mathcal{L}^C + \mathcal{L}^Y, \quad (1.7)$$

con $\mathcal{L}^H, \mathcal{L}^{YM}, \mathcal{L}^C$ y \mathcal{L}^Y representando los sectores de Higgs, Yang-Mills, Corrientes y Yukawa respectivamente. La renormalizabilidad de la teoría exige que los lagrangianos, mencionados anteriormente, sean invariantes de Lorentz y electrodébiles, además que tengan hasta dimensión cuatro con respecto de sus unidades de masa.

1.1. El sector de Higgs

En este sector se emplea al mecanismo de Higgs que permite dar masa a los bosones de norma débiles W^\pm, Z y al bosón de Higgs, también determina las interacciones entre éstas partículas. El sector de Higgs, o sector escalar, del Modelo Estándar se escribe como

$$\mathcal{L}^H = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) + V(\Phi^\dagger, \Phi), \quad (1.8)$$

donde

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_a \\ \phi_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix},$$

es el doblete de Higgs complejo, el cual tiene hipercarga $Y = +1$, y está constituido por los campos escalares ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 y ϕ_4 . La derivada covariante, D_μ , del grupo electrodébil en la representación de dobletes tiene la siguiente forma:

$$D_\mu \Phi = \left[\partial_\mu - ig \frac{\sigma^a}{2} W_\mu^a - ig' \frac{Y}{2} B_\mu \right] \Phi, \quad (1.9)$$

donde σ^a ($a = 1, 2, 3$) representa a las matrices de Pauli, en tanto que $\frac{\sigma^a}{2}(W_\mu^a)$ Y $\frac{Y}{2}(B_\mu)$ son los generadores (campos de norma) asociados con los grupos $SU_L(2)$ y $U_Y(1)$ respectivamente, g y g' son las constantes de acoplamiento, respectivas a cada grupo. Se define el potencial de Higgs, $V(\Phi^\dagger, \Phi)$, como

$$V(\Phi^\dagger, \Phi) = \mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2, \quad (1.10)$$

donde λ , presente en los acoplamientos escalares cuárticos, es una constante adimensional y positiva². El mínimo del potencial $V(\Phi)$ corresponde al vacío, que es el estado de menor energía. Si $\mu^2 > 0$ se tiene el caso de una teoría de escalares masivos con un estado único de vacío. Si $\mu^2 < 0$, se tiene el caso de un vacío degenerado, caracterizado por los puntos de la superficie

$$\Phi_0^\dagger \Phi_0 = |\phi_a^0|^2 + |\phi_b^0|^2 = \frac{-\mu^2}{2\lambda}, \quad (1.11)$$

donde $\Phi_0 = \langle 0 | \Phi | 0 \rangle$ es el valor esperado, en el vacío, del doblete de Higgs, el cual rompe espontáneamente a la simetría electrodébil al grupo electromagnético. Debido a que la componente ϕ_a del doblete contiene la información del grupo electromagnético, es necesario que la componente ϕ_b desarrolle el valor esperado del vacío. Esto significa que Φ_0 debe ser invariante bajo el grupo $U_e(1)$, de manera que si $U \in U_e(1)$, entonces $U\Phi_0 = \Phi_0$, lo cual implica que el generador de este grupo, dado por la ecuación (1.4), lo aniquila: $Q\Phi_0 = 0$. Sin pérdida de generalidad se puede elegir

$$\Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

con

$$v = \frac{-\mu^2}{\lambda} > 0. \quad (1.13)$$

Cualquier otra elección está relacionada con la expresión anterior por medio de una transformación global del grupo electrodébil, como se mencionó anteriormente, cuando la simetría es global, el resultado es la presencia de los bosones de Goldstone.

El RES, aparece como consecuencia de elegir a uno del número infinito de vacíos que existen. La teoría debe ser considerada en el entorno del estado de mínima energía, para ello se realiza la traslación

$$\Phi \rightarrow \Phi_0 + \Phi = \begin{pmatrix} 0 + G_w^+ \\ \frac{v + H + iG_z}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

²Que el potencial $V(\Phi^\dagger, \Phi)$ sea una función acotada por un mínimo requiere que λ sea positiva.

donde G_w^+ y G_z son los pseudobosones de Goldstone asociados con los bosones de norma débiles W^\pm y Z respectivamente. Al sustituir la expresión para Φ en la parte cinética de \mathcal{L}^H , $(D_\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi)$, se obtiene que los campos eigenestados de norma, W_μ^a y B_μ , se relacionan con los eigenestados de masa, W_μ^\pm, Z_μ y A_μ por

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \pm W_\mu^2), \quad (1.15)$$

$$M_W = \frac{gv}{2}, \quad (1.16)$$

$$W_\mu^3 = c_W Z_\mu + s_W A_\mu, \quad (1.17)$$

$$B_\mu = -s_W Z_\mu + c_W A_\mu, \quad (1.18)$$

$$M_Z = c_W M_W, \quad (1.19)$$

$$M_A = 0, \quad (1.20)$$

donde $s_W = \sin\theta_W, c_W = \cos\theta_W$ y θ_W es, el ángulo de mezcla débil, definido por $\tan\theta_W = \frac{g'}{g}$. Las expresiones anteriores identifican al campo A_μ con el fotón.

1.2. El sector de Yang-Mills

Este sector caracteriza la estructura no Abelian del grupo electrodébil. Los invariantes no pueden ser construidos con los campos de norma directamente, sino por medio de los tensores de campo $SU_L(2) \times U_Y(1)$ dados por

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu} &= \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + ig[W_\mu, W_\nu], \\ B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \end{aligned}$$

donde $W_{\mu\nu} = T^a W_\mu^a$. Eliminando los generadores de la primera ecuación, se obtiene el tensor de campo de Yang-Mills

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g\varepsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c. \quad (1.21)$$

Bajo el grupo electrodébil, los tensores de campo se transforman en forma covariante:

$$W_{\mu\nu}^\dagger = U W_{\mu\nu} U^\dagger, \quad U \in SU_L(2) \quad (1.22)$$

$$B_{\mu\nu}^\dagger = B_{\mu\nu}. \quad (1.23)$$

Con estos objetos covariantes y utilizando la relación $Tr[T^a T^b] = \frac{1}{2}\delta^{ab}$ se puede construir el lagrangiano de Yang-Mills, el cual es invariante de norma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{YM} &= -\frac{1}{2} Tr[W_{\mu\nu} W^{\mu\nu}] - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W_a^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

En términos de los campos eigenestados de masa, el lagrangiano de Yang-Mills toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{YM} &= -\frac{1}{2} \hat{W}_{\mu\nu}^+ \hat{W}^{-\mu\nu} - \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &\quad + F_{\mu\nu} W^{-\mu} W^{+\nu} + igc_W Z_{\mu\nu} W^{-\mu} W^{+\nu} \\ &\quad - 2g^2 W_{\mu\nu}^+ W^{-\mu\nu} (W^{-\mu} W^{+\nu} - W^{+\mu} W^{-\nu}), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\hat{W}_{\mu\nu}^+ &= \hat{D}_\mu W_\nu^+ - \hat{D}_\nu W_\mu^+, \\ Z_{\mu\nu} &= \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu, \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu F_\nu - \partial_\nu F_\mu,\end{aligned}$$

con $\hat{D}_\mu = \partial_\mu - igW_\mu^3$.

1.3. El sector de Yukawa

El estudio de los fermiones dentro del Modelo Estándar (ME) se lleva a cabo a través de los sectores de Yukawa y el de Corrientes, los cuales tienen estructura de Lorentz diferente. En primero, la estructura es de tipo escalar y pseudoescalar. Este sector genera las masas de los fermiones quirales por medio del mecanismo de Higgs y contiene productos de campos eigenestados de norma que vinculan fermiones de diferente helicidad acoplados al doblete de Higgs. En la teoría electrodébil no se definen los estados de helicidad derecha para los neutrinos, por lo que éstos no pueden tener ninguna contribución física en este sector. El sector de Yukawa corresponde a invariantes electrodébiles de dimensión cuatro que se pueden construir con los dobletes izquierdos de los fermiones, los singletes derechos y el doblete de Higgs. En el caso de los leptones, considerando que no existen los neutrinos derechos, ν_{iR} , se tiene el siguiente invariante de Lorentz y electrodébil

$$- Y_{ij}^l \bar{L}_i \Phi l_{Rj} + h.c. \quad (1.24)$$

donde los coeficientes, Y_{ij}^l , son adimensionales y arbitrarios, se conocen con el nombre de constantes de Yukawa. Considerando que en el caso de los quarks existen estados derechos para los dos miembros del doblete izquierdo, es necesario considerar otro objeto que transforma covariantemente bajo el grupo $SU_L(2) \times U_Y(1)$,

$$\tilde{\Phi} = -\sigma^2 \Phi^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^- \\ \phi^{0*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix}, \quad (1.25)$$

el cual tiene hipercarga +1. Por lo tanto, de forma similar a la ecuación (1.24), se puede formar el siguiente invariante de Lorentz y electrodébil para el caso de los quarks:

$$- Y_{ij}^u \bar{Q}_i \tilde{\Phi} u_{Rj} - Y_{ij}^d \bar{Q}_i \tilde{\Phi} d_{Rj} + h.c. \quad (1.26)$$

La expresión anterior, después del RES, genera las masas de los quarks, así como sus interacciones con el bosón de Higgs. El lagrangiano renormalizable más general se puede descomponer en dos partes independientes

$$\mathcal{L}^Y = \mathcal{L}_q^Y + \mathcal{L}_l^Y, \quad (1.27)$$

donde \mathcal{L}_q^Y y \mathcal{L}_l^Y son los lagrangianos del sector de quarks y leptones respectivamente.

1.3.1. El sector de quarks de Yukawa

El lagrangiano del sector de quarks de Yukawa está dado por

$$\mathcal{L}_q^Y = -Y_{ij}^u \bar{Q}'_i \tilde{\Phi} u'_{Rj} - Y_{ij}^d \bar{Q}'_i \tilde{\Phi} d'_{Rj} + h.c. \quad (1.28)$$

donde existe una suma sobre índices de sabor i, j . La prima denota los campos eigenestados de norma. La no conservación del sabor, en el lagrangiano, se debe a que las matrices Y^u y Y^d no están

CAPÍTULO 1. LA TEORÍA ELECTRODÉBIL
1.3. EL SECTOR DE YUKAWA

sujetas a ningún tipo de restricción y en particular no son diagonales. Se definen los siguientes vectores en el espacio de sabor

$$U' = \begin{pmatrix} u' \\ c' \\ t' \end{pmatrix}, \quad D' = \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix}, \quad E' = \begin{pmatrix} e' \\ \mu' \\ \tau' \end{pmatrix}, \quad \nu' = \begin{pmatrix} \nu'_e \\ \nu'_\mu \\ \nu'_\tau \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

En la norma unitaria, donde los bosones de Goldstone son cero, el doblete de Higgs tiene la forma

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H^0 \end{pmatrix}. \quad (1.30)$$

En esta norma y en términos de los vectores U' y D' , definidos en la ecuación (1.29), el lagrangiano de Yukawa para quarks tiene la forma

$$\mathcal{L}_q^Y = - \left[1 + \frac{H^0}{v} \right] [\bar{U}'_L M^u U'_R + \bar{D}'_L M^d D'_R] + h.c. \quad (1.31)$$

donde M^u y M^d son matrices 3×3 cuyas componentes son de la forma

$$M_{ij}^u = \frac{v}{\sqrt{2}} Y_{ij}^u, \quad M_{ij}^d = \frac{v}{\sqrt{2}} Y_{ij}^d. \quad (1.32)$$

Las masas de los quarks se definen diagonalizando la parte cuadrática del lagrangiano, realizando la transformación unitaria

$$U_L = V_L^u U'_L, \quad D_L = V_L^d D'_L, \quad (1.33)$$

$$U_R = V_R^u U'_R, \quad D_R = V_R^d D'_R. \quad (1.34)$$

donde las matrices $V_{L,R}^{u,d}$ deben ser unitarias si es que se quiere preservar la estructura canónica de los términos cinéticos que aparecen en el sector de corrientes. Por ejemplo

$$\begin{aligned} i\bar{U}'_L \gamma^\mu \partial_\mu U'_L &= i\bar{U}_L V_L^u V_L^{u\dagger} \gamma^\mu \partial_\mu U_L \\ &= i\bar{U}_L \gamma^\mu \partial_\mu U_L, \end{aligned}$$

es decir, la unitariedad de estas matrices de rotación garantiza la existencia de propagadores en forma canónica. En términos de los nuevos campos, el lagrangiano es de la forma

$$\mathcal{L}_q^Y = - \left[1 + \frac{H^0}{v} \right] [\bar{U}_L V_L^u M^u V_L^{u\dagger} U_R + \bar{D}_L V_L^d M^d V_L^{d\dagger} D_R] + h.c. \quad (1.35)$$

Del álgebra lineal existe un teorema el cual dice:

Teorema: Para cualquier matriz M siempre es posible encontrar dos matrices unitarias A y B , tal que AMB es una matriz real y diagonal

La demostración del teorema se sigue directamente de la descomposición polar de la matriz M dada por

$$M = HU,$$

donde H es una matriz hermítica y U es unitaria. Dado que toda matriz hermítica puede ser diagonalizada por una matriz unitaria, esto es, $S^\dagger HS$ es diagonal con $S^\dagger = S^{-1}$, tomando $A = S^\dagger$, $B = U^\dagger S$, entonces

$$AMB = (S^\dagger)M(U^\dagger S) = (S^\dagger)HU(U^\dagger S) = S^\dagger HS$$

la cual es una matriz real y diagonal, debido a que los eigenvalores de la matriz $H = H^\dagger$ son reales.

Debido a que las matrices $V_{L,R}^{u,d}$ son unitarias, el teorema anterior garantiza que las matrices $V_L M V_R^\dagger$ sean reales y diagonales, como lo requiere la definición del término de masa. Se puede ver que las matrices $V_{L,R}$ diagonalizan simultáneamente todo el sector de Yukawa, de manera que

$$\mathcal{L}_q^Y = \left[1 + \frac{H^0}{v} \right] [\bar{U}_L \bar{M}^u U_R + \bar{D}_L \bar{M}^d D_R] + h.c. \quad (1.36)$$

donde las matrices \bar{M}^u y \bar{M}^d están dadas por

$$\bar{M}^u = \begin{pmatrix} M_u & 0 & 0 \\ 0 & M_c & 0 \\ 0 & 0 & M_t \end{pmatrix}, \quad \bar{M}^d = \begin{pmatrix} M_d & 0 & 0 \\ 0 & M_s & 0 \\ 0 & 0 & M_b \end{pmatrix}. \quad (1.37)$$

El sector de Yukawa en términos de los eigenestados de masa conserva el sabor de quarks, ya que el bosón de Higgs se acopla a pares del mismo tipo de éstos.

1.3.2. El sector de leptones de Yukawa

El lagrangiano está dado por

$$\mathcal{L}_l^Y = -Y_{ij}^l \bar{L}_i \Phi l'_{Rj} + h.c. \quad (1.38)$$

En la norma unitaria y usando los vectores en el espacio de sabor definidos en la ecuación (1.29) se tiene

$$\mathcal{L}_l^Y = - \left[1 + \frac{H^0}{v} \right] \bar{E}'_L M^l E'_R + h.c. \quad (1.39)$$

donde se ha definido la matriz M^l como

$$M_{ij}^l = \frac{v}{\sqrt{2}} Y_{ij}^l.$$

Se puede observar que el neutrino derecho desaparece totalmente del sector leptónico de Yukawa, por lo que podemos elegir la transformación para el vector $\nu' = (\nu'_e, \nu'_\mu, \nu'_\tau)$ de la manera mas conveniente. En analogía con el caso de los quarks, las masas de los leptones se definen diagonalizando la parte cuadrática del lagrangiano, mediante la transformación unitaria

$$\begin{aligned} E_L &= V_L^l E'_L, \\ E_R &= V_R^l E'_R, \end{aligned} \quad (1.40)$$

donde $V_{L,R}^l$ tienen que ser matrices unitarias para preservar la estructura canónica de los términos cinéticos que aparecen en el sector de Corrientes. El lagrangiano en términos de los campos rotados tiene la siguiente forma

$$\mathcal{L}_l^Y = - \left[1 + \frac{H^0}{v} \right] \bar{E}_L V_L^l M^l V_R^{l\dagger} E_R + h.c. \quad (1.41)$$

Las matrices $V_L^l M^l V_R^{l\dagger}$ son reales y diagonales ya que las matrices $V_{R,L}^l$ son unitarias, además diagonalizan simultáneamente todo el sector de Yukawa

$$\mathcal{L}_l^Y = - \left[1 + \frac{H^0}{v} \right] \bar{E}_L \bar{M}^l E_R + h.c. \quad (1.42)$$

donde la matriz \bar{M}^l está dada por

$$\bar{M}^l = \begin{pmatrix} M^e & 0 & 0 \\ 0 & M_\mu & 0 \\ 0 & 0 & M_\tau \end{pmatrix}. \quad (1.43)$$

En términos de los eigenestados de masa, tal y como ocurre en el sector de quarks, el sector de Yukawa para leptones conserva el sabor y el bosón de Higgs solo se acopla al mismo leptón cargado.

1.4. El sector de corrientes

Este sector se genera al sustituir la derivada ordinaria en la parte cinética de los fermiones quirales por la derivada covariante asociada al grupo electrodébil, lo cual genera términos de interacción caracterizados por las estructuras de Lorentz γ_μ y $\gamma_\mu\gamma_5$. Las interacciones de los fermiones con los bosones de norma, dan lugar a las corrientes cargadas y neutras. El sector de corrientes expresado en términos de eigenestados de masa conserva el sabor entre familias en el caso de corrientes cargadas (estas interacciones son mediadas por los bosones W^\pm) y entre miembros de la misma familia en el caso de las corrientes neutras (estas interacciones son mediadas por el bosón Z). Ésto se debe a la necesidad de definir correctamente a los términos cinéticos, los cuales no pueden involucrar el producto de dos términos de diferentes familias, es decir; la expresión de la forma $i\bar{f}_{Lj}\gamma^\mu\partial_\mu f_{Li}$ con i distinto de j , no tiene interpretación directa en el contexto de campo libre.

El lagrangiano se descompone en dos partes, una que tiene que ver con los quarks únicamente y la otra con los leptones, esto es:

$$\mathcal{L}^c = \mathcal{L}_q^c + \mathcal{L}_l^c, \quad (1.44)$$

donde \mathcal{L}_q^c y \mathcal{L}_l^c representan los sectores de corrientes de quarks y de leptones respectivamente.

1.4.1. El sector de corrientes de quarks

El lagrangiano correspondiente está dado por

$$\mathcal{L}_q^c = i\bar{Q}'_i\gamma^\mu D_\mu Q'_i + i\bar{u}'_{Ri}\gamma^\mu D_\mu u'_{Ri} + i\bar{d}'_{Ri}\gamma^\mu D_\mu d'_{Ri}, \quad (1.45)$$

donde existe una suma sobre el índice de sabor i y campos eigenestados de norma son denotados con una prima. En la norma unitaria y usando los vectores definidos en el espacio de sabor, dados en la ecuación (1.29), se puede escribir

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_q^c = & i\bar{U}'_L\gamma^\mu\partial_\mu U'_L + i\bar{U}'_R\gamma^\mu\partial_\mu U'_R + i\bar{D}'_L\gamma^\mu\partial_\mu D'_L + i\bar{D}'_R\gamma^\mu\partial_\mu D'_R \\ & + \frac{g}{\sqrt{2}}J_\mu^+ W^{-\mu} + h.c. \\ & + [g_L^u\bar{U}'_L\gamma_\mu U'_L + g_R^u\bar{U}'_R\gamma_\mu U'_R + g_L^d\bar{D}'_L\gamma_\mu D'_L + g_R^d\bar{D}'_R\gamma_\mu D'_R] V^\mu, \end{aligned}$$

con $V = \gamma, Z$ y $J_\mu^+ = \bar{u}'_{Li}\gamma_\mu\tau^+d'_{Li}$, donde τ^+ , es generador del grupo $SU(2)$. Pasando a eigenestados de masa por medio de matrices de rotación dadas en las ecuaciones (1.33) y (1.34) y utilizando la unitariedad de dichas matrices, se tienen dos tipos de corrientes

- Las corrientes neutras conservan el sabor, por ejemplo

$$\bar{U}'_L\gamma_\mu U'_L = \bar{U}_L V_L^\mu \gamma_\mu V_L^{u\dagger} U_L = \bar{U}_L \gamma_\mu U_L, \quad (1.46)$$

análogamente para los términos

$$\bar{U}'_R \gamma^\mu \partial U'_R, \quad \bar{D}'_L \gamma^\mu D'_L, \quad \bar{D}'_R \gamma^\mu D'_R. \quad (1.47)$$

- Las corrientes cargadas son diferentes ya que involucran quarks de diferentes familias, en éste caso

$$J_\mu^+ = \bar{u}'_{Li} \gamma_\mu \tau^+ d'_{Li} = \bar{U}'_L \gamma_\mu D'_L = \bar{U}_L \gamma_\mu \left(V_L^u V_L^{d\dagger} \right) D_L = \bar{U}_L \gamma_\mu V D_L \quad (1.48)$$

donde $V = V_L^u V_L^{d\dagger}$, es la matriz de Kobayashi-Maskawa.

Existe en general un efecto observable de violación de sabor leptónico que se transfiere desde el sector de Yukawa. Este es un fenómeno relacionado con la definición de las masas de los fermiones quirales.

1.4.2. El sector de corrientes leptónicas

El lagrangiano tiene la siguiente forma

$$\mathcal{L}_l^c = i \bar{L}'_i \gamma^\mu D_\mu L'_i + i \bar{l}'_{Ri} \gamma^\mu D_\mu l'_{Ri}. \quad (1.49)$$

el cual conserva el sabor en términos de los eigenestados de norma. En términos de la norma unitaria y de los vectores en el espacio de sabor definidos en la ecuación (1.29), el lagrangiano se puede escribir como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_l^c = & i \bar{E}'_L \gamma^\mu \partial_\mu E'_L + i \bar{E}'_R \gamma^\mu \partial_\mu E'_R + i \bar{\nu}'_L \gamma^\mu \partial_\mu \nu'_L \\ & + \frac{g}{\sqrt{2}} J_\mu^+ W^{-\mu} + h.c. \\ & + [g_L^l \bar{E}'_L \gamma_\mu E'_L + g_R^l \bar{E}'_R \gamma_\mu E'_R + g_L^\nu \bar{\nu}'_L \gamma_\mu \nu'_L] V^\mu, \end{aligned} \quad (1.50)$$

donde $J_\mu^+ = \bar{\nu}'_{Li} \gamma_\mu \tau^+ l'_{Li}$ y $V = \gamma, Z$. Debido a que el neutrino desaparece totalmente del sector leptónico de Yukawa en esta norma, podemos elegir la transformación de estos campos de manera conveniente, en particular, de manera que elimine los efectos de violación de sabor en las corrientes cargadas. Pidiendo que los términos cinéticos deben mantener su forma canónica, las transformaciones deben ser unitarias, así que se puede elegir a las matrices de rotación E_L y E_R de la siguiente manera:

$$E_L = V_L^l E'_L, \quad (1.51)$$

$$E_R = V_R^l E'_R, \quad (1.52)$$

$$\nu_L = V_L^\nu \nu'_L, \quad (1.53)$$

donde se ha transformado a los neutrinos con la matriz V_L^l . Con la elección anterior podemos ver que el doblete izquierdo se transforma como

$$L_i = V_{Lij}^l L'_j, \quad (1.54)$$

donde V_L^l actúa sobre cada componente de L_i . Utilizando la definición de J_μ^+ y las ecuaciones (1.51), (1.52), (1.53) y (1.54) se tiene

CAPÍTULO 1. LA TEORÍA ELECTRODÉBIL
1.4. EL SECTOR DE CORRIENTES

$$J_\mu^+ = \bar{L}'_i \gamma_\mu \tau^+ L'_i = \bar{L}_j \gamma_\mu V_{Lji}^l V_{Lik}^{l\dagger} \tau^+ L_k = \delta_{jk} \bar{L}_j \gamma_\mu \tau^+ L_k = \bar{L}_j \gamma_\mu \tau^+ L_j, \quad (1.55)$$

es decir no hay cambio de sabor. La ausencia de violación de sabor en el sector leptónico de corrientes no solo se debe a la inexistencia del neutrino derecho, sino que originalmente es invariante de sabor.

Capítulo 2

Física de los neutrinos más allá del Modelo Estándar

La masa de los neutrinos es uno de los objetos de estudio más importante en la física más allá del Modelo Estándar. Desde la propuesta de Pauli, los neutrinos masivos han sido un tema de intensa investigación experimental y teórica. En un inicio, la masa de los neutrinos se supuso que era del orden de la masa del electrón e incluso sin masa. Ahora sabemos que los neutrinos tienen masa, aunque se conocen sólo dos pequeños valores de las diferencias de masas cuadráticas. El origen de la pequeña masa del neutrino es aún un misterio. Se cree comúnmente que sus masas son una manifestación de baja energía de la física más allá del Modelo Estándar, y su pequeñez se debe a la supresión generada por una nueva escala de alta energía, tal vez, relacionada a la unificación de fuerzas.

2.1. Matriz PMNS

En el lenguaje de teoría de campos, las mediciones experimentales de las propiedades de los neutrinos pueden ser codificadas en un “término de masa de neutrino”, denotado por m_ν , en la lagrangiana. El Modelo Estándar establece que éste término es idénticamente cero, pero sin ninguna razón de peso, en contraste con la condición de que el fotón no tiene masa que es generada por la invariancia de norma. Las estructuras detalladas y los valores de este término pueden revelar mucho acerca de las Teorías de Gran Unificación (GUT). El término de masa del neutrino puede ser expresado como

$$m_\nu = \bar{\nu}_R \cdot M \cdot \nu_L, \quad (2.1)$$

o en la base de masas como

$$m_\nu = \bar{\mathbf{n}}_R \cdot M_D \cdot \mathbf{n}_L, \quad (2.2)$$

donde ν y \mathbf{n} son los vectores de eigenestados de sabor y de masa respectivamente. La matriz M , está relacionada con la matriz de masa diagonalizada, M_D por

$$M = U^T \cdot M_D \cdot U. \quad (2.3)$$

Donde U es la matriz de mezcla de los eigenestados de masa y de sabor. La propiedad fundamental intrínseca del neutrino ν_i , que es de gran interés, es su masa m_i (para $i = 1, 2, 3$), y se obtienen de la matriz diagonal:

CAPÍTULO 2. FÍSICA DE LOS NEUTRINOS MÁS ALLÁ DEL MODELO ESTÁNDAR

2.2. TÉRMINOS DE MASA: DIRAC VS MAJORANA

$$M_D = \text{Diag}(m_1, m_2, m_3). \quad (2.4)$$

La “mezcla de neutrinos” [9] se evidencia debido a los elementos U_{li} de la matriz U . Los términos m_i y U_{li} son medibles experimentalmente, de los cuales puede ser construida la matriz M . La nueva escala física de alta energía, al igual que los parámetros del rompimiento de la simetría y la generación de masa, se espera que dejen sus huellas en la matriz M . Es sabido que hay tres sabores de neutrinos ligeros acoplados mediante interacciones débiles al bosón de norma Z . Similar al sector de quarks, los eigestados de sabor (o interacción) ν_l son una combinación lineal de los eigenestados de masa ν_i por medio de la matriz de mezcla 3×3 unitaria, U , usualmente llamada *Matriz PMNS* (Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sa kata). Denotando los eigenestados de sabor y masa respectivamente por

$$\nu = \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}.$$

Tenemos

$$\nu = U\mathbf{n}, \quad (2.5)$$

donde

$$U = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix}.$$

Los elementos de la matriz PMNS son parámetros fundamentales del sector de sabor leptónico del Modelo Estándar. La condición de unitariedad implica que U puede ser descrita por cuatro variables independientes las cuales son usualmente parametrizadas por

$$U \equiv U(\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}, \delta), \quad (2.6)$$

donde θ_{ij} son los ángulos entre ν_i y ν_j , y δ es una fase que caracteriza posible violación de CP.

2.2. Términos de masa: Dirac vs Majorana

Siendo electricamente neutros, los neutrinos pueden ser partículas de *Dirac* o *Majorana*, identificados por si los neutrinos y antineutrinos son diferentes o los mismos, respectivamente. La diferencia esencial de éstos dos tipos de neutrinos radica en el número de grados de libertad que caracteriza a cada uno: el neutrino de Dirac masivo requiere de cuatro grados de libertad, mientras que el neutrino de Majorana requiere sólo de dos. Como se mencionó anteriormente, una implicación importante de esto es que en el caso de los neutrinos de Majorana, la partícula coincide con la antipartícula, lo que se expresa, matemáticamente, a través de la *condición de Majorana*, $\nu^c = \nu$, donde ν^c es el campo de carga conjugada que le corresponde al campo fermiónico ν . La parametrización de la matriz PMNS es diferente, dependiendo de si los neutrinos son partículas de Majorana o de Dirac.

- Para neutrinos de Dirac, una parametrización conveniente de esta matriz es [57]

$$U = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

CAPÍTULO 2. FÍSICA DE LOS NEUTRINOS MÁS ALLÁ DEL MODELO ESTÁNDAR

2.2. TÉRMINOS DE MASA: DIRAC VS MAJORANA

donde se ha ocupado la notación $c_{ab} = \cos\theta_{ab}$ y $s_{ab} = \sin\theta_{ab}$. Como se puede apreciar en la ecuación anterior, la matriz PMNS para neutrinos de Dirac se parametriza mediante los tres ángulos de mezcla θ_{12} , θ_{13} y θ_{23} , y una fase compleja, δ , conocida como la fase de Dirac. Los valores de los ángulos de mezcla y la fase de Dirac se encuentran en los rangos $0 \leq \theta_{ab} \leq \frac{\pi}{2}$ y $0 \leq \delta \leq 2\pi$.

- Para los neutrinos de Majorana la situación diferente, ya que la parametrización de U requiere de dos fases complejas adicionales, las cuales reciben el nombre de fases de Majorana. En este contexto, las fases de Majorana se pueden factorizar, de manera que la matriz PMNS se expresa como

$$U = U^D D^M, \quad (2.8)$$

donde D^M es una matriz diagonal de la forma

$$D^M = \text{diag}(e^{i\lambda_1}, e^{i\lambda_2}, e^{i\lambda_3}), \quad (2.9)$$

con $\lambda_1 = 0$. Por otra parte, la matriz U^D se parametriza como la matriz mostrada en la ecuación (2.7). Una implicación de la factorización mostrada en la ecuación (2.9) es que los experimentos que involucran oscilaciones de neutrinos no son sensibles a las masas de Majorana. Las fases complejas son fuente de violación de la simetría discreta CP , pero es necesaria para explicar la asimetría bariónica en el Universo [58].

Considerando por simplicidad solo una generación, los campos quirales ν_L y ν_R son los bloques principales en la lagrangiana del neutrino. Sabemos que los campos quirales ν_L existen, porque están presentes en el Modelo Estándar y entran en la lagrangiana de interacciones débiles de corriente cargada. No sabemos si el campo quiral ν_R exista, aunque, está permitido por la simetría del ME. Si solo existe ν_L , la lagrangiana del neutrino puede contener solo el término de masa de Majorana [10]

$$\mathcal{L}_{mass}^L = \frac{1}{2} m_L \nu_L^T \mathcal{C}^\dagger \nu_L + h.c., \quad (2.10)$$

donde \mathcal{C} es la matriz de conjugación de carga y el neutrino es una partícula de Majorana. Si ν_R también existe, la lagrangiana del neutrino puede contener el término de masa de Dirac

$$\mathcal{L}_{mass}^D = -m_D \bar{\nu}_R \nu_L + h.c., \quad (2.11)$$

la cual implicaría que el neutrino es una partícula de Dirac. Sin embargo, además del término de masa de Dirac en la ecuación (2.11), la lagrangiana del neutrino puede también contener el término de masa de Majorana en la ecuación (2.10) para ν_L y el término de masa de Majorana

$$\mathcal{L}_{mass}^R = \frac{1}{2} m_R \nu_R^T \mathcal{C}^\dagger \nu_R + h.c., \quad (2.12)$$

para ν_R . En general es posible tener el término de masa del neutrino Dirac-Majorana

$$\mathcal{L}_{mass}^{D+M} = \mathcal{L}_{mass}^D + \mathcal{L}_{mass}^L + \mathcal{L}_{mass}^R. \quad (2.13)$$

Esto es una sorpresa, porque de todas las partículas elementales cocidas que tienen ambas componente quirales (derecho e izquierdo), solo los neutrinos pueden tener los términos de masa de Majorana \mathcal{L}_{mass}^L y \mathcal{L}_{mass}^R . Esta implica que los neutrinos son partículas muy especiales que pueden generar nueva física a través de la violación del número leptónico de los términos de Majorana. El término de masa de Majorana en la ecuación (2.10) para ν_L no está permitido por las simetrías del ME porque no es invariante bajo las transformaciones $SU(2)_L \times U(1)_Y$ (sin embargo, puede

CAPÍTULO 2. FÍSICA DE LOS NEUTRINOS MÁS ALLÁ DEL MODELO ESTÁNDAR

2.2. TÉRMINOS DE MASA: DIRAC VS MAJORANA

ser generado por nueva física más allá del ME). Por otra parte, el término de masa de Majorana en la ecuación (2.12) para ν_R es permitido por las simetrías del ME, porque ν_R es singlete de $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ [10].

La masa de Majorana m_R en la ecuación (2.12) puede ser escogido real y positiva por una fase apropiada de campo quirral ν_R . Una vez que la fase de ν_R es fija, la masa de Dirac m_D en la ecuación (2.11) puede ser escogido real y positivo por una fase apropiada del campo quirral ν_L . Sin embargo, una vez que las fases de ν_L y ν_R son fijadas, no hay libertad adicional para cancelar una posible fase compleja de la masa de Majorana en la ecuación (2.10). Por consiguiente, en lo que sigue se considerará real y positivo m_R y m_D y complejo m_L . Para entender las implicaciones del término de masa de Dirac-Majorana en la ecuación (2.13), es útil definir la matriz columna de campos quirales izquierdos.

$$N_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_L \\ \mathcal{C}\bar{\nu}_R^T \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Usando

$$\bar{\nu}_L^C = (\mathcal{C}\bar{\nu}_L^T)^\dagger \gamma^0 = \nu_L^T (\gamma^0)^T \mathcal{C}^\dagger \gamma^0 = -\nu_L^T \mathcal{C}^T, \quad (2.15)$$

se puede escribir el término de masa de Dirac-Majorana en la ecuación (2.13) como

$$\mathcal{L}_{mass}^{D+M} = \frac{1}{2} N_L^T \mathcal{C}^\dagger M N_L + h.c., \quad (2.16)$$

con la matriz de masa simétrica

$$M = \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

De la expresión en la ecuación (2.16) es claro que los campos quirales ν_L y ν_R no tienen masa definida, por la existencia de los términos de Dirac fuera de la diagonal. Con el objetivo de encontrar los campos de neutrinos masivos es necesario diagonalizar la matriz de masa en la ecuación (2.17). Esto puede ser hecho con una transformación unitaria de campos quirales,

$$N_L = U n_L, \quad (2.18)$$

donde

$$n_L = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

es la matriz columna del campo quirral izquierdo de neutrinos masivos y U es la matriz de mezcla $U = V_L^{\dagger} V_L'$ formada por el producto de matrices unitarias 3×3 que diagonalizan a la matriz de acoplamiento de Yukawa de leptones cargados [10]. La matriz unitaria U debe ser tal que

$$U^T M U = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

con $m_k \geq 0$, $k = 1, 2$. Con la transformación de la ecuación (2.18), el término de masa de Dirac-Majorana en la ecuación (2.16) puede ser escrito como

$$\mathcal{L}_{mass}^{D+M} = \frac{1}{2} \sum_{k=1,2} m_k \nu_{kL}^T \mathcal{C}^\dagger \nu_{kL} + h.c. = -\frac{1}{2} \sum_{k=1,2} m_k \bar{\nu}_k \nu_k, \quad (2.21)$$

donde se ha definido el campo de Majorana del neutrino masivo como:

$$\nu_k = \nu_{kL} + \nu_{kL}^C = \nu_{kL} + \mathcal{C}\bar{\nu}_{kL}^T. \quad (2.22)$$

Por lo tanto, se ha obtenido un importante resultado: un término de masa de Dirac-Majorana implica que los neutrinos masivos son partículas de Majorana. Esto no parece ser una sorpresa ya que el término de masa de Dirac-Majorana en la ecuación (2.16) tiene la estructura de un término de masa de Majorana para los dos campos quirales ν_L y ν_R^C .

2.3. Evidencias de masas de neutrinos

El fenómeno de las *oscilaciones de neutrinos*, es un fenómeno mecánico-cuántico propuesto a finales de 1950 por Pontecorvo [21, 22] en analogía con las oscilaciones $K^0 - \bar{K}^0$ de Gell-Mann y Pais [23]. Esto significa que un rayo de neutrinos (producidos a través de decaimientos de interacciones débiles, correspondientes a algún sabor definido) puede espontáneamente cambiar u oscilar, en neutrinos de diferentes sabores, por ejemplo $\nu_e \longleftrightarrow \nu_\mu$, mientras viajan en el vacío. El descubrimiento de que los neutrinos se pueden convertir de un sabor a otro y por consiguiente no tener masa cero es una importante señal para la física de partículas. Ésto representa una evidencia experimental de que el ME es una descripción incompleta de la naturaleza. Las oscilaciones son generadas por la interferencia de diferentes neutrinos masivos, los cuales son producidos y detectados coherentemente por sus muy pequeñas diferencias de masas[?].

Desde finales de 1950 solo un *neutrino activo* era conocido, el neutrino del electrón, con el fin de discutir las oscilaciones de neutrinos, Pontecorvo inventó el concepto de *neutrino estéril* [25], el cual es un fermión neutro que no toma parte en las interacciones débiles. El neutrino del muon fue descubierto en 1962 en el experimento Brookhaven de Lederman, Schwartz, Sreiner, et al. [26], los cuales dieron seguimiento a una propuesta hecha por Pontecorvo en 1959 [27]. Desde entonces, llegó a ser claro que las oscilaciones entre diferentes sabores de neutrinos activos son posibles si los neutrinos son masivos y mezclados, es decir, para que las oscilaciones de neutrinos ocurra es necesario que la matriz PMNS no sea diagonal. Las amplitudes de probabilidad de transición asociada a las oscilaciones de neutrinos dependen de diferencias entre las masas de estas partículas, lo que significa que para que este fenómeno físico ocurra, es necesario que las masas de al menos dos de los tres neutrinos *activos* sean diferentes de cero.

En 1962 Maki, Nakagawa y Sakata [56] consideraron por primera vez un modelo con la mezcla de diferentes sabores de neutrinos. En 1967 Pontecorvo [25] predijo el Problema del Neutrino Solar como consecuencia de transiciones $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ (o $\nu_e \rightarrow \nu_{estéril}$) incluso antes de la primera medición del flujo del neutrino solar del electrón en el experimento de Homestake [29], y en 1969 Gribov y Pontecorvo discutieron las oscilaciones del neutrino solar debido a la mezcla de neutrinos [30].

2.3.1. Derivación estándar de la probabilidad de la oscilación del neutrino

En la teoría estándar de las oscilaciones de neutrinos [31, 32, 33, 34, 35], un neutrino con sabor α y momento \vec{p} creado en una corriente cargada de interacción débil procede de un leptón cargado l_α^- o junto con un antileptón cargado l_α^+ , es descrito por el estado de sabor

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* |\nu_k\rangle \quad (\alpha = e, \mu, \tau). \quad (2.23)$$

La presencia del peso $U_{\alpha k}^*$ del ket $|\nu_k\rangle$ en el estado de sabor $|\nu_\alpha\rangle$ se debe a la descomposición de la corriente leptónica cargada $j_{W,L}^\rho$:

$$j_{W,L}^\rho = \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_{\alpha L} \gamma^\rho l_{\alpha L} = \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \sum_k U_{\alpha k} \bar{\nu}_{k L} \gamma^\rho l_{\alpha L}, \quad (2.24)$$

en términos de las contribuciones de neutrinos masivos, los cuales contienen operadores de creación de masas de neutrinos. Por simplicidad, consideremos una normalización finita en un volumen V ,

CAPÍTULO 2. FÍSICA DE LOS NEUTRINOS MÁS ALLÁ DEL MODELO ESTÁNDAR

2.3. EVIDENCIAS DE MASAS DE NEUTRINOS

para tener estados de neutrinos masivos ortonormales:

$$\langle \nu_k | \nu_j \rangle = \delta_{kj}. \quad (2.25)$$

La unitariedad de la matriz U implica que también los estados de sabor son ortonormales:

$$\langle \nu_\alpha | \nu_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}. \quad (2.26)$$

En la ecuación (2.24) no se limita el número de neutrinos masivos. Es sabido que el número de neutrinos de sabor activo es tres, correspondiendo a ν_e, ν_μ, ν_τ , el número de neutrinos masivos debe ser igual o mayor a tres: si el número de neutrinos masivos es mayor a tres, los neutrinos adicionales en la base de sabores son estériles, es decir, no participan en las interacciones débiles (ya que los neutrinos son electricamente neutros, los neutrinos estériles interaccionan solo con la materia ordinaria a través de interacciones gravitacionales o interacciones exóticas mas allá de aquellas del ME). La transición de los neutrinos activos de sabor en estériles se puede observar solo a través de la desaparición de neutrinos activos. Los estados de neutrinos masivos $|\nu_k\rangle$ son eigenestados de la hamiltoniana,

$$\mathcal{H}|\nu_k\rangle = E_k|\nu_k\rangle, \quad (2.27)$$

con eigenvalores de energía

$$E_k = \sqrt{\vec{p}^2 + m_k^2}. \quad (2.28)$$

La ecuación de Schrödinger

$$i \frac{d}{dt} |\nu_k(t)\rangle = \mathcal{H}|\nu_k(t)\rangle, \quad (2.29)$$

implica que los estados de neutrinos masivos evolucionan en el tiempo como ondas planas:

$$|\nu_k(t)\rangle = e^{-iE_k t} |\nu_k\rangle. \quad (2.30)$$

Considerando ahora un estado de sabor $|\nu_\alpha(t)\rangle$ el cual describe un neutrino creado con un sabor definido α al tiempo $t = 0$. De las ecuaciones (2.23) y (2.30) la evolución del tiempo del estado del eigenket de sabor está dada por

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* e^{-iE_k t} |\nu_k\rangle, \quad (2.31)$$

el cual $|\nu_\alpha(t=0)\rangle = |\nu_\alpha\rangle$.

Utilizando la relación de unitariedad de la matriz U , los estados masivos pueden ser expresados en términos de los estados de sabor invirtiendo la ecuación (2.23):

$$|\nu_k\rangle = \sum_\alpha U_{\alpha k} |\nu_\alpha\rangle. \quad (2.32)$$

Sustituyendo (2.32) en la ecuación (2.31) se obtiene

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_{\beta=e,\mu,\tau} \left(\sum_k U_{\alpha k}^* e^{-iE_k t} U_{\beta k} \right) |\nu_\beta\rangle. \quad (2.33)$$

Por lo tanto, la superposición de estados de neutrinos masivos $|\nu_\alpha(t)\rangle$, el cual es el estado puro de sabor dado en la ecuación (2.23) en $t = 0$, llega a ser una superposición de diferentes estados de sabor a $t > 0$ (si la matriz de mezcla U no es diagonal, i.e neutrinos son mezclados). El coeficiente de $|\nu_\beta\rangle$,

CAPÍTULO 2. FÍSICA DE LOS NEUTRINOS MÁS ALLÁ DEL MODELO ESTÁNDAR

2.3. EVIDENCIAS DE MASAS DE NEUTRINOS

$$A_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) \equiv \langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* U_{\beta k} e^{-iE_k t}, \quad (2.34)$$

es la amplitud de la transición $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$ como función del tiempo. La transición de probabilidad es, entonces, dada por

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = |A_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t)|^2 = \sum_{kj} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-i(E_k - E_j)t}. \quad (2.35)$$

Para neutrinos ultrarelativistas, la relación de dispersión en la ecuación (2.28) puede ser aproximada

$$E_k \simeq E + \frac{m_k^2}{2E}. \quad (2.36)$$

En este caso

$$E_k - E_j \simeq \frac{\Delta m_{kj}^2}{2E}, \quad (2.37)$$

donde Δm_{kj}^2 es la diferencia de las masas cuadráticas

$$\Delta m_{kj}^2 \equiv m_k^2 - m_j^2, \quad (2.38)$$

Utilizando (2.37) en la transición de probabilidad de la ecuación (2.35) se puede aproximar

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = |A_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t)|^2 = \sum_{kj} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-i \frac{\Delta m_{kj}^2}{2E} t}. \quad (2.39)$$

El paso final en la derivación estándar de la probabilidad de oscilación del neutrino se basa en el hecho de que, en los experimentos de oscilaciones de neutrinos, el tiempo de propagación t no es medible. Lo que es sabido es la distancia L entre la fuente y el detector. Debido a que los neutrinos ultrarelativistas se propagan casi a la velocidad de la luz, es posible aproximar $t = L$ llevando a

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = \sum_{kj} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-i \frac{\Delta m_{kj}^2}{2E} L}. \quad (2.40)$$

Esta expresión muestra que la distancia fuente-detector L y la energía del neutrino E con cantidades dependientes en el experimento, los cuales determinan las fases de las oscilaciones de los neutrinos

$$\Phi_{kj} = -\frac{\Delta m_{kj}^2}{2E} L. \quad (2.41)$$

Por supuesto, las fases son determinadas también por las diferencias de masas cuadráticas Δm_{kj}^2 , las cuales son físicamente constantes. La amplitud de oscilación es especificada solo por los elementos de la matriz de mezcla U , los cuales son constantes por naturaleza. Por consiguiente las mediciones de las oscilaciones de los neutrinos permite estimar valores de las diferencias de masas cuadráticas Δm_{kj}^2 y los elementos de la matriz de mezcla U . Es claro que para que las oscilaciones de neutrinos ocurran (es decir que la probabilidad de oscilación sea diferente de cero), Δm_{kj}^2 tiene que ser diferente de cero, para cualquier valor de L y E , lo que implica que al menos uno de los neutrinos debe tener masa cuadrática diferente de cero, o que las masas cuadráticas de los neutrinos deben ser diferentes, de lo contrario si $\Delta m_{kj}^2 = 0$ esto implica que

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = \sum_{kj} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*. \quad (2.42)$$

Por otra parte de la unitariedad de la matriz de mezcla U se tiene

$$UU^\dagger = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_k U_{\alpha k} U_{\beta k}^* = \delta_{\alpha\beta}. \quad (2.43)$$

Usando (2.42) y (2.43) se tendría

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = \delta_{\alpha\beta}, \quad (2.44)$$

lo cual, si hay oscilaciones de neutrinos ($\alpha \neq \beta$), automáticamente la probabilidad de transición sería cero, debido a la ecuación anterior, y esto no puede suceder. De ahí que el término Δm_{kj}^2 debe ser diferente de cero. Aunque las mediciones positivas de las oscilaciones de neutrinos implican neutrinos masivos, éstos producen información precisa solo en los valores de las diferencias de masas cuadráticas Δm_{kj}^2 , pero no en los valores absolutos de las masas de los neutrinos, excepto que obviamente m_k^2 o m_j^2 sean valores mucho más grandes que $|\Delta m_{kj}^2|$. La magia de este fenómeno de oscilación está, por supuesto, íntimamente relacionado a la teoría de mediciones mecánico-cuánticas. La posibilidad de un neutrino de sabor ν_α espontáneamente cambiando en otro sabor, refleja la relación de incertidumbre de energía-momento en las mediciones del proceso. Por ejemplo, si se puede precisar cual eigenestado de masa ν_i es producido en la fuente, el patrón de oscilación es destruido. El punto principal que podemos tener en mente, es que en forma de obtener oscilaciones de neutrinos se debe tener masa no-cero (y no degenerada) de los neutrinos y ángulos de mezcla.

2.4. Invariancia CP

Es útil considerar el caso mas simple de una matriz de masa real, la cual implica invariancia de CP, como se verá a continuación. Esto significa que, además de real y positiva, m_R y m_D , también consideramos real m_L , la cual puede ser positiva o negativa. En este caso la matriz de la ecuación (2.17) es real y simétrica, esta puede ser diagonalizada a través de la transformación (2.20) por medio de la matriz unitaria

$$U = \mathcal{O}\rho, \quad (2.45)$$

donde \mathcal{O} es una matriz ortogonal de rotación 2×2 la cual puede ser escrita como

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

y ρ es una matriz diagonal de fases

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix}, \quad (2.47)$$

con $\rho_k^2 = \pm 1$. La matriz ortogonal \mathcal{O} debe ser escogida de manera que diagonalice la matriz de masa (2.17)

$$\mathcal{O}^T M \mathcal{O} = \begin{pmatrix} m'_1 & 0 \\ 0 & m'_2 \end{pmatrix}, \quad (2.48)$$

donde m'_1 y m'_2 son eigenvalores de la matriz de masa

$$m'_{2,1} = \frac{1}{2} \left[m_L + m_R \pm \sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D^2} \right]. \quad (2.49)$$

Esto implica que

$$\tan 2\theta = \frac{2m_D}{m_R - m_L}. \quad (2.50)$$

CAPÍTULO 2. FÍSICA DE LOS NEUTRINOS MÁS ALLÁ DEL MODELO ESTÁNDAR

2.5. MECANISMO DEL SUBE Y BAJA (SEESAW)

Se debe notar que m'_1 es negativa si $m_L m_R < m_D^2$. La función de la matriz ρ es cambiar el signo del primer eigenvalor de masa si $m'_1 < 0$ a través

$$U^T M U = \rho^T \mathcal{O}^T M \mathcal{O} \rho = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m'_1 & 0 \\ 0 & m'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1^2 m'_1 & 0 \\ 0 & \rho_2^2 m'_2 \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

Por lo tanto, los dos valores reales y positivos de las masas de los neutrinos está dado por

$$m_k = \rho_k^2 m'_k, \quad (2.52)$$

con $\rho_2^2 = 1$ mientras $\rho_1^2 = 1$ si $m'_1 > 0$ y $\rho_1^2 = -1$ si $m'_1 < 0$.

2.5. Mecanismo del sube y baja (seesaw)

Un caso muy interesante es cuando

$$m_D \ll m_R, \quad m_L = 0. \quad (2.53)$$

De la ecuación (2.49) se obtiene

$$m'_1 \simeq -\frac{m_D^2}{m_R}, \quad m'_2 \simeq m_R. \quad (2.54)$$

Si m'_1 es negativa, se tiene $\rho_1^2 = -1$ y

$$m_1 \simeq \frac{m_D^2}{m_R}, \quad m_2 \simeq m_R. \quad (2.55)$$

Por consiguiente, ν_2 es tan pesado como m_R y ν_1 es muy ligero, porque su masa es suprimida con respecto a m_D por la pequeña relación m_D/m_R . Este es el famoso **mecanismo de sube y baja** (See-saw mechanism) [53, 54, 55, ?], el cual actúa como un sube y baja representado en la Fig. 1.1 la masa pesada $m_2 \simeq m_R$ de ν_2 es responsable de la ligereza de ν_1 .

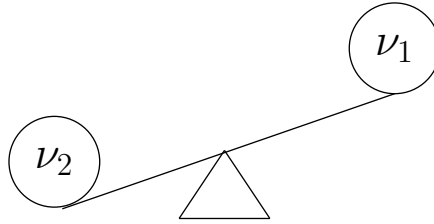


Figura 2.1: Ilustración del mecanismo See-Saw: la masa mas pesada es ν_2 y la mas ligera es ν_1 .

El ángulo de mezcla es muy pequeño

$$\tan 2\theta = 2 \frac{m_D}{m_R} \ll 1, \quad (2.56)$$

el cual implica que ν_1 está compuesto principalmente del neutrino activo ν_L y ν_2 está compuesto principalmente del neutrino estéril ν_R ,

$$\nu_{1L} \simeq -i\nu_L, \quad \nu_{2L} \simeq \nu_R^C. \quad (2.57)$$

El mecanismo de sube y baja es muy importante porque este provee una muy importante explicación de la pequeñez de la masa de los neutrinos con respecto a la masa de otros fermiones del ME,

CAPÍTULO 2. FÍSICA DE LOS NEUTRINOS MÁS ALLÁ DEL MODELO ESTÁNDAR

2.5. MECANISMO DEL SUBE Y BAJA (SEESAW)

es decir, leptones cargados y quarks. El asumir que $m_L = 0$ es natural, debido a que el término de masa de Majorana para el campo quiral izquierdo ν_L está prohibido por las simetrías y renormalizabilidad del ME. La masa de Dirac m_D , la cual puede ser generada a través del mecanismo de Higgs del ME, se espera que sea del orden de la masa de un lepton cargado de la misma generación o del orden de la masa del quark de la misma generación. En el caso del orden de magnitud de m_D no puede ser mas grande que la escala electrodébil, la cual es del orden de 10^2 GeV. La razón es que el término de masa de Dirac está prohibido por el rompimiento espontaneo de la simetría del ME. Por lo tanto, m_D es proporcional a la escala del rompimiento de la simetría, este hecho es a veces justificado diciendo que m_D está protegido por las simetrías del ME. Por otra parte, desde que el término de masa de Majorana es un singlete de las simetrías del ME, la masa de Majorana m_R del campo de neutrinos quiral derecho ν_R no es protegido por las simetrías del ME. Es cierto que el término de masa de Majorana m_R es generado por la nueva física mas allá del ME y el campo del neutrino quiral derecho ν_R pertenece a un multiplete no trivial de las simetrías de la teoría de altas energías. En este caso, la masa m_R es protegida por las simetrías de la teoría de altas energías y su orden de magnitud corresponde a la escala del rompimiento de estas teorías, el cual puede ser a una gran escala de unificación del orden de $10^{14} - 10^{16}$ GeV [37, 38, 39].

Capítulo 3

Propiedades electromagnéticas de neutrinos

En este capítulo se presenta la principal contribución de la tesis, la cual tiene por objetivo estudiar las propiedades electromagnéticas diagonales y de transición de los leptones, obtenidas por medio del decaimiento $l_\alpha \rightarrow \gamma l_\beta$ a nivel de un lazo, considerando que los neutrinos tienen masa diferente de cero y que el fotón se encuentra on-shell.

El estudio de las propiedades electromagnéticas de los fermiones son de gran interés fenomenológico, ya que proporcionan medios para poner rigurosamente a prueba al ME. Tal es el caso de los momentos magnéticos y eléctricos del electrón y del muón, para los cuales existen cálculos teóricos [44, 45] y mediciones experimentales [59, 60, 61] de alta precisión, que han sido consistentes con el ME. Adicionalmente, las propiedades electromagnéticas de los fermiones se pueden emplear como búsqueda de efectos asociados a la nueva física, que no han sido considerados en el ME. Un claro ejemplo son los dipolos eléctricos de los fermiones [62, 63, 64, 65], los cuales, hasta el momento, no han podido ser observados en algún experimento, pero su medición sería una señal de la presencia de la nueva física, caracterizada por la violación de la simetría CP . La contribución de las propiedades electromagnéticas de los fermiones se pueden parametrizar de manera general a través de la siguiente expresión del vértice electromagnético

$$\Gamma_\mu^{Fff}(q^2) = ie \left\{ \gamma_\mu [V_f^V(q^2) - A_f(q^2)] - \sigma_{\mu\nu} q^\nu \left[i \frac{a_f(q^2)}{2m_f} - \frac{d_f(q^2)}{e} \gamma^5 \right] \right\}, \quad (3.1)$$

donde $V_f(q^2)$, $A_f(q^2)$, $a_f(q^2)$ y $d_f(q^2)$ son respectivamente, los *factores de forma vectorial (o de carga)*, *axial*, *dipolar magnético*¹ y *dipolar eléctrico*, además e es la carga elemental, el superíndice V etiqueta algún bosón de norma neutro, que puede ser en general el fotón o el bosón Z , el cual tiene cuadrimomento entrante q . Además f etiqueta a un fermión dado, por lo que m_f es la masa de ese fermión (más adelante se hablará con mejor detalle de los factores de forma). En particular, el momento anómalo y el momento dipolar eléctrico se definen mediante la condición $q^2 = 0$. Estas dos cantidades son las propiedades electromagnéticas estáticas más estudiadas. Independiente de modelos, suponiendo que los neutrinos son masivos y que en alguna extensión del ME existen nuevos bosones de norma cargados, consideremos la siguiente parametrización de corrientes cargadas vectorial y axial:

¹El factor $1/m_f$, es esta definición del factor de forma dipolar magnético, suele omitirse en el caso de los neutrinos, donde los resultados se expresan en términos del *magnetón de Bohr*, $\mu_B = e/(2m_e)$

CAPÍTULO 3. PROPIEDADES ELECTROMAGNÉTICAS DE NEUTRINOS

3.1. REGLAS DE FEYNMAN

$$\mathcal{L}_{CC} = \sum_i \sum_{\alpha} [W_{\rho}^{+} \bar{\nu}_i \gamma^{\rho} (v_{i\alpha} - a_{i\alpha} \gamma^5) l_{\alpha} + W_{\rho}^{-} \bar{l}_{\alpha} \gamma^{\rho} (v_{i\alpha}^{*} - a_{i\alpha}^{*} \gamma^5) \nu_i], \quad (3.2)$$

donde $v_{\alpha i}$ y $a_{\alpha i}$ son parámetros que dependen de los diferentes modelos que se estudien, $l_{\alpha} = e^{-}, \mu^{-}, \tau^{-}$ etiqueta a leptones cargados, ν_i denota los eigenestados de masa de los neutrinos. Los bosones cargados, del ME y aquellos asociados a la nueva física, se denotan con W_{μ}^{\pm} . Para que tenga sentido la expresión anterior, los índices empleados corren sobre $j = 1, 2, 3$ mientras que $\alpha = e, \mu, \tau$ que corresponden al bosón W del ME. El índice griego ρ etiqueta a las componentes del espacio-tiempo.

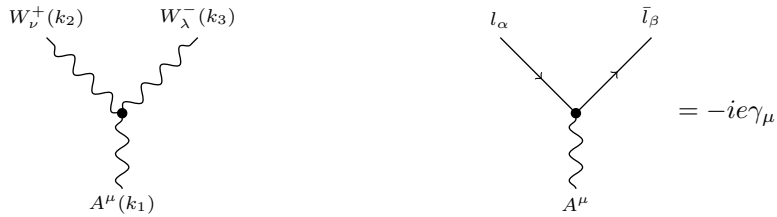
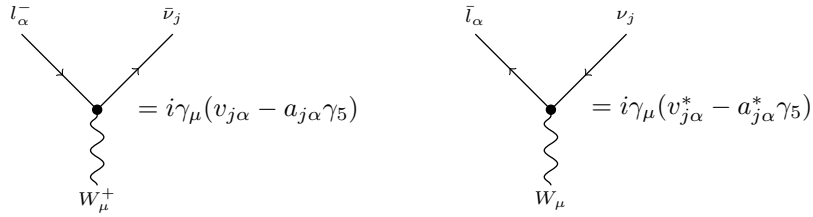
Para calcular los factores de forma vectorial, axial, dipolar magnético y dipolar eléctrico, diagonales y de transición, de los neutrinos de Majorana, se analiza el decaimiento $l_{\alpha} \rightarrow l_{\beta} \gamma$ a nivel de un lazo.

3.1. Reglas de Feynman

Las reglas de Feynman en la norma unitaria para la teoría $SU(2) \times U(1)$, que se utilizan son:

- *Vértices*

En todas las expresiones, el momento de los bosones W^{\pm} , así como el del fotón A^{μ} se considera que está entrando al vértice.



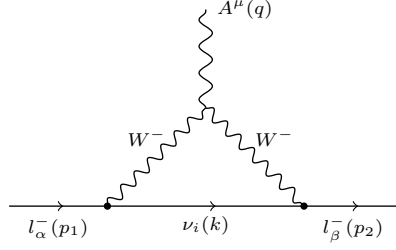
$$= -ie[(k_1 - k_2)_{\lambda} g_{\mu\nu} + (k_2 - k_3)_{\mu} g_{\nu\lambda} + (k_3 - k_1)_{\nu} g_{\lambda\mu}]$$

- *Propagadores del fermion y bosón vectorial W^{\pm}*

$$\text{Feynman diagram: fermion line with momentum } p \text{ and mass } m_i \text{ has propagator } i \frac{\not{p} + m_i}{p^2 - m_i^2} \text{; } W^{\pm} \text{ boson line has propagator } \frac{-i}{k^2 - m_w^2} \left[g_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{m_w^2} \right]$$

Para decaimiento $l_{\alpha} \rightarrow l_{\beta} \gamma$ a nivel de un lazo, existen tres posibles diagramas, cuyas amplitudes están dadas por

- **Diagrama 1**



$$\Gamma_{\mu}^{(1)} = \gamma_{\omega}(v_{i\beta}^* - a_{i\beta}^*\gamma_5) \cdot \frac{\not{k} + m_i}{k^2 - m_i^2} \cdot (v_{i\alpha} + a_{i\alpha}\gamma_5)\gamma_{\sigma} \cdot P_{\sigma\lambda} \cdot P_{\rho\omega} \cdot \Gamma_{\lambda\mu\rho}$$

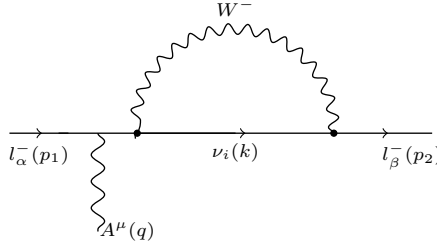
donde

$$P_{\sigma\lambda} = \frac{g_{\sigma\lambda} - \frac{(p_1-k)_{\sigma}(p_1-k)_{\lambda}}{M_w^2}}{(p_1-k)^2 - M_w^2},$$

$$P_{\rho\omega} = \frac{g_{\rho\omega} - \frac{(p_1-k)_{\rho}(p_1-k)_{\omega}}{M_w^2}}{(p_2-k)^2 - M_w^2},$$

$$\Gamma_{\lambda\mu\rho} = (2p_2 - p_1 - k)_{\lambda}g_{\mu\nu} + (2k - p_1 - p_2)_{\mu}g_{\rho\lambda} + (2p_1 - p_2 - k)_{\rho}g_{\lambda\mu}.$$

■ Diagrama 2



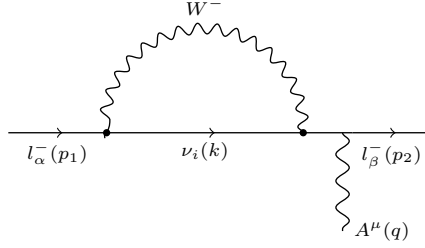
$$\Gamma_{\mu}^{(2)} = \gamma_{\rho}(v_{i\beta}^* - a_{i\beta}^*\gamma_5) \cdot \frac{\not{k} + m_i}{k^2 - m_i^2} \cdot (v_{i\alpha} + a_{i\alpha}\gamma_5)\gamma_{\sigma} \cdot P_{\lambda\rho} \cdot \frac{\not{p}_2 + m_{\alpha}}{p_2^2 - m_{\alpha}^2} \cdot \gamma_{\mu}$$

donde

$$P_{\lambda\rho} = \frac{g_{\lambda\rho} - \frac{(p_2-k)_{\lambda}(p_2-k)_{\rho}}{M_w^2}}{(p_2-k)^2 - M_w^2},$$

■ Diagrama 3

CAPÍTULO 3. PROPIEDADES ELECTROMAGNÉTICAS DE NEUTRINOS
3.2. FACTORES DE FORMA ELECTROMAGNÉTICOS



$$\Gamma_{\mu}^{(2)} = \gamma_{\mu} \cdot \frac{\not{p}_1 + m_{\beta}}{p_1^2 - m_{\beta}^2} \cdot \gamma_{\rho} (v_{i\beta}^* - a_{i\beta}^* \gamma_5) \cdot \frac{\not{k} + m_i}{k^2 - m_i^2} \cdot (v_{i\alpha} + a_{i\alpha} \gamma_5) \gamma_{\sigma} \cdot P_{\lambda\rho},$$

donde

$$P_{\lambda\rho} = \frac{g_{\lambda\rho} - \frac{(p_1 - k)_{\lambda}(p_1 - k)_{\rho}}{M_w^2}}{(p_1 - k)^2 - M_w^2},$$

Por lo tanto, la amplitud invariante puede ser escrita como

$$\mathcal{M}(l_{\alpha} \rightarrow \gamma l_{\beta}) = ie \bar{u}(p_2, s_2) \sum_{i=1}^3 \Gamma_{\mu}^{(i)} u(p_1, s_1) \varepsilon^{\mu*}(\lambda), \quad (3.3)$$

donde $\Gamma_{\mu}^{(i)}$ es la amplitud de cada uno de los diagramas y ε es el vector de polarización. Se puede notar que la expresión de la amplitud total está libre de índices de Lorentz.

3.2. Factores de forma electromagnéticos

La lagrangiana efectiva mas general que describe la interacción de un bosón vectorial neutro V con dos fermiones, puede ser escrito, usando al menos operadores de dimensión cinco, como función de diez términos independientes

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Vff} = V^{\mu}(x) \Psi(x) & \left[\gamma_{\mu} (g_V - g_A \gamma_5) + i \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} (g_M + i g_E \gamma_5) + i \overleftrightarrow{\partial}^{\nu} \sigma_{\mu\nu} (g_{TS} + i g_{TP} \gamma_5) \right] \Psi(x) \quad (3.4) \\ & + (i \partial^{\mu} V^{\nu}(x)) \Psi(x) [g_{\mu\nu} (i g_S + g_P \gamma_5) + \sigma_{\mu\nu} (i g_{TM} + g_{TE} \gamma_5)] \Psi(x). \end{aligned}$$

Por medio de una transformación de fourier, de la expresión anterior, se obtiene una estructura mas general de Lorentz para el vértice Vff en el espacio de momentos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu}^{Vff}(s) = i [\gamma_{\mu} (f_V - f_A \gamma_5) + (q - \bar{q})_{\mu} (f_M + i f_E \gamma_5) + p_{\mu} (i f_S + f_P \gamma_5) \quad (3.5) \\ + (q - \bar{q})^{\nu} \sigma_{\mu\nu} (f_{TS} + i f_{TP} \gamma_5) + p^{\nu} \sigma_{\mu\nu} (i f_{TM} + f_{TE} \gamma_5)], \end{aligned}$$

donde q y \bar{q} son los momentos salientes de los fermiones y $p = (q + \bar{q})$ es el momento total entrante del bosón neutro V . Los factores de forma f_i son funciones de invariantes cinemáticos. De

CAPÍTULO 3. PROPIEDADES ELECTROMAGNÉTICAS DE NEUTRINOS
3.2. FACTORES DE FORMA ELECTROMAGNÉTICOS

hecho son mas generales que los coeficientes g_i , ambos factores pueden ser complejos en general. Es posible reducir el número de parámetros independientes de factores de forma de la ecuación (3.5) imponiendo condiciones de capa de masa (on-shell) de los campos fermionicos y/o bosónicos. Por ejemplo, en el caso de los fermiones on-shell al utilizar las identidades de Gordon (Ver Apéndice ??), se puede eliminar f_{TM}, f_{TE}, f_{TS} y f_{TP} de la lagrangiana efectiva. El numero de factores de forma relevantes puede ser aun más reducido, tomando también al bosón V en su capa de masa. En este caso, la condición $p_\mu \epsilon^\mu = 0$ automáticamente cancela todas las contribuciones de f_S y f_P . Con estas consideraciones el vértice efectivo Vff para los fermiones on-shell es convenientemente escrito como

$$\Gamma_\mu^{Vff}(s) = ie \left\{ \gamma_\mu [V_f^V(s) - A_f^V(s)\gamma_5] + \sigma_{\mu\nu}(q + \bar{q})^\nu \left[i \frac{a_f^V(s)}{2m_f} - \frac{d_f^V}{e} \gamma_5 \right] \right\}, \quad (3.6)$$

donde e y m_f son respectivamente la unidad de carga eléctrica y la masa del fermión externo. Los factores de forma en la ecuación (3.6) dependen solo de s , el cual es el momento del fotón al cuadrado p^2 . $V_f^V(s)$ y $A_f^V(s)$ parametrizan a las corrientes vectorial y vectorial axial. Los factores de forma $a_f^V(s)$ y $d_f^V(s)$ son conocidos respectivamente como los factores de forma del dipolo magnético anómalo y dipolo eléctrico respectivamente. El análisis general al caso de mas de un campo leptónico, la lagrangiana de interacción electromagnética está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Vff} = & \sum_{k,j=1}^3 V^\mu(x) \Psi_k(x) \left[\gamma_\mu (g_v - g_A \gamma_5) + i \overleftrightarrow{\partial}_\mu (g_M + i g_E \gamma_5) + i \overleftrightarrow{\partial}^\nu \sigma_{\mu\nu} (g_{TS} + i g_{TP} \gamma_5) \right] \Psi(x)_j \\ & + (i \partial^\mu V^\nu(x)) \Psi(x)_k [g_{\mu\nu} (i g_S + g_P \gamma_5) + \sigma_{\mu\nu} (i g_{TM} + g_{TE} \gamma_5)] \Psi(x)_j. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Donde se han tomado en cuenta posibles transiciones entre diferentes leptones. Los elementos de matriz de los leptones son

$$(\Gamma_\mu^{Vff}(p_f, p_i))_{fi} = ie \left\{ \gamma_\mu [(V_f^V(s))_{fi} - (A_f^V(s))_{fi} \gamma_5] + \sigma_{\mu\nu}(q + \bar{q})^\nu \left[i \frac{(a_f^V(s))_{fi}}{m_i + m_f} - \frac{(d_f^V)_{fi}}{e} \gamma_5 \right] \right\}, \quad (3.8)$$

donde $p_i(m_i)$ y $p_f(m_f)$ son los momentos (masas) inicial y final de los leptones. Como en el caso de un campo leptónico, $(\Gamma_\mu^{Vff}(p_f, p_i))_{fi}$ depende solo del momento al cuadrado, s , transferido al fotón y de igual manera puede ser expresado en términos de seis factores de forma invariantes de Lorentz. Considerando la matriz 3×3 , de los cuatro factores de forma electromagnéticos f_k , para $k = 1, 2, 3, 4$, obtenidos de la expresión (3.8), en el espacio de leptones, entonces f_k^{fi} son las componentes de dichas matrices. Los factores de forma con $f = i$ son llamados “diagonales” mientras aquellos con $f \neq i$ son llamados “fuera de la diagonal”, también, “factores de forma de transición”. Así que podemos resumir lo anterior diciendo que, la parametrización más general del vértice electromagnético, se tienen dos posibles opciones, que los leptones externos tengan sabores diferentes, de donde se obtiene los valores para los dipolos eléctrico y anómalo magnético de transición, y el caso donde no hay cambio de sabor, lo cual nos permite calcular los dipolos eléctrico y anómalo magnético diagonales. Las propiedades anteriores solo se analizan en el caso de los neutrinos de Dirac. Las propiedades electromagnéticas de los leptones del decaimiento ($l_\alpha \rightarrow l_\beta \gamma$) se pueden representar mediante la siguiente matriz

$$(a^{Vff}) = \begin{pmatrix} a_{ee} & a_{e\mu} & a_{e\tau} \\ a_{\mu e} & a_{\mu\mu} & a_{\mu\tau} \\ a_{\tau e} & a_{\tau\mu} & a_{\tau\tau} \end{pmatrix}, \quad (d^{Vff}) = \begin{pmatrix} d_{ee} & d_{e\mu} & d_{e\tau} \\ d_{\mu e} & d_{\mu\mu} & d_{\mu\tau} \\ d_{\tau e} & d_{\tau\mu} & d_{\tau\tau} \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

donde (a^{Vff}) y (d^{Vff}) son las matrices que describen el dipolo magnético anómalo y el dipolo eléctrico de los leptones, respectivamente.

3.3. Cálculo de factores de forma

Después de realizar el cálculo de la amplitud total para el decaimiento $l_\alpha \rightarrow l_\beta \gamma$ a nivel de un lazo, se puede distinguir que la expresión tiene la forma

$$\Gamma_\mu^{Vff} = -\frac{ie}{(4\pi)^2} [a_1 M_6 + a_2 M_7 + a_{3\mu} S_6 + a_{4\mu} S_7], \quad (3.10)$$

donde

$$M_i = \gamma_\mu \gamma^i, \quad S_i = \gamma^i, \quad i=6,7, \quad (3.11)$$

$-e$ es el factor global que resulta de la suma de las tres amplitudes y el factor global $\frac{ie}{(4\pi)^2}$ se obtiene debido a las funciones de Passarino-Veltman (PaVe) (ver Apéndice ??). De acuerdo al código utilizado en FeynCalc se tiene que

$$\gamma^6 = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) = P_R, \quad \gamma^7 = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) = P_L, \quad (3.12)$$

Esto es

$$\Gamma_\mu^{Vff} = -ie[a_1 \gamma_\mu \gamma^6 + a_2 \gamma_\mu \gamma^7 + a_{3\mu} \gamma^6 + a_{4\mu} \gamma^7]. \quad (3.13)$$

Debido a que la amplitud Γ_μ^{Vff} tiene un índice libre de Lorentz, se sigue que $a_{3\mu}$ y $a_{4\mu}$, también, deben depender de alguna estructura matemática que tenga un índice de Lorentz libre, ésta puede ser $p_{1\mu}$ o γ_μ , pero se nota que los primeros términos de la expresión (3.10), donde aparecen las expresiones M_6 y M_7 , contienen el factor γ_μ , entonces se concluye que

$$a_{3\mu} \propto p_{1\mu}, \quad a_{4\mu} \propto p_{2\mu} \quad \text{on shell}, \quad (3.14)$$

esto implica

$$a_{3\mu} = a_3 p_{1\mu}, \quad a_{4\mu} = a_4 p_{2\mu}, \quad (3.15)$$

donde a_3 y a_4 son escalares. Analizando cada sumando de la expresión (3.13), utilizando el significado de γ^6 y γ^7 y utilizando las identidades de Gordon (ver Apéndice ??), se tiene

$$1) \gamma_\mu \gamma^6 = \frac{1}{2} \gamma_\mu + \frac{1}{2} \gamma_\mu \gamma^5, \quad (3.16)$$

$$2) \gamma_\mu \gamma^7 = \frac{1}{2} \gamma_\mu - \frac{1}{2} \gamma_\mu \gamma^5, \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} 3) a_{3\mu} \gamma^6 &= \frac{1}{2} a_3 p_{1\mu} + \frac{1}{2} a_3 p_{1\mu} \gamma^5 \\ &\stackrel{(\text{??,??})}{=} \frac{1}{2} a_3 \left[\frac{i}{2} \sigma_{\mu\nu} q^\nu + \frac{1}{2} (m_\alpha + m_\beta) \gamma_\mu \right] + \frac{1}{2} a_3 \left[\frac{i}{2} \sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma^5 + \frac{1}{2} (m_\alpha - m_\beta) \gamma_\mu \gamma^5 \right] \\ &= \frac{i}{4} a_3 \sigma_{\mu\nu} q^\nu (1 + \gamma^5) + \frac{a_3}{4} \gamma_\mu [(m_\beta + m_\alpha) + (m_\beta - m_\alpha) \gamma^5], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) a_{4\mu} \gamma^7 &= \frac{1}{2} a_3 p_{1\mu} - \frac{1}{2} a_4 p_{1\mu} \gamma^5 \\
 &\stackrel{(\text{??,??})}{=} \frac{1}{2} a_4 \left[\frac{i}{2} \sigma_{\mu\nu} q^\nu + \frac{1}{2} (m_\alpha + m_\beta) \gamma_\mu \right] - \frac{1}{2} a_4 \left[\frac{i}{2} \sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma^5 + \frac{1}{2} (m_\alpha - m_\beta) \gamma_\mu \gamma^5 \right] \\
 &= \frac{i}{4} a_4 \sigma_{\mu\nu} q^\nu (1 - \gamma^5) + \frac{a_4}{4} \gamma_\mu [(m_\beta + m_\alpha) - (m_\beta - m_\alpha) \gamma^5].
 \end{aligned}$$

Sustituyendo los resultados obtenidos en 1), 2), 3) y 4) en la expresión (3.10) y reordenando los términos de acuerdo a la estructura de Lorentz más general, para el decaimiento a nivel de un lazo, $l_\alpha \rightarrow l_\beta \gamma$, en el espacio de momentos

$$\begin{aligned}
 \Gamma_\mu^{Vff} &= -\frac{ie}{(4\pi)^2} \left\{ \gamma_\mu \left[\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{4} (m_\beta + m_\alpha) + \frac{a_4}{4} (m_\beta + m_\alpha) \right] + \gamma_\mu \gamma^5 \left[\frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{4} (m_\beta - m_\alpha) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{a_4}{4} (m_\beta - m_\alpha) \right] + \sigma_{\mu\nu} q^\nu \left[\frac{i}{4} a_3 + \frac{i}{4} a_4 \right] + \sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma^5 \left[\frac{i}{4} a_3 - \frac{i}{4} a_4 \right] \right\} \\
 &= ie \left\{ \gamma_\mu \left[\frac{-1}{2(4\pi)^2} \left(a_1 + a_2 + \frac{1}{2} (a_3 + a_4) (m_\beta + m_\alpha) \right) \right] - \gamma_\mu \gamma^5 \left[\frac{1}{2(4\pi)^2} \left(a_1 - a_2 + \frac{1}{2} (a_3 - a_4) (m_\beta - m_\alpha) \right) \right] \right\} \\
 &\quad - \sigma_{\mu\nu} q^\nu i \frac{1}{m_\beta + m_\alpha} \left\{ \frac{1}{4(4\pi)^2} (a_3 + a_4) (m_\beta + m_\alpha) \right\} + \sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma^5 \frac{1}{e} \left[\frac{-i}{4(4\pi)^2} (a_3 - a_4) e \right].
 \end{aligned}$$

Comparando con la forma de la expresión (3.1), entonces nos conviene renombrar las siguientes expresiones

$$V(q^2) \equiv -\frac{1}{2(4\pi)^2} \left[a_1 + a_2 + \frac{1}{2} (a_3 + a_4) (m_\beta + m_\alpha) \right], \quad (3.18)$$

$$A(q^2) \equiv \frac{1}{2(4\pi)^2} \left[a_2 - a_1 + \frac{1}{2} (a_3 - a_4) (m_\beta - m_\alpha) \right], \quad (3.19)$$

$$a(q^2) \equiv \frac{1}{4(4\pi)^2} (a_3 + a_4) (m_\beta + m_\alpha), \quad (3.20)$$

$$d(q^2) \equiv -\frac{i}{4(4\pi)^2} (a_4 - a_3) e. \quad (3.21)$$

Por lo tanto, la expresión de la amplitud total tiene la forma

$$\Gamma_\mu^{Vff}(q^2) = ie \left\{ \gamma_\mu [V(q^2) - A(q^2) \gamma^5] - \sigma_{\mu\nu} q^\nu \left[i \frac{a(q^2)}{m_\beta + m_\alpha} - \frac{d(q^2)}{e} \gamma^5 \right] \right\}, \quad (3.22)$$

donde q^2 es el momento al cuadrado del fotón. Se puede comentar que al realizar los cálculos correspondientes de los valores de $V_f(q^2)$ y $A_f(q^2)$, tanto diagonales como de transición, se obtiene que ambos son idénticamente cero. Por otra parte, al realizar los cálculos de la amplitud se nota que los resultados de $V_f(q^2)$, $A_f(q^2)$, $a_f(q^2)$ y $d_f(q^2)$ están en términos de las funciones PaVe (ver Apéndice ??) B_1, B_2, B_3, B_4 y B_5 (los resultados se muestran mas adelante). Pero es de particular importancia que las expresiones para el dipolo eléctrico, $d_f(q^2)$, y el dipolo magnético anómalo, $a_f(q^2)$, que únicamente están en términos de B_1, B_2 y B_3 , es decir son de la forma $\xi = a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3$ donde $\xi = a_f(q^2), d_f(q^2)$ y a_f, d_f son funciones escalares que son diferentes para cada caso, sean números finitos, esto se verifica sabiendo que las funciones B_i de PaVe son de la forma:

$$B_i = \Delta + f_i, \quad (3.23)$$

CAPÍTULO 3. PROPIEDADES ELECTROMAGNÉTICAS DE NEUTRINOS

3.4. MOMENTOS DIPOLAR ELÉCTRICO Y ANAPOLAR MAGNÉTICO DE TRANSICIÓN

donde Δ es un término que diverge y f_i es una función finita que es diferente para cada función de PaVe. Por lo tanto si nos fijamos en la diferencia

$$B_i - B_j = (\Delta + f_i) - (\Delta + f_j) = f_i - f_j, \quad (3.24)$$

notamos que el resultado es finito, ya que las funciones f_i y f_j lo son. Entonces sumando y restando términos a las expresiones de ξ , con el objetivo de obtener diferencias de las funciones de PaVe, y aplicando el resultado anterior (3.24) se tiene que

$$\xi = a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 = a_1(B_1 - B_2) + (a_1 + a_2)(B_2 - B_3) + (a_1 + a_2 + a_3)B_3, \quad (3.25)$$

Cómo los dos primeros sumandos de la expresión anterior están en términos de diferencias de las funciones B_i , podemos garantizar que son términos finitos debido a (3.24), pero necesitamos que ξ en general sea una expresión finita, por lo que el tercer sumando de la expresión anterior, $(a_1 + a_2 + a_3)B_3$, tienen que ser cero. Debido a que contiene esta expresión contiene a B_3 (el cual es una función divergente), esto implica que el término $a_1 + a_2 + a_3$ debe ser igual a cero, y efectivamente ésto se verifica al realizar los cálculos en FeynCalc. Por lo tanto podemos concluir que las expresiones del momento dipolar eléctrico y magnético, tanto diagonales como de transición, son finitas (más adelante se hablará al respecto).

3.4. Momentos dipolar eléctrico y anapolar magnético de transición

Tanto el dipolo eléctrico como magnético son polinomios de grado seis en la masa del neutrino m_i , sin incluir las funciones de PaVe, las cuales se encuentran en términos de las masas, $m_i, m_\alpha, m_\beta, m_w$. Pero en ambos casos se cumple que el término de grado cero es nulo debido a que se usa la propiedad:

$$\sum_i U_{\beta i} U_{\alpha i}^* = \delta_{\beta\alpha},$$

donde $\beta \neq \alpha$ debido a que hay cambio de sabor (ver Apéndice ??). También se puede mencionar que el dipolo eléctrico es una cantidad compleja, ésto se comprueba al realizar los cálculos y además de la estructura que tiene el factor de forma obtenido en la ecuación (3.21). Una característica bastante interesante es que el dipolo eléctrico de transición se puede expresar en términos de sumas y restas de los términos $a_{i\alpha} v_{i\beta}^*$ y $v_{i\alpha} a_{i\beta}^*$, como se muestra a continuación

$$d_{\alpha\beta} = c_1(a_{i\alpha} v_{i\beta}^* - v_{i\alpha} a_{i\beta}^*) + c_2(a_{i\alpha} v_{i\beta}^* + v_{i\alpha} a_{i\beta}^*), \quad (3.26)$$

donde c_1 y c_2 son funciones complejas que dependen de las masas m_α, m_β, m_i y m_w . Por otra parte, el dipolo magnético de transición se puede expresar como la suma y diferencia de $a_{i\alpha} a_{i\beta}^*$ y $v_{i\alpha} v_{i\beta}^*$

$$a_{\alpha\beta} = c_3(a_{i\alpha} a_{i\beta}^* - v_{i\alpha} v_{i\beta}^*) + c_4(a_{i\alpha} a_{i\beta}^* + v_{i\alpha} v_{i\beta}^*), \quad (3.27)$$

donde c_3 y c_4 son funciones reales que también dependen de las masas m_α, m_β, m_i y m_w .

3.5. Momentos dipolar eléctrico y anapolar magnético diagonales

Se observa que el valor del dipolo eléctrico d^{Vff} y del dipolo magnético anómalo a^{Vff} (se omitirá el superíndice Vff , en lo que sigue) tienen la siguiente característica:

CAPÍTULO 3. PROPIEDADES ELECTROMAGNÉTICAS DE NEUTRINOS
3.5. MOMENTOS DIPOLAR ELÉCTRICO Y ANAPOLAR MAGNÉTICO DIAGONALES

- La expresión para el dipolo eléctrico, d , se puede expresar en términos de la siguiente diferencia

$$\begin{aligned} d &= k(v_{i\alpha}a_{i\alpha}^* - a_{i\alpha}v_{i\alpha}^*) \\ &= k[v_{i\alpha}a_{i\alpha}^* - (v_{i\alpha}a_{i\alpha}^*)^*], \end{aligned} \quad (3.28)$$

Donde $a_{i\alpha}$ y $v_{i\alpha}$ son los parámetros utilizados en la lagrangiana mostrada en (3.2), k es un factor que depende de las masas de los neutrinos, el leptón l_α , la masa del bosón W y las funciones de PaVe. Por otra parte, si se tiene un número complejo $z = x + iy$, entonces

$$z - z^* = 2iy = 2i\text{Im}(z), \quad (3.29)$$

donde $\text{Im}(z)$, significa tomar la parte imaginaria del número complejo z . Esto quiere decir que d es un número complejo de la forma

$$d = (k2i)\text{Im}(v_{i\alpha}a_{i\alpha}^*) = k2i\text{Im}(a_{\alpha i}^\dagger v_{i\alpha}), \quad (3.30)$$

debido a que $(a^\dagger)_{\alpha i} = (a^{T*})_{\alpha i} = a_{i\alpha}$.

Otra característica es que, también, podemos expresar a d en términos de potencias de las masas de los neutrinos, m_i donde $i = e, \mu, \tau$. Sin incluir las propiedades de las funciones de PaVe, que están relacionadas con las masas de los neutrinos, podemos en un principio notar que el máximo grado, de la expresión, es cinco y no existen potencias pares de las masas, ni el término que no contiene a éstas, es decir

$$d = D_1m_i + D_2m_i^3 + D_3m_i^5, \quad (3.31)$$

donde D_i , $i = 1, 2, 3$ son constantes que dependen de la masa del bosón W , la masa del leptón l_α , las constantes $a_{i\alpha}$, $v_{i\alpha}$ y las funciones de PaVe. En el capítulo cuatro se incluyen las funciones de PaVe en términos de las masas de los leptones entrante y saliente, la masa de los neutrinos, m_i , y la masa del bosón W , lo cual producirá algunos cambios en los coeficientes que acompañana a las potencias de los m_i , así como elevará el grado de la expresión.

- El dipolo magnético anómalo, a , se puede expresar en términos de sumas $|a_{i\alpha}|^2 + |v_{i\alpha}|^2$ y diferencias $|a_{i\alpha}|^2 - |v_{i\alpha}|^2$, es decir

$$a = c_1(|a_{i\alpha}|^2 + |v_{i\alpha}|^2) + c_2(|a_{i\alpha}|^2 - |v_{i\alpha}|^2), \quad (3.32)$$

donde c_1 y c_2 son constantes que solo dependen de las masas de los neutrinos, el leptón l_α y las funciones de PaVe. Reacomodando la expresión para a en términos de las masas de los neutrinos, m_i , $i = e, \mu, \tau$ (sin tomar en cuenta las funciones de PaVe en términos de las masas de éstos), a diferencia del dipolo eléctrico, el máximo grado es seis y en este caso, si existen los términos con todas la potencias

$$a = A_0 + A_1m_i + A_2m_i^2 + A_3m_i^3 + A_4m_i^4 + A_5m_i^5 + A_6m_i^6, \quad (3.33)$$

donde A_i , $i = 0, \dots, 6$ son constantes que dependen de la masa del bosón W , la masa del leptón l_α , las constantes $a_{i\alpha}$, $v_{i\alpha}$ y las funciones de PaVe.

De igual manera, se verá en el capítulo cuatro que hay una ligera modificación al incluir las expresiones de PaVe en términos de las masas de los neutrinos, del bosón W y de de los leptones entrante y saliente y al considerar cierta constricción sobre los parámetros $a_{i\alpha}$ y $v_{i\alpha}$

Capítulo 4

Análisis de resultados

Esta parte de la tesis es la mas importante, debido a que se muestran las expresiones finales para los factores de forma electromagnéticos, utilizando constricciones sobre los parámetros $a_{i\alpha}$ y $v_{i\alpha}$ y propiedades de las funciones de PaVa, además se mencionan los valores obtenidos de la tasa de decaimiento (Decay-rate), la expresión para Branching Ratio (BR) y se obtienen cotas para los valores del BR a partir de otras cotas relacionadas con el valor de la masa de los neutrinos, m_i .

4.1. Expresiones finales del dipolo eléctrico y magnético

Al considerar la aproximación de que la masa del bosón W es mucho más grande que la masa del neutrino, i.e. $m_w \gg m_i$, la funciones de PaVe (ver Apéndice ??) que se obtienen son las siguientes:

- Propiedades diagonales

$$B_0(0, m_i^2, m_w^2) \approx \Delta_\varepsilon - \log\left(\frac{m_w^2}{\mu^2}\right) + 1 + \frac{m_i^2}{m_w^2} \log\left(\frac{m_w^2}{\mu^2}\right), \quad (4.1)$$

$$B_0(0, m_w^2, m_w^2) \approx \Delta_\varepsilon - \log\left(\frac{m_w^2}{\mu^2}\right), \quad (4.2)$$

$$B_0(m_\alpha^2, m_i^2, m_w^2) \approx \Delta_\varepsilon - \log\left(\frac{m_w^2}{\mu^2}\right) + 1 + \frac{m_i^2}{m_w^2} \log\left(\frac{m_w^2}{\mu^2}\right) + \frac{m_\alpha^2}{2m_w^2}, \quad (4.3)$$

$$C_0(m_\alpha^2, m_\alpha^2, 0, m_w^2, m_i^2, m_w^2) \approx -\frac{1}{m_w^2} + \frac{m_i^2}{m_w^2} \log\left(\frac{m_w^2}{\mu^2}\right) - \frac{m_\alpha^2}{2m_w^4} \quad (4.4)$$

- Propiedades de transición

$$B_0(0, m_i^2, m_i^2) \approx \Delta_\varepsilon - \log\left(\frac{m_w^2}{\mu^2}\right), \quad (4.5)$$

$$B_0(0, m_i^2, m_w^2) \approx \Delta_\varepsilon - \log\left(\frac{m_w^2}{\mu^2}\right) + 1 + \log\left(\frac{m_i^2}{m_w^2}\right), \quad (4.6)$$

$$B_0(0, m_w^2, m_w^2) \approx \Delta_\varepsilon - \log\left(\frac{m_w^2}{\mu^2}\right), \quad (4.7)$$

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

4.1. EXPRESIONES FINALES DEL DIPOLO ELÉCTRICO Y MAGNÉTICO

$$B_0(m_\alpha^2, m_i^2, m_w^2) \approx \Delta_\varepsilon - \log\left(\frac{m_w^2}{\mu^2}\right) + 1 - \frac{m_i^2}{m_w^2} \log\left(\frac{m_i^2}{m_w^2}\right) + \frac{m_\alpha}{2m_w^2}, \quad (4.8)$$

$$B_0(m_\beta^2, m_i^2, m_w^2) \approx \Delta_\varepsilon - \log\left(\frac{m_w^2}{\mu^2}\right) + 1 - \frac{m_i^2}{m_w^2} \log\left(\frac{m_i^2}{m_w^2}\right) + \frac{m_\beta}{2m_w^2}, \quad (4.9)$$

$$C_0(m_\alpha^2, m_\beta^2, 0, m_w^2, m_i^2, m_w^2) \approx -\frac{1}{m_w^2} - \frac{m_i^2}{m_w^4} \log\left(\frac{m_i^2}{m_w^2}\right) - \frac{(m_\alpha^2 + m_\beta^2)}{4m_w^4}. \quad (4.10)$$

Después de incluir las funciones de PaVe, que se encuentran en función de las masas de los neutrinos, los bosones W y los leptones de entrada y salida, además utilizando la condición de que $a_{i\alpha} = v_{i\alpha} = \frac{-g}{2\sqrt{2}}U_{\alpha i}^*$, donde $U_{i\alpha}$ son los elementos de la matriz PMNS y g es la constante de estructura fina de la teoría débil, se tiene que el grado de las expresiones del dipolo eléctrico y magnético adquieren las siguientes características:

■ Propiedades electromagnéticas de transición

El dipolo eléctrico de transición es un polinomio de grado seis de la masa de los neutrinos m_i , donde las únicas potencias que se tienen en la expresión son las pares y el coeficiente que no contiene potencias, es decir

$$d_{\alpha\beta} = g_0(m_\alpha, m_\beta, m_w) + g_1(m_\alpha, m_\beta, m_w)m_i^2 + f_2(m_\alpha, m_\beta, m_w)m_i^2 \log\left(\frac{m_i^2}{m_w^2}\right) \quad (4.11)$$

$$+ g_3(m_\alpha, m_\beta, m_w)m_i^4 + g_4(m_\alpha, m_\beta, m_w)m_i^6,$$

donde las $g_i(m_\alpha, m_\beta, m_w)$, $i = 0, \dots, 4$ son funciones complejas que acompañan a las potencias de las m_i . El término de la potencia par se dividió en un término que contiene la expresión $\log\left(\frac{m_i^2}{m_w^2}\right)$ y otro que no lo contiene.

Para el dipolo magnético de transición se tiene un polinomio de grado seis, que de igual manera solo contiene potencias pares de m_i y el término de grado cero. Es decir

$$a_{\alpha\beta} = h_0(m_\alpha, m_\beta, m_w) + h_1(m_\alpha, m_\beta, m_w)m_i^2 + h_2(m_\alpha, m_\beta, m_w)m_i^2 \log\left(\frac{m_i^2}{m_w^2}\right) \quad (4.12)$$

$$+ h_3(m_\alpha, m_\beta, m_w)m_i^4 + h_4(m_\alpha, m_\beta, m_w)m_i^6,$$

donde $h_i(m_\alpha, m_\beta, m_w)$, $i = 0, \dots, 4$ son las funciones que acompañan a cada potencia de m_i .

Por otra parte las funciones $g_0(m_\alpha, m_\beta, m_w)$ y $h_0(m_\alpha, m_\beta, m_w)$ tienen la siguiente estructura

$$g_0(m_\alpha, m_\beta, m_w) = U_{\beta i}U_{\alpha i}^*g(m_\alpha, m_\beta, m_w), \quad (4.13)$$

también

$$h_0(m_\alpha, m_\beta, m_w) = U_{\beta i}U_{\alpha i}^*h(m_\alpha, m_\beta, m_w), \quad (4.14)$$

donde U es la matriz de mezcla. Usando la propiedad $\sum_i U_{\beta i}U_{\alpha i}^* = \delta_{\beta\alpha}$ (ver Apéndice ??), se tiene que los valores de las funciones $g_0(m_\alpha, m_\beta, m_w)$ y $h_0(m_\alpha, m_\beta, m_w)$ tienen que ser

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

4.1. EXPRESIONES FINALES DEL DIPOLO ELÉCTRICO Y MAGNÉTICO

idénticamente cero ya que para los momentos de transición se cumple que $\alpha \neq \beta$. Así las expresiones (4.11) y (4.12) se reducen

$$d_{\alpha\beta} = g_1(m_\alpha, m_\beta, m_w)m_i^2 + g_2(m_\alpha, m_\beta, m_w)m_i^2 \log\left(\frac{m_i^2}{m_w^2}\right) + g_3(m_\alpha, m_\beta, m_w)m_i^4 + g_4(m_\alpha, m_\beta, m_w)m_i^6, \quad (4.15)$$

y

$$a_{\alpha\beta} = h_1(m_\alpha, m_\beta, m_w)m_i^2 + h_2(m_\alpha, m_\beta, m_w)m_i^2 \log\left(\frac{m_i^2}{m_w^2}\right) + h_3(m_\alpha, m_\beta, m_w)m_i^4 + h_4(m_\alpha, m_\beta, m_w)m_i^6, \quad (4.16)$$

Después de mencionar las características de las propiedades electromagnéticas de los leptones, y notar que se obtienen polinomios en las potencias de las m_i , ahora se toma en cuenta que los valores de las masas de los neutrinos son muy pequeñas [8], lo cual implica que se pueden ignorar los términos que tengan potencias mayores a dos en las expresiones electromagnéticas de transición. Así, de las expresiones (4.15) y (4.16), el dipolo eléctrico ($d_{\alpha\beta} \equiv d_l$) y magnético ($a_{\alpha\beta} \equiv a_l$) de transición se aproximan de la siguiente manera

$$d_l \approx C_1 M_i^2 + C_2 M_i^2 \log\left(\frac{M_i^2}{2}\right), \quad (4.17)$$

$$a_l \approx C_3 M_i^2 + C_4 M_i^2 \log\left(\frac{M_i^2}{m_w^2}\right), \quad (4.18)$$

$$(4.19)$$

en donde C_1, C_2, C_3 y C_4 son funciones que dependen de m_w, m_α y $m_\beta, U_{\beta i}, U_{\alpha i}^*$. De acuerdo con los cálculos realizados se encuentra que los términos, de las expresiones anteriores, que son más importantes son aquellos que contienen el término $M_i^2 \log\left(\frac{M_i^2}{m_w^2}\right)$, debido a que la diferencia con los otros términos que solo contienen M_i^2 es aproximadamente de cinco órdenes de magnitud.

Por lo tanto, realizando la suma sobre los valores $i = 1, 2, 3$ se tiene

$$d_l \approx F_d(m_w, m_\alpha, m_\beta) \sum_i U_{\beta i} U_{\alpha i}^* M_i^2 \log\left(\frac{M_i^2}{m_w^2}\right), \quad (4.20)$$

y

$$a_l \approx F_a(m_w, m_\alpha, m_\beta) \sum_i U_{\beta i} U_{\alpha i}^* M_i^2 \log\left(\frac{M_i^2}{m_w^2}\right). \quad (4.21)$$

Para simplificar la notación se utilizará $F_a = F_a(m_w, m_\alpha, m_\beta)$ la cual es función real y $F_d = F_d(m_w, m_\alpha, m_\beta)$ que es una función de valores complejos.

En términos del parámetro $a_{i\alpha}$ (ya que se consideró la restricción $a_{i\alpha} = v_{i\alpha}$) se tiene que los factores de forma, eléctrico y magnético, de transición (3.26) y (3.27), tienen la siguiente estructura

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

4.1. EXPRESIONES FINALES DEL DIPOLO ELÉCTRICO Y MAGNÉTICO

$$\xi_i = K_i |a_{i\alpha}|^2, \quad (4.22)$$

donde ξ_i con $i = 1, 2$ son los dos factores eléctrico y magnético y K_i son funciones escalares (que dependen de las masas m_i , m_w , m_α y m_β) para cada factor respectivamente.

■ **Propiedades electromagnéticas diagonales**

La expresión del dipolo magnético diagonal, $a_{\alpha\alpha}$, es un polinomio de grado 8 en la masa de los neutrinos m_i , el cual contiene solo potencias pares y un término de orden cero, es decir de la forma:

$$\begin{aligned} a_{\alpha\alpha} = & f_0(m_\alpha, m_w) + f_1(m_\alpha, m_w)m_i^2 + f_2(m_\alpha, m_w)m_i^2 \log\left(\frac{m_i^2}{m_w^2}\right) \\ & + f_3(m_\alpha, m_w)m_i^4 + f_4(m_\alpha, m_w)m_i^6 + f_5(m_\alpha, m_w)m_i^8, \end{aligned} \quad (4.23)$$

donde el término cuadrático se dividió en la parte que contiene al factor $\log\left(\frac{m_i^2}{m_w^2}\right)$ y la parte que no lo contiene. $f_i(m_\alpha, m_w)$, $i = 0, \dots, 5$ son funciones reales que acompañan a cada potencia de m_i antes descrita.

De manera similar a las propiedades electromagnéticas de transición se puede mencionar que la función $f_0(m_\alpha, m_\beta, m_w)$ tienen la siguiente estructura

$$f_0(m_\alpha, m_w) = \sum_i U_{\alpha i} U_{\alpha i}^* f(m_\alpha, m_w), \quad (4.24)$$

donde U es la matriz de mezcla. Usando la propiedad $\sum_i C U_{\beta i} U_{\alpha i}^* = C \delta_{\beta\alpha}$ (ver Apéndice ??), se tiene que los valores de la $f_0(m_\alpha, m_\beta, m_w)$ tienen que ser de la forma

$$f_0(m_\alpha, m_w) = f(m_\alpha, m_w), \quad (4.25)$$

ya que para los momentos diagonales se cumple que $\alpha = \beta$. Así la expresión (4.23) se puede aproximar

$$a_{\alpha\alpha} \approx f(m_\alpha, m_w) + f_1(m_\alpha, m_w)m_i^2 + f_2(m_\alpha, m_w)m_i^2 \log\left(\frac{m_i^2}{m_w^2}\right), \quad (4.26)$$

ya que se ha tomado en cuenta que el valor de m_i es muy pequeño, lo que permite ignorar términos de potencias mayores a dos. De forma explícita la función $f(m_\alpha, m_w)$ tiene la forma

$$f(m_\alpha, m_w) = \frac{\pi^2 g^2 m_\alpha^2 (m_\alpha^2 - 11m_\alpha^2 m_w^2 - 26m_w^4)}{32m_w^6}. \quad (4.27)$$

Introduciendo los valores de las masas, del leptón y la masa del bosón W , al cálculo realizado del momento magnético diagonal, se puede distinguir que el término $f_2(m_\alpha, m_w)m_i^2 \log\left(\frac{m_i^2}{m_w^2}\right)$ es cuatro órdenes de magnitud más pequeño que el término $f_1(m_\alpha, m_w)m_i^2$, por lo que lo podemos ignorar, así

$$a_{\alpha\alpha} \approx f(m_\alpha, m_w) + f_1(m_\alpha, m_w)m_i^2. \quad (4.28)$$

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

4.1. EXPRESIONES FINALES DEL DIPOLO ELÉCTRICO Y MAGNÉTICO

Donde el término f_1 es de la forma

$$f_1(m_\alpha, m_w) = \sum_i f'_1(m_\alpha, m_w) U_{\alpha i} U_{\alpha i}^* \quad (4.29)$$

En la expresión del momento magnético diagonal, $a_{\alpha\alpha}$, el término de orden cero, en la masa m_i , corresponde a los resultados esperados del Modelo Estándar (a^{SM}) y el término cuadrático en m_i , corresponde a la contribución de la nueva física (a^{nf}), por lo que:

$$a_{\alpha\alpha} = a^{SM} + a^{nf}, \quad (4.30)$$

donde, comparando con (4.28), a^{nf} tiene la forma

$$a^{nf} = f_i(m_\alpha, m_\beta) m_i^2. \quad (4.31)$$

Si expresamos el momento magnético en términos de $a_{i\alpha}$, después de utilizar la constricción los parámetros $a_{i\alpha} = v_{i\alpha}$, se encuentra que (3.32) tiene la siguiente forma:

$$a_{\alpha\alpha} = A_1 |a_{i\alpha}|^2, \quad (4.32)$$

donde A_1 es una función que depende de la masa de los neutrinos, del leptón l_α y de los bosones W .

Para el cálculo del dipolo eléctrico diagonal, se pueden mencionar dos aspectos importantes acerca de la violación de CP para el decaimiento, $l_\alpha \rightarrow l_\alpha \gamma$, donde no hay cambio de sabor:

- Si CP no se conserva esperamos que existan dipolos eléctricos diagonales.
- De lo contrario, si Cp se conserva, esperamos que no existan dipolos eléctricos diagonales, es decir $d = 0$.

En un inicio, de los cálculos realizados se obtiene que $d \neq 0$. Pero al imponer la constricción $a_{i\alpha} = v_{i\alpha}$, en la expresión (??), se obtiene que el dipolo eléctrico diagonal, $d_{\alpha\alpha}$, es idénticamente cero.

$$d_{\alpha\alpha} = 0. \quad (4.33)$$

En el caso particular al que se aplicaron los resultados, se satisface $a = v$, así que no hay dipolos eléctricos diagonales, lo cual implica que CP se conserva, las consecuencias de este hecho se mencionan en el capítulo de las conclusiones.

También se puede verificar que en todos los casos anteriores, las expresiones finales de los dipolos magnético y eléctrico, diagonales y de transición, no contienen divergencias del tipo Δ_ε , ni términos con el valor μ , obtenidad en las expresiones de PaVe, al inicio de esta sección, esto quiere decir que son expresiones finitas.

4.2. Amplitud al cuadrado

Para el cálculo de la tasa de decaimiento es necesario calcular la expresión $|\mathcal{M}|^2 = \mathcal{M}\mathcal{M}^*$, donde la amplitud \mathcal{M} , en este caso tiene la forma

$$\mathcal{M} = ie\bar{u}(p_2, s_2)\Gamma_\mu^{Vff}u(p_1, s_1)\varepsilon^{\mu*}(\lambda), \quad (4.34)$$

$u(p_1, s_1)$ es y $\bar{u}(p_2, s_2)$ son los espinores que obedecen la ecuación de Dirac, $\varepsilon^\mu(\lambda)$ es el vector de polarización con el momento del fotón (λ). De la expresión de la amplitud total mostrada en la expresión (3.22) y considerando que $V(q^2) = A(q^2) = 0$, se tiene que la expresión final de la amplitud, Γ_μ^{Vff} , tiene la forma:

$$\Gamma_\mu^{Vff} = ie [C_1\sigma_{\mu\nu}q^\nu + C_2\sigma_{\mu\nu}q^\nu\gamma_5] = (C_1 + C_2\gamma^5)\sigma_{\mu\nu}q^\nu, \quad (4.35)$$

Donde C_1 y C_2 son las expresiones para el dipolo magnético anómalo y el dipolo eléctrico, respectivamente. Entonces la expresión (4.34) queda de la siguiente manera:

$$\mathcal{M} = ie\bar{u}(p_2, s_2) [(C_1 + C_2\gamma^5)\sigma_{\mu\nu}q^\nu] u(p_1, s_1)\varepsilon^{\mu*}(\lambda), \quad (4.36)$$

y su complejo conjugado:

$$\mathcal{M}^* = (-ie) \{ \bar{u}(p_2, s_2) [(C_1 + C_2\gamma^5)\sigma_{\alpha\beta}q^\beta] u(p_1, s_1)\varepsilon^{\alpha*}(\lambda) \}^* \quad (4.37)$$

así de (4.36) y (4.37)

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2 = \sum_\lambda \sum_{s_1} \sum_{s_2} \varepsilon^2 \bar{u}(p_2, s_2) [(C_1 + C_2\gamma^5)\sigma_{\mu\nu}q^\nu] u(p_1, s_1)\varepsilon^{\mu*}(\lambda) \{ \bar{u}(p_2, s_2) [(C_1 + C_2\gamma^5)\sigma_{\alpha\beta}q^\beta] u(p_1, s_1)\varepsilon^{\alpha*}(\lambda) \}^* .$$

Desarrollando (4.37) y usando el hecho de que $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ y $\bar{u}(p, s) = u(p, s)\gamma^0$ se tiene

$$\begin{aligned} & \{ \bar{u}(p_2, s_2) [(C_1 + C_2\gamma^5)\sigma_{\alpha\beta}q^\beta] u(p_1, s_1)\varepsilon^{\alpha*}(\lambda) \}^* = \\ & \left\{ [\bar{u}(p_2, s_2) [(C_1 + C_2\gamma^5)\sigma_{\alpha\beta}q^\beta] u(p_1, s_1)\varepsilon^{\alpha*}(\lambda)]^T \right\}^* = \\ & \left\{ \varepsilon^{\alpha\dagger}(\lambda)U^T(p_1, s_1) [(C_1 + C_2\gamma^5)\sigma_{\alpha\beta}q^\beta]^T \bar{u}^T(p_2, s_2) \right\}^* = \\ & \varepsilon^{\alpha T}(\lambda)U^\dagger(p_1, s_1) [(C_1 + C_2\gamma^5)\sigma_{\alpha\beta}q^\beta]^\dagger \bar{u}^\dagger(p_2, s_2) = \\ & \varepsilon^{\alpha T}(\lambda)\bar{u}(p_1, s_1)\gamma^0 [(C_1 + C_2\gamma^5)\sigma_{\alpha\beta}q^\beta]^\dagger (U^\dagger(p_2, s_2)\gamma^0)^\dagger = \\ & \varepsilon^{\alpha T}(\lambda)\bar{u}(p_2, s_2)\gamma^0 [(C_1 + C_2\gamma^5)\sigma_{\alpha\beta}q^\beta]^\dagger \gamma^0 u(p_2, s_2). \end{aligned}$$

Usando las siguientes propiedades

$$\sum_\lambda \varepsilon^{\mu*}(\lambda)\varepsilon^{\alpha T}(\lambda) = -g^{\mu\nu},$$

y

$$\sum_s u(p, s)\bar{u}(p, s) = \not{p} + m \quad (4.38)$$

se obtiene:

$$\begin{aligned}
|\bar{\mathcal{M}}|^2 &= e^2 \sum_{\lambda} \sum_{s_1} \sum_{s_2} \bar{u}(p_2, s_2) [(C_1 + C_2 \gamma^5) \sigma_{\mu\nu} q^\nu] u(p_1, s_1) \underline{\varepsilon^{\mu*}(\lambda) \varepsilon^{\alpha T}(\lambda)} \bar{u}(p_1, s_1) \\
&\quad \gamma^0 [(C_1 + C_2 \gamma^5) \sigma_{\alpha\beta} q^\beta]^\dagger \gamma^0 u(p_2, s_2) \\
&= e^2 (-g^{\mu\alpha}) \sum_{s_1} \sum_{s_2} \bar{u}(p_2, s_2) [(C_1 + C_2 \gamma^5) \sigma_{\mu\nu} q^\nu] \underline{u(p_1, s_1) \bar{u}(p_1, s_1)} \gamma^0 \\
&\quad [(C_1 + C_2 \gamma^5) \sigma_{\alpha\beta} q^\beta]^\dagger \gamma^0 u(p_2, s_2) \\
&= e^2 (-g^{\mu\alpha}) \sum_{s_2} \bar{u}(p_2, s_2) [(C_1 + C_2 \gamma^5) \sigma_{\mu\nu} q^\nu] (\not{p}_1 + m_1) \gamma^0 [(C_1 + C_2 \gamma^5) \sigma_{\alpha\beta} q^\beta]^\dagger \gamma^0 u(p_2, s_2).
\end{aligned}$$

Definiendo la matriz

$$A = (-g^{\mu\alpha}) [(C_1 + C_2 \gamma^5) \sigma_{\mu\nu} q^\nu] (\not{p}_1 + m_1) \gamma^0 [(C_1 + C_2 \gamma^5) \sigma_{\alpha\beta} q^\beta]^\dagger \gamma^0, \quad (4.39)$$

entonces la expresión de la amplitud al cuadrado adquiere la siguiente forma

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2 = e^2 \sum_{s_2} \bar{u}(p_2, s_2) A u(p_2, s_2), \quad (4.40)$$

Es fácil notar que la matriz A no tiene ningún índice libre. Fijándose en las componentes de (4.40)

$$\begin{aligned}
|\bar{\mathcal{M}}|^2 &= e^2 \sum_{s_2} \bar{u}_a(p_2, s_2) A_{ab} U_b(p_2, s_2) \\
&= e^2 \sum_{s_2} A_{ab} U_b(p_2, s_2) \bar{u}_a(p_2, s_2).
\end{aligned}$$

Debido a que $Tr(M \vec{a} \vec{v}^T) = m_{kj} a_j v_k$ donde M es una matriz 2×2 y a, v son vectores columna, se tiene

$$\begin{aligned}
|\bar{\mathcal{M}}|^2 &= e^2 \sum_{s_2} Tr [A u(p_2, s_2) \bar{u}(p_2, s_2)] \\
&= e^2 Tr \left[A \sum_{s_2} u(p_2, s_2) \bar{u}(p_2, s_2) \right].
\end{aligned}$$

Usando la propiedad (4.38)

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2 = e^2 Tr [A (\not{p}_2 + m_2)]. \quad (4.41)$$

Definiendo la matriz

$$B = A (\not{p}_2 + m_2), \quad (4.42)$$

se tiene que la amplitud al cuadrado está dada por

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2 = e^2 Tr [B]. \quad (4.43)$$

Para calcular el valor de la traza de la ecuación (4.43), es necesario ver que forma tiene la matriz B definida anteriormente

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS
4.2. AMPLITUD AL CUADRADO

$$B = (-g^{\mu\alpha}) [(C_1 + C_2\gamma^5) \sigma_{\mu\nu} q^\nu] (\not{p}_1 + m_1) \gamma^0 [(C_1 + C_2\gamma^5) \sigma_{\alpha\beta} q^\beta]^\dagger \gamma^0 (\not{p}_2 + m_2). \quad (4.44)$$

Primero se analiza la parte $\gamma^0 [(C_1 + C_2\gamma^5) \sigma_{\alpha\beta} q^\beta]^\dagger \gamma^0$. Para esto es necesario mencionar algunas propiedades de las matrices de Dirac

$$\begin{aligned} \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 &= \gamma^\mu, \\ (\gamma^0)^2 &= 1, \\ \gamma^{0\dagger} &= \gamma^0, \\ \gamma^0 \gamma^0 &= 1, \\ \gamma^{5\dagger} &= \gamma^5. \end{aligned}$$

Por otra parte, se define

$$\sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \equiv \frac{i}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu). \quad (4.45)$$

Así

$$\begin{aligned} \gamma^0 [(C_1 + C_2\gamma^5) \sigma_{\alpha\beta} q^\beta]^\dagger \gamma^0 &= \gamma^0 q^{\beta\dagger} \sigma_{\alpha\beta}^\dagger (C_1 + C_2\gamma^5) \gamma^0 \\ &= q^\beta \gamma^0 \left(\frac{-i}{2} \right) (\gamma_\beta^\dagger \gamma_\alpha^\dagger - \gamma_\alpha^\dagger \gamma_\beta^\dagger) (C_1^* + C_2^* \gamma^5) \gamma^0 \\ &= \left(\frac{-i}{2} \right) q^\beta \gamma^0 (C_1^* \gamma_\beta^\dagger \gamma_\alpha^\dagger - C_1^* \gamma_\alpha^\dagger \gamma_\beta^\dagger + C_2^* \gamma_\beta^\dagger \gamma_\alpha^\dagger \gamma^5 - C_2^* \gamma_\alpha^\dagger \gamma_\beta^\dagger \gamma^5) \\ &= \left(\frac{-i}{2} \right) q^\beta (C_1^* \gamma^0 \gamma_\beta^\dagger \gamma^0 \gamma_\alpha^\dagger \gamma^0 - C_1^* \gamma^0 \gamma_\alpha^\dagger \gamma^0 \gamma_\beta^\dagger \gamma^0 \\ &\quad - C_2^* \gamma^0 \gamma_\beta^\dagger \gamma^0 \gamma_\alpha^\dagger \gamma^0 \gamma^5 + C_2^* \gamma^0 \gamma_\alpha^\dagger \gamma^0 \gamma_\beta^\dagger \gamma^0 \gamma^5) \\ &= \left(\frac{-i}{2} \right) q^\beta (C_1^* \gamma_\beta \gamma_\alpha - C_1^* \gamma_\alpha \gamma_\beta + C_2^* \gamma_\beta \gamma_\alpha \gamma^5 - C_2^* \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma^5) \\ &= \left(\frac{-i}{2} \right) q^\beta [C_1^* (\gamma_\beta \gamma_\alpha - \gamma_\alpha \gamma_\beta) - C_2^* (\gamma_\beta \gamma_\alpha - \gamma_\alpha \gamma_\beta) \gamma^5] \\ &= q^\beta \left(\frac{i}{2} \right) (\gamma_\alpha \gamma_\beta - \gamma_\beta \gamma_\alpha) (C_1^* - C_2^* \gamma^5) \\ &= q^\beta \sigma_{\alpha\beta} (C_1^* - C_2^* \gamma^5). \end{aligned}$$

Del resultado anterior y de la definición de la matriz B mostrada en (4.44)

$$\begin{aligned} B &= (-g^{\mu\alpha}) (C_1 + C_2\gamma^5) \sigma_{\mu\nu} q^\nu (\not{p}_1 + m_1) q^\beta \sigma_{\alpha\beta} (C_1^* - C_2^* \gamma^5) (\not{p}_2 + m_2) \\ &= - (C_1 + C_2\gamma^5) \sigma^{\alpha\ \ \nu} q^\nu (\not{p}_1 + m_1) q^\beta \sigma_{\alpha\beta} (C_1^* - C_2^* \gamma^5) (\not{p}_2 + m_2) \\ &= - (C_1 + C_2\gamma^5) \sigma^{\alpha\nu} q_\nu (p_{1\mu} \gamma^\mu + m_1) q^\beta \sigma_{\alpha\beta} (C_1^* - C_2^* \gamma^5) (p_{2\mu} \gamma^\mu + m_2) \end{aligned}$$

así

$$B = - (C_1 + C_2\gamma^5) \sigma^{\alpha\nu} q_\nu (p_{1\mu} \gamma^\mu + m_1) q^\beta \sigma_{\alpha\beta} (C_1^* - C_2^* \gamma^5) (p_{2\omega} \gamma^\omega + m_2). \quad (4.46)$$

Por lo tanto, utilizando las ecuaciones (4.43) y(4.46) se obtiene

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS
4.2. AMPLITUD AL CUADRADO

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2 = e^2 Tr \left[- (C_1 + C_2 \gamma^5) \sigma^{\alpha\nu} q_\nu (p_{1\mu} \gamma^\mu + m_1) q^\beta \sigma_{\alpha\beta} (C_1^* - C_2^* \gamma^5) (p_{2\omega} \gamma^\omega + m_2) \right]. \quad (4.47)$$

Realizando el cálculo anterior en Feyncalc se tiene que

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2 = 4e^2 \left\{ 4 (|C_1|^2 + |C_2|^2) (p_1 \cdot q)(p_2 \cdot q) - q^2 (|C_1|^2 (3m_2 m_1 + p_1 \cdot p_2) + |C_2|^2 (p_1 \cdot p_2 - 3m_2 m_1)) \right\}. \quad (4.48)$$

Utilizando las condiciones de cinemática

$$q^2 = 0, \quad (4.49)$$

$$p_1 = p_2 + q. \quad (4.50)$$

y definiendo

$$m_1 = m_\alpha, \quad m_2 = m_\beta. \quad (4.51)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} p_1^2 &= p_2^2 + 2p_2 \cdot q + q^2 \\ m_\alpha^2 &= m_\beta^2 + 2p_2 \cdot q \\ \Rightarrow p_2 \cdot q &= \frac{m_\alpha^2 - m_\beta^2}{2}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} p_2^2 &= p_1^2 - 2p_1 \cdot q + q^2 \\ m_\beta^2 &= m_\alpha^2 - 2p_1 \cdot q \\ \Rightarrow p_1 \cdot q &= \frac{m_\alpha^2 - m_\beta^2}{2}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Empleando la ecuaciones (4.49), (4.50), (4.52) y (4.53) en la expresión (4.48)

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2 = 16e^2 (|C_1|^2 + |C_2|^2) \left(\frac{m_\alpha^2 - m_\beta^2}{2} \right)^2. \quad (4.54)$$

Comparando la ecuación (4.54), con la forma de la expresión de la amplitud, Γ_μ^{Vff} , obtenida mediante el cálculo directo del decaimiento $l_\alpha \rightarrow l_\beta \gamma^\mu$, en donde solo se obtiene las propiedades magnéticas y eléctricas, es decir:

$$\Gamma_\mu^{Vff}(q^2) = -ie \left[\frac{ia_l(q^2)}{m_\alpha + m_\beta} - \frac{d(q^2)}{e} \gamma^5 \right] \sigma_{\mu\nu} q^\nu$$

Se tiene

$$C_1 = \frac{-ia_l(q^2)}{m_\alpha + m_\beta}, \quad C_2 = \frac{d_l(q^2)}{e}. \quad (4.55)$$

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS
4.3. TASA DE DECAIMIENTO (DECAY-RATE)

Debido a que C_1 y C_2 pueden ser cantidades complejas

$$|C_1|^2 = C_1 C_1^* = \left(\frac{-ia_l(q^2)}{m_\alpha + m_\beta} \right) \left(\frac{ia_l^*(q^2)}{m_\alpha + m_\beta} \right) = \frac{|a_l(q^2)|^2}{(m_\alpha + m_\beta)^2}, \quad (4.56)$$

$$|C_2|^2 = C_2 C_2^* = \left(\frac{d_l(q^2)}{e} \right) \left(\frac{d_l^*(q^2)}{e} \right) = \frac{|d_l(q^2)|^2}{e^2}. \quad (4.57)$$

Sustituyendo las expresiones de $|C_1|^2$ y $|C_2|^2$ en (4.54)

$$\begin{aligned} |\bar{\mathcal{M}}|^2 &= 16e^2 \left(\frac{|a_l(q^2)|^2}{(m_\alpha + m_\beta)^2} + \frac{|d_l(q^2)|^2}{e^2} \right) \left(\frac{m_\alpha^2 - m_\beta^2}{2} \right)^2 \\ &= 4(m_\alpha - m_\beta)^2 [e^2 |a_l(q^2)|^2 + (m_\alpha + m_\beta)^2 |d_l(q^2)|^2] \end{aligned}$$

4.3. Tasa de decaimiento (Decay-Rate)

Considerando el proceso de decaimiento $1 \rightarrow n$ con $|i\rangle = |\vec{p}_1\rangle$ y $|f\rangle = |\vec{p}_{f_1} \dots \vec{p}_{f_n}\rangle$, donde p_1, p_f son el momento inicial y final respectivamente, la diferencial de la tasa de decaimiento en el marco en reposo está dado por

$$d\Gamma = d\frac{1}{\tau} = (2\pi)^4 \left(\frac{\delta^4(\sum_k p_{f_k} - p_1)}{2m_1} \right) \prod_{k=1}^n \frac{d^3 \vec{p}_{f_k}}{(2\pi)^3 2E_{f_k}} |\bar{\mathcal{M}}|^2. \quad (4.58)$$

Donde Γ es la tasa de decaimiento de la partícula 1, τ es el tiempo de vida y $E_a = \sqrt{\vec{p}_a^2 + m_a^2}$ es la energía relativista. La tasa total de decaimiento se obtiene integrando sobre el espacio fase de la partículas finales,

$$\Gamma = \prod_l S_l \int d\Gamma, \quad (4.59)$$

donde $S_l \equiv 1/l!$ es un factor estático para l partículas idénticas.

De acuerdo al decaimiento que se está estudiando, $l_\alpha \rightarrow l_\beta \gamma$, se tiene un proceso $1 \rightarrow 2$ con $|i\rangle = |\vec{p}_1\rangle$ y $|f\rangle = |\vec{p}_2, \vec{p}_3\rangle$ donde $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ son el momento de los leptones l_α, l_β y el fotón γ respectivamente. Por lo tanto, de la expresión (4.58), se tiene:

$$d\Gamma = (2\pi)^4 \frac{\delta^4(p_2 + p_3 - p_1)}{2m_\alpha} \frac{d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{d^3 \vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} |\bar{\mathcal{M}}|^2. \quad (4.60)$$

Por otra parte $|\bar{\mathcal{M}}|^2$ solo depende de las masas de los leptones entrante y saliente y de las propiedades eléctricas y magnéticas, es decir, no hay ninguna dependencia en los momentos de las partículas que participan en el decaimiento, por lo que de la expresión de la tasa total de decaimiento (4.59) tiene la forma

$$\Gamma = |\bar{\mathcal{M}}|^2 \int (2\pi)^4 \frac{\delta^4(p_2 + p_3 - p_1)}{2m_\alpha} \frac{d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{d^3 \vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3}. \quad (4.61)$$

Debido a que las integrales de la expresión anterior únicamente se están calculando en la parte espacial, es necesario separar en dos partes a la función delta de Dirac $\delta^4(p_2 + p_3 - p_1) = \delta(p_2^0 + p_3^0 - p_1^0) \delta^3(\vec{p}_2 + \vec{p}_3 - \vec{p}_1)$. Considerando que el cálculo se está haciendo en el marco de referencia en reposo ($\vec{p}_1 = 0$), se tiene que los cuadrimentos de las partículas que participan en el decaimiento están dados por

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS
4.3. TASA DE DECAIMIENTO (DECAY-RATE)

$$p_1 = (p_1^0, 0) = (E_1, 0), \quad E_1 = m_\alpha, \quad (4.62)$$

$$p_2 = (p_2^0, \vec{p}_2) = (E_2, \vec{p}_2), \quad E_2 = \sqrt{\vec{p}_2^2 + m_\beta^2}, \quad (4.63)$$

$$p_3 = (p_3^0, \vec{p}_3) = (E_3, \vec{p}_3), \quad E_3 = |\vec{p}_3|. \quad (4.64)$$

Con lo anterior, la tasa de decaimiento toma la forma

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{|\bar{\mathcal{M}}|^2}{8m_\alpha} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \delta(p_2^0 + p_3^0 - p_1^0) \delta^3(\vec{p}_2 + \vec{p}_3 - \vec{p}_1) \frac{d^3\vec{p}_2}{E_2} \frac{d^3\vec{p}_3}{E_3} \\ &= \frac{|\bar{\mathcal{M}}|^2}{8m_\alpha} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \delta(E_3 + \sqrt{\vec{p}_2^2 + m_\beta^2} - m_\alpha) \delta^3(\vec{p}_2 - (-\vec{p}_3)) \frac{d^3\vec{p}_2}{\sqrt{\vec{p}_2^2 + m_\beta^2}} \frac{d^3\vec{p}_3}{E_3} \\ &= \frac{|\bar{\mathcal{M}}|^2}{8m_\alpha} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \delta(E_3 + \sqrt{\vec{p}_3^2 + m_\beta^2} - m_\alpha) \frac{1}{\sqrt{\vec{p}_3^2 + m_\beta^2}} \frac{d^3\vec{p}_3}{E_3}. \end{aligned}$$

Para facilitar el cálculo de la integral es conveniente introducir coordenadas esféricas. Si se elige el eje z a lo largo de \vec{p}_1 , entonces \vec{p}_3 tiene ángulo polar θ y ángulo azimutal φ . Como la integral se está calculando sobre todo el espacio, el ángulo azimutal y polar han sido integrados (opcionalmente) sobre todo su dominio, i.e.,

$d^3\vec{p}_3 = d\varphi d\cos\theta |\vec{p}_3|^2 d|\vec{p}_3| = d\Omega |\vec{p}_3|^2 d|\vec{p}_3| \rightarrow 4\pi |\vec{p}_3|^2 d|\vec{p}_3|$ donde $d\Omega = d\varphi d\cos\theta$ es el elemento de ángulo sólido. Utilizando la segunda condición de la expresión (4.64) se tiene que $d^3\vec{p}_3 \rightarrow 4\pi E_3^2 dE_3$ y así que la integral anterior adquiere la forma

$$\Gamma = \frac{|\bar{\mathcal{M}}|^2}{8m_\alpha} \frac{4\pi}{(2\pi)^2} \int \delta(E_3 + \sqrt{E_3^2 + m_\beta^2} - m_\alpha) \frac{1}{\sqrt{E_3^2 + m_\beta^2}} \frac{E_3 dE_3}{E_3}.$$

Usando la propiedad

$$\delta(g(x)) = \sum_j \frac{\delta(x - a_j)}{|g'(a_j)|}, \quad (4.65)$$

donde $g(a_j) = 0$ son ceros simples. Si se define $x \equiv E_3$ y $g(E_3) \equiv E_3 + \sqrt{E_3^2 + m_\beta^2} - m_\alpha$, entonces

$$\begin{aligned} g(a_1) &\equiv a_1 + \sqrt{a_1^2 + m_\beta^2} - m_\alpha = 0 \\ &\Rightarrow \sqrt{a_1^2 + m_\beta^2} = m_\alpha - a_1 \\ &\Rightarrow a_1^2 + m_\beta^2 = m_\alpha^2 - 2m_\alpha a_1 + a_1^2 \\ &\Rightarrow a_1 = \frac{m_\alpha^2 - m_\beta^2}{2m_\alpha}, \end{aligned}$$

donde a_1 representa el valor de la energía que hace cero a la función $g(E_3)$. Debido a que la energía es positiva, sería necesario tomar el valor absoluto de a_1 , pero hay que considerar un aspecto: el decaimiento de una partícula en N partículas solo tienen sentido cuando la masa de la partícula inicial es mayor que la suma de las masas de las partículas finales, por lo tanto la diferencia $m_\alpha^2 - m_\beta^2$ siempre es positiva, por lo tanto

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS
4.3. TASA DE DECAIMIENTO (DECAY-RATE)

$$a_1 = \frac{m_\alpha^2 - m_\beta^2}{2m_\alpha}. \quad (4.66)$$

Calculando la derivada de g

$$\begin{aligned} g'(E_3) &= 1 + \frac{E_3}{\sqrt{E_3^2 + m_\beta^2}} \\ \Rightarrow |g'(a_1)| &= 1 + \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + m_\beta^2}} \\ \Rightarrow |g'(a_1)| &= \left| 1 + \frac{\frac{m_\alpha^2 - m_\beta^2}{2m_\alpha}}{\sqrt{\left(\frac{m_\alpha^2 - m_\beta^2}{2m_\alpha}\right)^2 + m_\beta^2}} \right| \\ \Rightarrow |g'(a_1)| &= \left| 1 + \frac{m_\alpha^2 - m_\beta^2}{m_\alpha^2 + m_\beta^2} \right| \\ \Rightarrow |g'(a_1)| &= \frac{2m_\alpha^2}{m_\alpha^2 + m_\beta^2}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Por lo tanto de (4.65)

$$\delta(E_3 + \sqrt{E_3^2 + m_\beta^2} - m_\alpha) = \frac{\delta\left(E_3 - \frac{|m_\alpha^2 - m_\beta^2|}{2m_\alpha}\right)}{\frac{2m_\alpha^2}{m_\alpha^2 + m_\beta^2}}. \quad (4.68)$$

Utilizando las expresiones (4.65) y (4.68) se tiene

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{|\bar{\mathcal{M}}|^2}{8m_\alpha} \frac{4\pi}{(2\pi)^2} \frac{m_\alpha^2 + m_\beta^2}{2m_\alpha^2} \int \delta\left(E_3 - \frac{|m_\alpha^2 - m_\beta^2|}{2m_\alpha}\right) \frac{E_3 dE_3}{\sqrt{E_3^2 + m_\beta^2}} \\ &= \frac{|\bar{\mathcal{M}}|^2}{8m_\alpha} \frac{4\pi}{(2\pi)^2} \frac{m_\alpha^2 + m_\beta^2}{2m_\alpha^2} \frac{\frac{|m_\alpha^2 - m_\beta^2|}{2m_\alpha}}{\sqrt{\left(\frac{m_\alpha^2 - m_\beta^2}{2m_\alpha}\right)^2 + m_\beta^2}} \\ &= \frac{|\bar{\mathcal{M}}|^2}{8m_\alpha} \frac{4\pi}{(2\pi)^2} \frac{m_\alpha^2 + m_\beta^2}{2m_\alpha^2} \frac{|m_\alpha^2 - m_\beta^2|}{m_\alpha^2 + m_\beta^2} \\ &= \frac{|\bar{\mathcal{M}}|^2}{16\pi} \frac{|m_\alpha^2 - m_\beta^2|}{m_\alpha^3}. \end{aligned}$$

La amplitud al cuadrado esta dado por

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2 = 4(m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2 [e^2 |a_l(q^2)|^2 + (m_\alpha + m_\beta)^2 |d_l(q^2)|^2],$$

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS
4.3. TASA DE DECAIMIENTO (DECAY-RATE)

así

$$\begin{aligned}\Gamma &= \frac{4(m_\alpha^2 - m_\beta^2)^2 [e^2 |a_l(q^2)|^2 + (m_\alpha + m_\beta)^2 |d_l(q^2)|^2]}{16\pi} \frac{|m_\alpha^2 - m_\beta^2|}{m_\alpha^3} \\ &= \left[\frac{e^2 |a_l(q^2)|^2 + (m_\alpha + m_\beta)^2 |d_l(q^2)|^2}{4\pi} \right] \frac{|m_\alpha^2 - m_\beta^2|^3}{m_\alpha^3}\end{aligned}$$

Es decir

$$\Gamma = \frac{e^2}{4\pi} \frac{|m_\alpha^2 - m_\beta^2|^3}{m_\alpha^3} \left[|a_l(q^2)|^2 + \frac{1}{e^2} (m_\alpha + m_\beta)^2 |d_l(q^2)|^2 \right], \quad (4.69)$$

Las barras de valor absoluto se pueden quitar debido a que la masa del leptón inicial, m_α , debe ser mayor que la del leptón final, m_β , para que el decaimiento pueda suceder. Así que la expresión final es

$$\Gamma = \frac{e^2}{4\pi} \frac{(m_\alpha^2 - m_\beta^2)^3}{m_\alpha^3} \left[|a_l(q^2)|^2 + \frac{1}{e^2} (m_\alpha + m_\beta)^2 |d_l(q^2)|^2 \right]. \quad (4.70)$$

Ahora, utilizando la expresión general de la tasa de decaimiento (4.70) y las ecuaciones (4.20) y (4.21), se calcula la tasa de decaimiento (decay rate) de los neutrinos de transición, la cual tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned}\Gamma &= \frac{e^2}{4\pi} \frac{(m_\alpha^2 - m_\beta^2)^3}{m_\alpha^3} \left[\left(F_a \sum_i U_{\beta i} U_{\alpha i}^* M_i^2 \log \left(\frac{M_i^2}{m_w^2} \right) \right)^2 + \frac{1}{e^2} (m_\alpha + m_\beta)^2 \left(F_d \sum_i U_{\beta i} U_{\alpha i}^* M_i^2 \log \left(\frac{M_i^2}{m_w^2} \right) \right)^2 \right] \\ &= \frac{e^2}{4\pi} \frac{(m_\alpha^2 - m_\beta^2)^3}{m_\alpha^3} \left[(F_a)^2 + \frac{1}{e^2} (m_\alpha + m_\beta)^2 |F_d|^2 \right] \sum_i \sum_j U_{\beta i} U_{\alpha i}^* U_{\beta j} U_{\alpha j}^* M_i^2 M_j^2 \log \left(\frac{M_i^2}{m_w^2} \right) \log \left(\frac{M_j^2}{m_w^2} \right),\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}F_a &= -\pi^2 g^2 \left(\frac{8m_a^3 m_b + 12m_a^2 m_b^2 + 8m_a m_b^3 - 4m_a m_b m_w^2 + 8m_w^4}{16m_a m_b m_w^4} \right), \\ F_d &= i\pi^2 g^2 e \left(\frac{8m_a^3 m_b - 12m_a^2 m_b^2 + 8m_a m_b^3 - 4m_a m_b m_w^2 - 8m_w^4}{16m_a m_b m_w^4 (m_a - m_b)} \right),\end{aligned} \quad (4.71)$$

así, la expresión final para la tasa de decaimiento es de la forma

$$\begin{aligned}\Gamma &= \left(\frac{e^2 \pi^3 g^4 (m_a - m_b)(m_a + m_b)^3}{32m_a^5 m_b^2 m_w^8} \right) \left[4m_a^8 m_b^2 - m_a^6 (3m_b^4 + 4m_b^2 m_w^2) + m_a^4 (-3m_b^6 + 4m_b^4 m_w^2 - 3m_b^2 m_w^4) \right. \\ &\quad \left. + m_a^2 (4m_b^8 - 4m_b^6 m_w^2 - 3m_b^4 m_w^4 + 8m_b^2 m_w^6 + 4m_w^8) + 4m_b^2 m_w^8 \right] \\ &\quad \sum_{i,j} U_{\beta i} U_{\alpha i}^* U_{\beta j} U_{\alpha j}^* M_i^2 M_j^2 \log \left(\frac{M_i^2}{m_w^2} \right) \log \left(\frac{M_j^2}{m_w^2} \right).\end{aligned}$$

4.4. Branching ratio

Del artículo Particle Data Group (PDG) [8] se tiene la siguiente relación

$$m_{tot} < a, \quad (4.72)$$

donde $a \approx 0.39 \times 10^{-9} Gev$ es un número que representa una cota superior para la suma de las masas de los neutrinos m_{tot} . Por otra parte la masa de un solo neutrino m_i es menor que la suma de los tres $m_i < m_{tot}$. Debido a que la función logaritmo es una función monótona creciente se tiene

$$\log\left(\frac{m_i^2}{M_w^2}\right) < \log\left(\frac{a^2}{M_w^2}\right), \quad (4.73)$$

realizando la suma sobre los tres sabores de neutrinos

$$\sum_{i=1}^3 m_i^2 \log\left(\frac{m_i^2}{M_w^2}\right) < \sum_{i=1}^3 a^2 \log\left(\frac{a^2}{M_w^2}\right) = 3a^2 \log\left(\frac{a^2}{M_w^2}\right), \quad (4.74)$$

elevando al cuadrado

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 m_i^2 m_j^2 \log\left(\frac{m_i^2}{m_w^2}\right) \log\left(\frac{m_j^2}{m_w^2}\right) < 9a^4 \log\left(\frac{a^2}{m_w^2}\right)^2. \quad (4.75)$$

Tomando los elementos de la matriz PMNS como $U_{\alpha i} \approx 1$ y de la ecuación (4.75), la tasa de decaimiento está acotada por el valor

$$\Gamma < \left(\frac{e^2 \pi^3 g^4 (m_a - m_b)(m_a + m_b)^3}{32 m_a^5 m_b^2 m_w^8} \right) [4m_a^8 m_b^2 - m_a^6 (3m_b^4 + 4m_b^2 m_w^2) + m_a^4 (-3m_b^6 + 4m_b^4 m_w^2 - 3m_b^2 m_w^4) \\ + m_a^2 (4m_b^8 - 4m_b^6 m_w^2 - 3m_b^4 m_w^4 + 8m_b^2 m_w^6 + 4m_w^8) + 4m_b^2 m_w^8] 9a^4 \log\left(\frac{a^2}{m_w^2}\right)^2$$

Para calcular el valor de e se considera la expresión de la constante de estructura en unidades naturales ($\alpha = \frac{1}{137}$),

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \Rightarrow e = \sqrt{\frac{4\pi}{137}} \approx 0.32 \quad (4.76)$$

De la expresión del Branching ratio $BR_i = \tau_i \Gamma$ se tiene

$$BR_i = \tau_i \Gamma < 9 * (0.32)^2 \left(\frac{\pi^3 g^4 (m_a - m_b)(m_a + m_b)^3}{32 m_a^5 m_b^2 m_w^8} \right) [4m_a^8 m_b^2 - m_a^6 (3m_b^4 + 4m_b^2 m_w^2) \\ + m_a^4 (-3m_b^6 + 4m_b^4 m_w^2 - 3m_b^2 m_w^4) + m_a^2 (4m_b^8 - 4m_b^6 m_w^2 - 3m_b^4 m_w^4 + 8m_b^2 m_w^6 + 4m_w^8) \\ + 4m_b^2 m_w^8] a^4 \log\left(\frac{a^2}{m_w^2}\right)^2, \quad (4.77)$$

donde τ_i es el tiempo de vida del lepton entrante l_α . Tomando los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
 m_w &= 80.373 \text{Gev}, \\
 m_{l_e} &= 0.51 \times 10^{-3} \text{Gev}, \\
 m_{l_\mu} &= 105.65 \times 10^{-3} \text{Gev}, \\
 m_{l_\tau} &= 1776.84 \times 10^{-3} \text{Gev}, \\
 \tau_{l_\mu} &= 2.19 \times 10^{-6} \text{seg}, \\
 \tau_{l_\tau} &= 2.96 \times 10^{-13} \text{seg}, \\
 G_F/\sqrt{2} &= g^2/8m_w^2,
 \end{aligned}$$

donde G_F es la constante de Fermi y tiene el valor de $G_F = 1.16 \times 10^{-5} \text{Gev}^{-2}$. Utilizando la equivalencia $1 \text{Gev}^{-1} = 6.59 \times 10^{-25} \text{seg}$, sustituyendo los valores, mostrados anteriormente, de las masas de los leptones l_α, l_β y el bosón W , así como el tiempo de vida del leptón que decae, l_α , en la expresión (4.77) y realizando los cálculos correspondientes, se tiene que BR para cada decaimiento posible son del orden

$$\begin{aligned}
 BR(l_\tau \rightarrow \gamma l_\mu) &\sim \mathcal{O}(10^{-20}), \\
 BR(l_\tau \rightarrow \gamma l_e) &\sim \mathcal{O}(10^{-20}), \\
 BR(l_\mu \rightarrow \gamma l_e) &\sim \mathcal{O}(10^{-15}).
 \end{aligned}$$

4.5. Condiciones de consistencia

Para ver que los cálculos se hicieron correctamente se calculó la masa efectiva del neutrino del muón, $m_{\nu_\mu}^{eff}$, y se comparó con el valor obtenido experimentalmente. En los cálculos se utilizó el valor del dipolo magnético del muón, el cual es uno de los valores mejor medido experimentalmente. De [8] se tienen que la diferencia entre los resultados teóricos y experimentales está dada por

$$\Delta a_\mu = a_\mu^{exp} - a_\mu^{SM}, \quad (4.78)$$

donde a_μ^{exp} y a_μ^{SM} son los valores del campo magnético del muón obtenidos experimentalmente y teóricamente de manera respectiva. El valor de Δa_μ se debe a los efectos de la nueva física, que en particular se obtienen del término cuadrático en m_i , de acuerdo a la ecuación (4.30). Además se cumple:

$$a^{nf} < \Delta a_\mu. \quad (4.79)$$

Por otra parte en el término del momento magnético diagonal que corresponde a la contribución de la nueva física, a^{nf} , se está realizando la suma sobre los tres neutrinos de sabor; por lo que se puede utilizar la siguiente propiedad:

$$\sum_i m_i^2 |U_{i\alpha}|^2 = m_{\nu_\alpha}^{eff2}. \quad (4.80)$$

Sustituyendo la ecuación (4.80) en la definición de a^{nf} (4.31) y combinando el resultado con la desigualdad (4.79), se obtiene

$$|m_{\nu_\mu}^{eff}|^2 \leq \frac{|\Delta a_\mu|}{f_1'(m_\alpha, m_w)}, \quad (4.81)$$

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS
4.5. CONDICIONES DE CONSISTENCIA

donde $f'_1(m_\alpha, m_w)m_{\nu_\mu}^{eff2} = \sum_i f_1(m_\alpha, m_w)U_{\alpha i}U_{\alpha i}^*m_i$ viene de la expresión (4.28) y (4.29). De los cálculos realizados se obtuvo que el momento diagonal magnético para el muón es:

$$a_{\mu\mu} = \sum_i 123.84 U_{\alpha i}U_{\alpha i}^*m_i^2, \quad (4.82)$$

pero se está utilizando regularización dimensional, por lo que se obtiene un factor global $\frac{1}{(4\pi)^2}$ (ver Apéndice ??), así

$$a_{\mu\mu} = 0.0794 m_{\nu_\mu}^{eff2}, \quad (4.83)$$

así, utilizando (4.81) y $\Delta a_\mu = 288 \times 10^{-11}$ [8], se tiene:

$$|m_{\nu_\mu}^{eff}|^2 \leq \frac{|\Delta a_\mu|}{f'_1(m_\alpha, m_w)} = \frac{288 \times 10^{-11}}{0.0794} Gev^2 = 3.62 \times 10^{-8} Gev^2. \quad (4.84)$$

Lo anterior implica

$$m_{\nu_\mu}^{eff} \leq 1.9 \times 10^{-4} Gev, \quad (4.85)$$

este valor coincide con el reportado en [8] ($m_{\nu_\mu}^{eff} \leq 0.19 Mev$). El resultado obtenido anteriormente muestra que se satisface la condición de consistencia, relacionada con la masa del neutrino del muón, la cual nos permite tener mayor certeza de que los cálculos se realizaron de manera correcta.

También se calculó el momento magnético del muón, a_μ^{SM} , y se comparó con el resultado de [8]. Para ésto, solamente se utilizó el término de orden cero de la expresión (4.28), el cual se obtiene a partir del Modelo Estándar. El orden de magnitud que se obtuvo es $\mathcal{O}(10^{-3})$ el cual coincide con el valor calculado a partir del ME. Lo mencionado anteriormente es una prueba de que los cálculos fueron realizados correctamente. Lo cual nos permite confiar en las expresiones obtenidas de las propiedades electromagnéticas de los leptones.

Capítulo 5

Conclusiones

El modelo de los neutrinos masivos podría constituir la puerta a nueva física más allá del Modelo Estándar. En la tesis, se analizaron las propiedades electromagnéticas de leptones inducidos por neutrinos con masa no nula, la información obtenida se estructuró en dos factores de forma electromagnéticos: momento dipolar eléctrico y el momento anómalo magnético. Estas propiedades pueden mostrar información de gran relevancia para conocer el efecto de la nueva física. Estos factores de forma proporcionan información fundamental acerca de como se acoplan los leptones con el neutrino y con el bosón W .

La parte central, del trabajo, fue calcular las contribuciones de neutrinos masivos de Dirac al vértice $l_\alpha \leftarrow \gamma l_\beta$, donde se consideró el fotón en la capa de masa (on shell) y se contempló la posibilidad de que los leptones externos tengan sabor diferente (violación de sabor). El estudio del decaimiento anterior se analizó a nivel de un lazo, mediante la construcción y evaluación de los diagramas de Feynman, los cuales contribuyen con las propiedades electromagnéticas de los leptones. Se obtuvieron un total de tres diagramas de Feynman diferentes considerando solo aquellos que contienen bosones W y neutrinos ν_i dentro del lazo.

Se utilizó el mismo método para determinar los momentos diagonales y de transición de los leptones, ya que el primer caso se podía ver como una forma particular del segundo, haciendo iguales las masas de los leptones entrante y saliente, pero se debía tener en cuenta algunas sutilezas en las expresiones para el cálculo de la amplitud. La diferencia se notó en la expresión de las funciones de PaVe, ya que tenían diferente estructura para las propiedades diagonales y de transición. Una característica interesante de los resultados, sin incluir las constricciones sobre los parámetros $a_{i\alpha}$ y $v_{i\alpha}$, es que la expresión para el dipolo eléctrico diagonal se pudo expresar en términos de la diferencia $v_{i\alpha}a_{i\alpha}^* - a_{i\alpha}v_{i\alpha}^*$, lo que garantiza que es una cantidad compleja, y el dipolo magnético diagonal en términos de las sumas y diferencias $|a_{i\alpha}|^2 + |v_{i\alpha}|^2$ y $|a_{i\alpha}|^2 - |v_{i\alpha}|^2$. Por otra parte el dipolo eléctrico de transición se puede expresar en términos de las sumas y diferencias $a_{i\alpha}v_{i\beta}^* - v_{i\alpha}a_{i\beta}^*$ y $a_{i\alpha}v_{i\beta}^* + v_{i\alpha}a_{i\beta}^*$ y el dipolo magnético se puede expresar en términos de $a_{i\alpha}a_{i\beta}^* + v_{i\alpha}v_{i\beta}^*$ y $a_{i\alpha}a_{i\beta}^* - v_{i\alpha}v_{i\beta}^*$. Al imponer que $a_{i\alpha} = v_{i\alpha} = -\frac{g}{2\sqrt{2}}U_{\alpha i}^*$ se obtuvo un resultado de gran importancia, ya que el factor de forma del dipolo eléctrico es cero, a nivel de un lazo, lo cual equivale a que el dipolo eléctrico de los leptones no recibe correcciones radiativas.

Con respecto de la anulación del momento dipolar eléctrico, si las matrices a y v son reales, entonces la simetría CP se conserva. Por otra parte, para que los momentos dipolares existan, se requiere de la violación de CP. Por lo tanto si ésta es una transformación de simetría, se espera que, de forma natural, el dipolo eléctrico diagonal sea igual a cero. Algo que se halló en los cálculos de la tesis es que otra manera en que el dipolo eléctrico diagonal se cancele es si $a_{i\alpha} = v_{i\alpha}$. Esto

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

significa que la forma en que se acoplan los bosones W^\pm a los leptones cargados y a los neutrinos es un elemento clave que determina si los dipolos eléctricos existen o no a nivel de un lazo.

El objetivo del segundo análisis fue el cálculo del Branching Ratio el cual es del orden de $\mathcal{O}(10^{-20})$ cuando se presentan los cambios de sabor leptónico, $l_\tau \rightarrow l_\mu$ y $l_\tau \rightarrow l_e$, y del orden de $\mathcal{O}(10)^{-15}$ para el cambio de sabor leptónico $l_\mu \rightarrow l_e$. Para este cálculo se tomó en cuenta que la suma de las masas de los neutrinos está acotada superiormente por $a \approx 0.39 \times 10^{-9} \text{Gev}$. La contribución de la nueva física, debido a la presencia de neutrinos con masa, en las expresiones de los dipolos eléctrico y magnético de transición es, aproximadamente, del orden de $\mathcal{O}(10^{-25})$ y para el dipolo magnético diagonal es, aproximadamente, del orden de $\mathcal{O}(10^{-20})$. Los cuales son valores extremadamente pequeños como para que puedan ser medidos experimentalmente.

Finalmete para corroborar que los cálculos se hicieron correctamente, se hicieron un par de análisis de consistencia, en el que se calculó el momento magnético del muón, para el cual existe cálculos teóricos [44, 45] y mediciones experimentales [59, 60, 61] de alta precisión hasta el momento, y que son consistentes con el Modelo Estándar. También se obtuvo una cota superior para la masa del neutrino del muón, para la cual existen cálculos teóricos. En ambos casos, los resultados obtenidos fueron del mismo orden de magnitud, lo cual permitió tener mayor certeza de los resultados obtenidos. Al final se logró hacer la conexión de los cálculos fenomenológicos con los datos experimentales, lo que facilitó la obtención de cotas sobre algunos parámetros.

Bibliografía

- [1] F. Boehm and P. Vogel, *Physics of Massive Neutrinos*, Cambridge University Press (1992).
- [2] R. G. Arns, *Phys. perspect.*, 3, 314–334, (2001).
- [3] M. Zralek, arXiv: 1012.2390 [hep-ph].
- [4] C. Giunti and A. Studenikin, *Physics of Atomic Nuclei*, Vol. 72, No. 12, pp. 2089–2125, (2009).
- [5] P. Langacker, *The Standard Model and Beyond*, CRC Press Taylor and Francis Group (2010).
- [6] M. Thomson, *Modern Particle Physics*, Cambridge University Press (2013).
- [7] M. Pallavicini, arXiv:0910.3304 [astro-ph.SR].
- [8] K. A. Olive et. al. (Particle Data Group), *Chin. Phys.* **C38**, 090001 (2014)(URL: <http://pdg.lbl.gov>).
- [9] T. Aliev, N. K. Pak and M. Serin, *The Standard Model and Beyond*, Springer (2008).
- [10] C. Giunti and C. W. Kim, *Nutrino Physics and Astrophysics*, Oxford University Press (2007).
- [11] D. Delepine and H. Novaes-Sánchez, *Phys. Rev. D* **92**,95016 (2015).
- [12] W. Hollik, J.I. Illana, S. Rigolin, C. Schappacher and D. Stöckinger, *Nucl. Phys.* **B551**,(1999) 3-40.
- [13] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison Wesley (1995).
- [14] P.W. Higgs, *Phys. Rev. Lett.* **12**, 132 (1964).
- [15] P. W. Higgs, *Phys. Lett.*, 12, 132–133, (1964).
- [16] P. W. Higgs, *Phys. Rev. Lett.*, 13, 508–509, (1964).
- [17] P. W. Higgs, *Phys. Rev.*, 145, 1156–1163, (1966).
- [18] F. Englert and R. Brout, *Phys. Rev. Lett.*, 13, 321–322, (1964).
- [19] J. Goldstone, *Nuovo Cimento* **19**, 154 (1961).
- [20] M. Srednicki, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press (2006).
- [21] B. Pontecorvo, *Sov. Phys. JETP*, 6, 429, (1957).
- [22] B. Pontecorvo, *Sov. Phys. JETP*, 7, 172-173, (1958).
- [23] M.Gell-Mann and A. Pais, *Phys.Rev.* 97, 1387, (1955).

- [24] M. Nakagawa, arXiv:9811358 [hep-ph].
- [25] B. Pontecorvo, Sov. Phys. JETP, 26, 984-988, (1968).
- [26] G. Danby et al., Phys. Rev. Lett., 9, 36-44, (1962).
- [27] B. Pontecorvo, Sov. Phys. JETP, 10, 1236-1240, (1960).
- [28] Z. Maki, M. Nakagawa and S. Sakata, Prog. Theor. Phys., 28, 870, (1962).
- [29] B. T. Cleveland et al., Astrophys. J., 496, 505-526, (1998).
- [30] V. N. Gribov and B. Pontecorvo, Phys. Lett., B28, 493, (1969).
- [31] S. Eliezer and A. R. Swift, Nucl. Phys., B105, 45, (1976).
- [32] H. Fritzsch and P. Minkowski, Phys. Lett., B62, 72, (1976).
- [33] S. M. Bilenky and B. Pontecorvo, Sov. J. Nucl. Phys., 24, 316-319, (1976).
- [34] S. M. Bilenky and B. Pontecorvo, Nuovo Cim. Lett., 17, 569, (1976).
- [35] S. M. Bilenky and B. Pontecorvo, Phys. Rep., 41, 225, (1978).
- [36] T. Cheng and L. Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Oxford Science Publications (2000).
- [37] C. Giunti, C. W. Kim and U. W. Lee, Mod. Phys. Lett., A6, (1745-1755, 1991).
- [38] U. Amaldi, W. de Boer and H. Furstenau, Phys. Lett., B260, 447-455, (1991).
- [39] J. R. Ellis, S. Kelley and D. V. Nanopoulos, Phys. Lett., B260, 131-137, (1991).
- [40] J. Beringer et al. (Particle Data Group), Phys. Rev. D**86**, 010001 (2012) and 2013 partial update for the 2014 edition(URL: <http://pdg.lbl.gov>).
- [41] A. Pich, arXiv:1310.7922 [hep-ph].
- [42] C. Broggini, C. Giunti and A. Studenikin, arXiv:1207.3980 [hep-ph].
- [43] F. Jegerlehner and A. Nyffeler, arXiv:0902.3360 [hep-ph].
- [44] T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita and M. Nio, Phys. Rev. Lett. **109**, 111807 (2012).
- [45] T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita and M. Nio, Phys. Rev. Lett. **109**, 111808 (2012).
- [46] M. Nowakowski, E. A. Paschos and J. M. Rodríguez, arXiv:0402058[physics.ed-ph].
- [47] M. J. Baker and J. Bordes, arXiv:1110.3951[hep-ph].
- [48] J. Beringer et al. (Particle Data Group), Phys. Rev. D**86**, 010001 (2012) and 2013 partial update for the 2014 edition(URL: <http://pdg.lbl.gov>).
- [49] G. Aad et. al. (ATLAS Collaboration), Phys. Lett. B **716**, 1 (2012).
- [50] S. Chatrchyan et. al. (CMS Collaboration), Phys. Lett. B **716**, 30 (2012).
- [51] B. Pontecorvo, Sov. Phys. JETP **6**, 429, (1957).
- [52] C. Broggini, C. Giunti and A. Studenikin, Advances in High Energy Physics, vol. 2012, Article ID 459526, 47 pages, 2012.

- [53] P. Minkowski, Phys. Lett., B67, 421 (1977).
- [54] T. Yanagida, 1979, Workshop on the Baryon Number of the Universe and Unified Theories, Tsukuba, Japan, 13-14 Feb (1979).
- [55] M. Gell-Mann, P. Ramond and R. Slansky, 1979, In "Supergravity", p. 315, edited by F. van Nieuwenhuizen and D. Freedman, North Holland, Amsterdam. bibitem814R. N. Mohapatra and G. Senjanovic, Phys. Rev. Lett., 44, 914, (1988).
- [56] Z. Maki, M. Nakagawa and S. Sakata, Prog. Theor. Phys., 28, 870, (1962).
- [57] L. Chau and W. Y. Keung, Phys. Rev. Lett. **53**, 1802 (1984).
- [58] A. D. Zakharov, Sov. Phys. Usp. **34**, 392 (1991).
- [59] G. W. Bennett et al (Muon g-2 Collaboration), Phys. Rev. Lett. **92**, 161802 (2004).
- [60] D. Hanneke, S. Fogwell, and G. Gabrielse, Phys. Rev. Lett. **100**, 120801 (2008).
- [61] D. Hanneke, S. F. Hoogerheide, and G. Gabrielse, Phys. Rev. A **83**, 052122 (2011).
- [62] J. H. Sánchez, C. G. Honorato, F. Procopio, G. T. Velasco and J. J. Toscano, Phys. Rev. D **75**, 073017 (2007).
- [63] A. A. López, H. N. Sánchez, G. T. Velasco and J. J. Toscano, Phys. Lett. B 653, 241 (2007).
- [64] A. C. Cid, J. M. Hernández, G. T. Velasco and J. J. Toscano, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **35** 025004 (2008).
- [65] H. N. Sánchez and J. J. Toscano, Phys. Rev. D **77**, 015011 (2008).
- [66] A. Fernandez, C. Pagliarone, F. R. Zavaleta and J. J. Toscano, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **37** 085007 (2010).
- [67] J. L. D. Cruz and J. J. Toscano, Phys. Rev. D **62**, 116005 (2000).
- [68] A. F. Tlalpa, J. M. Hernández, G. T. Velasco and J. J. Toscano, Phys. Rev. D **65**, 073010 (2002).
- [69] A. C. Cid, G. T. Velasco and J. J. Toscano, Phys. Rev. D **72**, 117701 (2005).
- [70] J. I. Aranda, F. F. Zavaleta, J. J. Toscano and E. S. Tututi, Phys. Rev. D **78**, 017302 (2008).
- [71] J. I. Aranda, A. F. Tlalpa, F. R. Zavaleta, F. J. Tlachino, J. J. Toscano and E. S. Tututi, Phys. Rev. D **79**, 093009 (2009).
- [72] J. I. Aranda, J. Montaña, F. R. Zavaleta, J. J. . Toscano and E. S. Tututi, Phys. Rev. D **86**, 035008 (2012).