



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Facultad de ciencias de la Electrónica

Licenciatura en Electrónica

**ANÁLISIS DINÁMICO DE UN CUADRICÓPTERO, SU
IMPLEMENTACIÓN EN UN PROTOTIPO GENERANDO LOS
MOVIMIENTOS VÍA REMOTA.**

PRESENTA

María de los Àngeles Vazquez Morato

MATRICULA: 201618646

ASESORES:

Doctor Gustavo Mendoza Torres

Doctor Edmundo Reynoso Lara

Tesis presentada para obtener el grado de:

Licenciatura

Índice

1. Resumen	6
2. Objetivo	7
2.1 Objetivo general	7
2.2 Objetivos específicos	7
3. Introducción.....	7
4. Historia del vehículo aéreo no tripulado.....	9
4.1 Historia del vuelo por radio control (RC).....	11
4.2 Historia de multicoptero	12
5. Definición y funcionamiento básico de un cuadricóptero	15
5.1 Vehículo aéreo no tripulado y su clasificación.....	15
5.2 Definición de multicoptero.....	18
5.3 Funcionamiento básico.....	18
5.3.1 Funcionamiento de las hélices.....	18
5.3.2 Funcionamiento básico de un cuadricóptero	24
6. Modelo dinámico.....	31
6.1 Momento cinético.....	32
6.3 Ecuaciones de Euler-Lagrange.....	33
6.5 Estrategias de control.....	38
6.5.1 Control de la altura y del ángulo de guiñada (yaw).....	39
6.5.2 Control del ángulo ϕ y del desplazamiento en el eje y	40
6.5.3 Control del ángulo θ y del desplazamiento en el eje x	41
6.6 Movimientos en un cuadricóptero	41
7. Relación de los ángulos de Euler con los movimientos de nuestro prototipo.	44
8. Componentes básicos de nuestro prototipo de cuadricóptero	76

8.1 Partes básicas de un cuadricóptero	77
8.2 Motor sin escobillas (Brushles)	78
8.3 Hobbypower Simonk 30A ESC.....	82
8.4 Transceptor	83
8.5 Arduino Nano	85
8.6 Software Arduino	86
8.7 Software EasyEDA.....	87
7.8 Control remoto.....	88
9.Programación y parte electrónica del prototipo de cuadricóptero y el control remoto	91
8.1 Descripción de la programación del prototipo	92
8.1.1 Transmisión (Control remoto).....	92
8.1.2 Recepción (control de los motores del cuadricóptero)	94
8.2 Descripción de la parte electrónica del prototipo	96
8.2.1 Control remoto.....	96
8.2.2 Prototipo de cuadricóptero	97
8.3. Descripción de la parte física del prototipo	98
8.3.1Control remoto.....	98
8.3.2 Prototipo del cuadricóptero	99
10.Conclusión.....	102
11. Apéndice.....	103
11.1 Matriz de inercia \mathbb{J} y Matriz de Coriolis.....	103
11.2 Código del control de los motores (recepción).....	110
11.3 Código del control remoto (transmisión).....	115
12.Referencias	116

Índice de figuras.

1. Multicóptero de Bothezat	13
2. Nave Cierva W.11 Air Horse	13
3. Prototipo X-100	14
4. Nave X-22	14
5. Nave MV-22 OSPREY	14
6. a) ejemplo de ala fija, b) ejemplo de ala rotativa	16
7. Representación de un disco actuador con número de palas infinitas	19
8. Esquema del disco actuador	20
9. Definición del elemento del aspa en el anillo de posición radial “r”	21
10. Velocidades y fuerzas sobre el elemento del aspa	22
11. Esquemas de fuerzas de un cuadricóptero y pares de cada motor	23
12. Los ejes x, y, z con sus respectivos nombres: roll, pitch y yaw	25
13. Primer giro	25
14. Segundo giro	26
15. Tercer giro	26
16. Momentos del albeo, cabeceo, guiñada	27
17. Esquema del cuadricóptero	34
18. Dibujo ilustrativo de un cuadricóptero flotando	42
19. Dibujo ilustrativo de la dirección roll	43
20. Esquema de un cuadricóptero	43
21. Dibujo ilustrativo de la rotación yaw	44
22. Movimiento lateral derecho	45
23. Movimiento lateral izquierdo	46
24. Movimiento hacia adelante	47
25. Movimiento hacia atrás	48
26. Giro a la derecha	48
27. Giro a la izquierda	49
28. Movimientos posibles del joystick	51
29. Diagrama de potenciómetro	68

30. Componentes básicos de un cuadricóptero	77
31. Motor Hobbypower 2212	80
32. Hélice naranja	81
33. Hélice negra	81
34. Descripción de las conexiones	82
35. Hobbypower Simonk	83
36. Transreceptor nRF24L01	85
37. Arduino Nano	86
38. Representación de la IDE	87
39. Partes básicas de un control remoto	89
40. Movimientos básicos de la palanca de movimiento	90
41. Movimientos de la palanca de aceleración	90
42. Diagrama del circuito del control remoto	96
43. Diagrama del circuito del cuadricóptero	97
44. Protoboard del control remoto	98
45. a) PCB del control remoto, b) PCB Físico del control remoto	99
46. Armazón utilizado para el prototipo	99
47. Protoboard del cuadricóptero	100
48. a) PCB del cuadricóptero, b) PCB Físico del cuadricóptero	101
49. Montaje final del prototipo	101
50. Masas y dimensiones del cuadricóptero	103

Índice de tablas

1. Aceleración en los 4 motores	52
2. Desaceleración en los 4 motores	52
3. Conversión de los valores del código a los voltajes requeridos	54
4. Inclinación a la derecha	57
5. Inclinación a la izquierda	57
6. Inclinación frontal	58
7. Inclinación hacia atrás	58
8. Inclinación diagonal derecha-frontal	61

9. Inclinación diagonal izquierda-frontal	61
10. Inclinación diagonal derecha-trasera	62
11. Inclinación diagonal izquierda-trasera	62
12. Comparación de motores	79
13. Hélice naranja (grande)	80
14. Hélice negra (grande)	81
15. Comparación de módulos de transmisión y recepción	84

1. Resumen

En la presente tesis se realizó la investigación, el estudio y el análisis del sistema dinámico de un cuadricóptero, una vez que esto se llevó a cabo se consideró el aplicar este conocimiento en un prototipo funcional, con esto hacer notar la importancia, utilidad y versatilidad en tiempos actuales de estos vehículos aéreos.

Con el fin de comprender las variables que influyen en la física de sus movimientos básicos en tierra, se desarrolló un prototipo de cuadricóptero y de transmisión remota también conocida como “control remoto” para su manipulación a distancia y aparte se desarrolló la electrónica necesaria para el funcionamiento de ambos; gracias a la realización de dicha investigación se logró conocer algunos de los desafíos y problemáticas que conlleva realizar uno de estos dispositivos, algunos de estos fueron el contar con una buena programación basada en el modelo dinámico para una correcta sincronización en la señal y el voltaje que usaron los motores, una buena comunicación entre el control y el prototipo y tener en cuenta aspectos físicos como lo son el peso de prototipo en su etapa final, ya que tener este conocimiento es de utilidad para saber cuánta fuerza necesitan los motores, para que este puede despegar.

Esta investigación resalta la importancia de estos aparatos en distintas áreas y la complejidad a la hora construirlos.

2. Objetivo

2.1 Objetivo general

El presente trabajo tiene como objetivo estudiar y analizar el modelo dinámico de un cuadricóptero para su implementación en un prototipo, dicho análisis en un principio se enfocará en la parte matemática con el fin de ayudarnos a comprender las variables que influyen en los movimientos necesarios para el funcionamiento del cuadricóptero, debido a la complejidad del modelo dinámico que se utiliza para que el cuadricóptero lleve a cabo los movimientos básicos: vertical, rotación, avance/retroceso y movimientos laterales, para volar y realizar maniobras en el aire, nos limitaremos a llevar a cabo algunos de estos movimientos en tierra. Así mismo, llevar a cabo la selección de los componentes para la implementación en el prototipo, realizar la selección de la tarjeta de adquisición, la comunicación remota, el desarrollo del software y hardware para poder dar a conocer los conflictos y la complejidad a la hora de armar y programar un cuadricóptero.

Para completar este prototipo se llevarán a cabo los siguientes objetivos específicos.

2.2 Objetivos específicos

Se desarrollará el programa o los programas, basándonos en el modelo dinámico, para lograr los movimientos en el cuadricóptero proporcionando y sincronizando las señales y voltajes necesarios en los motores.

Se realizará la selección de los componentes necesarios en el desarrollo y la implementación.

Se establecerá la comunicación remota, mediante un control inalámbrico que se pueda configurar de acuerdo a las necesidades de lo anteriormente descrito, de tal forma que los movimientos que se requieran en el dron sean transmitidos por medio de este control remoto.

Se implementarán los componentes, programas y la comunicación remota en la estructura comercial de un cuadricóptero y finalmente se llevarán a cabo las pruebas del cuadricóptero.

3. Introducción

En la actualidad el uso de cuadricópteros ofrece una gran cantidad de aplicaciones en diferentes sectores, ya sean comerciales, de seguridad, etc.; ya que gracias a su diseño principalmente compacto aportan una gran ayuda a la hora de realizar tareas en lugares con

terreno complejo o de difícil acceso, esta es una gran herramienta a la cual se le encuentran nuevos usos por lo que siguen siendo relevantes hasta el día de hoy.

Algunos ejemplos del uso de estos dispositivos serían su uso en la grabación de eventos, ya que debido a su versatilidad a la hora de realizar distintos tipos de vuelos nos permite obtener una visión excelente ya sea en festivales de música, encuentros deportivos, etc., así como su uso en los mismos eventos para lograr una experiencia única al espectador, otro ejemplo es su uso en la publicidad, ya que hoy en día es muy común que se utilicen drones específicamente un modelo cuadrimotor (cuadricóptero) para realizar campañas publicitarias masivas en el cielo, tal vez el uso más relevante de estos dispositivos es a la hora de ser usados en emergencias, ya que traslada la ayuda necesaria a lugares de difícil acceso o en donde la prioridad en entregar insumos es alta como lo fue en la pandemia por COVID-19 en donde por drones se entregaron equipos de protección, kits de prueba, vacunas, medicamentos y muestras de laboratorio otro uso en emergencias es poder realizar una evaluación previa para el acceso al lugar de algún desastre, otros usos son los militares, en el control y prevención de incendios, manipulación de materiales nocivos, su uso en paquetería, así como en el ocio, etc.

En este trabajo estableceremos un enfoque experimental basado en las pruebas realizadas tanto de prototipo como de la programación, en donde los factores que se van a manipular son la programación y el diseño electrónico y físico del prototipo, así mismo nos apoyaremos en la plataforma Arduino para realizar la programación tanto del control remoto como del prototipo, así como la placa Arduino uno para manipular ambos dispositivos, posteriormente se procederá a realizar pruebas para comprobar que existe comunicación entre el control remoto y el prototipo, para así comprobar pruebas que tanto la programación como el arreglo electrónico funcionen de manera óptima, ya realizadas la pruebas correspondientes proseguiremos a analizar los resultados de cada una de ellas para corroborar que cada uno de los sistemas funcionen de la manera que se espera.

A su vez, se reconoce que el desarrollo de nuestro prototipo posee algunas limitaciones, como lo son limitaciones por los dispositivos electrónicos que se usaran y de los que posemos acceso, las limitaciones de la misma plataforma de programación, etc.

4. Historia del vehículo aéreo no tripulado

El desarrollo de vehículos no tripulados tiene sus inicios en los conflictos bélicos, el relato más antiguo registrado sobre el uso de naves militares no tripuladas en la guerra se remonta a agosto de 1849, cuando las fuerzas austríacas sitiaban Venecia. Los austriacos cargaron globos con bombas, y cuando el viento los llevó sobre Venecia, los soltaron usando un electroimán en el extremo de un cable de cobre muy largo, este evento, aunque muy primitivo en su ejecución, sentó las bases para el desarrollo de naves no tripuladas que serían utilizadas en épocas de guerra.

Por esta razón, solo unos 8 años después de la existencia del vuelo tripulado, es decir, en 1911, Elmer Sperry (inventor del giroscopio), se interesó por la aplicación de control por radio aplicada en aeronaves y con apoyo de la marina supervisó cincuenta y ocho pruebas de vuelo entre el 31 de agosto al 4 de octubre de 1913, en dichas pruebas la aplicación del giroscopio para estabilizar el vuelo fue exitosa.

Ya para 1916, Carl Norden, se unió al equipo de investigación de Sperry y Hewitt y se desarrolló el concepto de torpedo aéreo, posteriormente en abril de 1917, ya con Estados Unidos participando en la primera guerra mundial, se realizaron trabajos experimentales con torpedos aéreos; por otro lado, Archibald Low, un ingeniero inglés construyó un avión controlado por radio conocido como "Ruston Proctor AT". La intención era colocar explosivos en el avión y hacerlo volar hacia un objetivo, convirtiéndolo en el primer misil de crucero.

Por otro lado, el ejército al conocer las pruebas de los torpedos aéreos de la Armada, el 21 de noviembre de 1917 el general de división George O. Squier, determinó que el ejército debería emprenderse en proyectos de la misma naturaleza, por eso junto con la junta directiva de aviones del ejército de Estados Unidos se le pidió a Charles Kettering que diseñara una "bomba voladora"; al final obtuvo el nombre de "Kettering Bug", el lanzamiento de esta se logró utilizando un método similar al utilizado con los primeros globos a motor, una vez lanzado un pequeño giroscopio a bordo guía la aeronave a su destino, a su vez el control se consiguió mediante un sistema neumático/vacío, un sistema eléctrico y un barómetro/alímetro, ya como último detalle importante para que este pudiera llegar a su destino los técnicos predecían el número de revoluciones del motor necesarias, ya que al

cumplir dichas revoluciones el motor se apagaba. Para el 22 de octubre de 1918 se realizó el primer vuelo exitoso.

Ya para el 17 de octubre de 1918 se lanzó con éxito un avión sin piloto conocido como “N-9”, este voló su curso prescrito, pero no logro aterrizar en el rango preestablecido y se estrelló en el mar, pero un 11 de noviembre de 1918 se firmaría el Armisticio por lo cual no fue utilizado en tiempos de guerra.

A lo largo de la época de 1920, la Royal Air Force trabajo en un avión no tripulado controlado por radio que funcionara como objetivo aéreo y como un avión capaz de lanzar armas.

El 11 de mayo de 1922, la oficina de artillería adquirió un N-9 y lo equipo con un sistema de radio Norden, después de muchas pruebas, el 15 de septiembre de 1924 el avión controlado voló de manera remota a través de distintas fases de vuelo (despegue, maniobras y aterrizaje).

Al final de la Primera Guerra Mundial, Reginald Denny, otro inglés que había servido en el Royal Flying Corps, se interesó por los modelos de aviones controlados por radio. Esto lo llevó a establecer una tienda de aviones modelo en 1934 y a desarrollar su propia línea de "Dennyplanes". Posteriormente, la empresa consiguió un contrato con el ejército estadounidense, que le permitió fabricar y suministrar casi 15.000 drones de objetivos “Radioplane” (como se conocía a los aviones teledirigidos), que se utilizaron para entrenar artilleros antiaéreos.

Pasamos a marzo de 1942 en donde se llevó a cabo el primer ataque real exitoso con un avión controlado por radio, este estaba siendo manipulado por un avión denominado “madre” o “nave nodriza” a 20 millas de distancia, pero desafortunadamente este proyecto conocido como “Aphrodite” tenía muchos errores, ya que por lo general no respondía a las señales de control de la nave nodriza.

Durante la guerra de Vietnam, el ejército de Estados Unidos vio un uso extensivo de los vehículos aéreos no tripulados, ya que estos volarían sobre el área del objetivo designado tomando fotografías y luego se lanzarían en paracaídas al suelo una vez que estuvieran en territorio seguro, listos para ser recogidos por un helicóptero.

Sin embargo, fue la invasión israelí de Siria en 1982 la que demostró usos más ofensivos para los vehículos aéreos no tripulados (UAV). Además de realizar misiones de

reconocimiento, Israel utilizó drones como señuelos electrónicos y herramientas de interferencia, lo que les ayudó a asegurar una firme victoria sobre la Fuerza Aérea Siria.

Después de eso, fue inevitable que otras fuerzas militares tomaran más en serio los aviones no tripulados, lo que llevó a la llegada de naves pesadas. Todos estos vehículos aéreos no tripulados son capaces de realizar vuelos semiautónomos, con una carga útil de misiles que pueden dispararse mediante control remoto.

El rápido desarrollo de este tipo de aviones ha otorgado mucha fuerza a unos pocos gobiernos selectos. Sin embargo, si bien el comando y el control suelen ser sencillos (a través de un control remoto cifrado), la legitimidad de la selección de objetivos parece estar abierta a serias dudas.

Otro avance destacable fue el “Taranis” desarrollado según las especificaciones del gobierno británico, voló por primera vez en 2013, es rápido y sigiloso, con compartimentos de armas protegidos para reducir la detección del radar. Su objetivo es poder “pensar por sí mismo” y defenderse contra ataques tripulados y no tripulados.

4.1 Historia del vuelo por radio control (RC)

Los primeros vuelos por RC estuvieron dominados por drones de tiro utilizados con fines de entrenamiento militar. Sin embargo, a finales de la década de 1930, comenzó a aparecer un flujo constante de aviones fabricados por aficionados a lo que era la radio tecnología de ese momento y comenzaron a buscar otros usos para la tecnología de radio con tubos al vacío.

En el año 1937, en Estados Unidos, el crecimiento de la industria hizo posible una competencia nacional, aunque de los seis participantes solamente tres volaron, y únicamente uno (Chéster Lanzo) voló durante más de diez segundos. Un año después, Walt y Bill Good alcanzaron el primer lugar de esta competencia con su avión de madera de balsa, “Guff”; en ese tiempo los controles eran voluminosos y en su mayoría estaban montados en soportes debido a su peso y por lo general no ofrecían más que control de encendido/apagado en un solo eje (Desviada, a través del timón).

La llegada del transistor en la década de 1960 redujo el tamaño y el peso de los sistemas RC y por esta razón comenzó a surgir un mercado comercial. A medida que este crecía, los

controladores que funcionaban en múltiples canales se volvieron más comunes, y cada canal adicional permitía controlar de forma remota un dispositivo diferente del modelo.

Los gobiernos han reservado durante mucho tiempo el uso de anchos de banda de radio específicos para diferentes usos, y esto facilitaba a que los fabricantes de controladores RC trabajen según estándares, las bandas más antiguas usaban un sistema de cristales coincidentes, por lo que un cristal de canal número tal era reservado tanto para tu controlador como para tu avión, la desventaja de este sistema era que, si alguien cerca a tu área estuviera usando el mismo canal, tu señal se bloquearía.

Esto cambió con el cambio de milenio, con la llegada del “espectro ensanchado” de 2,4 GHz, que permitía compartir automáticamente el mismo canal entre múltiples usuarios.

4.2 Historia de multicóptero

Ya conociendo el panorama histórico general de los vehículos aéreos no tripulados, proseguiremos a relatar el surgimiento de los multicópteros, este dispositivo cuando posee 4 motores se le conoce como cuadricóptero.

Los multicópteros tienen un legado significativo, y algunos de los primeros aviones exitosos de despegue y aterrizaje vertical (aparte de globos y zepelines) incluyen cuadricópteros tripulados.

Por esto ya para el año de 1907, los hermanos franceses Louis y Jacques Breguet volaron lo que era esencialmente un cuadricóptero gigante, este estaba pilotado por Monsieur Volumard, aunque no era esencialmente pilotado porque, aunque era totalmente capaz de soportar su propio peso, la nave debía ser controlada con cuerdas desde el suelo, este diseño tenía cuatro palas en cada rotor, cada una de las cuales medía ocho metros de longitud.

En 1921, otro francés, llamado Étienne Oehmichen, añadió una quinta hélice de control a un concepto similar, y en 1923 pudo volar 525 m de una forma mayormente estable, mientras tanto el inventor argentino Raúl Pateras Pescara, diseñó un modelo que se parecía más a un helicóptero tradicional.

George de Bothezat, en 1918, construyó un cuadricóptero para el Servicio Aéreo del Ejército de EE. UU. (apodado “pulpo volador”) en Wright Field, aunque voló con éxito más de 100

veces, el proyecto finalmente fue cancelado, debido a que era dirigido mayormente por la corriente del aire que por el piloto.

A continuación, se mostrarán ejemplos de los multicópteros pilotados a lo largo de la historia.

En 1923, el multicóptero de Bothezat logró mantenerse en el aire durante dos minutos y 45 segundos y aterrizar a salvo, este modelo se puede observar en la figura 1.

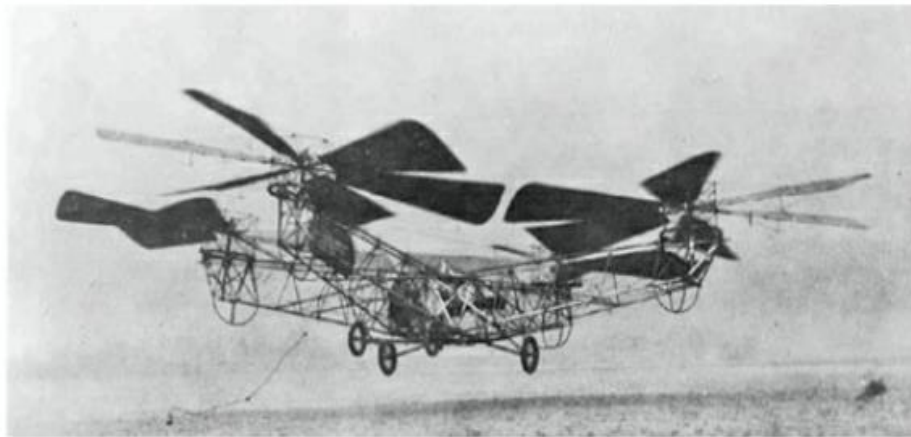


Figura 1. Multicóptero de Bothezat

El Cierva W.11 Air Horse comenzó a probarse en 1948, este era el avión de ala giratoria más grande jamás creado. Sus tres rotores giraban en la misma dirección esto se realizó para evitar que el giro fuera a inclinar los motores en la dirección opuesta, dicho modelo puede verse en la figura 2.



Figura 2. Nave Cierva W.11 Air Horse

Al prototipo llamado X-100 (figura 3), un solo motor propulsaba los cuatro rotores del este, dicho motor estaba directamente conectado a los dos rotores delanteros, y los gases de escape hacían girar las palas traseras cuando estas apuntaban hacia arriba, posteriormente los X-19 añadieron otro motor, pero después de que uno de los dos prototipos se estrellara en 1965, el

programa fue cancelado, sin embargo, uno de los desarrollos más significativos se produjo con el X-22 (figura 4) en 1966, fue que poseía una computadora a bordo diseñada para "aumentar la estabilidad", y aunque el primer X-22 se estrelló, como se mencionó previamente, los problemas de vibración se resolvieron con la segunda versión de la nave, esta pasó más de cien horas en el aire, dicho período de prueba ayudo a que los diseñadores pudieran programar la computadora a bordo con numerosos algoritmos, proporcionándoles un simulador efectivo para otras aeronaves, tanto reales como teóricas. Al modelo X-22 lo caracterizaba principalmente los cuatro conductos/góndolas alrededor de los rotores inclinables, cada rotor tenía su propio motor de turbina de gas montado en el alerón trasero, este se mantuvo en vuelo hasta 1988.



Figura 3. Prototipo X-100



Figura 4. Nave X-22

El modelo MV-22 OSPREY fue probado por primera vez en 1989, este entró en servicio con los Marines de EE. UU. en el año 2007 y con la Fuerza Aérea en el año 2009. Al igual que los modelos X-19 y X-22, el MV-22 tiene rotores basculantes que permiten un despeje y



Figura 5. Nave MV-22 OSPREY

aterrizaje vertical (VTOL) a alta velocidad de vuelo, incluso puede reposar en el aire cuando vuela con los rotores inclinados hacia adelante.

Hay que resaltar que la idea de eliminar a los pilotos para realizar la compleja tarea de controlar la nave es lo que hace posible los multicópteros modernos. El componente esencial de estos sistemas de control de vuelo es un giroscopio, una tecnología que ha ido mejorando en paralelo a las naves que dependen de él. Ya eran lo suficientemente pequeños para los sistemas de aviones en la Segunda Guerra Mundial, pero se miniaturizaron aún más para la era de los misiles guiados, hasta que midieron alrededor de 1 pulgada (2,5 cm) de diámetro y pesaron cerca de 3 onzas (85 g).

Cabe resaltar que el reducido tamaño de un multicóptero que es radio controlado es una muestra de que debe existir un controlador de vuelo electrónico, ya que es la única forma práctica de volarlos. Por esta razón podemos decir que los multicópteros son vehículos aéreos autónomos o UAV controlados por radio (RC).

5. Definición y funcionamiento básico de un cuadricóptero

Ya teniendo una idea clara de la historia de los vehículos aéreos no tripulados, específicamente de multicóptero, es momento de plantearnos ¿Qué es un multicóptero?, ¿cuál es su funcionamiento básico?, y lo más importante ¿Por qué es importante conocer esto para nuestra investigación?

5.1 Vehículo aéreo no tripulado y su clasificación

Ya conociendo un poco de historia podemos abordar lo que es un UAV por sus siglas en inglés, también conocido como dron, es una clase de sistema autónomo, es decir, se define como un vehículo aéreo no tripulado, controlado a distancia, automático o semiautomático, generalmente recuperable al final del vuelo, idóneo para llevar diferentes cargas, dichas cargas dependen del objeto a analizar así como de cuáles serán las diferentes tareas a realizar durante un vuelo y estas pueden ser de reconocimiento, de observación, de adquisición de objetivos, etc.

Un UAV está compuesto generalmente en dos partes, la estación en tierra o base terrena y el vehículo aéreo.

La estación en tierra puede ser fija o móvil, esta asegura la preparación de la misión, la explotación y la comunicación de los datos con la parte aérea y los organismos que controlan y coordinan el dron. Esta parte también puede contener de medios de despegue y de recuperación, así como de medios de mantenimiento y de reacondicionamiento.

La parte aérea está compuesta de una o varias plataformas aéreas compuestas de una carga útil adaptada a la misión (cámara, GPS, central inercial, etc.) y de un sistema de comunicación de información.

Los UAV son vehículos aéreos tamaño reducido, menos caros y más simples de construir que un avión. También son más discretos y su pérdida no es tan sensible o costosa como la de un vehículo convencional. El tamaño de los UAVs puede variar, es decir, pueden medir algunos centímetros hasta varios metros, al igual que su forma y su tipo de propulsión, por ejemplo, algunos están equipados de reactores, otros de hélices o rotores, etc.

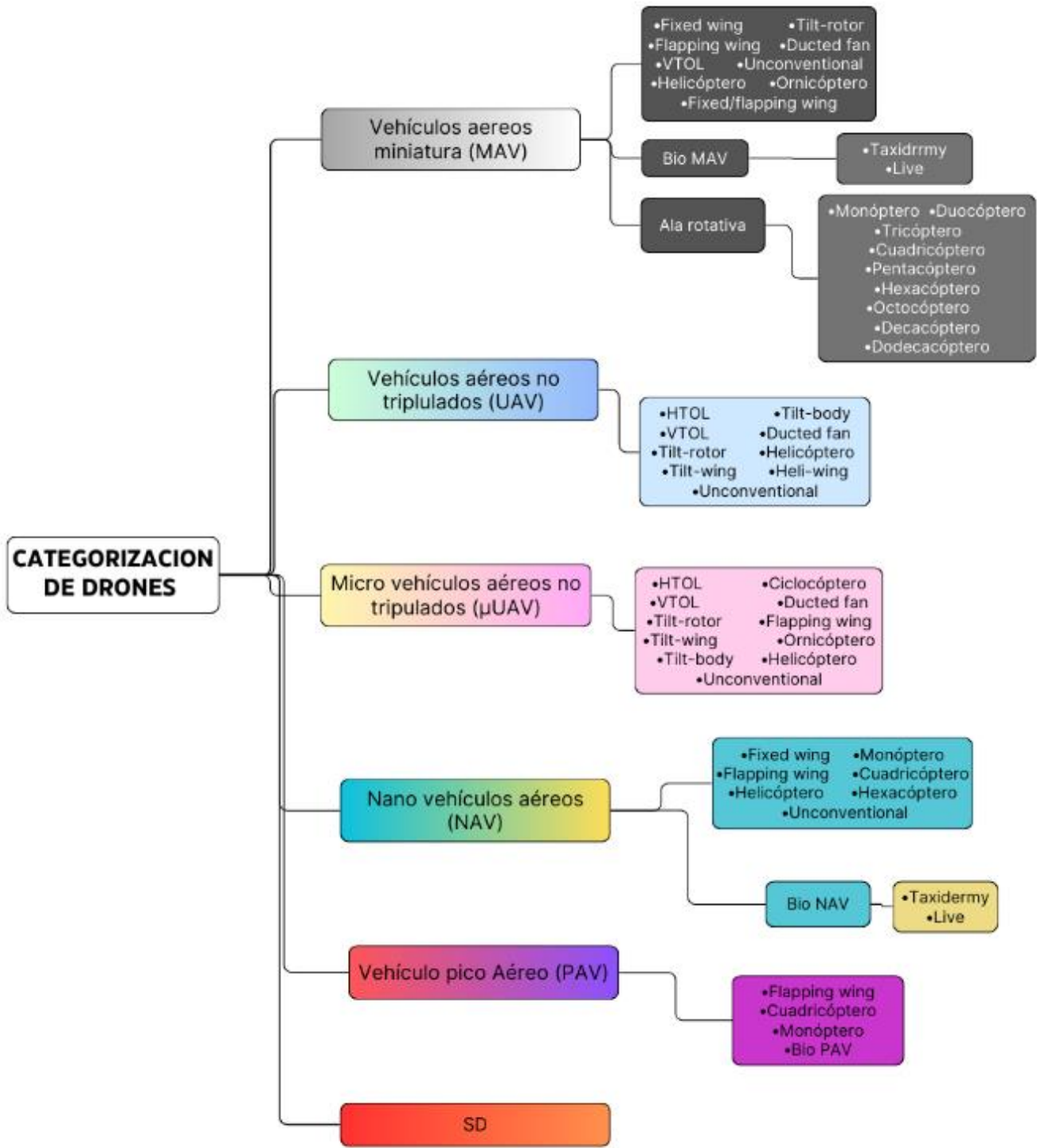
Las aplicaciones de los UAVs son muy variadas, las cuales abarcan desde las civiles hasta las militares, por ejemplo, algunas de estas aplicaciones pueden ser vigilancia de tráfico en carreteras, las operaciones de búsqueda aérea y salvamento, la recolección de información para la predicción meteorológica, la vigilancia de bosques o detección de fuegos, etc.

Generalmente, se definen 2 tipos de UAVs, de ala fija, este tipo genera sustentaciones a medida que se mueve, lo que le permite tener una gran velocidad durante el vuelo y de ala rotativa, este tipo es muy maniobrable y puede flotar y girar con un controlador de vuelo.



Figura 6. a) ejemplo de ala fija, b) ejemplo de ala rotativa.

También existen otros tipos de clasificación de drones, ya sea categorizarlos por su peso, tamaño, tipo de motor o en función de su configuración, este último lo podemos observar en el diagrama siguiente.



5.2 Definición de multicóptero

Un multicóptero es una clase de vehículo aéreo no tripulado que utiliza varias hélices para generar la sustentación y el control en el aire. La palabra "multicóptero" se deriva del hecho de que estos dispositivos utilizan múltiples hélices, la cantidad de hélices que utilizan pueden variar de 2 hasta 12, generalmente los más comunes son cuatro, aunque también pueden tener seis u ocho, para conseguir que este vuele. Cada una de las hélices puede ser controlado de manera independiente para ajustar la orientación y la posición del vehículo en el aire.

Tienen la capacidad para volar de manera estacionaria, despegar y aterrizar verticalmente, y maniobrar en espacios reducidos. Son utilizados en una variedad de aplicaciones, que van desde la fotografía y videografía aérea hasta la inspección de infraestructuras, mapeo topográfico, vigilancia, entrega de paquetes, investigación científica, etc.

Es relevante destacar que un cuadricóptero es un multicóptero de cuatro motores.

5.3 Funcionamiento básico

5.3.1 Funcionamiento de las hélices

Para conocer el funcionamiento básico de un cuadricóptero es importante conocer previamente que las fuerzas que requiere para su sustentación, es decir que los impulsos, vertical y horizontal generen los movimientos en el cuadricóptero, para esto las hélices necesitan tener una forma aerodinámica, y el control se logra mediante cambios sutiles en la velocidad de su rotación.

Es decir si ponemos como ejemplo un avión de ala fija donde la forma curva del ala se estrella en el aire cuando lo golpea y la curva ascendente significa que la forma perturba más el aire sobre el ala, empujándolo y reduciendo la presión del aire sobre el ala muy contrariamente con la parte de abajo donde la forma permanece plana y el aire no tiene obstáculos ya con esta diferencia de presión por encima y por debajo del ala es suficiente para empujar el ala hacia arriba; ahora en los cuadricópteros se aplica una curva similar a las hélices que giran, por lo que a menudo se les llama "aviones de ala rotatoria".

Como podemos ver, un elemento muy importante para un cuadricóptero son las hélices, ya que estas son las que al ser impulsadas por motores permite el vuelo en estos dispositivos. Una hélice es en esencia un cuerpo diseñado para recibir fuerzas de un flujo, a su vez la forma

geométrica de la hélice está dada por una serie de parámetros, es decir, el diseño de la hélice se rige por la adaptación de las teorías aerodinámicas del momento axial y la teoría del elemento del aspa, las cuales permiten determinar satisfactoriamente los parámetros, estos a grandes rasgos serían el número de aspas que componen la hélice así como la geometría de las mismas, las variables a considerar son: (α) los ángulos de ataque, (β) los ángulos de calaje, (c) la distribución de la cuerda a lo largo de la (r) posición radial.

Comenzaremos a describir la teoría de momento axial orientado a una hélice, es decir en un sistema de propulsión tipo hélice, se pretende aumentar la energía cinética del aire a través del movimiento angular de las palas, además del aumento de la energía cinética del aire que genera un empuje detrás de la hélice, para esto se utiliza el concepto del disco actuador, la cual consiste de un disco con infinito número de palas de área transversal (S) (esto quiere decir que es un disco completo ya que su número de palas es infinita, como se muestra en la figura 7) que no ofrece resistencia al flujo de aire que lo atraviesa, este flujo recibe energía a partir del aumento de presión que se genera homogéneamente en toda el área del disco, por esto se asume que la velocidad del aire que atraviesa el disco es constante para toda al área del disco y así mismo que toda la energía generada por el disco es trasferida al aire, esto se puede observar en la figura 8. [8]

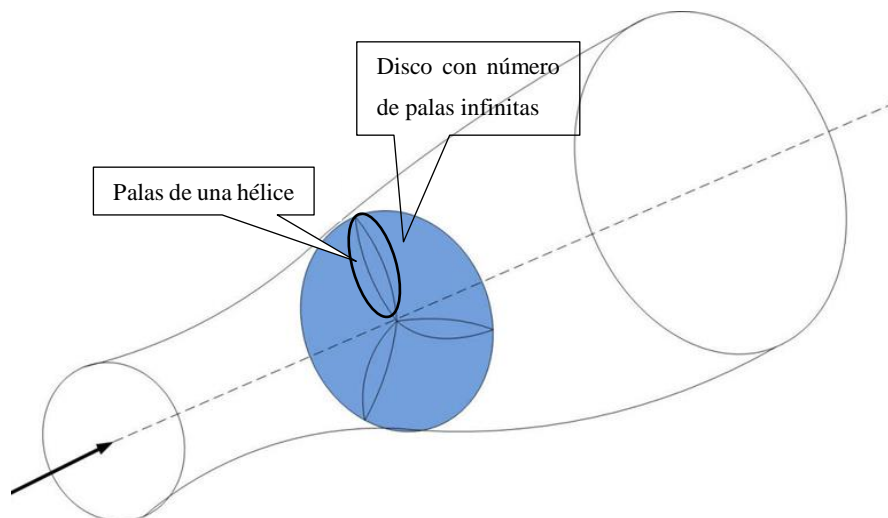


Figura 7. Representación de un disco actuador con número de palas infinitas

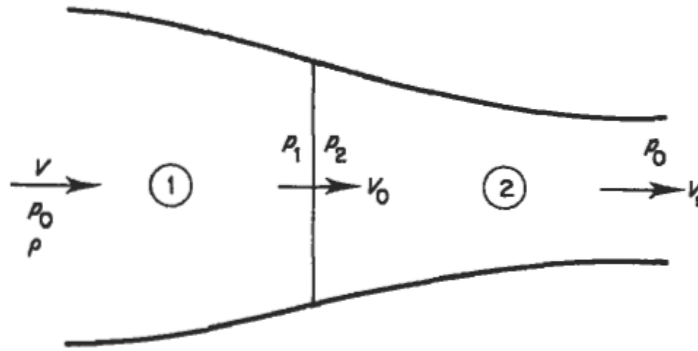


Figura 8. Esquema de teoría del disco actuador

Es decir, en la figura 8 se representa el disco actuador inmerso en un flujo de aire, en la parte superior del disco el aire se mueve uniformemente con una velocidad (V) y tiene una presión (P_0). Como se puede observar, conforme las líneas de flujo se acercan al disco el aire acelera su velocidad (V_0) y la presión decrece a (P_1), ya en el disco la presión es incrementada a (P_2), pero la velocidad estará restringida, así mismo el aire se expande y acelera hasta que la presión debajo del disco se iguala a su valor inicial P_0 mientras que la velocidad cambia su valor a (V_s), con esto podemos darnos una idea de que existen distintos factores que ocasionan que la eficiencia esperada de una hélice convencional no sea un valor ideal ya que a la hora de ponerlo en práctica, el papel del disco actuador lo cumple la hélice y por esta razón no se llegan a cumplir ciertas suposiciones hechas, ya como se mostró en la figura 7 un disco puede considerarse que está formado por un numero de palas infinita y depende del tipo de hélice es el número de palas que posee, en nuestro caso la hélice está conformada por 2 palas

Ahora procederemos a describir la teoría del elemento del aspa (el aspa es conocida también como pala) esta permite un cálculo directo en el rendimiento de la hélice e influye directamente en el diseño de esta para obtener una eficiencia determinada, para esto la teoría del elemento del aspa se basa en dos consideraciones principales:

1. No existe interferencia entre elementos de la hélice adyacentes (anillos) a lo largo de la envergadura de la hélice.
2. Como la cuerda del aspa es pequeña en comparación con su envergadura, la distribución de presión a lo largo de la cuerda del elemento del aspa en el anillo es idéntica a la distribución de presión en un perfil aerodinámico bidimensional, con las

velocidades relativas y ángulo de ataque similares a aquellos del elemento del aspa. Esto significa que la fuerza de sustentación y arrastre local puede ser calculado a partir de las características de un perfil bidimensional.

A continuación, se puede observar en la siguiente figura una representación a la definición del elemento del aspa para una hélice y la definición de la posición radial del anillo. [8]

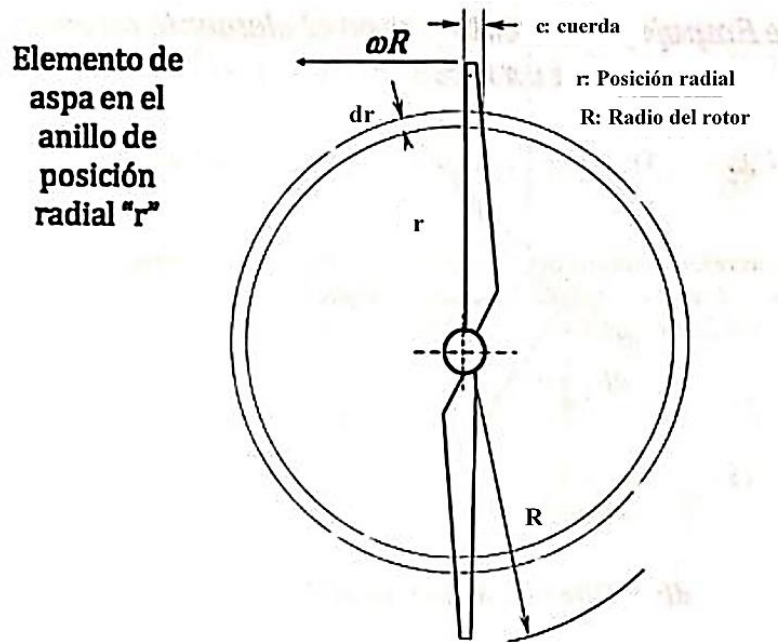


Figura 9. Definición del elemento de la hélice en el anillo de posición radial "r".

Ahora en la figura 10 se mostrará un esquema de velocidades y fuerzas que interactúan en el elemento de aspa a partir de la dirección de movimiento en que se mueve la hélice, hay que tomar en cuenta que ωR es la velocidad angular del rotor (motor) ya esta velocidad es importante ya que es la que mueve a la hélice.

En las figuras anteriores (9 y 10) notamos que un elemento de la hélice ubicado en la posición radial (r), presenta un vector de velocidad (W) el cual es denominado velocidad efectiva, esta actúa desde el centro del motor hasta el elemento de aspa de manera esquemática (W) tiene componentes tangencial (periferia del aspa) y axial (centro del aspa), las cuales corresponden a la dirección de rotación y a la componente perpendicular al rotor

respectivamente por lo tanto (W) es la responsable de las fuerzas aerodinámicas que actúan sobre la hélice. [8]

A partir de (W) se plantean las fuerzas por unidad radial sobre cada perfil del asa las cuales



Figura 10. Velocidades y fuerzas sobre el elemento de la hélice

se pueden expresar como función de los coeficientes aerodinámicos C_L y C_D . [8]

Otra cosa importante a tomar en cuenta es el giro de las aspas de la hélice de un cuadricóptero empujan el aire hacia abajo al mismo tiempo que el motor empuja hacia abajo por tanto el aire empuja hacia arriba en el motor así que cuanto más rápido giren los rotores, mayor será la elevación y viceversa.

A continuación, se definirá la fuerza de empuje que ejerce cada una de las hélices ya que fuerza de empuje depende del cuadrado de la velocidad de cada rotor por tanto tenemos que:

$$f_i = k * \omega_i^2 \quad (1)$$

Donde:

k es la constante de empuje con unidades $\frac{Ns^2}{rad^2}$

ω_i es la velocidad angular del rotor i -ésimo, con unidades rad/s .

Así mismo el empuje total será la suma de las fuerzas de los cuatro rotores como se puede observar en la figura 11

$$f_T = \sum_{i=1}^4 f_i \quad (2)$$

Por tanto, combinando las ecuaciones 1 y 2 tenemos

$$f_T = k * (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2) \quad (3)$$

Esto es una buena aproximación al comportamiento real de las hélices, puesto que las fuerzas de sustentación y resistencia que experimentan los perfiles que las forman son proporcionales al cuadrado de la velocidad de rotación

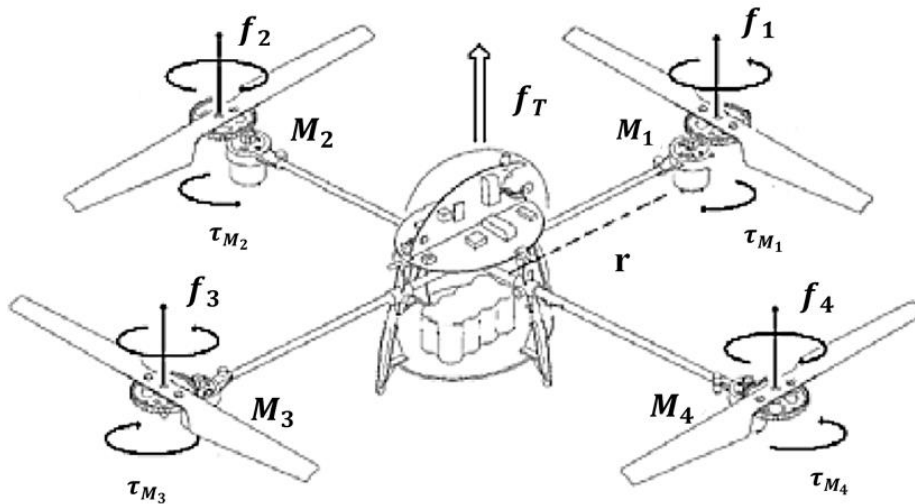


Figura 11. Esquema de fuerzas de un cuadricóptero y pares de cada motor.

Por tanto, Tomando de referencia la figura 11, alineado con el rotor 2 el sentido positivo del eje x y el sentido positivo del eje y alineado con el rotor 1, tenemos que el momento alrededor del eje x será producido por el empuje de los rotores 1 y 3 es decir

$$\tau_\phi = l_a * (f_1 - f_3) \quad (4)$$

Y el momento alrededor del eje y será producido por el empuje de los rotores 2 y 4, de la siguiente forma:

$$\tau_\theta = l_a * (f_4 - f_2) \quad (5)$$

Donde l_a es la longitud de cada brazo del robot, es decir, de cada rotor al centro de gravedad.

5.3.2 Funcionamiento básico de un cuadricóptero

Centrándonos netamente en el cuadricóptero este posee varias características importantes por ejemplo se controla variando la velocidad angular de cada uno de sus motores, cabe resaltar que un motor solo debe girar en una dirección la cual al ser fija nos expresa que la fuerza producida siempre será positiva como se observa en la figura 11.

Otra característica de un cuadricóptero son que en los motores delantero y trasero rotan en sentido anti-horario, mientras que los otros dos motores rotan en el sentido de las manecillas del reloj, esto con el fin de que los efectos giroscópicos y los momentos aerodinámicos tiendan a cancelarse en vuelo estacionario. [9]

Es importante resaltar que la secuencia aeroespacial contempla el movimiento de rotación en el espacio según tres ejes.

Una matriz de rotación puede ser obtenida realizando la composición de tres rotaciones elementales, donde cada una de las rotaciones implica el giro de un ángulo alrededor de un eje, hay que considerar que dos rotaciones sucesivas no pueden ser realizadas sobre ejes paralelos, ya que en dicho caso podrían ser representadas por solo una; a estos ángulos correspondientes a cada una de estas tres matrices de rotación elementales se les denomina como ángulos de Euler. Así podemos realizar una representación mínima de la orientación puede ser obtenida usando un conjunto de tres parámetros donde cada parámetro es un ángulo asociado con una matriz de rotación.

Para lograr presentar los ángulos de Euler de una manera fácil de comprender, se supondrán tres ejes perpendiculares en un espacio de tres dimensiones (x, y, z). Además, se imagina la trayectoria de un avión desde su despegue hasta que alcanza la altura necesaria para realizar un vuelo horizontal, en este periodo la nave experimentará movimientos que pueden representar combinaciones de giros en torno a cada uno de los ejes, así como desplazamiento.

La terna (ϕ, θ, ψ) de ángulos, donde ϕ otorga el giro alrededor del eje x ($R(x, \phi)$, roll), θ otorga el giro alrededor del eje y ($R(y, \theta)$ pitch), por último ψ otorga el giro alrededor del eje z ($R(z, \psi)$ yaw), dicha terna se denomina ángulos de Euler.

Los giros alrededor de los ejes x , y , z reciben generalmente los nombres de alabeo, cabeceo, guiñada (en inglés roll, pitch y yaw) respectivamente, esto lo podemos observar en la figura 12.

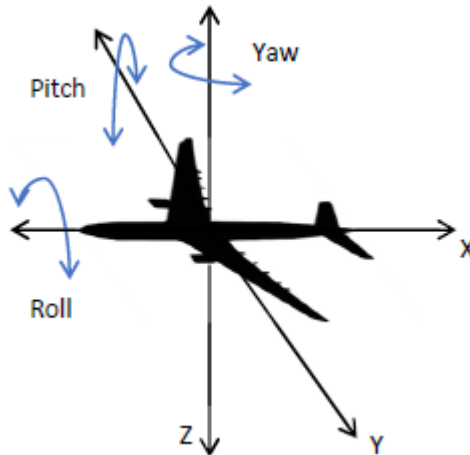


Figura 12. Los ejes x , y , z con sus respectivos nombres: roll, pitch y yaw

Primer giro: Este es alrededor del eje z , con un ángulo ψ en el plano xy

Su correspondiente matriz de rotación es

$$R_{\psi} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

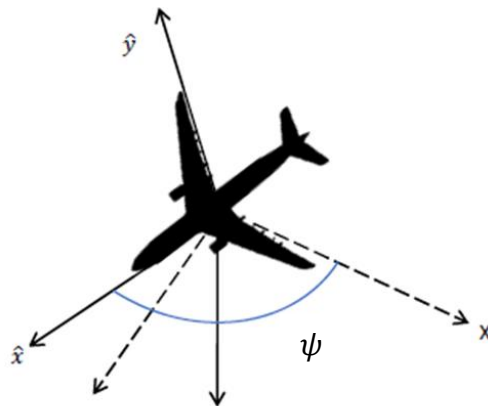


Figura 13. Primer giro

Segundo giro: Alrededor del eje y , de ángulo θ en el plano xz .

Su correspondiente matriz de rotación es

$$R_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (7)$$

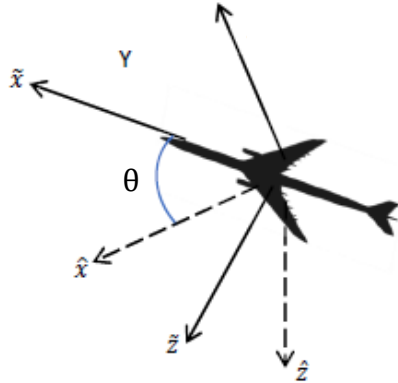


Figura 14. Segundo giro

Tercer giro: Alrededor del eje x , de ángulo ϕ , en el plano yz

Su correspondiente matriz de rotación es

$$R_{\phi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \quad (8)$$

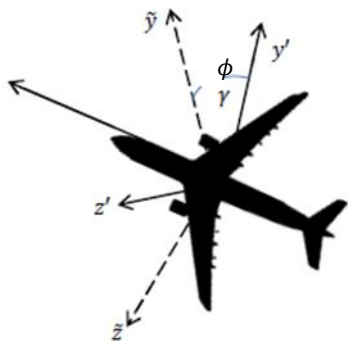


Figura 15. Tercer giro

Por lo tanto la composición de los tres giros tiene asociada la matriz de rotación $M = R_{\psi} \cdot R_{\theta} \cdot R_{\phi}$, tal que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{R_\phi \cdot R_\theta \cdot R_\psi}_M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ya con esta consideración de calculará la expresión de M , para esto definiremos $C_\omega = \cos(\omega)$ y $S_\omega = \sin(\omega)$, por lo que tenemos

$$M = \begin{pmatrix} C_\alpha C_\beta & -S_\alpha C_\beta & S_\beta \\ S_\alpha C_\gamma + C_\alpha S_\beta S_\gamma & C_\alpha C_\gamma - S_\alpha S_\beta S_\gamma & -C_\beta S_\gamma \\ S_\alpha S_\gamma - C_\alpha C_\gamma S_\beta & S_\alpha S_\beta C_\gamma + C_\alpha S_\gamma & C_\beta C_\gamma \end{pmatrix} \quad (9)$$

Así mismo retomando $R_\phi \cdot R_\theta \cdot R_\psi$ podemos obtener la primera ecuación, que modela el movimiento lineal:

$$\dot{x} = M(\phi \quad \theta \quad \psi) * v$$

Donde:

\dot{x} es la velocidad en una referencia global

v son las velocidades en las coordenadas del cuadricóptero

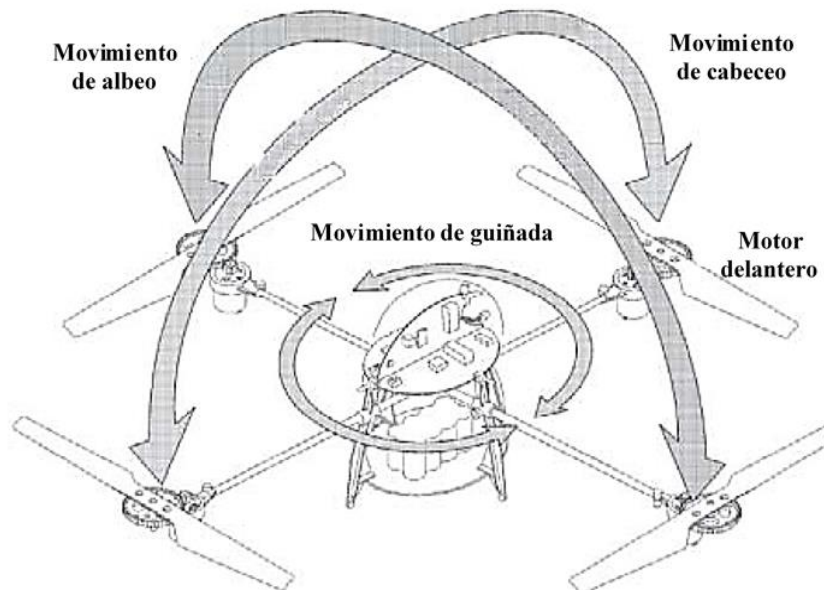


Figura 16. Momentos del alabeo, cabeceo, guiñada.

A si mismo observando la figura 16 tenemos que el momento de cabeceo (*pitch*) es producido por la diferencia de $f_1 - f_3$, el momento de alabeo (*roll*) es producido por $f_2 - f_4$ y el momento de guiñada (*yaw*) es la suma de $\tau_{M_1} + \tau_{M_2} + \tau_{M_3} + \tau_{M_4}$, donde τ_{M_i} es el momento de reacción del motor $i = \{1, 2, 3, 4\}$ (ver figura 11).

Además, el esfuerzo de torsión del motor (momento o par motor) es opuesto por una fricción aerodinámica τ_{drag} , de tal manera que

$$I_{rot}\dot{\omega}_i = \tau_{M_i} - \tau_{drag} \quad (10)$$

Donde:

I_{rot} es el momento de inercia del motor alrededor de su eje.

Ahora se toma en cuenta que por definición la fricción aerodinámica está dada por

$$\tau_{drag} = \frac{1}{2}\rho Av^2 \quad (11)$$

Donde:

ρ es la densidad del aire

A es el área frontal de la hélice

v es la velocidad relativa con respecto al aire.

Así mismo en magnitud, la velocidad angular ω es igual a la velocidad lineal v dividida por el radio de rotación r , es decir, $\omega = v/r$, con esto en cuenta se puede reescribir la ecuación 11 de la siguiente manera.

$$\tau_{drag} = d \omega^2 \quad (12)$$

Donde sí $d > 0$ es una constante, que depende entre otros factores como lo son la densidad del aire, el radio y de la forma de la hélice.

Así que para maniobras quasi-estacionarias, ω es una constante, por lo tanto de la ecuación 1 se tiene que:

$$\tau_{M_i} = \tau_{drag} \quad (13)$$

Para que un cuadricóptero avance se debe incrementar la velocidad de motor trasero M_3 y reducirla en el motor delantero M_1 ; de manera similar el movimiento lateral se obtiene con los motores laterales, así mismo el desplazamiento sobre su eje se obtiene incrementando el par en el motor delantero y trasero (τ_{M_1}, τ_{M_3}) y reduciendo el par en los motores laterales (τ_{M_2}, τ_{M_4}), estos movimientos deben realizarse manteniendo la fuerza total f_T constante, como se observa en la figura 11.

Otra forma de explicarlo sería tomando como principio la fuerza que crean los motores, podemos deducir que, aumentando la velocidad de uno de ellos pongamos como ejemplo el número 1, tendremos más empuje en esa hélice y por tanto habrá un giro del cuadricóptero alrededor del eje perpendicular a la línea que une ese motor con más velocidad al centro de la cruz es decir el eje que une los motores 2 y 4, con esto existe un giro con sentido positivo en torno al motor 2 siguiendo la regla de la mano derecha. Como es obvio, este efecto también se puede conseguir disminuyendo la velocidad de la hélice contraria a la anterior es decir el número 3. De la misma manera, podremos obtener un giro alrededor del eje perpendicular al anterior ahora el eje que une los motores 1 y 3 aumentando la velocidad del motor 2 o disminuyendo la del número 4 para un sentido de giro positivo hacia el motor 3, o viceversa. Cabe destacar que con el cuadricóptero girado en torno a uno de los anteriores ejes, debemos aumentar la velocidad total de los motores, ya que el empuje vertical que ejercen ya no está alineado con la gravedad y por tanto su proyección sobre el eje vertical del mundo será menor que antes del giro.

Tomando en cuenta los movimientos estos poseen velocidades lineales locales se definen como u, v y w correspondientes a x, y y z así como las velocidades angulares locales, P, Q y R , las cuales siguen también la regla de la mano derecha y son respectivas giros ϕ, θ, ψ , con ello podemos definir también los siguientes vectores: $\mathbf{v} = [u \ v \ w]^T$ y $\mathbf{P} = [P \ Q \ R]^T$

Como ya se ha mencionado, el aumento de la velocidad de uno de los rotores, produce un giro en torno a uno de los ejes x o y , dependiendo de cuál sea éste. Este giro se produce gracias al empuje el cual es la fuerza del rotor. Como consecuencia, se produce un par, ya que es una fuerza ubicada fuera del centro de masas del cuadricóptero, de esta manera, podemos nombrar los pares o torques en torno a los ejes x, y y z de la siguiente forma: τ_ϕ ,

τ_θ y τ_ψ , respectivamente, que quedan dentro del vector, $\tau = [\tau_\phi \ \tau_\theta \ \tau_\psi]^T$, su sentido positivo coincide con el de P , Q y R ; las otras dos fuerzas principales que actúan sobre el cuadricóptero son el empuje f_T sobre el sentido positivo del eje z del cuadricóptero y la gravedad multiplicada por la masa total del robot G de igual forma sobre el sentido negativo del eje z de la tierra .

También hay que tener en cuenta que existe un tercer momento producido por la existencia de un momento angular alrededor del eje z que de igual manera depende del cuadrado de la velocidad de cada rotor

$$M_i = d * \omega_i^2 \quad (14)$$

Donde:

d es la constante de arrastre con unidades $\frac{Nms^2}{rad^2}$

ω_i es la velocidad angular del rotor i -ésimo, con dimensiones rad/s .

Así mismo el par total definido en sentido positivo del eje z es:

$$\tau_z = -M_1 + M_2 - M_3 + M_4 \quad (15)$$

Por tanto, combinando las ecuaciones 14 y 15 tenemos

$$\tau_z = d * (-\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2) \quad (16)$$

Si tomamos como referencia las ecuaciones anteriores, se agruparán de manera matricial por tanto las ecuaciones 3,4,5 y 15 se combinarían de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} T \\ \tau \end{bmatrix} = A * \omega_s \quad (17)$$

Donde:

A es la matriz de actuación

$$A = \begin{bmatrix} k & k & k & k \\ kl_a & 0 & -kl_a & 0 \\ 0 & -kl_a & 0 & kl_a \\ -d & d & -d & d \end{bmatrix} \quad (18)$$

ω_s es el vector de velocidades angulares cuadradas

$$\omega_s = [\omega_1^2 \ \omega_2^2 \ \omega_3^2 \ \omega_4^2]^T \quad (19)$$

Con este desarrollo ya conocemos las fuerzas y momentos principales dependientes de las velocidades angulares de los rotores.

6. Modelo dinámico

Primeramente, hay que conocer que es un modelo, y este es un esquema teórico, generalmente en forma Matemática, de un sistema, que se elabora para facilitar su comprensión y el estudio de su comportamiento.

Por un lado, el modelo dinámico constituye una descripción matemática del comportamiento dinámico un sistema, es decir uno o más de los elementos que intervienen en la modelización no permanecen invariables, sino que se consideran como funciones del tiempo, describiendo trayectorias temporales.

La formulación de las ecuaciones de la dinámica de un sistema se lleva a cabo mediante la aplicación de dos teoremas.

1. Teorema del centro de masas, que afirma que la derivada con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento del sistema es igual a la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre él esto respecto de un marco inercial

$$\left(\frac{\partial \vec{C}}{\partial t}\right)_I = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ext}$$

2. El segundo es el teorema del momento cinético, que afirma que la derivada temporal del momento cinético respecto de un punto móvil O , es igual al momento resultante de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema, respecto al centro de reducción O , más el producto vectorial de la cantidad de movimiento del sistema por la velocidad del punto O , todo esto respecto de un marco inercial

$$\left(\frac{\partial \vec{\Gamma}_O}{\partial t}\right)_I = \sum_{i=1}^N \vec{M}_{ext}^O + \vec{C} \wedge \vec{v}_O$$

Algo importante a considerar en para los que se va a considerar del modelo de nuestro cuadricóptero es que la inercia de los motores respecto de sus ejes principales de inercia se considerará despreciable esto para simplificar ya que conlleva que se desprecien sus momentos de inercia, y por tanto no se está considerando la dinámica de los motores ni de los servos de control de inclinación en la formulación del problema.

6.1 Momento cinético

En un sistema indeformable como lo es el que se está analizando, el momento cinético en un punto genérico O toma la siguiente expresión:

$$\vec{\Gamma}_O = I_O \cdot \vec{\omega}_{BI} + M \vec{OG} \wedge \vec{v}_{BI}^O \quad (20)$$

Donde:

I_O es el tensor de inercia en el punto O

$\vec{\omega}_{BI}$ es la velocidad angular de la aeronave respecto del marco de referencia inercial

\vec{OG} es el vector que une el punto O con el centro de masas del sólido

\vec{v}_{BI}^O es la velocidad del punto O como perteneciente al triedro de ejes cuerpo respecto del sistema de referencia inercial.

Podemos observar que si $\vec{\omega}_{HI} = 0$, entonces $\vec{\omega}_{BI} = \vec{\omega}_{BH}$ por la ley de composición de velocidades angulares, por esta razón es importante hallar el valor de $\vec{\omega}_{BI}$.

Para obtener la expresión correcta de la velocidad angular, es preciso pasar todos los vectores a ejes cuerpo, es decir la elevación y viceversa.

$$[\vec{\omega}_{BI}]^B = \psi [T]^{BH} \cdot [\vec{k}]^H + \theta [T]^{BX'} \cdot [\vec{j}]^{X'} + \phi [\vec{i}]^B$$

En esencia los ángulos ψ , ϕ y θ describen la actitud de la aeronave respecto de los ejes que se tomen como sistema de referencia. Así mismo la cantidad de movimiento del sistema se puede expresar como:

$$\vec{C} = M \cdot \vec{v}_{BI}^G$$

Donde:

M es la masa del sistema

\vec{v}_{BI}^G es la velocidad del centro de masas del sistema, la cual pertenece al triedro de ejes cuerpo, con respecto del sistema de referencia inercial.

6.3 Ecuaciones de Euler-Lagrange

Para obtener el modelo matemático del modelo dinámico del cuadricóptero se optará por representarlo como un cuerpo solido evolucionando en tres dimensiones, sujeto a una fuerza principal y tres momentos o pares, esto puede obtenerse a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Las ecuaciones generales para un vehículo aéreo piden escribirse como

$$q = (x, y, z, \psi, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^6$$

Donde:

$\xi = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ denota la posición del centro de masa del helicóptero relativo al eje de referencia (\mathcal{J})

$\eta = (\psi, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3$ son los tres ángulos de Euler los cuales representan la orientación del cuadricóptero:

- ψ es el ángulo de *yaw*,
- θ es el ángulo de *pitch*
- ϕ es el ángulo de *roll*

Esto se puede observar en la figura 17.

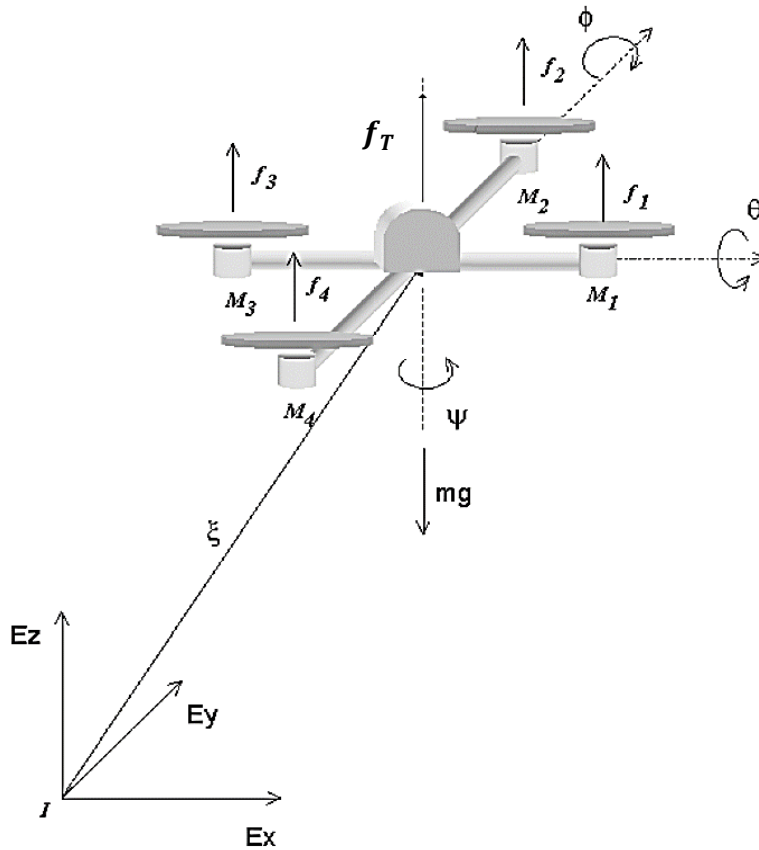


Figura 17. Esquema del cuadricóptero.

Ahora tenemos al Lagrangiano

$$L(q, \dot{q}) = T_{trans} + T_{rot} - U$$

Donde:

$T_{trans} = \frac{m}{2} \dot{\xi}^T \dot{\xi}$ es la energía cinética traslacional

$T_{rot} = \frac{1}{2} \omega^T \mathbf{I} \omega$ es la energía cinética rotacional, donde ω es la velocidad angular, \mathbf{I} es la matriz de inercia.

$U = mgz$ es la energía potencial del vehículo, donde z es la altura del vehículo, m es la masa del cuadricóptero, g es la aceleración gravitacional

El vector de la velocidad angular ω respecto a los ejes coordenados del cuerpo se relaciona con las velocidades generalizadas $\dot{\eta}$ utilizando una relación estándar cinemática esto en la región donde los ángulos de Euler son válidos.

$$\dot{\eta} = W_{\eta}^{-1}\omega$$

Donde

$$W_{\eta} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) & 0 & 1 \\ \cos(\theta)\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ \cos(\theta)\cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora tenemos que

$$\mathbb{J} = \mathbb{J}(\eta) = W_{\eta}^T \mathbf{I} W_{\eta}$$

De tal manera

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \dot{\eta}^T \mathbb{J} \dot{\eta}$$

En donde la matriz $\mathbb{J} = \mathbb{J}(\eta)$ actúa como una matriz de inercia para la energía cinética total rotacional del cuadricóptero, expresada directamente en términos de coordenadas generalizadas η .

El modelo dinámico completo del cuadricóptero es obtenido de las ecuaciones de Euler-Lagrange con las fuerzas generalizadas externas

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \begin{bmatrix} F_{\xi} \\ \tau \end{bmatrix}$$

Donde:

$F_{\xi} = R\hat{F} \in \mathbb{R}^3$ es la fuerza traslacional aplicada al vehículo debido principalmente a la entrada de control principal, en donde R denota la matriz rotacional $R(\psi, \theta, \phi)$ representando la orientación del cuadricóptero relacionada al eje de referencia fijo.

$\tau \in \mathbb{R}^3$ representa los movimientos guiñada (yaw), cabeceo (pitch) y alabeo (roll)

De la figura 17, podemos observar que

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_T \end{bmatrix}$$

Donde f_T , es la entrada de control principal o fuerza principal en la dirección del eje z que se expresa como.

$$f_T = \sum_{i=1}^4 f_i$$

Donde:

f_i es la fuerza producida por el motor M_i para $i = 1, \dots, 4$, generalmente $f_i = k\omega_i^2$, donde k es una constante y ω_i es la velocidad angular del i-ésimo motor.

Los momentos o pares generalizados son:

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_\psi \\ \tau_\theta \\ \tau_\phi \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \tau_{M_i} \\ (f_2 - f_4)l_a \\ (f_3 - f_1)l_a \end{bmatrix}$$

Donde:

l_a es la distancia entre los motores y el centro de gravedad

τ_{M_i} es el momento producido por el motor M_i para $i = 1, \dots, 4$, alrededor del centro de gravedad del vehículo.

Puesto que el Lagrangiano no contiene términos en la energía cinética combinando $\dot{\xi}$ con $\dot{\eta}$, las ecuaciones de Euler-Lagrange piden dividirse para la dinámica para las coordenadas de ξ y para las coordenadas de η .

Por consiguiente, la ecuación de Euler-Lagrange para el movimiento de traslación es

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L_{trans}}{\partial \dot{\xi}} \right] - \frac{\partial L_{trans}}{\partial \xi} = F_\xi$$

De lo cual se tiene que

$$m\ddot{\xi} + mgE_z = F_\xi$$

Para las coordenadas de η se puede escribir como

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L_{rot}}{\partial \dot{\eta}} \right] - \frac{\partial L_{rot}}{\partial \eta} = \tau$$

O como

$$\frac{d}{dt} \left[\dot{\eta}^T \mathbb{J} \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \dot{\eta}} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T \mathbb{J} \dot{\eta}) = \tau$$

Realizando algunos cálculos tenemos que

$$\mathbb{J} \ddot{\eta} + \mathbb{J} \dot{\eta} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T \mathbb{J} \dot{\eta}) = \tau$$

Definimos al motor de Coriolis como

$$\bar{V}(\eta, \dot{\eta}) = \mathbb{J} \dot{\eta} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T \mathbb{J} \dot{\eta})$$

Reescribiéndolo como

$$\mathbb{J} \ddot{\eta} + \bar{V}(\eta, \dot{\eta}) = \tau$$

Y dado que $\bar{V}(\eta, \dot{\eta})$ puede escribirse como

$$\begin{aligned} \bar{V}(\eta, \dot{\eta}) &= \left(\mathbb{J} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T \mathbb{J} \dot{\eta}) \right) \dot{\eta} \\ &= C(\eta, \dot{\eta}) \dot{\eta} \end{aligned}$$

Donde:

$C(\eta, \dot{\eta})$ representa los términos de Coriolis, el cual contiene los efectos giroscópicos y centrífugados asociados con η

Reescribiendo el modelo dinámico anterior obtenemos

$$\begin{aligned} m\ddot{\xi} + mgE_z &= F_\xi \\ \mathbb{J} \ddot{\eta} &= \tau - C(\eta, \dot{\eta}) \dot{\eta} \end{aligned}$$

Si se realiza un cambio de coordenadas, se proponen unas nuevas variables de entrada para τ

$$\tilde{\tau} = \begin{bmatrix} \tilde{\tau}_\psi \\ \tilde{\tau}_\theta \\ \tilde{\tau}_\phi \end{bmatrix} = \mathbb{J}^{-1}(\tau - C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta}) \quad (21)$$

Y finalmente obtenemos

$$m\ddot{x} = f_T \sin(\theta) \quad (22)$$

$$m\ddot{y} = f_T \cos(\theta) \sin(\phi) \quad (23)$$

$$m\ddot{z} = f_T \cos(\theta) \cos(\phi) - mg \quad (24)$$

$$\ddot{\psi} = \tilde{\tau}_\psi \quad (25)$$

$$\ddot{\theta} = \tilde{\tau}_\theta \quad (26)$$

$$\ddot{\phi} = \tilde{\tau}_\phi \quad (27)$$

Donde:

x y y son las coordenadas en el plano horizontal

z es la posición vertical

$\tilde{\tau}_\psi, \tilde{\tau}_\theta, \tilde{\tau}_\phi$ son los momentos de guiñada, cabeceo y alabeo respectivamente los cuales están relacionados con los momentos generalizados $\tau_\psi, \tau_\theta, \tau_\phi$, por la ecuación 21.

Nota: El cálculo y las propiedades de la matriz de inercia \mathbb{J} y la matriz de Coriolis $C(\eta, \dot{\eta})$ las cuales se utilizaron en esta sección se encuentran en el apéndice.

6.5 Estrategias de control

Ahora procederemos a presentar un algoritmo de control no lineal.

El algoritmo que se va a utilizar, se basa en la estabilización de una cadena de integradores utilizando saturaciones anidadas.

Para ello primero se va a estabilizar la altura del cuadricóptero y el ángulo de guiñada, además el control del ángulo de ϕ y el desplazamiento en la coordenada “y” se realizará con una ley

de control no lineal, esto considerando al comportamiento del cuadricóptero como el de un PVTOL y por último la estabilización del ángulo de θ y el desplazamiento en “ x ”.

6.5.1 Control de la altura y del ángulo de guiñada (yaw)

Para lograr manipular la altura y el ángulo de guiñada se va a utilizar la técnica de asignación de polos, la idea es forzar a que la altura o el ángulo de guiñada satisfagan la dinámica de un sistema lineal.

Por ello para lograr estabilizar la altura el articulo consultado [9] propone la siguiente ley de control

$$f_T = (r_1 + mg) \frac{1}{\cos(\theta) \cos(\phi)} \quad (28)$$

En donde r_1 representa a un controlador PD, de tal forma que

$$r_1 \triangleq -a_{z_1} \dot{z} - a_{z_2} (z - z_d) \quad (29)$$

a_{z_1}, a_{z_2} son constantes positivas y z_d la referencia sobre la altura deseada

Asi mismo la ley de control propuesta para el ángulo de guiñada será

$$\tilde{\tau}_\psi = -a_{\psi_1} \dot{\psi} - a_{\psi_2} (\psi - \psi_d) \quad (30)$$

Si introducimos las ecuaciones 28-30 en las ecuaciones 22-25 y asumiendo que $\cos(\theta) \cos(\phi) \neq 0$, esto es $\theta, \phi \in (-\pi/2, \pi/2)$, obtenemos

$$m\ddot{x} = -(r_1 + mg) \frac{\tan(\theta)}{\cos(\phi)} \quad (31)$$

$$m\dot{y} = (r_1 + mg) \tan(\phi) \quad (32)$$

$$\ddot{z} = \frac{1}{m} (-a_{z_1} \dot{z} - a_{z_2} (z - z_d)) \quad (33)$$

$$\ddot{\psi} = -a_{\psi_1} \dot{\psi} - a_{\psi_2} (\psi - \psi_d) \quad (34)$$

$a_{\psi_1}, a_{\psi_2}, a_{z_1}, a_{z_2}$ son las ganancias de control y son constantes positivas que se determinan de tal manera que se asegure una respuesta estable del cuadricóptero. Ahora si ψ_d y z_d son

constantes, entonces ψ y z convergen, de igual manera $\dot{\psi}$ y $\ddot{\psi} \rightarrow 0$, lo cual al hacer uso de la ecuación 34, implica que $\psi \rightarrow \psi_d$ y de manera similar $z \rightarrow z_d$.

6.5.2 Control del ángulo ϕ y del desplazamiento en el eje y

Primero definimos $\psi_d \equiv 0$ en las ecuaciones 30 y 34 se tiene que $\psi \rightarrow 0$, también hay que notar que de las ecuaciones 29 y 33 implica que $r_1 \rightarrow 0$.

La idea de utilizar saturaciones en la ley de control surge de la necesidad de poder controlar y/o restringir la amplitud en los ángulos de inclinación del cuadricóptero, ya que ante errores altos en la posición, la ley de control tratara de minimizar este error al incrementar la amplitud en los ángulos de inclinación e incrementando la velocidad en los motores para así lograr avanzar de manera rápida, ya que si no existe un límite en dicho ángulo o en la velocidad del cuadricóptero podría provocar que el ángulo sea demasiado grande y esto haría que el cuadricóptero perdiera estabilidad y por ende podría estrellarse contra el suelo.

Ahora el algoritmo propuesto por el artículo consultado [9] garantizará que el cuadricóptero converja en el punto deseado en un tiempo T sin importar su distancia inicial, restringiendo de manera secuencial la velocidad y ángulo de inclinación del cuadricóptero.

La estrategia de control pretende estabilizar de manera exponencial una cadena de integradores con entradas acotadas, así mismo las amplitudes de las saturaciones pueden ser seleccionadas de tal manera que después de un tiempo T' , el ángulo de alabeo (roll) están en un intervalo de $-1rad \leq \phi \leq 1rad$, por lo tanto para $t > T'$ $|\tan(\phi) - \phi| < 0.54$, ya pasado un tiempo suficiente grande r_1 es pequeño y el subsistema (y, ϕ) se reduce a

$$\ddot{y} = g\phi \quad (35)$$

$$\ddot{\phi} = \tilde{\tau}_\phi \quad (36)$$

Esto representa un sistema formado por cuatro integradores en cascada, así mismo para las ecuaciones 35-36 el algoritmo de control utilizando la técnica de las saturaciones anidadas es

$$\tilde{\tau}_\phi = -\sigma_{\phi_1} \left(\dot{\phi} + \sigma_{\phi_2} \left(\phi + \dot{\phi} + \sigma_{\phi_3} \left(2\phi + \dot{\phi} + \frac{\dot{y}}{g} + \sigma_{\phi_4} \left(\dot{\phi} + 3\phi + 3\frac{\dot{y}}{g} + \frac{y}{g} \right) \right) \right) \right) \quad (37)$$

Donde σ_a es una función saturación de la siguiente manera

$$\sigma_a(s) = \begin{cases} -a & s < -a \\ s & -a \leq s \leq a \\ a & s > a \end{cases}$$

Utilizando el algoritmo de control el sistema en lazo cerrado es asintóticamente cerrado y por tanto $\phi, \dot{\phi}, y$ y \dot{y} convergen a cero.

6.5.3 Control del ángulo θ y del desplazamiento en el eje x

De lo previamente expuesto se puede observar que para los ángulos pequeños ϕ y r_1 la ecuación 34 se reduce a $\ddot{x} = -g \tan(\theta)$. Entonces el sub-sistema (x, θ) puede representarse como

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -g \tan(\theta) \\ \ddot{\theta} &= \tilde{\tau}_\theta \end{aligned}$$

El algoritmo propuesto por el artículo consultado [9] es el siguiente

$$\tilde{\tau}_\theta = -\sigma_{\theta_1} \left(\dot{\theta} + \sigma_{\theta_2} \left(\theta + \dot{\theta} + \sigma_{\theta_3} \left(2\theta + \dot{\theta} + \frac{\dot{x}}{g} + \sigma_{\theta_4} \left(\dot{\theta} + 3\theta - 3\frac{\dot{x}}{g} - \frac{x}{g} \right) \right) \right) \right) \quad (38)$$

Tenemos que $\theta, \dot{\theta}, x$ y \dot{x} también convergen a cero, así mismo de la estrategia de control propuesta podemos observar que la ley de control no lineal es aplicada al sub-sistema (y, ϕ) o al sub-sistema (x, θ) .

Para lograr estabilizar la altura y el ángulo de guiñada (yaw), se utiliza un controlador PD obtenido a partir de la técnica de asignación de polos.

6.6 Movimientos en un cuadricóptero

A continuación, los movimientos básicos que puede hacer un cuadricóptero

Para comenzar a describir los movimientos de un cuadricóptero se describirán primeramente los 3 movimientos que puede hacer en el plano vertical:

- Flotar. – es decir realizar el empuje de los cuatro motores los cuales impulsan el cuadricóptero hacia arriba y esta debe ser exactamente igual a la fuerza gravitacional que lo empuja hacia abajo es decir se logra un vuelo estacionario estable cuando el

empuje de la nave se dirige hacia abajo. En igualdad de condiciones, los rotores girarán a la misma velocidad.

- Ascenso – Aumentando el empuje (velocidad) de los cuatro motores del cuadricóptero para que la fuerza ascendente sea mayor que el peso y la fuerza de gravedad.
- Descenso Vertical – El descenso requiere hacer exactamente lo contrario que el ascenso es decir disminuir el empuje del motor (velocidad) para que la fuerza neta sea hacia abajo.



Figura 18. Dibujo ilustrativo de un cuadricóptero flotando

Ahora para que un cuadricóptero avance se debe incrementar la velocidad del motor trasero M_3 y reducir la velocidad del motor delantero M_1 , de manera similar, el movimiento lateral se obtiene con los motores laterales.

También existen direcciones básicas en la hélice del cuadricóptero estas son:

- Yaw o Guiñada – Esta es la rotación o giro de la cabeza del cuadricóptero, puede ser a la derecha o a la izquierda, este es el movimiento básico para hacer girar al cuadricóptero.
- Pitch o cabeceo – Este es el movimiento hacia adelante y hacia atrás.
- Roll o alabeo–este movimiento se describe como que el cuadricóptero vuele de lado, ya sea a la izquierda o a la derecha.

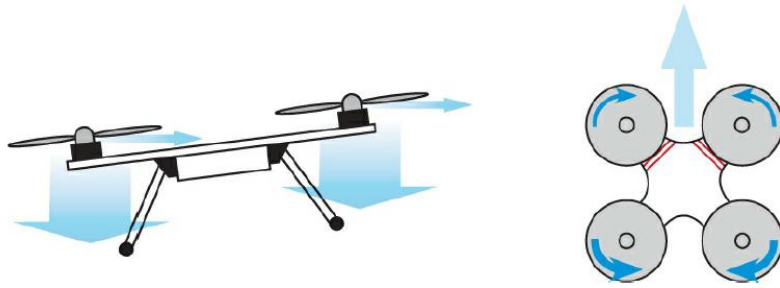


Figura 19. Dibujo ilustrativo de la dirección roll

En esencia los movimientos de un cuadricóptero son rotacionales y traslacionales los cuales están determinadas por tres ejes fijos x, y, z y a través de la oscilación de ángulos de navegación yaw (eje z), $pitch$ (eje y), y $roll$ (eje x), con estos podemos decir que el cuadricóptero posee seis grados de libertad: Tres de traslación (x, y, z) y tres de rotación ($roll(\phi), pitch(\theta), yaw(\psi)$), esto se puede observar en la siguiente figura.

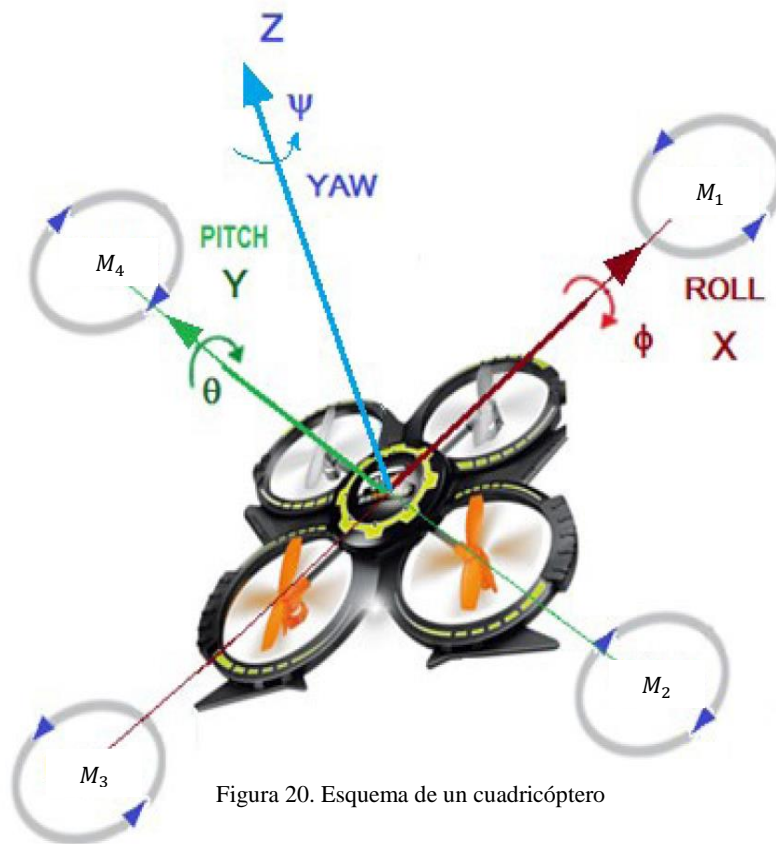


Figura 20. Esquema de un cuadricóptero

Ahora se proseguirá a describir las rotaciones angulares, estas son muy importantes para saber más sobre el movimiento de un cuadricóptero.

- **Roll (ϕ).**- Esta es una rotación sobre el eje x, esta se obtiene al variar las velocidades en los motores laterales, es decir aumentar la velocidad de los motores de un lado mientras que el resto de los motores permanecen invariantes respecto a la velocidad, de la misma manera que el torque total, esta rotación angular se conoce básicamente como albeo hacia la izquierda y derecha.
- **Pitch (θ).**- Esta es una rotación sobre el eje y, se obtiene al variar las velocidades los motores delanteros o traseros mientras que el resto de los motores permanecen invariantes respecto a la velocidad, de la misma manera que el torque total, esta rotación angular se conoce básicamente como cabeceo hacia adelante y atrás.
- **Yaw (ψ).** Esta es una rotación sobre el eje z, se obtiene al aumentar las velocidades en M_1 y M_3 además se disminuir la velocidad en M_2 y M_4 esto con el fin de mover la orientación a la derecha, esto ayuda a producir un desbalance aerodinámico en los torques que permite a la nave girar sobre su propio eje, esta rotación angular se conoce básicamente como guiñada.



Figura 21. Dibujo ilustrativo de la rotación Yaw

7. Relación de los ángulos de Euler con los movimientos de nuestro prototipo.

Como logramos apreciar en el aparatado anterior los ángulos de Euler influyen de manera directa en los movimientos de un cuadricóptero por lo tanto influyen en la velocidad y la fuerza que ejercen los motores a la hora de realizar cualquier movimiento de nuestro prototipo.

Se comenzará describiendo el movimiento de alabeo (roll), es decir una inclinación lateral.

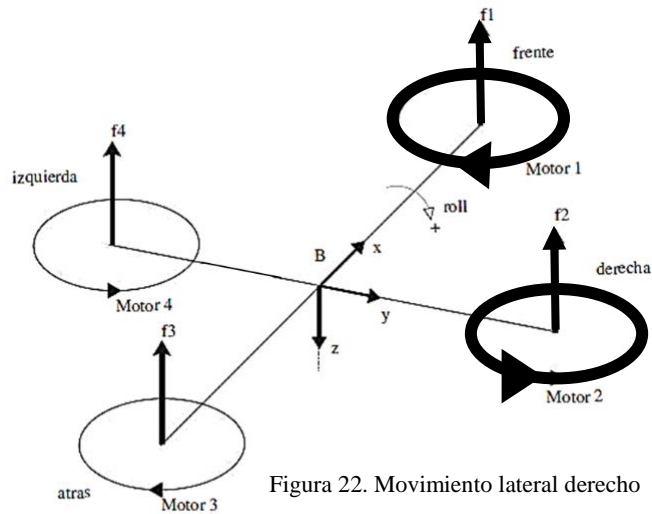


Figura 22. Movimiento lateral derecho

Como podemos observar en la figura 22 para lograr esta inclinación hacia el lado derecho es importante que la aceleración y por lo tanto la velocidad ejercida en los motores 1 y 2 debe ser mayor a la velocidad de los motores 3 y 4 y a su vez la velocidad angular ejercida en los motores 1 y 2 debe ser la misma, es decir

$$\begin{aligned}\omega_3 &< \omega_1 \\ \omega_4 &< \omega_2 \\ \omega_1 &= \omega_2\end{aligned}$$

De manera contraria para lograr la inclinación hacia el lado izquierdo es importante que la velocidad ejercida en los motores 3 y 4 debe ser mayor a la velocidad de los motores 1 y 2 y a su vez la velocidad angular ejercida en los motores 3 y 4 debe ser la misma, es decir

$$\begin{aligned}\omega_1 &< \omega_3 \\ \omega_2 &< \omega_4 \\ \omega_3 &= \omega_4\end{aligned}$$

Esto podemos apreciarlo en la figura 23

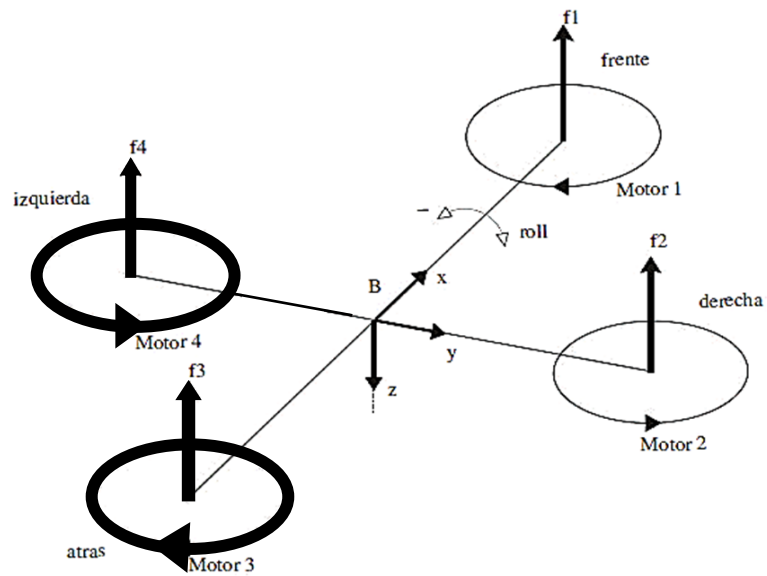


Figura 23. Movimiento lateral izquierdo

Para describir el movimiento de cabeceo (pitch), es importante tener el claro que es el movimiento de adelante y atrás.

Comenzaremos con el movimiento hacia adelante, para esto es necesario que la velocidad debe ser mayor en los motores 1 y 4 a la velocidad de los motores 2 y 3, así mismo la velocidad angular de los motores 1 y 4 deben ser iguales.

$$\begin{aligned}\omega_2 &< \omega_1 \\ \omega_3 &< \omega_4 \\ \omega_1 &= \omega_4\end{aligned}$$

Esto se puede apreciar en la figura 24.

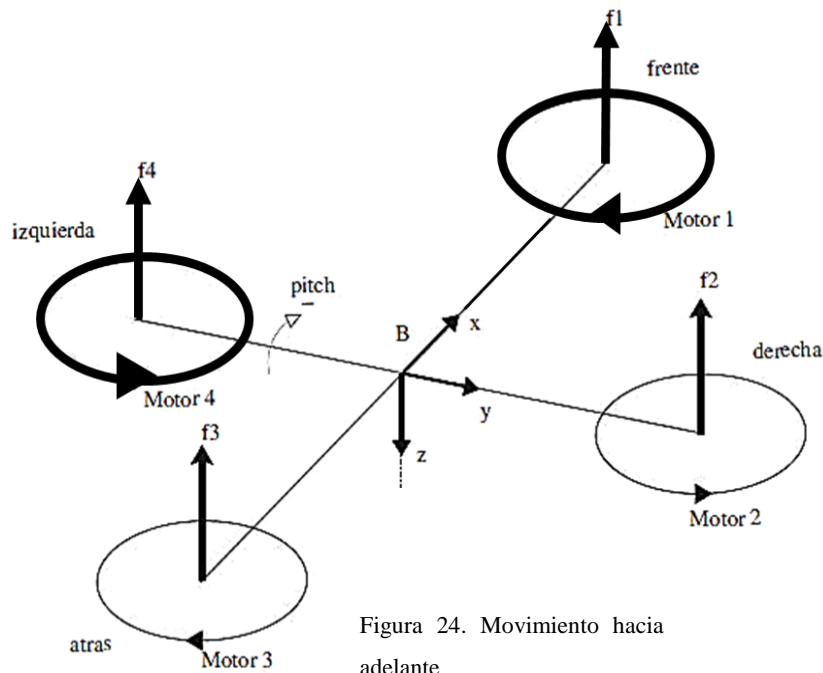


Figura 24. Movimiento hacia adelante

Por lo contrario, con el movimiento hacia atrás, es necesario que la velocidad debe ser mayor en los motores 2 y 3 a la velocidad de los motores 1 y 4, así mismo la velocidad angular de los motores 2 y 3 deben ser iguales.

$$\begin{aligned}\omega_1 &< \omega_2 \\ \omega_4 &< \omega_3 \\ \omega_2 &= \omega_3\end{aligned}$$

Esto puede apreciarse de mejor manera en la figura 25.

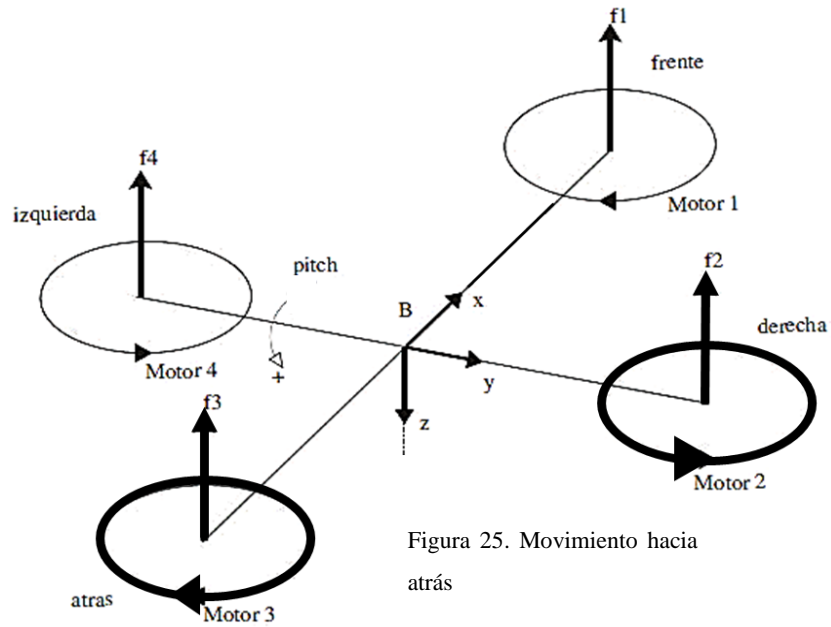


Figura 25. Movimiento hacia atrás

Para describir el movimiento de guiñada (yaw), es importante tener el claro que es una rotación sobre su eje vertical.

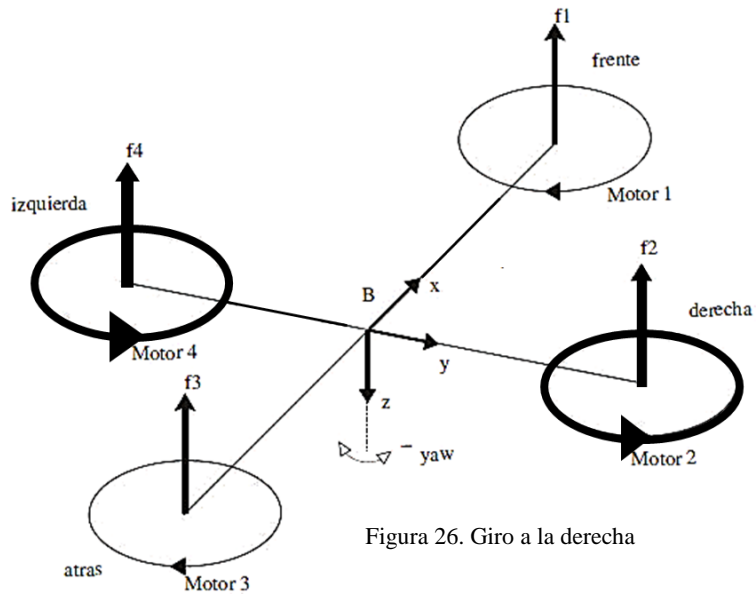


Figura 26. Giro a la derecha

Como podemos observar en la figura 26 para lograr este giro hacia el lado derecho es importante que la velocidad ejercida en los motores 2 y 4 debe ser mayor a la velocidad de

los motores 1 y 3 y a su vez la velocidad angular ejercida en los motores 2 y 4 debe ser la misma, es decir

$$\begin{aligned}\omega_1 &< \omega_2 \\ \omega_3 &< \omega_4 \\ \omega_2 &= \omega_4\end{aligned}$$

De manera contraria para lograr el giro hacia el lado izquierdo es importante que la velocidad ejercida en los motores 1 y 3 debe ser mayor a la velocidad de los motores 2 y 4 y a su vez la velocidad angular ejercida en los motores 1 y 3 debe ser la misma, es decir

$$\begin{aligned}\omega_2 &< \omega_1 \\ \omega_4 &< \omega_3 \\ \omega_1 &= \omega_3\end{aligned}$$

Como se muestra en la figura 27.

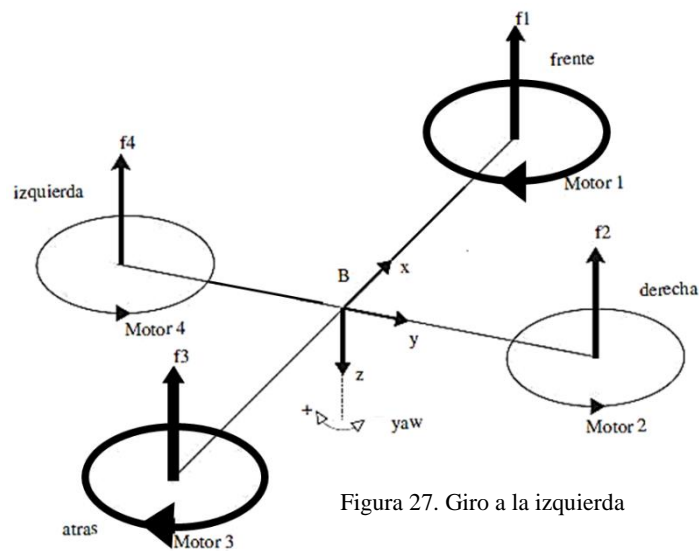


Figura 27. Giro a la izquierda

Para lograr tener claro los movimientos de nuestro prototipo es importante marcar desde un principio cual es el frente, el lado izquierdo, el derecho y la parte trasera del prototipo, esto con el fin de colocar de manera correcta los motores a la vez que respetamos ese orden en la programación y en la conexión electrónica, ya que al no tener un orden claro los movimientos no se realizaran de la manera correcta, que es lo visto en el texto previo.

Ahora tomando en cuenta el modelo dinámico es importante resaltar que la nave no va a volar por tanto las ecuaciones que denotan movimiento no serán utilizadas, solo nos basamos en las que denotan a los ángulos de Euler es decir la orientación de nuestro cuadricóptero por ello de todo el desarrollo expuesto en la sección 6.3 las ecuaciones que son relevantes en este caso son 25-27 es decir

$$\ddot{\psi} = \tilde{\tau}_{\psi}$$

$$\ddot{\theta} = \tilde{\tau}_{\theta}$$

$$\ddot{\phi} = \tilde{\tau}_{\phi}$$

Ya que nos es relevante conocer los momentos de guiñada, cabeceo y alabeo

Así mismo en la sección 6.5 nos es relevante el comprender como la técnica de asignación de polos nos brinda la oportunidad de forzar el ángulo de guiñada para que este posea un comportamiento lineal por ello la ley de control que nos otorga la ecuación 30

$$\tilde{\tau}_{\psi} = -a_{\psi_1}\dot{\psi} - a_{\psi_2}(\psi - \psi_d)$$

Es muy importante ya que este controlador nos ayuda a proporcionar la ubicación de los polos con el fin de tener la respuesta deseada.

Ya que esta nos brinda las ganancias de control las cuales al pueden implementarse en el esquema de saturaciones anidadas esto con el fin de lograr manejar de mejor manera las no linealidades, de estas saturaciones obtenemos el algoritmo de control de alabeo (ecuación 37) y cabeceo (ecuación 38) es decir

$$\tilde{\tau}_{\phi} = -\sigma_{\phi_1} \left(\dot{\phi} + \sigma_{\phi_2} \left(\phi + \dot{\phi} + \sigma_{\phi_3} \left(2\phi + \dot{\phi} + \frac{\dot{y}}{g} + \sigma_{\phi_4} \left(\dot{\phi} + 3\phi + 3\frac{\dot{y}}{g} + \frac{y}{g} \right) \right) \right) \right)$$

$$\tilde{\tau}_{\theta} = -\sigma_{\theta_1} \left(\dot{\theta} + \sigma_{\theta_2} \left(\theta + \dot{\theta} + \sigma_{\theta_3} \left(2\theta + \dot{\theta} + \frac{\dot{x}}{g} + \sigma_{\theta_4} \left(\dot{\theta} + 3\theta - 3\frac{\dot{x}}{g} - \frac{x}{g} \right) \right) \right) \right)$$

Para tener una idea concisa de estos movimientos es importante saber que el movimiento de los joysticks usados en el control remoto influye de manera directa en la velocidad de los motores, así como en otros aspectos de este, es decir cada movimiento de joystick influye en cuales motores poseen más o menos velocidad a comparación de otros esto dependiendo de la dirección que tome el joystick, en la siguiente imagen podemos observar todos los posibles movimientos que posee este dispositivo.

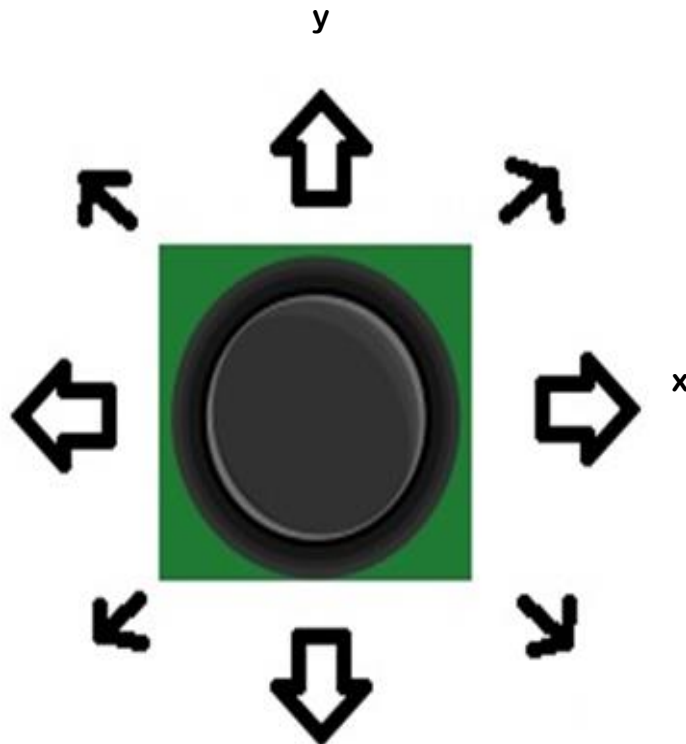


Figura 28. Posibles movimientos del joystick.

Ya con esto en cuenta, el prototipo de control remoto cuenta con dos joysticks uno para el control de ascenso y descenso del cuadricóptero del cual solo se ocupa la parte “y” correspondiente del joystick, esto lo podemos observar en las tablas 1 y 2.

Tabla 1. Aceleración de los 4 motores							
Rango de movimiento de la parte "y" del joystick 1	frecuencia del motor (kHz)	Rango de voltaje en el microcontrolador (v)	Rango de voltaje en el motor (v)	Revoluciones por minuto (RPM)	velocidad angular (rad/s)	par motor (N/m)	Fuerza de elevación (N)
160	16	4.442	10.662	9809.702	1027.272	0.012	0.0015
165	16	4.584	11.002	10122.576	1060.036	0.012	0.0015
170	16	4.721	11.331	10424.851	1091.690	0.012	0.0015
175	16	4.863	11.671	10737.724	1124.454	0.012	0.0015
180	16	5	12	11040	1156.108	0.012	0.0015

Tabla 2. Desaceleración de los 4 motores							
Rango de movimiento de la parte "y" del joystick 1	frecuencia del motor (kHz)	Rango de voltaje en el microcontrolador (v)	Rango de voltaje en el motor (v)	Revoluciones por minuto (RPM)	velocidad angular (rad/s)	par motor (N/m)	Fuerza de elevación (N)
20	16	0.606	1.454	1338.048	140.120	0.012	0.0015
15	16	0.415	0.996	917.203	96.049	0.012	0.0015
10	16	0.268	0.645	593.510	62.152	0.012	0.0015
5	16	0.136	0.328	302.054	31.631	0.012	0.0015
0	16	0	0	0	0	No existe	No existe

Algo importante a destacar es el momento de inercia de un motor eléctrico el cual es esencial para analizar su rendimiento dinámico. El momento de inercia (J) de un motor incluye tanto el rotor como cualquier carga adicional (como hélices) que esté directamente acoplada al motor, esta se calcula de la siguiente manera

$$J = \frac{\tau}{\alpha}$$

Donde

τ es el par motor en unidades de Nm cuyo valor es de $0.012 Nm$

α es la aceleración angular en unidades de rad/s^2 la cual puede ser calculada de la siguiente manera $\alpha = \frac{\omega_f - \omega_0}{\Delta t}$ donde ω_0 es la velocidad angular inicial, ω_f es la velocidad angular final y Δt es el intervalo de tiempo

Por tanto, en el si queremos calcular el momento de inercia cuando los motores estén acelerando tendremos que

$$\alpha = \frac{1156.108 \frac{\text{rad}}{\text{s}} - 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{1 \text{ s}} = 1156.108 \text{ rad/s}^2$$

Donde ω_0 se le consideraría la velocidad del rango más bajo de joystick de ambas tablas, ω_f la velocidad máxima del rango más alto de joystick en ambas tablas y dado que la respuesta del joystick al motor es casi instantánea el valor de Δt será de $1s$

Por tanto $J = 1.037 \times 10^{-5} \text{ kg/m}^2$ para cada motor

Las tablas anteriores, así como las posteriores que abarcan los movimientos de los joysticks y su influencia en los motores poseen datos adicionales e importantes a la hora de conocer que se necesita y que influye para el movimiento correcto de un cuadricóptero, por ejemplo, es muy importante conocer los factores que afectan a los motores a la hora de realizar cada movimiento y para esto se deben conocer y calcular datos previamente.

Estos datos son el voltaje en el motor al momento de realizar el movimiento, este dato es extraído de la conversión del voltaje que nos proporciona el microcontrolador, ya que este voltaje de 0 a 5 se convierte en un rango de 0 a 12 v, es decir que si en el microcontrolador

existen los 5v se verá reflejado que el motor será alimentado por 12v; esta información se encuentra en el código correspondiente a la recepción y emisión de datos donde se representa el voltaje de 0 a 5 v en números de 0 a 1023, posteriormente se mapean a valores de 0 a 180 o de 180 a 0 según sea el caso, como se muestra en la tabla 3

Tabla 3. Conversión de los valores del código a los voltajes requeridos				
Valor de 0 a 1023	Valor de 0 a 180	Valor de 180 a 0	Valor de 0v a 5v	Valor de 0v a 12v
0	0	180	0	0
147	26	154	0.7184	1.4241
295	52	128	1.4418	3.4603
438	77	103	2.1407	5.1376
585	103	77	2.8592	6.8620
733	129	51	3.5826	8.5982
1023	180	0	5	12

El otro dato importante a saber es las revoluciones por minuto (RPM) las cuales se calculan mediante la multiplicación del K_v del motor y el voltaje del mismo, es decir

$$RPM = K_v(v)$$

Cabe señalar que el valor K_v es dado por el fabricante y se encuentra en la hoja de datos de motor, en nuestro caso el motor posee un $K_v = 920 \text{ RPM/v}$

Otro dato importante a recabar es la velocidad angular del motor (ω) la cual es la rapidez con la que gira el eje del motor alrededor de su punto de rotación, cuanto mayor sea la velocidad angular, más rápidamente gira el motor, esta está dada por

$$\omega = \frac{2\pi(RPM)}{60}$$

El cual se expresa en unidades de *radianes/segundo*.

Otro aspecto a calcular es el par motor, también conocido simplemente como "par", es una medida de la fuerza rotacional aplicada a un objeto, como un eje, un volante o una hélice, alrededor de un punto, está relacionado con varios factores, incluidos el voltaje, la corriente, la eficiencia del motor y las características específicas del motor, su unidad es *N/m* está la podemos calcular de la siguiente manera

$$\tau = K_t * I$$

Donde

K_t es la constante de par de un motor la cual se define como el par producido por unidad de corriente y se expresa en *Nm/A*, esta constante se puede calcular gracias a su relación con la constante K_v esto gracias a que están relacionados a través de las propiedades físicas del motor, por tanto se calcula de la siguiente manera

$$K_t = \frac{1}{K_v} \cdot \frac{60}{2\pi}$$

Hay que tener en cuenta que el factor $\frac{60}{2\pi}$ convierte radianes por segundo (rad/s) a revoluciones por minuto (RPM). Por tanto el valor de $K_t = 0.01037965$

I es la corriente en el motor y su unidad es *A* la cual posee un valor de 1.18 *A* ya que al estar en el suelo no levanta carga alguna

Para finalizar la fuerza de elevación del motor se puede calcular con el producto entre el par motor y el radio de la hélice utiliza para el cuadricóptero

$$F = \tau(r)$$

El valor (r) se obtiene de medir la mitad de la hélice y se representa en metros, en el caso de nuestro cuadricóptero se utilizó una hélice con $r = 0.127m$

Explicando todos los elementos de la tablas, se procederá a describir las tablas que representan los movimientos del cuadricóptero, para esto se tomaran los elementos "x" y "y"

del segundo joystick, donde el voltaje obtenido de este se sumara al valor que ya tiene el motor recibido del primer joystick, por lo tanto si el primer joystick ha mandado el valor máximo posible, una limitación agregada en el código evitara la suma de voltaje del joystick 2, esto con el fin de evitar complicaciones durante su uso.

Así mismos la nomenclatura de los motores ya no será numérica por lo cual “a” representa al motor 1, “b” al motor 2, “c” al motor 3 y “d” al motor 4.

Como se explicó anteriormente para lograr una inclinación derecha solo se debe incrementar el voltaje en 2 motores estos son los motores “c” y “d”, por lo tanto, el resto permanece con el valor otorgado en el movimiento de ascenso, y los motores “c” y “d” se les suma el voltaje dado por la parte “x” del joystick número dos, por esta razón en la tabla 4 y las posteriores solo nos interesa conocer los datos de esos 2 motores.

Ahora para lograr una inclinación izquierda solo se debe incrementar el voltaje en 2 motores estos son los motores “a” y “b”, por lo tanto, el resto permanece con el valor otorgado en el movimiento de ascenso, y los motores “a” y “b” se les suma el voltaje dado por la parte “x” del joystick número dos, sin embargo la parte izquierda representa la “negativa” de “x” por lo tanto para que exista una parte negativa que pueda causar complicaciones el mapeo se invierte, esto se puede observar en la tabla 5

Para lograr una inclinación frontal (que se mueva hacia adelante) solo se debe incrementar el voltaje en 2 motores estos son los motores “a” y “d”, por lo tanto, el resto permanece con el valor otorgado en el movimiento de ascenso, y los motores “a” y “d” se les suma el voltaje dado por la parte “y” del joystick número dos, esto se puede observar en la tabla 6.

Ahora para lograr una inclinación trasera (desplazamiento hacia atrás) solo se debe incrementar el voltaje en 2 motores estos son los motores “b” y “c”, por lo tanto, el resto permanece con el valor otorgado en el movimiento de ascenso, y los motores “b” y “c” se les suma el voltaje dado por la parte “y” del joystick número dos, sin embargo la parte inferior representa la “negativa” de “y” por lo tanto para que exista una parte negativa que pueda causar complicaciones el mapeo se invierte, esto se puede observar en la tabla 7

Tabla 4. Inclinación a la derecha							
Rango de movimiento de la parte "x" del joystick 2	Frecuencia del motor (kHz)	Rango de voltaje en el microcontrolador (v)	Rango de voltaje en el motor c y d (v)	Revoluciones por minuto (RPM)	Velocidad angular (rad/s)	Par motor (N/m)	Fuerza de elevación (N)
92	16	2.556	6.134	5644.0896	591.049	0.012	0.0015
112	16	3.108	7.4604	6863.568	718.752	0.012	0.0015
132	16	3.665	8.79744	8093.644	847.566	0.012	0.0015
152	16	4.222	10.13472	9323.942	976.403	0.012	0.0015
172	16	4.775	11.46024	10543.420	1104.107	0.012	0.0015
180	16	5	12	11040	1156.108	0.012	0.0015

Tabla 5. Inclinación a la izquierda							
Rango de movimiento de la parte "x" del joystick 2	Frecuencia del motor (kHz)	Rango de voltaje en el microcontrolador (v)	Rango de voltaje en el motor a y b (v)	Revoluciones por minuto (RPM)	Velocidad angular (rad/s)	Par motor (N/m)	Fuerza de elevación (N)
80	16	2.776	6.662	6129.628	641.894	0.012	0.0015
60	16	3.333	7.999	7359.926	770.731	0.012	0.0015
40	16	3.890	9.337	8590.224	899.568	0.012	0.0015
20	16	4.442	10.662	9809.702	1027.272	0.012	0.0015
0	16	5	12	11040	1156.108	0.012	0.0015

Tabla 6. Inclinación frontal							
Rango de movimiento de la parte "y" del joystick 2	Frecuencia del motor (kHz)	Rango de voltaje en el microcontrolador (v)	Rango de voltaje en el motor a y d (v)	Revoluciones por minuto (RPM)	Velocidad angular (rad/s)	Par motor (N/m)	Fuerza de elevación (N)
95	16	2.683	6.439	5924.505	620.414	0.012	0.0015
115	16	3.166	7.599	6991.411	732.140	0.012	0.0015
135	16	3.748	8.996	8277.129	866.781	0.012	0.0015
155	16	4.305	10.334	9507.427	995.617	0.012	0.0015
175	16	4.863	11.671	10737.724	1124.454	0.012	0.0015
180	16	5	12	11040	1156.108	0.012	0.0015

Tabla 7. Inclinación hacia atrás							
Rango de movimiento de la parte "y" del joystick 2	Frecuencia del motor (kHz)	Rango de voltaje en el microcontrolador (v)	Rango de voltaje en el motor b y c (v)	Revoluciones por minuto (RPM)	Velocidad angular (rad/s)	Par motor (N/m)	Fuerza de elevación (N)
85	16	2.639	6.334	5827.353	610.240	0.012	0.0015
65	16	3.196	7.671	7057.651	739.077	0.012	0.0015
45	16	3.748	8.996	8277.129	866.781	0.012	0.0015
25	16	4.305	10.334	9507.427	995.617	0.012	0.0015
0	16	5	12	11040	1156.108	0.012	0.0015

Así mismo tenemos que el momento de inercia en los motores de cada uno de estos movimientos sería:

Inclinación a la derecha

$$\alpha = \frac{1156.108 \frac{rad}{s} - 591.049 \frac{rad}{s}}{1 s} = 565.059 \text{ rad/s}^2$$

Por tanto $J = 2.123 \times 10^{-5} \text{ kg/m}^2$ para cada motor

Inclinación a la izquierda

$$\alpha = \frac{1156.108 \frac{rad}{s} - 641.894 \frac{rad}{s}}{1 s} = 514.214 \text{ rad/s}^2$$

Por tanto $J = 2.333 \times 10^{-5} \text{ kg/m}^2$ para cada motor

Inclinación delantera

$$\alpha = \frac{1156.108 \frac{rad}{s} - 620.414 \frac{rad}{s}}{1 s} = 535.694 \text{ rad/s}^2$$

Por tanto $J = 2.240 \times 10^{-5} \text{ kg/m}^2$ para cada motor

Inclinación hacia atrás

$$\alpha = \frac{1156.108 \frac{rad}{s} - 610.240 \frac{rad}{s}}{1 s} = 545.868 \text{ rad/s}^2$$

Por tanto $J = 2.198 \times 10^{-5} \text{ kg/m}^2$ para cada motor

Otros tipos de movimientos que puede realizar nuestro cuadricóptero variando la fuerza y velocidad de nuestros motores son las inclinaciones diagonales, dichas inclinaciones se muestran en las tablas siguientes.

Para la inclinación en diagonal derecha-frontal solo se debe incrementar el voltaje en 1 motor el cual es el motor “a”, por lo tanto, el resto permanece con el valor otorgado en el movimiento de ascenso, y al motor “a” se le suma el voltaje dado por la parte “x” y “y”

además ya que estos al tener el mismo rango de valores representan el mismo rango de voltaje a sumar al motor “a” esto se puede observar en la tabla 8

Para la inclinación en diagonal izquierda-frontal solo se debe incrementar el voltaje en 1 motor el cual es el motor “d”, por lo tanto, el resto permanece con el valor otorgado en el movimiento de ascenso, y al motor “d” se les suma el voltaje dado por la parte “x” y “y” además ya que estos al tener el mismo rango de valores representan el mismo rango de voltaje a sumar al motor “d”, estos valores siguen siendo iguales independientemente de que la parte “x” se encuentre en la zona “negativa” esto se puede observar en la tabla 9

Para la inclinación en diagonal derecha-trasera solo se debe incrementar el voltaje en 1 motor el cual es el motor “b”, por lo tanto, el resto permanece con el valor otorgado en el movimiento de ascenso, y al motor “b” se les suma el voltaje dado por la parte “x” y “y” además ya que estos al tener el mismo rango de valores representan el mismo rango de voltaje a sumar al motor “b”, estos valores siguen siendo iguales independientemente de que la parte “y” se encuentre en la zona “negativa” esto se puede observar en la tabla 10

Para la inclinación en diagonal izquierda-trasera solo se debe incrementar el voltaje en 1 motor el cual es el motor “c”, por lo tanto, el resto permanece con el valor otorgado en el movimiento de ascenso, y al motor “c” se les suma el voltaje dado por la parte “x” y “y” además ya que estos al tener el mismo rango de valores representan el mismo rango de voltaje a sumar al motor “c” esto se puede observar en la tabla 1

Tabla 8. Inclinación diagonal derecha-frontal

Rango de movimiento de la parte "x" del joystick 2	Rango de movimiento de la parte "y" del joystick 2	Frecuencia del motor (kHz)	Rango de voltaje en el microcontrolador para "x" (v)	Rango de voltaje en el microcontrolador para "y" (v)	Rango de voltaje en el motor a (v)	Revoluciones por minuto (RPM)	Velocidad angular (rad/s)	Par motor (N/m)	Fuerza de elevación (N)
160	160	16	4.442	4.442	10.662	9809.702	1027.272	0.012	0.0015
165	165	16	4.579	4.579	10.991	10111.756	1058.903	0.012	0.0015
170	170	16	4.721	4.721	11.331	10424.851	1091.690	0.012	0.0015
175	175	16	4.828	4.828	11.587	10660.665	1116.384	0.012	0.0015
180	180	16	5	5	12	11040	1156.108	0.012	0.0015

Tabla 9. Inclinación diagonal izquierda-frontal

Rango de movimiento de la parte "x" del joystick 2	Rango de movimiento de la parte "y" del joystick 2	Frecuencia del motor (kHz)	Rango de voltaje en el microcontrolador para "x" (v)	Rango de voltaje en el microcontrolador para "y" (v)	Rango de voltaje en el motor d (v)	Revoluciones por minuto (RPM)	Velocidad angular (rad/s)	Par motor (N/m)	Fuerza de elevación (N)
20	160	16	4.442	4.442	10.662	9809.702	1027.272	0.012	0.0015
15	165	16	4.579	4.579	10.991	10111.756	1058.903	0.012	0.0015
10	170	16	4.721	4.721	11.331	10424.851	1091.690	0.012	0.0015
5	175	16	4.828	4.828	11.587	10660.665	1116.384	0.012	0.0015
0	180	16	5	5	12	11040	1156.108	0.012	0.0015

Tabla 10. Inclinación diagonal derecha-trasera

Rango de movimiento de la parte "x" del joystick 2	Rango de movimiento de la parte "y" del joystick 2	Frecuencia del motor (kHz)	Rango de voltaje en el microcontrolador para "x" (v)	Rango de voltaje en el microcontrolador para "y" (v)	Rango de voltaje en el motor b (v)	Revoluciones por minuto (RPM)	Velocidad angular (rad/s)	Par motor (N/m)	Fuerza de elevación (N)
160	20	16	4.442	4.442	10.662	9809.702	1027.272	0.012	0.0015
165	15	16	4.579	4.579	10.991	10111.756	1058.903	0.012	0.0015
170	10	16	4.721	4.721	11.331	10424.851	1091.690	0.012	0.0015
175	5	16	4.828	4.828	11.587	10660.665	1116.384	0.012	0.0015
180	0	16	5	5	12	11040	1156.108	0.012	0.0015

Tabla 11. Inclinación diagonal izquierda-trasera

Rango de movimiento de la parte "x" del joystick 2	Rango de movimiento de la parte "y" del joystick 2	Frecuencia del motor (kHz)	Rango de voltaje en el microcontrolador para "x" (v)	Rango de voltaje en el microcontrolador para "y" (v)	Rango de voltaje en el motor c (v)	Revoluciones por minuto (RPM)	Velocidad angular (rad/s)	Par motor (N/m)	Fuerza de elevación (N)
20	20	16	4.442	4.442	10.662	9809.702	1027.272	0.012	0.0015
15	15	16	4.579	4.579	10.991	10111.756	1058.903	0.012	0.0015
10	10	16	4.721	4.721	11.331	10424.851	1091.690	0.012	0.0015
5	5	16	4.828	4.828	11.587	10660.665	1116.384	0.012	0.0015
0	0	16	5	5	12	11040	1156.108	0.012	0.0015

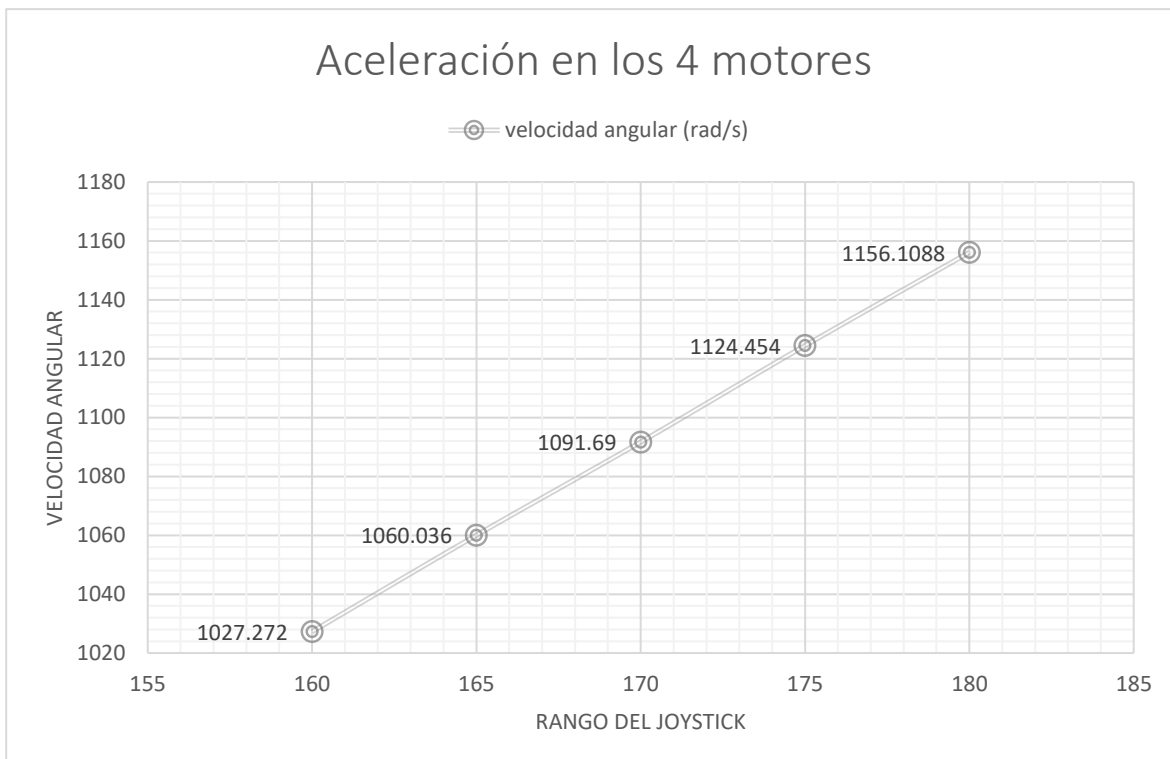
Así mismo tenemos que el momento de inercia en cada uno de estos motores para realizar estas inclinaciones diagonales son el mismo gracias a que el rango para cada uno de estos movimientos es el mismo por tanto tenemos que:

$$\alpha = \frac{1156.108 \frac{rad}{s} - 1027.272 \frac{rad}{s}}{1 s} = 128.836 \text{ rad/s}^2$$

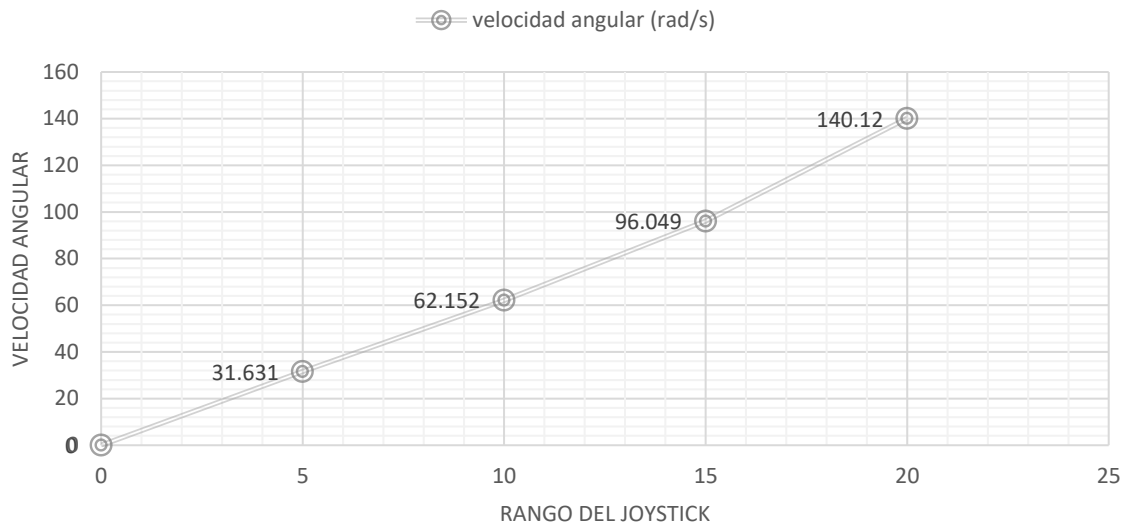
Por tanto $J = 9.314 \times 10^{-5} \text{ kg/m}^2$ para cada motor

Analizando todos los momentos de inercia presentado podemos deducir que el momento de inercia es mayor conforme menos motores realicen el movimiento ya que entre menos motores es más difícil cambiar la velocidad y por ende la dirección del cuadricóptero.

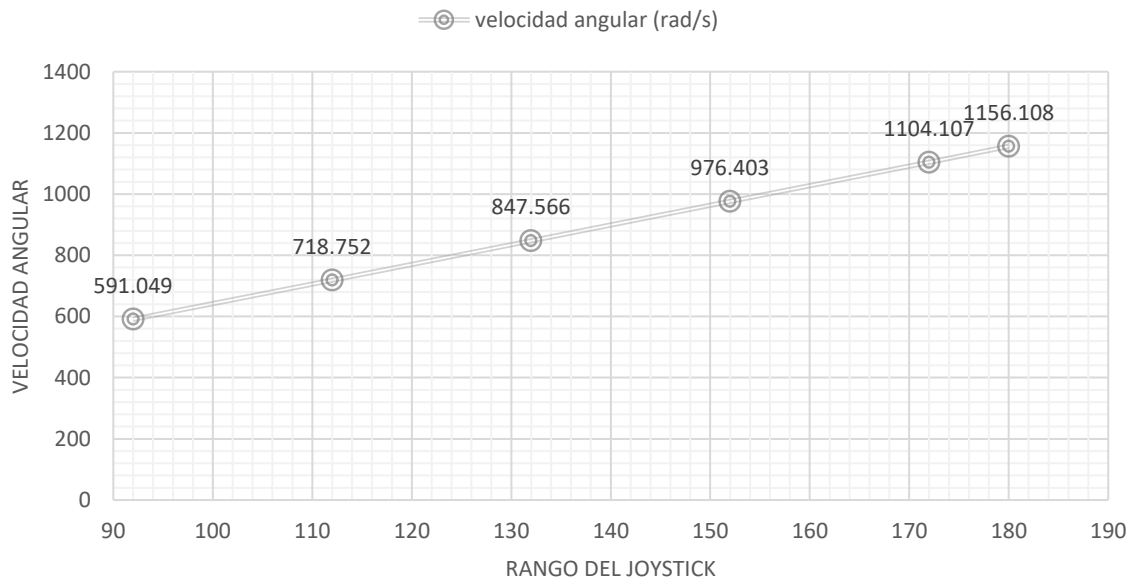
A continuación, se mostrarán una serie de gráficas las cuales nos mostraran de una mejor manera la directa relación que posee el joystick y la velocidad angular de los motores que se utilizan para realizar cada movimiento.



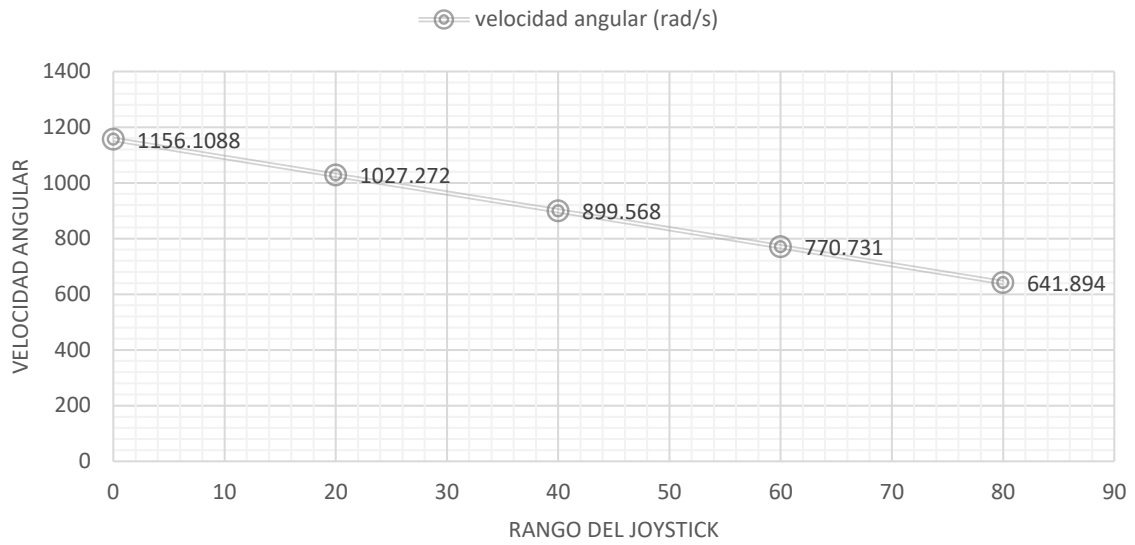
Desaceleración en los 4 motores



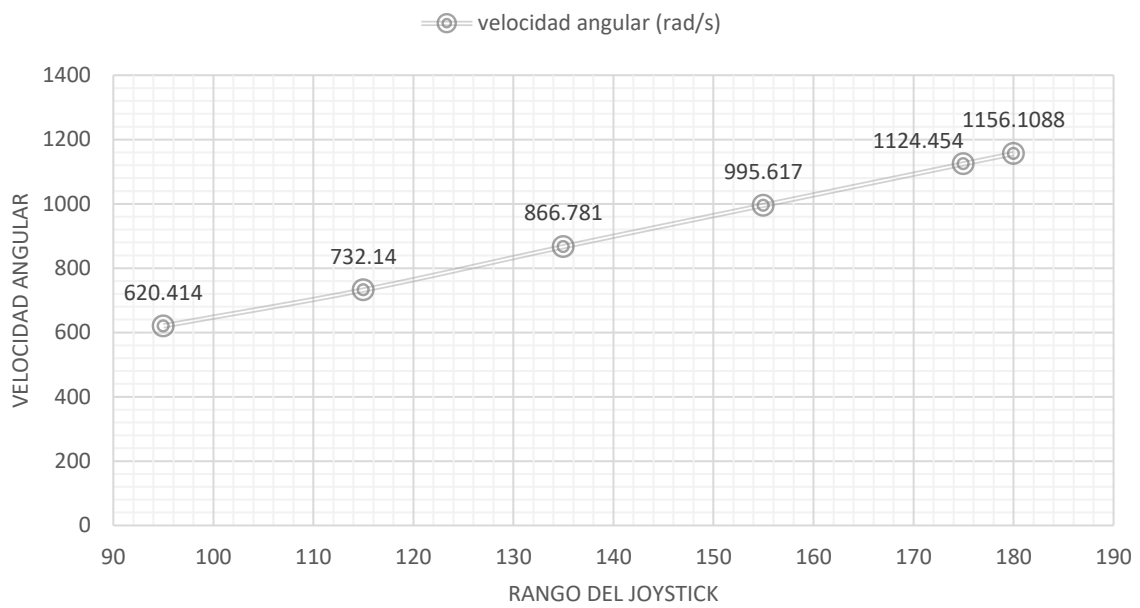
Inclinación a la derecha



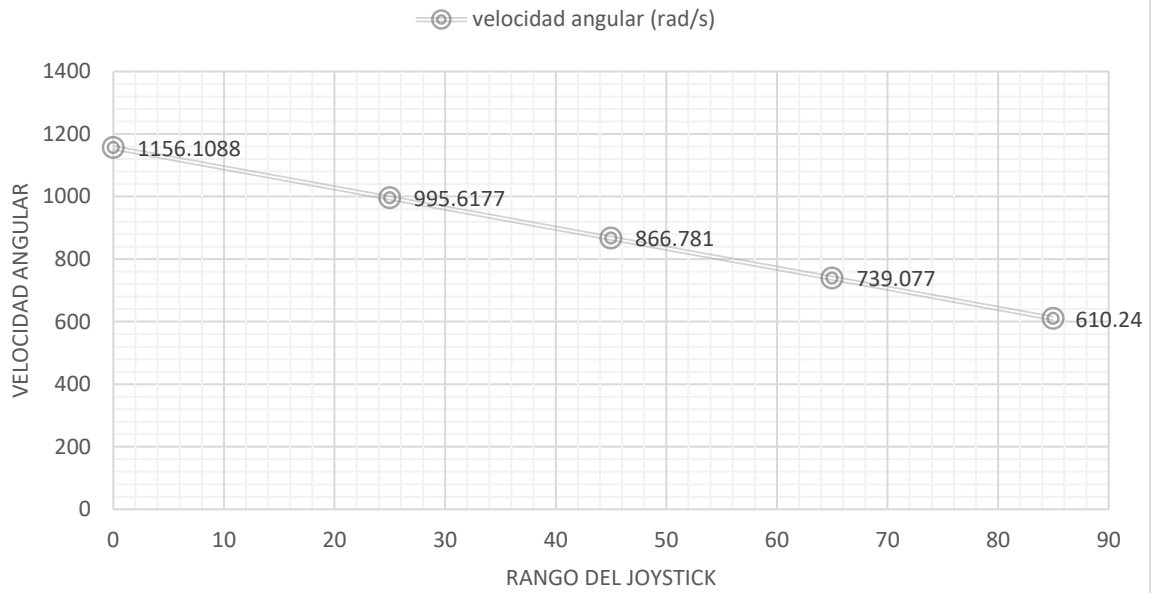
Inclinación a la izquierda



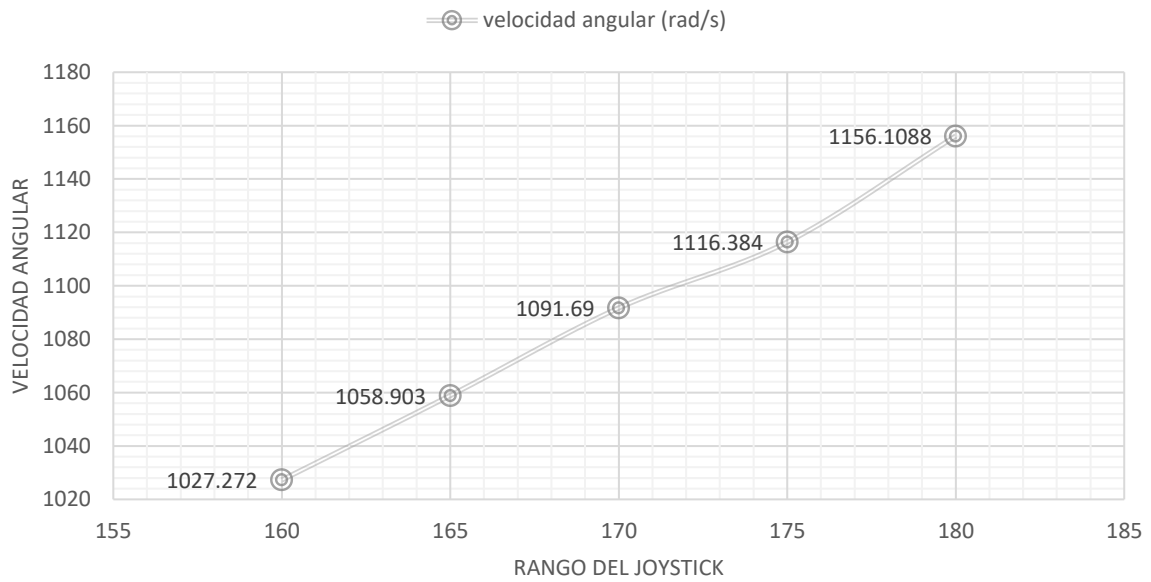
Inclinación frontal



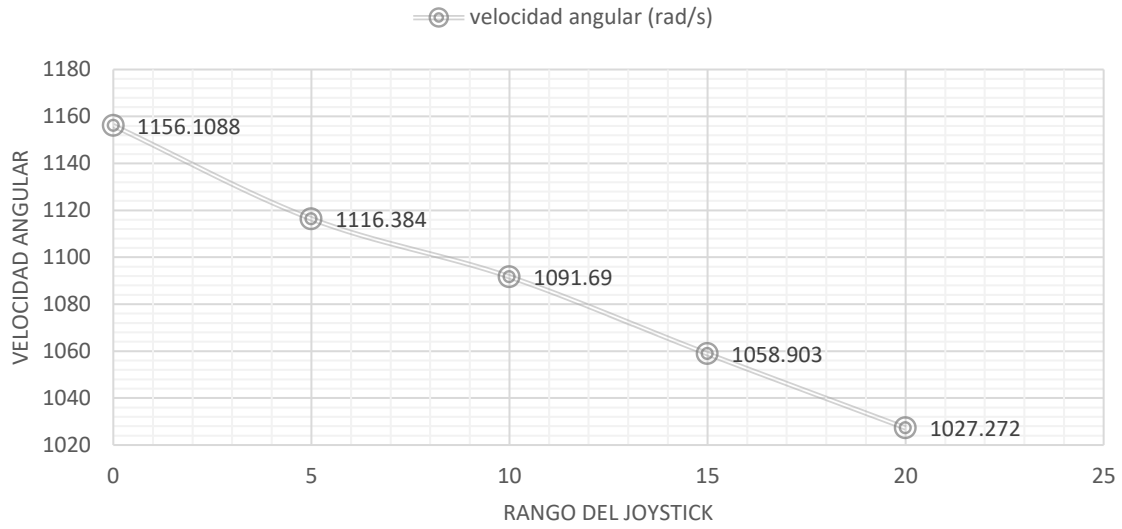
Inclinación trasera



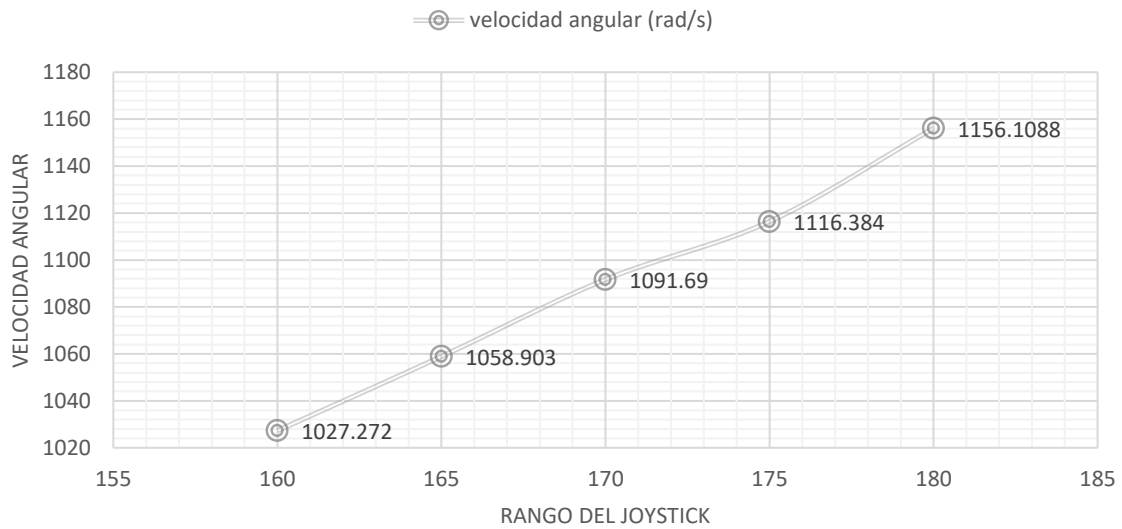
Inclinación diagonal derecha-frontal

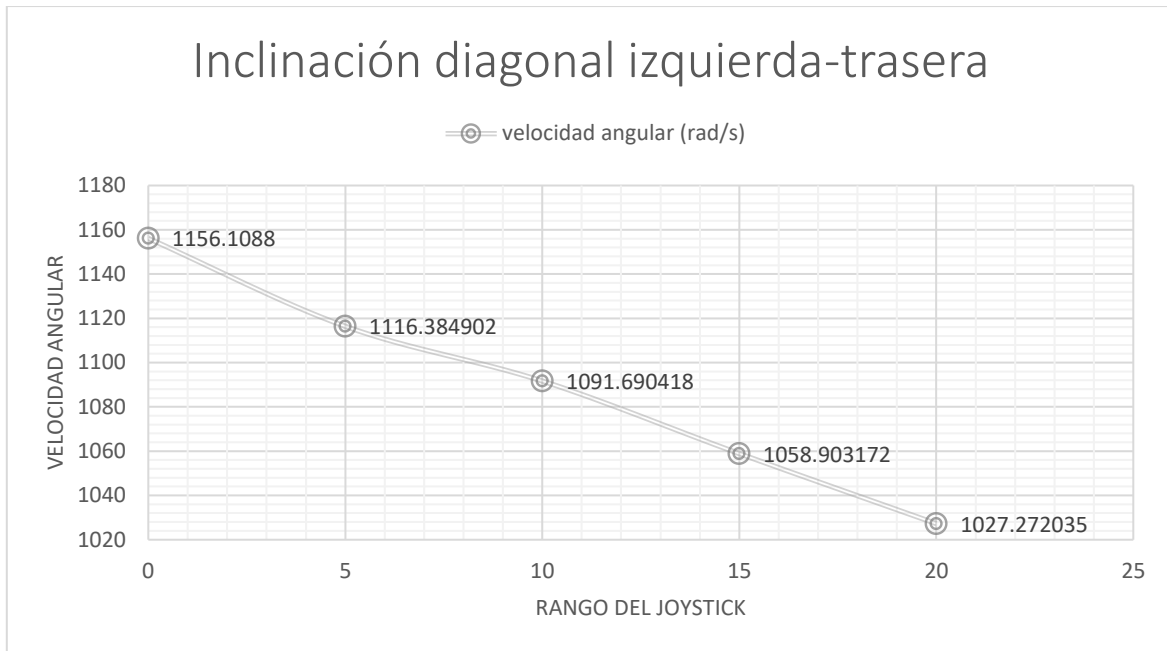


Inclinación diagonal izquierda-frontendal



Inclinación diagonal derecha-trasera





Así mismo esta relación también posee una función de transferencia que nos muestra esta relación para ello primero hay que tener en consideración la resistencia total de un potenciómetro (R_{pot}) ya un joystick posee uno por tanto observando la figura 29 tenemos que

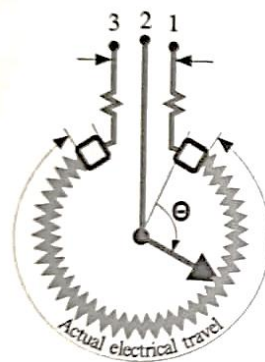


Figura 29. Diagrama de potenciómetro

$$R_{13} = R_{pot}$$

$$R_{12} = R_1 \text{ o } R_{joystick}$$

Así mismo

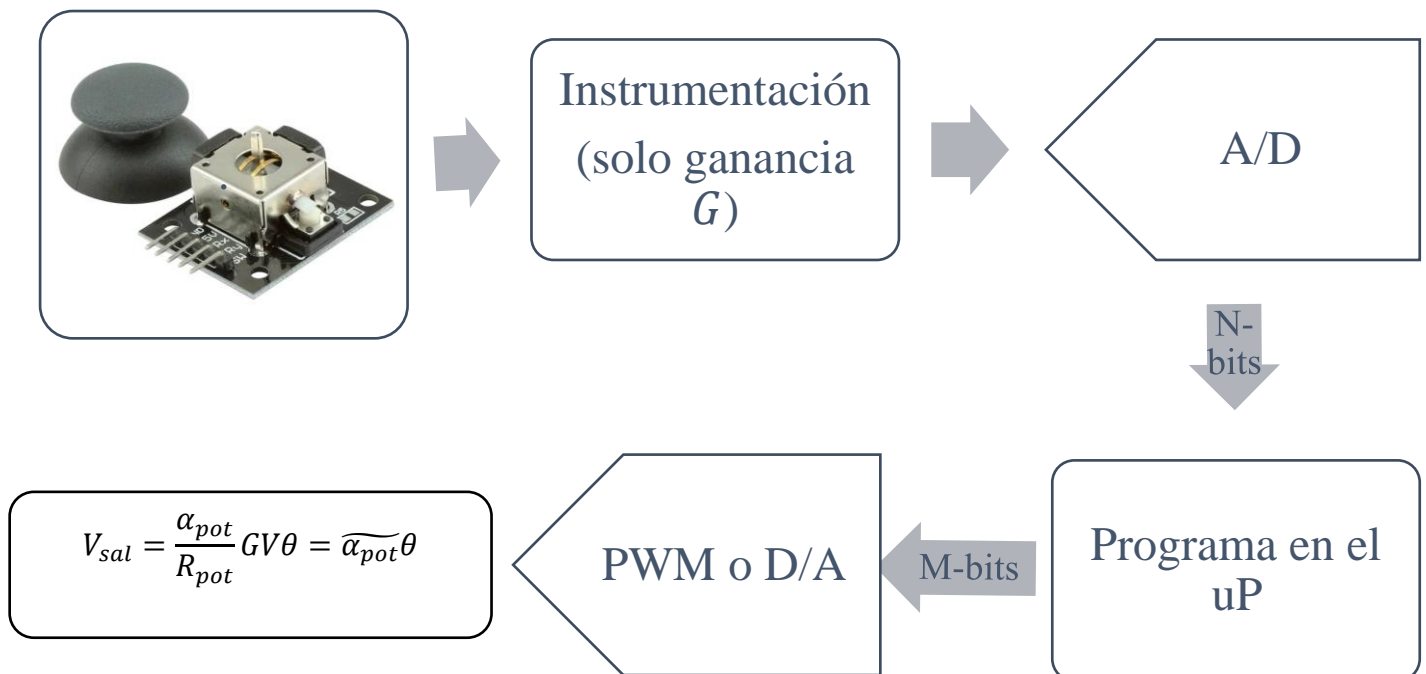
$R_1 = \alpha_{pot}\theta$ esto para un potenciómetro lineal

$R_1 = \alpha_{pot} \log(\theta)$ para un potenciómetro logarítmico

Ahora si aplicamos un voltaje V ente 1 y 3 tenemos que

$$V_{12} = V_{joystick} = \frac{R_1}{R_{pot}}V = \frac{\alpha_{pot}}{R_{pot}}V\theta$$

Es importante para lograr obtener la función de transferencia el ver al joystick como un sistema de procesamiento para ello asumimos que toda esta etapa de procesamiento solo afecta una proporción G a la señal de voltaje del joystick, es decir:



Ahora pasaremos al motor brushless para esto se tomará la siguiente ecuación la cual es una representación de las constantes mecánicas y eléctricas [13].

$$\tau_m = \frac{j(3R)}{K_e K_t} \quad \tau_e = \frac{L}{3R}$$

La cual contara con la adición de la variable ω (velocidad angular) dando como resultado las siguientes ecuaciones

Ecuación eléctrica

$$V_{salida} = V_s = R_m i_a + L_m \frac{d}{dt} i_a + E_F$$

En donde

L_m es la inductancia entre los embobinados del motor

E_F es la ecuación campo-movimiento la cual está dada por

$$E_F = K_F \omega$$

Así mismo tenemos que la ecuación mecánica es

$$\tau = J \frac{d\omega}{dt} + b\omega$$

Y la ecuación de proporción corriente-torque es

$$\tau = K_m i_a$$

Donde

R_m es la resistencia óhmica de los embobinados del motor

K_F es la constante de armadura es decir una constante eléctrica que considera un flujo magnético constante.

J es momento inercial del rotor

b es el coeficiente de fricción viscosa entre el rotor y el estator

K_m es la contante de campo es decir una constante mecánica que considera un flujo magnético constante.

i_a es inductancia

τ es torque

Sustituyendo en la ecuación eléctrica la función del joystick y la fuerza contra electromotriz tenemos que

$$\tilde{\alpha}_{pot}\theta = R_m i_a + L_m \frac{d}{dt} i_a + K_f \omega$$

Sustituyendo y despejando de la ecuación mecánica obtenemos

$$K_m i_a = J \frac{d\omega}{dt} + b\omega$$

Con todo lo previamente mostrado es posible calcular la función de transferencia, para ello aplicaremos la transformada de Laplace a la ecuación mecánica y despejaremos la corriente

$$K_m I_a(s) = Js\omega(s) + b\omega(s)$$

$$I_a(s) = \frac{Js + b}{K_m} \omega(s)$$

Ahora se aplicará la transformada de Laplace a la ecuación eléctrica y sustituyendo la corriente tenemos

$$\tilde{\alpha}_{pot}\theta(s) = R_m I_a(s) + L_m s I_a(s) + K_f \omega(s)$$

$$\tilde{\alpha}_{pot}\theta(s) = (R_m + L_m s) I_a(s) + K_f \omega(s)$$

$$\tilde{\alpha}_{pot}\theta(s) = (R_m + L_m s) \frac{Js + b}{K_m} \omega(s) + K_f \omega(s)$$

$$\tilde{\alpha}_{pot}\theta(s) = \left[(R_m + L_m s) \left(\frac{Js + b}{K_m} \right) + K_f \right] \omega(s)$$

$$\frac{\omega(s)}{\theta(s)} = \left[\frac{(R_m + L_m s)(Js + b) + K_f + K_m}{\tilde{\alpha}_{pot} K_m} \right]^{-1}$$

$$\frac{\omega(s)}{\theta(s)} = \left[\frac{\tilde{\alpha}_{pot} K_m}{(R_m + L_m s)(Js + b) + K_f + K_m} \right]$$

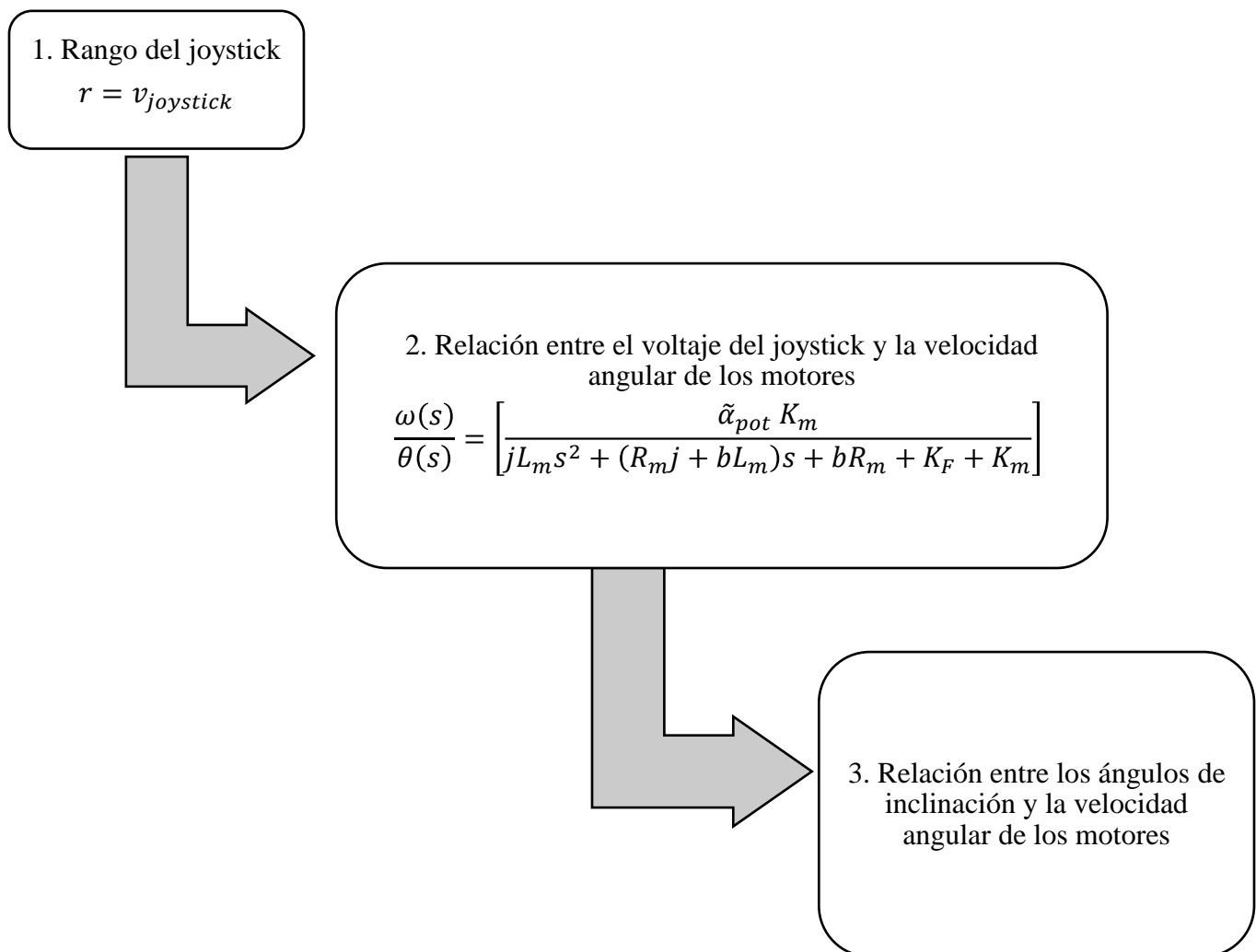
$$\frac{\omega(s)}{\theta(s)} = \left[\frac{\tilde{\alpha}_{pot} K_m}{JL_m s^2 + (R_m J + bL_m)s + bR_m + K_f + K_m} \right] \quad (39)$$

Esta última ecuación es nuestra función de transferencia donde:

Entradas: Inclinación del joystick representado en voltaje

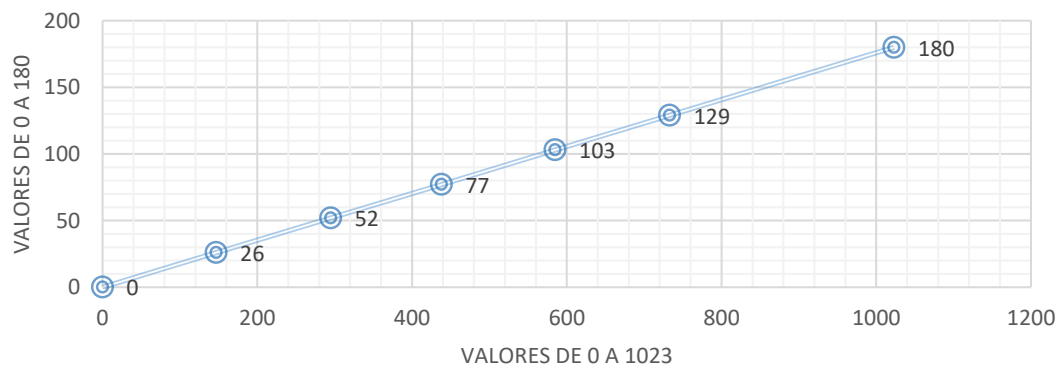
Salidas: Velocidades angulares de los motores.

A continuación, se mostrará un diagrama de bloques que mostrará el funcionamiento de nuestro sistema:

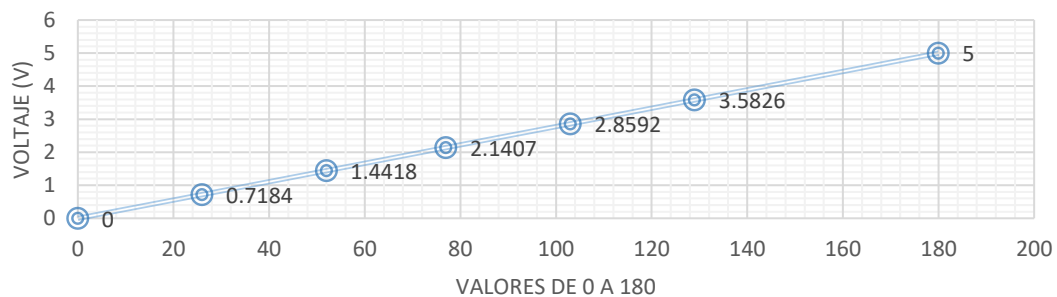


1. Para nuestro primer bloque tenemos la relación del rango de movimiento de joystick y el voltaje de salida del mismo este rango es medido gracias a los valores de señal que muestran en el código donde el rango de valores de señal es de 0 a 1023 que equivalen de manera lineal a valores de 0v a 5v el cual es el valor de voltaje de salida del joystick, otro punto a tomar en cuenta que debido al uso en la programación de estos valores se mapearon los valores de 0 a 1023 a valores de 0 a 180 y de 180 a 0 dependiendo del movimiento que se realizara; por tanto podemos tomar a $r = v_{joystick}$ como una representación de esta relación donde r es el rango de valores del joystick y $v_{joystick}$ es el voltaje de salida del joystick, esta relación se puede observar de mejor manera en las siguientes gráficas

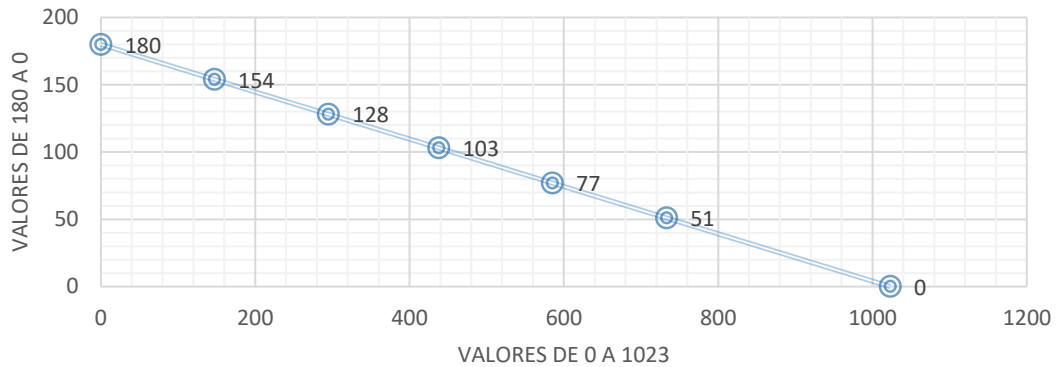
Mapeado de valores de 0-1023 a 0-180



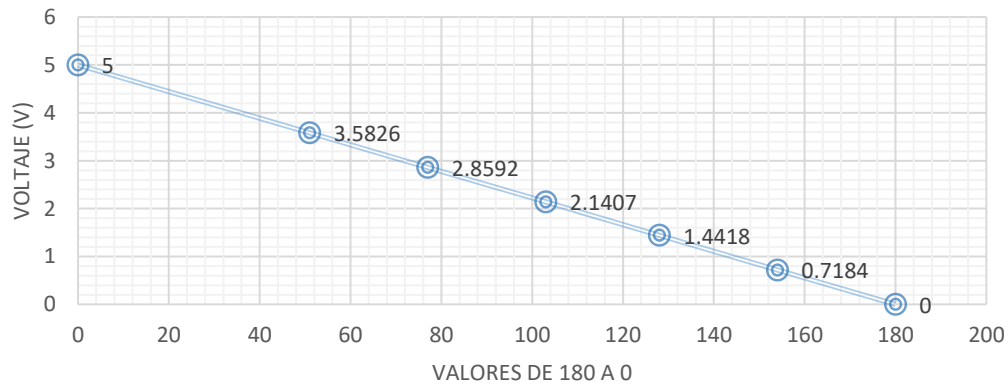
Equivalencia de valores mapeados y el voltaje



Mapeado de valores de 0-1023 a 180-0

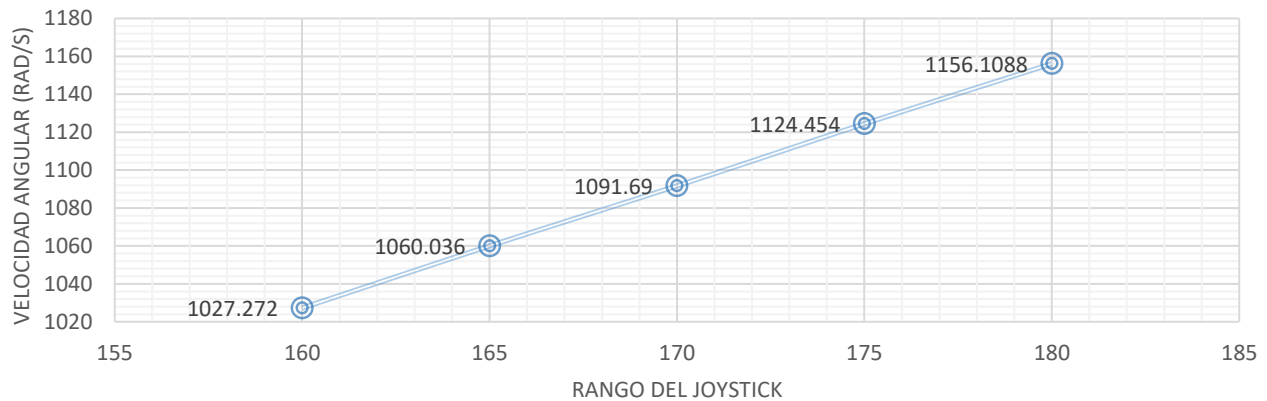


Equivalencia de valores mapeados y el voltaje



2. El segundo bloque nos muestra la relación directa y lineal del rango de joystick y la velocidad angular de nuestros motores esto lo podemos observar en la siguiente gráfica que nos muestra el ejemplo de dicha relación cuando los cuatro motores están aumentando su velocidad

Aceleración en los 4 motores



Así mismo esta relación se puede ver como una función de transferencia que nos muestra como entrada del sistema el voltaje de salida del joystick (esto gracias a su relación directa con el rango del joystick) y como salida la velocidad angular del motor dándonos como resultado la ecuación 39 la cual es la función de transferencia

$$\frac{\omega(s)}{\theta(s)} = \left[\frac{\tilde{\alpha}_{pot} K_m}{jL_m s^2 + (R_m j + bL_m)s + bR_m + K_F + K_m} \right]$$

- Para nuestro tercer bloque hay que retomar lo que se mencionó en la sección 6.3 con esto podemos deducir que los ángulos de Euler a la hora de pasar a un movimiento se generan los momentos de guiñada cabeceo y alabeo mostrado en las ecuaciones 25 a 27 respectivamente estos están directamente relacionados con los momentos pares generalizados los cuales son generados gracias a la velocidad angular como se puede observar en la sección previamente mencionada, en resumen, podemos constatar que los momentos o pares generalizados son:

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_\psi \\ \tau_\theta \\ \tau_\phi \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \tau_{M_i} \\ (f_2 - f_4)l_a \\ (f_3 - f_1)l_a \end{bmatrix}$$

Donde $f_i = k\omega_i^2$, donde k es una constante y ω_i es la velocidad angular del i -enésimo motor,

La relación que se mencionó puede expresarse gracias a la ecuación 21

$$\tilde{\tau} = \begin{bmatrix} \tilde{\tau}_\psi \\ \tilde{\tau}_\theta \\ \tilde{\tau}_\phi \end{bmatrix} = \mathbb{J}^{-1}(\tau - C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta})$$

Son estos cálculos los que se utilizan para la estrategia de control, con esto podemos concluir que la relación entre la velocidad angular y los ángulos de Euler es no lineal debido a que para cambiar el ángulo de inclinación y mover el cuadricóptero en una dirección específica, se requiere variar la velocidad angular, pero para realizar esto se debe realizar un control para ajustar la velocidad angular para así alcanzar o mantener el ángulo deseado y este control es no lineal debido a la naturaleza del sistema y de las ecuaciones que se utilizan para la descripción de los ángulos de Euler, además cambios bruscos en los ángulos de inclinación (especialmente en pitch y roll) requieren altas velocidades angulares momentáneas, y estas deben controlarse para evitar inestabilidad.

Como se ha mencionado a lo largo de esta tesis el prototipo no va a volar por tanto lo que acontece en el bloque no. 3 no se abordara de manera activa, solo se tomara como una consideración para lograr reforzar nuestro conocimiento para los bloques 1 y 2 los cuales son los que se trabajaron activamente en esta tesis, dejando al bloque no.3 solo en una parte teórica.

8. Componentes básicos de nuestro prototipo de cuadricóptero

Es importante para la realización de nuestro prototipo conocer y describir a los componentes más importantes que conformarán dicho prototipo, ya que de la correcta selección de estos componentes dependerá de manera significativa en el desempeño de nuestro cuadricóptero.

8.1 Partes básicas de un cuadricóptero

Antes de comenzar con la descripción de nuestros componentes, hay que conocer cuáles son los componentes básicos que debe tener un cuadricóptero.

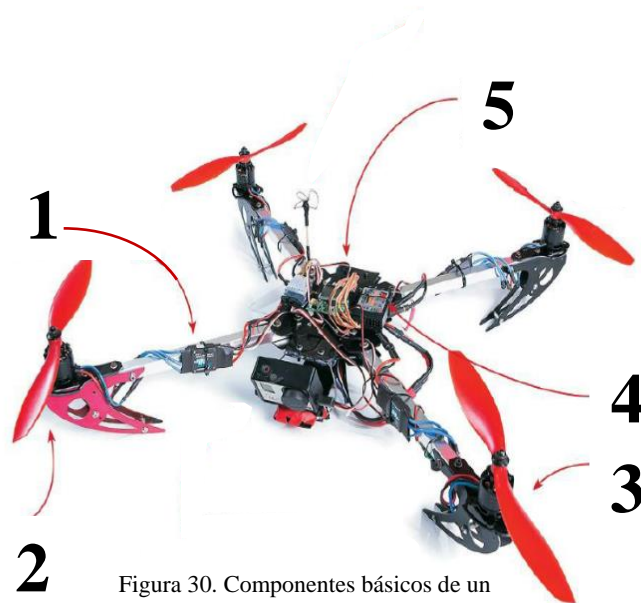


Figura 30. Componentes básicos de un cuadricóptero

Donde:

1. **ESC.**- El controlador electrónico de velocidad envía energía a los motores de acuerdo con las instrucciones del tablero de control.
2. **Base o apuntalar.** – Como su nombre lo dice sirve para que el cuadricóptero se apoye, los accesorios se pueden fabricar en muchos colores y materiales, incluida la fibra de carbono y la madera y estas pueden estar en las esquinas o en la parte de abajo del centro del cuadricóptero.
3. **Motores sin escobillas.** – la velocidad de estos cambia constantemente para mantener la nave en posición vertical.
4. **Receptor.** – Recibe las señales de radio control.
5. **Tabla de control.** - El "cerebro" del cuadricóptero, en el tablero de control se encuentra la parte electrónica que recibe las señales y hace el procesamiento para hacer volar al cuadricóptero.

Hay que tomar en cuenta que estos son solo los componentes básicos, ya que dependiendo su uso pueden agregarse cámaras, transmisores, sensores, etc., además el orden de estos depende del diseño del fabricante.

Tomando en cuenta las partes básicas de un cuadricóptero ahora ya se puede proceder a describir los componentes y herramientas principales para el desarrollo de nuestro prototipo.

8.2 Motor sin escobillas (*Brushles*)

Los motores que se utilizaran son de corriente continua (CC), este tipo de motores pertenece a la clase de los electromotores y sirve principalmente para transformar la energía eléctrica en energía mecánica; la estructura básica del motor CC se constituye del estator y el rotor, como componente fijo (inmóvil) el estator suele estar compuesto de un electroimán o de un imán permanente; con el rotor, también denominado ancla, se encuentra un componente giratorio (móvil) que en los motores CC convencionales también está hecho con un electroimán.

Específicamente el modelo a utilizar es un motor CC sin escobillas, este tipo de motores no utiliza escobillas para la conmutación del motor, es decir en vez de utilizar escobillas o conmutadores mecánicos para invertir la corriente en el rotor, utiliza un control eléctrico para la conmutación de las bobinas en el estator, lo cual proporciona varias ventajas como:

- Mayor eficiencia; ya que al eliminar las escobillas se reduce la fricción y el desgaste lo que alarga la vida útil del motor.
- Menor mantenimiento; al no poseer partes móviles que se desgasten fácilmente por lo cual no es necesario el remplazarlas
- Mayor velocidad y aceleración, esto debido a su diseño y control electrónico este tipo de motores pueden alcanzar velocidades más altas y ofrecer una respuesta de aceleración más rápida.
- Menor ruido, al no poseer escobillas no exige rozamiento contra los conmutadores lo que lo hace más silenciosos.

Hay que tomar en cuenta que una desventaja importante en este tipo de motores es que su control se lo puede lograr únicamente bajo un controlador electrónico de velocidad.

Es relevante destacar algunas de las características de fabricación ya que estas deben de tomarse en cuenta al momento de seleccionar el motor ideal, estas son:

La constante “Kv”. - Este es un indicador de la cantidad de RPM (revoluciones por minuto) por cada voltio aplicado, por ejemplo, si tenemos un motor con un Kv igual a 980, operando a 11.1 V, el motor girará a 10878 RPM.

La potencia nominal del motor. - Esa potencia está directamente relacionada con la carga máxima que puede soportar.

El voltaje requerido. - Este parámetro es para lograr una correcta operación, por lo tanto, la batería que se escoja debe cumplir este voltaje.

En la búsqueda de cual modelo de motor utilizar se inclinó por los modelos mostrados en la siguiente tabla

Tabla 12. Comparación de motores			
Característica	Hobbypower 2212 motor	A2212/13T	Brushless Motor Emax MT2213
Kv	920 RPM/v	1000 RPM/v	935 RPM/v
voltaje	14.7v	10v	11.1v
ESC recomendado	FTM 30A	-	18-20A
Potencia máxima	370W	150W	-

El modelo a utilizar es un Hobbypower 2212 motor 920kv este modelo es ideal a la hora de realizar cuadricópteros ligeros, además que en la categoría de potencia es superior a los demás motores otros aspectos por lo cual se eligió fue el hecho que en el laboratorio contamos con las baterías necesarias para alimentarlo, así como el modelo de ESC sugerido por la hoja de datos.



Figura 31. Motor Hobbypower 2212

A continuación, se mostrará una serie de tablas que mostraran cómo reacciona el motor a distintos tipos de hélice, así como siendo sometido a distintas cargas (peso) esto con la finalidad de conocer cómo reacciona y para que sirva de apoyo en la implementación del prototipo.

- En reposo el motor consume 60 mA con 12v
- Sin hélice, el motor solo consume mínimo 0.18A y a su máxima 0.59A con 12v

Gramos	¿Se levantó?		Voltaje (v)	Corriente consumida (A)		
	Si	No		Lectura 1	Lectura 2	Lectura 3
Sin carga	x		12	0.89	0.9	0.89
50	x		12	1.81	1.81	1.82
100	x		12	2.28	2.32	2.28
150	x		12	3.27	3.2	3.26
200	x		12	4.26	4.25	4.23
250	x		12	5.57	5.58	5.59
300	x		12	7.21	7	7.17
350		x	12	7.3		



Figura 32 . hélice naranja

En la tabla anterior se observa que se utilizó una fuente de 12v y ya que el motor soporta hasta 14.7v por lo tanto para que el motor pueda lograr levantar más peso se necesitaría una fuente que nos proporcionara un máximo de 15v.

Tabla 14. Hélice negra (grande)					
Gramos	¿Se levantó?		Voltaje (v)	Corriente consumida (A)	
	Si	No		Lectura 1	Lectura 2
Sin carga	x		12	1.18	
50	x		12	1.79	1.72
100	x		12	2.57	2.54
150	x		12	3.76	3.96
200	x		12	4.93	5.06
250	x		12	6.32	6.3
300	x		12	7.64	7.53
350	x		12	9.61	9.36



Figura 33. Hélice negra

Comparando ambas hélices una mejor opción es la hélice de color negro ya que el diseño de la hélice influye de manera significativa, así mismo el consumo de corriente es influenciado directamente por el peso que llega a levantar el motor, por ejemplo, si se quisiera levantar al

cuadricóptero el cual pesa una aproximado de 672 gramos, por tanto si cada motor levanta unos 200 gramos de manera individual conjuntamente levantarían un aproximado de 800 gramos lo suficiente para levantar nuestro cuadricóptero, esto consumiendo una corriente promedio de 4.995 A cada uno.

8.3 *Hobbypower Simonk 30A ESC*

Este es un controlador de velocidad electrónico diseñado para motores sin escobillas (ESC por sus siglas en ingles), este actúa como un intermediario entre la alimentación y el motor, controlando así la velocidad y dirección del motor en función de una señal recibida desde un receptor.

Este posee 2 cables para su conexión con la fuente de alimentación, además posee tres entradas en donde va conectado el motor sin escobillas, adicionalmente posee tres cables más delgados en donde ira una conexión a tierra, un suministro de energía y en donde se conectará el receptor para captar la señal del controlador, esto se muestra en la figura siguiente.



Figura 34. Descripción de las conexiones.

Una vez recibida la señal el ESC la procesa utilizando un microcontrolador, este interpreta los comandos tanto de dirección como de velocidad y además ajusta la salida de energía al motor.

Adicionalmente nuestro ESC utiliza una técnica de modulación llamada Simonk, este tipo de modulación es una modificación del firmware (un firmware es un software integrado en la memoria de un dispositivo electrónico con el fin de controlar y gestionar algún funcionamiento específico), esta se caracteriza principalmente en mejorar la respuesta y eficiencia de un ESC (principalmente en aplicaciones de aeromodelismo); este tipo de modulación reduce significativamente el retardo entre la señal recibida y la respuesta del

motor, a su vez también aumenta la frecuencia de conmutación, esta se refiere al proceso en el que el ESC cambia la dirección de la corriente para controlar su velocidad y posición esto permite una mejor respuesta a la hora de acelerar y frenar.

Nuestro ESC incluye un BEC (Battery Eliminator Circuit), esta suministra una corriente de baja tensión para alimentar otros componentes, esto para evitar el uso de alimentación por separado a la hora de utilizar otros componentes.

Algunas características de este modelo son:

Máxima precisión con oscilador de cristal (la temperatura no afecta al rango de funcionamiento PWM).

Frecuencia de actualización súper alta, sin almacenamiento en búfer de la señal de entrada, lo que resulta en una tasa de respuesta de más de 490 Hz.

Da una frecuencia al motor de 16 KHz, dando una respuesta más rápida del motor, y un funcionamiento más silencioso también.

Ya para finalizar con su descripción este también incluye protección contra sobrecalentamiento, bajo voltaje de la batería y bloqueo del motor en caso de error en la señal.



Figura 37. Hobbypower Simonk

8.4 Transceptor

El siguiente componente es un transmisor y un receptor que nos servirá para realizar la comunicación entre el control remoto y el cuadricóptero, esta comunicación será por medio de radiofrecuencia, para esta tarea se seleccionaron los módulos que se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 15. Comparación de módulos de transmisión y recepción			
Características	RYLR998	nRF24L01	SC2262 y SC2272
Rango de frecuencia	920-925 MHz	2.4-2.4835GHz	Entre 315 MHz
Voltaje de alimentación	1.8v-3.6v	1.9v-3.6v	5v
Tipo de módulo	transreceptor	transreceptor	SC2262-transmisor SC2272-receptor

Como se puede notar el módulo nRF24L01 posee un rango de frecuencia más alto lo cual nos permitirá hacer la transmisión sin perder tantos datos.

Ahora se realizará una descripción más detallada del módulo a utilizar:

Este es un chip con un protocolo de banda base integrado (la banda base es un protocolo utilizado para transmitir datos digitales sin necesidad de modularlos o convertirlos a una señal analógica previamente, estos se transmiten directamente como una secuencia de bits); este protocolo se basa en la comunicación de paquetes (bits) y admite varios modos, ya sea una operación manual hasta una operación autónoma avanzada.

Este chip está diseñado para aplicaciones inalámbricas de ultra baja potencia, así como trabajar en una banda de frecuencia que ronda los 2.4GHz-2.4835GHz

El nRF24L01 se configura y opera a través de una interfaz de periféricos en serie (este es un estándar de comunicación en donde se transfieren los datos bit por bit a través de un solo canal de comunicación), a través de esta interfaz se encuentra disponible el mapa de registro, este mapa contiene todos los registros de configuración y es accesible para todos los modos de operación del chip.

También incluye una estructura de datos FIFO (Firts-In, Firts-Out), es decir los primeros elementos que entran son los primeros en ser procesados o eliminados, este tipo de estructura de datos es muy útil a la hora de transmitir información en tiempo real o en la programación de tareas, esto garantiza un flujo de datos constante entre la interfaz de radio y la MCU (unidad de microcontrolador) del sistema, esto reduce el costo del sistema a la hora de manejar todas las operaciones de la capa de enlace de alta velocidad.

La interfaz de radio utiliza una modulación GFSK (Gaussian Frequency Shift Keying), esta tiene como característica el emplear cambios suaves en la frecuencia de la señal portadora para representar los bits de información, una ventaja de este tipo de modulación es su utilidad a la hora de utilizarlo en un entorno con interferencias (ruido u otras señales), otra ventaja es su eficiencia espectral, esto quiere decir que se requiere menos ancho de banda para transmitir una determinada cantidad de bits que otras técnicas de modulación, debido a esta característica lo hace adecuado para aplicaciones que requieren transmisiones de baja potencia (dispositivos alimentados por batería). A su vez posee parámetros que pueden ser configurados por el usuario, como lo son el canal de frecuencia, potencia de salida y la tasa de datos.

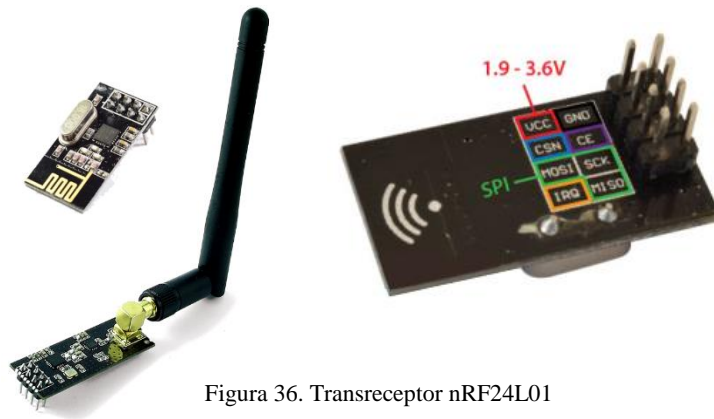


Figura 36. Transreceptor nRF24L01

8.5 *Arduino Nano*

Otro dispositivo importante es el microcontrolador ya que de este dependerá el funcionamiento tanto de control remoto como de los movimientos del cuadricóptero, en este aspecto se utilizara un Arduino nano ya que este microcontrolador es compacto y de un precio accesible, además que su plataforma de programación que utiliza es de uso libre por lo que no hay que hacer un gasto extra para utilizar la herramienta, al mismo tiempo nuestro transteceptor cuenta con una librería disponible en Arduino para poder realizar la comunicación entre ambos módulos.

Ya con esto en consideración se hará una breve descripción de una placa Arduino Nano

Un Arduino Nano es una placa de microcontrolador basada en Atmel ATmega328P, este lo hace funcionar a 16MHz y posee 32KB de memoria flash programable.

Posee 14 pines digitales de entrada/salida, donde seis de ellos pueden usarse como salidas PWM, adicionalmente cuenta con ocho pines analógicos que sirven de entrada; dispone de un puerto USB para la comunicación con la computadora, recibe una alimentación de 7 a 12 voltios, incluye un regulador de voltaje incorporado de 5V y 3.3V lo que le permite alimentar otros dispositivos.

Es totalmente compatible con el entorno de desarrollo Arduino, es decir se programa utilizando el lenguaje de programación, así como aprovechar todas las bibliotecas y recursos que se encierran disponible en la plataforma.

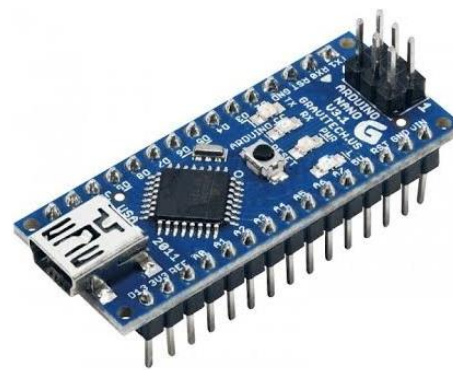
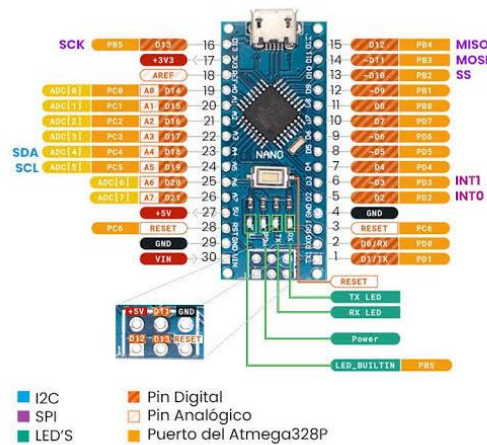


Figura 37. Arduino Nano

8.6 Software Arduino

El IDE (Integrated Development Environment) de Arduino es un entorno utilizado para programar placas Arduino.

Este posee una interfaz intuitiva, es decir cuenta con una interfaz gráfica de usuario lo que la hace amigable a la hora de utilizarla, así mismo incluye un editor de código que proporciona resaltado de sintaxis, autocompletado y demás características que facilitan su programación, cabe resaltar que la programación en Arduino se basa en el lenguaje de programación C++.

Adicionalmente el IDE de Arduino viene con una amplia variedad de bibliotecas y ejemplos predefinidos para facilitar del desarrollo de proyectos, estas bibliotecas proporcionan funciones y utilidades que proporcionan una óptima interacción con los componentes; a su vez el IDE compila el código escrito y lo transforma en un archivo binario que puede ser cargado en la placa Arduino.

El IDE de Arduino incluye una función de monitor serial, esto permite la comunicación bidireccional entre la placa y la computadora.

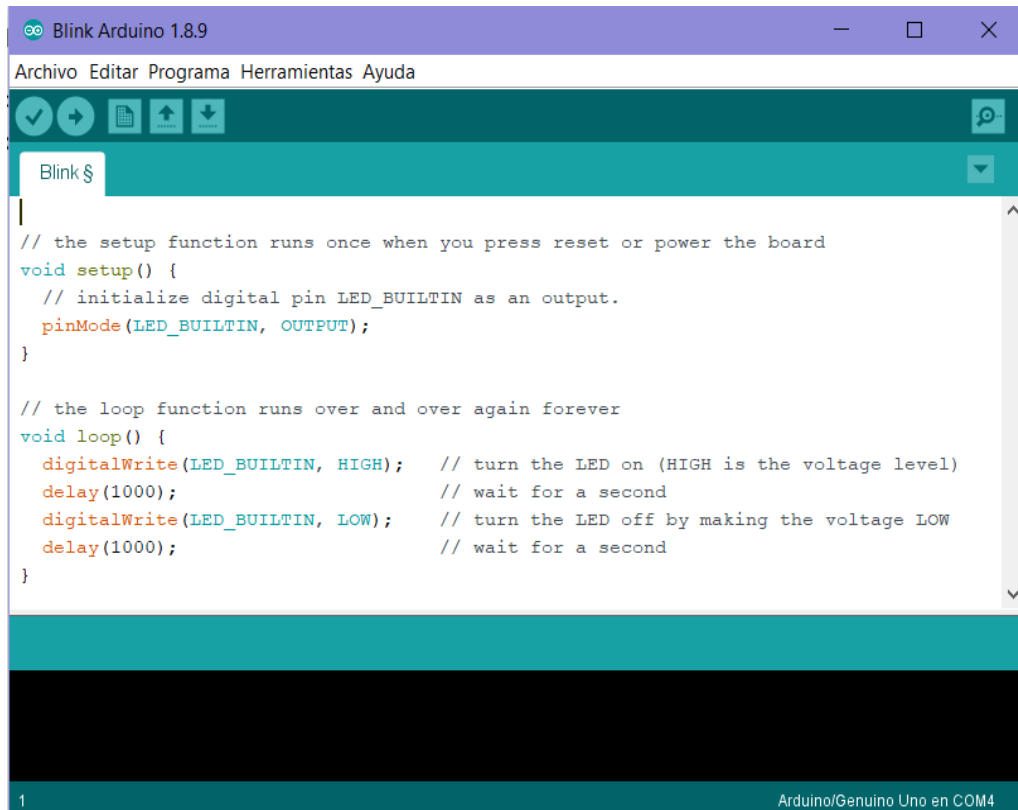


Figura 38. Representación de la IDE

8.7 Software EasyEDA

EasyEDA es una plataforma que ofrece herramientas de diseño de circuitos electrónicos, simulación y diseño de PCB (Placas de Circuito Impreso) de manera accesible y fácil de usar, esta herramienta posee más de 5 millones de bibliotecas gratuitas, más de 5 millones de componentes, así como la capacidad de seguir creando componentes, esto facilita que, durante el diseño, los diseñadores puedan consultar existencias de piezas, precios, valores, hojas de datos e información.

Algunas de las características de EasyEDA incluyen:

1. Un editor de esquemas este permite diseñar esquemas electrónicos de manera interactiva.

2. Simulación de circuitos esta herramienta permite simular el comportamiento de los circuitos electrónicos diseñados, esto es de utilidad a la hora de identificar posibles problemas y realizar ajustes antes de la implementación física.
3. Diseño de PCB esto nos permite diseñar placas de circuito impreso (PCB) utilizando un entorno gráfico.
4. Las bibliotecas de componentes ofrecen una amplia variedad de bibliotecas de componentes electrónicos para facilitar la selección y colocación de componentes en el diseño.
5. Colaboración en línea esta herramienta facilita la colaboración en proyectos entre diferentes miembros del equipo.
6. Integración con fabricantes de PCB, permite a los usuarios enviar directamente sus diseños a fabricantes de PCB para la producción de placas físicas.

7.8 Control remoto

Los controles remotos comerciales son diseñados para el cuadricóptero que van a manipular, generalmente utilizan controladores de radiocontrol disponibles en el mercado estos utilizan frecuencias de radio disponibles públicamente para brindarle un alcance de hasta 3.21869 km. Estos controladores cuentan con palancas, interruptores y discos que se pueden configurar para vehículos aéreos, terrestres y acuáticos no tripulados, es decir controlados a distancia. Eso tiene ventajas y desventajas, algunas de ellas serán descritas a continuación.

Hay que resaltar que, aunque no todos los drones están controlados por una unidad RC, ya que algunos optan por dispositivos Wi-Fi y otros que eligen vuelos totalmente automatizados, la unidad RC sigue siendo el núcleo de la interacción piloto-UAV.

Algo que se podría considerar una desventaja es el hecho que es crucial buscar y seleccionar un transmisor (Tx.), primeramente, hay que tener en cuenta el número de canales ya que cada canal puede influir en un aspecto del vuelo; por lo que se necesitan cuatro canales para los movimientos básicos del cuadricóptero: vertical, rotación, avance/retroceso y movimiento lateral.

Pero una ventaja importante es que a cualquiera de los interruptores físicos se le puede asignar un canal usando el menú de un controlador y esto se puede usar para cambiar entre

modos de vuelo. Es posible que se configuren otros canales para funciones adicionales en un multicoptero, como el lograr enlace a un servo, etc.

A continuación, se mostrarán los componentes básicos que debe poseer un control remoto.



Figura 39. Partes básicas de un control remoto

Donde:

1. **Canales de repuesto.** - En un cuadricóptero estándar, la mayoría de los interruptores, no realizan nada ya que por lo general no se necesitan tener canales extra para poder volar un cuadricóptero en condiciones y con una función no especializada.
2. **Cambio de modo.** - Permite al piloto elegir el nivel de asistencia que proporciona el cuadricóptero. Por ejemplo, podría activar un modo que permite mantener al cuadricóptero en el mismo lugar cuando no se están moviendo las palancas.

3. **Palanca para el movimiento.** – Esta le dice al cuadricóptero que movimientos realizar, ya sea avanzar, mover a la derecha, mover a la izquierda, retroceder.

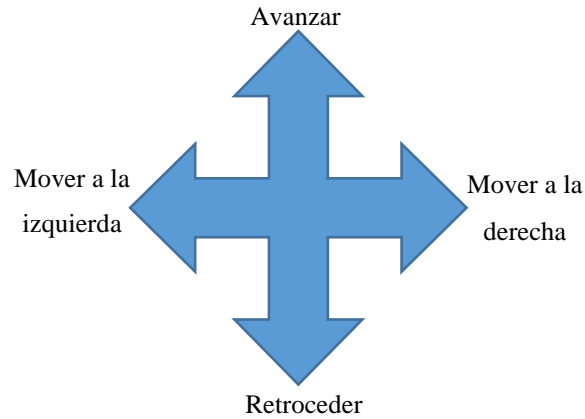


Figura 40. Movimientos básicos de la palanca de movimiento

4. **Configuración de pantalla y controles.** - La pantalla LCD y los botones a cada lado se utilizan para configurar el controlador antes del vuelo para que envíe las señales correctas al cuadricóptero, en algunos controles cuando no hay pantalla se utilizan leds para mostrar el estado de la configuración.
5. **Palanca para la aceleración.** – Como su nombre lo dice ayuda para controlar la aceleración para el despegue, el aterrizaje y para los giros derecho e izquierdo.

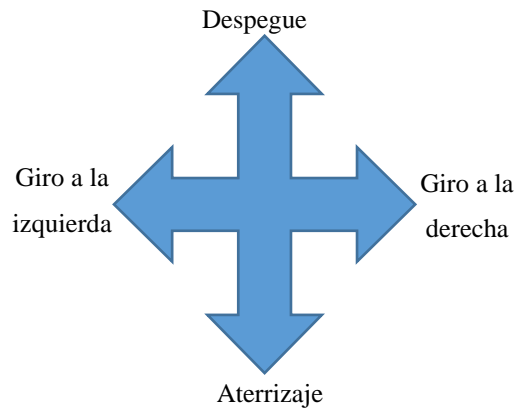


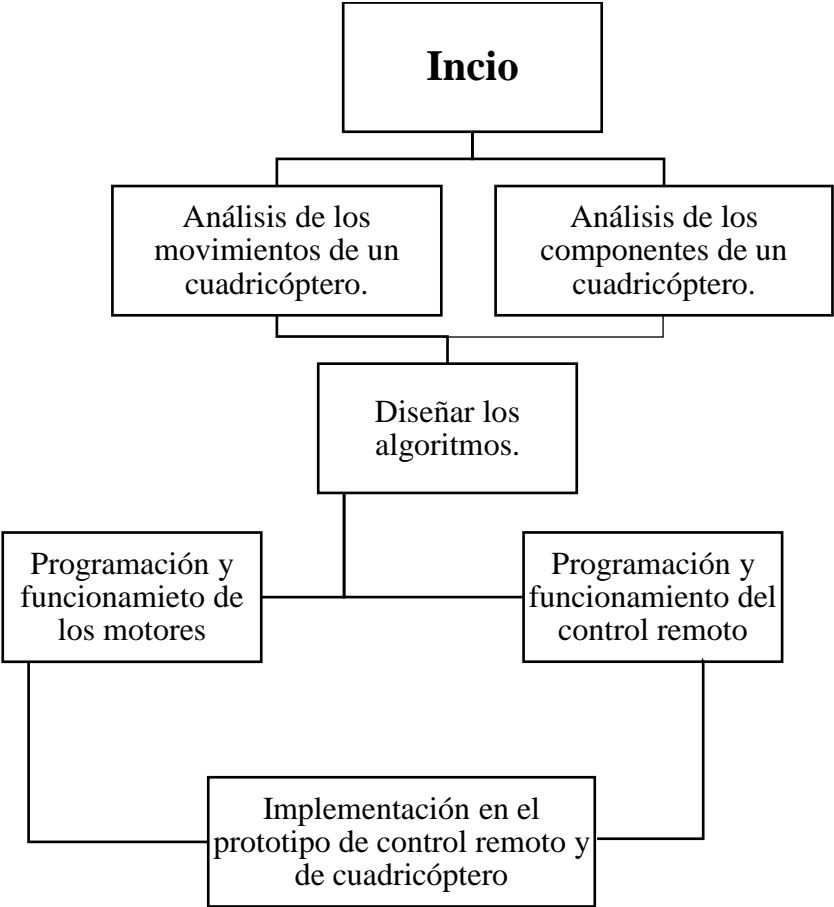
Figura 41. Movimientos de la palanca de aceleración

Cabe resaltar que el orden de estos componentes, así como el agregar componentes extras depende de la función del cuadricóptero, así como la visión o diseño de su fabricante.

Como se mencionó al inicio de este apartado por lo general los controles se diseñan para una nave en específico por lo cual adaptar un control remoto a otro cuadricóptero es prácticamente imposible por lo cual para nuestro prototipo se armó y programo un control remoto utilizando el mismo módulo transceptor.

9.Programación y parte electrónica del prototipo de cuadricóptero y el control remoto

A continuación, se mostrará un diagrama con lo más relevante que se ha abarcado y como esto influye en la formación de la programación y la implementación del prototipo.



Como podemos observar que para lograr una programación que influya en los movimientos del cuadricóptero, los algoritmos deben diseñarse tomando en cuenta cómo funcionan los movimientos de manera teórica y conocer a profundidad que componentes se van a utilizar para la implementación.

8.1 Descripción de la programación del prototipo

La programación es muy importante ya que de ella depende que instrucciones va a realizar el cuadricóptero y cómo será la configuración del control remoto, así como de esta parte se establece la comunicación remota entre ambos.

Proseguiremos a describir el funcionamiento de los códigos que se realizaron para cada función.

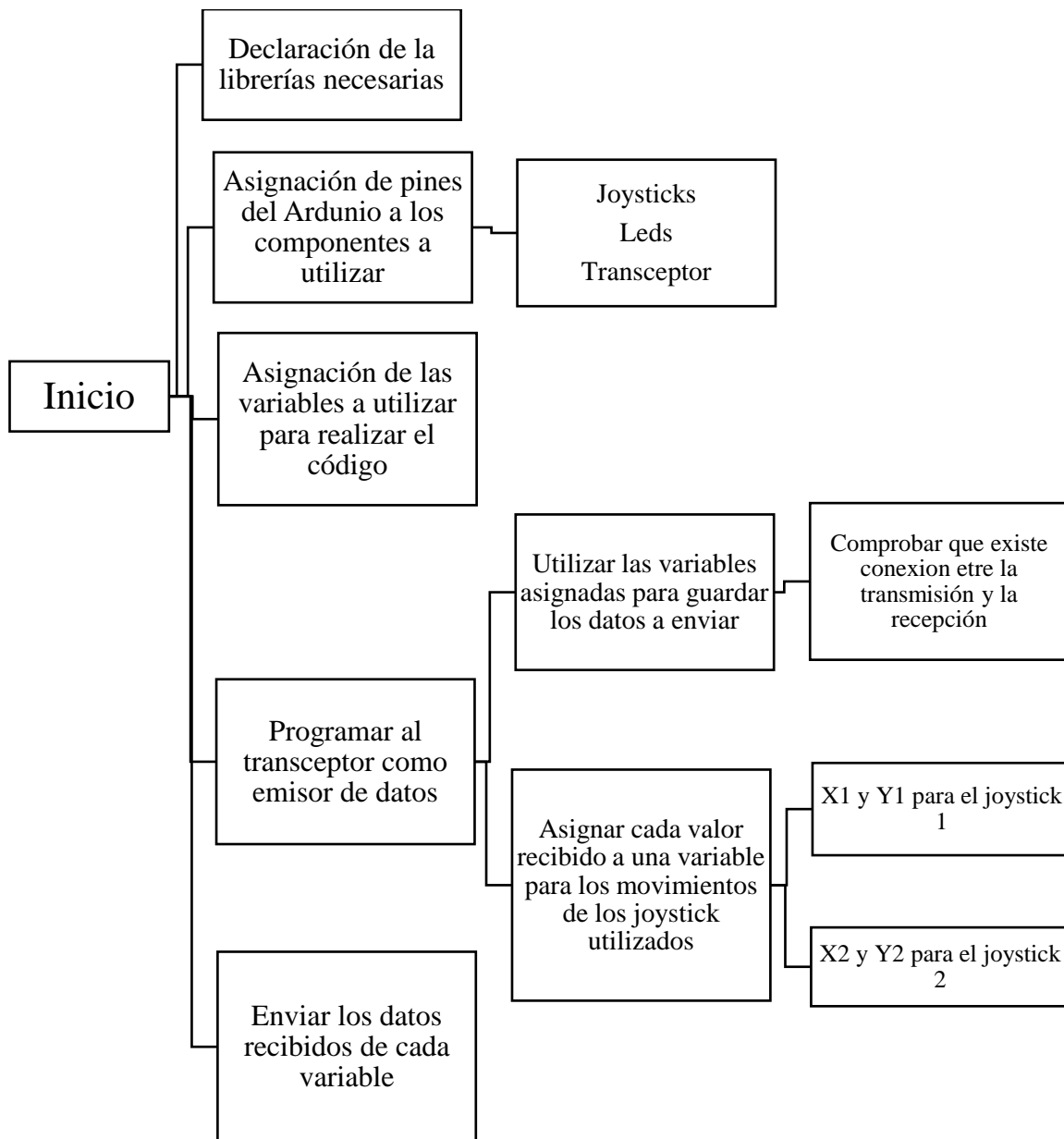
8.1.1 Transmisión (Control remoto)

Primero escribimos las librerías que se van a ocupar a la hora de poner en ejecución el programa, las cuales son:

La librería **SPI.h**, esta se utiliza para facilitar la comunicación serial síncrona, como lo son la velocidad de transferencia de datos, así como la capacidad de enviar y recibir datos a través de los pines de hardware específicos en la placa Arduino.

Las librerías **RF24.h**, **nRF24L01.h**, **RF24_config.h**, son las administradoras a la hora de configurar y realizar la comunicación entre los chips nRF24L01

A continuación, se mostrará un diagrama que nos dará una idea general de cómo funciona este código y como se relaciona el movimiento de los joysticks con el posterior código del movimiento de los motores.



En el diagrama presentado se puede concretar que el microcontrolador posee el programa que va a manipular cada componente a utilizar para el control remoto, a su vez lo más importante es establecer la comunicación y que cada canal asociado a un rango de movimiento de los joysticks son los datos a enviar los cuales darán la pauta para el movimiento de los cuatro motores.

El código para esta función puede encontrarse en el apéndice 11.3.

8.1.2 Recepción (control de los motores del cuadricóptero)

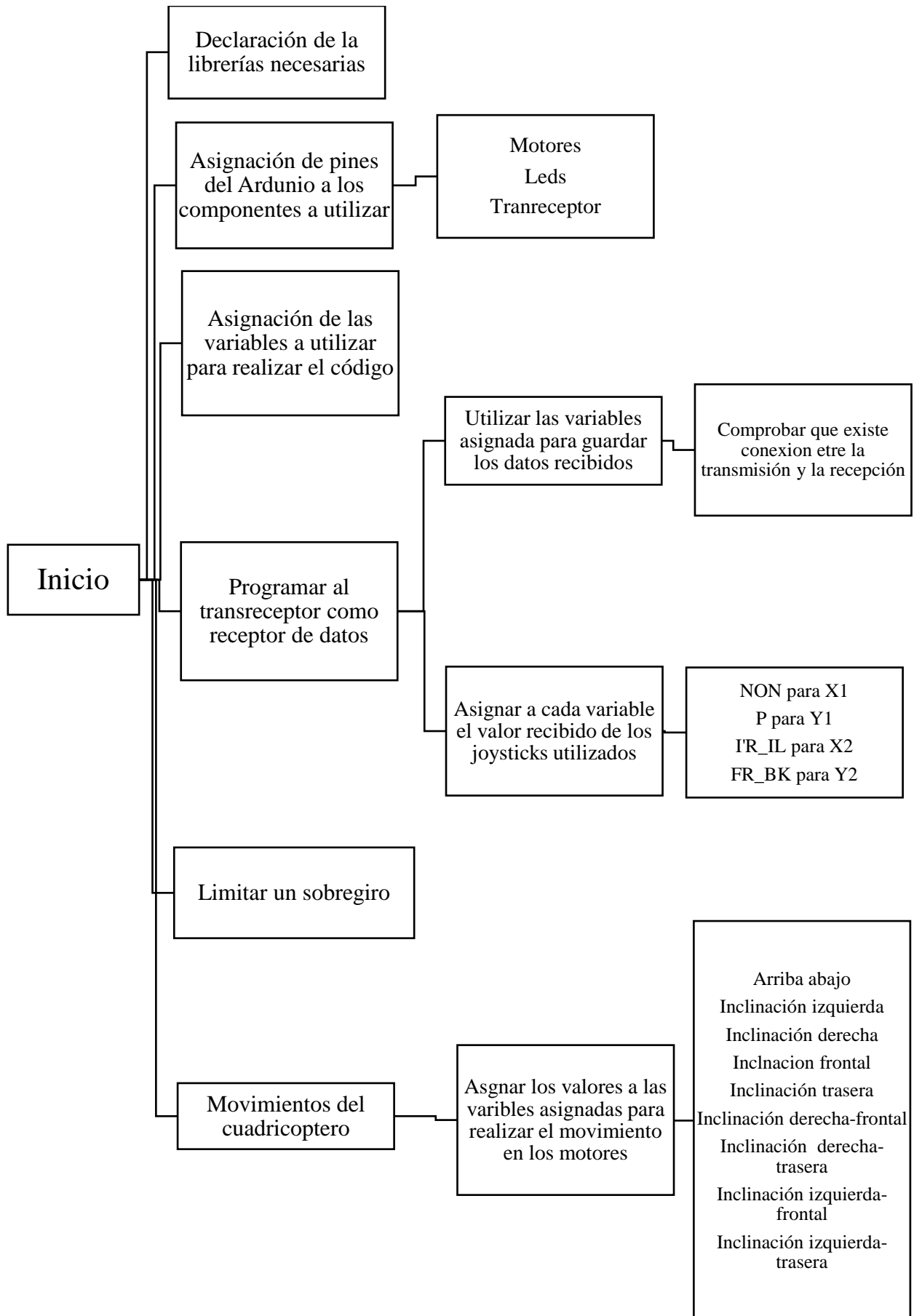
Lo primero que se realizó es escribir las librerías que se van a utilizar, las más importantes son:

La librería **SPI.h**, esta se utiliza para facilitar la comunicación serial síncrona, como lo son la velocidad de transferencia de datos, así como la capacidad de enviar y recibir datos a través de los pines de hardware específicos en la placa Arduino.

Las librerías **RF24.h**, **nRF24L01.h**, **RF24_config.h**, son las administradoras a la hora de configurar y realizar la comunicación entre los chips nRF24L01

La librería **Servo.h**, esta se encarga de manejar la señal PWM necesaria para controlar la posición de servomotor, en este caso nos ayudara a tener un mejor rendimiento en el control y la velocidad de nuestros cuatro motores Hobbypower 2212.

A continuación, se mostrará un diagrama que nos dará una idea general de cómo funciona este código y su influencia en el movimiento de los motores.



En el diagrama podemos observar que el programa en el microcontrolador dará la pauta para controlar los cuatros motores, así como configurar al transceptor para recibir las señales del control remoto que indican los movimientos de joystick al motor.

El código para esta función puede encontrarse en el apéndice 11.2.

8.2 Descripción de la parte electrónica del prototipo

El control remoto diseñado para manipular nuestro prototipo de forma remota es relativamente básico, un diagrama con sus componentes se mostrará a continuación.

8.2.1 Control remoto.

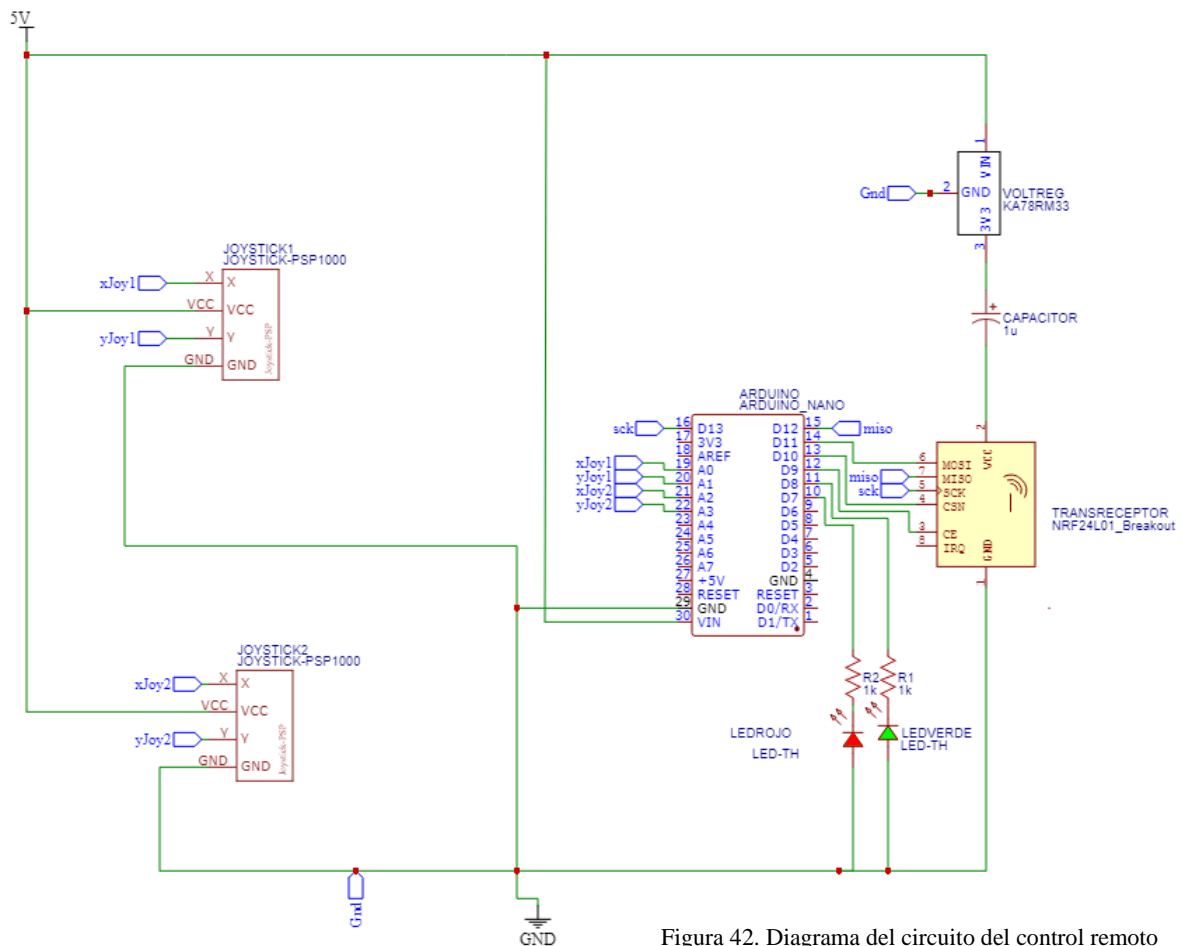


Figura 42. Diagrama del circuito del control remoto

Como podemos observar se compone básicamente de 2 joystick estos tendrán la finalidad de que una sea el que actúe como palanca de movimiento y el otro como palanca de aceleración, esto se debe a como está configurado nuestro código en donde uno sirve para acelerar y posteriormente se suma más potencia a los motores elegidos con el fin de realizar los

todos los componentes importantes para el funcionamiento del prototipo, como lo es un led para indicar que existe una conexión entre el control remoto y el prototipo, un botón para extender la función de reseteo que posee el Arduino nano, también tiene una conexión a cada uno de los controladores de velocidad que a su vez son conectados a los motores para controlar su movimiento, así como posee una conexión al transceptor que este a si ves está conectado a un regulador de voltaje para suministrarle los 3.3 v que necesita para funcionar, ya por ultimo tenemos conexión a otros leds que nos ayudan a comprobar la alimentación del sistema.

8.3. Descripción de la parte física del prototipo

8.3.1 Control remoto

Se corrobora su correcto funcionamiento realizando pruebas en una protoboard como se muestra en la figura 44.

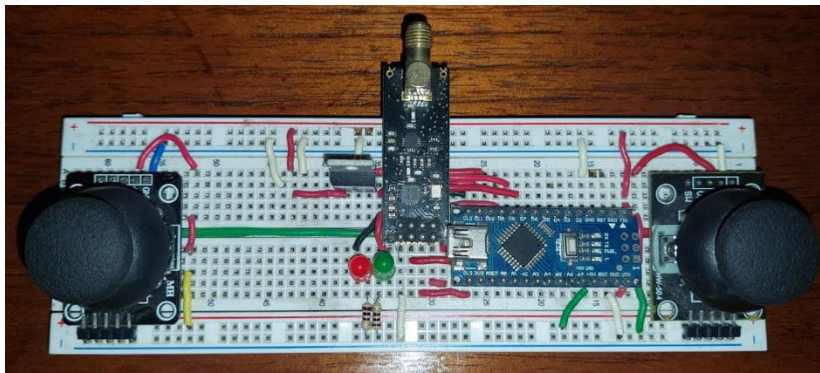


Figura 44. Protoboard del control remoto

Este mismo circuito será traspasado a una PCB (placa de circuito impreso) como se muestra en la figura 45 a), así mismo en la figura 45 b) se pudo observar el circuito ya implementado físicamente con los componentes correspondientes.

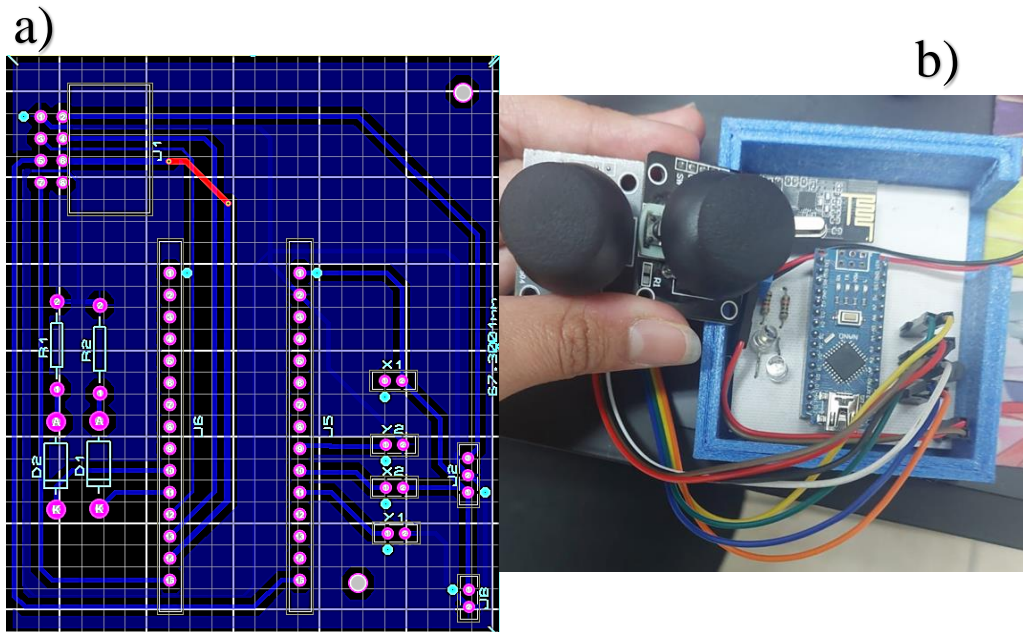


Figura 45. a) PCB del control remoto, b) PCB física del control remoto

8.3.2 Prototipo del cuadricóptero

Para la parte física del prototipo de la nave nos apoyamos de un Armazón de fuselaje de cuadricóptero como el que se muestra en la figura 46, con esta base tenemos una medida desde el centro (donde se encuentra la parte electrónica) hasta la punta de un brazo (donde se encuentran los motores) de 16 cm.



Figura 46. Armazón utilizado para el prototipo

Este armazón nos facilitara el montaje de la parte electrónica del prototipo, así como la colocación de los motores y gracias a su diseño nos permite tener una conexión a las baterías sin necesidad de utilizar cableado.

De la misma manera que con el control remoto se realizaron pruebas en una protoboard del circuito previamente descrito en la sección anterior, al pasar el circuito a físico fue necesario el uso de 2 protoboards chicas debido a lo extenso del circuito y el espacio reducido que se tiene en la parte superior del armazón; por lo tanto, el circuito queda de la siguiente manera

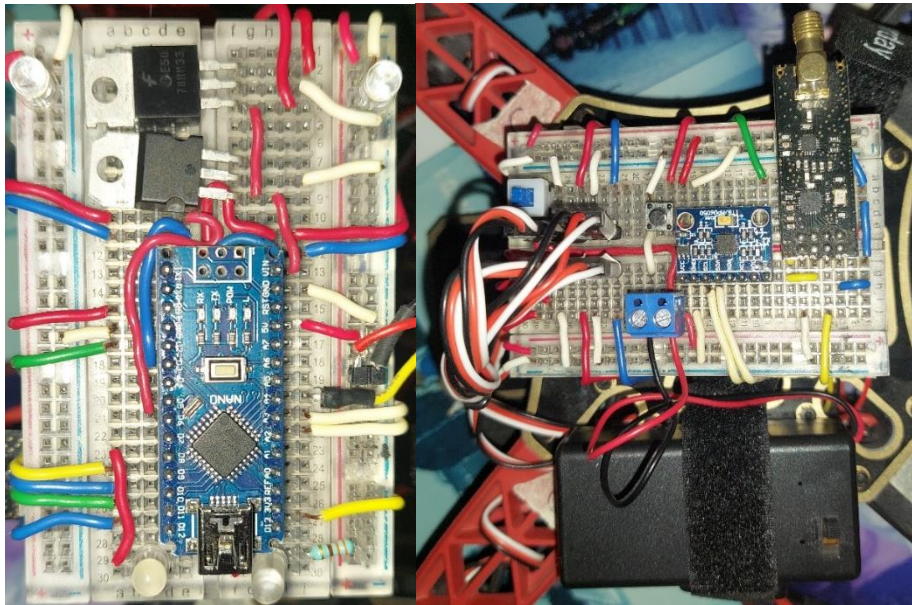


Figura 47. Protoboard del cuadricóptero

Este mismo circuito será traspasado a una PCB (placa de circuito impreso) como se muestra en la figura 48 a), así mismo en la figura 48 b) se puede observar el circuito ya implementado físicamente con los componentes correspondientes.

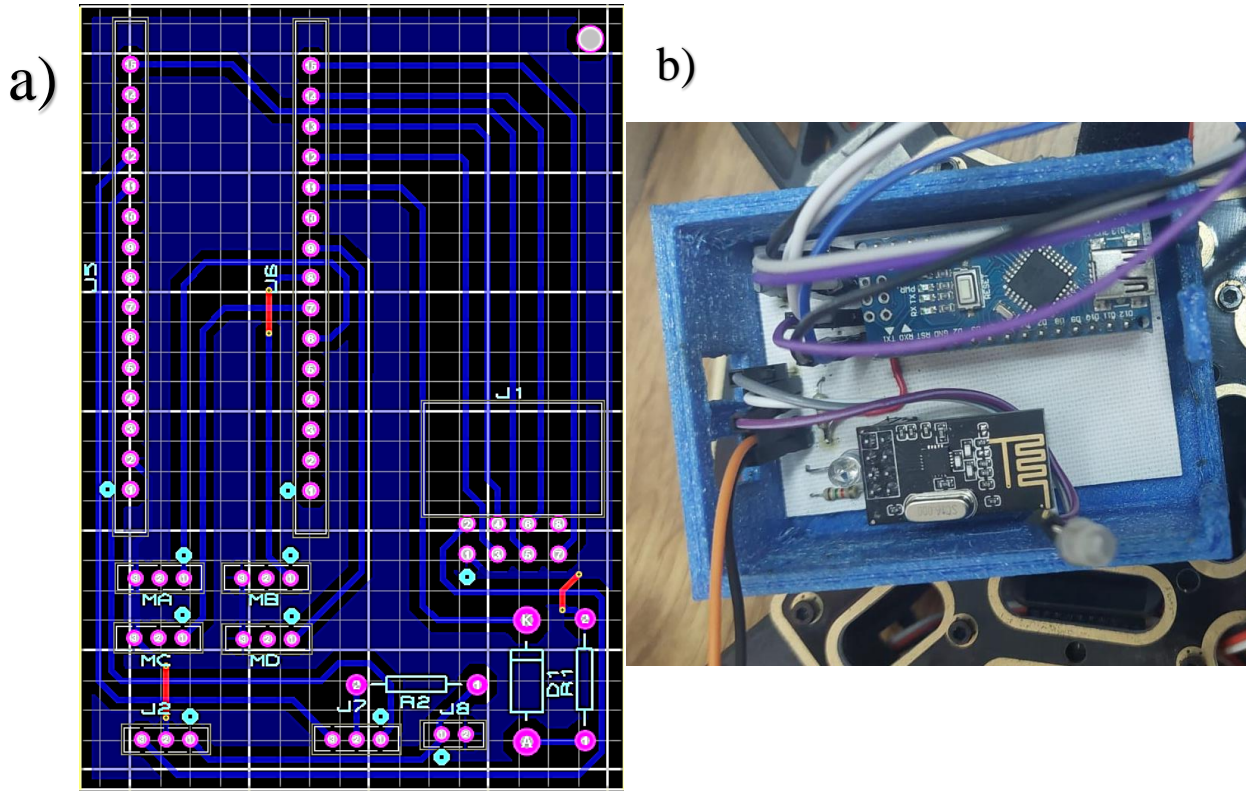


Figura 48. a) PCB del cuadricóptero, b) PCB física del cuadricóptero.

Así mismo este montaje con todo y pilas colocadas tiene un peso final de 672g.

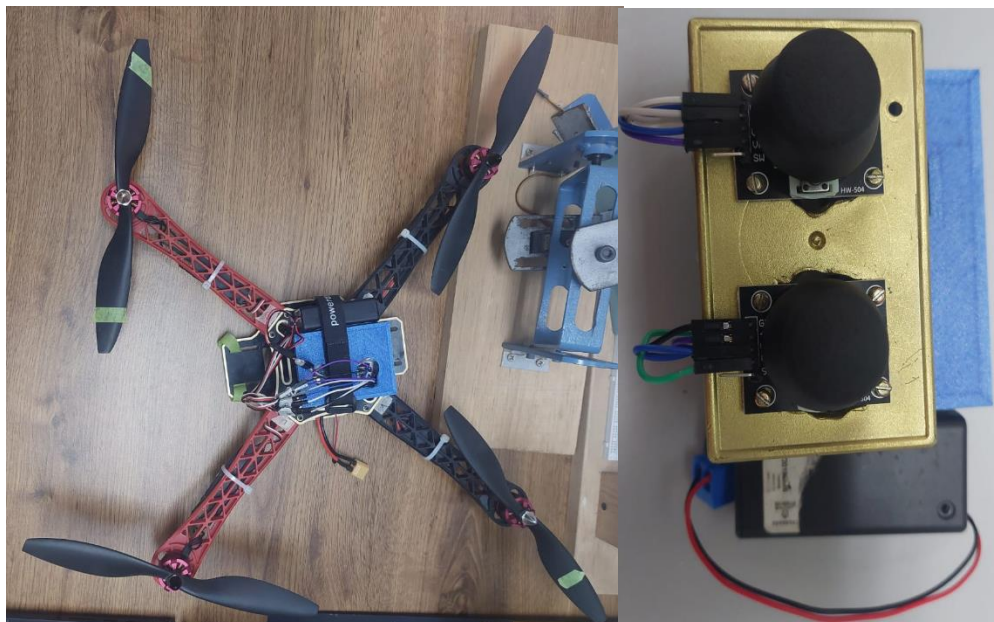


Figura 49. Montaje final del prototipo

10. Conclusión

A lo largo de esta investigación se logró dar cumplimiento a los objetivos previamente planteados, es decir se pudo realizar el prototipo tanto de cuadricóptero como de control remoto, así como establecer comunicación entre ambos, a su vez se realizó una investigación del modelo dinámico acoplado a lo que necesitábamos conocer realizar algunos de los movimientos básicos en tierra, además con la realización de esta investigación logramos poner en práctica algunos de los conocimientos vistos a lo largo de la licenciatura, así como lograr aplicar nuevos gracias a los previamente aprendidos.

A su vez logramos a dar a conocer algunos de los desafíos enfrentados a la hora de su realización, ya que a lo largo de este proyecto se enfrentaron diversos desafíos a la hora de realizar nuestro prototipo, los cuales nos obstaculizaban el lograr cumplir con nuestros objetivos a continuación, se presentarán los desafíos más relevantes, así como algunas soluciones que se encontraron para superar este problema.

Uno de estos fue el estudiar y comprender el modelo dinámico de un cuadricóptero, así como lograr entender que parte del mismo era necesaria para así conseguir realizar la programación necesaria para que el prototipo realizara algunos movimientos en tierra.

Otro desafío notable fue el tema de la transmisión de datos ya que en un inicio se utilizaron los módulos SC2262 y SC2272, sin embargo, a la hora de aumentar la velocidad de motor y al hacer pruebas para controlar los cuatro motores existía una pérdida de información por lo cual como solución optamos por cambiar los módulos por otros que tuvieran un mayor rango de frecuencia, esto con el objetivo de que llegaran los datos de manera correcta, por cual se optó por conseguir los módulos nRF24L01, esta problemática nos enseñó la importancia de realizar una correcta selección de componentes con el fin de conseguir el resultado más óptimo posible

Otra problemática destacable fue que a la hora de poner en movimiento los motores existía un sobregiro en algunos de los motores (por lo general en dos de ellos), esto se logró solucionar gracias a que se aplicó la librería **servo.h** en la programación ya que como se

mencionó en la descripción del programa esta se encarga de manejar la señal PWM necesaria para tener un mejor rendimiento en el control y la velocidad de nuestros cuatro motores.

Ya con estas problemáticas podemos notar que para cumplir cada objetivo era necesario conocer y superar problemáticas que surgían con forme avanzaba el desarrollo de este trabajo.

11. Apéndice

11.1 Matriz de inercia \mathbb{J} y Matriz de Coriolis

Un aspecto importante que se mencionó en la sección previa la matriz de inercia \mathbb{J} y la matriz de Coriolis $\mathcal{C}(\eta, \dot{\eta})$ de las cuales es importante conocer el cálculo y las propiedades las cuales se pueden resumir como:

Comencemos observando la figura 49 en donde, la masa del centro del robot es M_c , las masas de los motores m_m , la distancia de rotor al centro es l_a , el radio de la placa central es r y el radio del giro del rotor l_r .

El momento de inercia del cuadricóptero en el eje x será el mismo que entorno al eje y , ya que el cuadricóptero es simétrico con respecto a x y y , es decir:

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{2M_c r^2}{5} + 2m_m l_r^2 \quad (40)$$

El momento de inercia respecto del eje Z es diferente.

$$I_{zz} = \frac{2M_c r^2}{5} + 4m_m l_r^2 \quad (41)$$

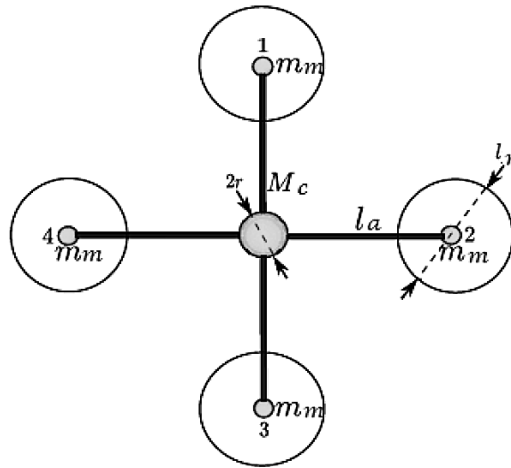


Figura 50. Masas y dimensiones del cuadricóptero.

Con estos tres valores podemos construir la matriz de inercia, \mathbf{I} , de la siguiente manera, donde sólo se tienen en cuenta los ejes principales de inercia:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (42)$$

Ahora hay que resaltar que para las coordenadas de η el modelo no lineal es

$$\mathbb{J}\dot{\eta} + C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} = \tau$$

El cual puede reescribirse en la forma general de tal manera que

$$M(\eta)\dot{\eta} + C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} = \tau$$

Donde

$$M(\eta) = \mathbb{J}(\eta) = W_\eta^T \mathbf{I} W_\eta$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{J}(\eta) &= W_\eta^T \mathbf{I} W_\eta \\
&= \begin{bmatrix} -\sin(\theta) & 0 & 1 \\ \cos(\theta) \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ \cos(\theta) \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin(\theta) & 0 & 1 \\ \cos(\theta) \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ \cos(\theta) \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) \sin(\phi) & \cos(\theta) \cos(\phi) \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I_{xx} \sin(\theta) & 0 & I_{xx} \\ I_{yy} \cos(\theta) \sin(\phi) & I_{yy} \cos(\phi) & 0 \\ I_{zz} \cos(\theta) \cos(\phi) & -I_{zz} \sin(\phi) & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I_{xx} s^2(\theta) + I_{yy} c^2(\theta) s^2(\phi) + I_{zz} c^2(\theta) c^2(\phi) & c(\theta) c(\phi) s(\phi) (I_{yy} - I_{zz}) & -I_{xx} s(\theta) \\ c(\theta) c(\phi) s(\phi) (I_{yy} - I_{zz}) & I_{yy} c^2(\phi) + I_{zz} s^2(\phi) & 0 \\ -I_{xx} s(\theta) & 0 & I_{xx} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Para poder calcular la matriz de Coriolis tenemos que

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L_{rot}}{\partial \dot{\eta}} \right] - \frac{\partial L_{rot}}{\partial \eta} = \tau$$

O

$$\frac{d}{dt} \left[\Omega^T \mathbf{I} \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{\eta}} \right] - \Omega^T \mathbf{I} \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} = \tau$$

Entonces tenemos que

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{\eta}} = \begin{bmatrix} -s_\theta & 0 & 1 \\ c_\theta s_\phi & c_\phi & 0 \\ c_\theta c_\phi & -s_\phi & 0 \end{bmatrix}$$

De donde obtenemos

$$\begin{aligned}
\Omega^T \mathbf{I} \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{\eta}} &= \begin{pmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi} s_\theta \\ \dot{\theta} c_\phi + \dot{\psi} c_\theta s_\phi \\ \dot{\psi} c_\theta c_\phi - \dot{\theta} s_\phi \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s_\theta & 0 & 1 \\ c_\theta s_\phi & c_\phi & 0 \\ c_\theta c_\phi & -s_\phi & 0 \end{bmatrix} \\
&= [\dot{\phi} - \dot{\psi} s_\theta \quad \dot{\theta} c_\phi + \dot{\psi} c_\theta s_\phi \quad \dot{\psi} c_\theta c_\phi - \dot{\theta} s_\phi] \begin{bmatrix} -I_{xx} s_\theta & 0 & I_{xx} \\ I_{yy} c_\theta s_\phi & I_{yy} c_\phi & 0 \\ I_{zz} c_\theta c_\phi & -I_{zz} s_\phi & 0 \end{bmatrix} \\
&= [b_1 \quad b_2 \quad b_3]
\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}
b_1 &= -I_{xx}(\dot{\phi}s_\theta - \dot{\psi}s_\theta^2) + I_{yy}(\dot{\theta}c_\theta s_\phi c_\phi + \dot{\psi}c_\theta^2 s_\phi^2) + I_{zz}(\dot{\psi}c_\theta^2 c_\phi^2 - \dot{\theta}c_\theta s_\phi c_\phi) \\
b_2 &= I_{yy}(\dot{\theta}c_\phi^2 + \dot{\psi}c_\theta s_\phi c_\theta) - I_{zz}(\dot{\psi}c_\theta s_\phi c_\phi - \dot{\theta}s_\phi^2) \\
b_3 &= I_{xx}(\dot{\phi} - \dot{\psi}s_\theta)
\end{aligned}$$

Si derivamos $\Omega^T \mathbf{I} \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{\eta}}$ tenemos

$$\begin{aligned}
\dot{b}_1 &= -I_{xx}(\ddot{\phi}s_\theta + \dot{\phi}\dot{\theta}c_\theta - \ddot{\psi}s_\theta^2 - 2\dot{\psi}\dot{\theta}s_\theta c_\theta) + I_{yy}(\ddot{\theta}c_\theta s_\phi c_\phi - \dot{\theta}^2 s_\theta s_\phi c_\phi \\
&\quad - \dot{\theta}\dot{\phi}c_\theta s_\phi^2 + \dot{\theta}\dot{\phi}c_\theta c_\phi^2 + \ddot{\psi}c_\theta^2 s_\phi^2 - 2\dot{\psi}\dot{\theta}s_\theta c_\theta s_\phi^2 + 2\dot{\psi}\dot{\phi}c_\theta^2 s_\phi c_\phi) \\
&\quad + I_{zz}(\ddot{\psi}c_\theta^2 c_\phi^2 - 2\dot{\psi}\dot{\theta}s_\theta c_\theta c_\phi^2 - 2\dot{\psi}\dot{\phi}c_\theta^2 s_\phi c_\phi - \ddot{\theta}c_\theta s_\phi c_\phi + \dot{\theta}^2 s_\theta s_\phi c_\phi \\
&\quad + \dot{\theta}\dot{\phi}c_\theta c_\phi^2 - \dot{\theta}\dot{\phi}c_\theta c_\phi^2) \\
\dot{b}_2 &= I_{yy}(\ddot{\theta}c_\phi^2 - 2\dot{\theta}\dot{\phi}s_\phi c_\phi - \ddot{\psi}c_\theta s_\phi c_\phi - \dot{\psi}\dot{\theta}s_\theta s_\phi c_\phi + \dot{\psi}\dot{\phi}c_\theta c_\phi^2 - \dot{\psi}\dot{\phi}c_\theta s_\phi^2) \\
&\quad - I_{zz}(\ddot{\psi}c_\theta s_\phi c_\phi - \dot{\psi}\dot{\theta}s_\theta s_\phi c_\phi - \dot{\psi}\dot{\phi}c_\theta s_\phi^2 + \dot{\psi}\dot{\phi}c_\theta c_\phi^2 - \ddot{\theta}s_\phi^2 - 2\dot{\theta}\dot{\phi}s_\phi c_\phi) \\
\dot{b}_3 &= I_{xx}(\ddot{\phi} - \ddot{\psi}s_\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}c_\theta)
\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{\eta}} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\psi}c_\theta & 0 \\ 0 & -\dot{\psi}s_\theta s_\phi & -\dot{\theta}s_\phi + \dot{\psi}c_\theta c_\phi \\ 0 & -\dot{\psi}s_\theta c_\phi & -\dot{\psi}c_\theta s_\phi - \dot{\theta}c_\phi \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\Omega^T \mathbf{I} \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{\eta}} &= \begin{pmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi}s_\theta \\ \dot{\theta}c_\phi + \dot{\psi}c_\theta s_\phi \\ \dot{\psi}c_\theta c_\phi - \dot{\theta}s_\phi \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\psi}c_\theta & 0 \\ 0 & -\dot{\psi}s_\theta s_\phi & -\dot{\theta}s_\phi + \dot{\psi}c_\theta c_\phi \\ 0 & -\dot{\psi}s_\theta c_\phi & -\dot{\psi}c_\theta s_\phi - \dot{\theta}c_\phi \end{bmatrix} \\
&= [h_1 \quad h_2 \quad h_3]
\end{aligned}$$

Donde

$$h_1 = 0$$

$$\begin{aligned}
h_2 &= -I_{xx}(\dot{\psi}\dot{\phi}c_\theta - \dot{\psi}^2 s_\theta c_\theta) - I_{yy}(\dot{\psi}\dot{\theta}s_\theta s_\phi c_\phi + \dot{\psi}^2 s_\theta c_\theta s_\phi^2) - \\
&\quad I_{zz}(\dot{\psi}^2 s_\theta c_\theta c_\phi^2 - \dot{\psi}\dot{\theta}s_\theta s_\phi c_\phi)
\end{aligned}$$

$$h_3 = I_{yy}(-\dot{\theta}^2 s_\phi c_\phi - \dot{\psi} \dot{\theta} c_\theta s_\phi^2 + \dot{\psi} \dot{\theta} c_\theta c_\phi^2 + \dot{\psi}^2 c_\theta^2 s_\phi c_\phi) + I_{zz}(-\dot{\psi}^2 c_\theta^2 s_\phi c_\phi + \dot{\psi} \dot{\theta} c_\theta s_\phi^2 - \dot{\psi} \dot{\theta} c_\theta c_\phi^2 + \dot{\theta}^2 s_\phi c_\phi)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para el momento son

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{b}_1 - h_1 \\ \dot{b}_2 - h_2 \\ \dot{b}_3 - h_3 \end{bmatrix}$$

Donde tenemos que

$$\begin{aligned} \tau_1 = & -I_{xx}(\ddot{\phi} s_\theta + \dot{\phi} \dot{\theta} c_\theta - \dot{\psi} s_\theta^2 - 2\dot{\psi} \dot{\theta} s_\theta c_\theta) + I_{yy}(\ddot{\theta} c_\theta s_\phi c_\phi \\ & - \dot{\theta}^2 s_\theta s_\phi c_\phi - \dot{\theta} \dot{\phi} c_\theta s_\phi^2 + \dot{\theta} \dot{\phi} c_\theta c_\phi^2 + \dot{\psi} c_\theta^2 s_\phi^2 \\ & - 2\dot{\psi} \dot{\theta} s_\theta c_\theta s_\phi^2 + 2\dot{\psi} \dot{\phi} c_\theta^2 s_\phi c_\phi) + I_{zz}(\ddot{\psi} c_\theta^2 c_\phi^2 - 2\dot{\psi} \dot{\theta} s_\theta c_\theta c_\phi^2 \\ & - 2\dot{\psi} \dot{\phi} c_\theta^2 s_\phi c_\phi - \ddot{\theta} c_\theta s_\phi c_\phi + \dot{\theta}^2 s_\theta s_\phi c_\phi \\ & + \dot{\theta} \dot{\phi} c_\theta s_\phi^2 - \dot{\theta} \dot{\phi} c_\theta c_\phi^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_2 = & I_{xx}(\dot{\psi} \dot{\phi} c_\theta - \dot{\psi}^2 s_\theta c_\theta) + I_{yy}(\ddot{\theta} c_\phi^2 - 2\dot{\theta} \dot{\phi} s_\phi c_\phi + \dot{\psi} c_\theta s_\phi c_\phi \\ & + \dot{\psi} \dot{\phi} c_\theta c_\phi^2 - \dot{\psi} \dot{\phi} c_\theta s_\phi^2 + \dot{\psi}^2 s_\theta c_\theta s_\phi^2) \\ & - I_{zz}(\ddot{\psi} c_\theta s_\phi c_\phi - \dot{\psi}^2 s_\theta c_\theta c_\phi^2 - \dot{\psi} \dot{\theta} c_\theta s_\phi^2 + \dot{\psi} \dot{\theta} c_\theta c_\phi^2 - \ddot{\theta} s_\phi^2 \\ & - 2\dot{\theta} \dot{\phi} s_\phi c_\phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_3 = & I_{xx}(\ddot{\phi} - \ddot{\psi} s_\theta - \dot{\psi} \dot{\theta} c_\theta) - I_{yy}(-\dot{\theta}^2 s_\phi c_\phi - \dot{\psi} \dot{\theta} c_\theta s_\phi^2 \\ & + \dot{\psi} \dot{\theta} c_\theta c_\phi^2 + \dot{\psi}^2 c_\theta^2 s_\phi c_\phi) \\ & - I_{zz}(-\dot{\psi}^2 c_\theta^2 s_\phi c_\phi + \dot{\psi} \dot{\theta} c_\theta s_\phi^2 - \dot{\psi} \dot{\theta} c_\theta c_\phi^2 + \dot{\theta}^2 s_\phi c_\phi) \end{aligned}$$

O también pueden expresarse como

$$\begin{aligned} \tau_1 = & \ddot{\psi}(I_{xx} s_\theta^2 + I_{yy} c_\theta^2 s_\phi^2 + I_{zz} c_\theta^2 c_\phi^2) + \ddot{\theta}(I_{yy} c_\theta s_\phi c_\phi \\ & - I_{zz} c_\theta s_\phi c_\phi) - \ddot{\phi} I_{xx} s_\theta + \dot{\psi}(I_{xx} \dot{\theta} s_\theta c_\theta \\ & + I_{yy}(-\dot{\theta} s_\theta c_\theta s_\phi^2 + \dot{\phi} c_\theta^2 s_\phi c_\phi) - I_{zz}(\dot{\theta} s_\theta c_\theta c_\phi^2 + \dot{\phi} c_\theta^2 s_\phi c_\phi)) \\ & + \dot{\theta}(I_{xx} \dot{\psi} s_\theta c_\theta - I_{yy}(\dot{\theta} s_\theta s_\phi c_\phi + \dot{\phi} c_\theta s_\phi^2 - \dot{\phi} c_\theta c_\phi^2 + \dot{\psi} s_\theta c_\theta s_\phi^2) \\ & + I_{zz}(\dot{\phi} c_\theta s_\phi^2 - \dot{\phi} c_\theta c_\phi^2 - \dot{\psi} s_\theta c_\theta c_\phi^2 + \dot{\theta} s_\theta s_\phi c_\phi)) \\ & - \dot{\phi}(I_{xx} \dot{\theta} c_\theta - I_{yy} \dot{\psi} c_\theta^2 s_\phi c_\phi + I_{zz} \dot{\psi} c_\theta^2 s_\phi c_\phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_2 = & \ddot{\psi}(I_{yy}c_\theta s_\phi c_\phi - I_{zz}c_\theta s_\phi c_\phi) + \ddot{\theta}(I_{yy}c_\phi^2 + I_{zz}s_\phi^2) \\
& + \dot{\psi}(-I_{xx}\dot{\psi}s_\theta c_\theta + I_{yy}\dot{\psi}s_\theta c_\theta s_\phi^2 + I_{yy}\dot{\psi}s_\theta c_\theta c_\phi^2) \\
& \quad - \dot{\theta}(I_{yy}\dot{\phi}s_\phi c_\phi - I_{zz}\dot{\phi}s_\phi c_\phi) \\
& + \dot{\phi}(I_{xx}\dot{\psi}c_\theta + I_{yy}(-\dot{\theta}s_\phi c_\phi + \dot{\psi}c_\theta c_\phi^2 - \dot{\psi}c_\theta s_\phi^2)) \\
& \quad + I_{zz}(\dot{\psi}c_\theta s_\phi^2 - \dot{\psi}c_\theta c_\phi^2 + \dot{\theta}s_\phi c_\phi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_3 = & -\ddot{\psi}I_{xx}s_\theta + \ddot{\phi}I_{xx} \\
& - \dot{\psi}(I_{yy}\dot{\psi}c_\theta^2 s_\phi c_\phi - I_{zz}\dot{\psi}c_\theta^2 s_\phi c_\phi) \\
& + \dot{\theta}(-I_{xx}\dot{\psi}c_\theta + I_{yy}(\dot{\theta}s_\phi c_\phi + \dot{\psi}c_\theta s_\phi^2 - \dot{\psi}c_\theta c_\phi^2)) \\
& - I_{zz}(\dot{\psi}c_\theta s_\phi^2 - \dot{\psi}c_\theta c_\phi^2 + \dot{\theta}s_\phi c_\phi)
\end{aligned}$$

Con esto el modelo no lineal puede escribirse como

$$M(\eta)\ddot{\eta} + C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} = \tau$$

Siendo

$$M(\eta) = \begin{bmatrix} I_{xx}s_\theta^2 + I_{yy}c_\theta^2 s_\phi^2 + I_{zz}c_\theta^2 c_\phi^2 & c_\theta s_\phi c_\phi (I_{yy} - I_{zz}) & -I_{xx}s_\theta \\ c_\theta s_\phi c_\phi (I_{yy} - I_{zz}) & I_{yy}c_\phi^2 + I_{zz}s_\phi^2 & 0 \\ -I_{xx}s_\theta & 0 & I_{xx} \end{bmatrix} \quad (43)$$

Y

$$C(\eta, \dot{\eta}) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

En donde

$$c_{11} = I_{xx}\dot{\theta}s_\theta c_\theta + I_{yy}(-\dot{\theta}s_\theta c_\theta s_\phi^2 + \dot{\phi}c_\theta^2 s_\phi c_\phi) - I_{zz}(-\dot{\theta}s_\theta c_\theta c_\phi^2 + \dot{\phi}c_\theta^2 s_\phi c_\phi)$$

$$c_{12} = I_{xx}\dot{\psi}s_\theta c_\theta - I_{yy}(\dot{\theta}s_\theta s_\phi c_\phi + \dot{\phi}c_\theta s_\phi^2 - \dot{\phi}c_\theta c_\phi^2 + \dot{\psi}s_\theta c_\theta s_\phi^2)$$

$$c_{13} = I_{xx}\dot{\theta}c_\theta + I_{yy}\dot{\psi}c_\theta^2 s_\phi c_\phi - I_{zz}\dot{\psi}c_\theta^2 s_\phi c_\phi$$

$$c_{21} = -I_{xx}\dot{\psi}s_\theta c_\theta + I_{zz}\dot{\psi}s_\theta c_\theta c_\phi^2$$

$$c_{22} = -I_{yy}\dot{\phi}s_\phi c_\phi + I_{zz}\dot{\phi}s_\phi c_\phi$$

$$c_{23} = I_{xx}\dot{\psi}c_\theta + I_{yy}(-\dot{\theta}s_\phi c_\phi + \dot{\psi}c_\theta c_\phi^2 - \dot{\psi}c_\theta s_\phi^2) + I_{zz}(\dot{\psi}c_\theta s_\phi^2 - \dot{\psi}c_\theta c_\phi^2 + \dot{\theta}s_\phi c_\phi)$$

$$c_{31} = I_{yy}\dot{\psi}c_{\theta}^2s_{\phi}c_{\phi} + I_{zz}\dot{\psi}c_{\theta}^2s_{\phi}c_{\phi}$$

$$c_{32} = -I_{xx}\dot{\psi}c_{\theta} + I_{yy}(\dot{\theta}s_{\phi}c_{\phi} + \dot{\psi}c_{\theta}s_{\phi}^2 - \dot{\psi}c_{\theta}c_{\phi}^2) - I_{zz}(\dot{\psi}c_{\theta}s_{\phi}^2 - \dot{\psi}c_{\theta}c_{\phi}^2 + \dot{\theta}s_{\phi}c_{\phi})$$

$$c_{33} = 0$$

Podemos notar que $M(\eta)$ obtenida en 43 y la ecuación 43 es la misma matriz simétrica tal que

$$\begin{aligned} \det(M(\eta)) &= \\ &= (I_{xx}s_{\theta}^2 + I_{yy}c_{\theta}^2s_{\phi}^2 + I_{zz}c_{\theta}^2c_{\phi}^2)(I_{xx}I_{yy}c_{\phi}^2 + I_{xx}I_{zz}s_{\phi}^2) \\ &\quad - c_{\theta}^2c_{\phi}^2s_{\phi}^2(I_{yy} - I_{zz})^2I_{xx} - I_{xx}^2s_{\theta}^2(I_{yy}c_{\phi}^2 + I_{zz}s_{\phi}^2) \\ &= I_{xx}^2I_{yy}s_{\theta}^2c_{\phi}^2 + I_{yy}^2I_{xx}c_{\theta}^2s_{\phi}^2c_{\phi}^2 + I_{zz}I_{xx}I_{yy}c_{\theta}^2c_{\phi}^4 + I_{xx}^2I_{zz}s_{\theta}^2s_{\phi}^2 \\ &\quad + I_{zz}^2I_{xx}c_{\theta}^2s_{\phi}^2c_{\phi}^2 + I_{zz}I_{xx}I_{yy}c_{\theta}^2s_{\phi}^4 - c_{\theta}^2c_{\phi}^2s_{\phi}^2(I_{yy} - I_{zz})^2I_{xx} \\ &\quad - I_{xx}^2s_{\theta}^2(I_{yy}c_{\phi}^2 + I_{zz}s_{\phi}^2) \\ &= I_{zz}I_{xx}I_{yy}c_{\theta}^2(s_{\phi}^4 + c_{\phi}^4) + (I_{yy}^2 - I_{zz}^2 - (I_{yy} - I_{zz})^2)I_{xx}c_{\theta}^2s_{\phi}^2c_{\phi}^2 \\ &\quad = I_{zz}I_{xx}I_{yy}c_{\theta}^2(s_{\phi}^4 + c_{\phi}^4) + 2I_{yy}I_{zz}I_{xx}c_{\theta}^2s_{\phi}^2c_{\phi}^2 \\ &\quad = I_{zz}I_{xx}I_{yy}c_{\theta}^2(s_{\phi}^2 + c_{\phi}^2)^2 \\ &\quad = I_{zz}I_{xx}I_{yy}c_{\theta}^2 \end{aligned}$$

Con esto podemos observar que $M(\eta)$ es positiva definida para todo $\theta \neq \frac{n\pi}{2}, \forall n = 1,3,5 \dots$

Derivando M obtenemos

$$\dot{M}_{11} = 2I_{xx}\dot{\theta}s_{\theta}c_{\theta} - 2I_{yy}\dot{\theta}s_{\theta}c_{\theta}s_{\phi}^2 + 2I_{yy}\dot{\psi}c_{\theta}^2s_{\phi}c_{\phi} - 2I_{zz}\dot{\theta}s_{\theta}c_{\theta}c_{\phi}^2 - 2I_{zz}\dot{\psi}c_{\theta}^2s_{\phi}c_{\phi}$$

$$\begin{aligned} \dot{M}_{12} = \dot{M}_{21} &= -I_{yy}\dot{\theta}s_{\theta}s_{\phi}c_{\phi} + I_{yy}\dot{\psi}c_{\theta}c_{\phi}^2 - I_{yy}\dot{\psi}c_{\theta}s_{\phi}^2 + I_{zz}\dot{\theta}s_{\theta}s_{\phi}c_{\phi} - I_{zz}\dot{\psi}c_{\theta}c_{\phi}^2 + \\ &I_{zz}\dot{\psi}c_{\theta}s_{\phi}^2 \end{aligned}$$

$$\dot{M}_{13} = \dot{M}_{31} = -I_{xx}\dot{\theta}c_{\theta}$$

$$\dot{M}_{22} = -2I_{yy}\dot{\psi}s_{\phi}c_{\phi} + 2I_{zz}\dot{\psi}s_{\phi}c_{\phi}$$

$$\dot{M}_{23} = \dot{M}_{32} = 0$$

$$\dot{M}_{33} = 0$$

Obteniendo de esta forma la propiedad de pasividad tal que

$$P = \dot{M} - 2C$$

La cual está dada por

$$P_{11} = 0$$

$$P_{12} = -I_{yy}\dot{\phi}c_{\theta}c_{\phi}^2 + I_{yy}\dot{\phi}c_{\theta}s_{\phi}^2 - I_{zz}\dot{\theta}s_{\theta}s_{\phi}c_{\phi} + I_{zz}\dot{\phi}c_{\theta}c_{\phi}^2 - I_{zz}\dot{\phi}c_{\theta}s_{\phi}^2 - 2I_{xx}\dot{\psi}s_{\theta}c_{\theta} + 2I_{yy}\dot{\psi}s_{\theta}c_{\theta}s_{\phi}^2 + 2I_{zz}\dot{\psi}s_{\theta}c_{\theta}c_{\phi}^2$$

$$P_{13} = I_{xx}\dot{\theta}c_{\theta} - 2I_{yy}\dot{\psi}c_{\theta}^2s_{\phi}c_{\phi} + 2I_{zz}\dot{\psi}c_{\theta}^2s_{\phi}c_{\phi}$$

$$P_{21} = -P_{12}$$

$$P_{22} = 0$$

$$P_{23} = -2I_{xx}\dot{\psi}c_{\theta} - 2I_{yy}(-\dot{\theta}s_{\phi}c_{\phi} + \dot{\psi}c_{\theta}c_{\phi}^2 - \dot{\psi}c_{\theta}s_{\phi}^2) - 2I_{zz}(\dot{\psi}c_{\theta}s_{\phi}^2 - \dot{\psi}c_{\theta}c_{\phi}^2 + \dot{\theta}s_{\phi}c_{\phi})$$

$$P_{31} = -P_{13}$$

$$P_{32} = -P_{23}$$

$$P_{33} = 0$$

Esta es una matriz skew, es decir

$$P = \begin{bmatrix} 0 & P_{12} & P_{13} \\ -P_{12} & 0 & P_{23} \\ -P_{13} & -P_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

11.2 Código del control de los motores (recepción)

```
#include <SPI.h>
#include <RF24.h>
#include <nRF24L01.h>
#include <RF24_config.h>
#include <Servo.h>
```

```

Servo AA;
Servo BB;
Servo CC;
Servo DD;

#define GPIO_MOTOR0 5
#define GPIO_MOTOR1 4
#define GPIO_MOTOR2 6
#define GPIO_MOTOR3 3
#define LEDOP 8
#define LEDRXC A1
#define LEDRXD A0

bool SLEDC;
bool SLEDD;

unsigned long TLED = 0;
unsigned long TLOST = 0;
unsigned long TOP = 0;
unsigned long T = 0;
unsigned long now = 0;

byte P;
byte UP_DOWN;
byte NON;
byte IR_IL;
byte FR_BK;

#define G 180 - ((180 / 100) * 10)
byte limit;
byte standby = 0;
#define lost 50
const short begin = 35;
byte U;
byte D;      byte a;
byte R;      byte b;
byte L;      byte c;
byte F;      byte d;
byte B;
byte receptor[6] = "00001"; //mismo codigo para Tx y Rx
RF24 radio(9, 10);          // CE, CSN

struct canales_in {
    byte X1;
    byte Y1;
    byte X2;
    byte Y2;
};
canales_in received_data;

void cronometro() {
    while (radio.available()) {
        radio.read(&received_data, sizeof(received_data));
        T = millis();
    }
}

```

```

void losted() {
    now = millis();
    if (now - T > 1000) {
        reset_vuelo();
    }
}

void conected() {
    //PARPADEO DE LED (DRON CONECTADO)
    TLED = millis();
    if ((TLED - TOP) >= 700) {
        TOP = TLED;
        SLEDC = !SLEDC;
    }
    digitalWrite(LED_RXD, HIGH);
    digitalWrite(LED_RXC, SLEDC);
}

void dis_conected() {
    //PARPADEO DE LED (DRON NO:CONECTADO)
    TLED = millis();
    if ((TLED - TLOST) >= 50) {
        TLOST = TLED;
        SLEDD = !SLEDD;
    }
    digitalWrite(LED_RXD, SLEDD);
    digitalWrite(LED_RXC, HIGH);
}

void recibidos() {
    cronometro();
    NON = received_data.X1;
    P = received_data.Y1;
    IR_IL = received_data.X2;
    FR_BK = received_data.Y2;
}

void motores(byte a, byte b, byte c, byte d) {

    AA.write(a);
    BB.write(b);
    CC.write(c);
    DD.write(d);
}

void reset_vuelo() {
    while (radio.available() == false) {
        recibidos();
        dis_conected();
        a = b = c = d = standby;
        motores(a, b, c, d);
    }
}

```

```

void inicio() {
  standby = 0;
  byte TB = 500;
  digitalWrite(LEDOP, LOW);
  do {
    recibidos();
    losted();
    conected();

    Serial.print("JoyR ");
    Serial.print("X:");
    Serial.print(NON);
    Serial.print(" Y:");
    Serial.print(P);
    Serial.print(" JoyL ");
    Serial.print("X:");
    Serial.print(IR_IL);
    Serial.print(" Y:");
    Serial.println(FR_BK);

    if ((NON >= 165) & (P <= 50) & (IR_IL <= 20) & (FR_BK <= 20)) {
      TB = TB - 4;
      if (TB == 0) {
        standby = begin;
        digitalWrite(LEDOP, HIGH);
      }
    }

    a = b = c = d = standby;
    motores(a, b, c, d);

  } while (standby == 0);
  waiting_for();
}

void waiting_for() {
  do {
    recibidos();
    losted();
    conected();

    UP_DOWN = map(P, 0, 180, begin, G);

    if (UP_DOWN > 160) {
      U = map(UP_DOWN, 160, 180, begin, 180);
      a = b = c = d = U;
      motores(a, b, c, d);
    }
    if (UP_DOWN < 20) {
      D = map(UP_DOWN, 0, 20, 0, 180);
      if (D == 1) {
        a = b = c = d = 0;
        inicio();
      }
    }
  }

  Serial.print("JoyR ");
  Serial.print("X:");
  Serial.print(NON);
  Serial.print(" Y:");
  Serial.print(D);
  Serial.print(" JoyL ");
  Serial.print("X:");
  Serial.print(IR_IL);
  Serial.print(" Y:");
  Serial.println(FR_BK);
} while (U < 100);
}

```

```

void setup() {

  AA.attach(GPIO_MOTOR0, 10000, 2000);
  BB.attach(GPIO_MOTOR1, 10000, 2000);
  CC.attach(GPIO_MOTOR2, 10000, 2000);
  DD.attach(GPIO_MOTOR3, 10000, 2000);
  AA.write(0);
  BB.write(0);
  CC.write(0);
  DD.write(0);

  pinMode(LED_RXC, OUTPUT);
  pinMode(LED_RXD, OUTPUT);
  pinMode(LED_OP, OUTPUT);

  Serial.begin(9600);
  radio.begin();
  radio.setAutoAck(false);
  radio.setDataRate(RF24_250KBPS);
  radio.openReadingPipe(1, receptor);
  radio.setPALevel(RF24_PA_MAX);
  radio.setDataRate(RF24_250KBPS);
  radio.setChannel(100);
  radio.startListening();
  inicio();
}

void loop() {
  standby = lost;
  recibidos();
  losted();
  conected();
  //declarar map para arriba y map para abajo

  //LIMITA UN SOBREGIRO
  limit = UP_DOWN + G - 8;

  //ARRIBA Y ABAJO GENENRAL
  UP_DOWN = map(P, 0, 180, begin, G);
  a = b = c = d = UP_DOWN;
  motores(a, b, c, d);

  //INCLINACION DERECHA
  if (IR_IL > 92) {
    R = map(IR_IL, 92, 180, UP_DOWN, limit);
    a = b = UP_DOWN;
    c = d = R;
    motores(a, b, c, d);
  }

  //INCLINACION IZQUIERDA
  if (IR_IL < 80) {
    L = map(IR_IL, 80, 0, UP_DOWN, limit);
    a = b = L;
    c = d = UP_DOWN;
    motores(a, b, c, d);
  }

  //INCLINACION BK
  if (FR_BK < 85) {
    B = map(FR_BK, 85, 0, UP_DOWN, limit);
    d = a = UP_DOWN;
    b = c = B;
    motores(a, b, c, d);
  }

  //DIAGONAL A DERECHAFRONTAL
  if (IR_IL > 160 && FR_BK > 160) {
    RF = map(IR_IL, 160, 180, UP_DOWN, limit);
    a = FR_BK;
    b = c = d = UP_DOWN;
    motores(a, b, c, d);
  }

  //DIAGONAL A IZQUIERDAFRONTAL
  if (IR_IL < 20 && FR_BK > 160) {
    LF = map(IR_IL, 160, 0, UP_DOWN, limit);
    d = LF;
    a = b = c = UP_DOWN;
    motores(a, b, c, d);
  }

  //DIAGONAL A DERECHABK
  if (FR_BK < 20 && IR_IL > 160) {
    RB = map(IR_IL, 160, 180, UP_DOWN, limit);
    analogWrite(GPIO_MOTOR0, UP_DOWN);
    analogWrite(GPIO_MOTOR1, RB);
    analogWrite(GPIO_MOTOR2, UP_DOWN);
    analogWrite(GPIO_MOTOR3, UP_DOWN);
    b = RB;
    a = c = d = UP_DOWN;
    motores(a, b, c, d);
  }
}

```

```

//DIAGONAL A IZQUIERDABK
if (FR_BK < 20 && IR_IL < 20) {
  LB = map(IR_IL, 20, 0, UP_DOWN, limit);
  c = LB;
  a = b = d = UP_DOWN;
  motores(a, b, c, d);
}

//observacion
Serial.print("JoyR ");
Serial.print("X:");
Serial.print(NON);
Serial.print(" Y:");
Serial.print(UP_DOWN);
Serial.print(" JoyL ");
Serial.print("X:");
Serial.print(IR_IL);
Serial.print(" Y:");
Serial.println(FR_BK);
}

```

11.3 Código del control remoto (transmisión)

```

#include <SPI.h>
#include <RF24.h>
#include <nRF24L01.h>
#include <RF24_config.h>

#define POTAX A1
#define POTAY A0
#define POTBX A3
#define POTBY A2
#define LEDTXC 8
#define LEDTXD 7

bool ok;
bool SLEDC;
unsigned long TLED = 0;
unsigned long TLOST = 0;
unsigned long TOP = 0;

byte RX;
byte RY;
byte LX;
byte LY;

byte emisor[6] = "00001"; //mismo codigo para Tx y Rx
RF24 radio(9, 10);      // CE, CSN

struct canales {
  byte X1;
  byte Y1;
  byte X2;
  byte Y2;
};

canales enviar;

```

```

void setup() {
  Serial.begin(9600);
  radio.begin();
  radio.setAutoAck(false);
  radio.setPALevel(RF24_PA_MAX);
  radio.setDataRate(RF24_250KBPS);
  radio.openWritingPipe(emisor);
  radio.setChannel(100);
  radio.stopListening();

  pinMode(LEDTXC, OUTPUT);
  pinMode(POTAX, INPUT);
  pinMode(POTAY, INPUT);
  pinMode(POTBX, INPUT);
  pinMode(POTBY, INPUT);
}

void loop() {

  enviar.X1 = map(analogRead(POTAX), 0, 1023, 180, 0);
  enviar.Y1 = map(analogRead(POTAY), 0, 1023, 180, 0);
  enviar.X2 = map(analogRead(POTBX), 0, 1023, 180, 0);
  enviar.Y2 = map(analogRead(POTBY), 0, 1023, 180, 0);

  TLED = millis();
  radio.write(&enviar, sizeof(canales));

  if ((TLED - TOP) >= 500) {
    TOP = TLED;
    SLEDC = !SLEDC;
  }

  digitalWrite(LEDTXC, SLEDC);

  Serial.print("AX_");
  Serial.print(map(analogRead(POTAX), 0, 1023, 180, 0));
  Serial.print(" AY_");
  Serial.print(map(analogRead(POTAY), 0, 1023, 180, 0));
  Serial.print("****EX_");
  Serial.print(map(analogRead(POTBX), 0, 1023, 180, 0));
  Serial.print("BY_");
  Serial.println(map(analogRead(POTBY), 0, 1023, 180, 0));
}

```

12.Referencias

- [1] Keane, J.F., & Carr, S.S. (2013). Johns Hopkins Apl Technical Digest,32(3),558-563.
- [2] Hassanalian, M., & Abdelkefi, A. (2017). Classifications, applications, and design challenges of drones: A review,91, 99-101.
<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0376042116301348?via%3Dihub>

- [3] Juniper, A. (2018). The complete guide to drones. 2° edition. Octopus Publishing Group.
- [4] Somma F. J.(2018). *Cuaterniones y ángulos de Euler para describir en \mathbb{R}^3* .Tesis de licenciatura, Universidad abierta interamericana.
- [5] Nordic semiconductor. nRF24L01 Single Chip 2.4GHz Transceiver Product Specification.
- [6] Robomart. DJI 2212 920KV Brushless Motor for Quadcopter/Multirotor/Drone.
- [7] Team, T. A. (n.d.). Software. Retrieved from <https://www.arduino.cc/en/software>.
- [8] E. Houghton, Aerodynamics for Engineering Studens, fifth edition ed., Burlington MA: Butterworth Heinemann, 2003.
- [9] Castillo P, García. P, Lozano. R, Albertos. P. (2007). Modelado y estabilización de un helicóptero con cuatro rotores. *Revista iberoamericana de Automática e Informática Industrial*.4(1). 41-57.
- [10] Nieto E, Vaca F. (2020). Desarrollo de un modelo matemático, cinemático y dinámico con la aplicación de software, para modificar el funcionamiento de un dron, para que este realice monitoreo automático. *Revista científica mundo de la investigación y el conocimiento*.332-343.
- [11] José Luis, Jiménez Galiano. (2016). Modelado dinámico y control de sistema multirotor con plano de hélice inclinado [Trabajo Fin de Grado, Escuela Técnica Superior de Ingeniería Universidad de Sevilla]
- [12] Cañada Panea, Enrique (2020). Modelado, simulación y control de cuadricópteros [Trabajo Fin de Grado, Escuela de Ingeniería y Arquitectura Universidad Zaragoza]
- [13] Delgado, José David, Bolaños Camilo José. Control de velocidad para motor dc brushless sin sensores [Trabajo Fin de Grado, Pontificia Universidad Javeriana Facultad de Ingeniería].