



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Estudio de la entropía y capacidad calorífica en
colisiones protón-protón

Tesis presentada al:

**Colegio de Física de la
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas**

como requisito parcial para obtener el grado de:

Licenciado en Física Aplicada

presenta:

Carlos Enrique Munguía López

Asesores:

Dr. Jesús Ricardo Alvarado García

Dr. Jhony Eredi Ramírez Cancino

Puebla Pue.

Noviembre de 2024



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Estudio de la entropía y capacidad calorífica en
colisiones protón-protón

Tesis presentada al:

**Colegio de Física de la
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas**

como requisito parcial para obtener el grado de:

Licenciado en Física Aplicada

presenta:

Carlos Enrique Munguía López

Asesorado por:

Dr. Jesús Ricardo Alvarado García

Dr. Jhony Eredi Ramírez Cancino

Puebla Pue.

Noviembre de 2024

Título: Estudio de la entropía y capacidad calorífica en colisiones protón-protón

Autor: Carlos Enrique Munguía López

Comité

Presidente

Secretario

Dr. Arturo Fernández Téllez
FCFM-BUAP

Dr. Guillermo Tejeda Muñoz
FCFM-BUAP

Vocal

Suplente

Dr. Mario Iván Martínez Hernández
FCFM-BUAP

M.C. Diana Rosales Herrera
FCFM-BUAP

Asesores:

Dr. Jesús Ricardo Alvarado García
FCFM-BUAP

Dr. Jhony Eredi Ramírez Cancino
ICUAP

Índice general

Resumen	VII
Introducción	1
1 Mecanismo de Schwinger	3
1.1 Mecanismo de Schwinger en QED	3
1.2 Cromodinámica Cuántica.	4
1.3 Modelos de cuerdas	5
1.4 Mecanismo de Schwinger en QCD	5
2 Descripción del TMD considerando fluctuaciones de la tensión de las cuerdas	7
2.1 Fluctuaciones Gaussianas	7
2.2 Producción no extensiva de partículas cargadas	8
2.2.1 Distribución q -Gaussiana	8
2.3 Fluctuaciones q -Gaussianas	9
2.3.1 Escala suave y dura del espectro de p_T	10
2.3.2 Momento transversal medio	11
3 Análisis de datos del TMD	13
3.1 Descripción del TMD	13
3.2 Ajuste de Datos	15
3.3 Parametrización	17
3.3.1 Razón entre las escalas suave y dura	20
3.4 Estadísticos del TMD	21
3.4.1 Momento transversal medio como función de la multiplicidad	21
3.4.2 Varianza y curtosis	22
4 Entropía y capacidad calorífica	25
4.1 Entropía de Shannon	25
4.2 Cálculo de la entropía	25
4.3 Capacidad calorífica	27
5 Conclusiones	31
A Propagación de errores	33
A.1 Escalas del espectro de p_T	33
A.2 Momento medio	34
A.3 Incertidumbre en la parametrización de $q(T)$ y $\sigma(T)$	34
A.4 Entropía	35
A.5 Capacidad calorífica	36

Índice de Figuras

1.1	Diagrama de Feynman del mecanismo de Schwinger en QED.	3
1.2	Composición de los protones y neutrones en QCD.	4
1.3	Ilustración del confinamiento.	5
1.4	Interacción de quarks mediante tubos de flujo de color.	6
2.1	Distribución q -Gaussiana.	9
2.2	Cociente de $T_{H,U}/T_U$	11
3.1	Clasificadores V0M y SPD.	15
3.2	Ajuste a los datos del TMD experimental de partículas cargadas.	16
3.3	Temperatura como función de la multiplicidad y σ como función de la temperatura.	17
3.4	Gráfica de q en función de T_U	18
3.5	Gráficas de la derivada de q	19
3.6	Razón de las escalas del espectro de p_T respecto a la multiplicidad.	20
3.7	Gráficas del momento medio.	21
3.8	Gráficas de la varianza.	22
3.9	Gráficos de la curtosis.	23
4.1	Gráficas de la entropía.	26
4.2	Gráfica de la derivada de la entropía.	28
4.3	Gráfica de la capacidad calorífica.	29

Agradecimientos

A mis asesores, Dr. *Jesús Ricardo Alvarado García* y Dr. *Jhony Eredi Ramírez Cancino*. Les expreso mi más sincero agradecimiento por su interés en mi formación, por dedicarme su tiempo, compartirme sus conocimientos, permitirme trabajar en su equipo y aceptar guiarme en cada paso de este proyecto.

Extiendo mi agradecimiento al Dr. *Arturo Fernández Téllez*, por escucharme, guiarme y darme la recomendación necesaria para iniciar este proyecto.

Resumen

En este trabajo se estudia el comportamiento de la entropía de Shannon y la capacidad calorífica como función de la multiplicidad y la temperatura del espectro de momento transversal de las partículas cargadas producidas en colisiones protón-protón. Para esta descripción asumiremos el enfoque no térmico de la producción de partículas. En este contexto, la producción de partículas puede ser descrita mediante el mecanismo de Schwinger el cual modela la probabilidad de emitir partículas con cierto momento transversal debido a la fragmentación de las cuerdas, cuya tensión fluctúa satisfaciendo una distribución q -Gaussiana. Así, el espectro de momento transversal toma la forma de una función de Tricomi cuyos comportamientos asintóticos de decaimiento exponencial y ley de potencias a bajo y alto momento transversal respectivamente, son consistentes con las observaciones experimentales.

Se realizó el ajuste de la función de Tricomi a los datos experimentales de la distribución de momento transversal reportados por ALICE para los clasificadores V0M y SPD. Con los parámetros de ajuste obtenidos se calculó el momento transversal medio, la varianza y la curtosis. Además, se calculó la entropía de Shannon y la capacidad calorífica para observar su comportamiento con el aumento de la temperatura, donde se pudo notar diferencias importantes entre ambos clasificadores.

El resultado más importante que se discute en esta tesis es la diferencia en el comportamiento de la capacidad calorífica con el aumento de la temperatura para ambos clasificadores. Para el clasificador V0M se encontró que muestra un comportamiento decreciente, contrario a lo que ocurre con SPD, lo cual puede deberse a la velocidad a la que incrementa la multiplicidad media en cada uno de los clasificadores.

Introducción

Los modelos de cuerdas de color se utilizan para describir las interacciones fuertes, como las que ocurren en una colisión de protones. Los protones están compuestos en su interior por tres quarks de valencia, dos *up* y un *down*. Interactúan entre ellos por medio de los gluones, que es la partícula mediadora de las interacciones fuertes. Cuando dos protones están por colisionar, el modelo propone que las partículas con carga de color empiezan a interactuar entre ellas por medio de los tubos de flujo de color. Estas interacciones van a tener una tensión (que será la intensidad de la interacción), carga de color, y que al fragmentarse producirán n partículas con momento transversal p_T .

Una medida fundamental en la física de altas energías es la distribución de momento transversal (TMD por sus siglas en inglés), la cual es una observable que describe cómo se distribuye el momento de las partículas cargadas en el plano transversal a la colisión. Esta distribución se construye mediante el histograma de p_T de las partículas detectadas, y contiene información sobre todas las escalas de momento transferido de los procesos involucrados en las colisiones, por lo que es importante encontrar modelos y funciones de ajuste que nos permitan describir este espectro de energía, o una parte de él.

En los modelos de cuerdas de color, la producción de partículas puede ser descrita por el mecanismo de Schwinger [1], que establece la probabilidad de producir una partícula con un cierto momento transversal, debido a la fragmentación de una cuerda con una tensión dada.

En este contexto, Bialas propone en 1999 que las fluctuaciones de las tensiones, satisfagan una distribución Gaussiana [2]. A partir de esta propuesta, se obtiene que el TMD es descrito a través de una distribución térmica que se asemeja a la distribución de Boltzmann en la mecánica estadística. Sin embargo, este modelo no captura la totalidad del espectro de momento, falla a medida que aumenta la energía de las colisiones y la producción de partículas con alto momento.

Artículos recientes [3, 4, 5], extienden la idea de las fluctuaciones en las tensiones considerando que satisfacen una distribución q -Gaussiana. Adoptar este modelo permite capturar con mejor precisión el espectro de momento, aumentando la probabilidad de tener cuerdas con tensiones más grandes. Una razón para que esto ocurra es la posibilidad de que las cuerdas emitan gluones de alto momento, tal como ocurre en el modelo de Lund [6]. Así, la producción de partones de alto momento puede dar origen a la creación de partículas masivas [7, 8].

Con la distribución q -Gaussiana se introduce un parámetro de no extensividad, que lleva a una descripción fuera del equilibrio, y no térmica del sistema. A pesar de ello podemos obtener una entropía, y con ello una capacidad calorífica, adoptando herramientas que consideren estas dos características, como la estadística de Tsallis y la entropía de Shannon.

En este trabajo se adoptará el enfoque de la distribución q -Gaussiana para estudiar los datos reportados por el experimento ALICE, usando dos clasificadores de multiplicidad (V0M y SPD) a distinta energía de centro de masa. Con el ajuste de los datos reportados a esta distribución, se encontrará el parámetro de no extensividad, lo que permitirá determinar la entropía, y la capacidad calorífica, teniendo el propósito de observar su comportamiento en función de la multiplicidad.

El resto de esta tesis está organizada de la siguiente manera. En el capítulo 1, se presentarán los conceptos involucrados en las colisiones de partículas y la producción de partículas, como el mecanismo de Schwinger. También se discutirá los modelos de cuerdas de color que describen las

interacciones entre las partículas cargadas.

En el capítulo 2, se discutirá brevemente la propuesta de las fluctuaciones Gaussianas. Se introducirá la distribución q -Gaussiana y se discutirán algunas de sus propiedades. También se utilizará esta distribución para obtener la descripción del TMD a partir del punto de vista no extensivo.

En el capítulo 3, se ajustará el modelo no extensivo de la producción de partículas a los datos experimentales reportados por ALICE, y se calcularán los estadísticos de la distribución de momento transverso. Además, en el capítulo 4 se determinará la entropía de Shannon utilizando los parámetros de ajuste de los datos analizados. A partir de ello, se estimará la capacidad calorífica. Finalmente, en capítulo 5 se discutirá la interpretación física de los resultados obtenidos y qué se puede concluir a partir de ellos.

Capítulo 1

Mecanismo de Schwinger

1.1 Mecanismo de Schwinger en QED

En 1962, Julian Schwinger describe teóricamente un efecto de la electrodinámica cuántica (QED por sus siglas en inglés), propuesto por Fritz Sauter en 1931 [9], y estudiado por Heisenberg y Hans Heinrich Euler [10], el cual consiste en la aparición de pares partícula-antipartícula que se crean de manera espontánea desde el vacío en presencia de un campo eléctrico [1].

En teoría cuántica de campos, el vacío es descrito como el estado cuántico de mínima energía, sin embargo no podemos establecer que esta energía siempre sea nula, puesto que sería un estado perfectamente definido, lo cual no está permitido según el principio de incertidumbre de Heisenberg: $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$ [11]. Como consecuencia, la energía en el vacío no es siempre nula y puede tener pequeñas fluctuaciones que ocurren en la presencia de un campo eléctrico. Estas pequeñas fluctuaciones son análogas a la aparición de pares partícula-antipartícula, las cuales son emitidas y absorbidas en un tiempo muy breve, lo cual hace que sea imposible detectarlas, por esta razón se le conoce como partículas virtuales. En la Figura 1.1 se muestra un diagrama de Feynman que describe este efecto.

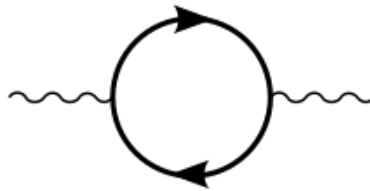


Figura 1.1: Diagrama de Feynman que muestra la emisión de pares de partícula-antipartícula que se aniquilan mutuamente en un tiempo muy breve, lo cual corresponde a las fluctuaciones en la energía del vacío. Esta figura fue tomada de [37].

Las partículas emitidas nacen del vacío, pero la energía para que este efecto tenga lugar, debe provenir de un campo eléctrico externo, el cual pierde energía igual a $2m_e c^2$ cuando se crea el par partícula-antipartícula (puesto que la masa del positrón es igual a la del electrón). De esta manera no se viola el principio de conservación de la energía. La carga eléctrica también se conserva debido a que el par tiene carga neutra.

Matemáticamente tenemos que la probabilidad de que este efecto ocurra es

$$P(p_T) \propto \exp \left[- \left(\frac{\pi E_T^2}{\kappa} \right) \right], \quad (1.1)$$

donde $E_T = \sqrt{p_T^2 + m^2}$ ¹, es la energía transversa y $\kappa = q\mathcal{E}$ [6]. Con un campo eléctrico \mathcal{E} muy intenso, se puede evitar que las partículas se destruyan rápidamente y pasen de ser partículas virtuales, a partículas reales. Otra forma de observarlas es en las colisiones de partículas, donde al aportar energía a la colisión, se le da energía a las partículas virtuales, convirtiéndolas en partículas reales.

1.2 Cromodinámica Cuántica.

La cromodinámica cuántica (QCD por sus siglas en inglés) es la teoría que explica las interacciones fuertes entre los quarks para formar los hadrones, como los protones o los neutrones. Establece la existencia de un nuevo número cuántico, el color. Las partículas mediadoras de estas interacciones son los gluones, las cuales son portadoras de este nuevo número cuántico, a diferencia de lo que ocurre con el fotón en QED.

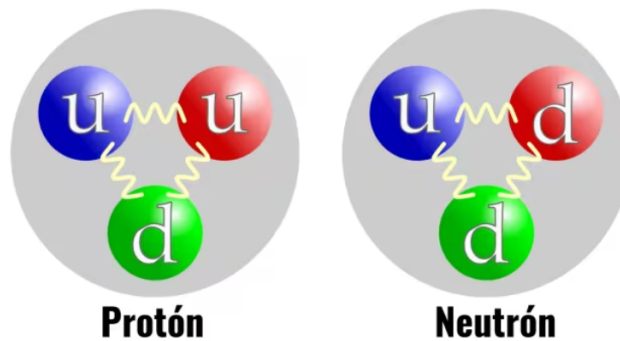


Figura 1.2: Composición de los protones y neutrones en QCD. Ambos están compuestos por tres quarks de valencia, los protones por dos *up* y un *down*, mientras que los neutrones por dos *down* y un *up*. En conjunto no tienen carga de color. Esta figura fue tomada de [38].

Cada quark tiene tres posibles valores diferentes de color: rojo, azul o verde, mientras que los anti-quarks tienen valores anti-rojo, anti-azul y anti-verde. Los hadrones como los protones y los neutrones, no poseen carga de color debido a que su composición, como se muestra en la Figura 1.2, tiene un quark de cada color, lo cual forma una carga de color neutra.

Una propiedad fundamental de la QCD perturbativa es la libertad asintótica, que describe cómo la intensidad de la interacción entre partículas con carga de color disminuye a medida que la escala de momento transferido aumenta [16, 17]. Por otra parte, el confinamiento es un hecho experimental que no tiene una descripción completa dentro del formalismo convencional. Sin embargo, algunas de sus características nos permiten desarrollar herramientas no perturbativas para describir el comportamiento de los quarks a escalas de bajo momento transferido.

En una interacción entre un par quark-antiquark, grandes distancias corresponden a una intensidad de interacción muy grande. El aumento de la energía suministrada al vacío, incrementa con la distancia hasta un punto en donde se generan pares quark-antiquark, como se muestra en la Figura 1.3. En resumen, cada vez que se intente separar un quark de un hadrón, la energía necesaria para retirarlo producirá un nuevo par de partículas que estarán nuevamente en confinamiento. Esta idea dio origen a los modelos de cuerdas que se estudiarán a continuación.

¹De aquí en adelante se utilizarán unidades naturales ($\hbar = c = 1$).

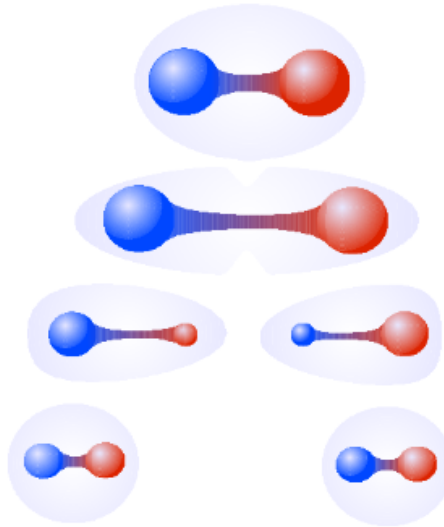


Figura 1.3: Ilustración del confinamiento. Se muestran dos quarks en un hadrón representado por la figura sombreada. La energía necesaria para separarlos produce dos hadrones, y dos pares de quarks que se encuentran nuevamente en confinamiento. Esta figura fue tomada de [39].

1.3 Modelos de cuerdas

Uno de los primeros intentos para explicar las características de las interacciones fuertes, fue introducir unas partículas hipotéticas que compusieran a los hadrones, llamadas partones. Estas partículas estarían unidas mediante tubos de flujo de color, o cuerdas de color, de manera que la energía potencial entre ellas aumentara de manera proporcional a la distancia $V(r) = \kappa r$, con lo que se podría explicar el confinamiento y la libertad asintótica [13, 14, 15].

En la década de 1970, la cromodinámica cuántica se estableció formalmente como la teoría de la fuerza fuerte, donde las partículas que componen a los hadrones son los quarks, que interactúan mediante los gluones [16, 17, 18, 19], como se describió en la sección 1.2. A pesar de ello, el desarrollo de modelos inspirados en cuerdas como buenas descripciones de la QCD, adquirió un papel muy importante donde las técnicas perturbativas estándar no son prácticas. En algunos modelos fenomenológicos, se tienen en cuenta la fragmentación de cuerdas para describir observables experimentales, y la producción de partículas en colisionadores como el LHC del CERN [20].

1.4 Mecanismo de Schwinger en QCD

De una manera análoga a cómo el mecanismo de Schwinger en QED nos proporciona la probabilidad de producir una partícula con masa m y carga eléctrica q , en la cromodinámica cuántica la probabilidad de producir una partícula con momento p_T es

$$\frac{dN}{dp_T^2} \propto e^{-\pi p_T^2/x^2}, \quad (1.2)$$

donde $x^2 = \kappa$ es la tensión de la cuerda. En la Figura 1.4 se muestran dos hadrones que se aproximan, por lo que sus quarks empiezan a interactuar mediante los tubos de flujo de color. Adicionalmente vemos un plano en la región de colisión, donde se proyectan estos tubos; estas proyecciones son las cuerdas, que van a tener carga de color, y una tensión que nos describirá la intensidad del campo de color [21].

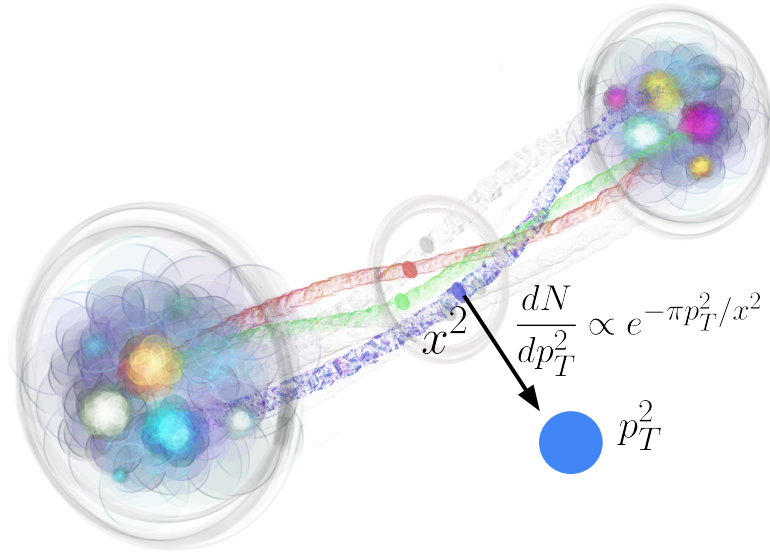


Figura 1.4: Interacción de quarks mediante tubos de flujo de color. La proyección de los tubos en el plano transverso a la colisión son las cuerdas, que van a tener una tensión x^2 . El mecanismo de Schwinger proporcionará la probabilidad de producir una partícula con momento p_T debido a la fragmentación de una cuerda.

En el siguiente capítulo consideraremos que la tensión de las cuerdas fluctúa, y es una variable aleatoria que puede seguir el comportamiento de una Gaussiana o una q -Gaussiana. De esta forma, la distribución de momento transverso se calcula como la convolución del mecanismo de Schwinger y la distribución que describe las fluctuaciones de la tensión de las cuerdas.

Capítulo 2

Descripción del TMD considerando fluctuaciones de la tensión de las cuerdas

2.1 Fluctuaciones Gaussianas

En nuestro modelo consideramos que la tensión puede fluctuar, es decir, que x es una variable aleatoria, por lo que la distribución de momento transversal debe calcularse como la distribución marginal que considera estas fluctuaciones, es decir, a través de la convolución del mecanismo de Schwinger, con $P(x)$ la distribución de las fluctuaciones de x . Explícitamente la distribución de momento transversal se calcula como

$$\frac{dN}{dp_T^2} \sim \int_0^\infty e^{-\pi p_T^2/x^2} P(x) dx. \quad (2.1)$$

En 1999, Bialas propone que las fluctuaciones de las tensiones satisfagan una distribución Gaussiana con media cero y varianza σ^2 dada por [2]

$$P(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} e^{-x^2/2\sigma^2}, \quad (2.2)$$

y por lo tanto el espectro de momento transversal es

$$\frac{dN}{dp_T^2} \sim e^{-\sqrt{2\pi/\sigma^2} p_T}, \quad (2.3)$$

que se puede comparar con la distribución de Boltzmann ($e^{-\epsilon/k_B T}$)¹, por lo que podemos definir

$$T = \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\pi}}, \quad (2.4)$$

que será un parámetro de tipo temperatura. En esta comparación, estamos tomando en cuenta micro estados de p_T , no de la energía, y además $k_B = 1$. Por ello, la temperatura tendrá unidades de momento y será una escala de él.

Por otra parte, si queremos que $\frac{dN}{dp_T^2}$ sea una función de distribución de probabilidad, debe estar normalizada, es decir

$$\int \frac{dN}{dp_T^2} dp_T = 1 \Rightarrow A \int_0^\infty e^{-p_T/T} = 1,$$

¹También conocida como distribución térmica.

y resolviendo la integral encontramos que la constante de normalización es $\frac{1}{T}$.

Asumir fluctuaciones con distribución de probabilidad Gaussiana solo describe los resultados experimentales a valores pequeños de p_T (menor que 1 GeV), es decir, no describe todo el TMD experimental, por lo que es necesario considerar otras distribuciones de probabilidad para llegar a una mejor descripción.

2.2 Producción no extensiva de partículas cargadas

La estadística de Tsallis es una generalización de la estadística de Boltzmann. Fue propuesta por Constantino Tsallis en 1988 con el objetivo de describir sistemas que no siguen las suposiciones habituales de la termodinámica clásica en equilibrio [22]. Para estos sistemas se introduce una nueva entropía que depende de un parámetro q , llamado parámetro afín, o parámetro de no extensividad. De esta manera definimos la entropía de Tsallis como

$$S_q = k_B \frac{1 - \sum_i p_i^q}{q - 1}, \quad (2.5)$$

donde p_i es la probabilidad de obtener un microestado i , el parámetro q cuantifica la desviación del sistema respecto al comportamiento clásico. Cuando $q \rightarrow 1$, se recupera la estadística de Boltzmann, y con ello la entropía clásica.

Cuando se maximiza la entropía de Tsallis bajo ciertas condiciones, podemos encontrar diversas funciones que incluyen el parámetro q . Nos centraremos en la discusión de la distribución q -Gaussiana, que se utilizará en este trabajo.

2.2.1 Distribución q -Gaussiana

La distribución q -Gaussiana es la generalización de la distribución Gaussiana, está diseñada para describir sistemas que no se acoplan completamente a esta última. Esta distribución está dada por

$$P(x)_q = \mathcal{N} \left(1 + \frac{(q-1)x^2}{2\sigma^2} \right)^{\frac{1}{1-q}}. \quad (2.6)$$

Si tomamos el límite cuando $q \rightarrow 1$ la distribución retoma el comportamiento clásico de una Gaussiana.

Dependiendo del valor que toma el parámetro de no extensividad, la gráfica de la función puede decaer de manera mas rápida o mas lenta como se muestra en la Figura 2.1.

- Para $q > 1$ la distribución tiene colas que decaen mas lentamente, lo que significa que es mas probable obtener valores lejanos a la media.
- Para $q < 1$ la distribución tiene colas mas cortas, es decir, es poco probable obtener valores lejanos a la media. Este caso no se considerará aquí porque la tensión de las cuerdas tiene un rango acotado y no nos permite reproducir los datos experimentales del TMD para valores altos de p_T .

La maximización de la entropía de Tsallis es la que nos conduce a este tipo de distribución, de la misma manera que la maximización de la entropía de Boltzmann nos conduce a la distribución Gaussiana clásica. La función está normalizada cuando $q < 3$ [23].

La distribución q -Gaussiana también generaliza el principio de incertidumbre de Heisenberg, de manera que la incertidumbre puede depender del parámetro q , de esta manera cuando $q \neq 1$ las incertidumbres cambian, y en el caso en el que $q > 1$, el producto de las incertidumbres puede ser mayor que para el caso donde $q = 1$ [24].

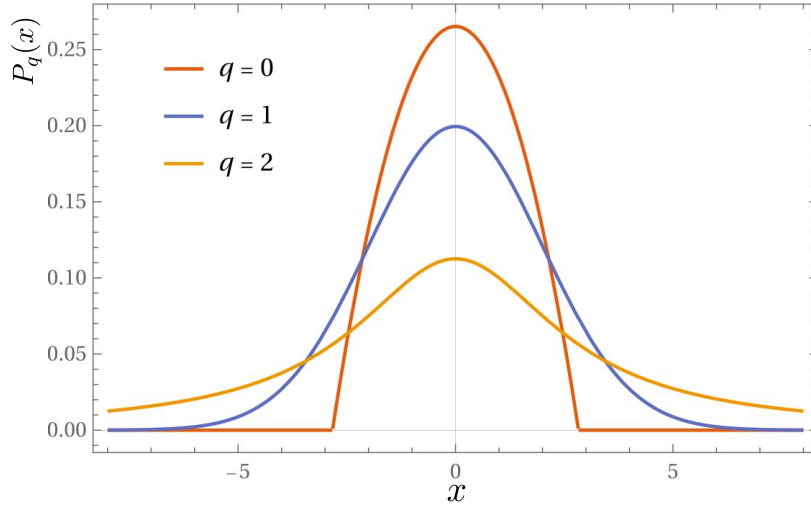


Figura 2.1: Gráfica de la distribución q -Gaussiana para distintos valores de q . La línea roja muestra el caso donde $q = 0$, de manera que las colas decaen rápidamente. La línea azul cuando $q = 1$, y se retoma el comportamiento clásico de una Gaussiana. La línea naranja muestra cuando $q = 2$, haciendo que las colas decaigan más lentamente.

2.3 Fluctuaciones q -Gaussianas

Ahora consideraremos fluctuaciones en la tensión que tengan una distribución de probabilidad de tipo q -Gaussiana. Cuando se toman valores $1 < q < 3$, podemos calcular la constante de normalización [25], de manera que podemos escribir la ecuación (2.6) como

$$P_q(x) = \frac{\sqrt{q-1}\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\sigma\sqrt{2\pi}\Gamma\left(\frac{q-3}{2(q-1)}\right)} \left(1 + \frac{(q-1)x^2}{2\sigma^2}\right)^{\frac{1}{1-q}}. \quad (2.7)$$

Utilizando esta función de probabilidad en la ecuación (2.1), tenemos que el mecanismo de Schwinger es

$$\frac{dN}{dp_T^2} \propto \frac{\sqrt{q-1}\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\sigma\sqrt{2\pi}\Gamma\left(\frac{q-3}{2(q-1)}\right)} \int_0^\infty e^{-\pi p_T^2/x^2} \left(1 + \frac{(q-1)x^2}{2\sigma^2}\right)^{\frac{1}{1-q}} dx. \quad (2.8)$$

Haciendo un cambio de variable dónde $t = \frac{2\sigma^2}{(q-1)x^2}$ llegamos a que

$$\frac{dN}{dp_T^2} \propto \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{q-3}{2(1-q)}\right)} \int_0^\infty e^{-\frac{\pi p_T^2(q-1)}{2\sigma^2}t} t^{\frac{1}{q-1}-\frac{3}{2}} (1+t)^{\frac{1}{1-q}} dt, \quad (2.9)$$

que es el resultado buscado, que se puede expresar en términos de la función hipergeométrica confluyente, o función de Tricomi, la cual se define como [26]

$$U(a, b, z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-zt} t^{a-1} (1+t)^{b-a-1} dt. \quad (2.10)$$

Esta función fue descubierta por el matemático italiano Francesco Tricomi, al estudiar la ecuación hipergeométrica confluyente, o ecuación de Kummer, que aparece cuando hay que resolver ecuaciones diferenciales con puntos singulares. La función de Kummer $M(a, b, z)$ es la primera función

hipergeométrica confluyente que es regular en el origen, mientras que la segunda es $U(a, b, z)$ que definimos en (2.10), es singular en el origen y sus propiedades asintóticas nos servirán en este trabajo.

Entonces, comparando las ecuaciones (2.9) y (2.10), identificamos inmediatamente

$$a = \frac{1}{q-1} - \frac{1}{2} \quad b = \frac{1}{2} \quad z = \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2}, \quad (2.11)$$

y reescribiremos (2.9) como

$$\frac{dN}{dp_T^2} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right) U\left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2}\right), \quad (2.12)$$

que tendrá distintos comportamientos, dependiendo del parámetro z , los cuales se analizarán en la siguiente sección.

2.3.1 Escala suave y dura del espectro de p_T

La función de Tricomi tiene dos comportamientos asintóticos, dependiendo de los valores que tome p_T y, por lo tanto, el parámetro z ; por esta razón podemos escribir dos escalas del espectro de p_T . Para el caso en el que z es pequeño, la función de Tricomi se comporta como

$$U(a, b, z) \approx \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(1+a-b)} + \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)} z^{1-b}. \quad (2.13)$$

Usando (2.11), encontramos que

$$U\left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2}\right) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)} \left(1 - \frac{\sqrt{2\pi(q-1)}\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)p_T}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}\right)\sigma}\right) \quad (2.14)$$

lo cual al incluir en la ecuación (2.12), encontramos que

$$\frac{dN}{dp_T^2} \sim \exp\left(-\frac{\sqrt{2\pi(q-1)}\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)p_T}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}\right)\sigma}\right). \quad (2.15)$$

De esta forma, comparando con la distribución de Boltzmann identificamos

$$T_U = \sigma \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi(q-1)}\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}, \quad (2.16)$$

que es un parámetro que se asocia con la temperatura del espectro a bajo momento, también llamada escala suave.

Por otra parte, U también tiene un comportamiento asintótico cuando z es muy grande, que está dado por

$$U(a, b, z) \approx z^{-a}, \quad (2.17)$$

y al incluir esto en la ecuación (2.12), tenemos que el espectro de p_T se comporta como

$$\frac{dN}{dp_T^2} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right) \left(\frac{\pi p_T^2 (q-1)}{2\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q-1}}, \quad (2.18)$$

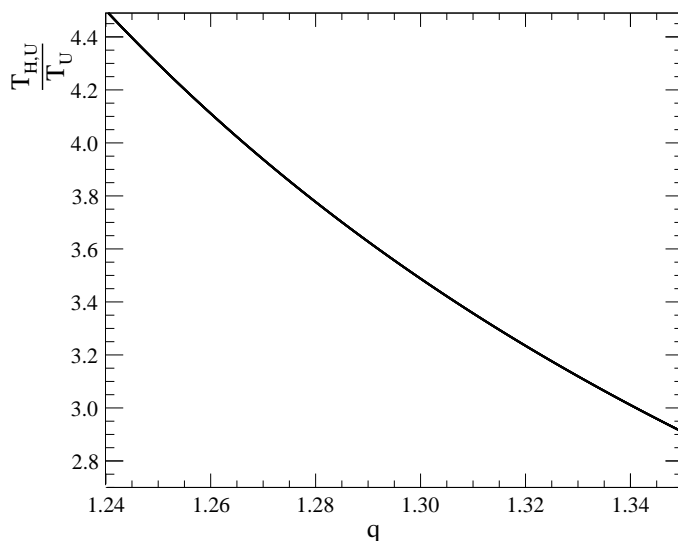


Figura 2.2: Cociente de $T_{H,U}/T_U$ como función de q , donde al aumentar el parámetro de no extensividad, el cociente es más pequeño y las escalas toman valores más parecidos.

de manera que

$$T_{H,U} = \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi(q-1)}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)} \right)^{\frac{q-1}{q-3}}, \quad (2.19)$$

es el parámetro que se asocia a la temperatura a alto p_T , también llamada escala dura.

En la Figura 2.2, se muestra el cociente de $T_{H,U}/T_U$, donde a medida que la q aumenta, el cociente disminuye y las escalas van tomando valores más parecidos, note que el cociente de las escalas no depende del parámetro σ .

2.3.2 Momento transversal medio

Para determinar los momentos del espectro de p_T se deben calcular de la manera tradicional, es decir,

$$\langle \mathcal{P}_T^n \rangle = \frac{\int_0^\infty p_T^n \frac{dN}{dp_T^2} dp_T}{\int_0^\infty \frac{dN}{dp_T^2} dp_T}. \quad (2.20)$$

Sin embargo, para calcular el momento transversal medio es necesario considerar el factor del espacio fase $2\pi p_T$ [27, 28], es decir, cuando construimos el invariante, debemos considerar las partículas que vienen de todas las componentes de la circunferencia, de manera que lo que se reporta es

$$\langle p_T \rangle = \frac{\int_0^\infty p_T \frac{dN}{dp_T^2} 2\pi p_T dp_T}{\int_0^\infty \frac{dN}{dp_T^2} 2\pi p_T dp_T}, \quad (2.21)$$

que podemos escribir como

$$\langle p_T \rangle = \frac{\langle \mathcal{P}_T^2 \rangle}{\langle \mathcal{P}_T \rangle}. \quad (2.22)$$

De manera general, podemos realizar el cálculo de $\langle \mathcal{P}_T^n \rangle$, lo que nos permitirá realizar el cálculo de

la ecuación (2.22). Entonces para la función U tenemos que calcular las integrales

$$I_n = \int_0^\infty \int_0^\infty p_T^n e^{-\pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} t} t^{a-1} (1+t)^{b-a-1} dt dp_T, \quad (2.23)$$

que se relaciona con los momentos de la distribución mediante $\langle \mathcal{P}_T^n \rangle = I_n/I_0$. Para resolver estas integrales es conveniente integrar primero sobre p_T , debido a que es una integral Gaussiana, de manera que

$$\int_0^\infty p_T^n e^{-\pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} t} dp_T = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \left(\pi \frac{q-1}{2\sigma^2}\right)^{-\frac{(n+1)}{2}} t^{-\frac{(n+1)}{2}}. \quad (2.24)$$

Al añadir esta integral a (2.23), podemos sacar los factores que no incluyen a t , y para lo que queda será conveniente realizar un cambio de variable donde $y = (1+t)^{-1}$. Con esto cambiaremos los límites de la integral, y así

$$\int_0^1 (1+y)^{a-1-\frac{n+1}{2}} y^{-(b-\frac{n+1}{2})} dy = B\left(1 - \left(b - \frac{n+1}{2}\right), a - \frac{n+1}{2}\right), \quad (2.25)$$

donde B es la función beta. Agregando ahora los factores constantes, y sustituyendo los parámetros a y b que se definieron en (2.11), la integral (2.23) es

$$I_n = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \left(\pi \frac{q-1}{2\sigma^2}\right)^{-\frac{(n+1)}{2}} B\left(\frac{(n+2)}{2}, \frac{1}{q-1} - \frac{n+2}{2}\right). \quad (2.26)$$

Así tenemos que

$$\langle \mathcal{P}_T^n \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \left(\frac{2-q}{q-1}\right) \left(\frac{2\sigma^2}{\pi(q-1)}\right)^{\frac{n}{2}} B\left(\frac{(n+2)}{2}, \frac{1}{q-1} - \frac{n+2}{2}\right), \quad (2.27)$$

de manera que usando (2.22) obtenemos

$$\langle p_T \rangle = \frac{(q-1)(3q-5)}{(2-q)(2q-3)} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}\right)}\right)^2 T_U, \quad (2.28)$$

que es directamente proporcional a la temperatura del espectro, pero el factor de proporcionalidad depende de q y por lo tanto puede variar de un conjunto de datos a otro.

Capítulo 3

Análisis de datos del TMD

3.1 Descripción del TMD

En la física de altas energías, la distribución de momento transverso es una observable que se construye mediante el histograma de p_T de las partículas detectadas, y contiene información sobre todas las escalas de momento transferido de los procesos involucrados en las colisiones. Para un número de colisiones N_{evt} se define el espectro invariante

$$\frac{E}{N_{\text{evt}}} \frac{dN}{d^3p} = \frac{1}{N_{\text{evt}}} \frac{1}{2\pi p_T} \frac{dN}{d\eta dp_T}, \quad (3.1)$$

el cual, será denotado simplemente como dN/dp_T^2 . Esta cantidad se reporta para distintos procesos, ya sea para la producción de partículas cargadas, de hadrones identificados, producción de partículas con extrañeza, partículas pesadas, etc.

Debido a limitaciones experimentales, el rango de p_T que se puede medir experimentalmente es finito, por lo que el TMD se reporta de un valor mínimo a un valor máximo de p_T y se considera un corte de pseudorapidez. Además en este trabajo se considerará el espectro reportado en un intervalo de pseudorapidez central $|\eta| < 0.8$.

Es importante mencionar que el TMD de las partículas producidas en una colisión puede clasificarse por eventos. Específicamente, el número de partículas producidas en una colisión es uno de los clasificadores de eventos habituales. Dado que las partículas se producen en todas las direcciones de la colisión, experimentalmente se han definido regiones específicas para la detección de partículas, que se utiliza para la clasificación de eventos, tales como la región de rapidez central (*midrapidity*) y las regiones cercanas a la dirección del haz (*forward* y *backward*). Estas secciones se muestran en la Figura 3.1 (a).

Los datos que se analizarán en este trabajo son reportados por ALICE (*A Large Ion Collider Experiment*), donde existen clasificadores que detectan las partículas en las regiones antes mencionadas. El detector V0M consta de V0A y V0C que cubren las regiones *forward* ($2.8 < \eta < 5.1$) y *backward* ($-3.7 < \eta < -1.7$) respectivamente. La ubicación de estos detectores se muestra en la Figura 3.1 (b). Para clasificar los eventos se considera la amplitud de V0M que corresponde a la energía depositada en el detector por evento, con esta información se construye el histograma de amplitud de V0M, y se determinan las clases de multiplicidad como se muestra en la Figura 3.1 (c). Los valores para las clases de multiplicidad y el percentil se reportan en la Tabla 3.1.

Por otra parte el clasificador SPD es el más cercano a la región donde ocurren las colisiones, y cubre la región de rapidez central ($|\eta| < 0.8$). Este estimador cuenta el número de señales dejadas por las partículas cargadas que atraviezan el detector, es decir el número de *tracklets*. Las clasificaciones de multiplicidad se determinan en intervalos de acuerdo a los valores de *tracklets* de acuerdo a la Tabla 3.2.

Clase	5.02 TeV		7 TeV		13 TeV	
	Rango	μ	Rango	μ	Rango	μ
I	0 - 1 %	19.2 ± 0.9	0 - 0.95 %	21.3 ± 0.6	0 - 1 %	26.6 ± 1.1
II	1 - 5 %	15.1 ± 0.7	0.95 - 4.7 %	16.5 ± 0.5	1 - 5 %	20.5 ± 0.8
III	5 - 10 %	12.4 ± 0.6	4.7 - 9.5 %	13.5 ± 0.4	5 - 10 %	16.7 ± 0.7
IV	10 - 15 %	10.7 ± 0.5	9.5 - 14 %	11.5 ± 0.3	10 - 15 %	14.3 ± 0.6
V	15 - 20 %	9.47 ± 0.47	14 - 19 %	10.1 ± 0.3	15 - 20 %	12.6 ± 0.5
VI	20 - 30 %	8.04 ± 0.42	19 - 28 %	8.45 ± 0.25	20 - 30 %	10.6 ± 0.5
VII	30 - 40 %	6.56 ± 0.37	28 - 38 %	6.72 ± 0.21	30 - 40 %	8.46 ± 0.4
VIII	40 - 50 %	5.39 ± 0.32	38 - 48 %	5.4 ± 0.17	40 - 50 %	6.82 ± 0.34
IX	50 - 70 %	4.05 ± 0.27	48 - 68 %	3.9 ± 0.14	50 - 70 %	4.94 ± 0.28
X	70 - 100 %	2.27 ± 0.27	68 - 100 %	2.26 ± 0.12	70 - 100 %	2.54 ± 0.26

Tabla 3.1: Percentiles y multiplicidad promedio de cada clase de V0M a distintas energías de centro de masa. Los datos de esta tabla fueron tomados de [31] y [32].

Clase	5.02 TeV			13 TeV		
	Rango	N_{track}	μ	Rango	N_{track}	μ
I'		-		0 - 0.006 %	≥ 51	54.1 ± 2.7
II'	0.009 - 0.088 %	41 - 50	34.6 ± 1.8	0.006 - 0.058 %	41 - 50	44.6 ± 2.2
III'	0.088 - 0.253 %	36 - 40	29.9 ± 1.5	0.058 - 0.177 %	36 - 40	38.9 ± 1.9
IV'	0.253 - 0.7 %	31 - 35	26.2 ± 1.3	0.177 - 0.513 %	31 - 35	34.1 ± 1.7
V'	0.7 - 1.84 %	26 - 30	22.4 ± 1.1	0.513 - 1.419 %	26 - 30	29.3 ± 1.5
VI'	1.84 - 4.573 %	21 - 25	18.5 ± 1	1.419 - 3.699 %	21 - 25	24.5 ± 1.3
VII'	4.573 - 10.69 %	16 - 20	14.6 ± 0.9	3.699 - 9.059 %	16 - 20	19.5 ± 1.2
VIII'	10.69 - 23.5 %	11 - 15	10.6 ± 0.7	9.059 - 20.77 %	11 - 15	14.4 ± 0.9
IX'	23.5 - 49.48 %	6 - 10	6.58 ± 0.43	20.77 - 45.25 %	6 - 10	9.03 ± 0.58
X'	49.48 - 100 %	0 - 5	2.21 ± 0.24	45.25 - 100 %	0 - 5	2.91 ± 0.29

Tabla 3.2: Número de tracklets, multiplicidad y rango del porcentaje del numero de eventos de cada clase de SPD a las energías de centro de masa dadas. Estos datos fueron tomados de [31].

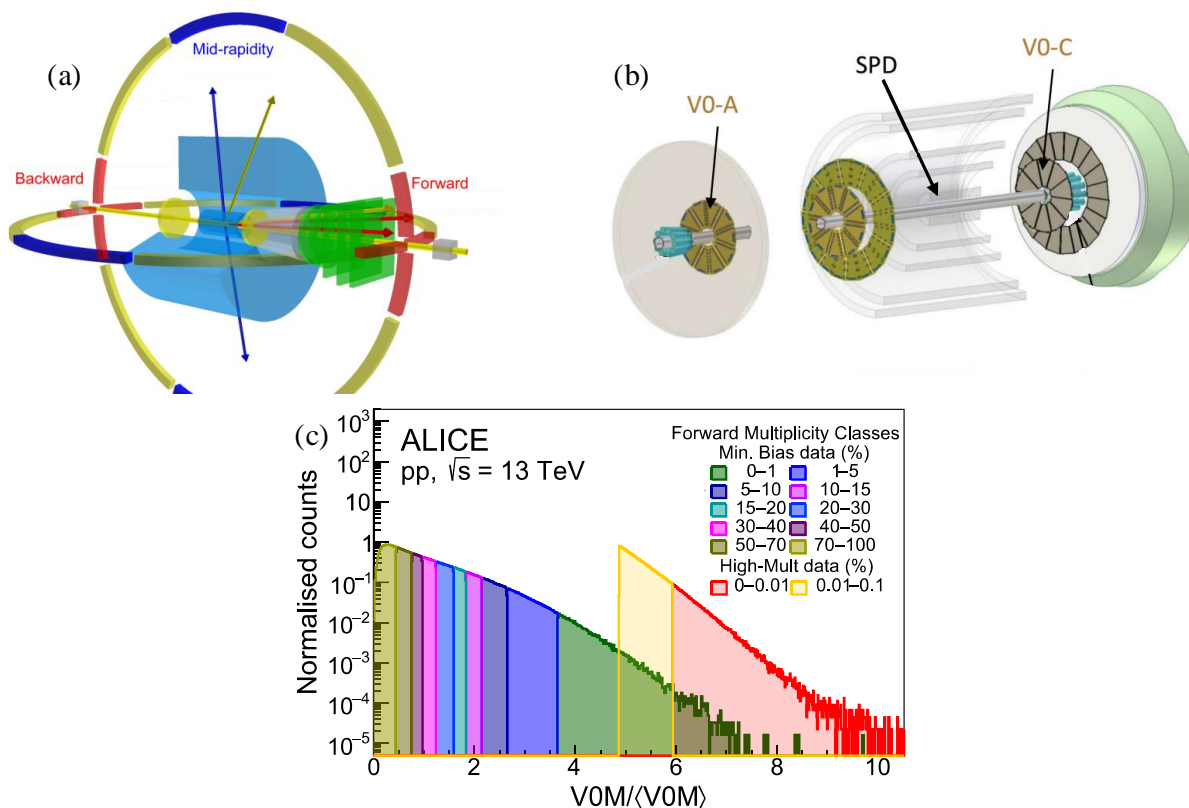


Figura 3.1: (a) Regiones donde se detectan las partículas producidas, en azul se muestra la región *midrapidity*, y en rojo las secciones *forward* y *backward* que son cercanas a la dirección del haz. Esta figura fue tomada de [29]. (b) Se muestran los detectores V0M y SPD en ALICE, que cubren las regiones de detección de partículas antes mencionadas de acuerdo a su intervalo de pseudorapidez. (c) Histograma de la amplitud de V0M dividido en percentiles para definir las clases de multiplicidad. Esta figura fue tomada de [30].

3.2 Ajuste de Datos

Analizaremos los datos experimentales del TMD de la producción de partículas cargadas en colisiones protón-protón reportadas por ALICE bajo las clasificaciones de V0M y SPD. En la Tabla 3.3 se muestra la información detallada de los cortes cinemáticos para cada conjunto de datos. Los datos fueron tomados de las referencias [31, 32]. El experimento reportó dos versiones de los mismos datos; en la primera se reporta $\frac{dN}{dp_T^2}$, de manera que se puede ajustar directamente la ecuación (2.12). En este trabajo se utilizó la versión más reciente, donde se reportan datos de $\frac{dN}{dp_T}$, por lo que para obtener un resultado satisfactorio es necesario modificar ligeramente la ecuación (2.12)

$$\frac{dN}{dp_T} = Ap_T U \left(\frac{1}{q-1}, \frac{1}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right). \quad (3.2)$$

Para el caso de $\sqrt{s} = 7$ TeV, ocurre lo mismo, de manera que también debemos ajustar a la ecuación (3.2). El ajuste de datos se realizó utilizando el software ROOT 6, y se obtuvo valores para la constante de normalización A , para la q , y para σ , todos con sus respectivos errores. Estos parámetros nos servirán para obtener todos los demás valores. En la Figura 3.2 se muestran los

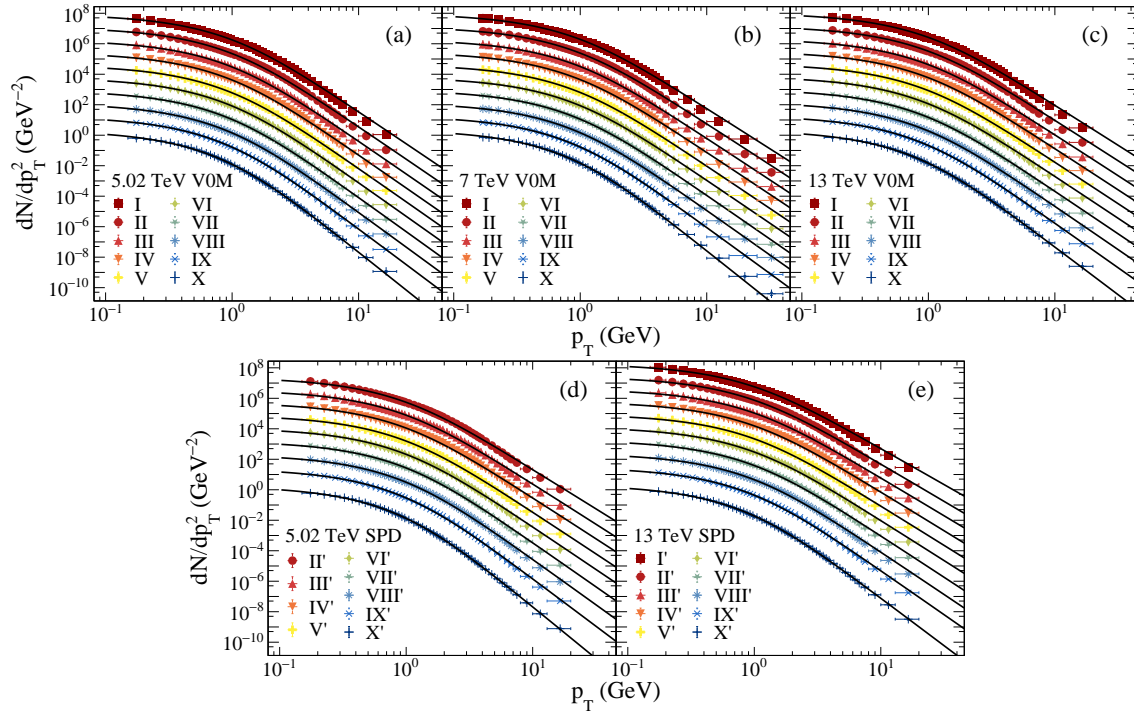


Figura 3.2: Ajuste de los datos del TMD experimental, que se representa con las marcas de colores. Cada color muestra las distintas clases de multiplicidad, y cada p panel corresponde a una energía de centro de masa distinta. La línea negra corresponde a los ajustes realizados utilizando la ecuación (3.2).

ajustes de los datos. Una vez hecho este ajuste, nos interesa determinar la temperatura y el momento transversal medio dado por las ecuaciones (2.16) y (2.28), que solo dependen de q y de σ , de manera que ya se pueden calcular. Estos cálculos se hicieron utilizando el software Wolfram Mathematica 14.0.

Del análisis se encontró que la temperatura es una función creciente con la multiplicidad, como se muestra en la Figura 3.3 (a). Para hacer una analogía con la termodinámica, utilizaremos a la temperatura como una variable natural.

También, observamos que σ incrementa conforme aumenta la temperatura. Esto es un comportamiento esperado porque la temperatura depende linealmente en σ . Sin embargo, los datos siguen una tendencia muy similar sin importar la energía del centro de masa o el clasificador de multiplicidad, como lo podemos ver en la Figura 3.3 (b).

Para q se encontró que su valor también incrementa con la temperatura, pero no lo hace

\sqrt{s} (GeV)	Clasificador	Pseudorapidez	Rango de p_T
5.02	V0M	$ \eta < 0.8$	0.15-20 GeV
5.02	SPD	$ \eta < 0.8$	0.15-20 GeV
7	V0M	$ \eta < 0.5$	0.16-40 GeV
13	V0M	$ \eta < 0.8$	0.15-20 GeV
13	SPD	$ \eta < 0.8$	0.15-20 GeV

Tabla 3.3: Cortes cinemáticos reportados por ALICE.

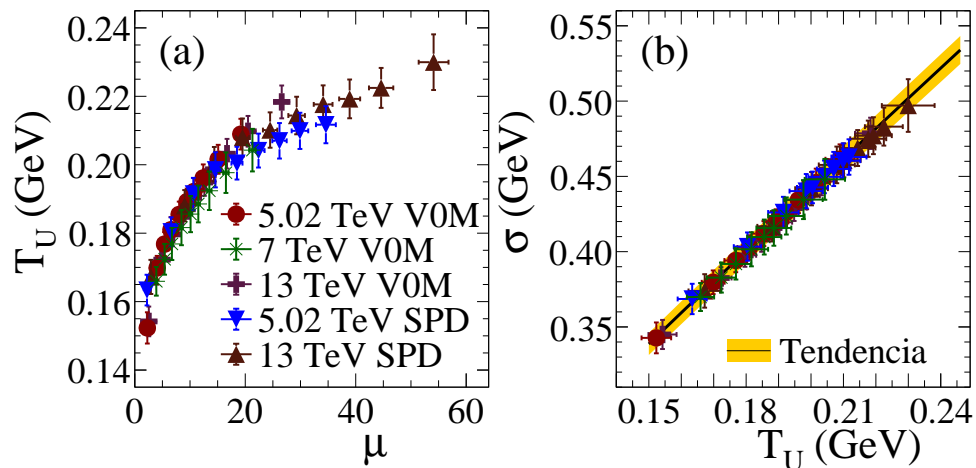


Figura 3.3: (a) Temperatura como función de la multiplicidad. (b) σ como función de la temperatura. La línea negra corresponde a la parametrización $\sigma(T)$ dada en la ecuación (3.3), y la región sombreada corresponde a la propagación de la incertidumbre.

siguiendo una misma tendencia como con σ , sino que varía dependiendo del clasificador (tal como se muestra en la Figura 3.4), su caso se tratará en la siguiente sección, donde buscaremos una función que nos permita describir el comportamiento de q y σ en función de T_U .

Además, para el caso de la temperatura se calculan los errores de la manera usual en la sección A.1. Para ver el cálculo explícito de la propagación de errores de todas las observables que se discutirán en el resto del trabajo, consultar el Apéndice A.

3.3 Parametrización

Las parametrizaciones que se discutirán a continuación se ajustaron utilizando el software GNU-PLOT 6.0. Para el caso de σ , la función que describe el comportamiento de la Figura 3.3 (b) está dado por

$$\sigma(T_U) = a_\sigma T_U^{b_\sigma}, \quad (3.3)$$

que debido a su tendencia, esta relación es válida para todos los datos analizados, obteniendo los valores $a_\sigma = 1.94 \pm 0.02 \text{ GeV}^{1-b_\sigma}$ y $b_\sigma = 0.92 \pm 0.01$. Esta función se puede ver en la Figura 3.3(b) marcada con la línea negra. La región sombreada nos muestra la propagación de la incertidumbre de esta función.

Para q en función de T_U , se propone la parametrización

$$q(T_U) = q_0 + a_q(T_U - T_0)^{b_q}, \quad (3.4)$$

donde, debido a su respuesta, debemos considerar distintos valores para a_q y b_q para cada conjunto de datos. Los valores obtenidos se muestran en la Tabla 3.4.

\sqrt{s}	Detector	$a_q(\text{GeV}^{-b_q})$	b_q
5.02	V0M	0.47 ± 0.07	0.83 ± 0.05
7	V0M	0.37 ± 0.01	0.83 ± 0.05
13	V0M	0.33 ± 0.04	0.63 ± 0.01
5.02	SPD	3.24 ± 1.04	1.29 ± 0.10
13	SPD	3.38 ± 1.02	1.39 ± 0.10

Tabla 3.4: Valores para a_q y b_q .

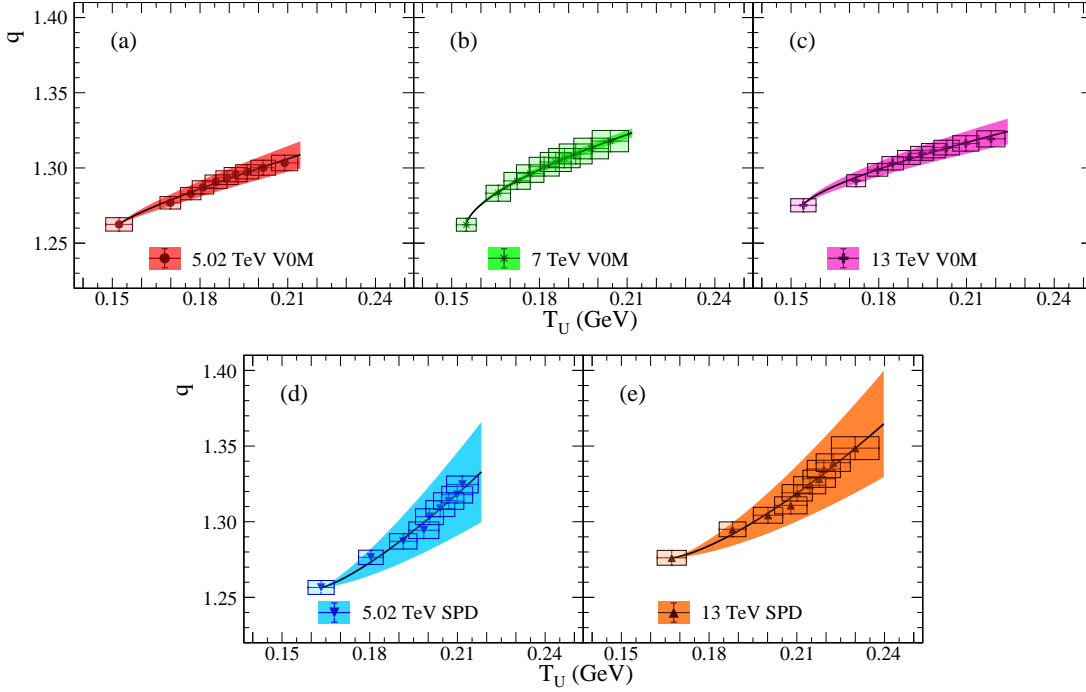


Figura 3.4: Gráfica de q en función de la temperatura para todos los datos analizados. Las marcas corresponden al valor obtenido a partir del ajuste, junto con su respectivo error. La línea negra corresponde a la parametrización obtenida en la ecuación (3.4), y las regiones sombreadas a la propagación de la incertidumbre en la parametrización.

Para q , esta función se muestra marcada con la línea negra en la Figura 3.4, comparada con los parámetros obtenidos del ajuste a los datos experimentales y su respectivo error. Al igual que antes, la región sombreada muestra la propagación de la incertidumbre en la tendencia.

Notemos que el comportamiento de q para el caso de V0M, muestra una concavidad hacia abajo, y un comportamiento creciente con T_U , de donde se sigue que q crece y que se satura conforme la multiplicidad, o la temperatura, aumenta. Esto significa que no hay un aumento considerable en la producción de partículas de alto p_T en el sistema bajo las clasificaciones V0M, conforme la multiplicidad aumenta. Además, el grado de no extensividad del sistema aumenta lentamente.

Por el contrario, bajo las clasificaciones de SPD, también se muestra un crecimiento con T_U , pero en este caso con una concavidad hacia arriba, y sin que se muestren signos de saturación. Esto implica que un incremento en la multiplicidad, conlleva un incremento en la producción de partículas de alto p_T , y un aumento importante en el grado de no extensividad del sistema.

Adicionalmente, podemos conocer la derivada de q utilizando su parametrización 3.4

$$\frac{dq}{dT} = a_q b_q (T - T_0)^{b_q - 1}. \quad (3.5)$$

Esta derivada se reporta gráficamente en la Figura 3.5, la cual no se determinará para los datos obtenidos del ajuste a los datos experimentales debido a que no tenemos suficiente resolución en los datos, sin embargo 3.5 es de utilidad para observar el comportamiento de q , y en el capítulo 4 para calcular la capacidad calorífica a través de su evaluación en las temperaturas para cada conjunto de datos. En estas gráficas podemos reafirmar que para V0M, q muestra un cambio considerable respecto a la temperatura en los primeros puntos, pero a partir de aproximadamente 0.18 GeV su

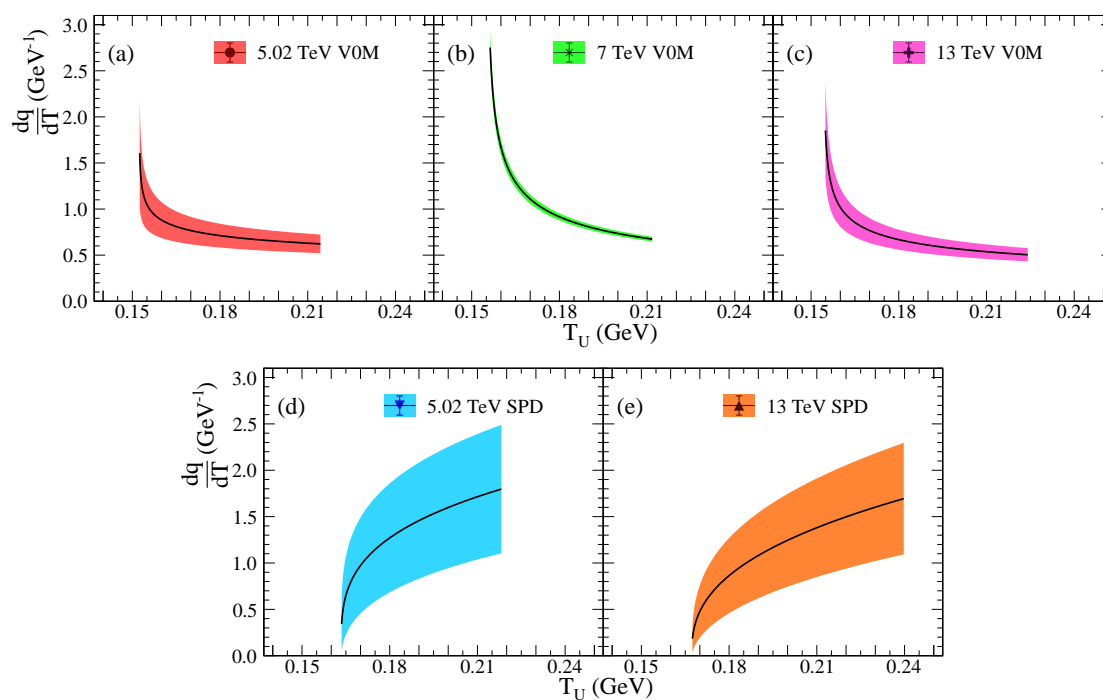


Figura 3.5: Gráficas de la derivada de q respecto a la temperatura (línea negra) dada por (3.5) para las diferentes energías y clasificadores. La región sombreada corresponde a la propagación de la incertidumbre en la derivada de la parametrización.

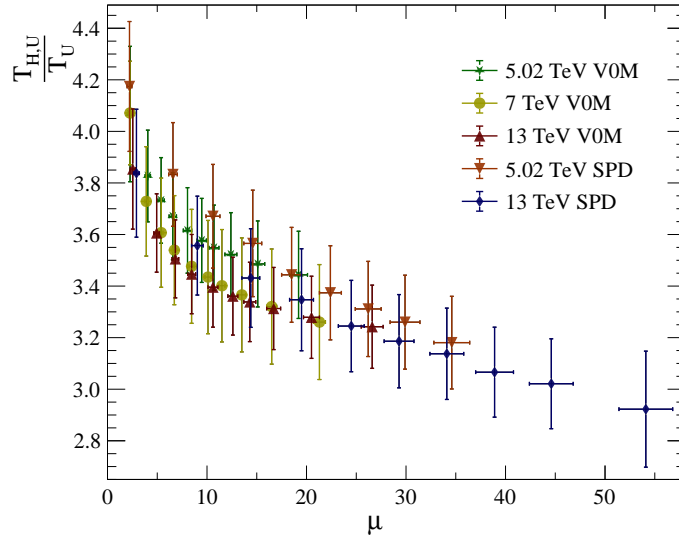


Figura 3.6: Razón entre las escalas suave y dura del espectro de p_T en función de μ para cada conjunto de datos. Los diferentes colores representan todas las energías del centro de masa reportadas.

valor cambia muy poco y casi se estabiliza. En cambio, para las clasificaciones de SPD, q también muestra cambios importantes respecto a la temperatura en los primeros puntos, y a pesar de que este cambio disminuye conforme aumenta la multiplicidad, no se estabiliza como lo hace con V0M. Es decir, la no extensividad incrementa con la temperatura, pero no lo hace de la misma manera para los diferentes clasificadores.

Por otra parte, también conocemos la parametrización de σ , y por lo tanto también podemos calcular su derivada, que está dada por

$$\frac{d\sigma}{dT} = a_\sigma b_\sigma T_U^{b_\sigma - 1}. \quad (3.6)$$

Conocer las derivadas de la parametrización de q y σ nos será útil en el capítulo 4 cuando calculemos la capacidad calorífica.

3.3.1 Razón entre las escalas suave y dura

En el capítulo anterior, definimos las escalas suave y dura del espectro de p_T a través de las ecuaciones(2.16) y (2.19), respectivamente. La razón entre estas escalas está dada por

$$\frac{T_{H,U}}{T_U} = 2 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)} \right)^{\frac{q-1}{q-3}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}\right)}, \quad (3.7)$$

que podemos calcular usando el parámetro q obtenido del ajuste a los datos experimentales.

En la Figura 3.6 notamos que a medida que la multiplicidad aumenta, el cociente $T_{H,U}/T_U$ va disminuyendo, indicando que las escalas se van pareciendo más entre ellas. Recordemos que la escala suave describe la región que se considera como bajo momento transversal, la cual se va haciendo más amplia a medida que el grado de no extensividad del sistema aumenta. Por otro lado, la escala dura describe la región de alto momento transversal. En este sentido, que el cociente dado por (3.7) se haga más pequeño indica que las regiones se van acercando más entre ellas.

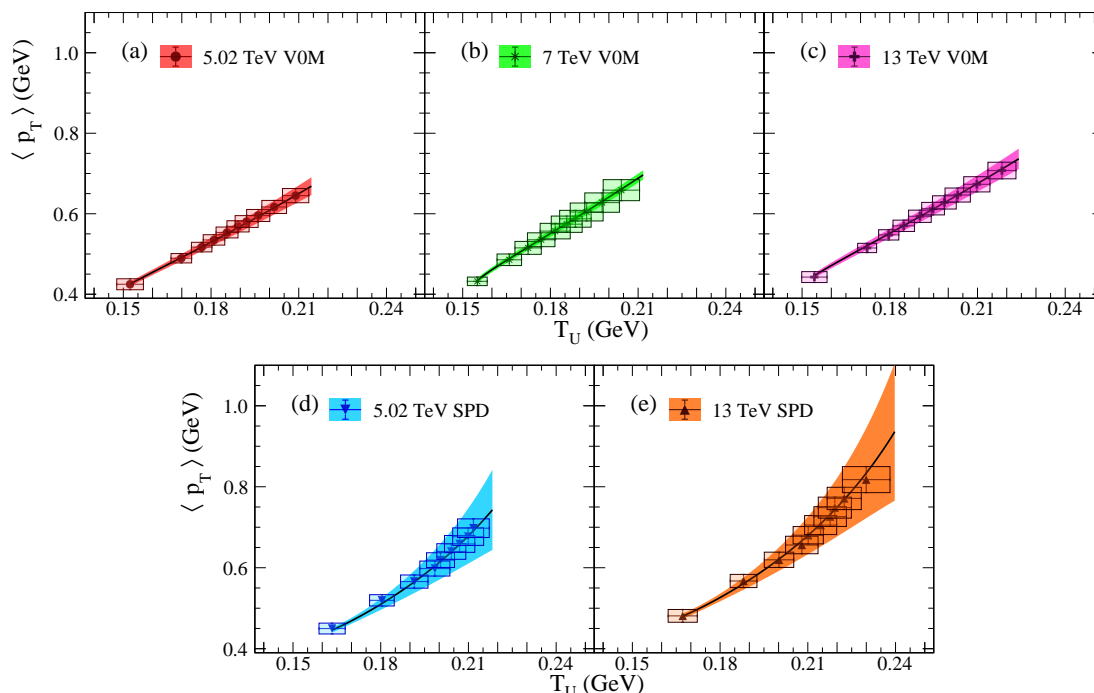


Figura 3.7: Gráficas del momento medio en función de la temperatura para todos los datos analizados. Las marcas corresponden al cálculo de la ecuación (2.28) utilizando los parámetros de ajuste, la línea negra corresponde a la estimación del momento transversal medio utilizando la parametrización de q y de σ , y el área sombreada a su incertidumbre.

3.4 Estadísticos del TMD

3.4.1 Momento transversal medio como función de la multiplicidad

En el capítulo 2, obtuvimos que el momento transversal medio está dado por la ecuación (2.28) que depende de los parámetros de ajuste que ya se obtuvieron, por lo que podemos determinar el valor para cada conjunto de datos.

Los gráficos obtenidos se muestran en la Figura 3.7, donde podemos observar un comportamiento creciente en todos los casos, es decir, el momento transversal medio siempre aumenta con la multiplicidad. Sin embargo, también se puede notar diferencia entre ambos clasificadores, debido a que la clasificación por *tracklets* contiene clases de muy alta multiplicidad que corresponden a un momento medio transversal muy alto; por ejemplo, a la energía de 13 TeV las clases I-V' de SPD corresponden al 1.419% del total de los eventos, mientras que la clase I de V0M corresponde al 1% de los eventos como se muestra en la Tabla 3.1, es decir, la clase de más alta multiplicidad de V0M está contenida en las cinco clases de multiplicidad más alta de SPD, lo que le permite discriminar eventos con mayor multiplicidad, y por lo tanto con mayor momento transversal. De hecho el momento transversal medio de las clases de mayor multiplicidad de SPD es 0.717 GeV (con una multiplicidad media de 31.91) que es cercano a 0.707 GeV (con una multiplicidad media de 26.6) de la clase I de V0M.

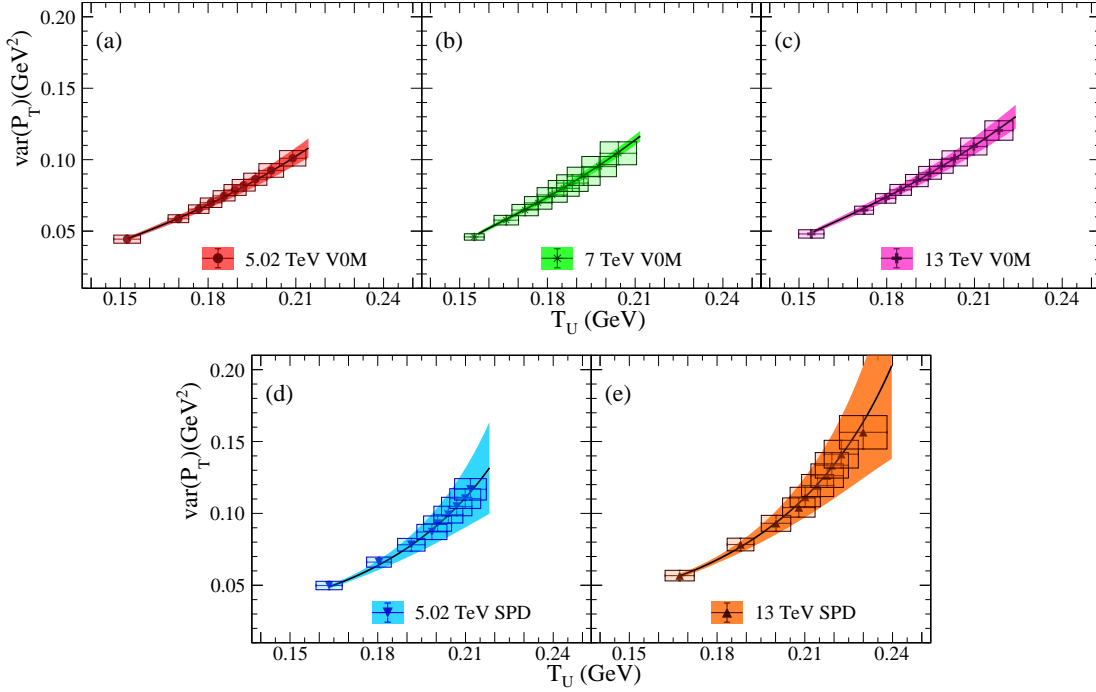


Figura 3.8: Gráficas de la varianza en función de la temperatura para todos los datos analizados. Las marcas corresponden al cálculo de la ecuación (3.9) utilizando los parámetros de ajuste, la línea negra corresponde a la estimación de la varianza del espectro de momento transverso utilizando la parametrización de q y de σ , y el área sombreada a su incertidumbre.

3.4.2 Varianza y curtosis

En la estadística, la varianza es una medida de qué tan dispersos están los datos al rededor del valor medio. En este caso, lo haremos considerando las distribuciones de momento transverso descritas con la función U (representados por las líneas continuas en la Figura 3.2), es decir, la varianza nos indicará qué tan ancha es la distribución. Calcularemos la varianza utilizando la forma usual

$$\text{var}(\mathcal{P}_T) = \langle \mathcal{P}_T^2 \rangle - \langle \mathcal{P}_T \rangle^2, \quad (3.8)$$

donde sustituyendo (2.27) para $n = 1$ y 2 y (2.16), se obtiene

$$\text{var}(\mathcal{P}_T) = \frac{2(q-1)}{3-2q} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}\right)} \right)^2 - \left(\frac{4-2q}{5-3q} \right)^2 T_U^2. \quad (3.9)$$

En la Figura 3.8, se muestran los gráficos de la varianza para los datos analizados, y se puede ver que en todos los casos hay un aumento de la anchura de la distribución a medida que la temperatura aumenta. El aumento en la varianza es mayor para SPD, lo cual depende de la clasificación de los eventos.

Por otra parte, la curtosis es una variable estadística que nos permite determinar la aportación de las colas a la probabilidad total. En este caso solo estamos tratando con una cola, que está relacionada con la producción de partículas de alto momento.

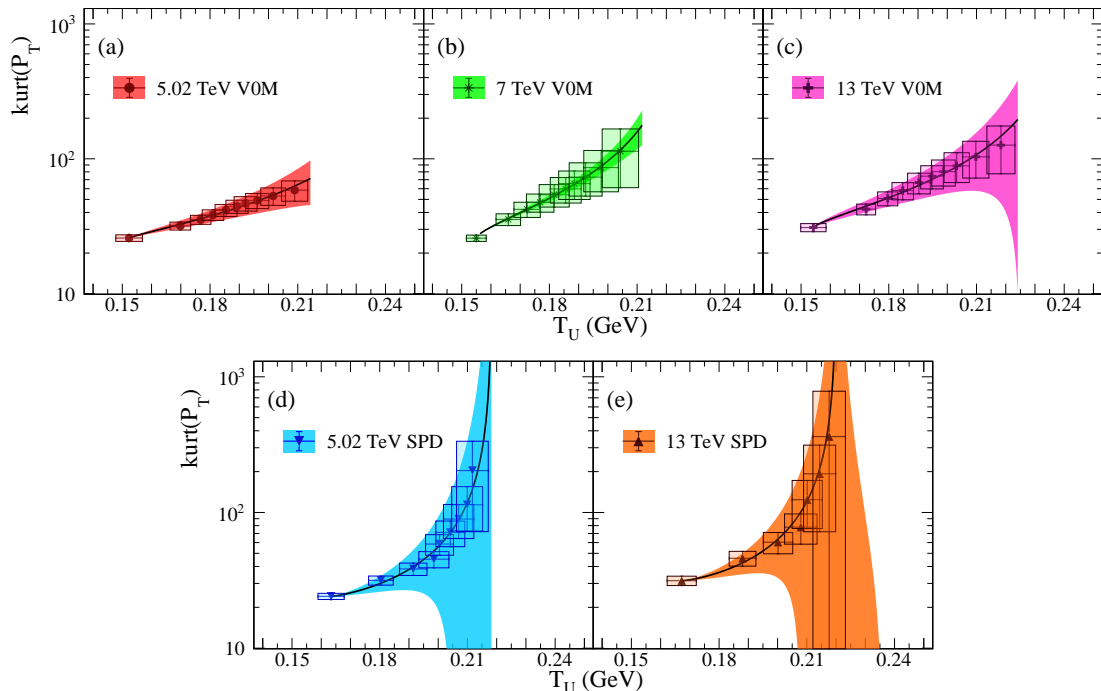


Figura 3.9: Gráficas de la curtosis en función de la temperatura para todos los datos analizados. Las marcas corresponden al cálculo de la ecuación (3.10) utilizando los parámetros de ajuste, la línea negra corresponde a la estimación de la curtosis del espectro de momento transversal utilizando la parametrización de q y de σ , y el área sombreada a su incertidumbre.

La curtosis se define de la manera usual como

$$\text{kurt}(\mathcal{P}_T) = \frac{\langle \mathcal{P}_T \rangle^4}{[\text{var}(\mathcal{P}_T)]} \left[\frac{\langle \mathcal{P}_T^4 \rangle}{\langle \mathcal{P}_T \rangle^4} - 4 \frac{\langle \mathcal{P}_T^3 \rangle}{\langle \mathcal{P}_T \rangle^3} + 6 \frac{\langle \mathcal{P}_T^2 \rangle}{\langle \mathcal{P}_T \rangle^2} - 3 \right], \quad (3.10)$$

y su comportamiento se muestra gráficamente en la Figura 3.9, donde podemos notar que también existe mayor probabilidad de detectar partículas de alto momento conforme aumenta la energía del centro de masa, la temperatura o la multiplicidad. La clasificación SPD permite ver esto con más detalle.

En general, podemos decir que la probabilidad de producir partículas de alto momento transversal aumenta conforme lo hace la multiplicidad y la energía del centro de masa. Esto es consistente con el hecho de que las escalas suave y dura se hacen más parecidas conforme aumenta la multiplicidad, como se puede observar en la Figura 3.6.

Capítulo 4

Entropía y capacidad calorífica

4.1 Entropía de Shannon

En 1948, Claude E. Shannon publicó el artículo “A Mathematical theory of communication” que estableció las bases de la teoría de la información. En ese año, los avances tecnológicos como la transmisión de señales, hizo que fuera crucial buscar una forma de optimizar cómo se enviaban y procesaban los datos.

Shannon se basó en conceptos de la termodinámica y de la mecánica estadística, utilizando particularmente el concepto de entropía y adaptándolo a la teoría de la información. La idea central es que cuanto menos probable sea un evento, más información proporciona cuando ocurre. La entropía de Shannon para distribuciones discretas se define como [34]

$$H = -K \sum_{i=1}^n P(x) \log P(x), \quad (4.1)$$

donde $P(x)$ es la probabilidad de que ocurra un evento. La ecuación (4.1) toma en cuenta todas las probabilidades de los posibles eventos, y las suma. De esta manera, si un evento es muy probable no nos aporta mucha información, por lo que su contribución a la entropía es pequeña. En cambio, si ocurre un evento poco probable, nos aporta más información, por lo que su contribución a la entropía es mayor.

La entropía de Shannon que se muestra en la ecuación (4.1) considera distribuciones de probabilidad con variable discreta, sin embargo, será de nuestro interés aplicarla para distribuciones de probabilidad con variable continua, de manera que podemos reescribirla como

$$\mathcal{H} = -K \int_R P(x) \ln P(x) dx. \quad (4.2)$$

La entropía de Shannon para distribuciones de probabilidad continua, puede ser negativa, debido a que la escala de medida, establece un cero arbitrario, de manera que se hace posible obtener valores menores que cero. Sin embargo, la entropía debe ser creciente y su derivada debe tener valores positivos [34].

4.2 Cálculo de la entropía

Utilizaremos la ecuación (4.2), debido a que estamos utilizando distribuciones de probabilidad con variable continua. Para ésto, necesitaremos el TMD normalizado (nTMD). Además elegiremos la constante $K = 1$, de manera que la ecuación (4.2) ahora se calcularía como

$$\mathcal{H} = - \int_0^\infty (\text{nTMD}) \ln (\text{nTMD}) dp_T, \quad (4.3)$$

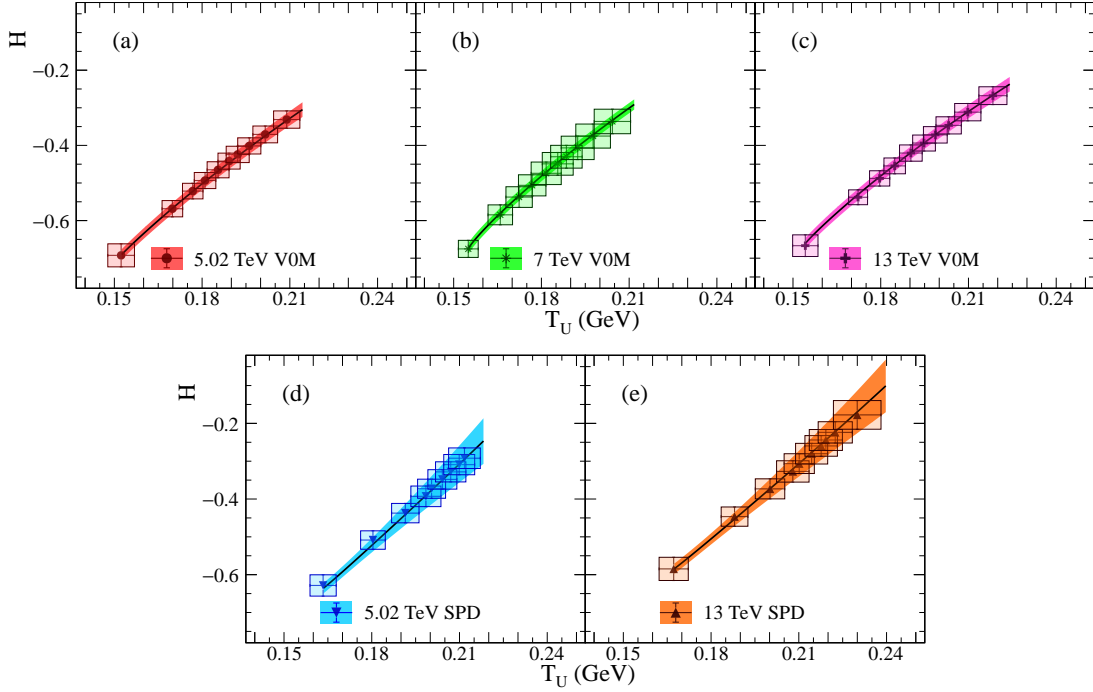


Figura 4.1: Gráficas de la entropía de Shannon en función de la temperatura para todos los datos analizados. Las marcas corresponden al cálculo de la ecuación (4.8) utilizando los parámetros de ajuste q y σ . La línea negra corresponde al cálculo de la misma ecuación, pero utilizando las parametrizaciones $q(T)$ y $\sigma(T)$, y la región sombreada a la propagación de la incertidumbre en la parametrización.

que en términos de la U , podemos escribir como

$$\mathcal{H} = - \int_0^\infty \left(\frac{U(a, b, z)}{I_0} \right) \ln \left(\frac{U(a, b, z)}{I_0} \right) dp_T, \quad (4.4)$$

donde los parámetros a, b y z , están definidos como en la ecuación (2.11), por su parte I_0 es el factor que normaliza al TMD, dado por

$$I_0 = \frac{\sigma}{(2-q)\Gamma(a)} \sqrt{\frac{q-1}{2}}. \quad (4.5)$$

Utilizando propiedades de logaritmos, encontramos que la ecuación (4.4) se puede escribir como

$$\mathcal{H} = - \frac{1}{I_0} \int_0^\infty U(a, b, z) \ln [U(a, b, z)] dp_T + \frac{1}{I_0} \int_0^\infty U(a, b, z) \ln (I_0) dp_T, \quad (4.6)$$

y definiendo \mathcal{H}_1

$$\mathcal{H}_1 = - \int_0^\infty U(a, b, z) \ln [U(a, b, z)] dp_T, \quad (4.7)$$

encontramos que la entropía es

$$\mathcal{H} = \ln I_0 + \frac{\mathcal{H}_1}{I_0}. \quad (4.8)$$

La integral de la ecuación (4.7) no se puede expresar en términos de funciones fundamentales o especiales, por lo que será necesario utilizar métodos numéricos para obtenerla. Además, las integrales requeridas para el cálculo de su error vienen detalladas en el apéndice A.4.

En general, notemos que la ecuación (4.8) sólo depende de q y de σ , por lo que podemos utilizar los parámetros del ajuste experimental para obtener valores de la entropía. Pero por otra parte, también conocemos la parametrización $q(T_U)$ y $\sigma(T_U)$, que podemos utilizar en la ecuación (4.4) para comparar los datos obtenidos experimentalmente, con los que surgen de hacer la parametrización.

En la Figura 4.1 se muestran los datos obtenidos de la entropía para el ajuste a los datos experimentales, comparados con los que surgen de determinar la entropía utilizando la parametrización. En todos los casos, podemos notar que \mathcal{H} incrementa con la temperatura, lo que es un comportamiento esperado debido al ensanchamiento y el incremento en la curtosis con la multiplicidad y la temperatura, lo que es consistente en el incremento de la probabilidad de observar eventos raros (mayor producción de partículas de alto p_T). Las gráficas de V0M, muestran una concavidad hacia abajo, que no está presente en las gráficas de SPD. Por lo tanto, la entropía de Shannon crece lentamente conforme la multiplicidad lo hace. Para SPD, la entropía crece con la multiplicidad de una manera más rápida.

4.3 Capacidad calorífica

En termodinámica, la capacidad calorífica describe la cantidad de energía que un sistema debe absorber para aumentar su temperatura, esta relacionada con la entropía mediante la relación [35]

$$C = T \frac{d\mathcal{H}}{dT}. \quad (4.9)$$

Para el problema que nos concierne, usaremos esta definición de la capacidad calorífica, de manera que será necesario calcular las derivadas de la entropía con respecto a la temperatura. Como consecuencia de la dependencia de \mathcal{H} de los parámetros q y σ debemos utilizar la regla de la cadena, de manera que la derivada se vería

$$\frac{d\mathcal{H}}{dT} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \frac{dq}{dT} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{dT} \right), \quad (4.10)$$

donde ambas parciales de la entropía van a tener la misma estructura, por lo que respecto a cualquiera de los dos parámetros

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \alpha} = \left(\frac{1}{I_0} - \frac{\mathcal{H}_1}{I_0^2} \right) \frac{\partial I_0}{\partial \alpha} + \frac{1}{I_0} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \alpha}, \quad (4.11)$$

las derivadas de I_0 respecto de q y σ son

$$\frac{\partial I_0}{\partial \sigma} = \frac{1}{(2-q)\Gamma(a)} \sqrt{\frac{q-1}{2}}, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial I_0}{\partial q} = \frac{\sigma}{2\sqrt{2(q-1)}(2-q)\Gamma(a)} + \frac{\sigma}{(2-q)^2\Gamma(a)} \sqrt{\frac{q-1}{2}} + \frac{\sigma\psi^{(0)}(a)}{\sqrt{2}(2-q)(q-1)^{\frac{3}{2}}\Gamma(a)}, \quad (4.13)$$

donde ψ^0 es la función poligamma de orden cero, mientras que para la derivada de \mathcal{H}_1 respecto de q o σ

$$\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(- \int_0^\infty U(a, b, z) \ln[U(a, b, z)] dp_T \right), \quad (4.14)$$

que a su vez es

$$\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \alpha} = - \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \alpha} U(a, b, z) \ln[U(a, b, z)] dp_T. \quad (4.15)$$

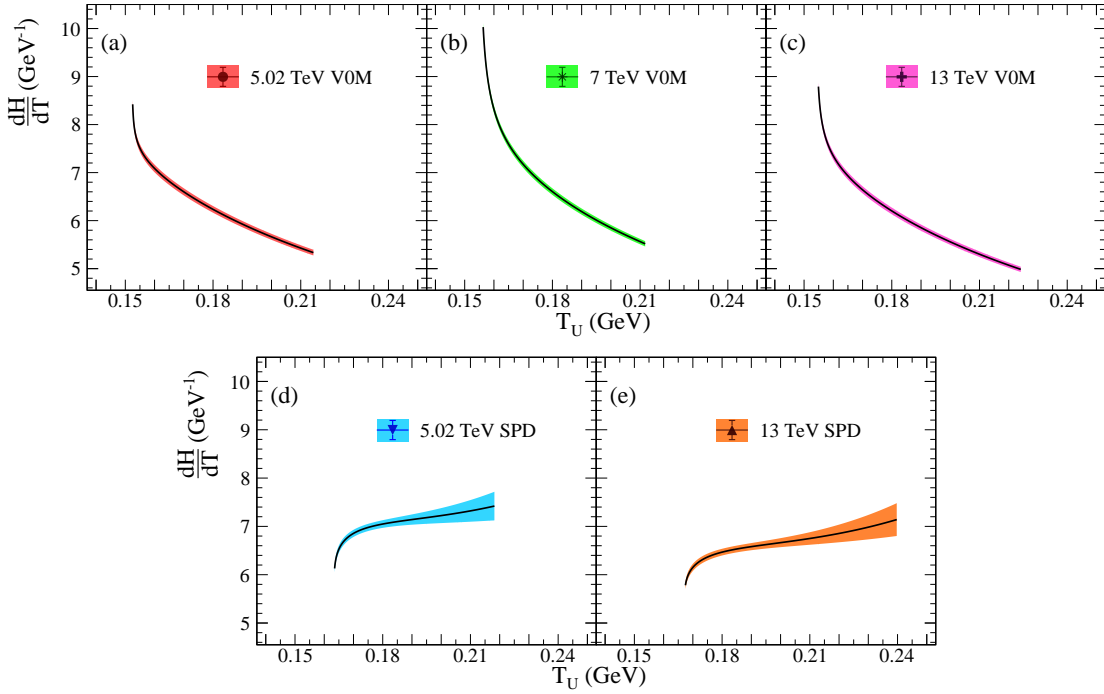


Figura 4.2: Gráficas de la derivada de la entropía como función de la temperatura.

Fijémonos en el integrando de esta ecuación, que podemos reescribir como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} (U(a, b, z) \ln[U(a, b, z)]) &= \frac{\partial U(a, b, z)}{\partial \alpha} (\ln[U(a, b, z)] + 1) \\ &= \ln[eU(a, b, z)] \frac{\partial U(a, b, z)}{\partial \alpha}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

cuya integral, también se debe hacer numéricamente. El desarrollo de las derivadas de U respecto a ambos parámetros se muestran en el Apéndice A.

De manera que, junto con las derivadas de $q(T_U)$ y de $\sigma(T_U)$ que se calcularon en la sección anterior, ya se tienen todos los factores necesarios para incluir en la ecuación (4.11) y, a su vez, en la ecuación (4.10).

El comportamiento de la derivada de la entropía se muestra gráficamente en la Figura 4.2, donde podemos ver que se cumple la otra condición de la entropía, es decir, su derivada es positiva. Además, vemos que complementa nuestra descripción del comportamiento que vimos en la Figura 4.1, y podemos notar que bajos valores de p_T requieren un menor incremento en la temperatura para cambiar su entropía, pero conforme aumenta p_T también se requiere aumentar más la temperatura para lograr un cambio en la entropía. Con base en estos gráficos, considerando que no tenemos valores negativos de T_U , y de acuerdo a la ecuación (4.9), podemos intuir que la capacidad calorífica será positiva tal como lo estableció Shannon[34].

Desarrollando algebraicamente, podemos reescribir la ecuación (4.10) como

$$\frac{d\mathcal{H}}{dT} = \frac{1}{I_0} \left[\left(\frac{\partial I_0}{\partial q} \left(1 - \frac{\mathcal{H}_1}{I_0} \right) + \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial q} \right) \frac{dq}{dT} + \left(\frac{\partial I_0}{\partial \sigma} \left(1 - \frac{\mathcal{H}_1}{I_0} \right) + \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \sigma} \right) \frac{d\sigma}{dT} \right], \quad (4.17)$$

este resultado es un factor necesario para calcular la capacidad calorífica de acuerdo a la ecuación

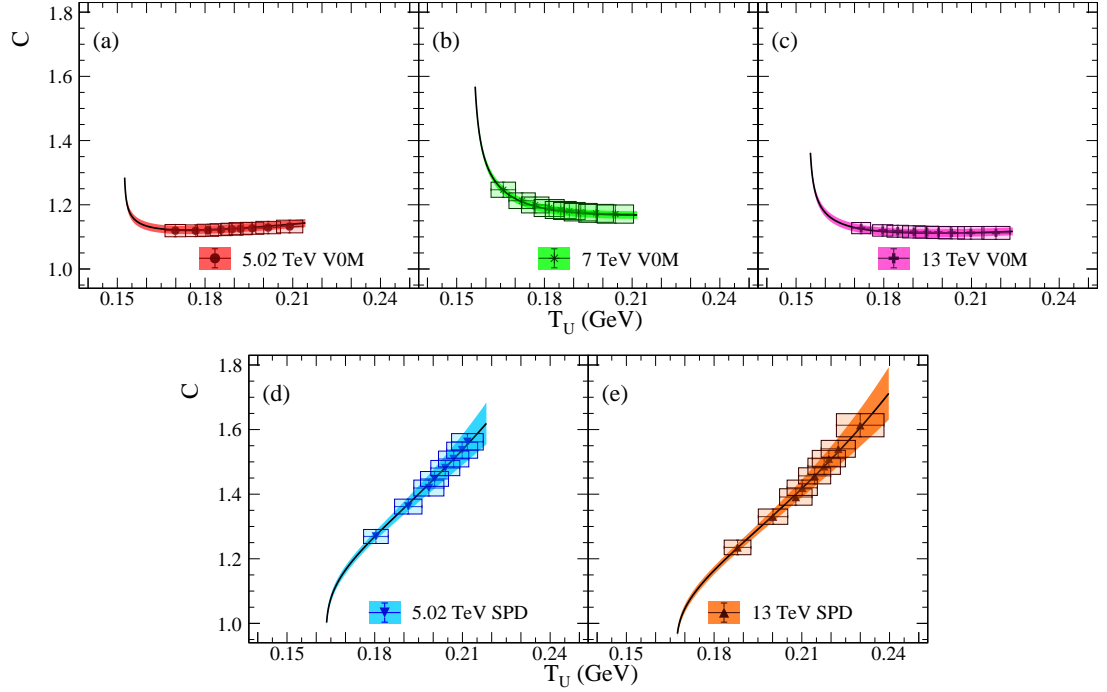


Figura 4.3: Gráfica de la capacidad calorífica. Las marcas corresponden al cálculo de la ecuación (4.22). La línea negra corresponde al cálculo de la misma ecuación utilizando la parametrización, y la línea sombreada es su incertidumbre.

(4.9), que ahora se vería

$$C = \frac{T_U}{I_0} \left[\left(\frac{\partial I_0}{\partial q} \left(1 - \frac{\mathcal{H}_1}{I_0} \right) + \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial q} \right) \frac{dq}{dT} + \left(\frac{\partial I_0}{\partial \sigma} \left(1 - \frac{\mathcal{H}_1}{I_0} \right) + \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \sigma} \right) \frac{d\sigma}{dT} \right], \quad (4.18)$$

Ahora, de la ecuación (2.16), despejaremos σ , de manera que podamos reescribir la constante de normalización I_0 como

$$I_0 = \sqrt{\pi} \frac{(q-1)\Gamma(a+\frac{1}{2})}{(2-q)\Gamma(a)^2} T_U = I_{0q}(q)T_U, \quad (4.19)$$

y el parámetro z también lo podemos reescribir

$$z = \left(\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a+\frac{1}{2})} \right)^2 \frac{p_T^2}{2T_U^2}. \quad (4.20)$$

Si reorganizamos la ecuación (4.18) tenemos

$$C = \left(1 - \frac{\mathcal{H}_1}{I_0} \right) \left(\frac{T_U}{I_0} \frac{\partial I_0}{\partial q} \frac{dq}{dT} + \frac{T_U}{I_0} \frac{\partial I_0}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{dT} \right) + \frac{T_U}{I_0} \frac{d\mathcal{H}_1}{dT}, \quad (4.21)$$

que utilizando (4.18) y (4.19), obtenemos

$$C = \left(1 - \frac{\mathcal{H}_1}{I_0} \right) \left(1 + T_U \frac{I'_{0q}}{I_{0q}} \frac{dq}{dT} \right) - \frac{T_U}{I_0} \int_0^\infty (\ln U + 1) \frac{dU}{dT} dp_T, \quad (4.22)$$

donde la integral es

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty (\ln U + 1) \frac{dU}{dT} dp_T &= \frac{\sqrt{2\pi}a(q-2)\Gamma(a+\frac{1}{2})}{(a+\frac{1}{2})^2(q-3)\Gamma(a)} \left\{ \left(\frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})}{\Gamma(a)} \right) - \left(a + \frac{1}{2} \right)^2 \left[\psi^{(0)} \left(a + \frac{1}{2} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \psi^{(0)}(a) \right] T_U \frac{dq}{dT} \right\} - \left(a + \frac{1}{2} \right) \frac{dq}{dT} \int_0^\infty [\ln U(a, b, z) + 1] U^{(1,0,0)}(a, b, z) dp_T \\
 &\quad + \frac{a}{T_U^2} \left(\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a+\frac{1}{2})} \right)^2 \left(\frac{1}{T_U} - \left[\psi^{(0)} \left(a + \frac{1}{2} \right) - \psi^{(0)}(a) \right] \frac{dq}{dT} \right) \\
 &\quad \times \int_0^\infty p_T^2 U(a+1, b+1, z) \ln U(a, b, z) dp_T.
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

El comportamiento de la capacidad calorífica se muestra en la Figura 4.3, donde podemos ver que la capacidad calorífica depende del clasificador de multiplicidad. Muestra un comportamiento esperado para SPD, donde incrementa conforme aumenta la multiplicidad, es decir, el sistema necesita más energía para calentarse, lo que significa que el sistema requiere colisiones más energéticas para producir más partículas cargadas, con valores más altos de p_T .

Para VOM tenemos un caso completamente diferente, porque la capacidad calorífica disminuye con la temperatura, es decir, el sistema requiere más energía para enfriarse, lo que significa que demanda colisiones más energéticas para disminuir su temperatura, que es lo opuesto al clasificador SPD.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se ha estudiado la entropía de Shannon, la capacidad calorífica y su dependencia con la temperatura y la multiplicidad para las colisiones protón-protón, utilizando datos reportados por ALICE a distinta energía del centro de masa, utilizando los clasificadores V0M y SPD.

Se ajustaron los datos reportados a la función de Tricomi, con el fin de obtener valores de los parámetros q y σ . Pudimos comprobar que q muestra un comportamiento distinto dependiendo del clasificador que se utiliza, observando siempre un aumento en el grado de no extensividad del sistema. Para el caso de V0M, q aumenta lentamente con la temperatura, lo que no ocurre al utilizar el clasificador SPD donde su incremento de no extensividad es mayor. Por el contrario, σ muestra el mismo comportamiento sin importar el clasificador que se utilice.

La adquisición de estos datos nos permitió obtener funciones de ajuste que describan el comportamiento de ambos parámetros en función de la temperatura, lo cual nos es útil para poder calcular derivadas.

Se determinaron los estadísticos de la distribución de momento transverso. Encontramos que el momento transverso medio es proporcional al aumento en la temperatura notando que la clasificación por *tracklets* tiene clases de alta multiplicidad con momento transverso medio muy alto.

Se analizó la varianza y la curtosis de los datos del espectro de p_T reportados por ALICE. En ambos casos encontramos que hay un aumento con la temperatura, es decir, que la probabilidad de observar partículas con alto momento transverso incrementa con la multiplicidad.

Calculamos la entropía de Shannon utilizando los datos obtenidos de los ajustes, y las funciones que describen el comportamiento de estos datos. Estos cálculos nos permitieron observar que la entropía siempre aumenta y su derivada es siempre positiva, como era esperado, sin embargo, dependiendo del clasificador, lo hace de maneras distintas. El incremento en la entropía se relaciona con un incremento en la probabilidad de observar eventos raros, es decir, la observación de partículas de alto p_T . Esto va de acuerdo a lo antes mencionado acerca del comportamiento de la curtosis donde la probabilidad de observar partículas de alto momento transverso aumenta con la multiplicidad, es decir, la entropía captura estos resultados.

Calentar el espectro de momento transverso significa aumentar el rango de p_T donde el espectro se comporta como una distribución térmica y aumentar la probabilidad de que se generen partículas de alto p_T , ambos comportamientos son descritos por un aumento en la varianza y la curtosis, en conjunto con la entropía. Para dar una descripción cualitativa de como se calienta el espectro determinamos la capacidad calorífica, notando que muestra un cambio muy importante entre ambos clasificadores. En el caso de las clasificaciones con V0M observamos que es más fácil mantener altas temperaturas, lo que quiere decir que se requiere más energía para enfriar el sistema. Por su parte las clasificaciones con SPD muestran un comportamiento esperado donde su capacidad calorífica aumenta con la temperatura, es decir, a medida que aumenta la multiplicidad se requieren colisiones con más energía para producir partículas de alto momento transverso. Esto puede deberse a la evolución de q en función de la temperatura, en la que se observa una saturación para las clases de

VOM que no ocurre para SPD, lo cual puede ser consecuencia de la velocidad a la que incrementa la multiplicidad media en cada uno de los clasificadores.

Apéndice A

Propagación de errores

Debido a que en este trabajo estamos tratando con valores obtenidos experimentalmente, debemos considerar que los datos van a tener un error que se va a propagar al realizar los cálculos. La fórmula que nos permite determinar la propagación de errores es

$$\delta^2(f(x, y)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \delta x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \delta y^2 \quad (\text{A.1})$$

De manera que debemos conocer la propagación de los errores para las escalas del espectro de p_T , el momento medio, la entropía, y la capacidad calorífica.

A.1 Escalas del espectro de p_T

De acuerdo a los cálculos realizados en el capítulo 2, el valor de T_U es

$$T_U = \sigma \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi(q-1)}\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}, \quad (\text{A.2})$$

de manera que de acuerdo a (A.1) el error estará dado por

$$\delta_{T_U}^2 = \left(\frac{\partial T_U}{\partial q} \delta_q\right)^2 + \left(\frac{\partial T_U}{\partial \sigma} \delta_\sigma\right)^2, \quad (\text{A.3})$$

donde las derivadas son

$$\frac{\partial T_U}{\partial q} = -\sigma \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{2\pi(q-1)}^3 \Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)} - \frac{\sigma \Gamma\left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}\right) \psi^{(0)}\left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi(q-1)}^5 \Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)} + \frac{\sigma \Gamma\left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}\right) \psi^{(0)}\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\sqrt{2\pi(q-1)}^5 \Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}, \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial T_U}{\partial \sigma} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi(q-1)}\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}. \quad (\text{A.5})$$

Añadiendo estas derivadas a a la ecuación (A.3), junto con los valores δ_q y δ_σ que fueron obtenidos del ajuste, tenemos la propagación del error para el caso de la temperatura.

A.2 Momento medio

Para $\langle p_T \rangle$, de acuerdo a los cálculos realizados en el capítulo 2, su valor está dado por

$$\langle p_T \rangle = \frac{(q-1)(3q-5)}{(2-q)(2q-3)} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}\right)} \right)^2 T_U. \quad (\text{A.6})$$

Para calcular el error de esta ecuación, es conveniente dividirla en dos partes, la primera será una función que solo considere la parte que depende de q , es decir

$$g(q) = \frac{(q-1)(3q-5)}{(2-q)(2q-3)} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}\right)} \right)^2, \quad (\text{A.7})$$

de manera que podemos reescribir (A.6) como

$$\langle p_T \rangle = g(q)T_U, \quad (\text{A.8})$$

y que de acuerdo a A.1, su error será

$$\delta_{\langle p_T \rangle}^2 = \left(T_U \delta_q \frac{\partial g(q)}{\partial q} \right)^2 + (g(q) \delta_{T_U})^2, \quad (\text{A.9})$$

donde δ_{T_U} es el valor obtenido en la sección anterior por (A.3).

A.3 Incertidumbre en la parametrización de $q(T)$ y $\sigma(T)$

En el capítulo 3 encontramos que la parametrización de σ y q es

$$\sigma(T_U) = a_\sigma T_U^{b_\sigma}, \quad (\text{A.10})$$

$$q(T_U) = q_0 + a_q (T_U - T_0)^{b_q}. \quad (\text{A.11})$$

Para calcular su error, o la incertidumbre en la tendencia, usaremos nuevamente (A.1), con lo que que obtenemos

$$\delta_{q(T)}^2 = ((T - T_0)^{b_q} \delta_{a_q})^2 + (a_q (T - T_0)^{b_q} \log(T - T_0) * \delta_{b_q})^2, \quad (\text{A.12})$$

$$\delta_{\sigma(T)}^2 = (T_q^{b_\sigma} \delta_{a_\sigma})^2 + (a_\sigma * (T)^{b_\sigma} \log(T) \delta_{b_\sigma})^2. \quad (\text{A.13})$$

También encontramos que la derivada de $q(T)$ es

$$\frac{dq}{dT} = a_q b_q (T - T_0)^{b_q - 1}, \quad (\text{A.14})$$

que para calcular su error, podemos descomponerlo en sus derivadas parciales

$$\frac{\partial}{\partial a_q} \left(\frac{dq}{dT} \right) = b_q (T - T_0)^{b_q - 1}, \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\partial}{\partial b_q} \left(\frac{dq}{dT} \right) = a_q (T - T_0)^{b_q - 1} + a_q b_q (T - T_0)^{b_q - 1} \ln(T - T_0), \quad (\text{A.16})$$

de manera que juntando (A.15) y (A.16), obtenemos que su error es

$$\delta_{\frac{dq}{dT}}^2 = (b_q (T - T_0)^{b_q - 1} \delta_{a_q})^2 + (a_q (T - T_0)^{b_q - 1} + a_q b_q (T - T_0)^{b_q - 1} \ln(T - T_0) \delta_{b_q})^2. \quad (\text{A.17})$$

Por otra parte tenemos que la derivada de σ es

$$\frac{d\sigma}{dT_U} = a_\sigma b_\sigma T_U^{b_\sigma - 1}, \quad (\text{A.18})$$

de manera que sus derivadas serán

$$\frac{\partial}{\partial a_\sigma} \left(\frac{d\sigma}{dT} \right) = b_\sigma T_U^{b_\sigma - 1}, \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{\partial}{\partial b_\sigma} \left(\frac{d\sigma}{dT} \right) = a_\sigma T_U^{b_\sigma - 1} + a_\sigma b_\sigma T_U^{b_\sigma - 1} \log T_U, \quad (\text{A.20})$$

por lo que juntando (A.19) y (A.20), obtenemos que el error de la derivada de σ es

$$\delta_{\frac{d\sigma}{dT}}^2 = \left(b_\sigma T_U^{b_\sigma - 1} \right)^2 \delta_{a_\sigma} + \left(a_\sigma T_U^{b_\sigma - 1} + a_\sigma b_\sigma T_U^{b_\sigma - 1} \log T_U \right)^2 \delta_{b_\sigma}. \quad (\text{A.21})$$

A.4 Entropía

Para calcular la propagación de errores en la H , tomando en cuenta que depende de los parámetros q y σ , de acuerdo con (A.1) tenemos que

$$\delta_{\mathcal{H}}^2 = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \delta_q \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \sigma} \delta_\sigma \right)^2, \quad (\text{A.22})$$

donde, como se vio en la sección de la capacidad calorífica, la parcial de \mathcal{H} respecto de q o de σ tiene la misma estructura, dada por

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \alpha} = \frac{1}{I_0} \frac{\partial I_0}{\partial \alpha} + \left(\frac{1}{I_0} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \alpha} - \frac{\mathcal{H}_1}{I_0^2} \frac{\partial I_0}{\partial \alpha} \right), \quad (\text{A.23})$$

de manera que

$$\delta_{\mathcal{H}}^2 = \left[\left(\frac{1}{I_0} \frac{\partial I_0}{\partial q} + \left(\frac{1}{I_0} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial q} - \frac{\mathcal{H}_1}{I_0^2} \frac{\partial I_0}{\partial q} \right) \right) \delta_q \right]^2 + \left[\left(\frac{1}{I_0} \frac{\partial I_0}{\partial \sigma} + \left(\frac{1}{I_0} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \sigma} - \frac{\mathcal{H}_1}{I_0^2} \frac{\partial I_0}{\partial \sigma} \right) \right) \delta_\sigma \right]^2. \quad (\text{A.24})$$

Algunas derivadas ya se han calculado en la sección 4.3 al calcular la capacidad calorífica, donde también es necesario utilizar la derivada de U respecto a cada parámetro

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q} U \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) &= \frac{1}{(q-1)^2} U^{(1,0,0)} \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) \\ &\quad - \frac{\pi p_T^2}{2\sigma^2} U^{(0,0,1)} \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} U \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) = \frac{\pi p_T^2}{(q-1)\sigma^3} U^{(0,0,1)} \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right), \quad (\text{A.26})$$

donde $U^{0,0,1}(a, b, z)$ es

$$U^{(0,0,1)} \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) = \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2} \right) U \left(\frac{1}{q-1} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right), \quad (\text{A.27})$$

de manera que las ecuaciones (A.25) y (A.26) son

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q} U \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) &= \frac{1}{(q-1)^2} U^{(1,0,0)} \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) \\ &\quad - \frac{\pi p_T^2}{2\sigma^2} \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2} \right) U \left(\frac{1}{q-1} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} U \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) = \frac{\pi p_T^2}{(q-1)\sigma^3} \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2} \right) U \left(\frac{1}{q-1} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right), \quad (\text{A.29})$$

que forman parte de la derivada de \mathcal{H}_1 , que habíamos escrito como

$$\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \alpha} = - \int_0^\infty \ln[eU(a, b, z)] \frac{\partial U(a, b, z)}{\partial \alpha} dp_T, \quad (\text{A.30})$$

de manera que las derivadas serán

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial q} &= - \int_0^\infty \ln \left[eU \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) \right] \frac{1}{(q-1)^2} U^{(1,0,0)} \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) \\ &\quad - \frac{\pi p_T^2}{2\sigma^2} \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2} \right) U \left(\frac{1}{q-1} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) dp_T \\ &= \frac{\pi}{2\sigma^2} \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2} \right) \int_0^\infty p_T^2 U \left(\frac{1}{q-1} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) \ln \left[eU \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) \right] dp_T \\ &\quad - \frac{1}{(q-1)^2} \int_0^\infty U^{(1,0,0)} \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) \ln \left[eU \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) \right] dp_T, \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \sigma} &= - \int_0^\infty \ln \left[eU \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) \right] \frac{\pi p_T^2}{(q-1)\sigma^3} \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2} \right) U \left(\frac{1}{q-1} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) dp_T \\ &= \frac{\pi(q-1)}{\sigma^3} \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2} \right) \int_0^\infty p_T^2 U \left(\frac{1}{q-1} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) \ln \left[eU \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) \right] dp_T, \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

por lo que ya tenemos todas las ecuaciones necesarias para implementar en (A.24), y a su vez en (A.22) para calcular el error de la entropía.

A.5 Capacidad calorífica

Para calcular el error en la capacidad calorífica, de acuerdo con (A.1) y la dependencia de los parámetros q y σ , tenemos que

$$\delta_C^2 = \left(\frac{\partial C}{\partial q} \delta_q \right)^2 + \left(\frac{\partial C}{\partial \sigma} \delta_\sigma \right)^2, \quad (\text{A.33})$$

que por (4.9) también podemos poner como

$$\delta_C^2 = \left(\frac{\partial}{\partial q} \left(T_U \frac{d\mathcal{H}}{dT} \right) \delta_q \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(T_U \frac{d\mathcal{H}}{dT} \right) \delta_\sigma \right)^2. \quad (\text{A.34})$$

Desarrollando las derivadas y sacando el factor común T_U^2 , ahora podemos escribir

$$C = T_U^2 \left[\left(\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \frac{dq}{dT} \right) \delta_q \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{dT} \right) \delta_\sigma \right)^2 \right], \quad (\text{A.35})$$

lo cual a su vez es equivalente a

$$C = T_U^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q^2} \frac{dq}{dT} \delta_q \right) + \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \sigma^2} \frac{d\sigma}{dT} \delta_\sigma \right) \right]. \quad (\text{A.36})$$

En (A.36), ya se conoce la temperatura, el error de q y σ , y sus derivadas respecto de T_U obtenidas en (3.5) y (3.6), por lo que ahora se deben calcular las segundas derivadas parciales respecto a cada parámetro.

Para el caso de σ tenemos que su primera derivada es

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \sigma} = & - \int_0^\infty \ln \left[\frac{e}{I_0} U \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) \right] \left(\frac{\pi p_T^2 \sigma^3 I_0}{2} \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2} \right) \right. \\ & \times U \left(\frac{1}{q-1} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) - \frac{1}{\sigma I_0} U \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) \left. \right) dp_T, \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

de donde podemos obtener su segunda derivada, que es

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \sigma^2} = & - \int_0^\infty \ln \left[\frac{e}{I_0} U \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) \right] \left(\frac{q-2}{2\sigma^7} \sqrt{\frac{1}{2(q-1)}} \Gamma \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2} \right) \right. \\ & \times \left(-8\sigma^4 U \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) + \pi p_T^2 (q-3) (\pi p_T^2 (q+1)) \right. \\ & \times U \left(\frac{1}{q-1} + \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) \left. \left. - 10\sigma^2 U \left(\frac{1}{q-1} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) \right) \right) \\ & - \frac{1}{I_0 U \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right)} \left[\frac{\pi p_T^2 \sigma^3 I_0}{2} \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2} \right) U \left(\frac{1}{q-1} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{\sigma I_0} U \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) \right]^2 dp_T. \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Por su parte para la primera derivada respecto de q tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = & - \int_0^\infty \ln \left[\frac{e}{I_0} U \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) \right] \left(\frac{1}{I_0} \left(-\frac{\pi p_T^2}{2\sigma^2} \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2} \right) \right) \right. \\ & \times U \left(\frac{1}{q-1} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) - \frac{1}{(q-1)^2} U^{(1,0,0)} \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) \left. \right) \\ & - \frac{1}{(2-q)I_0} U \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) - \frac{(2-q)\Gamma \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2} \right)}{\sigma} \sqrt{\frac{1}{2(q-1)^3}} \\ & \times U \left(\frac{1}{q-1} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) - \frac{(2-q)\Gamma \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2} \right)}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{(q-1)^5}} \\ & \times U \left(\frac{1}{q-1} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) \psi^{(0)} \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2} \right) \left. \right) dp_T, \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

y su segunda derivada será

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q^2} = & - \int_0^\infty \ln \left[\frac{e}{I_0} U \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) \right] \left(\frac{\Gamma \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2} \right)}{8\sigma^5} \sqrt{\frac{1}{2(q-1)^9}} \right. \\
& \times \left[\pi p_T^2 (q-1) \left(\pi p_T^2 (q-3)(q-2)(q-1)(q+1) U \left(\frac{1}{q-1} + \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) \right. \right. \\
& - 4\sigma^2 U \left(\frac{1}{q-1} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) \left(4 - 3q - 2q^2 + q^3 - 2(q-3)(q-2)\psi^{(0)} \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2} \right) \right) \right) \\
& + 4\sigma^4 U \left(\frac{1}{q-1} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) \left(2 - 3q + q^3 - 4(q-4)(q-1)\psi^{(0)} \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2} \right) \right. \\
& - 4(q-2)\psi^{(0)} \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2} \right)^2 - 4(q-2)\psi^{(1)} \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2} \right) \left. \right) - 16\sigma^4 (4 - 5q + q^2 + 2(q-2) \\
& \times \psi^{(0)} \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2} \right) \left. \right) U^{(1,0,0)} \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) + 4\sigma^2 (q-2) (\pi p_T^2 (q-1) \\
& \times (q-3) U^{(1,0,0)} \left(\frac{1}{q-1} + \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) + 2(q-1) \left(-U \left(\frac{1}{q-1} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) \right. \\
& - \left. \left. \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2} \right) U^{(1,0,0)} \left(\frac{1}{q-1} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) \right) \right) - 4\sigma^2 U^{(2,0,0)} \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) \left. \right) \left. \right] \\
& - \frac{1}{I_0 U \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right)} \left[\left(\frac{1}{I_0} \left(-\frac{\pi p_T^2}{2\sigma^2} \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2} \right) U \left(\frac{1}{q-1} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) \right. \right. \right. \\
& - \left. \left. \frac{1}{(q-1)^2} U^{(1,0,0)} \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) \right) \right) - \frac{1}{(2-q)I_0} U \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) \\
& - \frac{(2-q)\Gamma \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2} \right)}{\sigma} \sqrt{\frac{1}{2(q-1)^3}} U \left(\frac{1}{q-1} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) - \frac{(2-q)\Gamma \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2} \right)}{\sigma} \\
& \left. \left. \times \sqrt{\frac{2}{(q-1)^5}} U \left(\frac{1}{q-1} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \pi p_T^2 \frac{q-1}{2\sigma^2} \right) \psi^{(0)} \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{2} \right) \right] \right] dp_T.
\end{aligned} \tag{A.40}$$

Juntando (A.38) y (A.40) con (A.36), y los resultados que ya conocíamos, podemos obtener el error de la capacidad calorífica. Debido a su complejidad, las integrales que se obtienen al hacer las segundas derivadas se deben realizar numéricamente.

Bibliografía

- [1] J. Schwinger, Phys. Rev. **128**, 2425 (1962).
- [2] A. Bialas, Phys. Lett. B **466**, 301(1999).
- [3] C. Pajares y J. E. Ramírez, Eur. Phys. J. **A59**,250 (2023).
- [4] J. R. Alvarado García, D. Rosales Herrera, P. Fierro, J. E. Ramírez, A. Fernández Téllez y C. Pajares, J. Phys. G Nucl. Part. Phys. **50** 125105 (2023).
- [5] D. Rosales Herrera, J. R. Alvarado García, A. Fernández Téllez, J. E. Ramírez y C.Pajares, Phys.Rev. C **109**, 034915 (2024).
- [6] B. Andersson, *The Lund Model* (Cambridge University Press, 1998).
- [7] E. Norrbin y T. Sjöstrand, Eur. Phys. J. C **17**, 137
- [8] LHCb Collaboration, Phys. Rev. Lett. **132**, 081901 (2024).
- [9] S. Fritz, Springer Science **69**, 742 (1931).
- [10] W. Heisemberg y H. Euler, Z. Phys. **98**, 714 (1936)
- [11] W. Heisemberg, Z. Phys. **43**, 172 (1927).
- [12] N. Armesto y C. Pajares, Revista Española de Física, **25**, 4(2011).
- [13] Y. Nambu, Phys. Rev. D **10**, 4262 (1974).
- [14] F. Lizzi y C. Rosenzweig, Phys. Rev. D **31**, 1685 (1985).
- [15] D. A. Morris, Nucl. Phys. B **313**, 634 (1989).
- [16] D. J. Gross y F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973).
- [17] H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30**, 1346 (1973).
- [18] H. Fritzsch, M. Gell-Mann, y H. Leutwyler, Phys. Lett. B **47**, 365 (1973).
- [19] D. J. Gross y F. Wilczek, Phys. Rev. D **9**, 980 (1974).
- [20] B. Andersson, G. Guftafson, G. Ingelman, y T. Sjöstrand, Phys. Rep. **97**, 31 (1983).
- [21] I. Bautista, C. Pajares y J. Ramírez, Rev. Mex. Fís. **65**, 3 (2019).
- [22] C. Tsallis, Journal of Statistical Physics **52**, 479 (1988).
- [23] C. Vignat y A. Plastino, Phys. Lett. A **365**, 370 (2007).
- [24] P. Jizba, G. Lambiase, G. G. Luciano y L. PetruzzIELLO, Phys. Rev. D **105**, L121501 (2022).

- [25] A. A. Budini, Phys. Rev. E **91**, 052113 (2015).
- [26] G. B. Arfken, *Mathematical Methods for Physicist* (Academic Press, California, 1995), pp. 802-803. (Capítulo 13)
- [27] R. Hagedorn, Riv. Nuovo Cim. **6N10**, 1, (1983).
- [28] A. Bylinkin y A. Rostovtsev, Nucl. Phys. B. **888**, 65 (2014).
- [29] J. Adam, PoS **DIS2016**, 187 (2016).
- [30] ALICE Collaboration, Eur. Phys. J. C **81**, 630 (2021).
- [31] ALICE Collaboration, Eur. Phys. J. C **79**, 857 (2019).
- [32] ALICE Collaboration, Phys. Rev. C **99**, 024906 (2019).
- [33] N. Armesto y C. Pajares, Revista Iberoamericana de Física, **4**, 1 (2008).
- [34] C. E. Shannon, Bell Syst. Tech. J **27**, 379 (1948).
- [35] D. Mandal, Phys. Rev. E **88**, 062135 (2013).
- [36] D. Rosales Herrera, J. R. Alvarado García, A. Fernández Téllez, J. E. Ramírez y C.Pajares, Phys. Rev. C **110**, 015205 (2024).
- [37] Cuentos Cuánticos, (17 de junio, 2013). Schwinger, ¿De dónde salen estas partículas? cuentoscuanticos.wordpress.com/2013/06/17/efecto-schwinger/
- [38] J. L. Oltra, (23 de febrero, 2024). El núcleo atómico está lleno de unas partículas llamadas piones. muyinteresante.com/ciencia/63827.html
- [39] Instituto de Física Corpuscular, (s/f). Lattice QCD, l'estudi numèric de la interacció forta. webific.ific.uv.es/web/node/5423512