



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Métricas Anisótropas y Carentes de Homogeneidad en
Teorías Multidimensionales de la Gravedad

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

Edmundo Suárez Polo

Asesorado por

Dr. Alfredo Herrera Aguilar
Dr. Cupatitzio Ramírez Romero

Puebla Pue.
8 de junio de 2022



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Métricas Anisótropas y Carentes de Homogeneidad en
Teorías Multidimensionales de la Gravedad

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

Edmundo Suárez Polo

Asesorado por

Dr. Alfredo Herrera Aguilar
Dr. Cupatitzio Ramírez Romero

Puebla Pue.
8 de junio de 2022

Título: Métricas Anisótropas y Carentes de Homogeneidad en Teorías Multidimensionales de la Gravedad

Estudiante: EDMUNDO SUÁREZ POLO

COMITÉ

Dr. Gerardo F. Torres del Castillo
Presidente

Dr. Roberto Cartas Fuentevilla
Secretario

Dra. Mercedes P. Velásquez Quesada
Vocal

Dr. Ulises Nucamendi Gómez
Vocal

Dr. Alfredo Herrera Aguilar
Asesor

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero
Co-asesor

Resumen

En el presente trabajo se obtendrán soluciones exactas y aproximadas de métricas anisótropas e inhomogéneas en el marco de los modelos multidimensionales de la gravedad y se realizará un análisis físico de las mismas en el contexto de la física moderna y, en particular, de la cosmología.

El primer capítulo consiste en una presentación general de la teoría de los mundos membrana y su relación con la física moderna. En el segundo capítulo estudiamos un modelo pentadimensional de gravedad acoplada a un campo escalar fantasma no auto-interactuante en el que hemos añadido una función que depende únicamente de la dimensión extra y que nos permitirá realizar un estudio más general de esta clase de modelos. Partiendo de una métrica cuyo sector espacial es inicialmente anisótropo e inhomogeneo, veremos que al obtener la solución de nuestro modelo la misma se isotropiza super-exponencialmente en el tiempo mientras que el campo fantasma se desvanece exponencialmente en el tiempo, lo que es congruente con el modelo estándar de la cosmología en el que se establece que el universo partió de un estado altamente anisótropo e inhomogéneo que rápidamente transitó a un estado isótropo y homogéneo como el que se observa en la actualidad. Finalmente en el tercer capítulo estudiamos un modelo con N dimensiones extra, encontramos una solución aproximada para el factor de deformación y analizamos el comportamiento de ésta.

Introducción

Pocos años después de la formulación exitosa de la teoría general de la relatividad por parte de Albert Einstein hubo intentos por crear una teoría de campo unificado que diera cuenta en un marco común de las dos interacciones fundamentales conocidas en aquel entonces: gravedad y electromagnetismo. Motivados por los éxitos de unificación de Maxwell y del propio Einstein, existía una esperanza de acoplar en un único sustrato el campo gravitacional codificado en el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ y el campo electromagnético codificado en el cuadripotencial A_μ .

Uno de los primeros modelos de campo unificado vio la luz en 1921 cuando T. Kaluza publicó un artículo en el que intentaba acoplar la gravedad y el electromagnetismo con el auxilio de una quinta dimensión y un campo escalar auxiliar [1]. Esta quinta dimensión tendría una naturaleza sutil debido a lo que Kaluza llamó condición de cilindro: las derivadas de los campos respecto a este parámetro adicional eran nulas o sumamente pequeñas al ser de orden superior. Con esta condición Kaluza simplificó las ecuaciones de Einstein de este modelo pentadimensional y pudo estudiar también las ecuaciones de movimiento.

Sin embargo, y como el propio Kaluza notó, quedaba la cuestión de cómo demostrar la existencia de esta quinta dimensión y el por qué no había indicios de la misma en las observaciones experimentales de su época. Sería O. Klein quien en 1926 proveería de una posible explicación a esta última cuestión [2]. Basado en los últimos avances de Schrödinger y Heisenberg en la teoría cuántica y teniendo en cuenta la cuantificación de la carga eléctrica, Klein sugirió que la quinta dimensión podría estar compactificada en un círculo de radio del orden de 10^{-30} cm. Con esto Klein también daba cuenta de la condición de cilindro que Kaluza introdujera a mano.

Con el tiempo el modelo de Kaluza y Klein sería refinado por Einstein y grupos independientes de investigación en Alemania, Francia y Suiza. Sin embargo, con el descubrimiento de las interacciones nucleares disminuyó el ímpetu por la búsqueda de un campo unificado, pues ahora a las dos interacciones clásicas de la gravedad y el electromagnetismo había que agregar un conjunto de interacciones exóticas de naturaleza enteramente nuclear y que parecían tener aún menos relación con la visión geométrica de Einstein.

Durante los años 30 y 40, en el contexto del desarrollo de la física de partículas, surgió la denominada teoría de matriz S (la letra S del inglés *Scattering*) o matriz de dispersión. Las matrices S fueron introducidas por J. A. Wheeler en 1937 [3] como herramientas de cálculo para las complejas interacciones nucleares no relativistas y posteriormente retomadas y reinterpretadas por W. Heisenberg en 1943 en el primero de una serie de artículos en teoría de partículas elementales [4,5]. En aquellos años se había encontrado que con la introducción de términos no lineales en la ecuación de onda los cálculos perturbativos con integración sobre cuadrimentos de partículas virtuales conducían a divergencias a menos que se supusiera un corte superior del momento. Heisenberg propuso que esto era un indicador de una longitud universal l_0 , tan fundamental como las constantes c y \hbar , y que limitaría la posibilidad de ciertas mediciones. Basado en los resultados experimentales de su tiempo, propuso que dicha longitud universal sería del orden de 10^{-13} cm.

La idea de Heisenberg era construir un modelo más general que la teoría cuántica de campo centrándose en cantidades observables como las probabilidades de colisión, absorción y emisión, ya que estas cantidades están asociadas con el comportamiento asintótico de los campos y pueden ser estudiadas con matrices, las matrices S, que involucran el momento, el espín y otros números

cuánticos de estados de entrada y salida de partículas no interactuantes. La ventaja de este enfoque es que no requería de hacer referencia explícita al espacio y al tiempo, con lo cual se evitaban las dificultades presentes en el estudio de colisiones de partículas no puntuales como el protón y el neutrón.

En los años siguientes se fue desarrollando el modelo de Heisenberg con el estudio de las propiedades analíticas de los elementos de la matriz S [6] y se encontró que mediante este método surgía un número de singularidades “falsas” que no estaban asociadas con estados estacionarios y no estaban presentes para potenciales acotados. Debido a éste y otros problemas, la matriz S se fue dejando de lado como modelo general en favor de la teoría cuántica de campo que también venía siendo refinada con los métodos lagrangianos desarrollados por Dyson, Feynman, Schwinger y Tomonaga que reconciliaban las divergencias. Sin embargo, las matrices S siguieron jugando un importante papel en el estudio de interacciones nucleares fuertes ya que proveían de una herramienta analítica para el cálculo de las relaciones de dispersión, además de que el estudio de sus singularidades abriría eventualmente un nuevo campo que trascendería su propósito inicial y cumpliría en parte el objetivo de Heisenberg de un modelo unificado.

Durante los años 50 y 60 el estudio y puesta a prueba de los modelos de interacciones nucleares fuertes fueron consolidando una visión unificada de la miríada de partículas que se descubrían en los laboratorios de altas energías. En el contexto de las teorías de matriz S destacan los trabajos de M. Gell-Mann y su modelo de quarks en la primera etapa [7], de S. Mandelstam y la introducción de las hoy conocidas como variables de Mandelstam [8] y de T. Regge y su extensión del momento angular [9]. El trabajo de estos últimos en conjunto con los de otros físicos conducirían al *Bootstrap model* o modelo de Cuerda-de-apoyo, un antecedente de los modelos de cuerdas. Este enfoque partía de suposiciones generales sobre las simetrías que debía obedecer la matriz S y tenía la ventaja de derivar resultados sin introducir teoría de perturbaciones ni teoría de campo.

En 1968 el físico italiano G. Veneziano publicaría un artículo en el estudio de las amplitudes de dispersión de trayectorias linealmente crecientes considerando las simetrías estudiadas previamente por Regge y Mandelstam [10], dando origen al modelo de resonancia dual, denominado así por la dualidad entre los polos de Regge y las resonancias de interacciones nucleares fuertes. Este trabajo es considerado la piedra fundacional de los modelos de cuerdas, pues a partir de éste se construiría una generalización consistente a N partículas (el modelo de Veneziano es de 4) modelado por un número infinito de osciladores armónicos simples describiendo el movimiento de una cuerda unidimensional extendida [11].

Después de la publicación del artículo de Veneziano hubo un desarrollo prodigioso en el campo de los modelos de cuerdas. Las siguientes décadas se irían formulando una variedad de construcciones teóricas que añadirían nuevos tipos de simetrías capaces de albergar los diferentes campos físicos conocidos y otros tantos desconocidos. Destaca primeramente el estudio de los patrones bosónicos del modelo generalizado de resonancia dual por parte de J. H. Schwarz, J. Scherk [12] y T. Yoneya [13], descubriendo que estos patrones encajan con los del hipotético gravitón e incorporan la electrodinámica escalar. Durante estos años también se descubrió que eran necesarias dimensiones extra para que los modelos fueran consistentes, en particular, un número total de 10 dimensiones era requerido [14], aunque nuevamente surgía la cuestión de por qué no se observaban. Es en este punto que hubo un renacer del modelo de Kaluza-Klein y los mecanismos de compactificación [15] heredando con ello también uno de los principales puntos incómodos a los que ya se había enfrentado Kaluza, la cuestión de cómo detectar esas dimensiones extra. Poco después llegarían los modelos de supercuerdas, un refinamiento que permitía incorporar fermiones con la ayuda de supersimetría, pues previamente las cuerdas sólo incorporaban bosones de manera natural. Más tarde y ante el panorama de múltiples modelos de supercuerdas aparecería uno que incorporaría a todos a través de dualidades no triviales: la teoría M . La teoría M incorpora suposiciones que ya habían surgido de supercuerdas y las complementa con otras para tener un criterio unificado: 6+1 dimensiones adicionales, supersimetría, dualidad S y dualidad T entre otros ingredientes [16]. El tránsito de 10 a 11 dimensiones permitía reinterpretar las supercuerdas como casos particulares de objetos multidimensionales denominados membranas.

He aquí que aparecen los objetos centrales de nuestro trabajo: los mundos membrana. Motivados por los avances de la teoría M las siguientes décadas serían ricas en la elaboración de modelos cosmológicos, un camino que inicialmente no estaba contemplado por los teóricos de la mecánica de cuerdas pero que probaría ser enriquecedor en el estudio y abordaje de cuestiones tan fundamentales como el problema de jerarquía y la isotropía del fondo cósmico de microondas.

Índice general

Resumen	v
Introducción	vii
1. Mundos Membrana	1
1.1. Cosmología de Mundos Membrana	1
1.2. Isotropización de la membrana	3
2. Modelo pentadimensional y mecanismo de isotropización	5
2.1. Acción	5
2.2. Ecuaciones de Campo	5
2.3. Métrica	5
2.4. Soluciones	7
2.5. Escalar de Curvatura	10
3. Una aproximación N-dimensional	13
3.1. Modelo N+4-dimensional	13
3.2. Función h independiente del tiempo	15
3.3. Una aproximación al factor de deformación $A(w)$	16
Conclusiones	19
A. Escalar de Kretschmann	21
Bibliografía	23

Capítulo 1

Mundos Membrana

En la actualidad el concepto de membrana tiene varias acepciones, aunque de manera general pueden entenderse como objetos (3+1)-dimensionales que se propagan a través de espacios multidimensionales. Si bien hay antecedentes de ideas similares ya en la década de los 80 [17], no sería hasta la segunda mitad de los 90 que los modelos tomarían relevancia y serían estudiados en el contexto de la cosmología.

Como ya hemos comentado, uno de los principales conflictos que surgen de los modelos de cuerdas es la cuestión de las dimensiones extra. Existen al menos dos maneras de lidiar con el problema: a) compactificando las dimensiones en variedades de alta complejidad como en los modelos de Kaluza-Klein o b) suponer que el Universo entero es una membrana que se propaga en un hiperespacio multidimensional (que puede ser extendido).

A finales de los 90s, los trabajos de Merab Gogberashvili [18,19] por un lado y Lisa Randall y Raman Sundrum [20,21] por otro serían de los primeros estudios de las membranas en dimensiones extendidas cuyo enfoque permitía que a través de una dimensión extra el problema de jerarquía se pudiera, en principio, resolver.

La idea general en estos modelos es que nuestro Universo observable es una membrana que se propaga a través de un sustrato (N+4)-dimensional. Las interacciones electromagnética, débil y fuerte estarían confinadas en la membrana mientras que la gravedad sería libre de propagarse a través del sustrato, lo que haría de la gravedad una interacción mucho más débil en apariencia. La constante de gravitación universal G_4 y la constante cosmológica Λ_4 son en realidad cantidades efectivas de las verdaderas constantes (N+4)-dimensionales G_{N+4} y Λ_{N+4} .

1.1. Cosmología de Mundos Membrana

El modelo paradigmático en la teoría matemática de mundos membrana corresponde a una 3-(mem)brana (3 componentes espaciales y una temporal) que se propaga en un sustrato N-dimensional y cuya acción está sujeta a las siguientes prescripciones [22]:

1. La dinámica del sustrato está descrita por una acción de dimensión superior definida en términos de una densidad lagrangiana de los campos $\phi(x, w)$ que dependen de todas las coordenadas espacio-temporales del sustrato

$$S_{sust}[\phi] = \int d^4x d^N w \sqrt{|g_{(4+N)}|} \mathcal{L}(\phi(x, w)), \quad (1.1)$$

donde x corresponde a las (3+1) coordenadas de la membrana y w a las N dimensiones extra.

2. La dinámica de la membrana está descrita por una acción (3+1)-dimensional de los campos en la misma, la cual se puede promover naturalmente a una expresión de dimensión superior

CAPÍTULO 1. MUNDOS MEMBRANA
1.1. COSMOLOGÍA DE MUNDOS MEMBRANA

vía una función delta:

$$S_{brana}[\varphi] = \int d^4x d^N w \sqrt{|g_{(4)}|} \mathcal{L}(\varphi(x)) \delta^N(\vec{w} - \vec{w}_0), \quad (1.2)$$

donde consideramos que la membrana está localizada en la posición $\vec{w} = \vec{w}_0$ a lo largo de las dimensiones extra, $g_{(4)}$ es la métrica 4D inducida en la membrana y $\varphi(x)$ corresponde a los campos confinados a la membrana que sólo dependen de las cuatro dimensiones del espaciotiempo de nuestro Universo.

3. Finalmente, la acción puede contener términos que acoplan los campos del sustrato y la membrana. Estos últimos están localizados en el espacio y, por tanto, es natural que una función delta esté involucrada en tales términos, por ejemplo, en la siguiente forma:

$$S_{mix}[\phi, \varphi] = \int d^4x d^N w \sqrt{|g_{(4+N)}|} \phi^2(x, w) \varphi(x) \delta^N(\vec{w} - \vec{w}_0) \quad (1.3)$$

$$= \int d^4x \sqrt{|g_{(4)}|} \phi^2(x, w_0) \varphi(x). \quad (1.4)$$

A partir de aquí se puede proceder a la reducción dimensional y trabajar en un modelo efectivo cuatridimensional integrando sobre las dimensiones extra.

En el caso de que las dimensiones adicionales del sustrato estén altamente curvadas es conveniente proceder de manera alternativa.

Algunas de las primeras aproximaciones a los problemas donde la densidad de energía de la membrana es suficientemente grande para afectar la estructura del sustrato consistieron en modelos pentadimensionales donde dos membranas se colocan en los extremos de una quinta dimensión con simetría *AdS*. Estos modelos se conocen como modelos de Randall-Sundrum (RS) e incorporan campos fermiónicos confinados a las membranas mientras que la gravedad es libre de propagarse entre éstas y el sustrato. Poco después, al estudiar las modificaciones a las ecuaciones de Friedmann que introducían los modelos como los de RS se empezó a considerar la anchura de las membranas para compensar estas discrepancias incorporando también un enfoque cosmológico.

La anchura de la membrana depende directamente del factor de deformación de la métrica y juega un papel importante en modelos 4+N-dimensionales con $N > 2$. En el caso de modelos pentadimensionales podemos distinguir entre los de membrana delgada de los trabajos de Randall y Sundrum y los de membrana ancha como los de Kanti, Langlois y colaboradores [23,24]. La cuestión de la anchura de la membrana se torna importante cuando uno analiza las auto-interacciones de la materia en el sustrato pues en el caso de membranas delgadas éstas se vuelven divergentes.

De manera general, estos modelos poseen una métrica de la forma:

$$ds^2 = f^2(w) g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - [dw^2 + r^2(w) d\Omega_{N-1}^2], \quad (1.5)$$

donde la métrica tetradimensional $g_{\mu\nu}$ representa espaciotiempo de Minkowski o de Sitter, $d\Omega_{N-1}^2$ es el elemento de línea de una variedad compacta $(N-1)$ -dimensional (generalmente una $(N-1)$ -esfera unitaria) y $f(w)$ es el factor de deformación.

A grandes rasgos las soluciones de membrana ancha pueden ser clasificadas en dos grandes grupos: soluciones *estáticas* y soluciones *dependientes del tiempo* [25], a su vez, las soluciones estáticas pueden identificarse en membranas anchas topológicamente no triviales y triviales, dependiendo si se da por supuesta la presencia de defectos topológicos o no en el espaciotiempo, respectivamente.

El caso más simple de una solución topológicamente no trivial corresponde a soluciones pentadimensionales de membrana ancha y un solo campo escalar con simetría de Poincaré tetradimensional:

$$S = \int d^5x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi G} R - \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 - V(\phi) \right]. \quad (1.6)$$

En general, la métrica de un espaciotiempo estático de cinco dimensiones con simetría de Poincaré en cuatro dimensiones puede escribirse como

$$ds^2 = e^{2A(w)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + e^{8A(w)}dw^2, \quad (1.7)$$

donde A es una función de la coordenada extra sujeta a una restricción que depende del potencial. En [26] se demostró que para encontrar soluciones regulares el potencial V debe alternar signos y estar sujeto al siguiente ajuste

$$\bar{V}(\infty) = 0, \bar{V}(w) := \int_0^w \sqrt{-g}V(\phi(w))dw = \int_0^w e^{8A(w)}V(\phi(w))dw, \quad (1.8)$$

el límite de anchura cero está bien definido y la solución se reduce al modelo de Randall-Sundrum si el valor asintótico del potencial $V(\phi)$ es una constante: la constante cosmológica del sustrato.

Por otro lado, si consideramos un campo escalar fantasma:

$$S = \int d^5x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi G}(R - 2\Lambda) + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 - V(\Phi) \right] \quad (1.9)$$

se pueden encontrar soluciones exactas que permiten localizar partículas masivas de naturaleza fermiónica como en [27] en donde se propuso un potencial tipo Sine-Gordon:

$$V(\Phi) = B \left(1 + \cos \frac{2\Phi}{A} \right), \quad (1.10)$$

sin embargo, al encontrar la expresión para el factor de deformación en este modelo se observa que es creciente y por tanto no localiza gravedad en la membrana. En general, los modelos con campos escalares autointeractuantes son inestables incluso a nivel clásico y por ello se han propuesto modelos donde sólo aparece el término cinético en la acción, aunque las inestabilidades a nivel cuántico pueden persistir.

Un modelo de gravedad acoplada a un campo fantasma no auto-interactuante en cinco dimensiones está descrito por la siguiente acción

$$S = \int d^5x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi G}(R - 2\Lambda) + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 \right]. \quad (1.11)$$

En [30] se propuso la siguiente métrica donde la parte espacial de la brana es anisótropa:

$$ds^2 = e^{2A(w)} \left\{ -dt^2 + a^2(t)[e^{u(t,w)}(dx^2 + dy^2) + e^{-2u(t,w)}dz^2] + dw^2 \right\}. \quad (1.12)$$

El campo fantasma Φ y las funciones métricas e^u dependen del tiempo y de la dimensión extra, además se incluye un factor cosmológico dependiente del tiempo $a(t)$.

La dependencia temporal de la función u induce una dinámica en la parte espacial de la brana que permite estudiar mecanismos de isotropización de manera analítica.

1.2. Isotropización de la membrana

Existe en la actualidad un consenso en cosmología que establece que nuestro Universo comenzó su evolución a partir de un estado altamente anisótropo que transitó a un estado altamente isótropo como el que observamos hoy en día. El mecanismo más popular para explicar este fenómeno es el conocido como Inflación Cósmica, sin embargo, un número de mecanismos alternativos han sido propuestos a lo largo de los años entre los que se encuentran los modelos de mundos membrana. En el contexto de los modelos de membrana ancha destaca el trabajo ya mencionado al final de la sección anterior donde se aprovecha la dependencia temporal de la parte espacial en (1.8), inicialmente anisótropa, y se analiza la evolución del campo fantasma a lo largo del sustrato. Se encuentra que el factor de deformación es

CAPÍTULO 1. MUNDOS MEMBRANA
1.2. ISOTROPIZACIÓN DE LA MEMBRANA

$$A(w) = -\frac{1}{2} \ln \left[\frac{\Lambda}{6H^2} \cosh^2(H(w - w_0)) \right], \quad (1.13)$$

y el factor cosmológico

$$a(t) = a_0 e^{Ht}. \quad (1.14)$$

Además, la función $u(t, w)$ es proporcional al campo fantasma el cual satisface la ecuación de Klein-Gordon:

$$\ddot{\Phi} + \frac{3\dot{a}}{a}\dot{\Phi} - \Phi'' - 3A'\Phi' = 0. \quad (1.15)$$

Esta ecuación tiene solución exacta proponiendo el siguiente *ansatz* para el campo escalar:

$$\Phi(t, w) \sim u(t, w) = \epsilon(t)\chi(w)e^{-\frac{3}{2}A}. \quad (1.16)$$

De manera que

$$u(t, w) = (D_1 e^{\rho t} + D_2 e^{-\rho t}) \left(C_1 P_{\frac{3}{2}}^\mu[\tanh(H(w - w_0))] + C_2 Q_{\frac{3}{2}}^\mu[\tanh(H(w - w_0))] \right) e^{-\frac{3}{2}A}, \quad (1.17)$$

con $\rho = \sqrt{\frac{9H^2}{4} - \Omega^2}$, $\mu = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{\Omega^2}{H^2}}$ y H , Ω , C_1 , C_2 , D_1 y D_2 constantes arbitrarias. El análisis de estas funciones por parte de los autores demuestra que la métrica (1.8) se isotropiza super-exponencialmente en el tiempo.

En los siguientes capítulos presentaremos una extensión de este modelo donde hemos incluido una función $h(w)$ arbitraria que multiplica la componente dw^2 de la métrica (1.8) lo que nos permite, en principio, explorar una variedad más rica de modelos.

Capítulo 2

Modelo pentadimensional y mecanismo de isotropización

2.1. Acción

Proponemos una acción en 5D que describe gravedad acoplada con un campo fantasma no auto-interactuante que depende del tiempo y se propaga en el sustrato:

$$S = \int d^5x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi G} (R - 2\Lambda) + \frac{1}{2} (\nabla\Phi)^2 \right] \quad (2.1)$$

donde G y Λ son las constantes de Newton y cosmológica en 5D, respectivamente. El campo fantasma Φ depende únicamente del tiempo y de la dimensión extra, es decir, $\Phi = \Phi(t, w)$, donde w se refiere, a partir de aquí, a la dimensión adicional.

2.2. Ecuaciones de Campo

Las ecuaciones de campo son

$$R_{\mu\nu} = -\partial_\mu\sigma\partial_\nu\sigma + \frac{2}{3}g_{\mu\nu}\Lambda \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\sigma) = 0 \quad (2.3)$$

donde hemos redefinido el campo escalar como $\sigma = \sqrt{8\pi G}\Phi$.

2.3. Métrica

Motivados por los trabajos [28], [29] y [30], proponemos la siguiente métrica:

$$ds^2 = e^{2A(w)}(-dt^2 + \tilde{g}_{mn}(t, w)dx^m dx^n + h(w)dw^2), \quad (2.4)$$

donde el factor de deformación $A = A(w)$, el factor de escala $h = h(w)$ y la métrica en 3D $\tilde{g}_{mn}(t, w)$ son funciones arbitrarias. Sin pérdida de generalidad, podemos expresar $\tilde{g}_{mn}(t, w) = a(t)g_{mn}(t, w)$ donde

$$g_{mn}(t, w) = \text{diag}(e^{u(t, w)}, e^{u(t, w)}, e^{-2u(t, w)}). \quad (2.5)$$

CAPÍTULO 2. MODELO PENTADIMENSIONAL Y MECANISMO DE ISOTROPIZACIÓN
2.3. MÉTRICA

Esta forma de la métrica en 3D nos permitirá obtener soluciones analíticas. Tenemos entonces que

$$ds^2 = e^{2A(w)}(-dt^2 + a^2(t)g_{mn}(t, w)dx^m dx^n + h(w)dw^2). \quad (2.6)$$

Nuestro modelo describe una brana anisotrópicamente deformada a lo largo de las coordenadas espaciales x, y, z mediante el factor $e^{u(t, w)}$ que depende del tiempo t y de la coordenada adicional w , con una deformación adicional en el tiempo introducida por el factor de escala cosmológico $a(t)$. El factor de deformación $A(w)$ es una función arbitraria de w que nos permite obtener soluciones suaves y modela una configuración de brana ancha en el sentido de [30].

Los símbolos de Christoffel no nulos de nuestro modelo son

$$\begin{aligned} \Gamma^t_{tw} &= A', & \Gamma^t_{xx} &= \Gamma^t_{yy} = a^2 e^u \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{u}}{2} \right), & \Gamma^t_{zz} &= a^2 e^{-2u} \left(\frac{\dot{a}}{a} - \dot{u} \right), \\ \Gamma^x_{tx} &= \Gamma^y_{ty} = \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{u}}{2}, & \Gamma^z_{tz} &= \frac{\dot{a}}{a} - \dot{u}, & \Gamma^x_{wx} &= \Gamma^y_{wy} = A' + \frac{u'}{2}, \\ \Gamma^z_{wz} &= A' - u', & \Gamma^w_{tt} &= \frac{A'}{h}, & \Gamma^w_{xx} &= \Gamma^w_{yy} = -a^2 e^u \left(\frac{A'}{h} + \frac{u'}{2h} \right), \\ \Gamma^w_{zz} &= -a^2 e^{-2u} \left(\frac{A'}{h} - \frac{u'}{h} \right), & \Gamma^w_{ww} &= A' + \frac{h'}{2h}, \end{aligned}$$

donde $\dot{}$ y \cdot indican derivadas respecto de la dimensión extra y el tiempo, respectivamente. De modo que las componentes no nulas del tensor de Riemann son:

$$R_{tx}{}^t{}_x = R_{ty}{}^t{}_y = a^2 e^u \left[\frac{\ddot{u}}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \dot{u} \right) \left(\frac{2\dot{a}}{a} - \dot{u} \right) + \frac{\dot{a}\dot{u}}{2a} - \frac{A'}{h} \left(A' + \frac{u'}{2} \right) \right], \quad (2.7)$$

$$R_{tz}{}^t{}_z = -a^2 e^{-2u} \left[\ddot{u} - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{a}}{a} - 2\dot{u} \right) \left(\frac{2\dot{a}}{a} + 2\dot{u} \right) + \frac{\dot{a}\dot{u}}{a} + \frac{A'}{h} (A' - u') \right], \quad (2.8)$$

$$R_{tx}{}^x{}_w = R_{ty}{}^y{}_w = \frac{\dot{u}'}{2} + \frac{\dot{u}u'}{4} + \frac{\dot{a}u'}{2a}, \quad (2.9)$$

$$R_{tz}{}^z{}_w = -\dot{u}' + \dot{u}u' - \frac{\dot{a}u'}{a}, \quad (2.10)$$

$$R_{tw}{}^t{}_w = -A'' + \frac{A'h'}{2h}, \quad (2.11)$$

$$R_{xw}{}^x{}_w = R_{yw}{}^y{}_w = -A'' - \frac{u''}{2} + \frac{A'h'}{2h} + \frac{u'h'}{4h} - \frac{A'u'}{2} - \frac{u'^2}{4}, \quad (2.12)$$

$$R_{zw}{}^z{}_w = -A'' + u'' + \frac{A'h'}{2h} - \frac{u'h'}{2h} + A'u' - u'^2. \quad (2.13)$$

Por otro lado, las componentes no nulas del tensor de Ricci son:

$$R_{tt} = -\frac{3\ddot{a}}{a} - \frac{3\dot{u}^2}{2} + (A'' + 3A'^2) \frac{1}{h} - \frac{A'h'}{2h^2}, \quad (2.14)$$

$$R_{tw} = -\frac{3}{2} \dot{u}u', \quad (2.15)$$

$$R_{xx} = R_{yy} = a^2 e^u \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{u}}{2} + \frac{3\dot{a}\dot{u}}{2a} - (A'' + 3A'^2) \frac{1}{h} + \frac{A'h'}{2h^2} - \left(\frac{u''}{2} + \frac{3}{2} A'u' \right) + \frac{u'h'}{4h^2} \right], \quad (2.16)$$

$$R_{zz} = a^2 e^{-2u} \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} - \ddot{u} - \frac{3\dot{a}\dot{u}}{a} - (A'' + 3A'^2) \frac{1}{h} + \frac{A'h'}{2h^2} + (u'' + 3A'u') - \frac{u'h'}{2h^2} \right], \quad (2.17)$$

$$R_{ww} = -\frac{3}{2}u'^2 - 4A'' + \frac{2A'h'}{h}. \quad (2.18)$$

Finalmente, con este *ansatz* las ecuaciones de campo de Einstein son:

$$-\frac{3\ddot{a}}{a} - \frac{3}{2}\dot{u}^2 + (A'' + 3A'^2)\frac{1}{h} - \frac{A'h'}{2h^2} = -\dot{\sigma}^2 - \frac{2\Lambda}{3}e^{2A}, \quad (2.19)$$

$$-3\dot{u}u' = -2\dot{\sigma}\sigma', \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{u}}{2} + \frac{3\dot{a}\dot{u}}{2a} - (A'' + 3A'^2)\frac{1}{h} \\ &- \left(\frac{u''}{2} + \frac{3}{2}A'u' \right) \frac{1}{h} + \frac{A'h'}{2h^2} + \frac{u'h'}{4h^2} = \frac{2\Lambda}{3}e^{2A}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} - \ddot{u} - \frac{3\dot{a}\dot{u}}{a} - (A'' + 3A'^2)\frac{1}{h} \\ &+ (u'' + 3A'u')\frac{1}{h} + \frac{A'h'}{2h^2} - \frac{u'h'}{2h^2} = \frac{2\Lambda}{3}e^{2A}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$-\frac{3}{2}u'^2 - 4A'' + \frac{2A'h'}{h} = -\sigma'^2 + \frac{2\Lambda}{3}e^{2A}h. \quad (2.23)$$

El campo fantasma $\sigma(t, w)$ obedece la ecuación de Klein-Gordon:

$$\left[\sigma'' + 3A'\sigma' - \frac{1}{2}\sigma'h^{-1}h' \right] h^{-1} - \ddot{\sigma} - \frac{3\dot{a}\dot{\sigma}}{a} = 0. \quad (2.24)$$

2.4. Soluciones

De la componente tw de las ecuaciones de Einstein tenemos que

$$\sigma(t, w) = \sqrt{\frac{3}{2}}u(t, w), \quad (2.25)$$

salvo una constante aditiva que podemos despreciar. Como veremos, esta expresión nos permitirá realizar varias simplificaciones.

La ecuación de Klein-Gordon queda contenida en las componentes xx , yy y zz y podemos sumar las componentes tt y xx para obtener una ecuación para $a(t)$:

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = 0 \quad (2.26)$$

con solución de la forma

$$a(t) = a_0 e^{Ht}. \quad (2.27)$$

Sustituyendo esta expresión en las componentes tt , ww y simplificando obtenemos dos ecuaciones que involucran el factor de deformación $A(w)$ y la función $h(w)$

$$A'' + 3A'^2 - \frac{1}{2}A'h^{-1}h' - 3H^2h = -\frac{2\Lambda}{3}e^{2A}h. \quad (2.28)$$

$$-4A'' + 2A'h^{-1}h' = \frac{2\Lambda}{3}e^{2A}h. \quad (2.29)$$

Si multiplicamos la primer ecuación por 4 y la sumamos con la segunda obtenemos una sola ecuación no lineal de primer orden para $A(w)$

$$6A'^2 = (6H^2 - \Lambda e^{2A})h; \quad (2.30)$$

cuando sustituimos esta expresión en las ecuaciones de Einstein y consideramos (2.13) y (2.15) encontramos que se satisfacen idénticamente, por lo que podemos afirmar que esta es la única ecuación relevante para $A(w)$.

Tenemos entonces una familia de ecuaciones diferenciales que dependen del factor $h(w)$, en particular, podemos simplificar la búsqueda de soluciones si hacemos que la función h sea una función de A haciendo que la ecuación diferencial (2.18) no dependa explícitamente de la coordenada extra w . Con este criterio podemos explorar un conjunto de modelos que involucran algunos ya estudiados y otros nuevos. Por ejemplo, si proponemos $h_1(A) = cte.$ obtenemos el modelo estudiado en [30]:

$$A_1(w) = \ln \left[\frac{H}{b} \operatorname{sech} [H(w - w_0)] \right], \quad (2.31)$$

donde $6b^2 = \Lambda$.

Si proponemos $h_2(A) = e^{-2A}$ recuperamos el modelo estudiado en [31]

$$A_2(w) = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{6H^2}{\Lambda} \cos^2 \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{6}}(w - w_0) \right) \right]. \quad (2.32)$$

Finalmente, el modelo en el que nos concentraremos corresponde a $h(A) = e^{2A}$ y tiene solución

$$A(w) = -\frac{1}{2} \ln \left(H^2 w^2 + \frac{\Lambda}{6H^2} \right) \quad (2.33)$$

que no se había estudiado previamente. Con esta elección de $h(A)$ la ecuación de Klein-Gordon toma la forma

$$\left(\sigma'' + 2A'\sigma' \right) e^{-2A} - \left(\ddot{\sigma} + \frac{3\dot{a}\dot{\sigma}}{a} \right) = 0, \quad (2.34)$$

si elegimos el siguiente *ansatz* para el campo escalar:

$$\sigma(t, w) \sim u(t, w) = \epsilon(t)\chi(w)e^{-A(w)}, \quad (2.35)$$

la ecuación de Klein-Gordon se reduce al siguiente par de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned} \chi'' - (A'' + A'^2 - \Omega^2 e^{2A})\chi = \\ \chi'' - \left(H^2 w^2 + \frac{\Lambda}{6H^2} \right)^{-2} \left[(2H^2 - \Omega^2)H^2 w^2 - (H^2 + \Omega^2)\frac{\Lambda}{6H^2} \right] \chi = 0, \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\ddot{\epsilon} + 3H\dot{\epsilon} + \Omega^2\epsilon = 0, \quad (2.37)$$

donde Ω es una constante arbitraria.

La ecuación para $\chi(w)$ tiene solución exacta:

$$\chi(w) = \sqrt{6H^4w^2 + \Lambda} \left(C_1 P_\nu^2 \left[i \sqrt{\frac{6H^4}{\Lambda}} w \right] + C_2 Q_\nu^2 \left[i \sqrt{\frac{6H^4}{\Lambda}} w \right] \right), \quad (2.38)$$

donde P_ν^2 y Q_ν^2 son las funciones asociadas de Legendre de segundo orden del primer y segundo tipo respectivamente y grado

$$\nu = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{\Omega^2}{H^2}}. \quad (2.39)$$

A diferencia de [30], nuestra ecuación para $\chi(w)$ no posee un espectro de estados de energía mixto y por tanto la constante Ω es un parámetro a definir dependiendo del tipo de solución que deseemos.

La ecuación para $\epsilon(t)$ corresponde a la ecuación diferencial de un oscilador armónico amortiguado con coeficiente de amortiguamiento $3H$ y solución general

$$\epsilon(t) = e^{-\frac{3}{2}Ht} (D_1 e^{-\rho t} + D_2 e^{\rho t}) \quad (2.40)$$

donde

$$\rho = \sqrt{\frac{9H^2}{4} - \Omega^2}. \quad (2.41)$$

Dependiendo del tipo de amortiguamiento tenemos tres tipos de soluciones: a) Infra-amortiguado ($\Omega^2 > \frac{9H^2}{4}$), b) críticamente amortiguado ($\Omega^2 = \frac{9H^2}{4}$) y c) sobre-amortiguado ($\Omega^2 < \frac{9H^2}{4}$).

a) Para el caso infra-amortiguado tenemos

$$\epsilon(t) = D e^{-\frac{3}{2}Ht} \cos(\omega t + \delta), \quad (2.42)$$

donde D y δ son constantes determinadas por las condiciones iniciales y

$$\omega = \sqrt{\Omega^2 - \frac{9H^2}{4}}. \quad (2.43)$$

Las oscilaciones decaen exponencialmente a cero con el tiempo y por lo tanto la función $u(t, w)$ se desvanece, lo que conduce a una métrica 5D isótropa.

b) La solución para el caso críticamente amortiguado es

$$\epsilon(t) = e^{-\frac{3}{2}Ht} (Dt + \delta), \quad (2.44)$$

donde D y δ son constantes determinadas por las condiciones iniciales. Al igual que en el caso infra-amortiguado, la función $u(t, w)$ se desvanece exponencialmente isotropizando la métrica 5D.

c) Finalmente, para el caso sobre-amortiguado la solución es

$$\epsilon(t) = D e^{-\frac{3}{2}Ht} \cosh(\bar{\omega} t + \delta), \quad (2.45)$$

donde D y δ son constantes determinadas por las condiciones iniciales y

$$\bar{\omega} = \sqrt{\frac{9H^2}{4} - \Omega^2}. \quad (2.46)$$

Nuevamente, como en los casos anteriores, la función $u(t, w)$ decae exponencialmente isotropizando completamente la métrica 5D.

La forma general de la función $u(t, w)$ (y por tanto también del campo escalar $\sigma(t, w)$) es

$$\begin{aligned} u(t, w) &= \epsilon(t)\chi(w)e^{-A(w)} \\ &= e^{-\frac{3}{2}Ht} \left(\frac{6H^4w^2 + \Lambda}{\sqrt{6H}} \right) (D_1e^{-\rho t} + D_2e^{\rho t}) \left(C_1P_\nu^2 \left[i\sqrt{\frac{6H^4}{\Lambda}}w \right] + C_2Q_\nu^2 \left[i\sqrt{\frac{6H^4}{\Lambda}}w \right] \right), \end{aligned} \quad (2.47)$$

que, como ya vimos, decae exponencialmente en el tiempo isotropizando la métrica 5D que toma la forma

$$ds^2 = e^{2A(w)}[-dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) + e^{2A(w)}dw^2]. \quad (2.48)$$

2.5. Escalar de Curvatura

Podemos realizar una comparación cualitativa básica de nuestro modelo y el del artículo original calculando el escalar de curvatura más simple: el escalar de Ricci, ya que todas nuestras funciones métricas dependen sólo de t y de w :

$$\begin{aligned} R(t, w) &= g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{tt}R_{tt} + g^{xx}R_{xx} + g^{yy}R_{yy} + g^{zz}R_{zz} + g^{ww}R_{ww} \\ &= 4e^{-2A} \left[3H^2 + \frac{3\dot{u}^2}{8} - (2A'' + 3A'^2)\frac{1}{h} + \frac{A'h'}{h^2} - \frac{3u'^2}{8h} \right]. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Explícitamente:

$$\begin{aligned} R(t, w) &= \frac{10\Lambda}{3} + \frac{3}{2}e^{-4A} \left[\dot{\epsilon}^2\chi^2 - \epsilon^2(\chi' - A'\chi)^2 e^{-2A} \right] \\ &= \frac{10\Lambda}{3} + \frac{3}{2}e^{-3Ht} \left(H^2w^2 + \frac{\Lambda}{6H^2} \right)^2 \\ &\quad \times \left\{ \left(\frac{3H}{2}(D_1e^{\rho t} + D_2e^{-\rho t}) - \rho(D_1e^{\rho t} - D_2e^{-\rho t}) \right)^2 (6H^4w^2 + \Lambda) \right. \\ &\quad \times \left(C_1P_\nu^2 \left[i\sqrt{\frac{6H^4}{\Lambda}}w \right] + C_2Q_\nu^2 \left[i\sqrt{\frac{6H^4}{\Lambda}}w \right] \right)^2 - \frac{(D_1e^{\rho t} + D_2e^{-\rho t})^2}{6H^2} \\ &\quad \times (1 - \nu)^2 \left[6H^4w \left(C_1P_\nu^2 \left[i\sqrt{\frac{6H^4}{\Lambda}}w \right] + C_2Q_\nu^2 \left[i\sqrt{\frac{6H^4}{\Lambda}}w \right] \right) \right. \\ &\quad \left. \left. + \sqrt{6H^4\Lambda} \left(C_1P_{\nu+1}^2 \left[i\sqrt{\frac{6H^4}{\Lambda}}w \right] + C_2Q_{\nu+1}^2 \left[i\sqrt{\frac{6H^4}{\Lambda}}w \right] \right) \right]^2 \right\}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

que converge al valor constante $\frac{10\Lambda}{3}$ conforme t crece, correspondiente a un sustrato isotropizado y máximamente simétrico.

CAPÍTULO 2. MODELO PENTADIMENSIONAL Y MECANISMO DE ISOTROPIZACIÓN
2.5. ESCALAR DE CURVATURA

El siguiente cuadro muestra las gráficas comparadas de las proyecciones del escalar de Ricci correspondientes al modelo original de [30] y nuestra extensión para diferentes valores de Ω^2 cerca del origen donde ocurre la mayor parte de las fluctuaciones antes de desvanecerse en el tiempo:

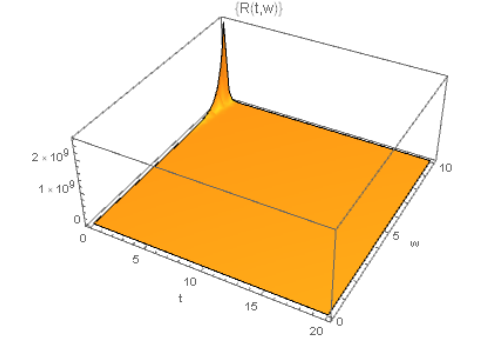
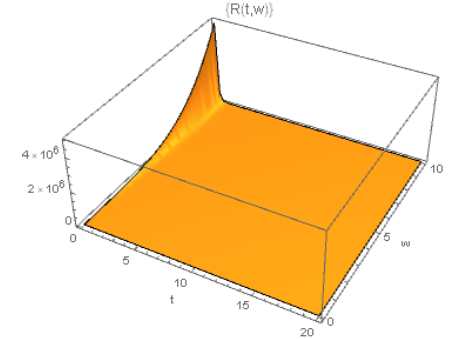
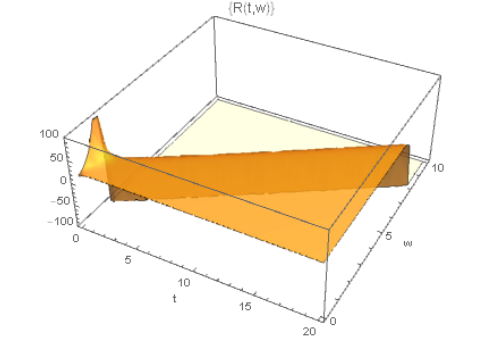
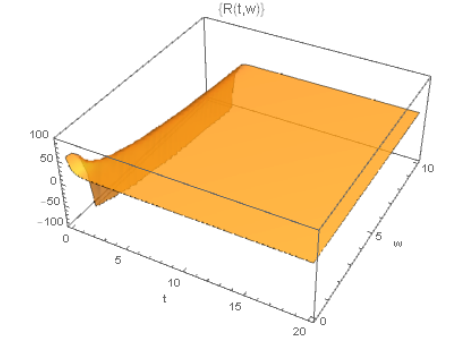
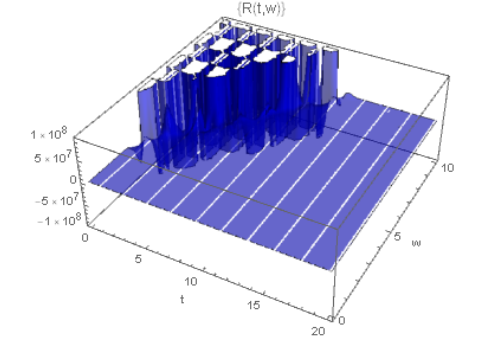
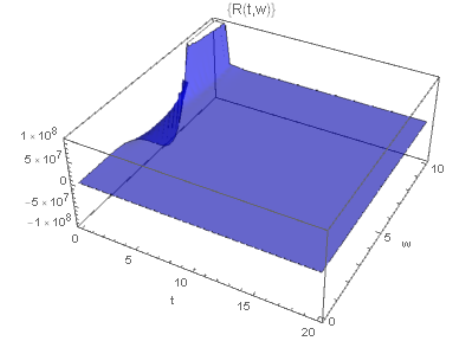
$h(w) =$	1	e^{2A}
$\Omega^2 = 0$		
$\Omega^2 = 2H^2$		
$\Omega^2 = \frac{9}{2}H^2$		

Tabla 2.1: Proyecciones de $R(t, w)$ para distintos valores de Ω^2 . El color naranja indica orden/grado real mientras que el azul orden/grado complejo de las funciones asociadas de Legendre.

Se observa que el modelo con $h(w) = 1$ tiene un comportamiento menos suave que el de $h(w) = e^{2A}$ en el sentido que las variaciones de la función $\chi(w)$ (y por tanto del escalar de Ricci) son más pronunciadas. Esto se debe a que en el modelo con $h(w) = 1$ el argumento de las funciones asociadas de Legendre es $\tanh[H(w - w_0)]$ el cual se aproxima rápidamente a la unidad conforme w crece lo que provoca que tanto $P_{3/2}^\mu$ como $Q_{3/2}^\mu$ alcancen sus extremos más rápido de lo que lo hace la expresión (2.50).

Capítulo 3

Una aproximación N-dimensional

3.1. Modelo N+4-dimensional

Una de las generalizaciones del modelo presentado corresponde al caso de $N + 4$ dimensiones con la siguiente acción:

$$S = \int d^{N+4}x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi G} (R - 2\Lambda) + \frac{1}{2} (\nabla\Phi)^2 \right], \quad (3.1)$$

cuyas ecuaciones de campo son:

$$R_{\mu\nu} = -\partial_\mu\sigma\partial_\nu\sigma + \frac{2}{N+2}g_{\mu\nu}\Lambda, \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\sigma) = 0, \quad (3.3)$$

donde hemos redefinido el campo escalar como $\sigma = \sqrt{8\pi G}\Phi$.

Proponemos una métrica de la forma:

$$ds^2 = e^{2A(w)}(-dt^2 + a^2(t)g_{mn}(t, w)dx^m dx^n + h(t, w)dw^2), \quad (3.4)$$

donde

$$dw^2 = \sum_{j=1}^N dx_j^2. \quad (3.5)$$

$$g_{mn}(t, w) = \text{diag}(e^{u_1(t, w)}, e^{u_2(t, w)}, e^{u_3(t, w)}), \quad (3.6)$$

con la condición

$$u_1(t, w) + u_2(t, w) + u_3(t, w) = 0. \quad (3.7)$$

Ahora, el factor de deformación A , las funciones métricas u_m y el factor de escala h dependen del radio w de una N-esfera. Con este enfoque las ecuaciones de Einstein son:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{tt} &: -\frac{3\ddot{a}}{a} - \frac{1}{4}(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2) + \left[A'' + (N-1)\frac{A'}{w} + (N+2)A'^2 \right] h^{-1} \\ &- \frac{N}{2}h^{-1}\ddot{h} + \frac{N}{4}h^{-2}\dot{h}^2 + \frac{(N-2)}{2}A'h^{-2}h' \\ &= -\dot{\sigma}^2 - \frac{2}{N+2}e^{2A}\Lambda, \end{aligned} \quad (3.8)$$

CAPÍTULO 3. UNA APROXIMACIÓN N-DIMENSIONAL
3.1. MODELO N+4-DIMENSIONAL

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{tj} : & -\frac{1}{2}(\dot{u}_1 u'_1 + \dot{u}_2 u'_2 + \dot{u}_3 u'_3) - (N-1)h^{-1}\dot{h}' + (N-1)h^{-2}\dot{h}h' \\ & + (N+2)A'h^{-1}\dot{h} = -2\dot{\sigma}\sigma', \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{mm} : & \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{u}_m}{2} + \frac{3\dot{a}\dot{u}_m}{2a} - \left[A'' + (N-1)\frac{A'}{w} + (N+2)A'^2 \right] h^{-1} \\ & - \left[\frac{u''_m}{2} + \frac{(N-1)u'_m}{2w} + \frac{(N+2)A'u'_m}{2} \right] h^{-1} - \frac{(N-2)}{2}A'h^{-2}h' + \frac{N}{2}\frac{\dot{a}}{a}h^{-1}\dot{h} \\ & - \frac{(N-2)}{4}u'_m h^{-2}h' + \frac{N}{4}\dot{u}_m h^{-1}\dot{h} = \frac{2}{N+2}e^{2A}\Lambda, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{jk} : & \left[\frac{\ddot{h}}{2} + \frac{(N-2)}{4}h^{-1}\dot{h}^2 + \frac{3}{2}\frac{\dot{a}\dot{h}}{a} - \left(A'' + (2N+1)\frac{A'}{w} + (N+2)A'^2 \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2}h^{-1}h'' - \frac{(2N-3)}{2w}h^{-1}h' - \frac{1}{4}(N-4)h^{-2}h'^2 - NA'h^{-1}h' \right] \delta_{jk} \\ & + \left[-\frac{1}{4}(u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2) - \left((N+2)A'' - (N+2)\frac{A'}{w} - (N+2)A'^2 \right) \right. \\ & \left. - \frac{(N-2)}{2}h^{-1}h'' + \frac{(N-2)}{2w}h^{-1}h' + \frac{3}{4}(N-2)h^{-2}h'^2 + (N+2)A'h^{-1}h' \right] \frac{\mathbf{x}^j \mathbf{x}^k}{\mathbf{w}^2} \\ & = \frac{2}{N+2}e^{2A}h\Lambda\delta_{jk} - \frac{\mathbf{x}^j \mathbf{x}^k}{\mathbf{w}^2}\sigma'^2, \end{aligned} \quad (3.11)$$

y la ecuación de Klein-Gordon:

$$\left[\sigma'' + (N-1)\frac{\sigma'}{w} + (N+2)A'\sigma' + \frac{(N-2)}{2}\sigma'h^{-1}h' \right] h^{-1} - \ddot{\sigma} - \frac{3\dot{a}\dot{\sigma}}{a} - \frac{N}{2}\dot{\sigma}h^{-1}\dot{h} = 0 \quad (3.12)$$

De (3.7) y (3.10) obtenemos otra ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sum_{m=1}^3 R_{mm} &= \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} - \left[A'' + (N-1)\frac{A'}{w} + (N+2)A'^2 \right] h^{-1} \\ & - \frac{(N-2)}{2}A'h^{-2}h' + \frac{N}{2}\frac{\dot{a}}{a}h^{-1}\dot{h} \\ & = \frac{2}{N+2}e^{2A}\Lambda, \end{aligned} \quad (3.13)$$

que si sumamos con (3.8) y simplificamos obtenemos:

$$\partial_t \left(\frac{2\dot{a}}{a} \right) + \frac{1}{4}(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2) + \frac{N}{2} \left(\ddot{h} - \frac{\dot{a}\dot{h}}{a} - \frac{1}{2}h^{-1}\dot{h}^2 \right) h^{-1} = \dot{\sigma}^2. \quad (3.14)$$

3.2. Función h independiente del tiempo

Ahora, si suponemos que h no depende del tiempo y proponemos la siguiente forma de las funciones métricas:

$$g_{mn}(t, w) = \text{diag}(e^{u(t,w)}, e^{u(t,w)}, e^{-2u(t,w)}), \quad (3.15)$$

las ecuaciones de campo de Einstein se convierten en:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{tt} : & -\frac{3\ddot{a}}{a} - \frac{3}{2}\dot{u}^2 + \left[A'' + (N-1)\frac{A'}{w} + (N+2)A'^2 \right] h^{-1} \\ & + \frac{(N-2)}{2}A'h^{-2}h' = -\dot{\sigma}^2 - \frac{2\Lambda}{N+2}e^{2A}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{R}_{tj} = (-3\dot{u}u')\frac{x^j}{w} = (-2\dot{\sigma}\sigma')\frac{x^j}{w}, \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{mm} : & \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{u}_m}{2} + \frac{3\dot{a}\dot{u}_m}{2a} - \left[A'' + (N-1)\frac{A'}{w} + (N+2)A'^2 \right] h^{-1} \\ & - \left[\frac{u''_m}{2} + \frac{(N-1)u'_m}{2w} + \frac{(N+2)}{2}A'u'_m \right] h^{-1} - \frac{(N-2)}{2}A'h^{-2}h' \\ & - \frac{(N-2)}{4}u'_m h^{-2}h' = \frac{2\Lambda}{N+2}e^{2A}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

$\mathbf{R}_{jk} :$

$$\begin{aligned} \mathbf{a) -} & \left(A'' + (2N+1)\frac{A'}{w} + (N+2)A'^2 \right) \\ & - \frac{1}{2}h^{-1}h'' - \frac{(2N-3)}{2w}h^{-1}h' - \frac{1}{4}(N-4)h^{-2}h'^2 - NA'h^{-1}h' \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$= \frac{2\Lambda}{N+2}e^{2A}h \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b) -} & \frac{3}{2}u'^2 - (N+2)\left(A'' - \frac{A'}{w} - A'^2 \right) \\ & - \frac{(N-2)}{2}\left(h'' - \frac{h'}{w} - \frac{3}{2}h^{-1}h'^2 \right) h^{-1} + (N+2)A'h^{-1}h' = -\sigma'^2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

y la ecuación de Klein-Gordon en:

$$\left[\sigma'' + (N-1)\frac{\sigma'}{w} + (N+2)A'\sigma' + \frac{(N-2)}{2}\sigma'h^{-1}h' \right] h^{-1} - \ddot{\sigma} - \frac{3\dot{a}\dot{\sigma}}{a} = 0. \quad (3.22)$$

La forma de estas ecuaciones es muy parecida al caso $N = 1$ excepto porque aparece explícitamente el radio de las dimensiones extra w lo que rompe la autonomía de nuestras ecuaciones y convierte su estudio en una tarea más compleja. Sin embargo, como veremos a continuación, podemos obtener

CAPÍTULO 3. UNA APROXIMACIÓN N-DIMENSIONAL
3.3. UNA APROXIMACIÓN AL FACTOR DE DEFORMACIÓN $A(W)$

una solución aproximada para el factor de deformación $A(w)$ si imponemos una relación particular entre A y h .

Todas las ecuaciones correspondientes a las componentes jk se reducen a dos ecuaciones: (b) y (a)+(b), esta última es igual a:

$$-\frac{3}{2}u'^2 - \left[(N+3)A'' + (N-1)\frac{A'}{w} \right] - \frac{(N-1)}{2}h^{-1}h'' - \frac{(N-1)}{2w}h^{-1}h' + \frac{(N-1)}{2}h^{-2}h'^2 + 2A'h^{-1}h' = -\sigma'^2 + \frac{2\Lambda}{N+2}e^{2A}h. \quad (3.23)$$

Nuevamente, la componente tj nos relaciona σ y u :

$$\sigma(t, w) = \sqrt{\frac{3}{2}}u(t, w), \quad (3.24)$$

salvo una constante que podemos despreciar y por tanto la ecuación (3.23) se reduce a

$$-\left[(N+3)A'' + (N-1)\frac{A'}{w} \right] - \frac{(N-1)}{2}\left(h'' + \frac{h'}{w} - h^{-1}h'^2 \right) h^{-1} + 2A'h^{-1}h' = \frac{2\Lambda}{N+2}e^{2A}h. \quad (3.25)$$

Por otro lado, si sumamos las componentes tt y xx de las ecuaciones obtenemos:

$$-\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{u}}{2} + \frac{3\dot{a}\dot{u}}{2a} - \left[\frac{u''}{2} + \frac{(N-1)u'}{2w} + \frac{(N+2)A'u'}{2} \right] h^{-1} - \frac{(N-2)}{4}u'h^{-2}h' = 0, \quad (3.26)$$

que sumada a la expresión del campo escalar, considerando (3.24), nos da la misma ecuación para el factor cosmológico que ya habíamos obtenido:

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = 0, \quad (3.27)$$

con solución

$$a(t) = a_0 e^{Ht}. \quad (3.28)$$

3.3. Una aproximación al factor de deformación $A(w)$

Si multiplicamos la componente tt de las ecuaciones por h , teniendo en cuenta (3.24) y (3.27), sumando lo que resulte a la ecuación (3.25) y simplificando obtenemos:

$$(N+2)\left[A'' - A'^2 - \frac{1}{2}A'h^{-1}h' \right] + \frac{(N-1)}{2}\left(h'' + \frac{h'}{w} - h^{-1}h'^2 + \frac{6H^2}{N-1}h^2 \right) h^{-1} = 0. \quad (3.29)$$

Volviendo a las componentes jk , en particular, si multiplicamos (b) por $\frac{1}{2}$ y lo sumamos con la ecuación anterior lo que resulta es una expresión donde hemos eliminado el acoplamiento $A'h^{-1}h'$:

$$(N+2)\left(A'' + \frac{A'}{w} - A'^2 \right) + \left[Nh'' + (3N-4)\frac{h'}{w} - \frac{(N+2)}{2}h^{-1}h'^2 + 12H^2h^2 \right] \frac{h^{-1}}{2} = 0. \quad (3.30)$$

CAPÍTULO 3. UNA APROXIMACIÓN N-DIMENSIONAL
3.3. UNA APROXIMACIÓN AL FACTOR DE DEFORMACIÓN $A(W)$

Podemos intentar resolver esta ecuación diferencial si establecemos una relación funcional entre A y h aprovechando que ambas funciones dependen únicamente de w . En particular, observando la forma de la ecuación entre corchetes nos es conveniente proponer la siguiente relación

$$A'' + \frac{A'}{w} - A'^2 = -\frac{6H^2}{N+2}h, \quad (3.31)$$

de manera que en la ecuación

$$Nh'' + (3N-4)\frac{h'}{w} - \frac{(N+2)}{2}h^{-1}h'^2 = 0 \quad (3.32)$$

no aparezca el término proporcional a h^2 , simplificando su estudio. Una solución a esta ecuación (que se satisface para todo N) es

$$h(w) = h_0 w^{-4}, \quad (3.33)$$

que sustituyendo en (3.31) y simplificando nos da la expresión

$$A'' + \frac{A'}{w} - A'^2 + \frac{\bar{H}^2}{w^4} = 0, \quad (3.34)$$

donde $\bar{H}^2 = \frac{6h_0H^2}{N+2}$. Podemos resolver esta ecuación exactamente y obtenemos:

$$A(w) = \ln \left[\frac{A_0}{\sqrt{\pi}I_0\left(\frac{\bar{H}}{w}\right) + BK_0\left(\frac{\bar{H}}{w}\right)} \right] \quad (3.35)$$

donde I_0 y K_0 son las funciones modificadas de Bessel de orden cero del primer y segundo tipo, respectivamente, y B es una constante por determinar. Cuando sustituimos esta expresión en las ecuaciones obtenemos la siguiente relación:

$$\frac{\sqrt{\pi}I_1\left(\frac{\bar{H}}{w}\right) - BK_1\left(\frac{\bar{H}}{w}\right)}{\sqrt{\pi}I_0\left(\frac{\bar{H}}{w}\right) + BK_0\left(\frac{\bar{H}}{w}\right)} = \frac{\bar{H}}{2w}, \quad (3.36)$$

que, en general, no se satisface, sin embargo, si hacemos $B = 0$ vemos que las funciones

$$F(w) = \frac{I_1\left(\frac{\bar{H}}{w}\right)}{I_0\left(\frac{\bar{H}}{w}\right)} \quad \text{y} \quad G(w) = \frac{\bar{H}}{2w}. \quad (3.37)$$

se aproximan rápidamente entre sí conforme w crece. Las expansiones en serie de I_0 e I_1 :

$$I_0\left(\frac{\bar{H}}{w}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\bar{H}^2}{4w^2}\right)^j}{j!j!}; \quad I_1\left(\frac{\bar{H}}{w}\right) = \frac{\bar{H}}{2w} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\bar{H}^2}{4w^2}\right)^k}{k!(k+1)!}, \quad (3.38)$$

nos permiten aproximar la función:

$$F(w) = \frac{I_1\left(\frac{\bar{H}}{w}\right)}{I_0\left(\frac{\bar{H}}{w}\right)} = \frac{\bar{H}}{2w} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\bar{H}^2}{4w^2}\right)^k}{k!(k+1)!}}{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\bar{H}^2}{4w^2}\right)^j}{j!j!}} \approx \frac{\bar{H}}{2w} + O\left(\frac{\bar{H}^2}{4w^2}\right), \quad (3.39)$$

de donde es evidente que la función F se aproxima rápidamente a la función G en el intervalo $w \in (2\bar{H}, \infty)$ (Figura 3.1), lo que significa que nuestras ecuaciones para el factor de deformación se resuelven asintóticamente. Además, dado que el factor \bar{H} es proporcional a H y este a su vez se espera que sea del orden de la constante cosmológica, como se encontró en [30], podemos intuir que la aproximación ocurre rápidamente.

CAPÍTULO 3. UNA APROXIMACIÓN N-DIMENSIONAL
3.3. UNA APROXIMACIÓN AL FACTOR DE DEFORMACIÓN $A(W)$

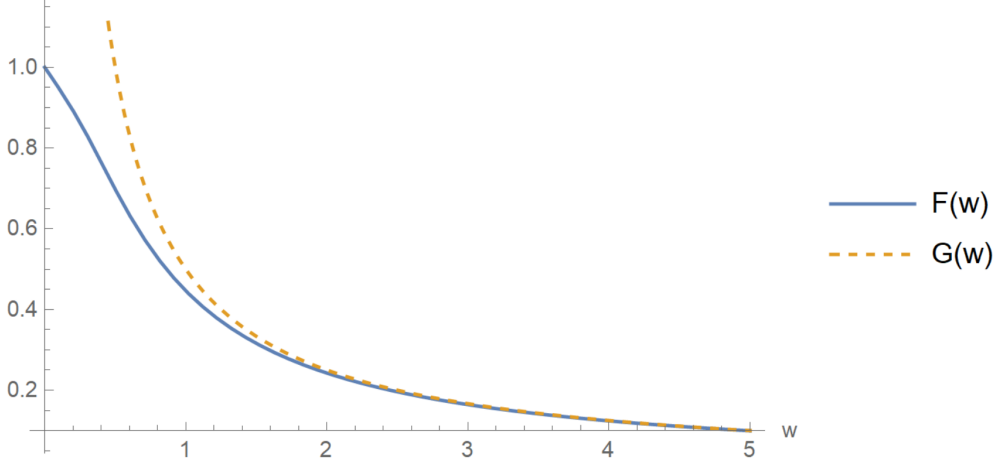


Figura 3.1: Gráficas de las funciones $F(w)$ y $G(w)$ para $\bar{H} = 1$.

Desde luego, una solución completa de las ecuaciones de Einstein requiere que las funciones satisfagan las expresiones para todo w y no sólo asintóticamente. Hay que notar, sin embargo, que en este modelo N-dimensional todavía podemos hacer uso de una importante propiedad de las ecuaciones, a saber, la componente tt y la ecuación de Klein-Gordon están contenidas en las componentes xx , yy y zz lo que nos permite reducir el número de ecuaciones diferenciales independientes.

Finalmente, si utilizamos el siguiente *ansatz* para el campo escalar:

$$\sigma(t, w) \sim u(t, w) = \epsilon(t)\chi(w)e^{-\frac{N+2}{2}A} \quad (3.40)$$

la ecuación de Klein-Gordon se reduce al siguiente par de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\chi'' - (N-3)\frac{\chi'}{w} - \frac{N+2}{2}\left[A'' - (N-3)\frac{A'}{w} + \frac{(N+2)}{2}A'^2 - \frac{\bar{\Omega}^2}{w^4}\right]\chi = 0, \quad (3.41)$$

$$\ddot{\epsilon} + 3H\dot{\epsilon} + \Omega^2\epsilon = 0, \quad (3.42)$$

donde $\bar{\Omega}^2 = \frac{2h_0\Omega^2}{N+2}$. La ecuación para $\chi(w)$ es no autónoma y por tanto considerablemente más difícil de resolver, sin embargo, la ecuación para $\epsilon(t)$ es idéntica a la que estudiamos en el capítulo 2 y tiene solución

$$\epsilon(t) = e^{-\frac{3}{2}Ht}(Ce^{-\rho t} + De^{\rho t}), \quad (3.43)$$

con

$$\rho = \sqrt{\frac{9H^2}{4} - \Omega^2}. \quad (3.44)$$

El análisis de esta expresión es idéntico al ya realizado, sin embargo dejamos el estudio de la ecuación (3.41) como una propuesta para un trabajo posterior y por tanto la determinación de la solución completa para el campo escalar y los coeficientes métricos.

Conclusiones

Los modelos de membranas que se propagan a través de sustratos N -dimensionales son importantes en física teórica ya que nos permiten, en principio, dar respuesta al problema de jerarquía, una cuestión que sigue siendo importante en nuestra comprensión de las interacciones fundamentales puesto que la gravedad permanece aislada de muchas propiedades que las otras interacciones comparten, en particular, la intensidad con la que interactúa con la materia dista veinticuatro órdenes de magnitud de la interacción débil.

El modelo cosmológico planteado en este trabajo funciona como una generalización del modelo estudiado en [30]. Hemos agregado un factor $h(w)$ que modifica la componente dimensional extra de la métrica permitiéndonos un estudio más general de esta clase de geometrías.

Aparte de reproducir el modelo del que partimos, encontramos una simplificación para la ecuación del factor de deformación reduciéndola a una ecuación de primer grado a diferencia de la de segundo grado que aparece en el artículo original.

Nuestra métrica se isotropiza super-exponencialmente en el tiempo y de una forma cualitativamente diferente a la original como se observa en la tabla (2.1), asimismo el campo fantasma se desvanece exponencialmente en el tiempo cualquiera sea la magnitud del coeficiente de amortiguamiento, Ω^2 .

Finalmente, realizamos un estudio del caso N -dimensional e intentamos construir una solución que fuera lo más general para las ecuaciones de campo y encontramos una función-solución aproximada del factor de deformación $A(w)$, además vimos que el comportamiento temporal del campo fantasma y los coeficientes métricos se mantiene en este modelo, decayendo exponencialmente. Futuros trabajos pueden enfocarse en la búsqueda de soluciones analíticas generales que no sean sólo aproximaciones y, en particular, soluciones de agujeros negros que nos permitan un estudio en el contexto de la dualidad AdS/CFT.

Apéndice A

Escalar de Kretschmann

El Kretschmann del modelo estudiado en el capítulo 2 es

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}g_{\gamma\rho}g^{\delta\sigma}R_{\alpha\beta}{}^{\rho}{}_{\delta}R_{\mu\nu}{}^{\gamma}{}_{\sigma} \\ &= 12e^{-4A}\left[\frac{\ddot{u}^2}{2} + \dot{u}^2\left(\ddot{u} + \frac{3\dot{u}^2}{2}\right) + 2H\ddot{u}(\ddot{u} - \dot{u}^2) + H^2(2\ddot{u}^2 - 2\dot{u}^2 + H^2)\right. \\ &\quad + u'\left(\frac{\ddot{u}}{2} + \frac{\dot{u}^2}{2} + H\dot{u} + \frac{u'}{2}\right) + A'(H^2 - \dot{u}^2 + A') \\ &\quad - \frac{1}{h}\left(\dot{u}'^2 - \dot{u}'\dot{u}u' + \frac{3}{4}\dot{u}^2u'^2 + 2H\dot{u}'u' - H\dot{u}u'^2 + H^2u'^2\right) + \frac{1}{3h^2}\left(A'' - \frac{A'h'}{2h}\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2h^2}\left(2A''^2 + 4u''^2 - \frac{2A''h'}{h} + 2u''u' + \frac{A'^2h'^2}{2h^2} + \frac{u'^2h'^2}{4h^2} - \frac{2A'u'^2h'}{h} + \frac{u'^3h'}{2h}\right. \\ &\quad \left. + A'^2u'^2 - A'u'^3 + \frac{3u'^4}{4}\right)]. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Bibliografía

- [1] Kaluza, T. *Zum Unitätsproblem in der Physik*. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin 966 (1921).
- [2] Klein, O. *Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie*. Z. Physik **37**, 895-906 (1926).
- [3] Wheeler, J. A. *On the Mathematical Description of Light Nuclei by the Method of Resonating Group Structure*. Phys. Rev. American Physical Society (APS). **52**(11), 1107-1122 (1937)
- [4] Heisenberg, W. *Die „beobachtbaren Größen“ in der Theorie der Elementarteilchen. I*. Z. Physik **120**(7-10), 513-538 (1943). <https://doi.org/10.1007/BF01329800>.
- [5] Heisenberg, W. *Die „beobachtbaren Größen“ in der Theorie der Elementarteilchen. II*. Z. Physik **120** (11-12), 673-702 (1943). <https://doi.org/10.1007/BF01336936>
- [6] Heisenberg, W. *Die „beobachtbaren Größen“ in der Theorie der Elementarteilchen. III*. Z. Physik **123** (1-2), 93-112 (1944). <https://doi.org/10.1007/BF01375146>
- [7] Gell-Mann, M. *A Schematic Model of Baryons and Mesons*. Phys. Lett. **8** (3), 214-215 (1964). [https://doi.org/10.1016/S0031-9163\(64\)92001-3](https://doi.org/10.1016/S0031-9163(64)92001-3).
- [8] Mandelstam, S. *Determination of the Pion-Nucleon Scattering Amplitude from Dispersion Relations and Unitarity. General Theory*. Phys. Rev. American Physical Society (APS). **112** (4), 1344-1360 (1958). <https://doi.org/10.1103/PhysRev.112.1344>
- [9] Regge, T. *Introduction to Complex Orbital Momenta*. Nuovo Cim. **14**, 951-976 (1959).
- [10] Veneziano, G. *Construction of A Crossing Symmetric, Regge Behaved Amplitude for Linearly Rising Trajectories*. Nouvo Cim. **57** (1), 190-197 (1968). <https://doi.org/10.1007/BF02824451>
- [11] Koba, Z.; Nielsen, H. *Reaction amplitude for n-mesons a generalization of the Veneziano-Bardakçi-Virasoro model*. Nucl. Phys. B **10** (4), 633-655 (1969). [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(69\)90331-9](https://doi.org/10.1016/0550-3213(69)90331-9).
- [12] Scherk, J.; Schwarz, J. *Dual Models for Non-Hadrons*. Nucl. Phys. B **81** (1), 118-144 (1974). [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(74\)90010-8](https://doi.org/10.1016/0550-3213(74)90010-8)
- [13] Yoneya, T. *Connection of Dual Models to Electrodynamics and Gravidynamics*. Progress of Theoretical Physics. **51** (6), 1907-1920 (1974). <https://doi.org/10.1143/PTP.51.1907>
- [14] Schwarz, J. *Physical States and Pomeron Poles in the Dual Pion Model*. Nucl. Phys. B **46** (1), 61-74 (1972). [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(72\)90201-5](https://doi.org/10.1016/0550-3213(72)90201-5)
- [15] Witten, E. *Fermion Quantum Numbers in Kaluza-Klein Theory*. Conf. Proc. C **8306011**, 227 (1983).

- [16] Witten, E. *String Theory Dynamics in Various Dimensions*. Nucl. Phys. B **443** (1-2), 85-126 (1995). [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(95\)00158-O](https://doi.org/10.1016/0550-3213(95)00158-O)
- [17] Rubakov, V.; Shaposhnikov, M. *Do We Live Inside A Domain Wall?*. Phys. Lett. B **125** (2-3), 136-138 (1983). [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(83\)91253-4](https://doi.org/10.1016/0370-2693(83)91253-4)
- [18] Gogberashvili, M. *Hierarchy Problem in the Shell-Universe Model*. International Journal of Modern Physics D **11** (10), 1635-1638 (2002). <https://doi.org/10.1142/S0218271802002992>
- [19] Gogberashvili, M. *Our World as an Expanding Shell*. Europhysics Letters. **49** (3), 396-399 (2000). <https://doi.org/10.1209/epl/i2000-00162-1>
- [20] Randall, L.; Sundrum, R. *Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension*. Phys. Rev. Lett. **83** (17), 3370-3373 (1999). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.83.3370>
- [21] Randall, L.; Sundrum, R. *An Alternative to Compactification*. Phys. Rev. Lett. **83** (23), 4690-4693 (1999). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.83.4690>
- [22] Pérez-Lorenzana, A. *An Introduction to the Brane World*. Rev. Mex. Fís. S **53** (2), 85-102 (2007).
- [23] Kanti, P.; Kogan, I. I.; Olive, K. A.; Pospelov, M. *Single-Brane Cosmological Solutions with a Stable Compact Extra Dimension*. Phys. Rev. D **61**, 106004 (2000). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.61.106004>
- [24] Mounaix, P.; Langlois, D. *Cosmological Equations for a Thick Brane*. Phys. Rev. D **65**, 103523 (2002). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.65.103523>
- [25] Dzhunushaliev, V.; Folomeev, V.; Minamitsuji, M. *Thick Brane Solutions*. Rep. Prog. Phys. **73**, 066901 (2010). <https://doi.org/10.48550/arXiv.0904.1775>
- [26] Abdyrakhmanov, S. T.; Bronnikov, B. E.; Meierovich, B. E. *Uniqueness of RS2 Type Thick Branes Supported by a Scalar Field*. Grav. Cosmol. **11**, 82-86 (2005).
- [27] Koley, R.; Kar, S. *Bulk Phantom Fields, Increasing Warp Factors and Fermion Localization*. Mod. Phys. Lett. A **20**, 363-371 (2005). <https://doi.org/10.1142/S0217732305015586>
- [28] Gogberashvili, M.; Singleton, D. *Anti-de-Sitter Island-Universes from 5D Standing Waves*. Mod. Phys. Lett. A **25**, 2131-2143 (2010). <https://doi.org/10.1142/S021773231003358X>
- [29] Gogberashvili, M.; Herrera-Aguilar, A.; Malagón-Morejón, D. *An Anisotropic Standing Wave Braneworld and Associated Sturm-Liouville Problem*. Class. Quant. Grav. **29**, 025007 (2012).
- [30] Gogberashvili, M.; Herrera-Aguilar, A.; Malagón-Morejón, D.; Mora-Luna, R.; Nucamendi, U. *Thick Brane Isotropization in a Generalized 5D Anisotropic Standing Wave Braneworld Model*. Phys. Rev. D **87** (8), 084059 (2013).
- [31] Herrera-Aguilar, A.; Malagón-Morejón, D.; Mora-Luna, R. *Localization of Gravity on a de Sitter Thick Braneworld Without Scalar Fields*. Journal of High Energy Physics **11**, 1-12 (2010).