



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA ELECTRÓNICA

Tesina presentada para obtener el título de Licenciatura en
Electrónica.

*“Estudio de la Electrodinámica de la Radiación Sincrotrón
Emitida por Electrones Relativistas Acelerados: Características
y cualidades de esta radiación”*

PRESENTA:

Oscar Cruz Limón

ASESOR:

Dr. José Soto Manríquez

25 de Octubre de 2018

Contenido

1. Tratamiento Cualitativo de la Radiación Sincrotrón	1
1.1. Introducción	1
1.2. Factor de Lorentz.....	4
1.3. Ángulo de abertura o cono de emisión.....	5
1.4. Origen de la banda espectral de los rayos X.....	7
2. Teoría Electromagnética	10
2.1. Introducción	10
2.2. Ecuaciones de Maxwell.....	11
2.3. Los Potenciales escalar φ y vectorial \mathbf{A}	13
2.4. Transformaciones Gauge	15
2.5. Soluciones de las ecuaciones de onda in-homogéneas para los potenciales...17	

3. Campos Eléctrico y Magnético de una Carga Puntual en Movimiento.	22
3.1. Introducción	22
3.2. Los Potenciales de Liénard-Wiechert.....	22
3.3. Los campos de Liénard-Wiechert.....	26
4. Campos de Liénard-Wiechert: Casos Específicos.....	34
4.1. Introducción	34
4.2. Campos de una partícula cargada en movimiento uniforme	34
4.3. Campos de una partícula cargada con movimiento acelerado.....	38
4.3.1 Velocidad y aceleración paralelas	40
4.3.2 Velocidad y aceleración perpendiculares.....	42
4.4. Comparación entre las potencias radiadas en los dos casos.....	45
5. Radiación de Sincrotrón.....	48
5.1. Introducción	48
5.2. Distribución espectral y angular de la radiación emitida por una partícula cargada acelerada	49
5.3. Espectro de frecuencias de la radiación emitida por una partícula cargada relativista en movimiento circular instantaneo	53
5.4. Distribución angular de la energía radiada	57
5.5. Distribución en frecuencias de la energía radiada	59
5.6. Forma normalizada de $dI/d\omega$	60
5.7. Densidad espectral de los fotones emitidos.....	63
Referencias	66

Capítulo 1.

Tratamiento Cualitativo de la Radiación de Sincrotrón

1.1. Introducción.

Cuando los electrones u otras partículas cargadas se mueven a velocidades relativistas y son forzadas a seguir trayectorias curvas, principalmente por campos magnéticos, éstas emiten radiación electromagnética en la dirección de su movimiento, la cual es conocida como **radiación sincrotrón (RS)**.

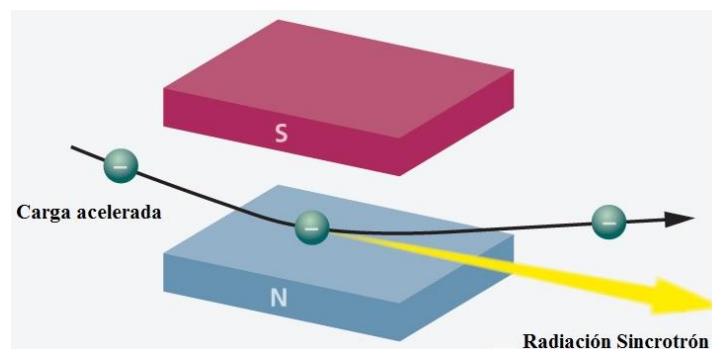


Fig. 1.1. Radiación Sincrotrón.

Este tipo de radiación ha sido descrito con distintos niveles de detalle desde finales del siglo XIX. Así, en 1897, Larmor derivó una expresión para la energía total instantánea radiada para el caso no relativista utilizando la electrodinámica clásica. Al año siguiente, Liénard amplió este resultado para el caso de una partícula relativista sometida a una aceleración centrípeta en una trayectoria circular. La fórmula de Liénard mostró que la potencia radiada es proporcional a γ^4/ρ^2 , donde γ queda definida por la ecuación $E = \gamma m_0 c^2$ (m_0 : masa en reposo, c : velocidad de la luz) para la energía total de la partícula y ρ es el radio de la trayectoria.

En 1907, previo a la aparición del modelo atómico de Niels Bohr; Schott intentó explicar la naturaleza discreta de los espectros de emisión atómicos mediante el tratamiento del movimiento de un electrón relativista en un campo magnético homogéneo. Al hacerlo, obtuvo expresiones para la distribución angular de la radiación de las distintas armónicas de la frecuencia orbital; sin embargo, sus intentos de explicar la radiación atómica dentro del ámbito de la física clásica no tuvieron éxito. Por esta razón, el trabajo de Schott ^[1] fue tan sólo de interés académico y fue prácticamente olvidado; recuperó importancia unos 40 años después cuando surgió la cuestión de una carga emisora moviéndose en una trayectoria macroscópica. El interés primordial fue la emisión electromagnética por electrones acelerados en un campo magnético.

En 1939, Artsimovich y Pomeranchuk ^[2] descubrieron teóricamente que la potencia máxima de la radiación emitida por el electrón no caía en la frecuencia fundamental ω_0 de la órbita circular (como sería el caso para una radiación dipolar no relativista), sino en la región de sus armónicos elevados $\omega \sim \omega_0 \gamma^3$. En esa misma publicación se establece que la distribución angular de la potencia de radiación de sincrotrón es altamente anisotrópica y que está concentrada en un *estrecho cono* con un semi-ángulo $\sim 1/\gamma$, y dirigiéndose hacia delante, en paralelo al movimiento del electrón.

Descripciones teóricas aún más detalladas sobre la emisión electromagnética por electrones ultra-relativistas acelerados fueron elaboradas por Julian Schwinger ^[3] en 1945. Las principales características encontradas para el caso de las trayectorias circulares incluyeron la deformación de los lóbulos de radiación de un dipolo oscilante no

relativista en la distribución de picos fuertemente orientados hacia delante y que da a la RS su propiedad altamente colimada, así como el desplazamiento del espectro de la radiación a energías de fotones bastante superiores (armónicos de la frecuencia orbital) a medida que aumenta la energía de los electrones, con la energía del fotón en el pico de la distribución variando como E^3/ρ .

Este fenómeno se observó por primera vez en 1947 en el sincrotrón de la General Electric ^[4] en E.U.A. Este sincrotrón operó a 70 MeV de energía con un campo magnético de 0.81 T y un radio orbital de 29.3 cm. En él se pudo observar visualmente que la emisión de luz visible y de rayos-X tenía lugar dentro de un cono muy angosto, tangencial a la órbita del electrón y que la luz emitida por el haz estaba polarizada paralelamente al plano de la órbita del electrón.



Fig. 1.2. Científicos en General Electric que inspeccionan la cámara de vacío del sincrotrón de 70 MeV en la que se observó por primera vez la radiación sincrotrón. De izquierda a derecha: Robert Langmuir, Frank Elder, Toly Gurewitsch, Ernest Charlton y Herb Pollock.

Esta primera observación experimental de la RS estimuló nuevas investigaciones teóricas acerca de las propiedades de esta radiación: el análisis de la distribución espectral (en términos de longitudes de onda) y de la distribución angular en el espacio

para el caso ultra-relativista ($\gamma \gg 1$). Así, por ejemplo, V. Vladimirkii ^[5] aplicó las *funciones de Airy* para describir el espectro de radiación de un electrón que se mueve en un campo magnético. Las fórmulas asintóticas para la composición espectral de la RS se determinaron de forma independiente en varios estudios teóricos ^[2, 5-8] y abrieron la posibilidad de realizar una comparación estrecha con los experimentos. Los modelos teóricos mostraron un buen acuerdo con los experimentos en el rango visible ^[9], en el rango ultravioleta del vacío ^[10], así como en el rango de los rayos-X ^[11].

1.2. Factor de Lorentz.

Se comienza con la discusión cualitativa de la RS con el fin de obtener una idea de sus propiedades físicas, tales como el ángulo de abertura pequeño y su amplio espectro de frecuencias. Las propiedades físicas de la RS tienen su base en el hecho de que la carga se mueve con velocidad relativista hacia el observador y en que la carga y la radiación emitida por ella viajan con velocidades comparables en la misma dirección. Los campos creados por la carga durante un intervalo de tiempo relativamente largo son recibidos por el observador dentro de un intervalo mucho más corto. Esta compresión de tiempo determina el espectro de la RS. Las características de la radiación dependen de dos parámetros: la frecuencia angular ω_0 (es decir, el número de radianes girados por los electrones por segundo alrededor de la órbita) y la energía E de los electrones en el anillo de almacenamiento dada por el parámetro adimensional γ conocido como *Factor de Lorentz*:

$$E = \gamma m_0 c^2 \quad \text{tal que: } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1.1)$$

En donde $\beta = v/c$ es la velocidad normalizada. A medida que la partícula se aproxima a la velocidad de la luz, gana masa por un factor igual a γ . Como tendría masa infinita exactamente en $v = c$, sólo se puede aproximar a este límite, cada vez con mayor dificultad.

1.3. Ángulo de abertura o cono de emisión.

Se considera a un electrón que se mueve con velocidad $c\beta$ en el sistema de referencia del laboratorio F en una trayectoria circular con radio de curvatura ρ , *Fig. 1.3*. También se tiene el sistema de referencia F' que se mueve horizontalmente con esta misma velocidad $c\beta$ y cuyo origen coincide con el electrón cuando éste alcanza el punto máximo de la curva. La trayectoria del electrón tiene en este sistema de referencia F' la forma de una cicloide con una cúspide en el origen. En este punto el electrón está momentáneamente en reposo pero sufre una aceleración en la dirección $-x$. Al igual que cualquier partícula cargada y acelerada, el electrón emite radiación en casi todas las direcciones en este sistema de referencia F' . Para obtener la distribución de esta radiación como sería observada en el sistema de referencia F del laboratorio, se requiere utilizar las *transformaciones de Lorentz*^[12] entre los dos sistemas inerciales aplicándolas a haces de fotones. Aquí se verá que en el laboratorio la radiación emitida por el electrón acelerado toma la forma de un haz muy delgado hacia adelante y que, por ejemplo, todos los fotones emitidos en el hemisferio derecho del sistema F' aparecen en el sistema F dentro de un cono muy angosto con semi-ángulo $1/\gamma$. Estas transformaciones relacionan las coordenadas de un evento en el sistema del laboratorio $[x, y, z, t]$ con las coordenadas del mismo evento en el sistema en movimiento $[x', y', z', t']$:

$$\begin{aligned}
 x' &= x \\
 y' &= y \\
 z' &= \gamma(z - \beta ct) \\
 ct' &= \gamma(ct - \beta z)
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

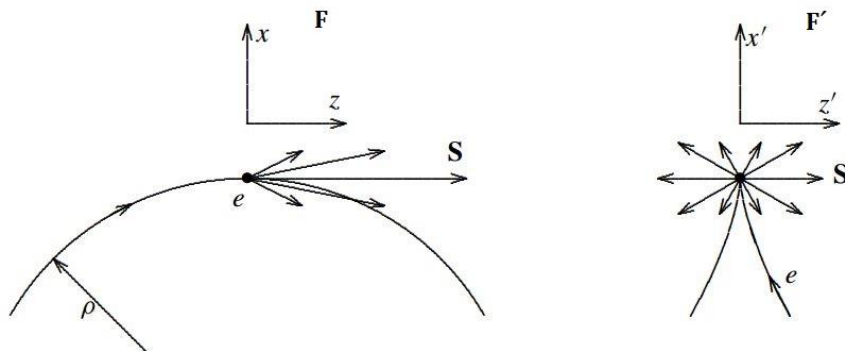


Fig. 1.3. El ángulo de abertura de la radiación sincrotrón.

Para un fotón moviéndose en el plano x, z con un ángulo θ en el sistema de referencia del laboratorio, se tiene:

$$x = ct \sin \theta \quad , \quad z = ct \cos \theta \quad (1.3)$$

y para el sistema de referencia en movimiento:

$$\begin{aligned} x' &= ct \sin \theta' = \gamma ct(1 - \beta \cos \theta) \sin \theta' = ct \sin \theta \\ z' &= ct' \cos \theta' = \gamma ct(1 - \beta \cos \theta) \cos \theta' = \gamma ct(\cos \theta - \beta) \end{aligned} \quad (1.4)$$

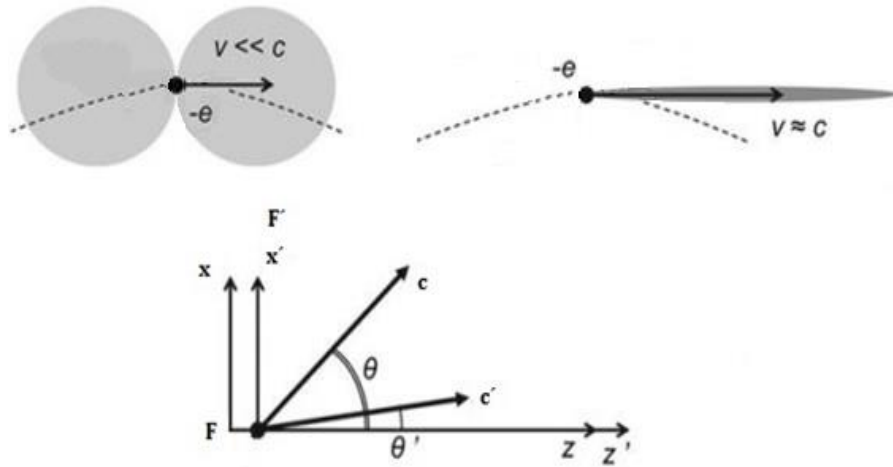


Fig. 1.4. Colimación angular de la radiación sincrotrón. Izquierda superior: un electrón que se mueve a velocidad no relativista $v \ll c$ emite radiación, cuando es acelerado por un imán de desviación. Derecha superior: este patrón de emisión se convierte en un haz estrecho (ángulo $\sim 1/\gamma$) para la velocidad relativista. En la parte inferior un simple uso de la transformación de Lorentz desde el sistema de referencia del electrón F' al sistema de referencia del laboratorio F , explica la colimación.

por lo tanto:

$$\sin \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)} \quad (1.5)$$

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta} \quad (1.6)$$

Así, para un fotón emitido en el sistema en movimiento con $\theta' = \pi/2$, se obtiene:

$$\theta^2 \approx 2(1 - \beta) \approx (1 + \beta)(1 - \beta) = 1 - \beta^2$$

Habiendo utilizado la aproximación ultra-relativista $\beta \approx 1$:

$$\theta \approx \sqrt{1 - \beta^2} \approx \frac{1}{\gamma} \quad (1.7)$$

Esta propiedad geométrica es una consecuencia directa de la velocidad relativista del electrón emisor, como lo son otras características de la RS.

1.4. Origen de la banda espectral de los rayos-X.

Para estimar la frecuencia típica de la radiación emitida por el electrón, se considera que el electrón se mueve en una trayectoria circular a través de un campo magnético como se muestra en la *Fig. 1.5*. Se calcula primero la duración Δt del pulso de radiación recibido por el observador P . Debido al pequeño cono de abertura, el observador recibe solamente la radiación que se emite a lo largo de un arco con un ángulo comprendido entre $\pm 1/\gamma$. Así, la radiación observada primero fue emitida en el punto A , donde la trayectoria del electrón tiene un ángulo $1/\gamma$ con respecto a la dirección que apunta hacia el observador, mientras que la última radiación observada fue emitida en el punto A' , donde la trayectoria tiene un ángulo de $-1/\gamma$. Por lo tanto, la duración del pulso de radiación visto por el observador es la diferencia en los tiempos de recorrido entre el electrón y la radiación desde el punto A hacia el punto A' :

$$\Delta t = t_e - t_\gamma = \frac{2\rho}{\gamma\beta c} - \frac{2\rho \sin 1/\gamma}{c} \quad (1.8)$$

Cuando se consideran velocidades ultra-relativistas ($\gamma \gg 1$), se tiene $1/\gamma \ll 1$ y al expandir la función trigonométrica se obtiene:

$$\Delta t \approx \frac{2\rho}{\gamma\beta c} \left(1 - \beta + \frac{\beta}{6\gamma^2}\right) \approx \frac{\rho}{\gamma c} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{3\gamma^2}\right) = \frac{4}{3} \frac{\rho}{\gamma^3 c} \quad (1.9)$$

donde se utilizó la aproximación relativista:

$$1 - \beta = \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta} \approx \frac{1}{2\gamma^2} \quad (1.10)$$

A partir de la duración Δt del pulso de radiación, se obtiene la frecuencia típica del espectro:

$$\omega_{tip} \approx \Delta t^{-1} = \frac{3c\gamma^3}{4\rho} \quad (1.11)$$

Si se compara la duración de la emisión del pulso $t_e = \frac{2\rho}{\gamma\beta c}$ con la duración del pulso de radiación observada, se tiene:

$$\Delta t = \frac{2}{3\gamma^2} t_e \quad (1.12)$$

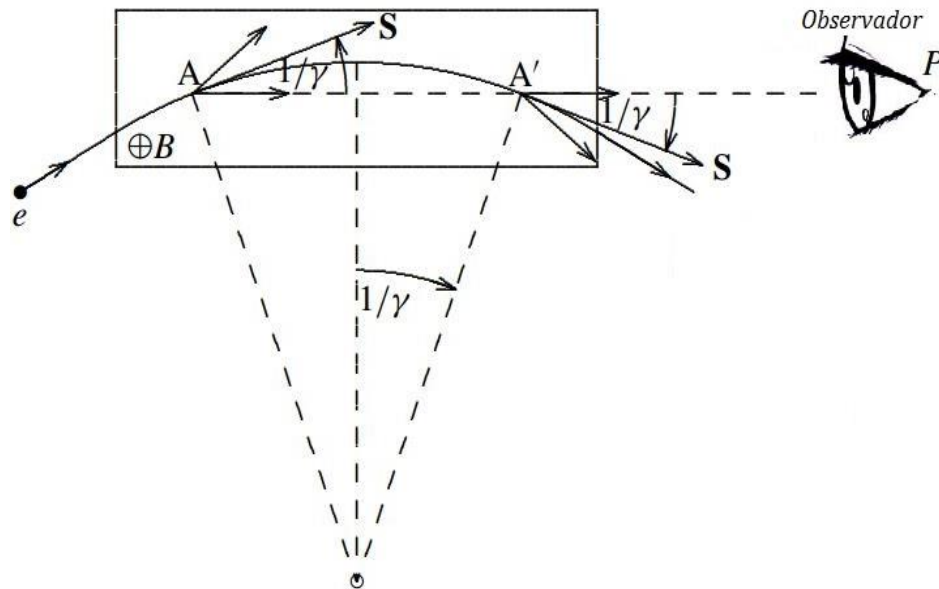


Fig. 1.5. Vista gráfica del origen de la duración del pulso de radiación emitido por un imán de desviación. El observador registra la radiación emitida por el electrón a lo largo de la trayectoria de A hacia A'.

y por las relaciones $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ y $\rho = \frac{E}{ceB}$, siendo B el campo magnético, se obtienen las siguientes expresiones para la longitud de onda típica y para la duración t_e :

$$\lambda_{tip} = \frac{8\pi cm_0}{3eB\gamma^2} \quad (1.13)$$

$$t_e = \frac{2E}{\gamma c^2 e B} \quad (1.14)$$

Así, por ejemplo para un electrón con $E = 1\text{GeV}$ en un campo $B = 1\text{ T}$ y puesto que $m_0c^2 \approx 0.5\text{ MeV}$, se tiene que $\gamma \approx 2000$, por lo cual:

Ángulo de abertura $\frac{1}{\gamma} \approx \frac{1}{2}\text{ mrad}$, $t_e \approx 1.11 \times 10^{-11}\text{ seg}$, $\Delta t \approx 1.66 \times 10^{-7}$, $t_e = 1.85 \times 10^{-18}\text{ seg}$ y $\lambda_{tip} \approx 3.6\text{ nm}$ (*rayos – X blandos*).

Puede verse que como consecuencia del *efecto Doppler* relativista, en el que el electrón acelerado se mueve rápidamente y en la misma dirección que la radiación que él mismo emite, el observador recibe un pulso de radiación comprimido por un factor de muchos millones, originándose de este modo las bandas de rayos-X típicas de la RS; sin embargo, la radiación que normalmente llega al observador en un sincrotrón no proviene de la emisión de un solo electrón sino de la de un grupo numeroso de ellos y consiste de una sucesión aleatoria de esas emisiones individuales, dando lugar así a la formación de un pulso incoherente de mucho mayor duración pero manteniendo el espectro de frecuencias de la emisión individual.

Capítulo 2.

Teoría Electromagnética

2.1. Introducción.

La teoría electromagnética del físico escocés James Clerk Maxwell (1831-1879) es una de las obras intelectuales más importante en la historia de la ciencia. Esta teoría es considerada como el nacimiento de la física moderna debido a que sus consecuencias incidieron drásticamente en todas las ramas de la física, ya sea permitiendo fijar las condiciones de la validez de los modelos existentes o generando bases conceptuales más profundas; además de conformar un modelo completo para los fenómenos clásicos del electromagnetismo, explicó de manera consistente toda la óptica ondulatoria y, en gran medida la naturaleza de la luz, prediciendo además la existencia de ondas electromagnéticas y demostró que el campo es un ente físico real e independiente de la materia.

Corresponde señalar aquí que la teoría de la relatividad especial está implícita en las ecuaciones de Maxwell pues ellas se cumplen con rigor en todos los sistemas inerciales, lo que permite deducir naturalmente las transformaciones de Lorentz como relaciones únicas de transformación de coordenadas entre sistemas inerciales.

La formulación moderna del electromagnetismo fue elaborada en 1884 por el científico autodidacta *Oliver Heaviside* (1850-1925), para lo cual estructuró el análisis vectorial y replanteo la formulación de Maxwell, llevándola a la forma en que es tratada por la bibliografía actual mediante ecuaciones diferenciales parciales y vectoriales.

2.2. Ecuaciones de Maxwell.

Se presentan primero las ecuaciones de campo básicas para describir fenómenos electromagnéticos en un sistema de referencia inercial desplazándose en el vacío. Las magnitudes físicas para representar los campos electromagnéticos son: *la intensidad de campo \mathbf{E} [V/m]* y *la densidad de flujo magnético \mathbf{B} [T]*. Por otro lado, las cantidades de las fuentes que producen esos campos son: *la densidad de carga ρ [C/m³]* y *la densidad de corriente \mathbf{J} [A/m²]*.

Estas magnitudes electromagnéticas básicas son, en general, funciones de la posición y del tiempo. Las relaciones entre las magnitudes de campo \mathbf{E} , \mathbf{B} y las cantidades de las fuentes ρ y \mathbf{J} están especificadas por las cuatro ecuaciones de campo básicas, que se conocen como las *Ecuaciones de Maxwell*.

La forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell en *el vacío* está dada por las siguientes expresiones ^[12]:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \quad (\text{Ley de Faraday}) \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{J} \right) \quad (\text{Ley de Ampere-Maxwell}) \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (\text{Ley de Gauss para campo Eléctrico}) \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{Ley de Gauss para campo Magnético}) \quad (2.4)$$

La ley de Faraday: El rotacional del campo eléctrico es igual a la variación temporal negativa del campo magnético. Físicamente, esto indica que la variación temporal de un campo magnético es capaz de generar un campo eléctrico transitorio.

La ley de Ampere-Maxwell: Al rotacional del campo magnético contribuyen tanto la densidad de corriente eléctrica como la variación temporal del campo eléctrico. Físicamente, aquí tenemos que, aparte de la contribución de las corrientes, la variación temporal de un campo eléctrico es capaz de generar un campo magnético transitorio. Esta última fue la corrección importante introducido por Maxwell a las cuatro ecuaciones que llevan su nombre y fue con ella que se hizo posible predecir la existencia de las ondas electromagnéticas.

La ley de Gauss para el campo eléctrico: La divergencia del campo eléctrico es proporcional a la densidad volumétrica de carga eléctrica en una región.

Ley de Gauss para campo magnético: La divergencia del campo magnético es cero. Esto indica la no existencia de fuentes y de sumideros para las líneas del campo magnético, es decir, que estas líneas son curvas cerradas (no existen mono polos magnéticos).

A las ecuaciones de Maxwell anteriores se suele agregar la ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.5)$$

Esta ecuación expresa la ley de la conservación de la carga, que es una de las leyes más fundamentales de la física moderna.

Al integrar las ecuaciones (2.1) y (2.2) a lo largo de un contorno cerrado C y al utilizar el teorema de Stokes se obtienen las ecuaciones de Maxwell correspondientes en su forma integral:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.1')$$

$$\frac{1}{\mu_0} \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{d}{dt} \int_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.2')$$

En donde S representa alguna *superficie abierta* limitada por el contorno C .

Por otro lado, al integrar las ecuaciones (2.3) y (2.4) dentro del volumen cerrado por la *superficie cerrada* S , y al utilizar el Teorema de la Divergencia (o Teorema de Gauss) se obtienen las otras dos ecuaciones de Maxwell en su forma integral:

$$\oint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \rho \, dv \quad (2.3')$$

y

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (2.4')$$

Asimismo al realizar la integral volumétrica de la ecuación de continuidad (2.5) y al utilizar nuevamente el teorema de la divergencia, pero en sentido opuesto, se obtiene su versión integral:

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho \, dv \quad (2.5')$$

Tanto la versión diferencial como la versión integral de las ecuaciones de Maxwell son ampliamente utilizadas y ambas se complementan mutuamente; sin embargo, durante el desarrollo de este trabajo se estarán utilizando procedimientos basados casi exclusivamente en la forma diferencial.

2.3. Los potenciales escalar φ y vectorial \mathbf{A} .

Aunque en muchos casos es posible resolver los problemas aplicando las ecuaciones de Maxwell directamente, las cuales consisten de cuatro ecuaciones diferenciales y vectoriales de primer orden, es generalmente más conveniente transformarlas en dos ecuaciones diferenciales y vectoriales de segundo orden para dos nuevas cantidades matemáticas, una conocida como el *potencial escalar* φ y la otra como el *potencial vectorial* \mathbf{A} .

Esta posibilidad está basada en dos identidades vectoriales: (i) Para un campo vectorial \mathbf{F} arbitrario pero continuo y derivable, se tiene que:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) \equiv 0 \quad (i)$$

y (ii) para un campo escalar arbitrario χ , se tiene que:

$$\nabla \times (\nabla \chi) \equiv 0 \quad (\text{ii})$$

Ya que, de acuerdo con la última ecuación de Maxwell ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$) es claro que al usar (i) se puede expresar a \mathbf{B} como el rotacional de algún campo vectorial \mathbf{A} :

$$\mathbf{B} = (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (2.6)$$

Utilizando esto, se puede escribir la ecuación (2.1) como:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

esto es:

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

y por (ii) se tiene que:

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi$$

Para algún campo escalar φ . Por lo tanto, se concluye que:

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.7)$$

Evidentemente, y como era de esperarse, la definición de \mathbf{B} y de \mathbf{E} en función de los potenciales \mathbf{A} y φ satisfacen idénticamente la primera y la última de las ecuaciones de Maxwell; sin embargo, hasta este momento, los potenciales \mathbf{A} y φ son desconocidos. Ahora se mostrará que por medio de c se pueden encontrar las ecuaciones diferenciales para esos dos potenciales en términos de las fuentes ρ y \mathbf{J} .

Así, al reescribir la ecuación de Ampere-Maxwell en términos de los potenciales, se obtiene:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)$$

Al hacer uso de la identidad vectorial $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$ en el lado izquierdo de la ecuación y al reacomodar los términos, se llega a:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \mu_0 \mathbf{J} \quad (2.8)$$

Al reescribir ahora la ecuación de Gauss para el campo eléctrico en términos de los potenciales, se tiene:

$$\nabla \cdot \left(-\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

La cual, finalmente se puede escribir como:

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.9)$$

Así, se ha podido reducir las cuatro ecuaciones de Maxwell a solo dos ecuaciones diferenciales, solo que de mayor grado. Además, éstas son ecuaciones acopladas para los dos potenciales. Es posible simplificar el problema aún más al desacoplarlas y obtener una ecuación diferencial para cada potencial por separado. Esto se puede lograr al recurrir a un cierto grado de arbitrariedad involucrado en la definición de los potenciales.

2.4. Transformaciones Gauge.

Como \mathbf{B} se define a través de (2.6) en términos de \mathbf{A} , el potencial vectorial \mathbf{A} incluye cierto grado de arbitrariedad, ya que se le puede añadir el gradiente de alguna función escalar Λ sin que le cause ningún cambio a \mathbf{B} con esta transformación:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda \quad (2.10)$$

Para que el campo eléctrico (2.7) tampoco sea modificado, entonces el potencial escalar debe ser transformado simultáneamente de acuerdo con:

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad (2.11)$$

A esto se le conoce como una transformación *Gauge*, siendo la función escalar Λ únicamente limitada a ser una función continua y derivable.

Es fácil demostrar que estos nuevos potenciales A' y φ' , así definidos, también satisfacen ecuaciones idénticas a (2.8) y (2.9):

$$\nabla^2 A' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A'}{\partial t^2} = \nabla \left(\nabla \cdot A' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} \right) - \mu_0 J \quad (2.8')$$

$$\nabla^2 \varphi' + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot A' = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.9')$$

Es posible eliminar toda presencia de φ' en (2.8') al aplicar la condición:

$$\nabla \cdot A' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = 0 \quad (2.12)$$

Conocida como la *condición de Lorentz*. Un efecto benéfico de aplicar esta condición es que con ella también desaparece toda presencia de A' en (2.9') obteniéndose las ecuaciones desacopladas:

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu_0 J \quad (2.13)$$

Y

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.14)$$

En donde ya se ha omitido las primas, dada la falta de preferencia de un par de potenciales sobre el otro.

Al escribir la condición de Lorentz explícitamente como:

$$\nabla \cdot (A + \nabla \Lambda) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) = 0$$

entonces:

$$\nabla^2 \Lambda + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = - \left(\nabla \cdot A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)$$

Un caso particular de la función Λ que desacopla a las dos ecuaciones, es aquel que satisface la ecuación de onda:

$$\nabla^2 \Lambda + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = 0 \quad (2.15)$$

Esta restricción le resta arbitrariedad a Λ pero aún le deja por asumir una familia muy vasta de soluciones de la ecuación de onda, según sea la conveniencia.

2.5. Soluciones de las ecuaciones de onda in-homogéneas para los potenciales.

Para el caso estático en el que las fuentes ρ y \mathbf{J} son independientes del tiempo, las ecuaciones (2.13) y (2.14) se reducen a las ecuaciones de *Poisson*, respectivamente:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (2.16)$$

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.17)$$

Cuyas soluciones familiares son:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} dv' \quad (2.18)$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} dv' \quad (2.19)$$

En donde \mathbf{r} , \mathbf{r}' y R se definen de acuerdo con la *Fig. (2.1)*, tal que $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ es la distancia de la fuente al punto P en el cual los potenciales son evaluados.

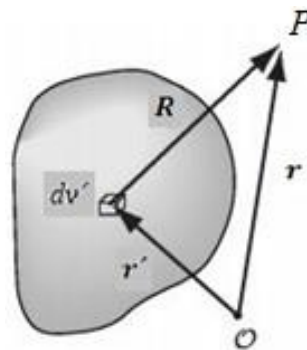


Fig. 2.1

Volviendo al caso dinámico en el cual las fuentes φ y \mathbf{J} varían en el tiempo, al tomar en cuenta que las perturbaciones e. m. introducidas por esos cambios viajan a la velocidad de la luz, no son las condiciones de las fuentes en el instante t de observación las que importan sino sus condiciones en algún tiempo previo t' (llamado *tiempo retardado*) de cuando la perturbación partió de la fuente. Ya que esta señal debe viajar una distancia R para llegar al punto P , el retardo es R/c y por lo tanto $t' = t - R/c$.

Esto permite proponer como soluciones de las ecuaciones de onda inhomogéneas (2.13) y (2.14) la generalización de los potenciales (2.18) y (2.19):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{R(t')} dv' \quad (2.20)$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{R(t')} dv' \quad (2.21)$$

Los cuales son conocidos como *potenciales retardados*.

Para confirmar que estas expresiones son realmente los potenciales correctos, se debe de verificar que éstas satisfacen sus respectivas ecuaciones in-homogéneas y que conjuntamente cumplen con la condición de Lorentz (2.12).

Primero, se verá que el potencial escalar retardado $\varphi(\mathbf{r}, t)$ cumple con la ecuación (2.14). El mismo tipo de argumento sirve para establecer que el potencial vectorial retardado $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ cumple con la ecuación (2.13).

Para calcular el laplaciano de $\varphi(\mathbf{r}, t)$ es crucial notar que el integrando depende de \mathbf{r} en dos sitios: explícitamente en el denominador $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ e implícitamente en el numerador a través del tiempo retardado $t' = t - R/c$.

Ya que $\nabla^2\varphi = \nabla \cdot (\nabla\varphi)$, se muestra primero la forma explícita que adquiere la última operación:

$$\nabla\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[(\nabla\rho) \frac{1}{R} + \rho \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \right] dv' \quad (2.22)$$

Se puede demostrar fácilmente que $\nabla\rho = \dot{\rho}\nabla t' = -\frac{1}{c}\dot{\rho}\nabla R$, donde el punto en la ρ significa diferenciación con respecto a t' y utilizando las relaciones que también son fáciles de probar $\nabla R = \hat{\mathbf{R}}$ y $\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2}$, se obtiene la reducción del gradiente:

$$\nabla\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[-\frac{\dot{\rho}\hat{\mathbf{R}}}{cR} - \rho\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \right] dv'$$

Ahora, aplicando la divergencia se obtiene:

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left\{ -\frac{1}{c} \left[\hat{\mathbf{R}} \cdot (\nabla\dot{\rho}) + \dot{\rho}\nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R} \right) \right] - \left[\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \cdot (\nabla\rho) + \rho\nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \right) \right] \right\} dv'$$

y al aplicar ahora el operador nabla a la función $\dot{\rho}$ se obtiene que:

$$\nabla\dot{\rho} = -\frac{1}{c}\ddot{\rho}\nabla R = -\frac{1}{c}\ddot{\rho}\hat{\mathbf{R}}$$

puesto que:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R} \right) = \frac{1}{R^2}$$

se tiene:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \right) = 4\pi\delta^3(\mathbf{R})$$

Siendo $\delta^3(\mathbf{R})$ la función delta de Dirac tridimensional, entonces se obtiene:

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\frac{1}{c^2}\ddot{\rho} - 4\pi\rho\delta^3(\mathbf{R}) \right] dv' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{R} dv' \right) - \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0}$$

ya que $t' = t - R/c$ y R es independiente de t , se tiene que $\frac{\partial^2}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, por lo cual se puede escribir finalmente:

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Quedando así confirmado que el potencial retardado definido por la integral (2.21) efectivamente cumple con la ecuación in-homogénea (2.14).

Por la misma secuencia de argumentos matemáticos se puede confirmar que cada una de las componentes A_x , A_y y A_z del potencial vectorial obtenidas de la integral (2.20) y por lo tanto, el mismo potencial vectorial retardado \mathbf{A} , satisfacen la ecuación de onda in-homogénea (2.13).

Ahora para verificar que los potenciales $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ y $\varphi(\mathbf{r}, t)$ dados por sus representaciones integrales (2.20) y (2.21) respectivamente, satisfacen conjuntamente la condición de Lorentz (2.12). Se evalúan por separado $(\nabla \cdot \mathbf{A})$ y $(\frac{\partial}{\partial t} \varphi)$ y se comparan los resultados. Así, por un lado se tiene que:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{R} \right) dv' \quad (2.23)$$

Se debe tener en cuenta que ∇ indica derivadas con respecto a \mathbf{r} (la posición del observador) y no \mathbf{r}' (las posiciones de la fuente y la variable de integración) y que tanto t' y R dependen de \mathbf{r} y \mathbf{r}' . Comenzando con las expresiones:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{J}}{R} \right) = \frac{1}{R} (\nabla \cdot \mathbf{J}) + \mathbf{J} \cdot \left(\nabla \frac{1}{R} \right), \quad \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{J}}{R} \right) = \frac{1}{R} (\nabla' \cdot \mathbf{J}) + \mathbf{J} \cdot \left(\nabla' \frac{1}{R} \right)$$

Pero $\nabla \frac{1}{R} = -\nabla' \frac{1}{R}$, ya que $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, entonces se tiene:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{J}}{R} \right) = \frac{1}{R} (\nabla \cdot \mathbf{J}) - \mathbf{J} \cdot \left(\nabla' \frac{1}{R} \right) = \frac{1}{R} (\nabla \cdot \mathbf{J}) + \frac{1}{R} (\nabla' \cdot \mathbf{J}) - \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{J}}{R} \right) \quad (2.24)$$

por lo tanto la ecuación (2.23) se puede escribir de la forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\frac{1}{R} (\nabla \cdot \mathbf{J}) + \frac{1}{R} (\nabla' \cdot \mathbf{J}) - \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{J}}{R} \right) \right] dv' \quad (2.25)$$

Ahora se necesita resolver las dos divergencias $(\nabla \cdot \mathbf{J})$ y $(\nabla' \cdot \mathbf{J})$. Usando la regla de la cadena sobre el primer término:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = \frac{\partial J_x}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial z}$$

con

$$\frac{\partial t'}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial t'}{\partial y} = -\frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial t'}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial z}$$

Entonces se tiene que:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{1}{c} \left[\frac{\partial J_x}{\partial t'} \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial t'} \frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial t'} \frac{\partial R}{\partial z} \right] = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t'} \cdot (\nabla R)$$

Para la otra divergencia $(\nabla' \cdot \mathbf{J})$, las cosas son un poco más complicadas ya que \mathbf{J} depende explícitamente de \mathbf{r}' . Aplicando otra vez la regla de la cadena de una forma más extendida $\frac{\partial g[x, f(x)]}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial x}$ y usando la ecuación de continuidad, se obtiene:

$$\nabla' \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t'} \cdot (\nabla' R)$$

Donde ∇' denota las derivadas con respecto a \mathbf{r}' .

Ahora, al insertar el valor de las dos divergencias en la ecuación (2.24) y utilizando la relación $\nabla R = -\nabla' R$, se tiene:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{J}}{R} \right) = \frac{1}{R} \left[-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t'} \cdot (\nabla' R) \right] + \frac{1}{R} \left[-\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t'} \cdot (\nabla' R) \right] - \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{J}}{R} \right) = -\frac{1}{R} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{J}}{R} \right) \quad (2.26)$$

Finalmente, insertando (2.26) en (2.23) la integral toma la forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[-\frac{1}{R} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{J}}{R} \right) \right] dv'$$

Usando el teorema de la divergencia, el segundo término se puede convertir en una integral de superficie en el infinito donde la corriente \mathbf{J} es cero, por lo que este término desaparece. Así, usando la representación integral del potencial escalar (2.21), la divergencia de \mathbf{A} toma la forma:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\rho}{R} dv' = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{R} dv' \right\} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{aligned}$$

La cual es la condición de Lorentz.

Capítulo 3.

Campos Eléctrico y Magnético de una Carga Puntual en Movimiento

3.1. Introducción.

Para relacionar la radiación observada con la carga en movimiento y viceversa, se involucran los potenciales retardados (2.20) y (2.21) y los campos retardados que tienen su base en la velocidad de propagación finita c de la radiación electromagnética. Para calcular los campos en el tiempo t en un punto de observación fijo, se tiene que conocer la posición y el movimiento de la carga en el tiempo de emisión t' .

3.2. Los Potenciales de Liénard-Wiechert.

A continuación se discute el movimiento relevante para estos dos tiempos y se considera una carga puntual q moviéndose sobre una trayectoria dada por el vector $\mathbf{r}'(t')$, creando un campo eléctrico \mathbf{E} y un campo magnético \mathbf{B} . Estos campos se calculan en el tiempo t situado en el punto P , como se indica en la Fig.3.1.

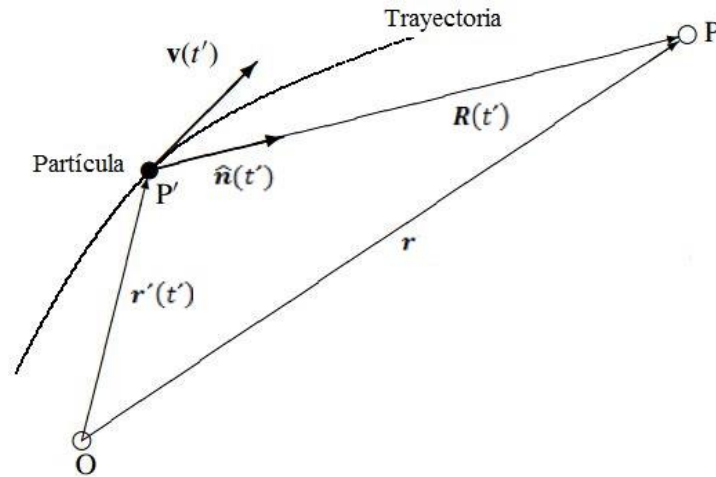


Fig.3.1. Trayectoria de la partícula y geometría para la radiación.

Se introduce el vector $\mathbf{R}(t')$, con su valor absoluto R , apuntando desde el punto P' de la emisión hacia el observador P . Debido a la velocidad de propagación finita c , el campo recibido en el instante t por el observador P tuvo que ser emitido por la fuente P' en el tiempo anterior t' dada por la relación:

$$t = t' + \frac{R(t')}{c} \quad (3.1)$$

Por lo tanto, es preciso conocer la posición $\mathbf{r}'(t')$ de la partícula cargada. Además, de acuerdo con la Fig. 3.1, los vectores $\mathbf{r}'(t')$, $\mathbf{R}(t')$ y \mathbf{r} , están relacionados por:

$$\mathbf{r}'(t') + \mathbf{R}(t') = \mathbf{r} = \text{constante} \quad (3.2)$$

La determinación de los campos eléctrico y magnético producidos en el punto de observación \mathbf{r} , en el instante t , por una carga puntual en movimiento arbitrario se realiza a partir de las adecuaciones de los potenciales retardados (2.20) y (2.21).

Cuando las fuentes ρ y \mathbf{J} son estacionarias, esas integrales se pueden realizar utilizando el sistema de coordenadas y el orden de integración que sean más convenientes para el problema en turno; sin embargo, en el caso en que estas fuentes sean variables en el tiempo las integraciones se deben de realizar con mayor cuidado al aplicar el concepto de los tiempos retardados. Así, si ρ es la densidad de carga retardada que ha de ser substituida en (2.21) para dar el potencial correcto $\varphi(\mathbf{r}, t)$ entonces, en general, la integral $\int \rho dv'$ no representa

la carga total del sistema. Para entender esto es necesario hacer uso del concepto matemático de la *esfera recolectora de información*.

Esta esfera delgada se define como convergiendo hacia el punto de observación r a la velocidad de la luz c y colapsándose en ese punto en el instante de observación t , (Fig.3.2).

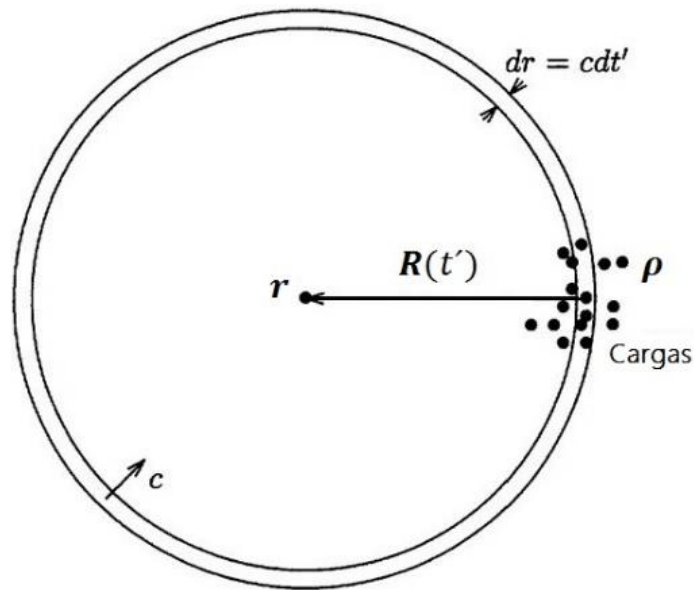


Fig. 3.2

Debe señalarse que otros puntos de observación y/u otros instantes de observación requieren de diferentes esferas recolectoras. La contribución al potencial escalar $\varphi(r, t)$ de la carga contenida en un elemento de volumen dv' no solamente tiene que ver con el valor de la densidad ρ cuando la esfera pasa por ese elemento de volumen en su tiempo retardado t' sino también sobre el estado de movimiento de la misma ρ en ese punto. En este proceso las cargas que tienen una componente de velocidad hacia el punto de observación participan durante más tiempo y consecuentemente contribuyen más al potencial y, recíprocamente, las cargas que se alejan del punto de observación contribuyen menos.

Ahora se considera el caso de una sola carga de radio b para ver durante cuánto tiempo contribuye al potencial en r , (Fig. 3.3). Primero se toma esta carga en reposo para obtener el tiempo de contribución:

$$\Delta t'_0 = \frac{2b}{c} \quad (3.3)$$

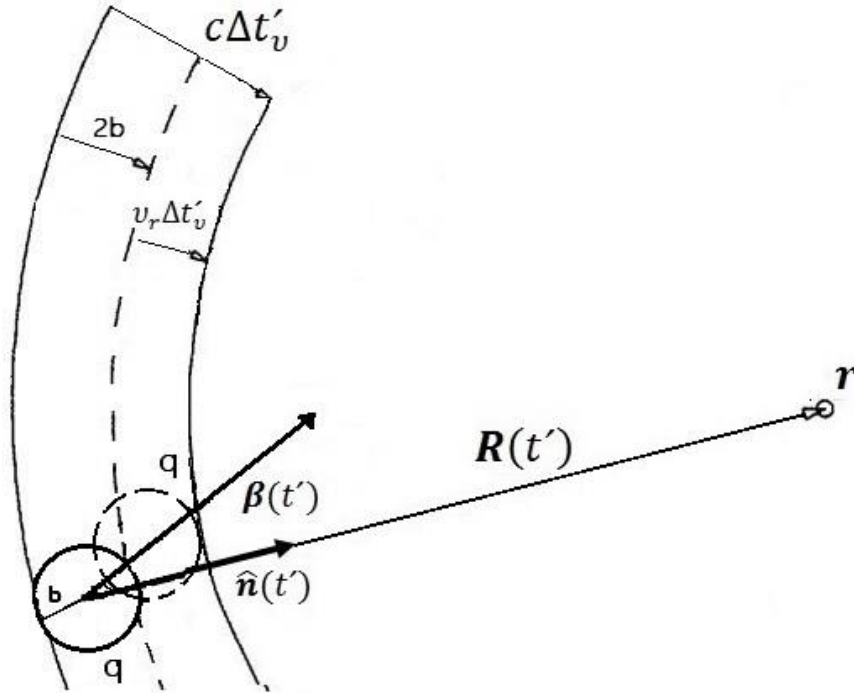


Fig. 3.3

Suponiendo que la carga se mueve con la velocidad $\mathbf{v} = c\boldsymbol{\beta}$ y que tiene una componente de velocidad radial $\mathbf{v}_r = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} = \hat{\mathbf{n}} \cdot c\boldsymbol{\beta}$, siendo $\hat{\mathbf{n}}$ el vector unitario que apunta desde la carga hacia el punto de observación. En este caso, para el tiempo de contribución $\Delta t'_v$ se tiene que:

$$c\Delta t'_v = 2b + v_r\Delta t'_v \quad (3.4)$$

de lo cual se obtiene:

$$\Delta t'_v = \frac{2b}{c - v_r} = \frac{2b}{c(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})} \quad (3.5)$$

y por lo tanto, la relación entre los dos tiempos de contribución es:

$$\frac{\Delta t'_v}{\Delta t'_0} = \frac{1}{1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}} \quad (3.6)$$

Un tiempo de contribución mayor que $\Delta t'_0$ de la carga q produce el efecto de una carga mayor que q en el potencial y, recíprocamente, un tiempo de contribución menor produce el efecto de una carga menor que q ; ya que la relación entre los dos tiempos es independiente del radio b . Se puede hacer tender b a cero y obtener el potencial para una *carga puntual* q en movimiento:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R(t')[1 - \hat{\mathbf{n}}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')]} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right]_{ret} \quad (3.7)$$

En donde el índice "ret" indica que la expresión en el paréntesis debe de ser evaluada en el tiempo t' para poder obtener el potencial en el tiempo posterior $t = t' + R(t')/c$.

De la misma manera, al tomar $\mathbf{J}(t') = q\mathbf{v}(t')$ y al utilizar nuevamente el tratamiento de la esfera recolectora a partir de la ecuación (2.20), se obtiene el potencial vectorial de una carga puntual en movimiento:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 q \mathbf{v}}{4\pi R(t')[1 - \hat{\mathbf{n}}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')]} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{v}}{R(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right]_{ret} \quad (3.8)$$

Los potenciales (3.7) y (3.8) son conocidos como **los potenciales de Liénard-Wiechert** y son los que normalmente se utilizan para obtener los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} producidos por partículas cargadas en movimiento.

3.3. Los campos de Liénard-Wiechert

A partir de los potenciales $\varphi(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ anteriores, ahora se obtendrán los campos $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ correspondientes, de acuerdo con las ecuaciones obtenidas en el capítulo anterior:

$$\mathbf{B} = (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (3.9)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (3.10)$$

Como se verá, el cálculo de las derivadas se complica debido al fenómeno del tiempo retardado. Las expresiones:

$$\mathbf{R}(t') = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}'(t') \quad y \quad \mathbf{v}(t') = \frac{d}{dt'} \mathbf{R}(t')$$

están expresadas en función del tiempo retardado t' donde, a su vez, t' está definida implícitamente por la siguiente ecuación:

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}'(t')| = c(t - t') \quad (3.11)$$

de modo que t' es en sí misma una función de \mathbf{r} y t .

Iniciando con el gradiente de φ , para lo cual se parte de (3.7) y usando la identidad $\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\mathbf{R}}{R^2}$, se obtiene:

$$\nabla\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \frac{-1}{(Rc - \mathbf{R} \cdot \mathbf{v})_{ret}^2} \nabla(Rc - \mathbf{R} \cdot \mathbf{v})_{ret} \quad (3.12)$$

Dado que $R = c(t - t')$ entonces:

$$\nabla R = -c\nabla t' \quad (3.13)$$

Por otro lado, para el término $\nabla(\mathbf{R} \cdot \mathbf{v})$ se utiliza la identidad vectorial:

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (i)$$

al aplicar esta identidad se tiene:

$$\nabla(\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{R} \cdot \nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{R} + \mathbf{R} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{R}) \quad (3.14)$$

En seguida se evaluará cada uno de los términos de esta expresión (omitiendo temporalmente el subíndice "ret") para luego sustituirlos en la ecuación (3.12).

Para el primer término:

$$(\mathbf{R} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \left(R_x \frac{\partial}{\partial x} + R_y \frac{\partial}{\partial y} + R_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{v}(t') = R_x \frac{d\mathbf{v}}{dt'} \frac{\partial t'}{\partial x} + R_y \frac{d\mathbf{v}}{dt'} \frac{\partial t'}{\partial y} + R_z \frac{d\mathbf{v}}{dt'} \frac{\partial t'}{\partial z}$$

esto es:

$$(\mathbf{R} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \mathbf{a}(\mathbf{R} \cdot \nabla t') \quad (3.15)$$

donde $\mathbf{a} \equiv \dot{\mathbf{v}}$, es la aceleración de la partícula en el tiempo retardado.

Para el segundo término en (3.14) se puede escribir como:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{R} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{r} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{r}'$$

donde:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{r} = \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}) = v_x\hat{\mathbf{x}} + v_y\hat{\mathbf{y}} + v_z\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{v}$$

y utilizando un procedimiento similar para calcular la ecuación (3.15), se obtiene:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{r}' = v_x \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} \frac{\partial t'}{\partial x} + v_y \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} \frac{\partial t'}{\partial y} + v_z \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} \frac{\partial t'}{\partial z} = \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla t')$$

por lo que se puede escribir:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{R} = \mathbf{v}(1 - \mathbf{v} \cdot \nabla t') \quad (3.16)$$

Por otro lado, para el tercer término en (3.14), se tiene:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} \\ &= \left(\frac{dv_z}{dt'} \frac{\partial t'}{\partial y} - \frac{dv_y}{dt'} \frac{\partial t'}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{dv_x}{dt'} \frac{\partial t'}{\partial z} - \frac{dv_z}{dt'} \frac{\partial t'}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{dv_y}{dt'} \frac{\partial t'}{\partial x} - \frac{dv_x}{dt'} \frac{\partial t'}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

La cual se simplifica a:

$$\nabla \times \mathbf{v} = (\nabla t') \times \mathbf{a} \quad (3.17)$$

Para el cuarto término:

$$\nabla \times \mathbf{R} = \nabla \times \mathbf{r} - \nabla \times \mathbf{r}'$$

pero $\nabla \times \mathbf{r} = 0$, mientras que por el mismo procedimiento para la ecuación (3.17) se tiene:

$$\nabla \times \mathbf{r}' = -\mathbf{v} \times \nabla t'$$

y por lo tanto:

$$\nabla \times \mathbf{R} = -\mathbf{v} \times \nabla t' \quad (3.18)$$

Insertando estos valores en la ecuación (3.14) se obtiene:

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}) &= \mathbf{a}(\mathbf{R} \cdot \nabla t') + \mathbf{v}(1 - \mathbf{v} \cdot \nabla t') + \mathbf{R} \times (\nabla t' \times \mathbf{a}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \nabla t') \\ &= \mathbf{a}(\mathbf{R} \cdot \nabla t') + \mathbf{v} - \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla t') + \nabla t'(\mathbf{R} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{a}(\mathbf{R} \cdot \nabla t') + \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla t') - \nabla t'(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \end{aligned}$$

Lo cual se reduce a:

$$\nabla(\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{v} + [\mathbf{R} \cdot \mathbf{a} - v^2]\nabla t' \quad (3.19)$$

Reemplazando los resultados (3.13) y (3.19) en la ecuación (3.12), ésta toma la forma:

$$\nabla\varphi(\mathbf{r}, t) = -\frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(Rc - \mathbf{R} \cdot \mathbf{v})^2} [\mathbf{v} + (c^2 - v^2 + \mathbf{R} \cdot \mathbf{a})\nabla t'] \quad (3.20)$$

Debido a la presencia del factor $\nabla t'$, esta forma del potencial aún no tiene la forma más conveniente para usarla; así es que se procede a obtener la forma explícita de $\nabla t'$ en términos de las cantidades retardadas \mathbf{R} y \mathbf{v} , así, de (3.13) se tiene que:

$$-c\nabla t' = \nabla R = \nabla\sqrt{\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}} = \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}}} \nabla(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R})$$

la cual se puede escribir como:

$$-c\nabla t' = \frac{1}{R} [(\mathbf{R} \cdot \nabla)\mathbf{R} + \mathbf{R} \times (\nabla \times \mathbf{R})]$$

Por procedimientos de cálculos diferenciales similares a los utilizados para obtener las ecuaciones (3.15) y (3.18), se obtienen las expresiones:

$$(\mathbf{R} \cdot \nabla)\mathbf{R} = \mathbf{R} - \mathbf{v}(\mathbf{R} \cdot \nabla t')$$

y

$$\nabla \times \mathbf{R} = (\mathbf{v} \times \nabla t')$$

Por lo que se puede escribir:

$$-c\nabla t' = \frac{1}{R} [\mathbf{R} - \mathbf{v}(\mathbf{R} \cdot \nabla t') + \mathbf{R} \times (\mathbf{v} \times \nabla t')] = \frac{1}{R} [\mathbf{R} - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{v})\nabla t']$$

y despejando $\nabla t'$ se obtiene:

$$\nabla t' = -\frac{\mathbf{R}}{Rc - \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}$$

La cual es el tipo de expresión que se buscaba; sin embargo, al utilizar las definiciones $\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{R}}{R}$ y $\mathbf{v} = c\boldsymbol{\beta}$ con $0 \leq \beta \leq 1$, esta expresión también se puede escribir como:

$$\nabla t' = -\frac{\hat{\mathbf{n}}}{c(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})} \quad (3.21)$$

Al insertar este resultado en (3.20), se obtiene la forma usual del gradiente del potencial escalar $\varphi(\mathbf{r}, t)$:

$$\nabla\varphi(\mathbf{r}, t) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(1 - \beta^2)\hat{\mathbf{n}} - (1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}}{R^2(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} + \frac{\hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})}{cR(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right]_{ret} \quad (3.22)$$

De acuerdo con la expresión (3.10), para poder calcular el campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, todavía se necesita conocer la forma explícita de $\partial\mathbf{A}/\partial t$, en donde, de acuerdo con la ecuación (3.8), el potencial \mathbf{A} está dado en términos de las cantidades retardadas $\hat{\mathbf{n}}$ y $\boldsymbol{\beta}$.

Para llevar a cabo este proceso de diferenciación es necesario conocer la relación entre las diferenciales dt' y dt , esto se obtiene a partir de la expresión (3.1), de la cual se obtiene:

$$dt = \left(1 + \frac{1}{c} \frac{dR(t')}{dt'} \right) dt'$$

Para obtener la forma explícita de $dR(t')/dt'$ se comienza derivando la ecuación (3.2):

$$\frac{dR(t')}{dt'} = -\frac{d\mathbf{r}'(t')}{dt'} \equiv -\mathbf{v}(t') = -c\boldsymbol{\beta}(t')$$

Este resultado se puede utilizar para obtener la derivada temporal de $R = |\mathbf{R}|$, para ello se considera la igualdad algebraica:

$$\mathbf{R} \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt'} = \frac{1}{2} \frac{d(R^2)}{dt'} = R \frac{dR}{dt'}$$

pero, por la relación anterior, se tiene que:

$$R \frac{dR}{dt'} = -[\mathbf{R}(t') \cdot \mathbf{v}(t')]$$

Con esto se obtiene el cambio correspondiente de su valor absoluto $R = |\mathbf{R}|$:

$$\mathbf{R} \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt'} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt'} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}) = -[\mathbf{R}(t') \cdot \mathbf{v}(t')]$$

y al utilizar nuevamente las definiciones $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{R}/R$ y $\mathbf{v} = c\boldsymbol{\beta}$, se obtiene el cambio de la distancia entre la fuente y el observador en el tiempo t' :

$$\frac{dR(t')}{dt'} = -c(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})$$

Obteniendo finalmente la relación explícita entre las diferenciales temporales de t y t' dada por:

$$dt = (1 - \hat{\mathbf{n}}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')) dt' \quad (3.23)$$

Con este resultado ya se puede calcular $\partial \mathbf{A} / \partial t$, la cual toma la forma:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{dt'}{dt} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t'} = \left(\frac{1}{1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}} \right) \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t'}$$

la cual es aplicada al potencial (3.8):

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 qc}{4\pi} \frac{1}{1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}} \left[\frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}}{R(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})} - \frac{\boldsymbol{\beta}}{R^2(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} \left(\frac{\partial}{\partial t'} (R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}) \right) \right] \quad (3.24)$$

y teniendo $\frac{dR(t')}{dt'} = -c\boldsymbol{\beta}(t') \cdot \hat{\mathbf{n}}$ y $\frac{d\mathbf{R}}{dt'} = -c(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})$, se encuentra que:

$$\frac{\partial}{\partial t'} (R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}) = -c(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}) + c\beta^2 - \dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{R} \quad (3.25)$$

al insertar (3.25) en (3.24) se obtiene:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 qc}{4\pi} \frac{1}{1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}} \left[\frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}}{R(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})} + \frac{(c(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}) - c\beta^2 + (\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{R})) \boldsymbol{\beta}}{R^2(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} \right]$$

y al organizar esta ecuación de acuerdo con las potencias de R , esta se reduce a:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 qc}{4\pi} \left[\frac{(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta} - \beta^2) c \boldsymbol{\beta}}{R^2(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} + \frac{(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}) \dot{\boldsymbol{\beta}} + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \boldsymbol{\beta}}{R(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right] \quad (3.26)$$

Finalmente, para hallar el campo eléctrico se insertan las ecuaciones (3.22) y (3.26) en (3.10) y usando $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$, se obtiene:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(1-\beta^2)\hat{\mathbf{n}} - (1-\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}}{R^2(1-\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\beta})^3} + \frac{\hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})}{Rc(1-\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\beta})^3} \right]_{ret} - \frac{\mu_0qc}{4\pi} \left[\frac{(\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\beta} - \beta^2)c\boldsymbol{\beta}}{R^2(1-\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\beta})^3} + \frac{(1-\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\beta}} + (\hat{\mathbf{n}}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})\boldsymbol{\beta}}{R(1-\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\beta})^3} \right]_{ret}$$

al agrupar con respecto a los denominadores $R^2(1-\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\beta})^3$ y $R(1-\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\beta})^3$, se tiene:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(1-\beta^2)(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta})}{R^2(1-\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\beta})^3} + \frac{(\hat{\mathbf{n}}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) - (1-\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\beta}}}{cR(1-\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\beta})^3} \right]_{ret}$$

Para simplificar aún más el segundo término se usa la identidad vectorial:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$$

y así la ecuación para el campo eléctrico queda finalmente como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(1-\beta^2)(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta})}{R^2(1-\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\beta})^3} + \frac{\hat{\mathbf{n}} \times [(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{cR(1-\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\beta})^3} \right\}_{ret} \quad (3.27)$$

Esta expresión constituye la forma final buscada para el campo eléctrico en términos de las cantidades dinámicas retardadas R , $\hat{\mathbf{n}}$, $\boldsymbol{\beta}$ y $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ de la partícula cargada en movimiento.

A continuación se obtendrá la forma correspondiente para el campo magnético \mathbf{B} en términos de esas mismas cantidades retardadas.

Para calcular este campo se parte de la ecuación:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

y el potencial vectorial (3.8):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{qc\mathbf{v}}{(Rc - \mathbf{R} \cdot \mathbf{v})} \right]_{ret} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \varphi(\mathbf{r}, t)$$

Con estas dos ecuaciones el campo magnético se puede escribir como:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \nabla \times (\varphi\mathbf{v}) = \frac{1}{c^2} [\varphi(\nabla \times \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times (\nabla\varphi)] \quad (3.28)$$

Ya se han obtenido las expresiones para $\nabla \times \mathbf{v}$ en (3.17), $\nabla t'$ dada por (3.21) y para $\nabla\varphi$ en (3.22).

Insertando estas expresiones en (3.28) se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{(Rc - \mathbf{R} \cdot \mathbf{v})} (\nabla t' \times \mathbf{a}) - \mathbf{v} \times \left[-\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{(1 - \beta^2)\hat{\mathbf{n}} - (1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}}{R^2(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} + \frac{\hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})}{Rc(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right) \right] \right\}_{ret} \\ &= \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{(\hat{\mathbf{n}} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})}{cR(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} - \frac{\boldsymbol{\beta} \times \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})}{Rc(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} - \frac{\boldsymbol{\beta} \times (1 - \beta^2)\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta} \times (1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}}{R^2(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right] \right\}_{ret} \end{aligned}$$

Reagrupando con respecto a las potencias de R en el denominador y puesto que $\boldsymbol{\beta} \times (1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} = 0$, finalmente se obtiene la forma deseada para el campo magnético:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left\{ \frac{(1 - \beta^2)(\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\beta})}{R^2(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} + \frac{(\hat{\mathbf{n}} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}) + (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\beta})(\hat{\mathbf{n}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})}{cR(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right\}_{ret} \quad (3.29)$$

Los campos (3.27) y (3.29) son conocidos como los **campos de Liénard-Wiechert**. De las ecuaciones (3.27) y (3.29), se puede verificar fácilmente que el campo magnético \mathbf{B} en está relacionado con el campo eléctrico \mathbf{E} por:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{[\hat{\mathbf{n}}_{ret} \times \mathbf{E}]}{c} \quad (3.30)$$

En esta ecuación, los campos \mathbf{B} y \mathbf{E} son funciones del tiempo de observación t y solo el vector $\hat{\mathbf{n}}$ tiene que ser evaluado en el tiempo retardado t' .

Ambos campos de Liénard-Wiechert consisten de dos términos, un término que no depende de la aceleración de la partícula cargada sino solo de su velocidad y que decaen como R^{-2} , mientras que el otro término sí depende de la aceleración y decae como R^{-1} . El primer término es conocido como “*campo de velocidad*” o “*campo cercano*” y viaja acompañando a la partícula en su movimiento, por otro lado, el segundo término es conocido como “*campo de aceleración*” o “*campo de radiación*” y se propaga perpendicularmente al vector $\hat{\mathbf{n}}$ desprendiéndose de la carga. Estos casos se verán más claramente en el siguiente capítulo.

Capítulo 4.

Campos de Liénard-Wiechert: Casos Específicos

4.1. Introducción.

En este capítulo se obtendrán explícitamente los campos eléctrico y magnético de *Liénard-Wiechert* para los casos de una partícula cargada que se desplaza uniformemente sobre una línea recta y también cuando la *partícula es acelerada* tanto a lo largo de su velocidad como perpendicularmente a ella. Además, se proporcionará una explicación teórica del por qué la potencia radiada en el caso de la aceleración perpendicular es varios ordenes de magnitud mayor que para el caso de la aceleración paralela.

4.2. Campos de una partícula cargada en movimiento uniforme.

Los campos eléctrico y magnético producidos por una partícula en movimiento uniforme, donde la aceleración es igual a cero ($\dot{\boldsymbol{\beta}} = 0$), están dados por el primer término de (3.27) y (3.29):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(1 - \beta^2)(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta})}{R^2(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right\}_{ret} \quad y \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{(\hat{\mathbf{n}}_{ret} \times \mathbf{E})}{c} \quad (4.1)$$

Estos campos se expresan en referencia a la posición retardada de una partícula cargada. Como se verá, estos campos también se pueden representar con respecto a la posición de la carga en el instante de observación t .

El intervalo de tiempo $t - t' = R/c$, que le toma al campo electromagnético para ir desde el punto de su creación hasta el punto de observación, la partícula cargada recorre la distancia $c\beta(t - t') = R\beta$, esto se muestra gráficamente en la Fig. 4.1, en la cual se ha incluido el vector R_t que va de la posición actual de la partícula cargada al punto de observación. Este vector está dado por la relación:

$$\mathbf{R}_t = \mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta} = R(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta})$$

Al sustituir esta relación en la ecuación para el campo eléctrico (4.1), se obtiene:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}_t(1 - \beta^2)}{\{R^3(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3\}_{ret}} \quad (4.2)$$

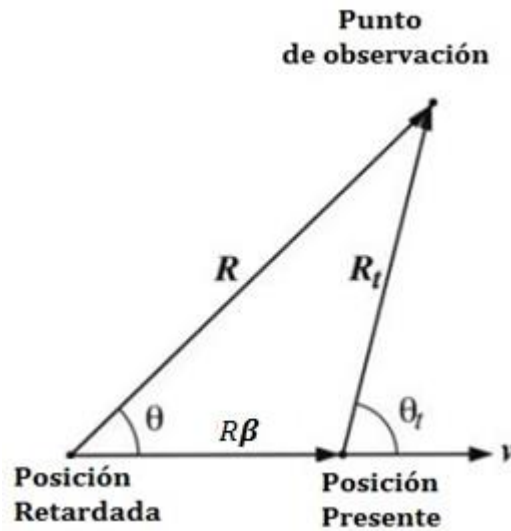


Fig. 4.1. Posiciones retardada y presente de una partícula cargada en movimiento uniforme.

En esta ecuación de campo se puede observar el hecho interesante de que el campo eléctrico tiene la misma dirección que el vector \mathbf{R}_t . En otras palabras, la dirección del campo eléctrico es como si éste se originara desde la posición de la carga en el instante de observación t .

Para calcular la magnitud de este campo eléctrico, es más conveniente expresar el denominador $R^2(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})^2$ en términos de los valores actuales \mathbf{R}_t y θ_t . Con este propósito, se considera primero la siguiente relación:

$$R^2(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 = R^2(1 - 2\beta \cos \theta + \beta^2 \cos^2 \theta)$$

y de acuerdo con la Fig. 4.1, se tiene que:

$$R_t^2 = R^2(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta})^2 = R^2(1 - 2\beta \cos \theta + \beta^2)$$

así, se obtiene que:

$$R^2(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 = R_t^2 - \beta^2 R^2 \sin^2 \theta$$

Por otro lado, de la misma Fig. 4.1, se llega a:

$$R \sin \theta = R_t \sin \theta_t$$

Donde θ_t es el ángulo entre R_t y $\mathbf{v}(t')$. Consecuentemente se puede escribir:

$$R(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}) = R_t \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \theta_t} \quad (4.3)$$

al utilizar este resultado en la ecuación (4.2), se obtiene finalmente:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(1 - \beta^2)\mathbf{R}_t}{R_t^3(1 - \beta^2 \sin^2 \theta_t)^{3/2}} \right\} \quad (4.4)$$

Al definir el vector unitario $\hat{\mathbf{R}}_t = \mathbf{R}_t/R_t$ y el campo estático de Coulomb producido por la partícula cargada como:

$$\mathbf{E}_c(R_t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_t^2} \hat{\mathbf{R}}_t$$

Se puede escribir al campo eléctrico (4.4) como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_c(R_t) \left\{ \frac{(1 - \beta^2)}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta_t)^{3/2}} \right\} \quad (4.5)$$

Así, se ve que el campo eléctrico que acompaña a la partícula cargada es igual al campo producido por la partícula cargada estacionaria pero modulada por un factor que depende de la velocidad de la partícula y el ángulo de observación θ_t .

Por otro lado, puesto que $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{R}_t = \frac{1}{c} \mathbf{v} \times R\hat{\mathbf{n}}$ y como $\mathbf{v} \times \mathbf{R}_t = \mathbf{v} \times R\hat{\mathbf{n}}$, para el campo eléctrico dado por (4.5), la expresión para el campo magnético que aparece en (4.1) se puede escribir como:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} [\mathbf{v} \times \mathbf{E}] \quad (4.6)$$

Donde R_t es la distancia entre la posición presente de la partícula cargada y el punto de observación. Para velocidades pequeñas ($\beta \rightarrow 0$) la ecuación (4.5) se reduce al campo de Coulomb estático y como es de esperarse, la ecuación (4.6) se reduce al campo obtenido de la ley de Ampere. Cuando β tiende a la unidad, los campos (4.5) y (4.6) se aproximan a campos transversales, lo cuales quedan contenidos en el plano perpendicular a la velocidad de la partícula cargada. Sin embargo estos campos no radian energía electromagnética porque decaen como $1/R^2$ para distancias grandes.

En la *Fig. 4.2* se muestran las estructuras de los campos eléctricos y magnéticos que acompañan a la partícula cargada en movimiento rápido.

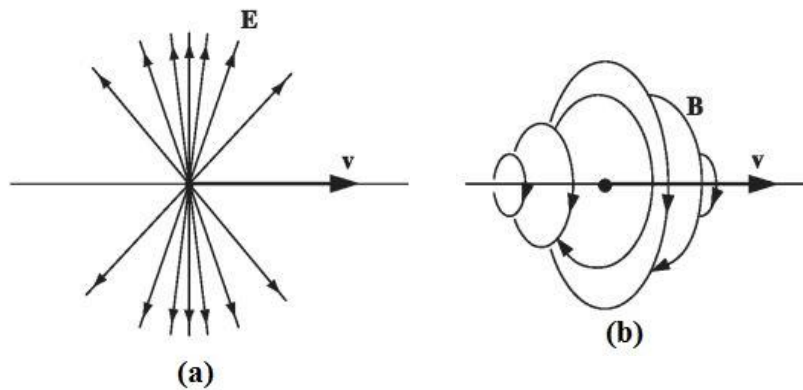


Fig. 4.2. (a) Campo eléctrico de una carga en movimiento con velocidad constante. (b) El campo magnético cerca de una carga en movimiento es $\mathbf{v} \times \mathbf{E}$.

De acuerdo con (4.5), el campo eléctrico se ve aplanado en forma lenticular en las direcciones hacia adelante y hacia atrás del movimiento, el campo eléctrico se ve reducido por el factor $(1 - \beta^2)$ con respecto al campo estático de Coulomb pero en la dirección perpendicular se ve aumentado por el factor $1/\sqrt{(1 - \beta^2)}$ y las líneas de campo magnético hacen círculos alrededor de la dirección de movimiento de la partícula, como se muestra en la *Fig. 4.2*.

4.3. Campos de una partícula cargada con movimiento acelerado.

Los campos eléctrico y magnético radiados por una partícula cargada con movimiento acelerado se extraen de los segundos términos de las ecuaciones (3.27) y (3.29), respectivamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\hat{\mathbf{n}} \times [(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{cR(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right\}_{ret} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left\{ \frac{(\hat{\mathbf{n}} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}) + (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\beta})(\hat{\mathbf{n}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})}{cR(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right\}_{ret} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Donde para estos campos de radiación, se sigue cumpliendo:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} [\hat{\mathbf{n}}_{ret} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] \quad (4.8)$$

Estos resultados indican claramente que los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} relacionados con la aceleración de la partícula cargada son transversales con respecto a la línea que une al observador con el punto de donde estos partieron y que también son ortogonales entre sí.

El flujo de energía por unidad de tiempo que atraviesa un área está dado por el *vector de Poynting*:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$$

y expresado con los campos retardados, se tiene que:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c\mu_0} \mathbf{E} \times (\hat{\mathbf{n}}_{ret} \times \mathbf{E}) = \frac{1}{c\mu_0} [E^2 \hat{\mathbf{n}}_{ret} - (\hat{\mathbf{n}}_{ret} \cdot \mathbf{E})\mathbf{E}]$$

donde se puede ver que el vector de Poynting solo tiene la componente radial referida a la posición retardada de la partícula cargada. Y al utilizar la forma de \mathbf{E} en (4.7) se obtiene:

$$[\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}]_{ret} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \left\{ \left| \frac{\hat{\mathbf{n}} \times [(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{R(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right|^2 \right\}_{ret} \quad (4.9)$$

Se observa que hay dos tipos de efectos relativistas presentes, uno es el efecto de la relación espacial específica entre $\boldsymbol{\beta}$ y $\dot{\boldsymbol{\beta}}$, que influirá en la distribución angular de la energía radiada. El otro es un efecto relativista que surge de la

transformación del sistema instantáneo de referencia en reposo de la partícula al sistema de referencia del observador y que se manifiesta por la presencia del factor $(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})$ en el denominador de (4.9). Para las partículas ultra-relativistas este último efecto domina toda la distribución angular.

A continuación se encontrará una expresión matemática para la forma en que se distribuye en el espacio la radiación emitida por la partícula cargada cuando ésta realiza un desplazamiento infinitesimal $\Delta l = \beta \Delta t'$ en su trayectoria. Esta distribución deberá ser expresada en términos del elemento de ángulo sólido $d\Omega$ centrado en $\hat{\mathbf{n}}$.

Con este propósito, se debe tener en cuenta que para la ecuación (4.9), $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ es la energía por unidad de área por unidad de tiempo detectado por el observador en el tiempo t de la radiación emitida por la partícula cargada en el tiempo $t' = t - R(t')/c$ y también se requiere calcular la densidad del flujo de la energía durante un periodo finito de observación correspondiente a los tiempos retardados $t' = T_1$ y $t' = T_2$, tales que $\Delta t' = T_2 - T_1$:

$$\Delta U = \int_{t=T_1+[R(T_1)/c]}^{t=T_2+[R(T_2)/c]} [\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}]_{ret} dt = \int_{t'=T_1}^{t'=T_2} (\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \frac{dt}{dt'} dt' \quad (4.10)$$

Así se puede ver que la cantidad significativa y útil es $(\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dt/dt'$, la potencia radiada por unidad de área en términos del tiempo propio de la partícula cargada, esto es: $\frac{dP}{dA} = (\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \frac{dt}{dt'}$ y ya que $dA = R^2 d\Omega$, se obtiene que:

$$dP dt' = (\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}) R^2 d\Omega dt$$

Esto conduce a la siguiente expresión para la potencia radiada por unidad de ángulo sólido:

$$\frac{dP}{d\Omega} = R^2 (\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \frac{dt}{dt'} = R^2 \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} (1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}) \quad (4.11)$$

Donde $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ es el ángulo sólido en el cual esta potencia es radiada.

Si se toma la suposición de que la partícula cargada es acelerada solo durante un tiempo corto durante el cual $\boldsymbol{\beta}$ y $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ son constantes en dirección y magnitud y además se observa la radiación lo suficientemente alejada de la carga tal que $\hat{\mathbf{n}}$ y R cambian muy poco durante el intervalo de aceleración,

entonces (4.11) es proporcional a la distribución angular de la energía radiada en un área $R^2 \sin \theta d\theta d\phi = R^2 d\Omega$ y está dada por:

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{|\hat{\mathbf{n}} \times [(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]|^2}{(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})^5}$$

Esta ecuación es válida para cualquier tipo de aceleración tanto de magnitud como de dirección de $\boldsymbol{\beta}$; sin embargo, solo se analizarán en detalle dos casos particulares: $\boldsymbol{\beta}$ Y $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ paralelas y $\boldsymbol{\beta}$ Y $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ perpendiculares, siendo este último el que se aplica en una trayectoria circular de la partícula cargada.

4.3.1. Velocidad y aceleración paralelas.

Para el caso donde la aceleración y velocidad de una partícula cargada son paralelas entre sí, el problema tiene simetría rotacional con respecto a Δl y por simplicidad se puede tomar el vector $\hat{\mathbf{n}}$ que apunta hacia el observador como $\hat{\mathbf{n}} = (\sin \theta, 0, \cos \theta)$, en cuyo caso la ecuación (4.12) adquiere la forma:

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \dot{\beta}^2 \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \quad (4.13)$$

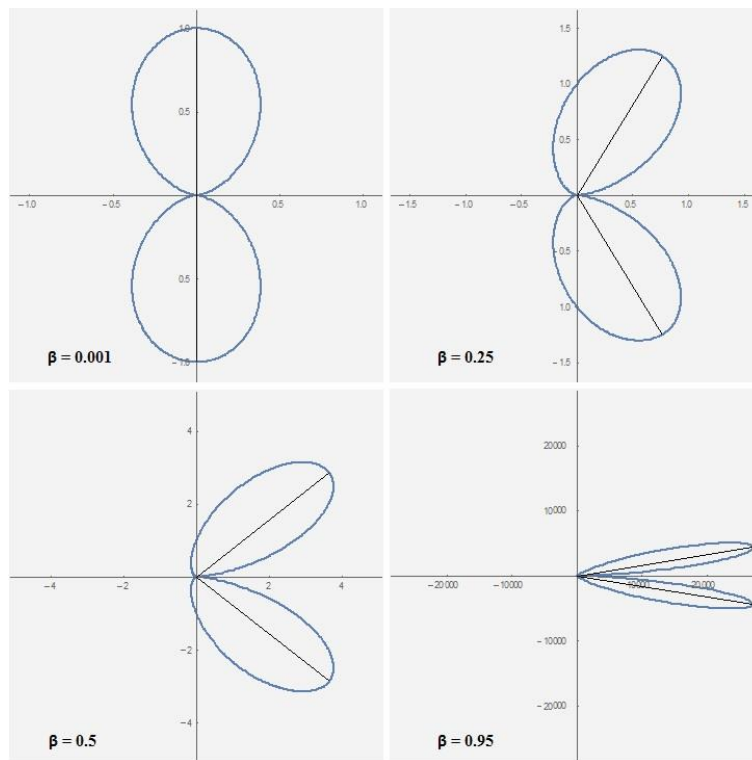


Fig. 4.3. Distribuciones angulares de la potencia radiada para diferentes valores de β debido a la aceleración longitudinal. Nótese los cambios de escala entre estas figuras.

Donde θ es el ángulo entre la dirección de observación y la velocidad de la partícula cargada (ángulo entre \hat{n} y β). Para $\beta \ll 1$ esto toma la forma de la ecuación tradicional de *Larmor*^[15], pero cuando $\beta \rightarrow 1$, la distribución angular es inclinada hacia delante y aumenta en magnitud, como se muestra en la *Fig. (4.3)*.

El ángulo para el cual ocurre el máximo de la emisión radiada θ_{max} se obtiene igualando a cero la derivada con respecto a θ de la ecuación anterior, obteniéndose como resultado:

$$\cos \theta_{max} = \frac{1}{3\beta} \left(\sqrt{1 + 15\beta^2} - 1 \right)$$

Por otro lado, como también se tiene que para ángulos pequeños: $\cos \theta_{max} \simeq 1 - \theta_{max}^2/2$, se deduce que:

$$\theta_{max} \simeq \sqrt{\frac{1 - \beta}{2}}$$

pero con la aproximación $1 - \beta \simeq \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta}$ y con la definición $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$, se obtiene el resultado aproximado:

$$\theta_{max} \simeq \frac{1}{2\gamma} \quad (4.14)$$

Así, en el caso ultra-relativista con aceleración paralela, la distribución angular de la radiación se limita a un cono muy estrecho en la dirección del movimiento.

La potencia total emitida por el elemento de trayectoria Δl de la partícula cargada, se obtiene al integrar la ecuación (4.13) sobre todos los ángulos:

$$P_{\parallel} = \int \left(\frac{dP(t')}{d\Omega} \right) d\Omega = \frac{q^2 \dot{\beta}^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \int \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \sin \theta d\theta d\phi$$

La integración sobre ϕ da como resultado 2π y, al utilizar el cambio de variable $x = \cos \theta$, la integral sobre θ se simplifica a la forma:

$$P_{\parallel} = \frac{q^2 \dot{\beta}^2}{8\pi \epsilon_0 c} \int_{-1}^1 \frac{1 - x^2}{(1 - \beta x)^5} dx$$

la cual, al integrarse por partes conduce a $\frac{4}{3}(1 - \beta^2)^{-3}$. Así que se puede concluir:

$$P_{\parallel} = \frac{q^2 \dot{\beta}_{\parallel}^2}{6\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{(1 - \beta^2)^3} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3} |\mathbf{F}_{\parallel}|^2 \quad (4.15)$$

Observe que la distribución angular de la radiación es la misma ya sea que la partícula esté acelerando o frenando; solo depende del cuadrado de $\dot{\beta}$ y se concentra en la dirección hacia adelante (con respecto a la velocidad) en cualquier caso. Cuando un electrón de alta velocidad golpea un objetivo metálico, se desacelera rápidamente, generando lo que se denomina "bremsstrahlung" o "radiación por frenado".

4.3.2. Velocidad y aceleración perpendiculares.

Se toma un sistema de coordenadas tal que, instantáneamente β esté en la dirección z y $\dot{\beta}$ esté en la dirección x . Usando los ángulos polares (θ, ϕ) se define la dirección de observación como se muestra en la Fig. 4.4, entonces la ecuación (4.12) toma la forma:

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{\dot{\beta}^2}{(1 - \beta \cos \theta)^3} \left(1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \phi}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)^2} \right) \quad (4.16)$$

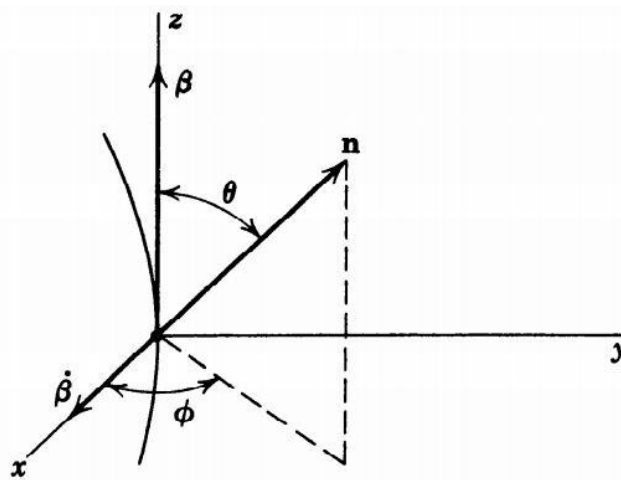


Fig. 4.4.

Donde ϕ es el ángulo entre la aceleración de la partícula cargada y la proyección de \hat{n} sobre el plano perpendicular a la velocidad de la partícula. En las Fig. 4.5 y Fig. 4.6 se muestra la distribución angular de la potencia radiada para este caso. De la Fig. 4.5, se observa que la radiación se concentra dentro de un ángulo pequeño $\Delta\theta \approx 1/\gamma$ alrededor de la dirección de la velocidad de la partícula cargada para valores grandes de β .

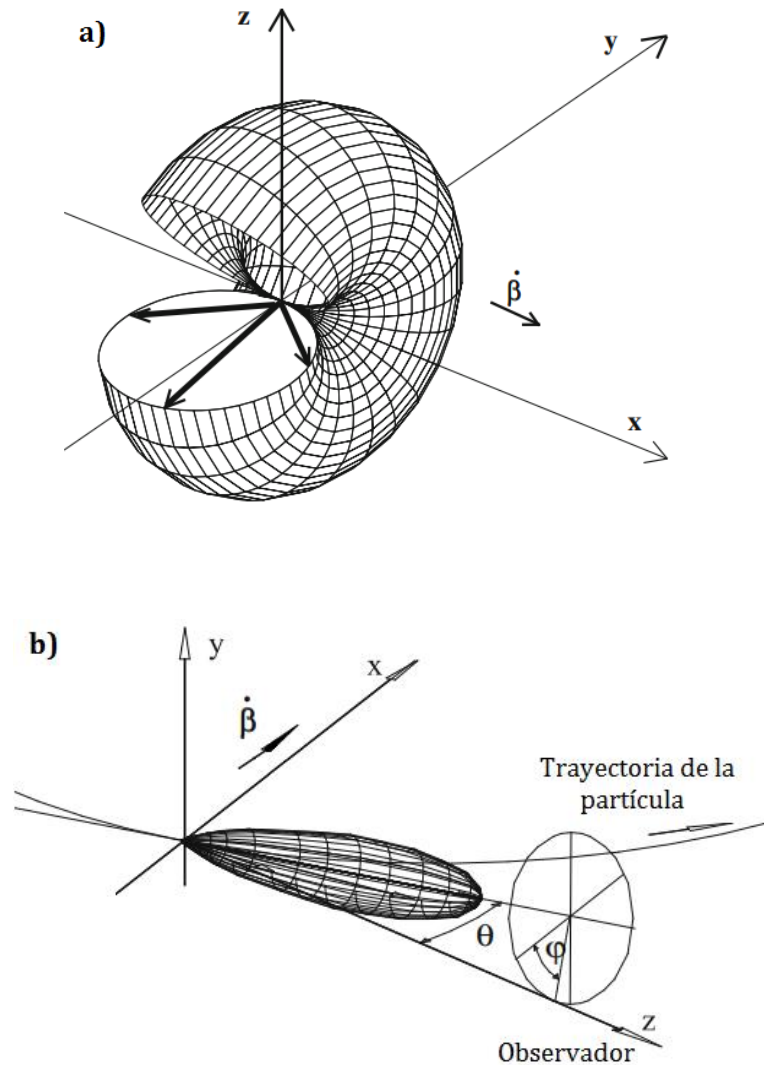


Fig. 4.5. a) Patrón de radiación en el sistema de referencia de la partícula o para partículas no relativistas en el sistema de laboratorio ($\beta \approx 0$). b) Geometría de radiación en el sistema de referencia de laboratorio para partículas altamente relativistas ($\beta = 0.9$) con $\dot{\beta}$ apuntando ahora en la dirección y ^[17].

La energía total radiada por unidad de tiempo por una partícula cargada moviéndose con aceleración perpendicular a la velocidad, se puede obtener al realizar la integración completa de la ecuación (4.16):

$$P_{\perp} = \int \frac{dP}{d\Omega} d\Omega = \frac{q^2 \dot{\beta}^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \iint \frac{[(1 - \beta \cos \theta)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \theta \cos^2 \phi]}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \sin \theta d\theta d\phi$$

Y haciendo el cambio de variable $w = (1 - \beta \cos \theta)$, la integral toma la forma:

$$P_{\perp} = \frac{q^2 \dot{\beta}^2}{16\pi \epsilon_0 c \beta^3} \int_{(1-\beta)}^{(1+\beta)} \frac{1}{w^5} [(1 - \beta^2)^2 - 2(1 - \beta^2)w + (1 + \beta^2)w^2] dw$$

la cual puede resolverse fácilmente, dando como resultado la expresión para la potencia total radiada:

$$P_{\perp} = \frac{q^2 \dot{\beta}_{\perp}^2}{6\pi \epsilon_0 c} \gamma^4 = \frac{q^2}{6\pi \epsilon_0 m^2 c^3} \gamma^2 |\mathbf{F}_{\perp}|^2 \quad (4.17)$$

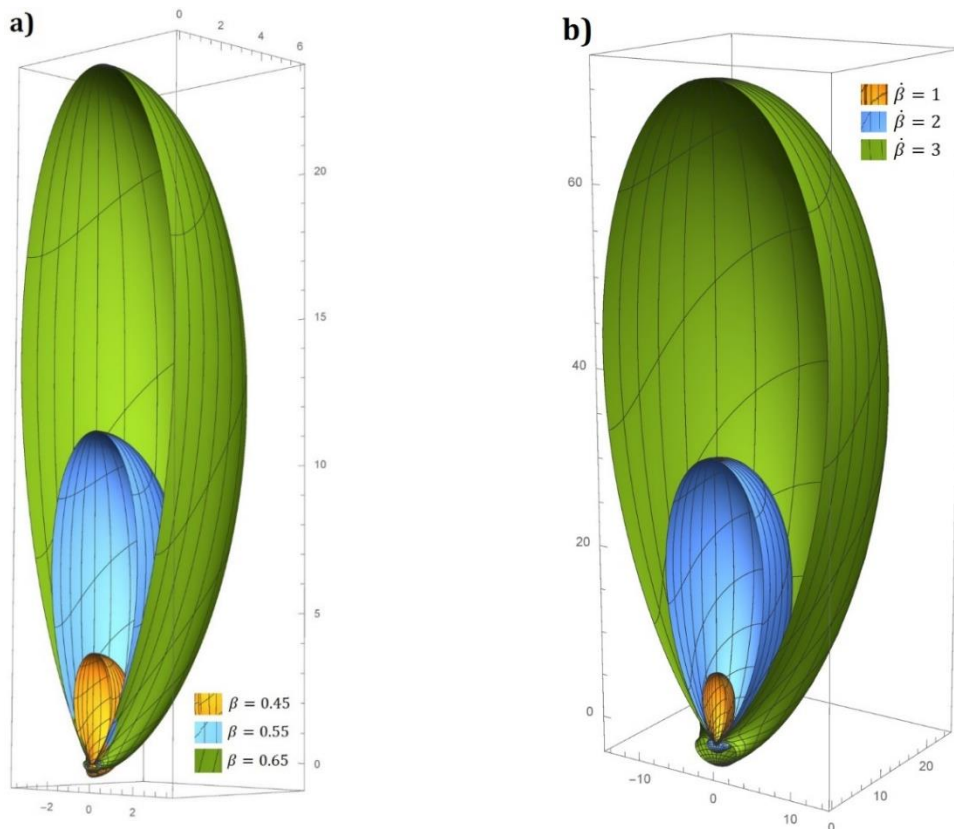


Fig. 4.6. Efecto combinado de la velocidad β y de la aceleración $\dot{\beta}$ para la distribución angular para la energía radiada $\frac{dP(t')}{d\Omega}$. **a)** Con $\dot{\beta} = 1s^{-1}$ y $\beta = 0.45 c, 0.55 c, 0.65 c$ **b)** Con $\beta = 0.5 c$ y

$\dot{\beta} = 1, 2, 3s^{-1}$. (Gráficos realizados con Mathematica®)

Para velocidades relativistas ($\beta \approx 1$) la radiación alcanza un pico pronunciado en la dirección del movimiento. La aplicación más importante de estas fórmulas es en el movimiento circular. En este caso, la radiación se llama “radiación de sincrotrón”.

4.4. Comparación entre las potencias radiadas en los dos casos.

A continuación se mostrará el por qué una misma fuerza aplicada perpendicularmente a la dirección de movimiento de la partícula cargada ultra-relativista es mucho más efectiva para generar la emisión de RS que cuando es aplicada a lo largo de dicha dirección de movimiento.

Comenzando con la ecuación de movimiento relativista para una masa como la derivada temporal del momento:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)$$

En la cual, al efectuar la derivación se obtiene:

$$\mathbf{F} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{m_0 \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{dv}{dt}$$

A su vez, es posible reescribir esta ecuación en términos de $\boldsymbol{\beta}$ y γ como:

$$\mathbf{F} = m_0 \gamma c \dot{\boldsymbol{\beta}} + m_0 c \gamma^3 \boldsymbol{\beta} \dot{\boldsymbol{\beta}} \quad (4.18)$$

Físicamente, para el caso ultra-relativista β , ya es muy cercano a uno y la aplicación de una fuerza externa solo puede producir cambios insignificantes en su magnitud ya que no puede superar este valor; sin embargo, la fuerza externa si pudiera producir cambios importantes en la dirección de $\dot{\boldsymbol{\beta}}$.

Al considerar la aplicación de una fuerza \mathbf{F}_{\parallel} paralela a la dirección de movimiento dada por $\boldsymbol{\beta}$, ésta no tiende a modificar esta dirección y solo se tendría la participación del segundo término de la ecuación (4.18) esto es:

$$\mathbf{F}_{\parallel} \simeq m_0 c \gamma^3 \boldsymbol{\beta} \dot{\boldsymbol{\beta}}_{\parallel}$$

y para la magnitud de $\dot{\beta}_{\parallel}$, en este caso se escribe como:

$$|\dot{\beta}_{\parallel}| = \frac{|F_{\parallel}|}{\gamma^3 m_0 c} \quad (4.19)$$

En contraste, la aplicación de una fuerza F_{\perp} perpendicular a la dirección de movimiento no puede cambiar la magnitud y solo puede cambiar la dirección de β y por lo tanto, solo se tendrá la contribución del primer término de la ecuación (4.18):

$$F_{\perp} \simeq m_0 \gamma \dot{\beta}_{\perp} \quad (4.20)$$

y ahora para la magnitud de $\dot{\beta}_{\perp}$, el resultado es:

$$|\dot{\beta}_{\perp}| = \frac{|F_{\perp}|}{\gamma m_0 c} \quad (4.21)$$

Así, para fuerzas de la misma magnitud, $|F_{\parallel}| = |F_{\perp}|$, se tienen las aceleraciones:

$$|\dot{\beta}_{\perp}| = \gamma^2 |\dot{\beta}_{\parallel}| \quad (4.22)$$

Siendo $\gamma \gg 1$. Se obtuvieron expresiones matemáticas para las potencias radiadas por una partícula cargada acelerada tanto cuando su aceleración es paralela a la dirección del movimiento como cuando es perpendicular a este; sin embargo, esas expresiones quedaron expresadas en términos de $\dot{\beta}$ y por el momento no se puede realizar una comparación entre esos dos casos. Al reescribir las ecuaciones dadas para las potencias (4.15) paralela y (4.17) perpendicular, respectivamente, y al insertar las aceleraciones (4.21) y (4.22), se obtiene:

$$P_{\parallel} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c} |F_{\parallel}|^2 \quad (4.23)$$

y

$$P_{\perp} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c} \gamma^2 |F_{\parallel}|^2 \quad (4.24)$$

Ahora es posible hacer la comparación de las eficiencias de generación de las potencias radiadas en ambos casos al considerar fuerzas de la misma magnitud:

$$P_{\perp} = \gamma^2 P_{\parallel} \quad (4.25)$$

Como ejemplo, se toma el caso de un electrón ultra-relativista acelerado hasta una energía de 1GeV, en este caso $\gamma \approx 2 \times 10^3$. La potencia radiada, cuando una fuerza es aplicada perpendicularmente a su dirección de movimiento es $\sim 4 \times 10^6$ veces mayor que cuando la fuerza es aplicada en la misma dirección del movimiento.

Capítulo 5.

Radiación de Sincrotrón.

5.1. Introducción.

En su forma más sencilla, un sincrotrón es una fuente de radiación electromagnética generada por electrones ultra-relativistas que viajan dentro de un tubo circular en cuyo interior se crea un alto vacío y al que se aplica un campo magnético perpendicular cuya intensidad depende de la energía de los electrones así como del radio del tubo por el que circulan. En versiones más avanzadas de los sincrotrones, además de los sistemas que generan el campo magnético, es necesario intercalar tramos rectos en la circunferencia con distintas finalidades por lo que la trayectoria real es más bien la de un polígono con esquinas curvas. En algunos de estos tramos rectos se aplican campos eléctricos oscilantes mediante *cavidades de radiofrecuencia* sincronizados a los ciclos de movimiento del electrón en el circuito, de esta forma la energía perdida por radiación es compensada con la interacción del electrón con este campo de radiofrecuencia. Otros tramos rectos son utilizados para insertar dispositivos de re-enfocamiento del haz de electrones tales como: *cuadripolos* y *octupolos* magnéticos y aún en otros tramos rectos se insertan dispositivos que mejoran las características de la radiación emitida, por ejemplo: los *onduladores* magnéticos, permiten que la radiación sea monocromática y sintonizable, mientras que los “*wigglers*” extienden considerablemente el espectro de la

radiación hacia longitudes de onda más cortas y aumentan la potencia general de la emisión; sin embargo, no es el objetivo de este trabajo el estudio de todos estos dispositivos, sino solamente el estudio del fenómeno de la emisión de radiación de sincrotrón en sí misma.

5.2. Distribución espectral y angular de la radiación emitida por una partícula carga acelerada.

Como ya se vio en la introducción de este trabajo, la radiación emitida por una partícula cargada relativista que se mueve en una trayectoria circular solo llega al observador la que proviene de un segmento pequeño de la trayectoria; sin embargo, ya que la partícula sigue muy de cerca a la misma radiación que ella misma emite, debido al *efecto Doppler*, la duración del pulso de radiación que llega al observador se ve drásticamente recortado por un factor cercano a $1/\gamma^2$ con respecto al tiempo de recorrido del segmento por la partícula.

Al recurrir al producto $\Delta\omega\Delta t \sim 1$ de la duración de un pulso y de su anchura espectral, se puede deducir, por ejemplo, que para un electrón de 1GeV, se alcanzan a generar fotones de rayos X con longitudes de onda de unos cuantos nano-metros. En esta sección se desarrollará una argumentación más precisa y cuantitativa utilizando el análisis de Fourier.

Primeramente se escribe la expresión para un diferencial de potencia de la radiación que fluye a través de un elemento de área en la posición del observador:

$$dP = \epsilon_0 c |\mathbf{E}|^2 \hat{\mathbf{n}} \cdot d\mathbf{a}$$

O expresado en términos de ángulo sólido $d\Omega$:

$$dP = \epsilon_0 c |\mathbf{E}|^2 R^2 d\Omega$$

de la cual se obtiene la potencia radiada por unidad de ángulo sólido:

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \epsilon_0 c |\mathbf{E}|^2 R^2 \quad (5.1)$$

y al introducir la definición:

$$\mathbf{A}(t) = \sqrt{\epsilon_0 c} [R\mathbf{E}] \quad (5.2)$$

Se obtiene la forma general de:

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = |\mathbf{A}(t)|^2$$

Por lo tanto, la energía total radiada por unidad de ángulo sólido está dada por:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} |\mathbf{A}(t)|^2 dt$$

siendo Δt la duración total del pulso de radiación que llega al observador, la cual, como ya se ha visto es extremadamente breve. Si se toma en cuenta que $\mathbf{A}(t)$ tiende a cero rápidamente para $t < -\Delta t/2$ como para $t > \Delta t/2$, entonces, se puede escribir:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{A}(t)|^2 dt \quad (5.3)$$

Esta adecuación de los límites de integración es conveniente porque estos son los mismos que se utilizan en las transformaciones de Fourier, las cuales se aplicarán en el siguiente desarrollo.

Alternativamente la ecuación (5.3) puede ser expresada como una integral en el dominio de las frecuencias al introducir la transformada de Fourier de $\mathbf{A}(t)$:

$$\mathbf{A}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(t) e^{i\omega t} dt \quad (5.4)$$

y su inversa:

$$\mathbf{A}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (5.5)$$

Entonces, la ecuación (5.3) se puede escribir como:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}^*(\omega') e^{i\omega' t} d\omega' \right] dt$$

y al intercambiar los órdenes de integración en la frecuencia y en el tiempo, se tiene:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(\omega) \mathbf{A}^*(\omega') \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega' - \omega)t} dt \right] d\omega' \right\} d\omega$$

pero la integral temporal es justamente la representación de Fourier de la función *Delta de Dirac* $\delta(\omega' - \omega)$. Por lo cual, finalmente se llega a:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{A}(\omega)|^2 d\omega \quad (5.6)$$

La combinación de las ecuaciones (5.3) y (5.6) representan un caso especial del *teorema de Parseval* para el pulso de radiación. Es costumbre escribir esta última integral solo para el rango positivo de las frecuencias como:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_0^{\infty} \{ |\mathbf{A}(\omega)|^2 + |\mathbf{A}(-\omega)|^2 \} d\omega$$

Y al definir la *energía radiada por unidad de ángulo sólido por unidad de intervalo de frecuencia* como:

$$\frac{dI^2(\omega, \hat{\mathbf{n}})}{d\omega d\Omega} = |\mathbf{A}(\omega)|^2 + |\mathbf{A}(-\omega)|^2$$

Se tiene que:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_0^{\infty} \frac{dI^2(\omega, \hat{\mathbf{n}})}{d\omega d\Omega} d\omega \quad (5.7)$$

puesto que $\mathbf{A}(t)$ es una función real, a partir de su propia definición (5.5), se obtiene:

$$\mathbf{A}(-\omega) = \mathbf{A}^*(\omega)$$

Por lo cual:

$$|\mathbf{A}(-\omega)|^2 = |\mathbf{A}^*(-\omega)|^2 = |\mathbf{A}(\omega)|^2$$

Entonces se puede escribir:

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega} = 2|\mathbf{A}(\omega)|^2 \quad (5.8)$$

Así, a partir de la distribución temporal de la radiación del pulso, se ha establecido una relación formal cuantitativa para obtener la distribución espectral de la energía radiada.

En seguida se aplicarán estos resultados al campo eléctrico de Lienard-Wiechert (3.27) de una partícula acelerada para obtener una expresión general de la energía radiada por unidad de ángulo sólido por unidad de intervalo de frecuencia en términos de una integración sobre la trayectoria de la partícula. Se debe calcular la transformada de Fourier (5.4) de la función $A(t)$ dada por la ecuación (5.2). De acuerdo con (3.27), se encuentra que:

$$A(\omega) = \frac{q}{\sqrt{32\pi^3 \epsilon_0 c}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\{\hat{\mathbf{n}} \times [(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]\}}{(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} e^{i\omega t} \right]_{ret} dt$$

donde “ret” significa la evaluación en $t' + \frac{R(t')}{c} = t$. Al efectuar el cambio de variable $t \rightarrow t'$, se obtiene el resultado:

$$A(\omega) = \frac{q}{\sqrt{32\pi^3 \epsilon_0 c}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{\hat{\mathbf{n}} \times [(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]\}}{(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} e^{i\omega \left[t' + \frac{R(t')}{c} \right]} dt'$$

Ya que se ha supuesto que el punto de observación P se encuentra muy alejado de la región donde ocurre la aceleración, el vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ casi no varía en el tiempo de integración y será considerado como un vector constante. Además la distancia $R(t')$, puede ser aproximada como:

$$R(t') \cong \mathbf{r}(t) - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}'(t')$$

como puede entenderse al ver la Fig. 3.1.

Así, a parte del factor de fase global $e^{i\omega \frac{r(t)}{c}}$, se puede escribir:

$$A(\omega) = \frac{q}{\sqrt{32\pi^3 \epsilon_0 c}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{\hat{\mathbf{n}} \times [(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]\}}{(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} e^{i\omega \left[t' - \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}'(t')}{c} \right]} dt' \quad (5.9)$$

Y, de acuerdo con este resultado y con la ecuación (5.6), la energía radiada por unidad de ángulo sólido por unidad de intervalo de frecuencia está dada por:

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^3 \epsilon_0 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} e^{i\omega \left[t' - \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}'(t')}{c} \right]} dt' \right|^2 \quad (5.10)$$

Para un movimiento especificado por $\mathbf{r}'(t')$, tanto $\boldsymbol{\beta}(t')$ como $\dot{\boldsymbol{\beta}}(t')$, se puede calcular y la integral puede ser evaluada como una función de ω y de la dirección de $\hat{\mathbf{n}}$. Esta integral puede simplificarse en gran medida si se toma en cuenta que:

$$\frac{\hat{\mathbf{n}} \times [(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} = \frac{d}{dt'} \left[\frac{\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\beta})}{(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right]$$

al realizar la integración por partes con (Utilizando):

$$u = e^{i\omega \left[t' - \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}'(t')}{c} \right]} \quad dv = \frac{d}{dt'} \left[\frac{\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\beta})}{(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right] dt'$$

Además, al aplicar la condición de que tanto el movimiento como el proceso de aceleración de la partícula tienen un principio y un final [$\boldsymbol{\beta}(t' = -\infty) = \boldsymbol{\beta}(t' = \infty) = 0$], se llega a la siguiente expresión para la distribución de intensidad:

$$\frac{d^2 I}{d\Omega d\omega} = \frac{q^2}{16\pi^3 \epsilon_0 c} \omega^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\beta})] e^{i\omega \left[t' - \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}'(t')}{c} \right]} dt' \right|^2 \quad (5.11)$$

La cual aunque es aproximada es válida para una aceleración arbitraria de la partícula cargada. En la siguiente sección se evaluará esta integral para el caso de la aceleración centrípeta de la partícula ultra-relativista que sigue una trayectoria circular.

5.3. Espectro de frecuencias de la radiación emitida por una partícula cargada relativista en movimiento circular instantáneo.

Para una partícula ultra-relativista sujeta a un movimiento acelerado arbitrario, la radiación emitida en cualquier instante consiste de la superposición coherente de las contribuciones de las componentes de la aceleración paralela y perpendicular a la dirección del movimiento pero como ya se ha visto en la sección 4.5, para fuerzas comparables, la radiación de la componente paralela es totalmente despreciable (del orden de $1/\gamma^2$) en comparación con la de la

componente perpendicular. Por esta razón se puede ignorar la componente paralela de la aceleración y aproximar la intensidad de la radiación por aquella de la componente perpendicular solamente, en cuyo caso se puede aproximar la radiación emitida por la de una partícula que se mueve instantáneamente a lo largo de un segmento de una trayectoria circular de un radio apropiado ρ .

Con el fin de encontrar la distribución de energía radiada en frecuencia y en ángulo, es necesario calcular la integral (5.11). Debido a que la duración del pulso es muy corto solo es necesario conocer la velocidad $\boldsymbol{\beta}(t')$ y la posición $\mathbf{r}'(t')$ sobre un pequeño arco de la trayectoria cuya tangente apunta hacia el punto de observación. Un sistema de coordenadas apropiado para este caso, se muestra en la *Fig. 5.1*, en ella el segmento de trayectoria se encuentra en el plano x, y con radio de curvatura instantáneo ρ . Sin pérdida de generalidad el vector $\hat{\mathbf{n}}$ se puede tomarse en el plano x, z haciendo un ángulo de latitud θ con el eje x , solo para valores muy pequeños de θ habrá intensidad de radiación apreciable. El origen del tiempo se escoge de tal manera que cuando $t' = 0$, la partícula se encuentra en el origen de coordenadas. En este caso se tiene:

$$\boldsymbol{\beta} = \beta \cos\left(\frac{vt}{\rho}\right) \hat{\mathbf{e}}_x + \beta \sin\left(\frac{vt}{\rho}\right) \hat{\mathbf{e}}_y$$

Y que:

$$\hat{\mathbf{n}} = \cos\theta \hat{\mathbf{e}}_x + \sin\theta \hat{\mathbf{e}}_z$$

Además, se tienen los vectores unitarios $\hat{\mathbf{e}}_{\parallel}$ y $\hat{\mathbf{e}}_{\perp}$ que corresponden a las polarizaciones de la radiación paralela y perpendicular al plano de la órbita:

$$\hat{\mathbf{e}}_{\parallel} = \hat{\mathbf{e}}_y \quad \text{y} \quad \hat{\mathbf{e}}_{\perp} = -\sin\theta \hat{\mathbf{e}}_x + \cos\theta \hat{\mathbf{e}}_z$$

Entonces se obtiene que:

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\beta}) = \beta \left[\cos\left(\frac{vt'}{\rho}\right) \sin\theta \hat{\mathbf{e}}_{\perp} - \sin\left(\frac{vt'}{\rho}\right) \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \right] \quad (5.12)$$

La cual habrá de utilizarse en la integral (5.11).

Ya que, de acuerdo con la *Fig. 5.1* se tiene:

$$\mathbf{r}'(t') = \rho \sin\left(\frac{vt'}{\rho}\right) \hat{\mathbf{e}}_x + \rho \left(1 - \cos\frac{vt'}{\rho}\right) \hat{\mathbf{e}}_y$$

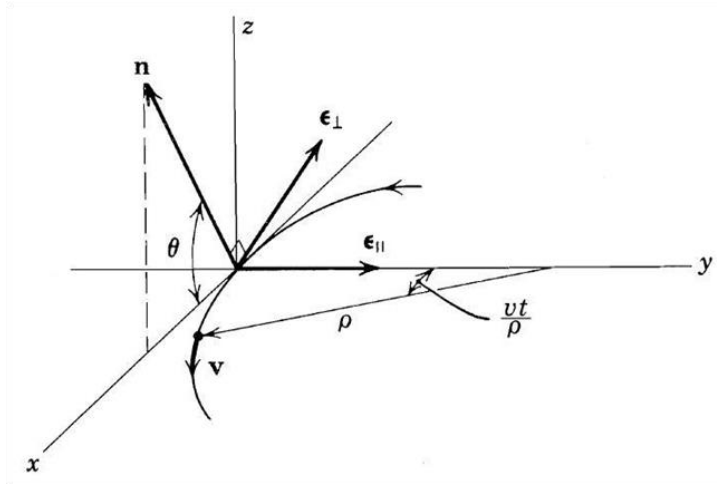


Fig. 5.1. Trayectoria del arco de la circunferencia.

El argumento de la exponencial del integrando de (5.11) se convierte en:

$$\omega \left[t' - \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}'(t')}{c} \right] = \omega \left[t' - \frac{\rho}{c} \sin \left(\frac{vt'}{\rho} \right) \cos \theta \right] \quad (5.13)$$

Sin embargo; ya que el interés está en los ángulos pequeños y tiempos relativamente cortos alrededor de $t' = 0$, se pueden expandir ambas funciones trigonométricas como:

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \quad \text{y} \quad \sin \left(\frac{vt'}{\rho} \right) \approx \left(\frac{vt'}{\rho} \right) - \frac{1}{6} \left(\frac{vt'}{\rho} \right)^3$$

Entonces, podemos reescribir a (5.13) como:

$$\omega \left[t' - \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}'(t')}{c} \right] = \frac{\omega}{2} \left[\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) t' + \frac{1}{3} \left(\frac{c}{\rho} \right)^2 t'^3 \right] \quad (5.14)$$

Similarmente, bajo el mismo tipo de aproximación, se reescribe a (5.12) como:

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\beta}) = \theta \hat{\mathbf{e}}_{\perp} - \frac{ct'}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \quad (5.15)$$

Así se puede reescribir a la ecuación (5.11) como:

$$\frac{d^2 I}{d\Omega d\omega} = \frac{q^2 \omega^2}{16\pi^3 \epsilon_0 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(\theta \hat{\mathbf{e}}_{\perp} - \frac{ct'}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \right) e^{i\frac{\omega}{2} \left[\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) t' + \frac{c^2 t'^3}{3\rho^2} \right]} dt' \right|^2 \quad (5.16)$$

Y al definir las amplitudes:

$$A_{\parallel}(\omega) = \frac{c}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} t' e^{i\frac{\omega}{2}\left[\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right)t + \frac{c^2 t'^3}{3\rho^2}\right]} dt' \quad (5.17)$$

$$A_{\perp}(\omega) = \theta \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\omega}{2}\left[\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right)t + \frac{c^2 t'^3}{3\rho^2}\right]} dt'$$

Se puede escribir a la distribución de energía radiada como:

$$\frac{d^2 I}{d\Omega d\omega} = \frac{q^2 \omega^2}{16\pi^3 \epsilon_0 c} \left| \hat{\mathbf{e}}_{\perp} A_{\perp}(\omega) - \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} A_{\parallel}(\omega) \right|^2$$

Durante la búsqueda de información para este trabajo, se ha encontrado que en los libros de texto ^[14,17], monografías ^[18] y artículos ^[19] que tratan sobre este problema se hace el cambio de variable: $x = \frac{\gamma\omega_0}{(1+\gamma^2\theta^2)^{1/2}} t'$ y se definen los siguientes parámetros: frecuencia fundamental de rotación $\omega_0 = \frac{c}{\rho}$ para una partícula que realiza un movimiento puramente circular, la frecuencia crítica $\omega_c = \frac{3}{2}\gamma^3\omega_0$. Para realizar los cálculos necesarios se introduce el parámetro ξ como:

$$\xi = \frac{\omega}{2\omega_c} (1 + \gamma^2\theta^2)^{3/2} \quad (5.18)$$

Entonces es posible escribir a las amplitudes (5.17) como:

$$A_{\parallel}(\omega) = \frac{(1 + \gamma^2\theta^2)}{\gamma^2\omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{i\frac{3}{2}\xi\left(x + \frac{1}{3}x^3\right)} dx \quad (5.19)$$

$$A_{\perp}(\omega) = \frac{\theta(1 + \gamma^2\theta^2)^{1/2}}{\gamma\omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{3}{2}\xi\left(x + \frac{1}{3}x^3\right)} dx$$

Las cuales se pueden identificar como *integrales de Airy* ^[20] o alternativamente, como *funciones de Bessel modificadas*:

$$\int_0^{\infty} x \sin \left[\frac{3}{2}\xi \left(x + \frac{1}{3}x^3 \right) \right] dx = \frac{1}{\sqrt{3}} K_{2/3}(\xi) \quad (5.20)$$

$$\int_0^{\infty} \cos \left[\frac{3}{2}\xi \left(x + \frac{1}{3}x^3 \right) \right] dx = \frac{1}{\sqrt{3}} K_{1/3}(\xi)$$

Por lo cual las integrales en (5.19) se pueden escribir:

$$A_{\parallel}(\omega) = \frac{2i}{\sqrt{3}} \frac{(1 + \gamma^2 \theta^2)}{\gamma^2 \omega_0} K_{2/3}(\xi)$$

$$A_{\perp}(\omega) = \frac{2\theta}{\sqrt{3}} \frac{(1 + \gamma^2 \theta^2)^{1/2}}{\gamma \omega_0} K_{1/3}(\xi)$$

Consecuentemente, la energía radiada por unidad de intervalo de frecuencia por unidad de ángulo sólido queda expresada como:

$$\frac{d^2 I}{d\Omega d\omega} = \frac{3q^2}{16\pi^3 \epsilon_0 c} \gamma^2 \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 (1 + \gamma^2 \theta^2)^2 \left[|\hat{\epsilon}_{\parallel}|^2 K_{2/3}^2(\xi) + |\hat{\epsilon}_{\perp}|^2 \frac{\gamma^2 \theta^2}{1 + \gamma^2 \theta^2} K_{1/3}^2(\xi) \right] \quad (5.21)$$

En donde $|\hat{\epsilon}_{\parallel}|^2 = |\hat{\epsilon}_{\perp}|^2 = 1$, que sirven para mantener identificadas las contribuciones para cada tipo de polarización: la que es paralela al plano de la órbita y la perpendicular a esta.

5.4. Distribución angular de la energía radiada.

A continuación se examinará el resultado (5.21) por el cual, debido a la presencia de los cuadrados de las funciones de Bessel modificadas, es bastante difícil de tratar por métodos tradicionales; sin embargo, el problema se simplifica drásticamente al utilizar el programa computacional *Mathematica*® en alguna sus últimas versiones, ya que este programa soporta directamente librerías que incluyen a este tipo de funciones especiales, junto con muchas otras.

Primeramente se obtendrá la distribución angular de la energía radiada al integrar sobre todas las frecuencias ω en (5.21), esto es:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \int_0^{\infty} \frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} d\omega \quad (5.22)$$

Al efectuar el cambio de variable $\omega = 2\xi\omega_c/(1 + \gamma^2\theta^2)^{3/2}$, que se deriva de la ecuación (5.18), se obtiene:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{9q^2}{4\pi^3 \epsilon_0} \frac{\gamma^5}{\rho(1 + \gamma^2 \theta^2)^{5/2}} \left[|\hat{\epsilon}_{\parallel}|^2 \int_0^{\infty} \xi^2 K_{2/3}^2(\xi) d\xi + \frac{\gamma^2 \theta^2 |\hat{\epsilon}_{\perp}|^2}{(1 + \gamma^2 \theta^2)} \int_0^{\infty} \xi^2 K_{1/3}^2(\xi) d\xi \right]$$

y de acuerdo con los comandos¹ que aparecen al pie de página, el programa *Mathematica*®, arroja los resultados para esas integrales:

$$\int_0^{\infty} \xi^2 K_{2/3}^2(\xi) d\xi = \frac{7\pi^2}{144} \qquad \int_0^{\infty} \xi^2 K_{1/3}^2(\xi) d\xi = \frac{5\pi^2}{144}$$

Aplicando estos resultados al realizar la integral de (5.22), se llega a:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{7q^2}{64\epsilon_0\pi} \frac{\gamma^5}{\rho} \frac{1}{(1+\gamma^2\theta^2)^{5/2}} \left[1 + \frac{5\gamma^2\theta^2}{7(1+\gamma^2\theta^2)} \right] \quad (5.23)$$

Al igual que en (5.21), el primer término de esta expresión corresponde a la polarización paralela al plano de la órbita y el segundo a la polarización perpendicular. La energía total radiada por vuelta por la partícula en su órbita circular para cada modo de polarización puede encontrarse al integrar (5.23) sobre todos los ángulos. Ya que la potencia radiada no depende significativamente de la ubicación de la partícula a lo largo de la órbita, al integrar todos los puntos a lo largo de esta, obtenemos un factor de 2π . Continuando con la integración para el ángulo de latitud θ , se encuentra que las contribuciones a la integral son rápidamente insignificantes para ángulos mayores a $1/\gamma$; si no fuera así, no se hubiera llegado a la ecuación (5.23), en donde las funciones trigonométricas han sido reemplazadas por su aproximación de pequeños argumentos. Al considerar al ángulo θ como el ángulo de latitud con respecto al plano de la órbita se obtiene que el elemento de ángulo sólido está dado por $d\omega = \cos\theta d\theta d\varphi = 2\pi d\theta$. Por lo cual se obtiene que la energía total radiada en una vuelta está dada por:

$$I = \frac{7q^2}{64\epsilon_0\pi} \frac{\gamma^5}{\rho} \left[|\epsilon_{\parallel}|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+\gamma^2\theta^2)^{5/2}} d\theta + |\epsilon_{\perp}|^2 \frac{5}{7} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma^2\theta^2}{(1+\gamma^2\theta^2)^{7/2}} d\theta \right]$$

Para el primer y segundo término se tienen las respectivas integrales:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma^5}{(1+\gamma^2\theta^2)^{5/2}} d\theta = \frac{4}{3}\pi\gamma^3 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma^7\theta^2}{(1+\gamma^2\theta^2)^{7/2}} d\theta = \frac{4}{15}\pi\gamma^3$$

¹ *Integrate* [$(\xi \text{BesselK}[\frac{1}{3}, \xi])^2, \{\xi, 0, \infty\}$], *Integrate* [$(\xi \text{BesselK}[\frac{2}{3}, \xi])^2, \{\xi, 0, \infty\}$]

Con estas integrales y la ecuación (5.23), se puede ver fácilmente que la potencia radiada por vuelta en el modo \hat{e}_{\parallel} y en el modo \hat{e}_{\perp} , son respectivamente:

$$I_{\parallel} = \frac{7q^2\gamma^3}{48\epsilon_0\rho}$$

$$I_{\perp} = \frac{q^2\gamma^3}{48\epsilon_0\rho}$$

Encontrando que la energía radiada en todas direcciones con polarización paralela al plano es siete veces mayor que la energía radiada con polarización perpendicular al plano:

$$I_{\parallel} = 7 I_{\perp}.$$

Para el caso concreto de un electrón ultra-relativista que circula en una órbita de radio $\rho = 5m$ y con una energía $E = 1GeV$ ($\gamma = 1957$), obtenemos que $I_{\parallel} = 6.33 \times 10^{-19} eV$ y que $I_{\perp} = 9.05 \times 10^{-20} eV$. Ya que la energía total radiada por vuelta es la suma de estas dos cantidades, se tiene que, para mantener la circulación estable del electrón en su órbita, se requiere de la inyección de $7.235 \times 10^{-19} eV$ de nueva energía cinética por vuelta.

5.5. Distribución en frecuencias de la energía radiada

La radiación de sincrotrón es emitida en un amplio rango espectral y es de gran interés conocer su distribución en frecuencias. Para obtener este espectro, se llevará a cabo la integración de (5.21) con respecto al ángulo sólido de emisión $d\Omega = d\phi d\theta$:

$$\frac{dI}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2I}{d\omega d\Omega} d\Omega \quad (5.24)$$

EL ángulo θ aparece en (5.21) de una manera complicada, debido a la dependencia del parámetro ξ sobre este ángulo.

Para integrar (5.24), se toman las ecuaciones dadas por ^[22], las cuales son:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + \gamma^2 \theta^2)^2 K_{2/3}^2(\xi) d\theta = \frac{\omega_c}{\omega} \frac{\pi}{\gamma\sqrt{3}} \left(\int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(\chi) d\chi + K_{2/3}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \gamma^2 \theta^2 (1 + \gamma^2 \theta^2) K_{1/3}^2(\xi) d\theta = \frac{\omega_c}{\omega} \frac{\pi}{\gamma\sqrt{3}} \left(\int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(\chi) d\chi - K_{2/3}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \right)$$

por lo cual, al utilizar estos resultados la ecuación (5.24) adquiere la forma:

$$\frac{dI}{d\omega} = \frac{3q^2}{16\pi^3 \epsilon_0 c} \gamma^2 \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \left\{ \frac{\omega_c}{\omega} \frac{\pi}{\gamma\sqrt{3}} \left[|\hat{\epsilon}_{\parallel}|^2 \left(\int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(\chi) d\chi + K_{2/3}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \right) \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. + |\hat{\epsilon}_{\perp}|^2 \left(\int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(\chi) d\chi - K_{2/3}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \right) \right] \right\}$$

Como la radiación es uniforme con respecto al ángulo azimutal φ solo se tiene que considerar la dependencia en θ de la distribución. Después de la integración correspondiente, se llega a la expresión deseada para la distribución en frecuencia de la energía total emitida por un electrón:

$$\frac{dI}{d\omega} = \frac{\sqrt{3}q^2}{4\pi\epsilon_0 c} \gamma \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(\chi) d\chi \quad (5.25)$$

Siendo este el espectro integrado sobre ambos estados de polarización.

5.6. Forma normalizada de $dI/d\omega$.

Ahora se va a obtener una *expresión normalizada* para la distribución en frecuencia de la energía total emitida por una partícula cargada, esto se obtendrá al integrar primeramente a (5.25) sobre todas las frecuencias:

$$I_{\gamma} = \frac{\sqrt{3}q^2 \gamma}{4\pi\epsilon_0 c} \int_0^{\infty} \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \left[\int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(\chi) d\chi \right] d\omega \quad (5.26)$$

y al hacer el proceso de integración por partes se llega a:

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) \left[\int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(\chi) d\chi \right] d\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega^2}{\omega_c} \right) \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(\chi) d\chi \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(\frac{\omega^2}{\omega_c} \right) \frac{d}{d\omega} \left[\int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(\chi) d\chi \right] d\omega \quad (5.27)$$

Donde, el primer término en esta expresión se reduce a cero cuando se evalúan los límites de integración, permaneciendo solo el segundo término. Para evaluar este término, se hace uso de la regla de Leibniz ^[23] para la derivación de integrales cuyos límites de integración son funciones de la misma variable con la que se realiza la derivación, obteniendo:

$$\frac{d}{d\omega} \left[\int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(\chi) d\chi \right] = -\frac{1}{\omega_c} K_{5/3} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)$$

Reduciéndose la integral (5.27) a:

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) \left[\int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(\chi) d\chi \right] d\omega = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 K_{5/3} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) d\omega$$

Ahora, esta integral se puede resolver al usar la forma general dada por ^[22]:

$$\int_0^{\infty} x^a K_\nu(x) dx = 2^{a-1} \Gamma \left(\frac{a+\nu+1}{2} \right) \Gamma \left(\frac{a-\nu+1}{2} \right)$$

En la cual Γ denota a la función gamma. Aplicando esto a la integral, se obtiene:

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) \left[\int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(\chi) d\chi \right] d\omega = \frac{\omega_c}{2} \left[2\Gamma \left(2 + \frac{1}{3} \right) \Gamma \left(\frac{2}{3} \right) \right] = \frac{8\pi}{9\sqrt{3}} \omega_c$$

al sustituir este resultado en la ecuación (5.26), se obtiene la expresión para la energía total radiada por una partícula cargada por revolución:

$$I_\gamma = \frac{2q^2}{9\epsilon_0 c} \gamma \omega_c \quad (5.28)$$

así que se puede reescribir a (5.25) como:

$$\frac{1}{I_\gamma} \frac{dI}{d\omega} = \frac{1}{\omega_c} \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(\chi) d\chi \quad (5.29)$$

Y al definir $y = \omega/\omega_c$, se obtiene la forma de la *función normalizada de la RS*:

$$S(y) = \frac{1}{I_\gamma} \frac{dI_\gamma}{dy} = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} y \int_y^\infty K_{5/3}(\chi) d\chi \quad (5.30)$$

Se puede ver que esta distribución espectral depende solo de la frecuencia crítica ω_c , de la energía total radiada y de una función puramente matemática.

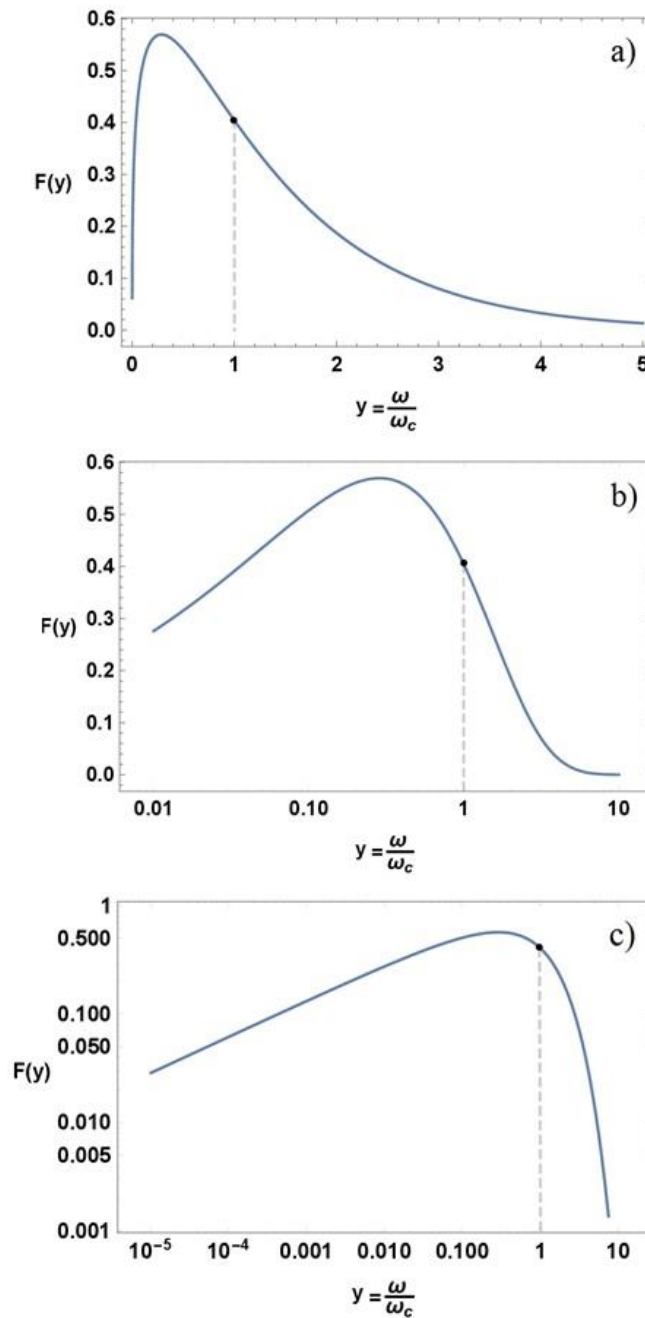


Fig. (5.2). Espectro Normalizado de la Radiación de Sincrotrón o Curva Universal en sus tres presentaciones usuales.

En la Fig. (5.2) se muestran las tres formas usuales de graficar esta función: a) Lineal-Lineal, b) Logarítmica-Lineal y c) Logarítmica-Logarítmica, las cuales han sido obtenidas mediante el programa *Mathematica*®, y que son básicamente idénticas a las mostradas en las Fig.14.11 de [16] y Fig.5.5 de [17]. Se debe tener en cuenta que el espectro de la RS, si se normaliza a la frecuencia crítica, no depende de la energía del electrón explícitamente.

De acuerdo con [24], estos resultados han sido comparados con las emisiones experimentales de los sincrotrones para distintas energías de los electrones y se ha encontrado que las distribuciones angulares de polarización y de frecuencia tienen buena coincidencia con la teoría.

5.7. Densidad espectral de los fotones emitidos.

Hasta ahora el tratamiento que se ha seguido para la RS ha sido puramente clásico pero también es posible utilizar el lenguaje de los fotones si es necesario.

Se tiene que en el intervalo de frecuencias $(\omega - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega + \frac{\Delta\omega}{2})$, el número de fotones emitidos por revolución está dado por:

$$\Delta N = \frac{1}{\hbar\omega} \frac{dI}{d\omega} \Delta\omega$$

y en términos de la variable $y = \omega/\omega_c$, se tiene:

$$\frac{\Delta N}{\Delta y} = \frac{1}{\hbar} \frac{\omega_c}{\omega} \frac{dI}{d\omega}$$

Al utilizar las ecuaciones (5.25) para $dI/d\omega$ y (5.28) para I_γ , se obtiene la distribución en frecuencia del fotón:

$$\frac{dN}{dy} = \frac{I_\gamma}{\hbar\omega_c} \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} \int_y^\infty K_{5/3}(\chi) d\chi \quad (5.31)$$

Se puede determinar el número total de fotones emitidos por un electrón por revolución, para esto, se sigue el mismo método que se usó para calcular (5.28), integrando a la ecuación (5.31) sobre todas las frecuencias, obteniéndose:

$$N = \frac{5\pi}{\sqrt{3}} \alpha \gamma \quad (5.32)$$

Donde α es la *constante de estructura fina*, que es un número adimensional $\approx (1/137)$, dado por:

$$\alpha = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$$

El resultado obtenido en (5.32), es independiente de la frecuencia característica y depende solo de la energía γ de la partícula.

Otra cantidad útil es la energía media por fotón $\langle \epsilon \rangle$, que es la energía total radiada (5.28) dividida por el número total de fotones (5.32), que da:

$$\langle \hbar\omega \rangle = \frac{8}{15\sqrt{3}} \hbar\omega_c \quad (5.33)$$

Puesto que ω_c es proporcional a γ^3 . Donde para circunferencias con unos cientos de metros ω_0 es del orden de algunos $10^6 s^{-1}$ y para energías de la partícula de algunos GeV, el valor de γ es del orden de 10^4 . Se llega a que ω_c es del orden de $10^{18} s^{-1}$, lo cual corresponde a longitudes de onda del orden de $10^{-10}m$ (1 \AA) correspondiente a rayos-X en keV.

Referencias.

- [1] Schott G. A. Ann. Phys. 24,635 (1907); *Electromagnetic Radiation* (Cambridge, 1912).
- [2] Artsimovich L. A., Pomeranchuk I. Ya Dokl. A Kad. Navk SS.SR 44, 343 (1944).
- [3] Julian Schwinger *J. Phys. Rev* 75, 1912 (1949).
- [4] Phys. Rev.71.829.5; *Radiation from Electrons in a Synchrotron*. H. C. Pollock.
- [5] Vladimirskii V. V. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 18, 392 (1948).
- [6] Sokolov A. A. *Vestn. Most Univ.* (4) 77 (1947).
- [7] Ivanenko D. D, Sokolov A. A. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 59 1551 (1948).
- [8] Landau L. D. Lifshitz E. M. *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Pergamon Press, 1980).
- [9] A. Yu. M. Cherenkov P. A. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 110 35 (1956) [*Sov. Phys. Dokl.* 1 517 (1957)].
- [10] Tombulian D. Hartman P. *Phys. Rev.* 102 423 (1956).
- [11] Bathov G. Freitag E. Haensel R. *Appl. Phys* 37 3449 (1966).
- [12] R. Hagedorn: *Relativistic Kinematics*. W.A. Benjamin, Inc. (1963).
- [13] Richard E. Haskell: *Special Relativity and Maxwells Equation´s* (Computer Science and Engineering Department Oakland University Rochester, MI 48309).
- [14] J. D. Jackson: *Classical Electrodynamics* John Wiley & Sons, 1999,3th Edn.

-
- [15] *Ibíd.*, p. 665.
- [16] *Ibíd.*, p.682.
- [17] H. Wiedemann: *Synchrotron Radiation* (Springer, Berlin 2003).
- [18] A. Hofmann: *The Physics of Synchrotron Radiation*. Cambridge University Press. Formerly CERN, Geneva.
- [19] K.C. Westfold: *The Polarization of Synchrotron Radiation*. American Astronomical Society.
- [20] I. S. Gradshteyn & I. M. Ryzhik: *Table of Integrals, Series and Products*, (5th Edn). Academic Press, New York, NY, USA (1980).
- [21] *Ibíd.*, Equations 6.561-16, p. 708.
- [22] A.A. Sokolov, I.M. Ternov: *Radiation from Relativistic Electrons*. American Institute of Physics (1986). p 76, ecuaciones 10.110.
- [23] Mary L. Boas: *Mathematical Methods in the Physical Sciences* (2nd edn). Chapter 4, p. 1 92-197. John Wiley & Sons, New York, NY, USA (1983).
- [24] F.R Elder, R.V. Langmuir and H.C. Pollock. *Phys. Rev.* 74,52 (1948); D.H. Tomboulain and P.L. Hartman, *Phys. Rev.* 102, 1423 (1956); G. Bathow. E. Freytag and R. Haensel, *J. Appl. Phys.* 37, 3449 (1966).
- [25] H. Wiedemann: *Particle Accelerator Physics*, Vol II. Springer-Verlag, Berlin, Germany (1996).
- [26] G. N. Watson: *A Treatise of the Theory of Bessel Functions* (2nd Edn). Cambridge University Press, Cambridge, England (1962).
- [27] W. K. H. Panofsky, M. Phillips: *Classical Electricity and Magnetism*, 2nd Edn. Addison-Wesley, Massachusetts (1962).
- [28] T. Shiozawa: *Classical Relativistic Electrodynamics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg GmbH (2004).