



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

POSTGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

UN ESTUDIO DE LA DINÁMICA DE LA FAMILIA

$$F_{\lambda, \mu, z_0}(z) = \lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{\mu}{z - z_0}, \lambda, \mu, z_0 \in \mathbb{C}$$

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

JOSUÉ VÁZQUEZ RODRÍGUEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DRA. PATRICIA DOMÍNGUEZ SOTO

PUEBLA, PUEBLA. 2016

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Organización del trabajo	3
2. Elementos de la Variable Compleja	5
2.1. Números complejos	5
2.2. La proyección estereográfica y la esfera de Riemann.	8
2.3. Funciones analíticas	13
2.3.1. Funciones conformes	16
2.4. Singularidades de una función de variable compleja	17
2.4.1. Clasificación de las singularidades aisladas	18
2.4.2. Valores singulares de funciones analíticas	19
2.5. Familias normales y teoremas de Picard	21
3. La Clase de Funciones \mathfrak{M}	28
3.1. Iteración de funciones en la clase \mathfrak{M}	28
3.2. Puntos fijos y periódicos	30
3.3. Conjuntos de Fatou y Julia	31
3.3.1. Clasificación de las componentes de Fatou	33
4. La Familia $f_{\lambda,\mu,z_0}(z) = \lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{\mu}{z-z_0}$, $\lambda, \mu, z_0 \in \mathbb{R}$	35
4.1. Estudio del Caso I	36
4.2. Estudio del Caso II	41
4.2.1. Geometría de las funciones en la familia $f_{\lambda,\mu,0}(z)$	42
4.2.2. Puntos fijos de la familia $f_{\lambda,\mu,0}(z)$	43
4.2.3. Puntos críticos y valores críticos de la familia $f_{\lambda,\mu,0}(z)$	45
5. Cortes del Espacio de Parámetros	49
6. Conclusiones y Trabajo a Futuro	55
6.1. Contribuciones de esta tesis	55
6.2. Líneas de trabajo futuro	56

A. Elementos de la Topología en Espacios Métricos	58
Bibliografía	63

Capítulo 1

Introducción

La dinámica compleja en el sentido de iteración de funciones analíticas ha sido una de las áreas de las matemáticas más activas en los últimos años. Sus orígenes datan, probablemente, desde los antíquisimos procesos de iteración usados en la civilización babilónica [Bailey, 1989]; estos procesos son las primeras versiones del conocido método de Newton¹ desarrollado en el siglo XVII, método iterativo usado para la estimación de raíces de una función, que tiempo después fue ampliado para el caso complejo.

Los primeros trabajos sobre la iteración de funciones complejas analíticas fueron presentados en dos revisiones detalladas del método de Newton: La primera, en un artículo de Schröder publicado en dos partes, en 1870 y 1871, junto con George Cantor [Schröder, 1870], [Schröder, 1871]; la segunda, escrita por Arthur Cayley, apareció en 1879 [Cayley, 1879].

Posteriormente, un gran impulsor para el desarrollo del estudio de la iteración de funciones complejas fue el matemático francés Paul Montel que en 1907 recibió su doctorado por su investigación relacionada con sucesiones de funciones de variable real y compleja, y fue unos años después que Montel trabajó sobre la teoría de funciones de variable compleja donde introdujo la teoría de familias normales. En sus dos trabajos publicados en 1912 y 1916, Montel estudió la teoría de Picard, considerando su estudio como la más importante aplicación en su teoría de familias normales. En 1917, Montel usó su teoría de familias normales para probar el teorema de la aplicación de Riemann.

El estudio de los sistemas dinámicos en el campo de la dinámica holomorfa se dio a comienzos del siglo XX con las investigaciones de los matemáticos franceses Gaston Julia (1893- 1978) y Pierre Fatou (1878-1926), véase [Julia, 1918] y [Fatou, 1919]. Estos dos matemáticos estudiaron principalmente la iteración de funciones racionales en la esfera de Riemann. Un teorema de Montel sobre familias normales permitió a estos

¹Cabe mencionar que este método no es obra solamente de Sir Isacc como uno supondría, según Nick Kollerstrom [Kollerstrom, 1992] el crédito debiera ser compartido con Thomas Simpson -autor de la conocida *regla de Simpson*-, Joseph Raphson y Joseph Fourier. De tal manera que el método podría ser llamado el método de Newton-Raphson-Simpson-Fourier.

matemáticos descomponer a la esfera de Riemann en dos conjuntos, que ahora llevan sus nombres: El *conjunto de Fatou* (o conjunto estable) es el conjunto de puntos en el plano complejo (o en la esfera de Riemann) donde la sucesión de iteradas está bien definida y es normal para alguna vecindad de tal punto y el *conjunto de Julia* (o conjunto caótico) es el complemento del conjunto de Fatou.

Una de las preguntas que dejaron pendientes Fatou y Julia fue: ¿existen componentes en el conjunto de Fatou que sean errantes para el caso de funciones racionales? D. Sullivan, en [Sullivan, 1985], demostró en 1985 la no existencia de esas componentes, además, probó que las componentes cíclicas de Fatou se pueden clasificar en cinco tipos: componentes de atracción, componentes de super-atracción, componentes parabólicas, discos de Siegel y anillos de Herman.

Como ya se mencionó, la teoría clásica de los conjuntos de Julia y de Fatou fue estudiada alrededor de 1920 para funciones racionales. En 1926, Fatou extiende ciertos resultados a la teoría a funciones trascendentes enteras (infinito es singularidad esencial), véase [Fatou, 1926]. En 1929, Fatou muere dejando varias preguntas abiertas relacionadas con la dinámica de funciones trascendentes enteras que fueron respondidas en su mayoría por el matemático I. Noel Baker, véase [Baker, 1968].

La teoría de Fatou-Julia de funciones trascendentes meromorfas (denotada en este trabajo por \mathfrak{M}) fue asentada y estudiada entre 1990 y 1992 por I. N. Baker, J. Kotus y Lü Yinian, véase [Baker *et al.*, 1992], [Baker *et al.*, 1991b], [Baker *et al.*, 1990] y [Baker *et al.*, 1991a], estableciendo la teoría cimentada por Fatou y Julia para esta clase de funciones. Muchas de las propiedades básicas de las funciones trascendentes meromorfas resultan ser similares a las propiedades de las funciones racionales y las funciones trascendentes enteras, pero hay que tener cuidado porque en cada clase de funciones mencionadas anteriormente se requiere una demostración diferente.

Después de Baker, Kotus y Yinian, muchos matemáticos han seguido investigando la dinámica de funciones trascendentes meromorfas. Para un estudio más profundo sobre la iteración de esta clase de funciones se sugiere consultar [Bergweiler, 1993].

Es en las últimas dos décadas del siglo XX que se retomó el estudio de la dinámica holomorfa teniendo un importante desarrollo el caso de las funciones trascendentes enteras y trascendentes meromorfas, esto se debió al uso de las computadoras y la implementación de programas en lenguajes como C++, Java, Xaos, Mathematica, etc, dado que con la graficación del plano de parámetros de las familias de funciones a investigar se puede conocer información acerca de la dinámica de éstas, siendo una fuente imperecedera de vías de búsqueda para nuevos resultados concernientes a las familias de variable compleja de estudio.

La dinámica de la familia compleja $g_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ fue estudiada en 2002 por Domínguez y Sienra, véase [Domínguez and Sienra, 2002]. Se pensaba que

la familia $g_\lambda(z)$ debía tener una dinámica similar a la familia $h_\lambda(z) = \lambda e^z$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, estudiada por R. Devaney, véase [Devaney, 1991], pero en un resultado de C. McMullen en el año de 1994, véase [McMullen, 1994], donde afirma que para la función exponencial la medida de Lebesgue del conjunto de Julia es cero, mientras que para la función $\text{sen}(z)$ no es cero, determinaba que sus dinámicas no podían ser similares.

Es natural preguntarse: ¿Qué sucede si agregamos un polo a la familia $\lambda \text{sen}(z)$? En este trabajo de tesis se investiga la perturbación de la familia $g_\lambda(z) = \text{sen}(z)$ añadiendo un polo simple y un nuevo parámetro, esto es,

$$f_{\lambda, \mu, z_0} = \lambda \text{sen}(z) + \frac{\mu}{z - z_0}, \quad \lambda, \mu, z_0 \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Cabe mencionar que esta familia no ha sido investigada dentro del área de sistemas dinámicos complejos, por ello es el objeto de estudio de este trabajo de tesis.

La importancia del estudio de esta familia radica en la búsqueda de la ampliación y comparación de los resultados obtenidos en [Domínguez and Sienna, 2002]. También, se busca estudiar las componentes de Fatou que se originen de la familia (1), y comprender que propiedades topológicas se conservan con la perturbación. En el desarrollo del trabajo de tesis se observa la familia $g_\lambda(z) = \text{sen}(z)$ y la familia presentada en (1) son dos familias de funciones con comportamientos dinámicos distintos.

1.1. Organización del trabajo

En el Capítulo 2 se enuncian algunos teoremas de variable compleja, definiciones de singularidades y valores singulares de una función de variable compleja, así como la definición de familia normal, sus propiedades y los teoremas de Montel y Picard.

En el Capítulo 3 se define la clase de funciones meromorfas con al menos un polo que no es un valor omitido, denotada por \mathfrak{M} . Se define la iteración de funciones pertenecientes a esta clase y los conjuntos de Fatou y Julia acoplados a la clase \mathfrak{M} . También, se mencionan algunas propiedades de los conjuntos de Fatou y Julia y la clasificación de las componentes de Fatou para estas clases de funciones. Por último se aborda la subclase \mathcal{B} definida por Eremenko y Lyubich en [Eremenko and Lyubich, 1992].

En el Capítulo 4 se desarrolla la dinámica de la familia de estudio (1). Dicho análisis está dividido en dos casos debido a la influencia de la ubicación de la perturbación, el primer caso donde el polo es un valor distinto de cero y en el segundo caso cuando lo es. Inicialmente, se estudia el caso donde el polo no está en el origen y se presenta una generalización de un resultado obtenido por Domínguez en [Domínguez, 1998]. Posteriormente, se aborda el caso donde el polo está en el origen y se analiza la geometría que guarda cada una de las funciones de la familia, posteriormente abordamos características de los puntos fijos, puntos críticos y valores críticos.

En el Capítulo 5 se analiza lo que definimos como *Cortes del Espacio de Parámetros* y se establece la relación que guardan los cortes para la graficación. También, se estudian los conjuntos de Fatou y Julia para determinados parámetros.

En el Capítulo 6 se enuncian las conclusiones obtenidas del análisis de la familia en (1) y se exponen preguntas abiertas para una futura investigación.

Finalmente, se anexa un apéndice sobre *Elementos de la Topología en Espacios Métricos* en caso de que el lector no esté familiarizado con los términos usados en las tesis.

Algunos resultados de los Capítulos 4 y 5, como el Teorema 4.1, el Corolario 4.1 y 4.2 y la graficación de los cortes del espacio de parámetros, forman parte del artículo “A study of the dynamics of the family $f_{\lambda,\mu} = \lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{\mu}{z-k\pi}$ where $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ and $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ” aceptado en 2016 en la revista *Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity*, véase [Domínguez, Vázquez and Montes de Oca, 2016].

Capítulo 2

Elementos de la Variable Compleja

En este capítulo describimos conceptos primigenios de la variable compleja, como son: familias normales, singularidades de una función analítica y de su inversa. También damos los elementos requeridos que ocuparemos a lo largo de los siguientes capítulos para su uso en demostraciones de resultados y para abordar los conjuntos de *Fatou y Julia* de una familia de funciones dada; conjuntos que son el fundamento de la rama de estudio de este trabajo.

A continuación, analizaremos una lluvia de ideas, conceptos y teoremas, para resaltar su importancia para una mayor comprensión del material a exponer en esta tesis. Los siguientes resultados se pueden consultar en [Ahlfors, 1984], [Noguchi, 1998], [Lin, 2011] y [Marsden and Hoffman, 1999], entre otros.

2.1. Números complejos

El orden de los números reales implica que $x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Así, la ecuación algebraica $x^2 + 1 = 0$ no se puede resolver en el sistema de los números reales, por lo que es necesario considerar un sistema donde sí se pueda resolver; por ende, definimos al conjunto

$$\mathbb{C} = \{x + iy | x, y \in \mathbb{R}\}$$

como el *conjunto de los números complejos*; donde i la definimos como una solución a la ecuación $x^2 + 1 = 0$. Llamaremos a i la *unidad imaginaria*. Observemos que $-i$ es también una solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$.

Asignemos al conjunto \mathbb{C} las siguientes operaciones. Sean $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$:

1. Adición: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
2. Multiplicación: $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

Es fácil ver que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un campo algebraico. Los números $0 + 0i$ y $1 + 0i$ son el neutro aditivo y el neutro multiplicativo respectivamente, y cada elemento $x + iy$ con x ó y no ambos ceros admite un inverso multiplicativo de la forma: $\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$.

Observación 2.1. $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Demostración. Sea el subconjunto de \mathbb{C} :

$$\tilde{\mathbb{R}} = \{x + i0 \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

$\tilde{\mathbb{R}}$ es cerrado bajo las operaciones de adición y producto de \mathbb{C} con sus propias operaciones definidas por restricción. Luego, la correspondencia

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R} &\longrightarrow \tilde{\mathbb{R}} \\ x &\longmapsto x + i0, \end{aligned}$$

es inyectiva, suprayectiva y preserva las dos operaciones definidas, con lo que identificamos a \mathbb{R} con $\tilde{\mathbb{R}}$, concluyendo que $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. ■

Observación 2.2. \mathbb{C} no es un campo ordenado.

Demostración. Supongamos que \mathbb{C} es campo ordenado, dado que $i \neq 0$, se tiene que $i > 0$ ó $i < 0$, ambas desigualdades implican que

$$i^2 = -1 > 0,$$

multiplicando ambos lados por -1 tendríamos que $1 > 0$, pero sumando de ambos lados 1 tendríamos $0 > 1$, que es una contradicción. ■

Ahora, fijemos un sistema de coordenadas xy en el plano \mathbb{R}^2 . Designemos el punto (x, y) como el número complejo $z = x + iy$ y viceversa. Esta designación establece una correspondencia inyectiva y suprayectiva entre los números complejos y puntos en el plano. Por lo tanto, nos referimos a \mathbb{C} como *El plano complejo*.

En particular, por los argumentos anteriores, los números reales están en correspondencia biunívoca con los puntos en el eje x , de aquí que lo llamemos *el eje real*, y de manera análoga los imaginarios puros y los puntos en el eje de las y están en correspondencia biunívoca y de aquí el eje y es llamado *el eje imaginario*.

Por lo tanto, no se hará distinción entre el conjunto de los números complejos $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ y el plano complejo, también denotado por \mathbb{C} .

A continuación se define el módulo de un número complejo. Dado que un número complejo $z = x + iy$ puede ser considerado como un vector geométrico con punto inicial $(0, 0)$ hacia el punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene que x y y son las proyecciones en el eje x y en eje y correspondientes a la parte real e imaginaria, respectivamente; procediendo a la siguiente definición.

Definición 2.1. Dado $z \in \mathbb{C}$, se define su módulo o valor absoluto como:

$$|z| = \sqrt{[\operatorname{Re}(z)]^2 + [\operatorname{Im}(z)]^2}.$$

Definición 2.2. Llamamos al punto simétrico de un número complejo $z = x + iy$ con respecto al eje x , denotado por $\bar{z} = x - iy$, el *conjugado de z* .

Observemos lo siguiente:

1. $|z| \geq 0$ y $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
2. $z + \bar{z} = \operatorname{Re}(z)$ y $z - \bar{z} = i\operatorname{Im}(z)$.

Definición 2.3. En el caso $z = x + iy \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, llamamos el *ángulo*, denotado $\arg z$, entre el vector z y la dirección positiva del eje real el argumento de z . El valor del $\arg z$ que está en el intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$ es llamado el argumento principal de z y es denotado por $\operatorname{Arg} z$. De tal manera, tenemos que:

$$\arg z = \operatorname{Arg} z + 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Observemos que:

1. $z = \bar{z} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0$, es decir, $z \in \mathbb{R}$, entendiéndose así, que la asignación del conjugado relaciona a un número real a sí mismo.
2. $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \geq 0$, por lo que se tiene una forma distinta de hallar el módulo de un número complejo.

A partir de la métrica euclidiana, definida a través de la función módulo por:

$$d(z, w) = |z - w|, \text{ para cualesquiera } z, w \in \mathbb{C},$$

es claro que el sistema de los números complejos \mathbb{C} , con la función módulo $|\cdot|$, es un espacio métrico, véase *Apéndice A*. Más aún, $(\mathbb{C}, \tau_\alpha)$ también lo podemos considerar como un espacio topológico, donde τ_α es la topología inducida por la métrica $|\cdot|$, véase *Apéndice A*.

Ahora, recordamos los conceptos relacionados con sucesiones de números complejos:

Definición 2.4. Definimos una *sucesión* $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$, ó (z_n) de números complejos por una función $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\varphi(n) = z_n$.

Observación 2.3. Este concepto debe ser distinguido del conjunto de la imagen de la sucesión $\varphi(\mathbb{N}) = \{z_n\}$.

Definición 2.5. Una sucesión (z_n) de números complejos decimos que *converge hacia un (punto) límite* $z_0 \in \mathbb{C}$, cuando $n \rightarrow \infty$, si para cualquier $\epsilon > 0$ existe un número natural $N = N(\epsilon)$ tal que $|z_n - z_0| < \epsilon$, cuando $n \geq N$. Una sucesión compleja $(z_n) \subset \mathbb{C}$ decimos que *diverge hacia ∞* o *converge hacia ∞* , cuando $n \rightarrow \infty$, si para cualquier $R > 0$ existe un número natural $N = N(R)$ tal que $|z_n| > R$.

Si una sucesión $(z_n) \subset \mathbb{C}$ no converge a un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ o diverge hacia ∞ , entonces decimos que (z_n) es divergente.

Recordemos que una sucesión de números complejos (z_n) es de *Cauchy* si dado $\epsilon > 0$, existe un número natural $N = N(\epsilon)$ si para cualquier $m, n \geq N$, $|z_m - z_n| < \epsilon$.

Sea (z_n) una sucesión de Cauchy de números complejos. Usando el hecho que $|Re(z_m) - Re(z_n)|, |Im(z_m) - Im(z_n)| \leq |z_m - z_n| \leq |Re(z_m) - Re(z_n)| + |Im(z_m) - Im(z_n)|$ y la completitud de los números reales \mathbb{R} , se sigue que *cada sucesión de Cauchy converge (hacia un punto) en \mathbb{C}* . De aquí, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.1. *El campo complejo \mathbb{C} es completo como un espacio métrico dotado con la métrica $|\cdot|$.*

Por otro lado veamos una propiedad de \mathbb{C} que será necesaria para la siguiente sección:

Proposición 2.2. *\mathbb{C} es un espacio métrico localmente compacto.*

Demostración. Dado que los discos cerrados (de centro en $z \in \mathbb{C}$ y radio $r > 0$):

$$\overline{D(z, r)} := \overline{\{w \in \mathbb{C} : |z - w| < r\}}$$

son compactos, se sigue que cada entorno de un punto $z \in \mathbb{C}$ contiene un conjunto compacto que es un entorno de x , es decir, admite una base local de contornos compactos. ■

2.2. La proyección estereográfica y la esfera de Riemann.

Consideremos la 2-esfera $\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ en \mathbb{R}^3 .

Identifiquemos el plano complejo \mathbb{C} con el hiperplano $x_3 = 0$, es decir, el punto $z = x + iy$ es el punto $(x, y, 0)$ si $P(x, y, 0) \in \mathbb{C}$, entonces podemos conectar al punto P con una línea recta al polo norte $N = (0, 0, 1)$, intersectando la esfera $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ en un único punto $Q(x_1, x_2, x_3)$. De la intersección de esta recta con la 2-esfera, obtenemos la llamada *proyección estereográfica de Q* , véase Figura 2.1.

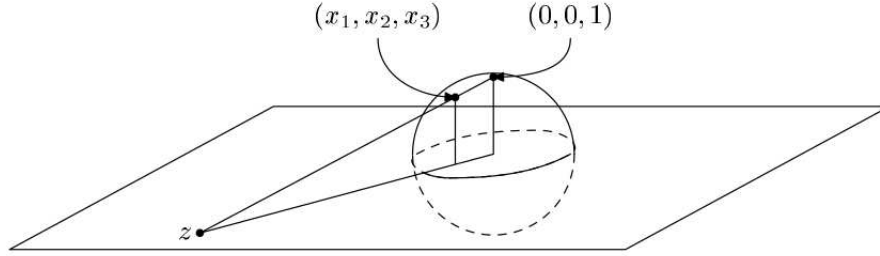


Figura 2.1: Proyección Estereográfica

Definimos de la 2-esfera quitándole el punto norte con la función π :

$$\begin{aligned} \pi &: \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{C} \\ Q &\longmapsto P \end{aligned}$$

El objetivo es obtener una forma explicita par π . Observemos que la ecuación de la recta que pasa por N y Q es

$$\ell(t) = N + t(Q - N) = (tx_1, tx_2, 1 + (x_3 - 1)t).$$

Si $t \in \mathbb{R}$ es tal que $\ell(t) \in \mathbb{C}$, entonces $t = \frac{1}{1-x_3}$. Con ello podemos definir π de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \pi &: \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C} \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}, 0 \right) = \frac{x_1}{1-x_3} + i \left(\frac{x_2}{1-x_3} \right). \end{aligned}$$

Ahora, sea $Q(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2$, si $z = \pi(x_1, x_2, x_3)$, entonces:

$$|z|^2 = \left| \frac{x_1 + ix_2}{1-x_3} \right|^2 = \left| \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_3)^2} \right| = \frac{1+x_3}{1-x_3} \Rightarrow x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \quad (1)$$

$$z + \bar{z} = \frac{2x_1}{1-x_3} \Rightarrow x_1 = \frac{z + \bar{z}}{2} \left(1 - \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) \Rightarrow x_1 = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1} \quad (2)$$

$$z - \bar{z} = \frac{2ix_2}{1-x_3} \Rightarrow x_2 = \frac{z - \bar{z}}{2i} \left(1 - \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) \Rightarrow x_2 = \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)}. \quad (3)$$

Por lo tanto, la inversa de π está dada por las Ecuaciones 1, 2 y 3:

$$\begin{aligned} \pi^{-1} &: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \\ z &\mapsto \left(\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right). \end{aligned}$$

Para generar la métrica en $\widehat{\mathbb{C}}$ observemos que la métrica $d := |\cdot|$ no puede ser inducida sobre $\widehat{\mathbb{C}}$: En particular se tendría que $d(n, \infty) \rightarrow 0 \Leftrightarrow n \rightarrow \infty$ pero $n = d(n, 0) \leq d(0, \infty) + d(\infty, n) \leq d(0, \infty) + M$ para toda $n \geq n_0$, de modo que el conjunto \mathbb{N} estaría acotado, que es una contradicción.

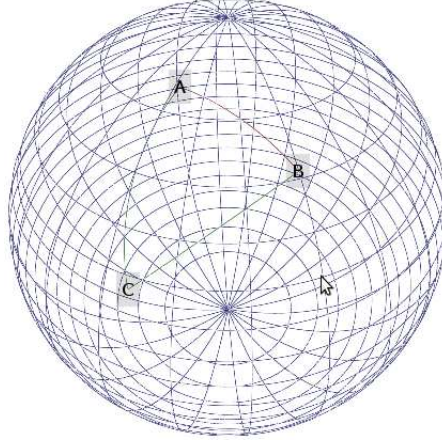


Figura 2.2: Métrica cordal χ

Ahora, para crear una métrica en la esfera tomaremos la distancia entre las proyecciones de $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ en la esfera en términos de z_1, z_2 . Denotando las proyecciones en la esfera por $\pi(z_1)^{-1} = (x_1, x_2, x_3)$ y $\pi(z_2)^{-1} = (y_1, y_2, y_3)$ se tiene:

$$\begin{aligned} d(z_1, z_2) &= |\pi^{-1}(z_1) - \pi^{-1}(z_2)| \\ &= [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2]^{1/2}. \end{aligned}$$

Ahora bien, se tiene por estar en \mathbb{S}^2 se cumple:

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 = 2 - 2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3).$$

Luego, por las funciones π y π^{-1} tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 &= \\ &= \frac{z_1 + \bar{z}_1}{|z_1|^2 + 1} \cdot \frac{z_2 + \bar{z}_2}{|z_2|^2 + 1} - \frac{z_1 - \bar{z}_1}{|z_1|^2 + 1} \cdot \frac{z_2 - \bar{z}_2}{|z_2|^2 + 1} + \frac{|z_1|^2 - 1}{|z_1|^2 + 1} \cdot \frac{|z_2|^2 - 1}{|z_2|^2 + 1} \\ &= \frac{2z_1\bar{z}_2 + 2\bar{z}_1z_2 + |z_1z_2|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2 + 1}{(|z_1|^2 + 1)(|z_2|^2 + 1)} \\ &= \frac{-2(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) + (|z_1|^2 + 1)(|z_2|^2 + 1)}{(|z_1|^2 + 1)(|z_2|^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Por consiguiente:

$$\begin{aligned}\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} &= \sqrt{2 - 2 \left(1 - \frac{2|z_1 - z_2|^2}{(|z_1|^2 + 1)(|z_2|^2 + 1)}\right)} \\ &= \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \sqrt{1 + |z_2|^2}}.\end{aligned}$$

En el caso que $z_2 = \infty$ obtenemos lo siguiente:

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = \frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2}.$$

En este caso se tendría que:

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} = \frac{2}{\sqrt{1 + |z_1|^2}}.$$

Por lo anterior, definimos:

$$\chi(z_1, z_2) \begin{cases} \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \sqrt{1 + |z_2|^2}}, & z_1, z_2 \in \mathbb{C} \\ \frac{2}{\sqrt{1 + |z_1|^2}}, & z_1 \in \mathbb{C}, z_2 = \infty \\ 0 & z_1 = z_2 = \infty \end{cases}$$

Donde χ satisface la siguiente proposición.

Proposición 2.3. Para cualesquiera $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$:

1. $\chi(z_1, z_2) \geq 0$;
2. $\chi(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$;
3. $\chi(z_1, z_2) = \chi(z_2, z_1)$;
4. $\chi(z_1, z_2) \leq \chi(z_1, z_3) + \chi(z_2, z_3)$.

Demostración. Las primeras tres afirmaciones se siguen de la definición. Ahora, para demostrar la cuarta afirmación, primero recordemos la *Igualdad de Shizuo-Kakutani*:

$$\text{Sean } a, b, c \in \widehat{\mathbb{C}}: (a - b)(1 + c\bar{c}) = (a - c)(1 + \bar{c}b) + (c - b)(1 + \bar{c}a).$$

Así

$$\begin{aligned}|(z_1 - z_2)(1 + z_3\bar{z}_3)| &= |(z_1 - z_3)(1 - \bar{z}_3 z_2) + (z_3 - z_2)(1 + \bar{z}_3 z_1)| \\ &\leq |z_1 - z_3||1 - \bar{z}_3 z_2| + |z_3 - z_2||1 + \bar{z}_3 z_1|.\end{aligned}$$

La última desigualdad se debe a que

$$|1 - \bar{z}_3 z_2|^2 = (1 + \bar{z}_3 z_2)(1 + \overline{\bar{z}_3 z_2}) \leq (1 + |\bar{z}_3|^2)(1 + |z_2|^2).$$

Por consiguiente:

$$\begin{aligned} |z_1 - z_3| |1 - \bar{z}_3 z_2| + |z_3 - z_2| |1 + \bar{z}_3 z_1| &\leq \\ |z_1 - z_3| \sqrt{1 + |\bar{z}_3|^2} \sqrt{1 + |z_2|^2} + |z_3 - z_2| \sqrt{1 + |\bar{z}_3|^2} \sqrt{1 + |z_1|^2}. \end{aligned}$$

Así

$$|(z_1 - z_2)| |1 + |\bar{z}_3|^2| \leq \sqrt{1 + |\bar{z}_3|^2} \left(|z_1 - z_3| \sqrt{1 + |z_2|^2} + |z_3 - z_2| \sqrt{1 + |z_1|^2} \right).$$

O bien

$$|(z_1 - z_2)| \sqrt{1 + |\bar{z}_3|^2} \leq \sqrt{1 + |\bar{z}_3|^2} \left(|z_1 - z_3| \sqrt{1 + |z_2|^2} + |z_3 - z_2| \sqrt{1 + |z_1|^2} \right).$$

Como consecuencia tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{|z_1 - z_2| \sqrt{1 + |\bar{z}_3|^2}}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \sqrt{1 + |z_2|^2}} &\leq \frac{|z_1 - z_3|}{\sqrt{1 + |z_1|^2}} + \frac{|z_2 - z_3|}{\sqrt{1 + |z_2|^2}}. \\ \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \sqrt{1 + |z_2|^2}} &\leq \frac{|z_1 - z_3|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \sqrt{1 + |\bar{z}_3|^2}} + \frac{|z_2 - z_3|}{\sqrt{1 + |z_2|^2} \sqrt{1 + |\bar{z}_3|^2}}. \\ \chi(z_1, z_2) &\leq \chi(z_1, z_3) + \chi(z_2, z_3). \end{aligned}$$

Se hace de forma similar cuando uno de los puntos es infinito. ■

Retomando el hecho que $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ es un espacio métrico completo y localmente compacto, véanse las Proposiciones 2.1 y 2.2 respectivamente, y el hecho que todo espacio métrico es Hausdorff, citemos el siguiente teorema que nos da una topología para $(\widehat{\mathbb{C}}, \chi)$, cuya demostración puede consultarse en [Munkres, 2000].

Teorema 2.1 (Teorema de Alexandrov). *Sea (X, τ_1) un espacio topológico, véase Apéndice A, localmente compacto y de Hausdorff. Sea ∞ un objeto matemático tal que $\infty \notin X$. Definimos $X_\infty = X \cup \{\infty\}$ y $\tau_2 = \{\tau_1\} \cup \{A \subset X_\infty : X \setminus A \text{ es compacto}\}$. Entonces,*

1. (X_∞, τ_2) es un espacio topológico compacto y de Hausdorff.
2. La topología inducida en X por X_∞ es τ_1 .

Es importante observar que pese a todo, en $\widehat{\mathbb{C}}$ ya no se podrá operar como en \mathbb{C} , el objeto ∞ sólo se ha incorporado con fines topológicos, no operacionales.

2.3. Funciones analíticas

En esta sección sólo escribiremos algunas definiciones y resultados que son importantes para este trabajo de tesis, a sabiendas que el estudio de funciones analíticas comprende una abundante área de ideas, definiciones, demostraciones que dan soporte y forma a la teoría de la variable compleja.

Definición 2.6. Sea $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función compleja definida sobre A , se le asocian a f las siguientes funciones:

1. $\bar{f}(z) = \overline{f(z)}$;
2. $Re(f) = \frac{f+\bar{f}}{2}$;
3. $Im(f) = \frac{f-\bar{f}}{2i}$.

Observación 2.4. Cada función compleja f sobre un conjunto A está relacionada con dos funciones reales $u(x, y) = Re(f)$ parte real de f y la función $v(x, y) = Im(f)$ parte imaginaria de f , definidas para toda $z = x + iy \in A$, así podemos ver a f como:

$$\begin{aligned} f(z) &= Re(f) + i Im(f) \\ &= u(x, y) + i v(x, y). \end{aligned}$$

Recordamos que un función compleja definida sobre $A \subseteq \mathbb{C}$ tiene *límite* $\alpha \in \mathbb{C}$ cuando z tiende a z_0 , si z_0 es un punto de acumulación de A y dado $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $|f(z) - \alpha| < \epsilon$ si $z \in (D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}) \cap A$ y se escribe $\alpha = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$. En particular si $z_0 \in A$ y $f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ decimos que la función es *continua* en z_0 . Un concepto más general que continuidad que emplearemos más adelante es el de *continuidad uniforme* esto es, una función compleja f definida sobre A es uniformemente continua si dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $z, w \in A$ con $|z - w| < \delta$, entonces $|f(z) - f(w)| < \epsilon$.

Observemos la sutil diferencia entre continuidad y continuidad uniforme: permitimos en continuidad que δ dependa de z y de ϵ , mientras que en continuidad uniforme sólo puede depender de ϵ . Por supuesto, si f es uniformemente continua, podemos asegurar que f es continua, pero vemos enseguida que el recíproco no es cierto, con el siguiente contraejemplo. Sea

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto x^2, \end{aligned}$$

si $\epsilon = 1$, existirá $\delta > 0$ verificando que $z, w \in \mathbb{C}$, $|z - w| < \delta \Rightarrow |z^2 - w^2| < 1$, pero esto no es posible, porque fijando $n \in \mathbb{N}$ con $\frac{1}{n} < \delta$ y tomando $z = n$, $w = n + \frac{1}{n}$, se obtiene $2 + (\frac{1}{n})^2 = |w^2 - z^2| < 1$, que es una contradicción.

Con estos conceptos, enunciamos el siguiente lema.

Lema 2.1. [Noguchi, 1998] *Una función continua compleja f sobre un subconjunto compacto A es uniformemente continua.*

Definición 2.7. Una función de variable compleja $f : a \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se dice compleja diferenciable en el punto $z_0 \in A$, si el límite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

existe y es finito. Llamaremos a $f'(z_0)$ la derivada compleja de f en z_0 y la denotamos por $f'(z_0) = \frac{d}{dz} f(z_0)$.

Definición 2.8. Si $A \subset \mathbb{C}$ es un subconjunto abierto, decimos que f es holomorfa en A , si es diferenciable para todo $z \in A$. En este caso, la función

$$\begin{aligned} f' : A &\rightarrow f'(A) \\ a &\mapsto f'(a) \end{aligned}$$

es llamada la función derivada o la derivada de f , que denotaremos por $\frac{df}{dz}$.

Un concepto equivalente a una función holomorfa es el siguiente.

Definición 2.9. Sea f una función sobre un conjunto abierto $A \subseteq \mathbb{C}$. Decimos que f es analítica si para cualquier $z_0 \in A$ existe $r > 0$ tal que $D(z_0; r) \subseteq A$ y la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ es convergente en $D(z_0; r)$ y cumple que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad z \in D(z_0; r).$$

La equivalencia que mencionamos antes de la Definición 2.9 la otorga el siguiente teorema.

Teorema 2.2. [Noguchi, 1998] *Una función es analítica en un dominio D si, y sólo si f es holomorfa en D .*

La necesidad del teorema se obtiene que si f se expande en serie de potencias con radio de convergencia r , entonces f es diferenciable en $D(z, r)$ y admite la forma

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1},$$

donde el radio de convergencia lo obtenemos por el criterio de la raíz. La suficiencia la obtenemos por la fórmula integradora de Cauchy y demás elementos de la teoría de

integración de funciones complejas.

Se sigue que una función $f(z)$ expresada por una serie de potencias convergente alrededor de a es compleja diferenciable n -veces y los coeficientes a_n están determinados por las n -ésimas derivadas $f^{(n)}(a)$ de $f(z)$, donde

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$$

hecho que nos dice que los coeficientes de la serie de potencias están determinados de manera única.

Algunos resultados que obtenemos de la diferenciability de funciones se encuentran en la siguiente proposición.

Proposición 2.4. [Conway, 1978] *Dadas $f, g : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ funciones holomorfas*

1. $f + g, fg, f \circ g$ son funciones holomorfas.
2. Si f es una función holomorfa, es continua.

Ahora, un resultado que nos ayuda a caracterizar las funciones diferenciables complejas está dado del hecho que el límite que define a una función diferenciable debe ser el mismo indistintamente de cómo hacemos tender a h hacia 0. Por lo que, cuando $h \rightarrow 0$ con h real y con h imaginario puro obtenemos, respectivamente:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \\ &= -i \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial v(x,y)}{y} - i \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}. \end{aligned}$$

Se sigue entonces que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

las llamadas *Ecuaciones de Cauchy-Riemann*.

Por lo tanto, si pensamos a $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ como $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y)$ y de resultados de análisis de varias variables, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.5. [Conway, 1978] *Una condición necesaria para que f sea analítica en un abierto $A \subset \mathbb{C}$ es que se satisfagan las ecuaciones de Cauchy-Riemann y si las derivadas parciales anteriores son continuas en $A \subset \mathbb{C}$, entonces las ecuaciones de Cauchy-Riemann son condiciones suficientes para que f sea analítica en A .*

Una forma equivalente de establecer las ecuaciones de Cauchy-Riemann es definiendo los operadores $\partial_z = \frac{\partial}{\partial z}$ y $\bar{\partial}_z = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ como:

$$\partial_z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \bar{\partial}_z f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

y que se cumpla que $\overline{\partial}_z f = 0$.

Para finalizar el apartado de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, notemos lo siguiente:

1. Podemos escribir $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$,
2. Si f es una función holomorfa sobre un dominio D y satisface que $f' \equiv 0$, entonces f es constante. Más aún, si $Re(f)$ ó $Im(f)$ son constantes, también lo es f .

Estas afirmaciones se siguen sólo de la definición de las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

2.3.1. Funciones conformes

La regla de la cadena junto con las condiciones de Cauchy-Riemann proporcionan una interesante interpretación geométrica de la derivada.

Proposición 2.6. *Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es una curva continua diferenciable, A un abierto en \mathbb{C} que contiene a $\gamma([a, b])$ y $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces $f \circ \gamma$ es una curva diferenciable y*

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = f' \circ \gamma(t) \cdot \gamma'(t), \quad \forall t \in [a, b].$$

Demostración. Sean $t, t' \in [a, b]$ con $t \neq t'$

$$\frac{f \circ \gamma(t') - f \circ \gamma(t)}{t' - t} = f' \circ \gamma(t) \cdot \frac{\gamma(t') - \gamma(t)}{t' - t} + o\left(\frac{\gamma(t') - \gamma(t)}{t' - t}\right).$$

Dado que $\lim_{t \rightarrow t'} \frac{\gamma(t') - \gamma(t)}{t' - t} = \gamma'(t)$ se concluye el resultado. ■

Esta proposición comprende la geometría local de las funciones analíticas. Para entender esto, consideremos una curva diferenciable γ en un dominio A en \mathbb{C} .

Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ y $f : A \rightarrow \mathbb{C}$. Denotamos la curva $f \circ \gamma$ por c , de tal manera

$$c'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t).$$

Supongamos que $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$ y $f'(\gamma(t)) \neq 0$. Bajo estas suposiciones se tiene que:

1. $c'(t) \neq 0$.
2. La dirección de la tangente a la curva c en $c(t)$ está determinada por $\arg c'(t) = \arg f'(\gamma(t)) + \arg \gamma'(t), \pmod{2\pi}$.

Esto nos dice que el ángulo que forman las tangentes a c en $c(t)$ y a γ en $\gamma(t)$ es $\arg f'(\gamma(t))$, es decir, no depende de la curva γ , sólo depende del punto $z = \gamma(t)$ y de la función f . Estas hipótesis también implican que curvas que tienen la misma tangente en $z = \gamma(t)$ se transforman bajo f en curvas que tienen la misma tangente en $f(z)$ y que curvas cuyas tangentes forman un ángulo θ en z se transforman en curvas cuyas tangentes forman un ángulo θ en $f(z)$.

A la propiedad de conservar ángulos le llamamos conforme.

Definición 2.10. Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ dominio y $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ analítica. Decimos que f es conforme en $\alpha \in A$ si $f'(\alpha) \neq 0$.

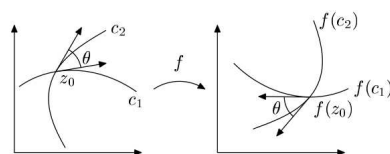


Figura 2.3: Las aplicaciones conformes preservan ángulos entre curvas

En el límite que define una función diferenciable y tomando módulo, tenemos que la razón de contracción o dilatación de cualquier segmento (que comience en z_0) bajo f , es, en el límite, constante y no depende de la dirección en que se aproxime al límite. En particular si c , γ y f son como antes, se tiene:

$$|c'(t)| = |f'(\gamma(t))| |\gamma(t)|,$$

esto es, los vectores tangentes a curvas en z_0 se dilatan o se contraen por el factor $|f'(z_0)|$.

Por lo tanto, una transformación conforme, infinitesimalmente cerca de z , es aproximadamente una rotación por un ángulo $\arg f'(z)$ seguida de una homotecia por un factor $|f'(z)|$.

2.4. Singularidades de una función de variable compleja

Recordemos que un punto z_0 donde la función $f(z_0)$ no es analítica se denomina punto singular. Estos puntos pueden ser:

- (a) *Singularidades aisladas.* Si una función $f(z)$ es analítica en todo entorno de un punto z_0 , salvo en el propio z_0 , entonces decimos que el punto z_0 es una singularidad aislada de la función $f(z)$.

- (b) *Singularidades no aisladas.* Si una función $f(z)$ contiene un conjunto de singularidades aisladas en cada vecindad de un punto z_0 , entonces decimos que z_0 es una singularidad no aislada. Es decir, una singularidad no aislada de una función es un punto límite del conjunto de sus singularidades aisladas.

2.4.1. Clasificación de las singularidades aisladas

A partir del concepto de singularidad aislada, presentamos la siguiente clasificación:

- (1) Un punto singular aislado z_0 le decimos punto singular *evitable* de la función $f(z)$ si existe el límite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z).$$

- (2) Un punto singular aislado z_0 le llamamos *polo* si

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$$

y establecemos que $f(a) = \infty$.

- 3) Un punto singular aislado z_0 le decimos *singularidad esencial* si no es polo ni singularidad aislada.

La singularidad aislada evitable está motivada por el teorema sobre la extensión analítica de f en una región Ω , teorema que puede ser consultado en [Ahlfors, 1984]. En algunos libros a los puntos z_0 removibles se les dice puntos regulares.

En el caso de los polos, existe $\delta' \leq \delta$ tal que $f(z) \neq 0$ para $|z - a| < \delta'$, en esta región la función $g(z) = 1/f(z)$ está definida y es analítica, pero la singularidad de $g(z)$ en a es removible y $g(z)$ tiene una extensión analítica con $g(a) = 0$. Dado que $g(z)$ no es cero idénticamente, el cero en a tiene un orden finito y podemos escribir $g(z) = (z - a)^h g_h(z)$ con $g_h(a) \neq 0$. El número h es el orden del polo y $f(z)$ tiene la representación

$$f(z) = (z - a)^{-h} f_h(z),$$

donde $f_h(z) = 1/g_h(z)$.

Definición 2.11. Una función $f(z)$ que es analítica en una región Ω excepto por los polos decimos que es una función *meromorfa* en Ω .

El cociente $f(z)/g(z)$ de dos funciones analíticas en Ω es una función meromorfa en Ω siempre que $g(z)$ no sea idénticamente cero. Los únicos posibles polos son los ceros de $g(z)$ porque los ceros en común de $f(z)$ y $g(z)$ llegan a ser singularidades removibles, en este caso el valor del cociente llegaría a ser determinado por continuidad analítica.

Más generalmente:

Proposición 2.7. [Ahlfors, 1984] *La suma, el producto y el cociente de dos funciones meromorfas es una función meromorfa.*

El caso de que la función del denominador idénticamente cero debemos excluirlo, al menos que deseemos considerar la constante ∞ como una función meromorfa.

Supongamos que $f(z)$ no es idénticamente cero. Entonces, si $f(a) = 0$ existe una primera derivada $f^{(n)}(a)$ que es distinta de cero, así decimos que a es un cero de orden n . Como una función analítica tiene el mismo comportamiento local que un polinomio, sólo que en el caso de los polinomios podemos escribir $f(z) = (z-a)^n f_n(z)$ donde $f_n(z)$ es analítica y $f_n(a) \neq 0$ y como $f_n(z)$ es continua, $f_n(z) \neq 0$ en una vecindad de a y $z = a$ es el único cero de $f(z)$ en esta vecindad, de aquí tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.8. [Ahlfors, 1984] *Los ceros de una función analítica son puntos aislados.*

Esta proposición implica lo siguiente:

1. Si $f(z)$ y $g(z)$ son analíticas en un dominio Ω y $f(z) = g(z)$ en un conjunto que tiene un punto de acumulación de Ω , entonces $f(z)$ es idénticamente igual a $g(z)$ y la conclusión se sigue de la consideración de la función diferencia $h(z) = f(z) - g(z)$.
2. Dado el comentario de la función analítica con la presencia de polos se sigue que los polos tampoco se acumulan.

Los polinomios y las funciones racionales son funciones meromorfas. Las siguientes funciones serán de utilidad más adelante en esta tesis.

Definición 2.12. Las funciones trascendentes enteras, son funciones analíticas en el plano complejo que no son polinomios. Es decir, los coeficientes de su serie de Taylor que son distintos de cero son una cantidad infinita.

Las funciones trascendentes meromorfas son aquellas funciones meromorfas que no son racionales. Las funciones trascendentes se caracterizan por tener singularidad esencial en ∞ .

2.4.2. Valores singulares de funciones analíticas

Para definir los valores singulares de f necesitamos los conceptos de valores críticos y valores asintóticos que presentamos a continuación.

Definición 2.13. Sea f una función analítica sobre A un subconjunto abierto del plano. Decimos que w es un *valor crítico*, si $w = f(z)$ con $f'(z) = 0$ y al punto z le llamamos *punto crítico*.

Definición 2.14. Un punto $w \in \mathbb{C}$ es llamado un *valor asintótico* si existe una curva $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\gamma(t) \rightarrow \infty$ y $f(\gamma(t)) \rightarrow w$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para ilustrar los conceptos anteriores, consideremos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.1. Si $g(z) = \cos(z)$, entonces $g'(z) = -\sin(z)$. Como a partir de la derivada calculamos los puntos críticos, obtenemos que los puntos críticos de g son de la forma $k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Luego, los valores críticos de la función g son los puntos $g(k\pi)$, resultando el conjunto $\{1, -1\}$.

Ejemplo 2.2. Sea $\exp(z) = e^z$ y la curva $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = -t$. Así, cuando $t \rightarrow \infty$, $f(\gamma(t)) = e^{-t} \rightarrow 0$, por lo tanto 0 es un valor asintótico de la función exponencial.

Con los anteriores conceptos definimos el siguiente conjunto.

Definición 2.15. El *conjunto de valores singulares* de una función f es la clausura del conjunto de valores asintóticos y valores críticos y lo denotamos por:

$$SV(f) = \overline{\{\text{Valores Asintóticos y Valores Críticos}\}}.$$

A continuación definiremos el concepto de valor omitido.

Definición 2.16. Un punto $w \in \mathbb{C}$ es un *valor omitido* por una función f , si $f(z) \neq w$ para $z \in \mathbb{C}$. Un punto $w \in \mathbb{C}$ es un *valor localmente omitido* por f , si existe $r > 0$ y una componente G del conjunto $f^{-1}(B(w, r))$ tal que $f(z) \neq w$ en G .

Recordemos la clasificación de singularidades de Iversen, véase [Iversen, 1914]. Sea f una función trascendente meromorfa y $a \in \mathbb{C}$. Considere los discos abiertos $B(a, r)$ de radio r , centrados en a . Para cada $r > 0$, es posible elegir una componente U_r de la preimagen $f^{-1}(B(a, r))$ tal que $r_1 < r_2$ implique que $U_{r_1} \subset U_{r_2}$.

Puede suceder lo siguiente:

1. $\bigcap_{r>0} U_r$ consiste de un punto, o
2. $\bigcap_{r>0} U_r = \emptyset$.

En este último caso, decimos que nuestra elección $r \mapsto U_r$ define una singularidad trascendente de f^{-1} sobre a . También decimos que a es la proyección de la singularidad trascendente, o que la singularidad trascendente cae sobre a , y los conjuntos U_r son llamados vecindades de la singularidad trascendente. Las proyecciones de singularidades trascendentes coinciden con los valores asintóticos de f . Una singularidad trascendente sobre a es llamada *directa* si para algún $r > 0$ tenemos que $f(z) \neq a$ para $z \in U_r$. En otro caso, es llamada *indirecta*. Una singularidad directa es llamada logarítmica si

la restricción $f : U_r \rightarrow B(a, r) \setminus \{a\}$ es un cubriente universal para algún $r > 0$. Estas definiciones también se pueden dar para $a = \infty$ usando $B(\infty, r) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > \frac{1}{r}\}$.

De estas definiciones es claro que, los valores localmente omitidos son exactamente las proyecciones de singularidades directas.

Por ejemplo, e^z tiene una singularidad logarítmica sobre 0, y $\frac{\sin z}{z}$ tiene dos singularidades indirectas sobre 0.

2.5. Familias normales y teoremas de Picard

En esta sección estudiaremos algunos resultados relacionados con Familias Normales, iniciando con la definición de convergencia normal en una sucesión de funciones para después revisar algunos resultados importantes que serán de ayuda para el tema principal de esta tesis.

Sean $A, B \subset \mathbb{C}$ y definimos

$$\mathbb{F} = \{f \mid f : A \rightarrow B\},$$

a $\mathcal{F} \subset \mathbb{F}$ le llamamos una familia de funciones de \mathbb{F} .

Diremos que \mathbb{F} está acotada puntualmente en $D \subset \mathbb{C}$ si para cada z fijo en D , el conjunto de valores

$$\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$$

es un conjunto acotado de números complejos.

La familia \mathcal{F} es localmente acotada en $D \subset \mathbb{C}$ si cada $f \in \mathcal{F}$ es uniformemente acotada en cada conjunto compacto de D , es decir, existe para cada subconjunto compacto K de D una constante $m = m(K)$ con la propiedad $|f(z)| \leq m$ para cada punto $z \in K$ y cada función $f \in \mathcal{F}$.

Definición 2.17. Una familia \mathcal{F} de funciones complejas se dice normal en $D \subset \mathbb{C}$ si cada sucesión (f_n) de funciones $f_n \in \mathcal{F}$ contiene o una subsucesión (f_{n_k}) tal que (f_{n_k}) converge uniformemente, o bien una subsucesión (f_{n_k}) que converge uniformemente a ∞ en cada subconjunto compacto de D .

Observación 2.5. Si \mathcal{F} es una familia de funciones analíticas, entonces la función límite f , de (f_{n_k}) es una función analítica o idénticamente ∞ .

Observación 2.6. La definición anterior no requiere que las funciones límite de las subsucesiones convergentes pertenezcan a la familia \mathcal{F} . Por ejemplo, \mathcal{F} puede estar formada por todas las iteradas de $f(z) = z^2$, definidas sobre un abierto D contenido en S^1 ; para este caso la función límite es la función constante cero; no pertenece a \mathcal{F} y sin embargo es normal.

Lema 2.2. *Supongamos que D es un conjunto abierto en el plano complejo y K un subconjunto compacto de D . Entonces existe un $r > 0$ tal que para cada $z \in K$, el disco $\Delta(z, r)$ está contenido en D .*

Demostración. (Por contradicción). Sea $r > 0$ fijo. Si $D = \mathbb{C}$, el lema se cumple para cualquier $r > 0$ que tomemos. Supongamos que $D \neq \mathbb{C}$. Además, para cada $r > 0$, existe $z \in K$ tal que $\Delta(z, r) \subset D$.

Si $r = 1$, existe $z_1 \in K$, $\Delta(z_1, 1) \not\subset D$, entonces $w_1 \in \Delta(z_1, 1)$ tal que $w_1 \notin D$.

Si $r = \frac{1}{2}$, existe $z_2 \in K$, $\Delta(z_2, \frac{1}{2}) \not\subset D$, entonces $w_2 \in \Delta(z_2, \frac{1}{2})$ tal que $w_2 \notin D$.

Si $r = \frac{1}{3}$, existe $z_3 \in K$, $\Delta(z_3, \frac{1}{3}) \not\subset D$, entonces $w_3 \in \Delta(z_3, \frac{1}{3})$ tal que $w_3 \notin D$.

\vdots

Si $r = \frac{1}{n}$, existe $z_n \in K$, $\Delta(z_n, \frac{1}{n}) \not\subset D$, entonces $w_n \in \Delta(z_n, \frac{1}{n})$ tal que $w_n \notin D$.

Observemos que $w_n \in \mathbb{C} \setminus D$, $|z_n - w_n| < \frac{1}{n}$. Dado que K es compacto, la sucesión (z_n) tiene un punto de acumulación en K . Sea z_0 tal punto, y sea (z_{n_k}) una subsucesión de (z_n) con la propiedad $\lim_{k \rightarrow \infty} z_{n_k} = z_0$. Entonces

$$|w_{n_k} - z_0| \leq |w_{n_k} - z_{n_k}| + |z_{n_k} - z_0| \leq \frac{1}{n_k} + |z_{n_k} - z_0| \rightarrow 0$$

cuando $k \rightarrow \infty$, así $\lim_{k \rightarrow \infty} w_{n_k} = z_0$. Esto lleva a que z_0 sea un punto de acumulación de (w_n) . Como (w_n) es una sucesión en $\mathbb{C} \setminus D$ y $\mathbb{C} \setminus D$ es un conjunto cerrado, entonces $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$. Por lo tanto, $z_0 \in K \cap (\mathbb{C} \setminus D)$, lo cual es imposible ya que K es un subconjunto de $D = \mathbb{C} \setminus (\mathbb{C} \setminus D)$. ■

El siguiente lema será de gran ayuda para la comprensión de la convergencia normal de una sucesión de funciones.

Lema 2.3. *Sea (f_n) una sucesión de funciones definidas en un conjunto abierto D del plano complejo. La sucesión converge normalmente en D si, y sólo si converge uniformemente sobre cada disco cerrado contenido en D .*

Demostración. (\implies) se cumple por definición de la convergencia normal.

(\impliedby) Supongamos que (f_n) converge uniformemente sobre cada disco cerrado de D . Denotamos por f a la función límite. Sea $K \subseteq D$, compacto y no vacío. Demostraremos que $f_n \rightarrow f$ uniformemente sobre K . Sea $r > 0$ fijo tal que para cada $z \in K$ el disco $\bar{\Delta}(z, r)$ está contenido en D , y considerando el lema anterior escogemos un punto $z_1 \in K$, o K está contenido en $\Delta_1 = \bar{\Delta}(z_1, r)$, o podemos elegir un z_2 de $K \setminus \Delta_1$. Si sucede este último caso, sea $\Delta_2 = \bar{\Delta}(z_2, r)$, entonces, o $K \subset \Delta_1 \cup \Delta_2$, o podemos elegir un punto z_3 de $K \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2)$, y así sucesivamente. Después de un número finito de

pasos, digamos p pasos llegamos a una colección $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_p$ de discos cerrados en D , cuya unión cubre a K . Dado que $f_n \rightarrow f$ uniformemente en cada uno de los discos $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_p$, la convergencia uniforme se da también en $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \dots \cup \Delta_p$, y por lo tanto en K . Se sigue que $f_n \rightarrow f$ normalmente en D . ■

Definición 2.18. Sea $D \subset \mathbb{C}$. Las funciones analíticas de una familia \mathcal{F} se dicen equicontinuas en un conjunto $D' \subset D$ si, y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para toda $f \in \mathcal{F}$:

$$z, w \in D, |z - w| < \delta \longrightarrow |f(z) - f(w)| < \varepsilon.$$

Observación 2.7. En este caso, cada $f \in \mathcal{F}$ es uniformemente continua.

A continuación, enunciamos dos teoremas donde el primero presenta una demostración análoga al Lema 2.1, y el segundo nos ofrece la condición de normalidad para una sucesión (f_n) en un conjunto abierto $D \subset \mathbb{C}$:

Teorema 2.3. [Noguchi, 1998] *Si una sucesión (f_n) de funciones complejas en $D \subset \mathbb{C}$ es uniformemente acotada y equicontinua sobre subconjuntos compactos de D , entonces contiene una subsucesión que converge uniformemente en subconjuntos compactos de D .*

Teorema 2.4. [Palka, 2012] *Supongamos que cada función de la sucesión (f_n) es analítica en un conjunto abierto $D \subset \mathbb{C}$ y (f_n) converge normalmente en D a la función límite f . Entonces f es analítica en D . Por otra parte, $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$ normalmente en D para cada entero positivo k .*

En seguida, enunciaremos un teorema bastante útil, que establece la relación entre la definición de equicontinuidad y normalidad de una familia de funciones complejas.

Teorema 2.5. [Ahlfors, 1984] *Una familia \mathcal{F} de funciones continuas definidas en una región D del plano complejo es normal si, y sólo si*

1. \mathcal{F} es equicontinua en cada subconjunto compacto $E \subset D$; y
2. para cada $z \in D$, $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ se encuentra en un subconjunto compacto del plano.

Demostración. Probaremos la necesidad de 1. Si \mathcal{F} es equicontinua en E , entonces existe un $\varepsilon > 0$ sucesiones de puntos $z_n, z'_n \in E$ y funciones $f_n \in \mathcal{F}$ tal que $|z_n - z'_n| \rightarrow 0$ si $|f_n(z_n) - f_n(z'_n)| \geq \varepsilon$ para toda n . Dado que E es compacto, podemos elegir subsucesiones de (z_n) y (z'_n) que converjan a un límite en común $z'' \in E$, y dado que \mathcal{F} es normal, existe una subsucesión de (f_n) que converge uniformemente en E . Observemos que podemos elegir a las tres subsucesiones de tal forma que todas tengan los mismos

subíndices n_k . La función límite f de (f_{n_k}) es uniformemente continua en E . Por lo tanto podemos encontrar un k tal que las distancias de $f_{n_k}(z_{n_k})$ a $f(z_{n_k})$, de $f(z_{n_k})$ a $f(z'_{n_k})$ y de $f(z'_{n_k})$ a $f_{n_k}(z'_{n_k})$ sean todas $< \varepsilon/3$. Se sigue que $|f_{n_k}(z_{n_k}) - f_{n_k}(z'_{n_k})| < \varepsilon$, contrariamente a la suposición de que $|f_{n_k}(z_{n_k}) - f_{n_k}(z'_{n_k})| \geq \varepsilon$ para toda n . Para la necesidad 2. Mostramos que la clausura del conjunto formado por todos los valores $f(z), f \in \mathcal{F}$, es compacto. Sea (w_n) una sucesión en dicha clausura. Para cada w_n fijamos $f_n \in \mathcal{F}$ tal que $|f_n(z) - w_n| < 1/n$. Por la normalidad existe una subsucesión convergente $(f_{n_k}(z))$, y la sucesión (w_{n_k}) converge al mismo valor.

Para demostrar la suficiencia de 1 y 2 usaremos el proceso de la diagonal de Cantor. Primero observemos que por todas partes de D existe una sucesión densa de puntos ζ_k . De la sucesión (f_n) escogeremos una subsucesión tal que converja en todos los puntos ζ_k . Encontrar una subsucesión que converja a un punto dado es siempre posible por la condición 2. Por tanto podemos encontrar un colección de subíndices tal que

$$\begin{array}{ccccccc} n_{11} < n_{12} < & \dots & < n_{1i} < \dots & & & & \\ n_{21} < n_{22} < & \dots & < n_{2i} < \dots & & & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ n_{k1} < n_{k2} < & \dots & < n_{ki} < \dots & & & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{array}$$

- (a) cada fila esta contenida en la anterior, y
- (b) $\lim_{i \rightarrow \infty} f_{n_{ki}}(\zeta_k)$ existe para toda k .

Por lo tanto (n_{ii}) es una sucesión de (f_n) que converge por (b) a todos los puntos ζ_k . Por conveniencia, escribiremos f_{n_i} en lugar de $f_{n_{ii}}$. Ahora, sea K un subconjunto compacto de D , entonces por 1 tenemos que \mathcal{F} es equicontinua en K . Dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para $z_1, z_2 \in K$ y $f \in \mathcal{F}$ sucede $|z_1 - z_2| < \delta$, entonces $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$. Dado que K es compacto, la cubierta de las vecindades de radio $\delta/2$ tiene una subcubierta finita; tomemos un punto ζ_k de cada una. Para toda h y j suficientemente grandes, diremos que $h, j > i_0$, $|f_{n_h}(\zeta_k) - f_{n_j}(\zeta_k)| < \varepsilon$ para todos los ζ_k (esto porque $f_{n_i}(\zeta_k)$ converge cuando $i \rightarrow \infty$).

Como hemos tomado una $\delta/2$ subcubierta, para cada $z \in K$, existe un ζ_k tal que $|\zeta_k - z| < \delta$, y así $|f_{n_j}(\zeta_k) - f_{n_j}(z)| > \varepsilon$, $|f_{n_h}(z) - f_{n_h}(\zeta_k)| < \varepsilon$ por la equicontinuidad.

Así

$$3\varepsilon > |f_{n_h}(z) - f_{n_h}(\zeta_k)| + |f_{n_h}(\zeta_k) - f_{n_j}(\zeta_k)| + |f_{n_j}(\zeta_k) - f_{n_j}(z)| \geq |f_{n_h}(z) - f_{n_j}(z)|.$$

Por lo tanto, dado que ε es un número positivo arbitrario, (f_{n_i}) es uniformemente convergente en K . ■

Para familias de funciones analíticas, podemos aplicar la siguiente consecuencia del teorema de Arzelà-Ascoli, cuya demostración puede ser consultada en [Ahlfors, 1984]:

Teorema 2.6. *Una familia \mathcal{F} de funciones analíticas en una región $D \subset \mathbb{C}$ es normal si las funciones en \mathcal{F} son uniformemente acotadas en cada subconjunto compacto de D .*

Con todos los elementos anteriores, podemos también considerar la normalidad en el caso de la sucesión de derivadas $(f_n^{(k)})$ de una sucesión de funciones analíticas (f_n) :

Teorema 2.7. (Weierstrass) [Shiff, 1993] *Sea (f_n) una sucesión de funciones analíticas en un dominio $D \subset \mathbb{C}$ que converge uniformemente en subconjuntos compactos de D a una función f . Entonces f es analítica sobre D y la sucesión de derivadas $(f_n^{(k)})$ converge uniformemente en subconjuntos compactos a $f_n^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $z_0 \in D$, consideremos $D(z_0, r) \subset \mathbb{D}$ y $C_r := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$. Dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$, $|f_n(\zeta) - f(\zeta)| < \epsilon$ para toda $\zeta \in C_r$.

Por la fórmula integradora de Cauchy, podemos definir

$$F_k(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}}, k \in \mathbb{N}$$

para cada $z \in D(z_0, r/2)$.

Sea $n \geq N$, entonces

$$|F_k(z) - f_n(z)| = \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}} - \int_{C_r} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} \right| \leq \frac{k!}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{|f(\zeta) - f_n(\zeta)| |d\zeta|}{|\zeta - z|^{k+1}}$$

esto es, $f_n^{(k)} \rightarrow F_k(z)$ uniformemente en $D(z_0, \frac{r}{2})$, $k \in \mathbb{N}$. Para $k = 0$ $f_n(z) \rightarrow f(z)$ y $f_n(z) \rightarrow F_0(z)$, que implica $f(z) \equiv F(z)$, es decir, es una función analítica en $D(z_0, \frac{r}{2})$. Como z_0 es un punto arbitrario del dominio D , se tiene entonces que $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$ uniformemente sobre $D(z_0, \frac{r}{2})$ y por compacidad se concluye el resultado. ■

Como se mencionó en la introducción de este trabajo de tesis, Montel estableció las condiciones para que una familia de funciones analíticas tenga la propiedad de ser normal:

Teorema 2.8. (Montel) [Palka, 2012] *Sea \mathcal{F} una familia de funciones analíticas en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{C}$. Supongamos que \mathcal{F} es localmente acotada en U . Entonces \mathcal{F} es una familia normal en U .*

Demostración. Por ser localmente acotada \mathcal{F} en U , entonces \mathcal{F} es puntualmente acotada, por lo tanto por el Teorema de Arzelà-Ascoli, bastará demostrar que la familia \mathcal{F} es equicontinua en U . Sea $z_0 \in U$ y $r > 0$ tal que el disco cerrado $\overline{D}(z_0, \frac{r}{2})$ está contenido en U . Además existe una constante $\nu = \nu(K) > 0$ tal que $|f(\zeta)| \leq \nu$ para $f \in \mathcal{F}$ y $\zeta \in K$. Para $z \in D(z_0, r)$ y $f \in \mathcal{F}$ tenemos por la fórmula integradora de Cauchy:

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0|=2r} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0|=2r} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)} \right| \\ &= \frac{|z - z_0|}{|2\pi|} \left| \int_{|\zeta - z_0|=2r} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} \right| \\ &\leq \frac{|z - z_0|}{|2\pi|} \int_{|\zeta - z_0|=2r} \frac{|f(\zeta)||d\zeta|}{|\zeta - z||\zeta - z_0|} \\ &\leq \frac{\nu|z - z_0|}{r}. \end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$, consideremos $\delta = \min\{r, \frac{r\epsilon}{\nu}\}$. Por el argumento anterior, $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ para cada $f \in \mathcal{F}$ y cada z que satisfaga $|z - z_0| < \delta$. Por lo tanto, \mathcal{F} es equicontinua en un punto arbitrario z_0 , concluyéndose así, que \mathcal{F} es normal en U . ■

No es difícil demostrar que \mathcal{F} es normal en un dominio D si, y sólo si \mathcal{F} es normal en cada punto de D . Como la función límite de la subsucesión convergente no es necesariamente una función f perteneciente a la familia \mathcal{F} dada, ∞ es una posible función límite. Así, por el Teorema de Weierstrass, las funciones límite son funciones meromorfas y éstas pueden ser holomorfas si todas las funciones en \mathcal{F} lo son, al menos que la función límite sea ∞ .

Observemos que si una sucesión de funciones converge con respecto a la métrica euclídeana, entonces ésta también converge con respecto a la métrica cordal χ . Escribiremos $(f_n) \rightarrow f$ si (f_n) converge a f (con respecto a la métrica cordal), cuando $n \rightarrow \infty$, uniformemente sobre los subconjuntos compactos del dominio D donde las funciones f_n y f están definidas.

Por $f^\#$ denotaremos la derivada esférica de f definida por:

$$1) f^\#(z) = \frac{f'(z)}{1+|f(z)|^2} \text{ si } z \neq \infty \text{ y } f(z) \neq \infty, \text{ ó}$$

$$2) f^\#(z) = \lim_{w \rightarrow z} f^\#(w) \text{ en otro caso.}$$

Teorema 2.9. (Marty) [Conway, 1978] *Sea \mathcal{F} una familia de funciones meromorfas en un dominio $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$. Entonces, decimos que \mathcal{F} es normal en D si, y sólo si $(f^\#)_{f \in \mathcal{F}}$ es localmente acotada en D .*

Teorema 2.10. (Montel) [Conway, 1978] *Sea \mathcal{F} una familia de funciones meromorfas en un dominio $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$. Sean $a, b, c \in \widehat{\mathbb{C}}$ puntos distintos dos a dos y supongamos que $f(z) \neq a, b, c$ para todo $z \in D$ y toda función $f \in \mathcal{F}$. Entonces, \mathcal{F} es normal en D .*

Teorema 2.11. (Montel) [Shiff, 1993] *(con la métrica cordal) Sea \mathcal{F} una familia de funciones analíticas en un dominio $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$. Supongamos que \mathcal{F} es localmente acotada (con respecto a la métrica cordal) en U . Entonces \mathcal{F} es una familia normal en U .*

Corolario 2.1. *Sea \mathcal{F} una familia de funciones analíticas en un dominio $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ tal que para toda vecindad V de z_0 la familia no es normal. Entonces,*

$$\bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(V)$$

omite a lo más dos puntos en $\widehat{\mathbb{C}}$.

Obsevemos que el Teorema 2.11 es un caso especial del Teorema 2.10. La prueba del Teorema 2.10 es, sin embargo, considerablemente más difícil que la del Teorema 2.11. Nos referiremos, en adelante al Teorema 2.10 como el Teorema de Montel. Una consecuencia del Teorema de Montel, son los teoremas de Picard.

Teorema 2.12. (Pequeño de Picard) [Conway, 1978] *Si f es una función entera que omite dos valores, entonces f es constante.*

Teorema 2.13. (Grande de Picard) [Conway, 1978] *Toda función analítica f toma en un entorno arbitrario de un punto singular esencial z_0 cualquier valor finito, a excepción, posiblemente, de uno.*

Del Teorema 2.13 se sigue que si z_0 es una singularidad esencial de f , entonces una de las ecuaciones $f(z) = a$, $f(z) = b$, $f(z) = c$ tiene infinitas soluciones en cada vecindad de z_0 . En el caso especial donde $D = \widehat{\mathbb{C}}$ y $c = z_0 = \infty$ se tiene el Teorema Pequeño de Picard con el siguiente enunciado más fuerte:

Teorema 2.14. (Teorema Pequeño de Picard) [Shiff, 1993] *Si una función meromorfa f en $D \setminus \{z_0\}$ tiene una singularidad esencial en z_0 , entonces f toma todos los valores de \mathbb{C} un número infinito de veces en una vecindad arbitraria de z_0 excepto a lo más para dos puntos en $\widehat{\mathbb{C}}$.*

Capítulo 3

La Clase de Funciones \mathfrak{M}

En este capítulo definimos la clase de funciones donde yace nuestra familia de estudio, definimos los conjuntos de Fatou y Julia para esta clase, y enunciamos algunas propiedades que presentan estos conjuntos. También, presentamos la clasificación de las componentes de Fatou.

Definición 3.1. Sean $X = \mathbb{C}$ y $Y = \widehat{\mathbb{C}}$. Definimos la clase de funciones

$$\mathfrak{M} := \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ es trascendente meromorfa con al menos un polo no omitido}\}.$$

Los pioneros en el estudio de la dinámica de funciones en la clase \mathfrak{M} fueron Baker, Yinian y Kotus, véase [Baker *et al.*, 1992], [Baker *et al.*, 1991b], [Baker *et al.*, 1990] y [Baker *et al.*, 1991a], alrededor de la última década del siglo pasado y hoy en día se siguen dando resultados nuevos en esta rama.

Observación 3.1. La única singularidad esencial para funciones en la clase \mathfrak{M} es ∞ .

Ejemplos de familias de funciones en la clase \mathfrak{M} son los siguientes:

- La familia $f_{\lambda,\mu}(z) = \lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{\mu}{\lambda}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- La familia $f_{\lambda}(z) = \lambda \tan(z)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- La familia $f_{\mu,\lambda}(z) = \lambda e^z + \frac{\mu}{z}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

3.1. Iteración de funciones en la clase \mathfrak{M}

Consideremos una función $f \in \mathfrak{M}$. Observemos que la composición de f consigo misma no necesariamente es una función en la clase \mathfrak{M} . Por ejemplo, tenemos que la composición de $f(z) = \lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{\mu}{z}$ consigo misma es $f(f(z)) = \lambda \operatorname{sen}(\lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{\mu}{z}) + \frac{\mu}{\lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{\mu}{z}}$, que tiene singularidades esenciales en $z = 0$, $z = \infty$ y en los puntos donde la ecuación $\lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{\mu}{z} = 0$ tiene solución.

En el caso de funciones $f \in \mathfrak{M}$, donde $f : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, se presenta el problema del dominio en la composición de funciones, es por ello que debemos definirlo de tal manera que ∞ sea la única singularidad esencial para composición de funciones. Consideremos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3.1. Sea

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$$

$$z \mapsto \frac{e^z}{z}.$$

Definimos el dominio de la n -ésima composición de la función f consigo misma por $D_{f^n} = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : f(z) = \infty\} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Ejemplo 3.2. Sea

$$f(z) = \begin{cases} \infty, & \text{si } z = 0; \\ 0, & \text{si } z = 1; \\ z, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Definimos el dominio de la n -ésima composición de la función f consigo misma por $D_{f^n} = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : f^{oi}(z) = \infty, i \leq 2\} = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ para $n \geq 2$.

Observamos que la restricción bajo el conjunto $\tilde{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = \infty\}$ no es una condición suficiente. El dominio de la función definida por la composición de f consigo misma n -veces, estará determinado por el conjunto $D_{f^n} = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : f^{oi}(z) = \infty, i \leq n\}$.

Definición 3.2. Definimos la n -ésima iterada de f como la composición de f consigo misma n -veces. Denotaremos la n -ésima iterada de f por f^{on} , ó bien f^n , esto es $f^{o0}(z) = z$ y $f^{on}(z) = f(f^{o(n-1)}(z))$.

Definición 3.3. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$. Definimos:

- La órbita hacia atrás $O^-(z_0)$ de z_0 por

$$O^-(z_0) = \bigcup_{n \geq 0} f^{o(-n)}(z_0),$$

donde $f^{o(-z)}(z_0) = \{z : f^{oz}(z) = z_0\}$.

- La órbita hacia adelante de z_0 la definimos como el conjunto

$$O^+(z_0) = \{z_n = f^{on}(z_0) : n \in \mathbb{N}\}.$$

- La gran órbita de z_0 está dada por

$$\mathbf{O}(z_0) = O^-(z_0) \cup O^+(z_0).$$

Observación 3.2. La Observación 3.2 es equivalente a que $O^-(\infty)$ es un conjunto infinito. En efecto, $f^{\circ(-3)}(\infty)$ es infinito como consecuencia del teorema de Picard. Así, el conjunto abierto más grande donde todos los iterados están bien definidos está dado por $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{O^-(\infty)}$.

Definición 3.4. Un punto $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ es llamado excepcional si la gran órbita $\mathbf{O}(z_0)$ es finita. El conjunto de puntos excepcionales de f se denotará por $E(f)$.

Observemos que si una función analítica f es conjugada a otra función analítica g , en el sentido que $g = T \circ f \circ T^{-1}$, donde T es una aplicación conforme, entonces $E(g) = T(E(f))$; por lo tanto, podemos decir que el conjunto de puntos excepcionales de una función se preserva bajo conjugación.

3.2. Puntos fijos y periódicos

Los puntos fijos y periódicos en conjunto con los valores singulares dictan el comportamiento dinámica que puede llegar a tener una familia de funciones. A pesar de la simplicidad de su definición son de gran utilidad y aparecen de forma natural en cualquier estudio dinámico, este estudio no será la excepción.

Definición 3.5. Sea f una función en la clase \mathfrak{M} . Si z_0 es un punto que cumple $f(z_0) = z_0$, entonces decimos que z_0 es *punto fijo* de la función f .

Definición 3.6. Decimos que z_0 es un *punto fijo periódico*, de periodo n , de la función f , si n es el menor natural que cumple que $f^{\circ n}(z_0) = z_0$.

Evidentemente un punto fijo es un punto periódico de periodo 1.

Los puntos fijos y periódicos se clasifican de acuerdo al módulo de la derivada. Esto se debe a las consecuencias dinámicas que de ello se desprende.

Definición 3.7. Sea f analítica y z_0 un punto fijo.

1. Si $|f'(z_0)| = 0$, entonces z_0 es un punto fijo *superatractor*.
2. Si $|f'(z_0)| < 1$, entonces z_0 es un punto fijo *atractor*.
3. Si $|f'(z_0)| > 1$, entonces z_0 es un punto fijo *repulsor*.
4. Si $|f'(z_0)| = 1$ y es raíz de la unidad, entonces z_0 es un punto fijo *indiferente racional*.
5. Si $|f'(z_0)| = 1$ pero $f'(z_0)$ no es raíz de la unidad, entonces z_0 es un punto fijo *indiferente irracional*.

La Definición 3.7 se generaliza a puntos periódicos considerando que si z_0 es de periodo m , entonces z_0 es un punto fijo para f^{om} . Aplicando Regla de la Cadena tenemos $f'^{on}(z_0) = \prod_{j=0}^{n-1} f'(f^{oj}(z_0))$, así puntos periódicos superatractores, atractores, repulsores, indiferentes racionales e indiferentes irracionales son según $|(f^{on})'(z_0)|$ sea cero, menor a uno y distinto de cero, mayor que uno, siendo uno si es raíz de la unidad o no, respectivamente. Al valor de $|(f^{on})'(z_0)|$ se le conoce como el *multiplicador* de z_0 .

Observemos que si f y g son conjugadas por T y si z_0 es un punto fijo de f , entonces $T(z_0)$ es un punto periódico de g , con el mismo periodo y multiplicador. De aquí que en algunas ocasiones se dice que ciertas propiedades dinámicas son preservadas bajo conjugación, ya que sobre los puntos periódicos yacen determinadas definiciones y propiedades de los Conjuntos de Fatou y Julia.

Si z_0 es el infinito, entonces el multiplicador de z_0 está dado por $(g^{on})'(0)$, donde

$$g(z) = \frac{1}{f(\frac{1}{z})}.$$

En ocasiones, siempre que un punto periódico, o fijo, cumpla $|f^{on}'(z_0)| = 1$, nos referimos a z_0 simplemente como punto periódico, o fijo, *indiferente*.

Si z_0 es un punto periódico de periodo n , entonces decimos que la órbita hacia adelante de z_0 es un *ciclo atractor, repulsor o indiferente*, según z_0 sea atractor, repulsor o indiferente.

Los puntos no periódicos para los que existe n natural tal que su imagen bajo f^{on} es un punto periódico, les diremos *preperiódicos*.

3.3. Conjuntos de Fatou y Julia

Los Conjuntos de Julia y Fatou juegan un papel central en el estudio de los sistemas dinámicos. En esta sección presentamos la definición y algunas de las propiedades de estos conjuntos. En adelante, las funciones referidas son funciones pertenecientes a la clase \mathfrak{M} .

Definición 3.8. Sea $f \in \mathfrak{M}$. El *conjunto de Fatou*, denotado por $F(f)$, se define como:

$$F(f) = \{z \in \mathbb{C} : f^{on}(z) \text{ está bien definida y es normal en alguna vecindad de } z \}.$$

El *conjunto de Julia*, denotado por $J(f)$, es el complemento del conjunto de Fatou, esto es:

$$J(f) = (F(f))^c.$$

Recordemos que cuando $f(A) \subset A$ para algún subconjunto A del dominio de f decimos que A es un *conjunto invariante hacia adelante*. Si $f^{-1}(A) \subset A$ se dice que A es *invariante hacia atrás*. Si el conjunto A cumple con ambas condiciones A es *completamente invariante*.

A continuación, enunciaremos algunas propiedades de los conjuntos de Julia y Fatou para las funciones trascendentes meromorfas:

Si $f \in \mathfrak{M}$, se tienen las siguientes propiedades:

- (a) $F(f)$ es abierto y $J(f)$ es cerrado.
- (b) $J(f)$ es perfecto.
- (c) $F(f)$ y $J(f)$ son completamente invariantes.
- (d) $F^{\circ n}(f) = F(f)$ y $J^{\circ n}(f) = J(f)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (e) $J(f)$ es la clausura del conjunto de los puntos periódicos repulsores de f .

Las propiedades anteriores fueron demostradas para funciones trascendentes meromorfas por Baker, Kotus y Lü entre 1990 y 1991, véase [Baker *et al.*, 1992], [Baker *et al.*, 1991b], [Baker *et al.*, 1990] y [Baker *et al.*, 1991a].

Las siguientes definiciones y lemas muestran la relación que existe entre el multiplicador y la definición topológica de los puntos fijos, ofreciéndonos información acerca de su relación con los conjuntos de Fatou y de Julia.

Definición 3.9. (*Puntos Atractores*) Un punto fijo z_0 de una función analítica f es atractor si existe una vecindad V , donde la sucesión $\{f^n|_U\}$ converge uniformemente a z_0 .

Lema 3.1. (*Característica de un Punto Atractor*) [Milnor, 2006] *Un punto fijo para una función holomorfa f es topológicamente atractor si, y sólo si su multiplicador es menor que uno.*

Teorema 3.1. [Milnor, 2006] *Si z_0 es un punto fijo atractor de una función analítica f en el disco $D(z_0, R)$, entonces la familia de iteradas $\{f^n\}$ de f es normal en alguna vecindad $D(z_0, r)$, $r \leq R$ de z_0 .*

Definición 3.10. (*Puntos Repulsores*) Un punto fijo z_0 de una función analítica f es repulsor si existe una vecindad U de z_0 , tal que para cada $z \in U \setminus \{z_0\}$ existe $n \geq 1$ que cumple $f^n \notin U$

Lema 3.2. (*Característica de un Punto Repulsor*) [Milnor, 2006] *Un punto fijo de una función analítica f es topológicamente repulsor si, y sólo si su multiplicador es mayor que uno.*

Teorema 3.2. [Milnor, 2006] *Si z_0 es un punto fijo repulsor de una función analítica f en U , donde U es una vecindad centrada en z_0 , entonces la familia de iteradas $\{f^n\}$ de f no es normal en z_0 .*

3.3.1. Clasificación de las componentes de Fatou

Por definición, el conjunto de Fatou es abierto, así podemos hablar de sus componentes véase *Apéndice A*. De aquí en adelante “componente” siempre significará “componente conexa”.

Definición 3.11. Sea $f \in \mathfrak{M}$ y U una componente del conjunto de Fatou $F(f)$.

1. U es periódica, si existe $n > 0$ tal que $f^{on}(U) = U$.
2. U es eventualmente periódica o preperiódica, si existe n natural y $\Gamma \subset F(f)$ componente periódica, tal que $f^{on}(U) \subset \Gamma$.
3. U es errante, si para todo $n \geq 0$ los conjuntos $f^{on}(U)$ son ajenos por pares entre sí.

A continuación, enunciamos la clasificación de las componentes periódicas para funciones trascendentes meromorfas, que caracteriza la dinámica en el conjunto de Fatou de las componentes periódicas.

Sea $f \in \mathfrak{M}$ y U una componente periódica de $F(f)$ de periodo n . Entonces se tiene alguna de las siguientes 5 posibilidades:

1. La componente U contiene un punto z_0 atractor de periodo n . Entonces $f^{onk}(z) \rightarrow z_0$ para toda z en U cuando k tiende a infinito. La componente U se llama la *componente de atracción* de z_0 .
2. La frontera de U contiene un punto periódico z_0 de periodo n , tal que $f^{onk}(z) \rightarrow z_0$ para toda z en U cuando k tiende a infinito. Entonces $|(f^{on})'(z_0)| = 1$. En este caso a U se le llama *componente de Leau* o *componente parabólica*.
3. Existe un homeomorfismo analítico $\phi : U \rightarrow D$, con D el disco unitario, tal que ϕ conjuga a f^{on} con $\exp^{2\pi\alpha} z$ para α irracional, es decir, una rotación irracional. En tal caso, U se llama *disco de Siegel*.
4. Existe un homeomorfismo analítico $\phi : U \rightarrow A$, donde $A = \{z : 0 < |z| < r\}$, con $r > 1$, tal que ϕ conjuga a f^{on} con $\exp^{2\pi\alpha} z$ para α irracional, es decir, una rotación irracional. En tal caso, U se llama *anillo de Herman*.
5. Existe un punto z_0 en la frontera de U tal que $f^{onk}(z) \rightarrow z_0$ para toda z en U cuando k tiende a infinito, pero $f^{on}(z_0)$ no está definida. En este caso U se llama *componente de Baker*.

La caracterización de las componentes periódicas del conjunto de Fatou fue dada para el caso para funciones en la clase \mathfrak{M} por Baker, Kotus y Lü en 1991, véase [Baker *et al.*, 1991a].

En el caso del ciclos de componentes de Baker, siempre existe una componente donde $z_0 = \infty$, más aún cualquier componente cumple que el punto z_0 correspondiente es un pre-polo [Bergweiler, 1993].

Siguiendo la idea de Eremenko y Lyubich en [Eremenko and Lyubich, 1992] se define la clase de funciones \mathcal{B} de tipo acotado que enunciamos a continuación.

Definición 3.12. La clase \mathcal{B} es el conjunto de funciones $f \in \mathfrak{M}$ tales que todos sus valores singulares están contenidos en un conjunto acotado en $\widehat{\mathbb{C}}$.

Ejemplos de familias de funciones en la subclase \mathcal{B} son los siguientes:

1. Las familias $f_\lambda(z) = \lambda e^z$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $g_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dado que estas funciones tienen un conjunto finito de valores singulares.
2. La familia $h_\lambda(z) = \frac{\lambda \operatorname{sen}(z)}{z}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Esta familia de funciones posee un valor asintótico en $z = 0$ y un conjunto infinito de valores críticos tales que $\{w : |w| \leq 1\}$.

En [Eremenko and Lyubich, 1992], Eremenko y Lyubich demostraron que si f es una funciones trascendentes entera que pertenecen a la clase \mathcal{B} , entonces no existe una componente U de $F(f)$ tal que $f^n|_U \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, obteniendo como corolario que las funciones enteras trascendentes de tipo acotado no poseen dominios de Baker.

Observemos, que lo mencionado anteriormente no se cumple en general para funciones trascendentes meromorfas en la clase \mathcal{B} . Como un ejemplo, consideramos $f(z) = 1/z - e^z$. Baker, Kotus y Lü demostraron en [Baker *et al.*, 1991a] que f posee un dominio de Baker de periodo 2 y es fácil reconocer que f es una función trascendente meromorfa de tipo acotado. En este ejemplo, 0 es punto de acumulación de los valores críticos de f , que es además uno de los límites correspondientes al ciclo de dominios de Baker.

Capítulo 4

La Familia $f_{\lambda,\mu,z_0}(z) = \lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{\mu}{z-z_0}$, $\lambda, \mu, z_0 \in \mathbb{R}$

La familia $g_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$, estudiada por [Domínguez and Sienna, 2002] , [Dong, 1992] entre otros, presenta fenómenos dinámicos de gran interés para el estudio de la dinámica de funciones trascendentes, algunos de estos resultados son a través del valor que puede tomar el parámetro de la familia, derivando en afirmaciones sobre las propiedades de sus respectivos conjuntos de Fatou y Julia. Ciertos aspectos de la familia antes mencionada serán de utilidad para investigar la familia $f_{\lambda,\mu}(z) = \lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{\mu}{z-z_0}$, $\lambda, \mu, z_0 \in \mathbb{R}$.

Cuando examinamos la gráfica de la función real $f_{\lambda,\mu,z_0}(x) = \lambda \operatorname{sen}(x) + \frac{\mu}{x-x_0}$ para determinados parámetros reales $0 < \lambda < 1$, $0 < \mu$ y $x_0 \in \mathbb{R} \setminus 0$, no es difícil observar que existen dos puntos fijos de los cuales uno es atractor y otro repulsor, así, por los Teoremas 3.1 y 3.2, sabemos que el primero pertenece al Conjunto de Fatou y el segundo al Conjunto de Julia de la función, véase Figura 4.1.

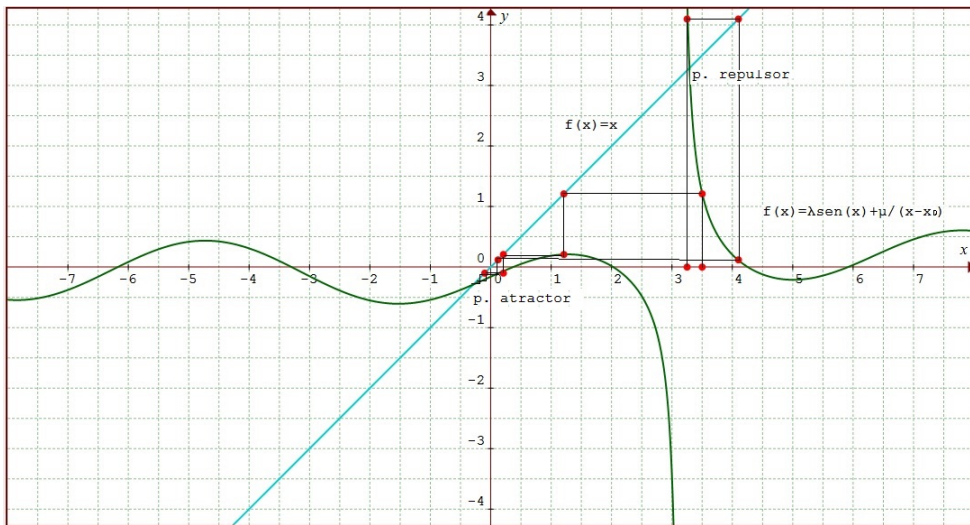


Figura 4.1: Gráfica de la función $f_{\lambda,\mu,o} = \lambda \operatorname{sen}(x) + \frac{\mu}{x-x_0}$, para $\lambda = \mu = 0,5$, $x_0 = \pi$.

En cambio, si graficamos la función real $f_{\lambda,\mu,0}(x) = \lambda \operatorname{sen}(x) + \frac{\mu}{x}$ para ciertos parámetros reales $0 < \lambda, \mu$ suficientemente pequeños, observamos que existen dos puntos fijos que tienen el mismo comportamiento, es decir, ambos son atractores, o ambos son repulsores; hecho que se justificará más adelante, véase Figura 4.2.

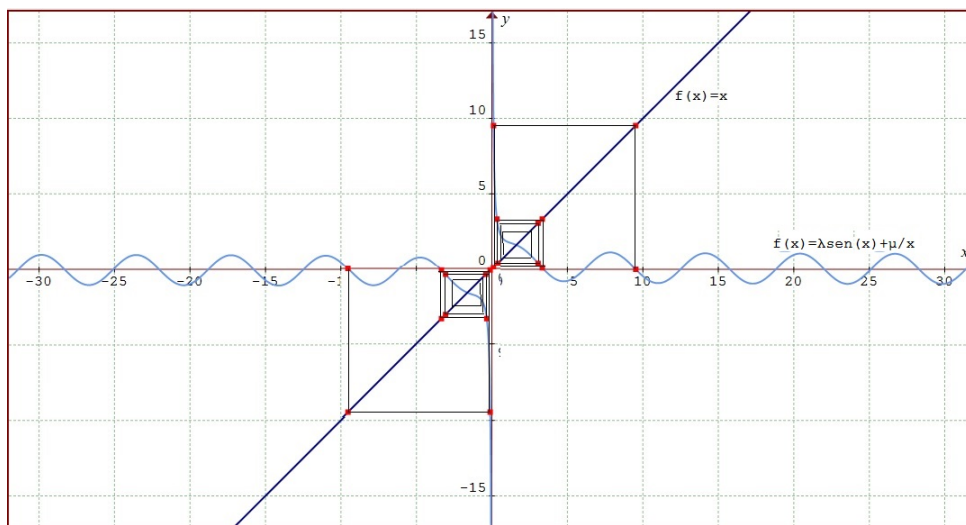


Figura 4.2: Gráfica de la función $f_{\lambda,\mu,0} = \lambda \operatorname{sen}(x) + \frac{\mu}{x}$, para $\lambda = \mu = 1$

El estudio de la familia:

$$f_{\lambda,\mu,z_0}(z) = \lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{\mu}{z-z_0}, \lambda, \mu, z_0 \in \mathbb{R} \quad (1)$$

está constituido en dos partes: **Caso I:** Cuando el polo $z_0 \neq 0$ y **Caso II:** Cuando $z_0 = 0$. Estudiaremos las situaciones por separado debido a que son dos comportamientos dinámicos distintos.

4.1. Estudio del Caso I

En esta sección, demostraremos una generalización del resultado en [Domínguez, 1998], que enunciaremos en el siguiente teorema.

Teorema 4.1. [Domínguez, Vázquez and Montes de Oca, 2016] *Si λ, μ son parámetros reales tales que $0 < |\lambda| < 1$ y $\mu > 0$ suficientemente pequeño, entonces la familia $f_{\lambda,\mu}(z) = \lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{\mu}{z-k\pi}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, posee una componente atractora completamente invariante y múltiplemente conexa en el conjunto de Fatou.*

Demostración. Consideremos el caso $0 < \lambda < 1$, dado que para el caso $-1 < \lambda < 0$ la demostración es análoga.

Sea $\lambda, \mu, \alpha \in \mathbb{R}$ tales que $0 < \lambda < 1$, $\mu > 0$ suficientemente pequeño y $0 < \alpha < 1$ y definimos la región $\mathbf{H} = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}(z)| < \alpha\}$.

Tomemos $0 < \rho < \alpha < 1$ tal que $0 < \frac{\mu}{1-\lambda(e+1)} < \rho$, se sigue que $\lambda(e+1) + \frac{\mu}{\rho} < 1$ y consideremos el conjunto:

$$\mathbf{T} = \mathbf{H} \cap \{z \in \mathbb{C} : |z - k\pi| > \rho, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ fijo}\},$$

véase Figura 4.3.

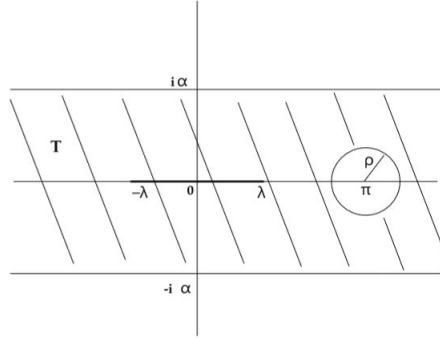


Figura 4.3: Región \mathbf{T} , donde $k\pi = \pi$ para $k = 1$

Afirmación. Existe una componente atractora invariante U del conjunto de Fatou que contiene a \mathbf{T} .

Primero demostraremos que para cualquier $z = x + iy \in \mathbf{T}$ la diferencia $|f_{\lambda,\mu}(z) - \lambda \operatorname{sen}(x)|$ está acotada por 1. Dividimos la prueba en dos casos:

- (a) Cuando $y = 0$ tenemos $|f_{\lambda,\mu}(z) - \lambda \operatorname{sen}(x)| \leq \lambda |\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(x)| + \frac{\mu}{z - k\pi} = \frac{\mu}{\rho} < 1$ para μ suficientemente pequeña.
- (b) Cuando $y \neq 0$ y $-1 < \alpha \leq y \leq \alpha < 1$, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} |f(z) - \lambda \operatorname{sen}(x)| &= \left| \lambda \operatorname{sen}(x + iy) + \frac{\mu}{x + iy - z_0} - \lambda \operatorname{sen}(x) \right| \\ &= \left| \lambda (\operatorname{sen}(x) \cos(iy) + \cos(x) \operatorname{sen}(iy)) + \frac{\mu}{x + iy - z_0} - \lambda \operatorname{sen}(x) \right| \\ &= \left| \lambda (\operatorname{sen}(x) \cosh(y) + i \cos(x) \operatorname{senh}(y)) + \frac{\mu}{x + iy - z_0} - \lambda \operatorname{sen}(x) \right| \\ &\leq \lambda |\operatorname{sen}(x)| |\cosh(y)| + |\cos(x)| |\operatorname{senh}(y)| + \lambda |\operatorname{sen}(x)| + \frac{\mu}{|x + iy - z_0|} \\ &\leq \lambda (|\cosh(y)| + |\operatorname{senh}(y)|) + \lambda + \frac{\mu}{|x + iy - z_0|} \\ &\leq \lambda \left| \frac{e^y - e^{-y}}{2} \right| + \left| \frac{e^y - e^{-y}}{2} \right| + \lambda + \frac{\mu}{|x + iy - z_0|} \\ &\leq \lambda(e^y + 1) + \mu\rho^{-1} < 1. \end{aligned}$$

En ambos casos, observamos que $\lambda \operatorname{sen}(x) \in [-\lambda, \lambda]$ y dado que consideramos $0 < \lambda < 1$ se sigue que $f_{\lambda, \mu}(z)$ está acotada en una bola con centro en λ y radio $0 < r < 1$, esto es $B(\lambda, r) \subset \mathbf{T}$, más aún, la familia $f_{\lambda, \mu}(z)$ está uniformemente acotada. Entonces por el Teorema de Montel, $f_{\lambda, \mu}(z)$ es normal en \mathbf{T} , por lo tanto, \mathbf{T} pertenece a una componente invariante U del conjunto de Fatou. En consecuencia, $f_{\lambda, \mu}(z)$ pertenece a un subconjunto compacto $S \subset \mathbf{T}$, tal que $f_{\lambda, \mu}(z)^n \rightarrow \beta$ donde β es finito y pertenece a la clausura de S , por lo tanto, β es un punto fijo atractor de la familia $f_{\lambda, \mu}(z)$.

En consecuencia, existe una componente atractora invariante U , la cual contiene a \mathbf{T} , en el conjunto de Fatou.

Afirmación. Todos los valores críticos de $f_{\lambda, \mu}(z) = \lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{\mu}{z - k\pi}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ están contenidos en U .

En primer lugar, observemos que para hallar los valores asintóticos de la función debemos tomar cualquier camino Γ que tienda a ∞ y considerar $f_{\lambda, \mu}(\Gamma(t))$. Dado que $\frac{\mu}{\Gamma(z) - k\pi} \xrightarrow{\Gamma \rightarrow \infty} 0$, obtenemos que $f_{\lambda, \mu}(z)$ tiene límite l si, y sólo si $\lambda \operatorname{sen}(\Gamma(z)) \xrightarrow{\Gamma \rightarrow \infty} l$, lo cual sólo se cumple para $l = \infty$ debido a que la función $\operatorname{sen}(z)$ no posee valores asintóticos finitos, véase [Zhang, 2005].

Así, se sigue que además de ∞ , todos los valores singulares de $f_{\lambda, \mu}$ son sus valores críticos finitos, los cuales están dados por la solución de la ecuación:

$$f'_{\lambda, \mu}(z) = \lambda \cos(z) - \frac{\mu}{(z - k\pi)^2} = 0.$$

Consideremos dos casos:

(i) Si $f'_{\lambda, \mu}(z) = 0$ y $|z - k\pi| > t = \frac{\pi}{4}$, entonces

$$|\cos(z)| = \left| \frac{\mu}{\lambda(z - k\pi)^2} \right| < \frac{\mu}{\lambda t^2} < \frac{16\mu}{\lambda\pi^2} < \frac{2\mu}{\lambda},$$

y por otro lado,

$$|\operatorname{sen}(z)| = |\sqrt{1 - \cos^2(z)}| \leq \left| \sqrt{1 - \frac{4\mu^2}{\lambda^2}} \right| \leq 1 + \frac{4\mu^2}{\lambda^2},$$

así, $\operatorname{sen}(z) = \pm(1 + \eta)$ donde $|\eta| < \frac{4\mu^2}{\lambda^2}$ (si μ fue escogida lo suficientemente pequeño).

Ahora, dado que $|f_{\lambda, \mu}(z) - \lambda \operatorname{sen}(z)| = \left| \frac{\mu}{z - k\pi} \right| < \frac{4\mu}{\pi}$ y que $|f_{\lambda, \mu}(z) - \lambda \operatorname{sen}(z)| = |f_{\lambda, \mu}(z) \pm \lambda(1 + \eta)|$, obtenemos que

$$|f_{\lambda, \mu}(z) \pm \lambda| < \frac{2\mu}{\lambda} + \frac{4\mu}{\pi}.$$

Por lo tanto, podemos concluir que en este caso los valores críticos de $f_{\lambda, \mu}(z) \in \mathbf{T} \subset U$ (si μ es lo suficientemente pequeña).

(ii) Si $f'_{\lambda,\mu}(z) = 0$ y $|z - k\pi| \leq t = \frac{\pi}{4}$, entonces

$$|\lambda \cos(z)| = |\mu(z - k\pi)^2|.$$

Se sigue que

$$\frac{\mu}{\lambda e^{\frac{\pi}{4}}} \leq |(z - k\pi)^2| = \left| \frac{\mu}{\lambda \cos(z)} \right| \leq \sqrt{2} \frac{\mu}{\lambda},$$

dado que $|\cos(z)| \geq |\cos(x) \cosh(y)| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ y que $|\cos(z)| < e^{|y|}$. Por lo tanto, $|(z - k\pi)^2| \leq \sqrt{2} \frac{\mu}{\lambda}$ de aquí que $|z - k\pi| < 2^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}$, y con unos cálculos análogos $|\sen(z)| < 2\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}$ y $\mu|z - k\pi|^{-1} < \sqrt{\mu}\sqrt{\lambda}e$.

Así, obtenemos que

$$|f_{\lambda,\mu} \sen(z)| = |\lambda \sen(z)| + \left| \frac{\mu}{z - k\pi} \right| < 2\sqrt{\mu}\sqrt{\lambda} + \sqrt{\mu}\lambda e.$$

Por lo que podemos concluir que $f_{\lambda,\mu}(z) \in \mathbf{T} \subset U$.

De (i) y de (ii) obtenemos que todos los valores críticos de la familia $f_{\lambda,\mu}(z)$ están contenidos en U , así la afirmación está demostrada.

Afirmación. No existen discos de Siegel ni anillos de Herman.

Sea $B_j = \{z \in \mathbb{C} : f_{\lambda,\mu}^j \text{ no es meromorfa en } z\}$, así $B_0 = \emptyset$, $B_1 = \{\infty\}$, y $B_j = \{\infty\} \cup f_{\lambda,\mu}^{-1}(\infty) \cup \dots \cup f_{\lambda,\mu}^{j-1}(\infty)$ en general.

Designaremos por $E_n(f_{\lambda,\mu}) = \{\text{Valores singulares de } f_{\lambda,\mu}^n\}$, para $n \in \mathbb{N}$, así, E_1 es el conjunto de los valores singulares de $f_{\lambda,\mu}(z)$ que consiste de un subconjunto numerable de \mathbf{T} cuya clausura es compacta en \mathbf{T} , junto con ∞ . De igual manera, dicha observación es la misma para los siguientes conjuntos:

(a) $E = \bigcup_{j=0}^{\infty} f_{\lambda,\mu}^j(E_1 \setminus B_j),$

(b) $E' = \{\text{puntos tales que ó bien son puntos de acumulación de } E \text{ o singularidades de alguna rama de la } n\text{-ésima preimagen de la función, } f_{\lambda,\mu}^{-n}, \text{ para un número infinito de valores de } n\},$ y

(c) $E \cup E' = \bigcup_{j=0}^{\infty} (E_1 \setminus \{\infty\}) \cup \{\beta, \infty\}.$

Por (c) afirmamos que no existen discos de Siegel ni anillos de Herman dado que la frontera de un disco de Siegel o un anillo de Herman debe estar contenida en $E \cup E'$ por el Teorema 8.2 en [Domínguez, 1998] que enuncia: *Si f es una función meromorfa y $C = \{U_0, U_1, \dots, U_{p-1}\}$ es un ciclo de discos de Siegel o anillos de Herman de $F(f)$, entonces para cada j , $\partial U_j \subset E(f) \cup E'(f)$. Además, en cualquier ciclo atractor o parabólico las funciones límites pertenecen a $E'(f)$.* Por lo tanto, el único ciclo de componentes de $F(f)$ es U .

Afirmación. U es completamente invariante.

En la primera afirmación obtuvimos que todos los valores singulares finitos de $f_{\lambda,\mu}(z)$ están contenidos en U . Tomemos un punto $z_0 \in U$ y una rama g de $f_{\lambda,\mu}(z)^{-1}$ tal que $g(z_0) \in U$. Para cualquier $z_1 \in U$ y para cualquier rama h de $f_{\lambda,\mu}(z)^{-1}$ en z_1 podemos llegar a $h(z_1)$ por continuación analítica de g a lo largo de un camino γ de z_0 a z_1 . Ahora γ es homotópica a un camino γ_1 en $\mathbb{C} \setminus E_1(f)$ de z_0 a z_1 , y la continuación de g a lo largo de γ_1 es h en z_1 . Pero $g(\gamma_1)$ pertenece a $F(f_{\lambda,\mu})$ y de aquí que $g(\gamma_1) \subset U$. Por lo tanto U es completamente invariante.

Afirmación. No existen componentes errantes.

Los posibles límites constantes de sucesiones $f_{\lambda,\mu}^n$ en las componentes de $F(f_{\lambda,\mu})$ son solamente ∞ y el punto fijo atractor β . Por lo tanto, si existieran otras componente de Fatou, deben ser componentes errantes tales que $f^n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$ por definición de tales componentes. Demostraremos que tales componentes no existen. Sin pérdida de generalidad, supongamos que el polo de la familia es π , considerando $k = 1$.

Supongamos que existe una componente errante, digamos G , tal que $f_{\lambda,\mu}^n(G)$ no interseca $B(\pi, r)$, donde $0 < r < \alpha < 1$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ dado que $f_{\lambda,\mu}^n(G) \rightarrow \infty$. Así debemos tener que $Im f_{\lambda,\mu}^n \rightarrow \infty$ en G , entonces $f'_{\lambda,\mu}(f_{\lambda,\mu}^n) \rightarrow \infty$ y $(f_{\lambda,\mu}^n)' \rightarrow \infty$ en G . Por el Teorema de Bloch, [Xiong, 2004], que afirma lo siguiente: *Sea f una función holomorfa en $\bar{B}(0, 1)$ tal que $f'(0) = 1$, entonces $f(B(0, 1))$ contiene una bola de radio $3/2 - \sqrt{2} > 1/12$, se sigue que $f_{\lambda,\mu}^{n+1}(G)$ contiene algún disco de la forma $D(a, 4\pi)$, donde $|Im(a)|$ puede tomar cualquier valor arbitrariamente grande, pero entonces sobre el diámetro horizontal de $D(a, \pi)$ no es difícil ver que $f_{\lambda,\mu}^{n+2}(G)$ contiene algunos puntos reales, los cuales deben estar contenidos en U , como esto es imposible, concluimos que no existe tal dominio G .*

Afirmación. La componente U es múltiplemente conexa.

El conjunto de Fatou consiste de una componente U completamente invariante que es atractora y múltiplemente conexa debido a que $k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ fijo, no pertenece al conjunto de Fatou, es decir, $k\pi$ está contenido en el conjunto de Julia.

Con las afirmaciones demostradas el Teorema 4.1 queda verificado. ■

A partir del Teorema 4.1 se deducen los siguientes dos corolarios.

Corolario 4.1. *Para $\lambda = 1$ y $0 < \mu \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeño, la familia de funciones $f_{1,\mu}(z) = \text{sen}(z) + \frac{\mu}{z - k\pi}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tiene una componente atractora, completamente invariante U y múltiplemente conexa en el conjunto de Fatou.*

Demostración. Escojamos $\lambda = 1$, $0 < \mu$ suficientemente pequeña, $\alpha < 1$, $H = \{z \in \mathbb{C} : |Im(z)| < \alpha\}$ y \mathbf{T} como en la demostración del Teorema 4.1. No es difícil demostrar que $|f_{1,\mu} - \text{sen}(x)| < 1$ para cualquier $z = x + it \in \mathbf{T}$. Por lo tanto, $f_{1,\mu}$ está uniformemente

acotada en una bola con centro en 1 y radio $0 < r < 1$, $B(1, r)$ tal que $B(1, r) \subset \mathbf{T}$, entonces se sigue, como en la demostración de Teorema 4.1, que $f_{1, \mu}$ pertenece a un subconjunto compacto S_1 de \mathbf{T} . Por lo tanto \mathbf{T} pertenece a una componente invariante U del conjunto de Fatou en el cual $f_{1, \mu}^n(z) \rightarrow p$, donde p es un punto fijo atractor de $f_{\lambda, \mu}(z)$. Además de (i) y (ii) de la demostración del Teorema 4.1 se sigue que:

$$|f_{1, \mu}(z) \pm 1| < 2\mu^2 + \frac{4\mu}{\pi} \quad \text{y} \quad |f_{1, \mu}(z)| < 2\sqrt{\mu} + \sqrt{\mu}.$$

Por lo tanto, $f_{1, \mu}(z) \in \mathbf{T} \subset U$, siempre que μ sea lo suficientemente pequeña, lo cual implica que todos los valores críticos finitos de $f_{1, \lambda}$ están contenidos en U .

Para la demostración de que U no es una componente errante, U es la única componente del conjunto de Fatou, U es completamente invariante y U múltiplemente conexa se sigue sin complicaciones de la demostración del Teorema 4.1. ■

Corolario 4.2. *La familia $f_{\lambda, \mu}(z) = \lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{\mu}{z - k\pi}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, pertenece a la clase \mathcal{B} .*

Demostración. Por (i) y (ii) de la demostración del Teorema 4.1 concluimos que λ , $-\lambda$ y 0 son puntos de acumulación de todos los valores singulares finitos de $f_{\lambda, \mu}(z)$, por lo tanto podemos tomar un conjunto acotado C tal que contenga $\pm\lambda$, ∞ y 0 en la esfera. Así, $f_{\lambda, \mu}(z) = \lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{\mu}{z - k\pi}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, pertenece a la clase de funciones de tipo acotado \mathcal{B} , véase la Definición 3.12. ■

En el Capítulo 5 se presentarán cortes del espacio de parámetros y se graficarán los Conjuntos de Fatou y Julia de $f_{\lambda, \mu}$ definidos por parámetros que satisfacen el Teorema 4.1.

4.2. Estudio del Caso II

En esta sección investigaremos la familia:

$$f_{\lambda, \mu, 0}(z) = \lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{\mu}{z}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Inicialmente estudiaremos las propiedades geométricas que podemos apreciar en este caso donde el polo está en $z_0 = 0$ y que no se presentan en el Caso I. Posteriormente calcularemos los puntos fijos, puntos críticos y valores críticos de la familia en (2).

4.2.1. Geometría de las funciones en la familia $f_{\lambda,\mu,0}(z)$

El primer aspecto a estudiar es la geometría que guarda cada una de las funciones que integran la familia (2), para ello consideremos valores particulares de los parámetros, y a partir de la variación de éstos comprender qué modificaciones geométricas se generarán. La siguiente afirmación se puede consultar en [Needham, 1998].

Proposición 4.1. *La función $\operatorname{sen}(z) = \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{cosh}(y) + i \cos(x) \cdot \operatorname{senh}(y)$ envía rectas de la forma $\ell(t) = kt, k \in \mathbb{R}$, en hipérbolas y rectas $\tilde{\ell}(t) = ct, c \in \mathbb{R}$, en elipses.*

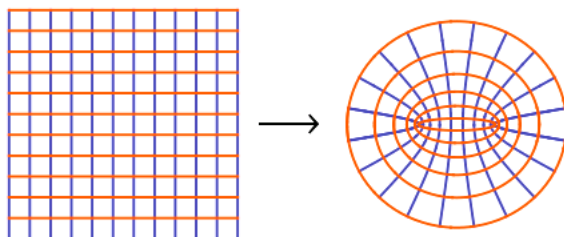


Figura 4.4: Transformación del plano bajo la función $\operatorname{sen}(z)$

Consideremos los parámetros $\lambda = \mu = 1$ y descompongamos la función $f_{1,1,0}(z)$ en sus partes real e imaginaria, esto es:

$$\begin{aligned} f_{1,1,0}(z) = \operatorname{sen}(z) + \frac{1}{z} &= \operatorname{sen}(x + iy) + \frac{1}{x+iy} \\ &= \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{cosh}(y) + i \cos(x) \cdot \operatorname{senh}(y) + \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2} \\ &= \left(\operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{cosh}(y) + \frac{x}{x^2+y^2} \right) + i \left(\cos(x) \cdot \operatorname{senh}(y) - \frac{y}{x^2+y^2} \right) \end{aligned}$$

Obteniendo en este caso curvas que se *asemejan* a las dadas en la Figura 4.4, véase Figura 4.5.

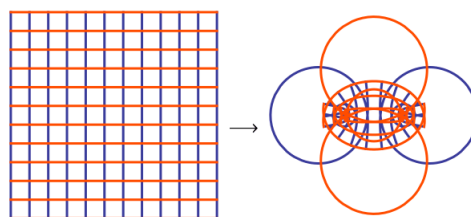


Figura 4.5: Transformación del plano bajo la función $\operatorname{sen}(z) + 1/z$

Si elegimos una cuadrícula del plano más fina, obtenemos la Figura 4.6. Este fenómeno se debe al hecho que la función $f_{1,1,0}(z)$, al igual que $g_\lambda(z) = \operatorname{sen}(z)$, sigue siendo una aplicación conforme, salvo un conjunto que estudiaremos posteriormente,

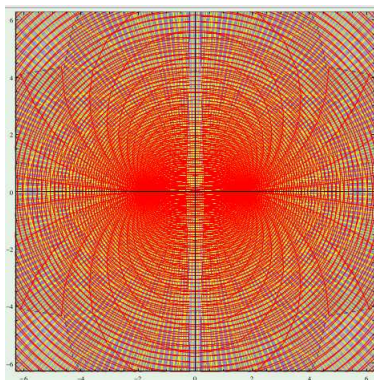


Figura 4.6: Transformación del plano bajo la función $\text{sen}(z) + 1/z$ con una malla mas fina.

el conjunto de puntos críticos; de tal manera que preserva ángulos bajo curvas diferenciables, en este caso las rectas paralelas a los ejes.

Nos percatamos que la geometría de esta función $f_{1,1,0}(z)$ presenta simetrías, éstas se deben a que para cada función de la familia $f_{\lambda,\mu,0}(z) = \lambda \text{sen}(z) + \frac{\mu}{z}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ se cumple para todo $z = x + iy \in \mathbb{C}$ tenemos $f_{\lambda,\mu,0}(x + iy) = -f_{\lambda,\mu,0}(-x - iy)$ debido a las propiedades de las funciones trigonométricas complejas y la inversión respecto al origen.

En el caso cuando $\lambda = \mu = \xi \in \mathbb{C}$ no es difícil comprobar que se obtiene una rotación y una homotecia de la transformación presentada en la Figura 4.5, en función del $\text{Arg } \xi$ y al módulo de ξ , $|\xi|$, respectivamente:

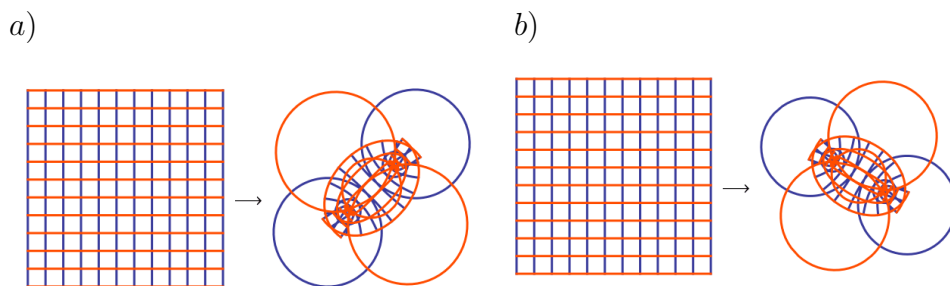


Figura 4.7: Caso 1: $\lambda = \mu$, a) $\xi = 2 + 2i$ y b) $\xi = -5 + 3i$.

4.2.2. Puntos fijos de la familia $f_{\lambda,\mu,0}(z)$

En este apartado describimos los puntos fijos de la familia dada en (2). Para calcularlos, requerimos resolver la ecuación

$$\lambda \text{sen}(z) + \frac{\mu}{z} - z = 0 \quad (3)$$

que resulta ser un cálculo complicado, pero es fácil ver que la familia tiene una infinidad de puntos fijos cuando $z \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ y una adecuada elección de los parámetros λ, μ , para analizar el comportamiento de los puntos fijos en casos particulares. En particular, observamos los siguientes casos:

1. Cuando $z = \frac{\pi}{2}$ es un punto fijo de (3) y $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, el parámetro μ siempre lo podemos obtener con la expresión

$$\mu = \frac{\pi^2}{4} - \lambda \frac{\pi}{2}$$

para corroborarlo, evaluamos en $f_{\lambda, \frac{\pi^2}{4} - \lambda \frac{\pi}{2}}(z)$ y obtenemos:

$$f_{\lambda, \mu} \left(\frac{\pi}{2} \right) = \lambda \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} \right) + \frac{\frac{\pi^2}{4} - \lambda \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Más aún, cuando $z = \frac{(2k-1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, podemos obtener el parámetro μ por la expresión:

$$\mu = \left(\frac{(2k-1)\pi}{2} \right)^2 - \lambda \left(\frac{(2k-1)\pi}{2} \right), \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

2. Cuando $z = x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ con $\mu > 0$ afirmamos que la familia en (2) tiene al menos dos puntos fijos en $x_\lambda \in \mathbb{R}^+$ y $-x_\lambda \in \mathbb{R}^-$ respectivamente.

De hecho, sea $\mu \in \mathbb{R}$, con $\mu > 0$ fijo y definimos

$$h(x) = f_{\lambda, \mu}(x) - x.$$

Si tomamos $x_1 > 0$ donde

$$x_1 \in \left(\frac{|\lambda| - \sqrt{|\lambda|^2 + 4\mu}}{2}, \frac{|\lambda| + \sqrt{|\lambda|^2 + 4\mu}}{2} \right).$$

Observamos que $h(x_1) > 0$, dado que:

$$\begin{aligned} h(x_1) = \lambda \operatorname{sen}(x_1) + \frac{\mu}{x_1} - x_1 &\leq |\lambda| + \frac{\mu}{x_1} - x_1 \\ &= \frac{|\lambda|x_1 - \mu - x_1^2}{x_1}. \end{aligned}$$

Al tomar x_1 entre las raíces del polinomio $p(x) = -x^2 + |\lambda|x - \mu$, tenemos que $p(x) > 0$ y así $h(x_1) > 0$.

Ahora, consideremos $x_2 > 0$, donde $x_2 > \frac{|\lambda| + \sqrt{|\lambda|^2 + 4\mu}}{2}$, así obtenemos:

$$\begin{aligned} h(x_2) = \lambda \operatorname{sen}(x_2) + \frac{\mu}{x_2} - x_2 &\leq |\lambda| + \frac{\mu}{x_2} - x_2 \\ &= \frac{|\lambda|x_2 - \mu - x_2^2}{x_2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $p(x) < 0$ y así $h(x_2) < 0$. Entonces, por el Teorema de Valor Intermedio existe un punto x_λ tal que $f_{\lambda, \mu, 0}(x_\lambda) = x_\lambda$. De aquí concluimos que $x_\lambda \in \mathbb{R}^+$ es un punto fijo de la familia en (2). Si elegimos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^{-1}$ y hacemos cálculos análogos a los anteriores, obtenemos un punto fijo $-x_\lambda \in \mathbb{R}^{-1}$.

4.2.3. Puntos críticos y valores críticos de la familia $f_{\lambda, \mu, 0}(z)$

Los puntos críticos de la familia en (2) pueden ser hallados resolviendo la siguiente ecuación:

$$\lambda \cos(z) - \frac{\mu}{z^2} = 0$$

que equivale a la ecuación:

$$\lambda \cos(z) = \frac{\mu}{z^2}.$$

Dado que no es una ecuación fácil de resolver, tomemos $z = x \in \mathbb{R}$, así,

$$\lambda \cos(x) - \frac{\mu}{x^2} = 0$$

o bien:

$$\lambda \cos(x) = \frac{\mu}{x^2}.$$

Observamos que el parámetro λ , en la ecuación anterior, determina la amplitud de la gráfica de la función $\lambda \cos(x)$. Sin pérdida de generalidad podemos tomar $\lambda = 0,5$ y $\mu = 1$, con esto se puede resolver una ecuación mas fácil, es decir, $\cos(x) = 1/x^2$. En la Figura 4.8, observamos que las gráficas de $\cos(x)$ y $1/x^2$ se intersectan en una infinidad de puntos, digamos $(x_i, y_i), i \in \mathbb{Z}$. Los puntos x_i son las soluciones de la ecuación $\lambda \cos(x) = \frac{\mu}{x^2}$, y éstos a su vez, son los puntos críticos de la subfamilia $f_{1,1,0}(z)$. Lo anterior lo podemos formalizar en la siguiente proposición.

Proposición 4.2. *Si $x \in \mathbb{R}$, $\lambda = 1$, entonces la familia $F_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z + 1/z$ tiene una infinidad de puntos críticos.*

Demostración. Para determinar los puntos críticos, necesitamos obtener la derivada de la familia $F_1(z)$, es decir,

$$f'_{1,1,0}(x) = \cos(x) - 1/x^2.$$

Igualando $F_1'(x)$ a cero:

$$\cos(x) - 1/x^2 = 0,$$

o bien:

$$\cos(x) = 1/x^2.$$

Si V_1 una bola abierta con centro en $(\frac{3\pi}{2}, 0)$ y radio $\delta = 1$, existe $y_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\cos(x) = y_1 = 1/x^2$, donde y_1 es la coordenada en el eje y del punto de intersección de las 2 gráficas. La función $\cos(x)$ es periódica, por lo tanto existe una vecindad V_2 con centro en $(\frac{5\pi}{2}, 0)$ y radio $\delta = 1/2$, así, podemos encontrar un punto $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\cos(x_2) = y_2 = 1/x_2^2$. Inductivamente podemos considerar la sucesión de vecindades $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ con centro en los puntos $(\frac{(2k-1)\pi}{2}, 0)$, $k \in \mathbb{N}$, y radio $\delta = 1/n$ es posible hallar la sucesión $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, donde cada uno de los puntos de tal sucesión satisface $\cos x_i = y_i = 1/x_i^2$, $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $f_{1,1,0}(z) = \lambda \operatorname{sen} z + 1/z$ tiene una infinidad de puntos críticos reales cuando $\lambda = 1$ y $z \in \mathbb{R}$. ■

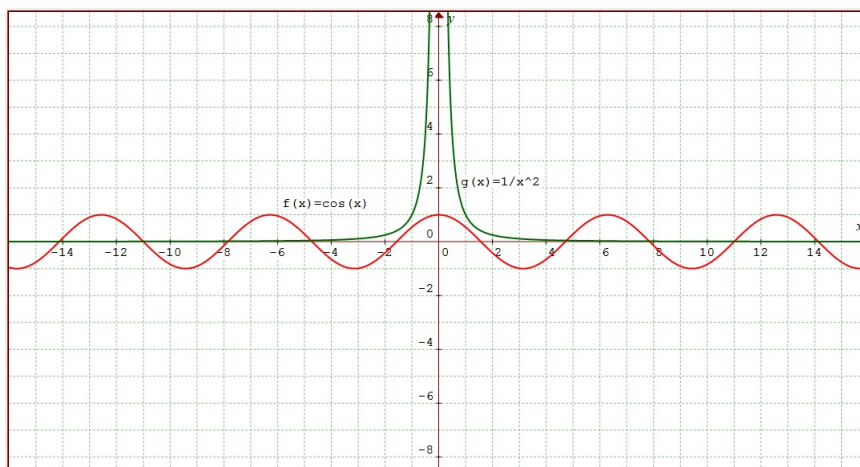


Figura 4.8: Gráficas de las funciones $f(x) = \cos(x)$ y $g(x) = \frac{1}{x^2}$

A partir de los puntos críticos podemos demostrar la siguiente proposición.

Proposición 4.3. *La familia $F_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(z) + 1/z$ tiene una infinidad de valores críticos cuando $\lambda = 1$ y $z \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Por la Proposición 4.2, se tiene que hay una infinidad de puntos críticos de la forma $\frac{(2k-1)\pi}{2} + \epsilon_k$, donde $\epsilon_k \rightarrow 0$, cuando $k \rightarrow \infty$. Sean $x_{k_1} = \frac{(2k_1-1)\pi}{2} + \epsilon_{k_1}$ y $x_{k_2} = \frac{(2k_2-1)\pi}{2} + \epsilon_{k_2}$ para $k_1 \neq k_2 \in \mathbb{Z}$. Supongamos que $F_1(x_{k_1}) = F_2(x_{k_2})$, entonces

$$\operatorname{sen}(x_{k_1}) + \frac{1}{x_{k_1}} = \operatorname{sen}(x_{k_2}) + \frac{1}{x_{k_2}}.$$

Luego,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{(2k_1-1)\pi}{2} + \epsilon_{k_1}\right) + \frac{1}{\frac{(2k_1-1)\pi}{2} + \epsilon_{k_1}} = \operatorname{sen}\left(\frac{(2k_2-1)\pi}{2} + \epsilon_{k_2}\right) + \frac{1}{\frac{(2k_2-1)\pi}{2} + \epsilon_{k_2}}.$$

Así

$$|\cos(\epsilon_{k_1})| + \frac{1}{\frac{(2k_1-1)\pi}{2} + \epsilon_{k_1}} = |\cos(\epsilon_{k_2})| + \frac{1}{\frac{(2k_2-1)\pi}{2} + \epsilon_{k_2}}.$$

O bien:

$$\frac{(2k_1-1)\pi}{2} - \frac{(2k_2-1)\pi}{2} = \epsilon_{k_2} - \epsilon_{k_1} + (|\cos(\epsilon_{k_2})| - |\cos(\epsilon_{k_1})|).$$

Por lo tanto:

$$\pi(k_1 - k_2) = 2(\epsilon_{k_2} - \epsilon_{k_1}) + 2(|\cos(\epsilon_{k_2})| - |\cos(\epsilon_{k_1})|),$$

que es una contradicción, dado que $\epsilon_{k_1}, \epsilon_{k_2} \rightarrow 0$, por lo que se concluye el resultado. ■

A continuación, presentamos un resultado más general que la Proposición 4.3, que nos brinda información sobre los valores críticos de la familia $f_{\lambda,\mu,0}(z)$.

Proposición 4.4. *Los valores críticos reales de la familia $f_{\lambda,1,0}(z) = \lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{1}{z}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ son infinitos. Más aún, λ y $-\lambda$ son puntos de acumulación de éstos.*

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$ punto crítico, así $f'_{\lambda,1,0}(x) = \lambda \cos(x) - \frac{1}{x^2} = 0$, ó bien $\lambda \cos(x) = \frac{1}{x^2}$. Sustituyendo en la función $f_{\lambda,1,0}(x)$, tenemos que

$$\begin{aligned} f_{\lambda,1,0}(x) &= \lambda \operatorname{sen}(x) + \frac{1}{x} \\ &= \sqrt{\lambda^2 - \lambda^2 \cos^2(x)} + \frac{1}{x} \\ &= \sqrt{\lambda^2 - \frac{\lambda^2}{x^4}} + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

para distintos x es claro que $f_{\lambda,1,0}(x)$ son diferentes. Además cuando $x \rightarrow \infty$ $f_{\lambda,1,0}(x) \rightarrow \pm\lambda$ de aquí se sigue λ y $-\lambda$ con puntos de acumulación. ■

Así, obtenemos que λ y $-\lambda$ son puntos de acumulación de los valores singulares; independiente de que valor z_0 sea el polo, y es de esperarse, dado que cuando consideramos valores $z \in \mathbb{C}$ cercanos a ∞ es similiar al comportamiento que presenta la familia $f_{\lambda}(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$.

Corolario 4.3. *La familia de funciones $f_{\lambda,\mu,0}(z) = \lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{\mu}{z_0}$, $\lambda, \mu, \in \mathbb{C}$, pertenece a la clase \mathcal{B}*

Demostración. Dado que la familia $\lambda \operatorname{sen}(x)$ no posee valores asintóticos finitos, ver [Zhang, 2005], tendría que poseer un valor asintótico finito la inversión $\frac{1}{z}$, pero claramente no lo posee; de tal manera que los valores singulares de $f_{\lambda,\mu,0}$ son únicamente los valores críticos, que se acumulan en λ y $-\lambda$ de aquí que son acotados; concluyendo así que $f_{\lambda,\mu,0}$ está en la clase \mathcal{B} ■

La siguiente proposición contribuirá a dilucidar el porqué no se puede extender el Teorema 4.1 en el caso donde el polo es $z_0 = 0$.

Proposición 4.5. *Sea $f_{\lambda,\mu,0}(z) = \lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{\mu}{z}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ fijos. Se cumple para todo $z = x + iy \in \mathbb{C}$ que $|f'_{\lambda,\mu,0}(x + iy)| = |f'_{\lambda,\mu,0}(-x + iy)|$.*

Demostración. Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$, sin pérdida de generalidad consideremos $\lambda = \mu = 1$, así $f_{1,1,0}(z) = \operatorname{sen}(z) + \frac{1}{z}$.

Derivando $f_{1,1,0}(z)$ obtenemos la función $f'_{1,1,0}(z) = \cos(z) - \frac{1}{z^2}$. Evaluando $f'_{1,1,0}(z)$ en $x + iy$ y descomponiendo en su parte real e imaginaria obtenemos:

$$\begin{aligned} f'_{1,1,0}(x + iy) &= \cos(x + iy) - \frac{1}{(x + iy)^2} \\ &= \cos(x) \cosh(y) - i \operatorname{sen}(x) \sinh(y) - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2} + i \frac{2xy}{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2} \\ &= \left(\cos(x) \cosh(y) - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2} \right) + i \left(\frac{2xy}{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2} - \operatorname{sen}(x) \sinh(y) \right). \end{aligned}$$

Y por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned} f'_{1,1,0}(-x + iy) &= \cos(-x + iy) - \frac{1}{(-x + iy)^2} \\ &= \cos(-x) \cosh(y) - i \operatorname{sen}(-x) \sinh(y) - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2} - i \frac{2xy}{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2} \\ &= \left(\cos(x) \cosh(y) - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2} \right) - i \left(\frac{2xy}{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2} - \operatorname{sen}(x) \sinh(y) \right). \end{aligned}$$

Así, tenemos:

$$\operatorname{Re} f'_{1,1,0}(x + iy) = \operatorname{Re} f'_{1,1,0}(-x + iy);$$

$$\operatorname{Im} f'_{1,1,0}(x + iy) = -\operatorname{Im} f'_{1,1,0}(-x + iy).$$

Al tomar módulo concluimos la proposición. ■

Por lo tanto, tomando los puntos fijos reales descritos en la Sección 4.2.2 (2), digamos x_λ y $-x_\lambda$, si x_λ es atractor, $-x_\lambda$ también será atractor; si x_λ es repulsor, $-x_\lambda$ también será repulsor, etc. Se sigue que no podemos hablar de una sola componente atractora en el conjunto de Fatou de $f_{\lambda,\mu,0}$ como enuncia el Teorema 4.1, dado que en ese caso sólo existe un sólo punto fijo. En todo caso podemos considerar que se tienen 2 componentes atractoras en el conjunto de Fatou, y por la relación que guardan los puntos fijos, se necesitará demostrar que el eje imaginario pertenece al conjunto de Julia, como sucede de manera similar en el estudio de la dinámica de la familia $g_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$. Es por ello que concluimos que no se puede extender el Teorema 4.1 al caso cuando el polo $z_0 = 0$.

Capítulo 5

Cortes del Espacio de Parámetros

En general, si estudiamos una familia de funciones definidas a partir de un parámetro, digamos λ , y un punto crítico de las funciones que integran la familia, podemos seguir la órbita de tal punto crítico bajo la iteración de la función y obtener así lo que llamamos el *plano de parámetros*. Por ejemplo, en el caso de la familia cuadrática $g_c(z) = z^2 + c$, $c \in \mathbb{C}$ y su único punto crítico finito, $z = 0$, es a través de la órbita de dicho punto crítico que podemos graficar el plano de parámetros para la familia cuadrática $g_c(z)$. Este plano de parámetros es el conjunto de Mandelbrot.

En el caso de la familia

$$f_{\lambda, \mu, z_0}(z) = \lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{\mu}{z - z_0}, \lambda, \mu, z_0 \in \mathbb{C}$$

que depende de tres parámetros y sabiendo que la familia $f_{\lambda, \mu, z_0}(z)$ tiene una infinidad de puntos críticos, véase demostración del Teorema 4.1 y de la Proposición 4.2, no podemos graficar un plano de parámetros bajo las mismas técnicas del caso de la familia cuadrática; no obstante, podemos graficar lo que llamaremos un *corte del espacio de parámetros*. En lo que sigue fijaremos dos parámetros de la familia $f_{\lambda, \mu, z_0}(z)$ y seguiremos la órbita de un punto crítico bajo tales condiciones.

Definición 5.1. Se define un *corte del espacio de parámetros* de la familia en (1) como:

$$\mathbf{M} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |f_{\lambda, \mu, z_0}^n(\text{punto crítico})| \text{ está acotada}\}.$$

Observación 5.1. Si le asignamos diferentes valores a μ y a z_0 obtendremos diferentes cortes del espacio de parámetros.

Una vez que se considera la subfamilia $f_{\lambda, \mu_0, z_0}(z)$ es necesario tomar un punto crítico de las funciones f que pertenecen a $f_{\lambda, \mu_0, z_0}(z)$, es decir, considerar $\omega \in \mathbb{C}$ tales que:

$$f'_{\lambda, \mu, z_0}(\omega) = \lambda \cos(\omega) - \frac{\mu}{(\omega - z_0)^2} = 0.$$

Por ejemplo, si tomamos $\mu = 1$ y $z_0 = 0$ nos lleva a estudiar los puntos críticos de la familia de funciones cuando el polo está centrado en el origen $f_{\lambda,1,0}(z)$. Del capítulo anterior, obtuvimos que existen una infinidad numerable de puntos críticos que son de la forma:

$$\omega_k = \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) + \epsilon_k \text{ donde } \epsilon_k < \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}.$$

Dado que al variar el parámetro λ variará el valor de ϵ_k ; es ineludible considerar alguna manera que los puntos críticos dependan del parámetro λ y sean los mismos para cuando la variable es compleja. Esto será a través de su desarrollo en serie de potencias de las funciones de variable compleja $f'_{\lambda,1,0}(z)$, es decir:

$$f'_{\lambda,1,0}(z) = \lambda \cos(z) - \frac{1}{z^2} = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} - \frac{1}{z^2}.$$

Para fines computacionales consideramos el desarrollo de la expresión anterior en sus primeros tres términos e igualando a 0, obtenemos las siguientes cuatro raíces:

$$\begin{aligned} z_1 &= -\sqrt{\frac{c - \sqrt{(c-2)c}}{c}} & z_2 &= \sqrt{\frac{c - \sqrt{(c-2)c}}{c}}; \\ z_3 &= -\sqrt{\frac{c + \sqrt{(c-2)c}}{c}} & z_4 &= \sqrt{\frac{c + \sqrt{(c-2)c}}{c}}. \end{aligned}$$

En el caso de considerar un término más a la expansión anterior de Taylor, las raíces son de la forma:

$$\begin{aligned} z_1 &= \left(\frac{2i\sqrt[3]{2}\sqrt{3}c}{\sqrt[3]{4c^3 + 3c^2 + \sqrt{-16c^6 + 24c^5 + 9c^4}}} - \frac{2\sqrt[3]{2}c}{\sqrt[3]{4c^3 + 3c^2 + \sqrt{-16c^6 + 24c^5 + 9c^4}}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{i\sqrt{3}\sqrt[3]{4c^3 + 3c^2 + \sqrt{-16c^6 + 24c^5 + 9c^4}}}{\sqrt[3]{2}c} - \frac{\sqrt[3]{4c^3 + 3c^2 + \sqrt{-16c^6 + 24c^5 + 9c^4}}}{\sqrt[3]{2}c} + 4 \right)^{\frac{1}{2}} \\ z_2 &= - \left(\frac{2i\sqrt[3]{2}\sqrt{3}c}{\sqrt[3]{4c^3 + 3c^2 + \sqrt{-16c^6 + 24c^5 + 9c^4}}} - \frac{2\sqrt[3]{2}c}{\sqrt[3]{4c^3 + 3c^2 + \sqrt{-16c^6 + 24c^5 + 9c^4}}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{i\sqrt{3}\sqrt[3]{4c^3 + 3c^2 + \sqrt{-16c^6 + 24c^5 + 9c^4}}}{\sqrt[3]{2}c} - \frac{\sqrt[3]{4c^3 + 3c^2 + \sqrt{-16c^6 + 24c^5 + 9c^4}}}{\sqrt[3]{2}c} + 4 \right)^{\frac{1}{2}} \\ z_3 &= - \left(-\frac{2i\sqrt[3]{2}\sqrt{3}c}{\sqrt[3]{4c^3 + 3c^2 + \sqrt{-16c^6 + 24c^5 + 9c^4}}} - \frac{2\sqrt[3]{2}c}{\sqrt[3]{4c^3 + 3c^2 + \sqrt{-16c^6 + 24c^5 + 9c^4}}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{i\sqrt{3}\sqrt[3]{4c^3 + 3c^2 + \sqrt{-16c^6 + 24c^5 + 9c^4}}}{\sqrt[3]{2}c} - \frac{\sqrt[3]{4c^3 + 3c^2 + \sqrt{-16c^6 + 24c^5 + 9c^4}}}{\sqrt[3]{2}c} + 4 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$z_4 = \left(-\frac{2i\sqrt[3]{2}\sqrt{3}c}{\sqrt[3]{4c^3 + 3c^2 + \sqrt{-16c^6 + 24c^5 + 9c^4}}} - \frac{2\sqrt[3]{2}c}{\sqrt[3]{4c^3 + 3c^2 + \sqrt{-16c^6 + 24c^5 + 9c^4}}} + \frac{i\sqrt{3}\sqrt[3]{4c^3 + 3c^2 + \sqrt{-16c^6 + 24c^5 + 9c^4}}}{\sqrt[3]{2}c} - \frac{\sqrt[3]{4c^3 + 3c^2 + \sqrt{-16c^6 + 24c^5 + 9c^4}}}{\sqrt[3]{2}c} + 4 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Considerando una de las primeras cuatro raíces ζ_i , que son puntos críticos para $f_{\lambda,1,0}(z)$; y utilizando el software *Fractalstream*, programa diseñado por la Universidad de Cornell- Departamento de Matemáticas que permite explorar sistemas dinámicos complejos, podemos obtener una representación del conjunto \mathbf{M} , véase Definición 5.1, esto es:

$$\mathbf{M} = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |f_{\lambda,1,0}^n(\zeta_i)| = \left| \lambda \operatorname{sen}(\zeta_i) + \frac{1}{\zeta_i} \right|^n \text{ está acotado, } n \in \mathbb{N} \right\},$$

donde ζ_i es un punto crítico de $f_{\lambda,1,0}(z)$.

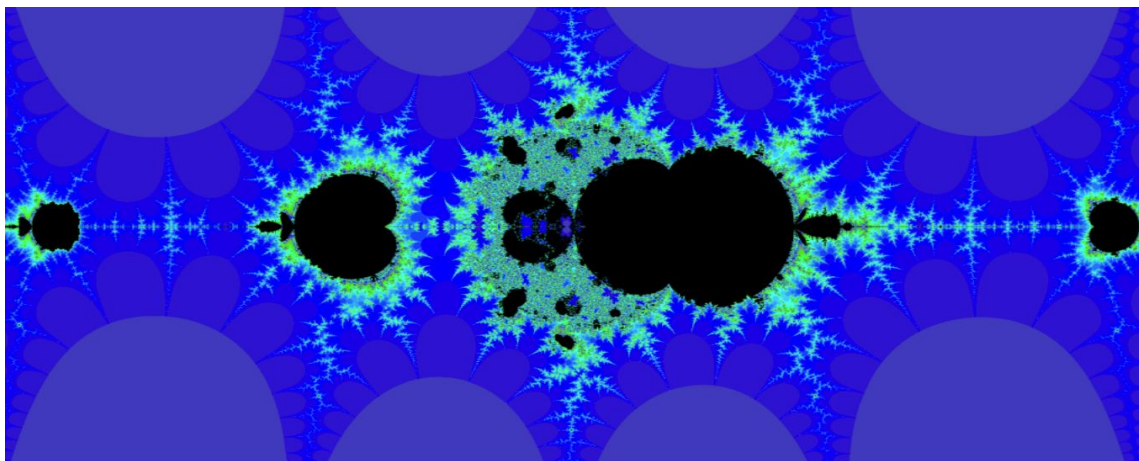


Figura 5.1: Conjunto \mathbf{M} para $\mu = 1, z_0 = 0$

La elección de la raíz ζ_i es independiente porque las funciones que pertenecen a $f_{\lambda,\mu,0}$ son simétricas respecto al eje real, es decir, $f_{\lambda,1,0}(z) = f_{\lambda,1,0}(\bar{z})$, esto porque la función senoidal $\operatorname{sen}(z)$ y la inversión $\frac{1}{z}$ respetan conjugación como se comentó en el Capítulo 4. Un acercamiento en la Figura 5.1, del lado derecho, nos presenta un símil al conjunto de Mandelbrot, sin ser el objeto de estudio de este proyecto, véase Figura 5.2.

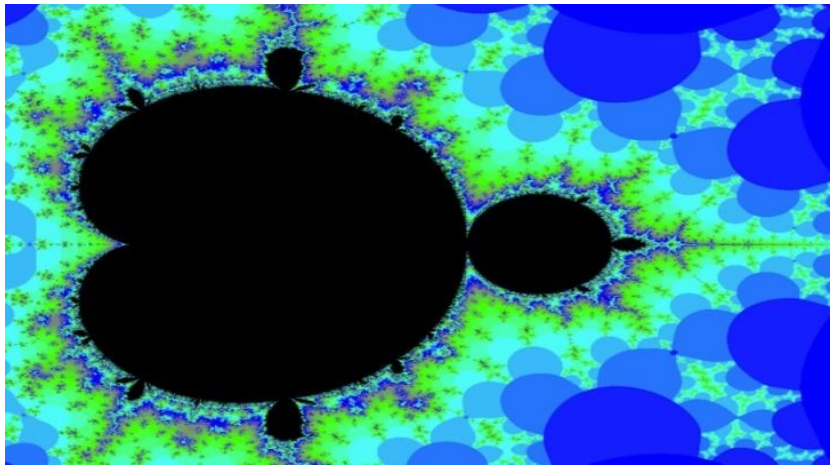


Figura 5.2: Acercamiento de \mathbf{M} para $\mu = 1$ y $z_0 = 0$

Es necesario efectuar cálculos análogos si variamos los parámetros μ y z_0 . Por ejemplo, si consideramos $\mu_0 = 0.5$ y $z_0 = \pi$, la Figura 5.3 muestra un corte en el espacio de parámetros para la siguiente familia:

$$f_{\lambda,0.5,\pi}(z) = \lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{0.5}{z - \pi}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

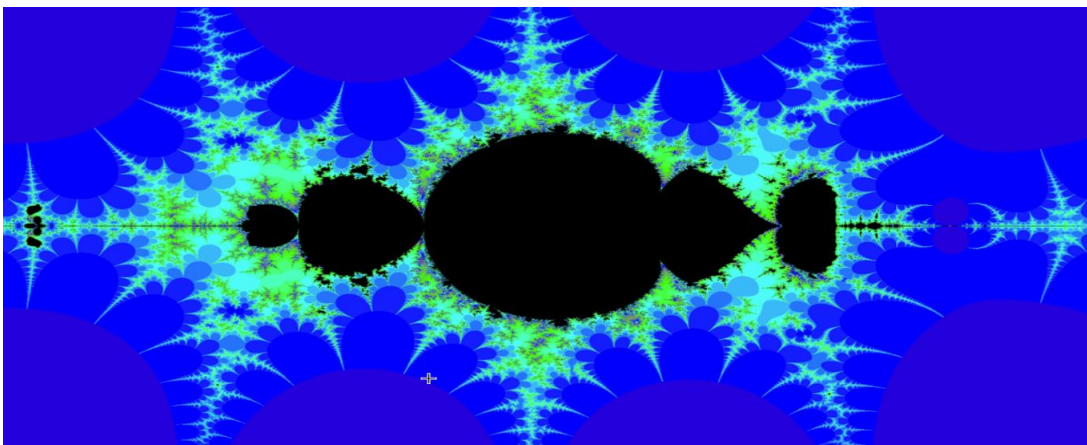


Figura 5.3: Un corte del espacio de parámetros con $\mu = 0.5$ y $z_0 = \pi$

Al estudiar los cortes del espacio de parámetros variando el polo $z_0 = k\pi, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ a $z_0 = 2\pi$ y $z_0 = 3\pi$ se presenta una similitud de tales cortes, véase Figuras 5.4 y 5.5.

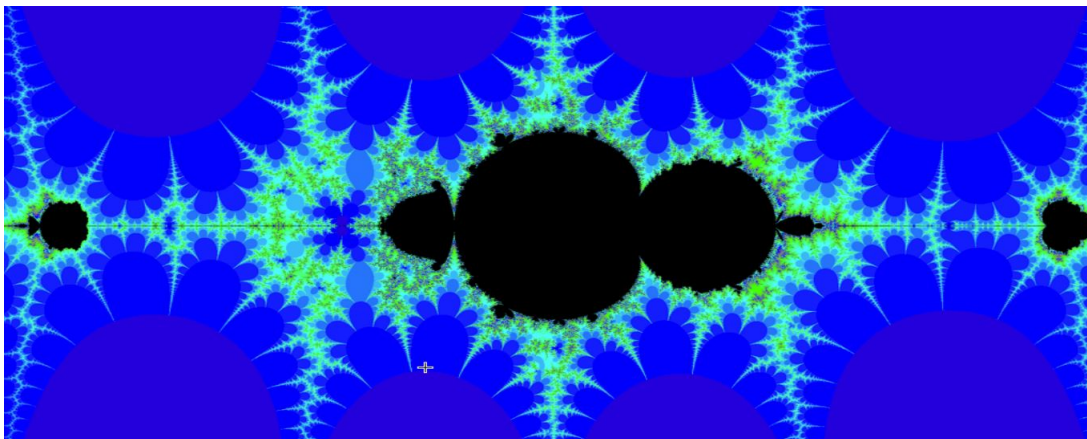


Figura 5.4: Un corte del espacio de parámetros con $\mu = 0,5$ y $z_0 = 2\pi$

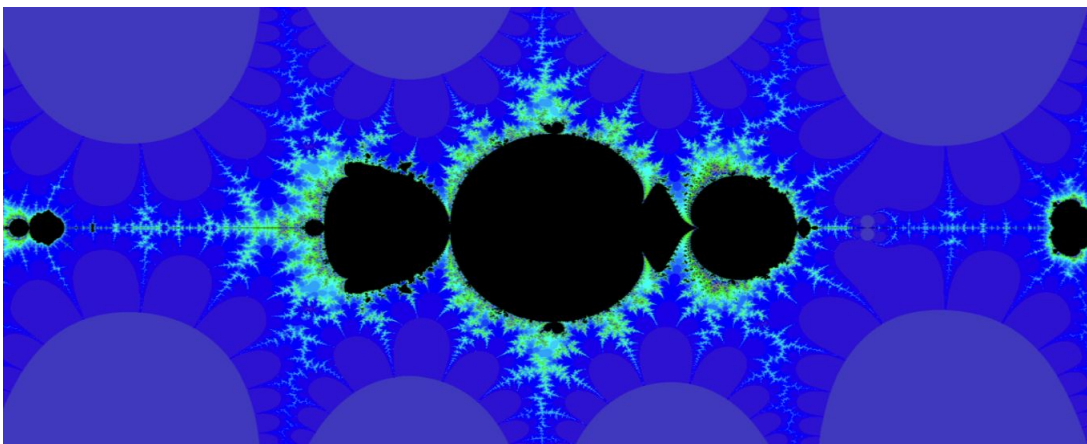


Figura 5.5: Un corte del espacio de parámetros con $\mu = 0,5$ y $z_0 = 3\pi$

Conjetura 5.1. Los cortes del espacio de parámetros para la familia $f_{\lambda,0,5,k\pi}(z) = \lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{0,5}{z-k\pi}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, son casi-conformes.

Fijando un valor del parámetro λ en alguno de los cortes del espacio de parámetros, podemos obtener sus conjuntos de Fatou y de Julia. Por ejemplo, si fijamos los parámetros $\mu = 0,5$, $z_0 = 2\pi$ y tomamos el valor $\lambda = 0,5$ obtenemos el conjunto de Fatou y de Julia de $f_{0,5,0,5,2\pi}(z)$. Los parámetros dados satisfacen el Teorema 4.1, así, sabemos que el conjunto de Fatou es una componente completamente invariante, atractora y multiplemente conexa, (parte negra de la Figura 5.6). El conjunto de Julia es la frontera del conjunto de Fatou que no es conexo en \mathbb{C} .

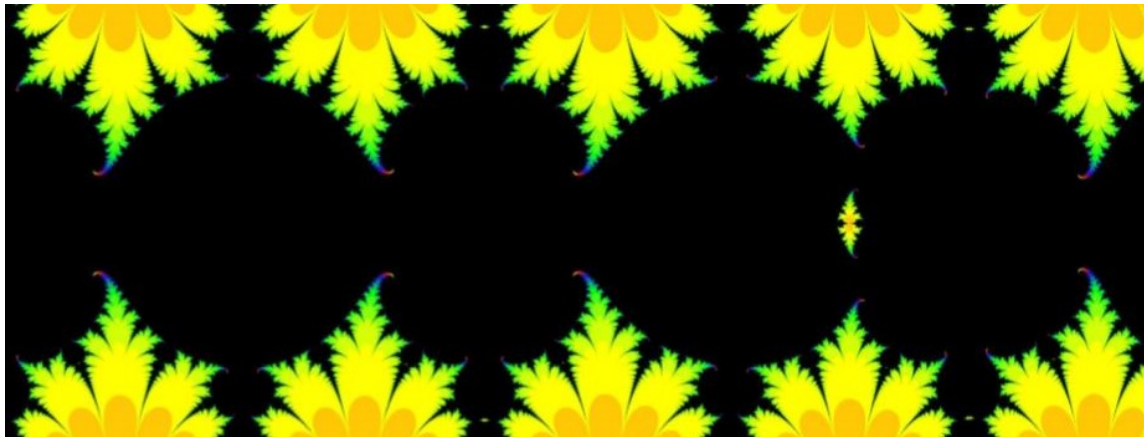


Figura 5.6: Conjunto de Fatou para la función $f_{0,5,0,5,2\pi}(z) = 0,5 \text{sen}(z) + \frac{0,5}{z-2\pi}$

Cuando el polo es $z_0 = 0$ y los parámetros λ, μ son como los establecidos en el Teorema 4.1 del Capítulo 4, se originan dos componentes atractoras en su conjunto de Fatou, véase Figura 5.7.

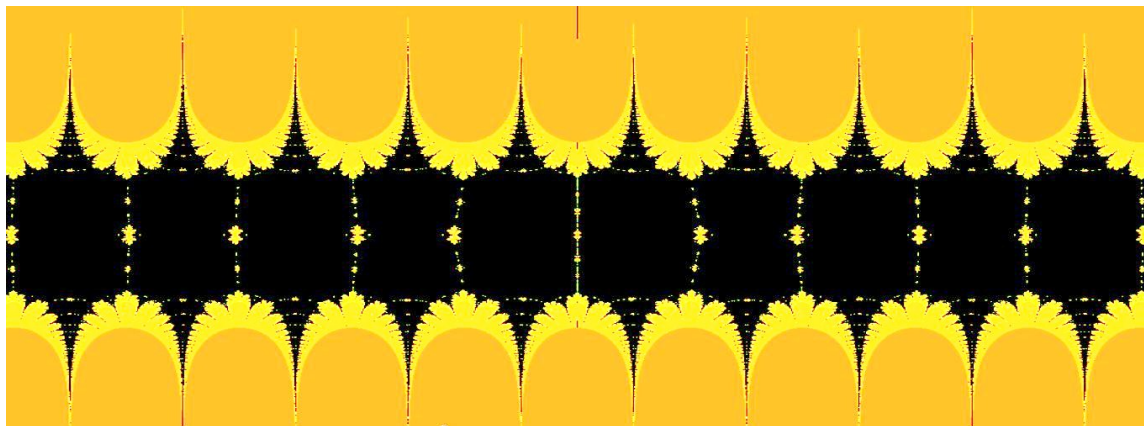


Figura 5.7: Conjunto de Fatou para la función $f_{0,5,0,5,0}(z) = 0,5 \text{sen}(z) + \frac{0,5}{z}$

Por último, si asignamos distintos valores al punto crítico de $f_{\lambda,\mu,z_0}(z)$ obtendremos otras aproximaciones a su conjunto de Fatou y de Julia, de aquí la relevancia de fijar el punto crítico al empezar el estudio de los cortes del espacio de parámetros y los conjuntos de Fatou y Julia originados a partir de éste.

Conjetura 5.2. Si $f_{\lambda,\mu,0}(z)$ y los parámetros λ, μ reales son tales que $0 < |\lambda| < 1, 0 > \mu$ suficientemente pequeña, entonces el conjunto de Fatou tiene dos componentes atractoras simplemente conexas.

Conjetura 5.3. Si $f_{\lambda,\mu,0}(z)$ y los parámetros λ, μ reales son tales que $0 < |\lambda| < 1, 0 > \mu$ suficientemente pequeña, entonces el eje imaginario pertenece al conjunto de Julia.

Conclusiones y Trabajo a Futuro

En esta tesis se ha elaborado un estudio dinámico de la familia $f_{\lambda,\mu,z_0}(z) = \lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{\mu}{z-z_0}$, $\lambda, \mu, z_0 \in \mathbb{R}$. En este capítulo se enumeran algunas de las contribuciones de este trabajo así como las líneas de investigación para un futuro.

6.1. Contribuciones de esta tesis

Para entender las contribuciones de esta tesis conviene recordar que nuestros puntos de partida fueron:

- (A) El trabajo elaborado por Domínguez y Sierra en [Domínguez and Sierra, 2002] sobre la familia $\lambda \operatorname{sen}(z)$, y
- (B) El ejemplo de Domínguez presentado en [Domínguez, 1998].

Se preguntó qué resultados obtenidos en el estudio de la familia de funciones $g_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen}(z)$ se podían extender cuando esta familia de funciones es perturbada, en nuestro caso fue una perturbación de un polo simple complejo.

Las principales contribuciones de esta tesis son las siguientes:

- (1) El Teorema 4.1 que es una extensión el resultado obtenido por Domínguez en [Domínguez, 1998], que afirma la familia $f_{\lambda,\mu}(z) = \lambda \operatorname{sen}(z) + \frac{\mu}{z-k\pi}$, donde $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, 0 < |\lambda| < 1$ y $\mu > 0$ suficientemente pequeña, tiene una sola componente atractora U completamente invariante y multiplemente conexa en el conjunto de Fatou. Más aún, el teorema es válido para $\lambda = 1$ y $0 < \mu$ suficientemente pequeña.
- (2) Se define el Corte de Espacio de Parámetros y a través de determinados cortes, se estudia para qué valores del parámetro λ se cumple el Teorema 4.1. En general, sabemos que no es un problema fácil de resolver, empero por medio del corte adecuado podemos estudiar los conjuntos de Fatou y de Julia para valores del parámetro $|\lambda| < 1$ y $0 < \mu$ suficientemente pequeña.

- (3) En el caso donde el polo está en el origen se estudia la geometría, puntos y valores críticos, y el tipo de puntos periódicos presentes en la familia $f_{\lambda,\mu,0}$. Si bien los miembros de la familia $f_{\lambda,\mu,0}$ presentan simetrías con respecto al origen, es por este hecho que no es posible extender el Teorema 4.1. Se conjetura un nuevo comportamiento dinámico completamente distinto para cuando el polo no está en el origen.
- (4) Se presentan conjuntos de Fatou y de Julia para determinados parámetros λ graficados a través del software *FractalStream*. Se representa la componente de Fatou mencionada en el Teorema 4.1 donde podemos apreciar las características que se describen en dicho teorema. Asimismo, se presenta Conjuntos de Fatou y de Julia para funciones que poseen el polo $z_0 = 0$, donde corroboramos que son dos comportamientos dinámicos distintos en los dos casos de estudio.

6.2. Líneas de trabajo futuro

A lo largo del trabajo de tesis se establecen determinadas preguntas abiertas relacionadas con la dinámica de la familia, las cuales mencionaremos a continuación.

- (A) ¿Hasta qué valor se puede considerar del parámetro $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > 1$ para que se satisfaga el Teorema 4.1?

Para una posible respuesta, debemos investigar el corte correspondiente al espacio de parámetros. Este corte se puede definir fijando el valor del polo y el punto crítico. Por ejemplo, en el caso donde el polo es de la forma $z_0 = k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, podemos estudiar los conjuntos de Fatou y de Julia para valores del parámetro λ en una vecindad de radio $\frac{1}{2}$ centrada en $\pi/2$. A partir de la representación gráfica de sus conjuntos de Fatou y de Julia, apreciamos que es parecido al dado en la Figura 5.6, véase Figura 6.1.

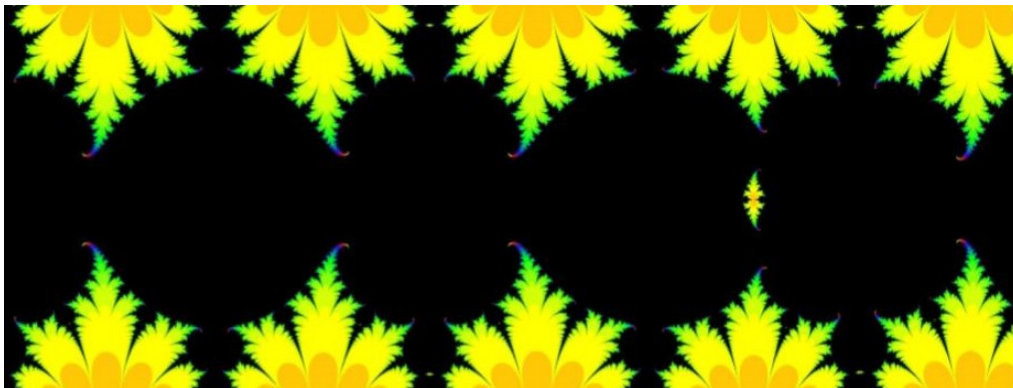


Figura 6.1: Conjunto de Fatou para la función $f_{\pi/2+0,5i,0,5,2\pi}(z) = (\frac{\pi}{2} + 0,5i) \operatorname{sen}(z) + \frac{0,5}{z-\pi}$

- (B) *¿Qué comportamiento dinámico se presenta cuando el polo $z_0 \in \mathbb{C}$ está en el origen?*

La presencia de dos puntos fijos atractores generan un comportamiento dinámico distinto al caso donde el polo $z_0 = k\pi, k \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Es a través de la representación gráfica de su conjunto de Fatou y de Julia que podemos conjeturar que el Conjunto de Fatou tiene dos componentes atractoras simplemente conexas.

- (C) *¿Es el Teorema 4.1 verdadero para $z_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$? ¿Es necesario que el polo $z_0 \in \mathbb{C}$ sea un polo simple?*

Al parecer, es necesaria una relación entre el parámetro λ y el polo z_0 de tal manera que estén lo *suficientemente separados* para no presentar problemas en la acumulación de los valores críticos, fenómeno que se puede apreciar en el Teorema 4.1.

Elementos de la Topología en Espacios Métricos

En este apéndice mencionaremos ciertos conceptos primigenios de la topología de conjuntos, y algunas propiedades de éstos, que serán de ayuda para el desenvolvimiento de los capítulos subsecuentes. En general, los conceptos son tratados en un espacio métrico cualquiera pero para los fines de la comprensión del lector se pueden bien imaginar que se abordan en el plano complejo (\mathbb{C}) o la esfera de Riemann ($\hat{\mathbb{C}}$), espacios que se profundizaron a lo largo de este trabajo de tesis.

Definición A.1. Un *espacio topológico* es un conjunto X junto con una colección τ de subconjunto de X que satisfacen las siguientes propiedades:

1. $\emptyset \in \tau, X \in \tau$.
2. La intersección de cualquier subcolección finita de conjuntos de τ pertenece también a τ .
3. La unión arbitraria de conjuntos de τ pertenece también a τ .

Los conjuntos de τ con los *conjuntos abiertos*, y sus complementos en X son llamados *conjuntos cerrados*. La colección τ es llamada topología en X .

Definición A.2. Un *espacio métrico* es un conjunto X con una función *distancia* asociada (también llamada métrica) $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ donde d cumple lo siguiente: Para cualesquiera $x, y, z \in X$:

1. $d(x, y) \geq 0$;
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
3. $d(x, y) = d(y, x)$;
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Sea X un conjunto, sea d una métrica sobre X y sea A un subconjunto de X . Un punto $a \in A$ se llama *punto interior* si existe un número $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset A$.

Definición A.3. Si a es un punto de un espacio E con métrica ρ y ε es cualquier número real positivo, el conjunto de todos los números x que satisfacen $\rho(x, a) < \varepsilon$ se llamará bola abierta de centro a y radio ε o una ε -esfera de a ; es denotada por $B(a, \varepsilon)$ ó $B_\rho(a, \varepsilon)$, cuando deseamos evidenciar la métrica ρ .

Observación A.1. Si b es cualquier punto de $B(a, \varepsilon)$, entonces existe un δ positivo tal que

$$B(b, \delta) \subseteq B(a, \varepsilon).$$

Definición A.4. Un conjunto A en E es un conjunto abierto, si cada uno de sus puntos tiene una bola abierta contenida en A .

El conjunto nulo y el espacio total son siempre conjuntos abiertos.

Definición A.5. Sea X un conjunto y sea d una métrica sobre X . Denotaremos por A_d al conjunto de todos los conjuntos abiertos con respecto a la métrica d .

Teorema A.1 (Topología inducida por la métrica). [Munkres,2000] *Sea X un conjunto y sea d una métrica sobre X . Entonces el conjunto A_d de todos los subconjuntos de X abiertos con respecto a la métrica d es una topología sobre X . Esto significa que cumplen las siguientes condiciones:*

1. Si $(A_i)_{i \in J}$ es una familia de conjuntos pertenecientes a A_d , entonces $\bigcup_{i \in J} A_i \in A_d$.
2. Si $A_1, A_2 \in A_d$ entonces $A_1 \cap A_2 \in A_d$.
3. $X \in A_d$.

Lema A.1. [Munkres,2000] (1) *La unión arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*

(2) *La intersección de un número finito de conjuntos abiertos es un abierto.*

La primera parte del Lema A.1 es válida para una unión infinita de conjuntos abiertos, mientras que la segunda parte no se puede extender. De hecho, el conjunto singular $\{a\}$, que en general no es un conjunto abierto, es la intersección de los conjuntos abiertos $B(a, \frac{1}{n})$, $n = 1, 2, \dots$.

Lema A.2. [Newman, 1939] *El complemento de un conjunto finito de puntos es abierto.*

Definición A.6. Se llama entorno (o vecindad) del punto a a todo conjunto abierto que lo contenga.

Así, en particular, una esfera abierta de centro a y cualquier radio ε es una vecindad de a .

El concepto de entorno está motivado por la idea intuitiva de cercanía o proximidad al punto en cuestión. Esa noción y, por consiguiente, su definición precisa como

entorno, constituye una de las ideas fundamentales sobre la que se apoya el Análisis y la Topología. Los conceptos como el de límite, continuidad, derivada y otros tienen allí su origen.

Siguiendo la corriente de estas ideas formularemos el concepto de punto de acumulación de un conjunto. Como su nombre lo indica, es un punto alrededor del que se acumulan, se concentran, los puntos del conjunto, de forma tal que, por “pequeño” que sea el entorno, siempre los hallaremos en él.

Definición A.7. Sea A un conjunto en el espacio métrico (E, ρ) y $x \in E$. Decimos que x es un *punto de acumulación* del conjunto A , si todo entorno de x contiene puntos de A distintos de x , es decir, para todo entorno S de x se cumple:

$$(S - \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Al conjunto de todos los puntos de acumulación de un conjunto A se llama *conjunto derivado* de A y se denota por A' .

En general, A' puede contener desde ninguno hasta infinitos puntos y su relación con A puede ser cualquiera: desde coincidir con él, contenerlo, estar contenido en él, ser disjunto o ninguna de las anteriores.

Observación A.2. Las siguientes proposiciones siempre se cumplen:

1. Si A es finito, $A' = \emptyset$.
2. Un punto x puede ser un punto de acumulación de A sin pertenecer al conjunto A .

Definición A.8. Sea (E, ρ) un espacio métrico y A un subconjunto de E . Si $A' \subseteq A$ decimos que A es un conjunto cerrado.

Observación A.3. El conjunto \emptyset y E son cerrados trivialmente.

Definición A.9. Si $x \in A$ pero no es un punto de acumulación de A , recibe el nombre de punto aislado de A .

Por ejemplo, el conjunto $B = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ en \mathbb{R}^1 tiene al 0 como su único punto de acumulación y todos los elementos de B son puntos aislados.

Definición A.10. Si un conjunto A de un espacio métrico (E, ρ) posee la propiedad que $A' = A$, es decir, es cerrado y que todos sus puntos son de acumulación, decimos que A es un conjunto perfecto.

Unos ejemplos clásicos de conjuntos perfectos son el conjunto de Cantor y un intervalo cerrado de más de un punto en la recta real.

Con cualquier conjunto A en un espacio (E, ρ) están asociados dos conjuntos, su clausura y su interior, que son respectivamente el más pequeño conjunto cerrado que contiene a A y el más grande conjunto abierto contenido en A .

Definición A.11. La clausura del conjunto A de un espacio métrico (E, ρ) , ó $\mathfrak{K}A$, está definida como la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A ,

$$\bar{A} = \mathfrak{K}A = \bigcap_{\substack{A \subseteq F, \\ F \text{ cerrado}}} F.$$

Definición A.12. El interior, $\mathfrak{I}A$, de un conjunto A de un espacio métrico (E, ρ) es la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en A .

$$\mathfrak{I}A = \bigcup_{\substack{G \subseteq A \\ G \text{ abierto}}} G.$$

Lema A.3. [Newman, 1939] *Las siguientes proposiciones siempre se cumplen:*

1. Una condición necesaria y suficiente para que A sea cerrado es que $\bar{A} = A$.
2. Una condición necesaria y suficiente para que A sea abierto es que $\mathfrak{I}A = A$.

Teorema A.2. [Munkres, 2000] *Las siguientes proposiciones siempre se cumplen:*

1. La unión de un número finito de cerrados es un conjunto cerrado.
2. La intersección de una familia cualquiera de cerrados es un conjunto cerrado.

Definición A.13. La frontera, $\mathfrak{F}A$, de un conjunto A de un espacio métrico (E, ρ) , es por definición $\bar{A} - \mathfrak{I}A$.

Junto las definiciones fundamentales de conjuntos cerrados y abiertos, establecemos conceptos relacionados a las sucesiones convergentes de puntos de un espacio métrico general.

Definición A.14. Una sucesión (x_n) en un espacio métrico (E, ρ) se dice de Cauchy (o que satisface la condición de Cauchy), si cualquiera sea $\varepsilon > 0$ existe una constante $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para cada pareja de enteros positivos $n, m \geq N(\varepsilon)$, tenemos que $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Es claro que toda sucesión de Cauchy es convergente, el recíproco en general no es cierto, dando pie a la siguiente definición.

Definición A.15. Un espacio métrico (E, ρ) se dice completo, si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Teorema A.3 (Bolzano-Weierstrass). [Newman, 1939] *Cada sucesión acotada en algún espacio métrico homeomorfo a \mathbb{R}^n admite una subsucesión convergente.*

La importancia de los conjuntos que definiremos a continuación es fundamental en la topología asociada a la métrica y en la topología general, dado que poseen propiedades interesantes y facilidad de su manejo.

Definición A.16. Sea un conjunto A , no vacío en un espacio métrico: decimos que A es compacto, si toda cubierta abierta de A admite una subcubierta finita.

Estudiaremos una caracterización de los conjuntos compactos en los espacios métricos. Dado un número $\varepsilon > 0$, una ε -red en (E, ρ) es una colección \mathcal{A} de puntos de E tal que, para todo $x \in E$, existe $y \in \mathcal{A}$ tal que $\rho(x, y) < \varepsilon$. La ε -red se dice finita si el conjunto \mathcal{A} es finito. Un espacio métrico es totalmente acotado, si para cada $\varepsilon > 0$ existe en E una ε -red finita.

Lema A.4. [Newman, 1939] *Sea (E, ρ) un espacio métrico, $A \subseteq E$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. A es compacto.
2. A admite un punto de acumulación en A .
3. Toda sucesión en A tiene un punto límite.
4. A es totalmente acotado y completo.

Definición A.17. Dos subconjuntos H_1 y H_2 de un espacio (E, ρ) , constituyen una desconexión de A , $A \subseteq E$, si son no vacíos, disjuntos, abiertos en el subespacio (A, ρ) y la unión forma al conjunto A . Un espacio, o conjunto, es conexo si no admite una desconexión.

En general, si A admite una desconexión, ésta puede no ser única.

Definición A.18. Un conjunto abierto, conexo y no nulo en un espacio E , es llamado un dominio.

Definición A.19. Los subconjuntos conexos maximales (ordenados por la inclusión) de un espacio topológico no vacío se llaman las componentes conexas del espacio.

Dado que si C es una componente de un espacio E , \overline{C} es un subconjunto conexo del mismo espacio, que intersecta a C por lo tanto está contenido en C , dado que la componente es un conjunto maximal, así se tiene que las componentes son conjuntos cerrados. En el caso donde el número de componentes es finito, cada componente es también un subconjunto abierto, sin embargo, si el número de componentes es infinito, podrían resultar no abiertos, tal es el caso de las componentes conexas del conjunto de los racionales en la recta real, que resultan ser los conjuntos singulares, que en general no son abiertos.

Definición A.20. Dados dos puntos x e y de un espacio topológico X , un *camino* en X que une x con y es una aplicación continua $f : [a, b] \rightarrow X$ de algún intervalo cerrado de la recta real en X , de modo que $f(a) = x$ y $f(b) = y$. Un espacio X se dice que es *conexo por caminos* si cada par de puntos de X se pueden unir mediante un camino en X .

El siguiente lema establece una relación entre los conjuntos abiertos y conexos con los conjuntos conexos por caminos.

Lema A.5. [Croom, 2016] *Cada subconjunto E abierto y conexo de \mathbb{R}^n es conexo por caminos.*

Definición A.21. Un dominio conexo por caminos D se dice *simplemente conexo* si cualquier curva cerrada simple puede ser contraída a un punto continuamente en D . Si un dominio D es conexo pero no simplemente conexo, decimos que D es *múltiplemente conexo*. En particular, decimos que un subconjunto $E \subset \mathbb{R}^2$ es simplemente conexo si E y $\mathbb{R}^2 \setminus E$ son conexos.

Bibliografía

- Ahlfors, L. V. (1984). *Complex Analysis*. McGraw Hill.
- Bailey, D. (1989). A historical survey of solution by functional iteration. *Math. Mag.*, **62**(3), 155–166.
- Baker, I. (1968). Repulsive fixpoints of entire functions. *Mathematische Zeitschrift*, **104**, 252–256.
- Baker, I. N., Kotus, J., and Lü, Y. (1990). Iterates of meromorphic functions II: Examples of wandering domains. *J. London. Math. Soc.*, **42**(2), 267–278.
- Baker, I. N., Kotus, J., and Lü, Y. (1991a). Iterates of meromorphic functions I. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, **11**, 241–248.
- Baker, I. N., Kotus, J., and Lü, Y. (1991b). Iterates of meromorphic functions III: Preperiodic domains. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, **11**, 603–618.
- Baker, I. N., Kotus, J., and Lü, Y. (1992). Iterates of meromorphic functions IV: Critical finite functions. *Result in Math.*, **22**, 651–656.
- Bergweiler, W. (1993). Iteration of meromorphic functions. *Bulletion (New Series) of the American Mathematical Society*, **29**, 151–188.
- Cayley, A. (1879). Applications of the newton-fourier method to an imaginary root of an equation. *Quart. J. of Pure and Applied Math*, **16**, 179–185.
- Conway, J. B. (1978). *Functions one Complex Variable I*. Springer Verlag.
- Croom, F. (2016). *Principles of Topology*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications.
- Devaney, R. L. (1991). ez: Dynamics and bifurcations. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **01**(02), 287–308.
- Domínguez, P. (1998). Dynamics of trascendental meromorphic functions. *Ann. Acad. Sc. Fenn. Math.*, **23**, 225–250.

- Domínguez, P. and Sienra, G. (2002). A study of the dynamics of $\lambda \sin z$. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **12**(12), 2869–2883.
- Dong, X. (1992). On iteration of a function in the sine family. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **165**(2), 575–586.
- Eremenko, A. and Lyubich, M. (1992). Dynamical properties of some classes of entire functions. *Annales de l'institut Fourier*, **42**(4), 989–1020.
- Fatou, P. (1919). Sur les equations fonctionnelles (deuxième mémoire). *Bull. Sci. Math. France*, **47**, 208–314.
- Fatou, P. (1926). Sur l'itération des fonctions transcendentes entières. *Acta Math.*, **47**, 337–370.
- Iversen, F. (1914). *Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes*. Imprimerie de la Société de littérature finnoise.
- Julia, G. (1918). Sur l'itération des fonctions rationnelles. *J. Math. Pures Appl.*, **7**, 47–245.
- Kollerstrom, N. (1992). Thomas simpson and newton's method of approximation: an enduring myth. *The British Journal for the History of Science*, **25**, 347–354.
- Lin, I.-H. (2011). *Classical Complex Analysis*. World Scientific.
- Marsden, J. and Hoffman, M. (1999). *Basic Complex Analysis*. W. H. Freeman.
- McMullen, C. T. (1994). *Complex Dynamics and Renormalization*. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press.
- Milnor, J. (2006). *Dynamics in One Complex Variable. (AM-160): Third Edition. (AM-160)*. Princeton University Press.
- Munkres, J. R. (2000). *Topology*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New York.
- Needham, T. (1998). *Visual Complex Analysis*. Clarendon Press.
- Newman, M. (1939). *Elements of the Topology of Plane Sets of Points*. The University Press.
- Noguchi, J. (1998). *Introduction to Complex Analysis*. American Mathematical Society.
- Palka, B. P. (2012). *An Introduction to Complex Theory*. Springer Verlag.
- Schröder, E. (1870). About infinitely many algorithms for the solution of equations. (Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen.). *Math. Ann.*, **2**, 317–365.

-
- Schröder, E. (1871). Über iterite funktionen. *Math. Ann.*, **3**, 296–322.
- Shiff, J. L. (1993). *Normal Families*. Springer Verlag.
- Sullivan, D. (1985). Quasiconformal homeomorphisms and dynamics i. solution of the fatou-julia problem on wandering domains. *Annals of Mathematics*, **122**(2), 401–418.
- Xiong, C. (2004). Bloch functions and bloch constants. *Computers and Mathematics with Applications*, **47**(6).
- Zhang, G. (2005). On the dynamics of $e^{2\pi i\theta} \sin(z)$. *Illinois Journal of Mathematics*, **49**(4), 1171–1179.