BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

UN ESTADO DEL ARTE SOBRE LA TEORÍA DE LA OBJETIVACIÓN EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA
LIC. FELIPE CASTRO FERNÁNDEZ

DIRECTOR DE TESIS
DR. JOSÉ ANTONIO JUÁREZ LÓPEZ

CO-DIRECTOR DE TESIS
DR. JOSÉ GABRIEL SÁNCHEZ RUÍZ

PUEBLA, PUE., JUNIO DE 2023

DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el C:

FELIPE CASTRO FERNÁNDEZ

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 08 de junio de 2023, con la tesis titulada:

"UN ESTADO DEL ARTE SOBRE LA TEORÍA DE LA OBJETIVACIÓN EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 19 de junio de 2023

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
COORDINADORA DE LA MAESTRÍA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

DRA´LAHR/l´agm*

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 Sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

AGRADECIMIENTO A CONACYT

Esta investigación fue realizada con el financiamiento del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), mediante la Beca de Maestría Nacional otorgada al Núm. de CVU: 209694, durante el periodo enero 2021 - diciembre 2022.

AGRADECIMIENTOS PERSONALES

A mis maestros de la Maestría en Educación Matemática:

Dra. Estela Juárez Ruiz quien me impartió clases de Metodología de la Investigación I y II,
Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar con quien tomé clases de Educación Matemática III y IV,
Dr. José Martín Estrada Analco quien me impartió los cursos de Matemática Escolar I y Problemas de Matemática Escolar I,
Dra. Araceli Juárez Ramírez con quien tomé clases de Matemática Escolar II y Problemas de Matemática Escolar II,
Dr. José Gabriel Sánchez Ruiz quien me acompañó y orientó como mi Co-Director de Tesis e impartió clases de Psicología del Aprendizaje de las Matemáticas I y II,
Dr. José Antonio Juárez López quien me acompañó y orientó como mi Director de Tesis e impartió clases de Educación Matemática I y II.

Al Dr. Isaias Miranda Viramontes quien, al tener un conocimiento especializado sobre la Teoría de la Objetivación, aceptó la invitación para ser mi asesor técnico, por lo cual leyó y retroalimentó las primeras versiones de este trabajo de investigación,

A mi compañero Bret por su apoyo durante el proceso de ingreso a esta Maestría.

A mi compañera Mar por apoyarme, también, durante el proceso de ingreso a esta Maestría; por motivarme y asesorarme en contenidos temáticos nuevos para mí, así como por acompañarme y ser parte de mi vida en esta etapa de mi formación profesional.

A mi mamá y mi hermana por su apoyo para permitirme dedicar el tiempo necesario al trabajo y el estudio.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS 5
ÍNDICE DE FIGURAS 6
RESUMEN 7
ABSTRACT 9
INTRODUCCIÓN 11
CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA 12
1.1. Pregunta general de investigación 13
1.2. Objetivos de investigación 13
1.3. Justificación 13
CAPÍTULO 2. MARCO CONCEPTUAL 15
2.1. Conceptualización de *Estado del Arte* 15
2.2. Carácter formativo y producto de investigación 16
2.3. Postura epistemológica 17
CAPÍTULO 3. MÉTODO DE INVESTIGACIÓN 18
3.1. Paradigma de investigación 18
3.2. Tipo de investigación 18
3.3. Procedimiento 18
3.3.1. Primera Fase: planeación y diseño 19
3.3.2. Segunda Fase: gestión y análisis 20
CAPÍTULO 4. RESULTADOS Y ANÁLISIS 24
4.1. Dimensiones de Análisis 26
4.1.1. Análisis de la Dimensión *Teórico-Metodológica* 27
4.1.2. Análisis de la Dimensión *Investigativa* 46
4.1.3. Análisis de la Dimensión *Práctico-Pedagógica* 53
CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES 57
BIBLIOGRAFÍA 61
ANEXOS 66

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. *Categorías de análisis deductivas para estudiar los aportes teórico-metodológicos de la TO*…….. 21

Tabla 2. *Categorías de análisis deductivas para estudiar las producciones investigativas y práctico-pedagógicas realizadas desde la perspectiva de la TO*…….. 22

Tabla 3. *Dimensiones de Análisis de las Unidades de Muestreo*…….. 25

Tabla 4. *Unidades de Muestreo clasificadas por dimensión de análisis*…….. 26

Tabla 5. *Características metodológicas de las producciones investigativas*…….. 47

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. *Documentos por tipo de publicación*..... 23

Figura 2. *Documentos por su fecha de publicación*..... 24

Figura 3. *Documentos por su idioma de publicación*..... 24

Figura 4. *Dialéctica del saber y el conocimiento*..... 32

Figura 5. *Concepción del Aprendizaje en la Teoría de la Objetivación*..... 36

Figura 6. *Sistemas Semióticos de Significación Cultural*..... 37

Figura 7. *Educación como un proyecto de conocimiento y devenir*..... 41

Figura 8. *La actividad como sistema emergente en el aula*..... 44

RESUMEN

En este trabajo se presenta *un estado del arte sobre los aportes teórico-metodológicos y las producciones investigativas de la Teoría de la Objetivación en el campo de estudio de la Educación Matemática durante el periodo 2006-2021*.

En el marco del paradigma sociocrítico se realizó una investigación de tipo documental con enfoque cualitativo, a un nivel descriptivo-analítico. Se adoptó un procedimiento metodológico propio del estado del arte concebido como una modalidad de investigación cualitativa documental. A un nivel general, se llevaron a cabo dos acciones investigativas relacionadas con la generación de nuevo conocimiento: una *heurística*, referida a la búsqueda, recolección y selección de la información, y otra *hermenéutica*, que consistió en la lectura, análisis, interpretación, comprensión crítica y objetiva de la información documental.

La búsqueda, localización y selección de documentos, como artículos académicos, tesis de licenciatura, maestría y doctorado, se realizó en bases de datos tales como Dialnet, DOAJ, EBSCO, Google Académico, Latindex, Redalyc, Scopus, Scielo y Web of Science, a las cuales se encuentran indexadas tanto Revistas de Investigación en Educación Matemática como Repositorios Institucionales. Los criterios de búsqueda y selección generales fueron: la denominación de la "Teoría de la Objetivación" incluida en el título de las fuentes documentales, las palabras clave de "objetivación", "labor conjunta" y "ética comunitaria" (con su respectiva traducción al inglés), así como el periodo temporal "2006-2021". En cuanto a los instrumentos de recolección y análisis de la información, se utilizaron una matriz bibliográfica (elaborada mediante el software de Excel) y una matriz analítica de contenido (adaptada a las herramientas que ofrece el software MAXQDA).

Respecto a los resultados obtenidos de la búsqueda, fueron localizadas 180 publicaciones, las cuales integraron el universo documental definitivo, registrado en una matriz bibliográfica elaborada en el software de Excel. De ahí se seleccionaron, mediante un muestreo intencional, 45 documentos que cumplieron con los siguientes criterios de inclusión y exclusión: ser artículos académicos que abordaran los antecedentes históricos y componentes conceptuales de la TO, así como reportes de investigaciones realizadas durante el periodo 2006-2021; dejando fuera de la selección trabajos como tesis, libros, capítulos de libro, video-conferencias y entrevistas. Por su contenido, tales documentos fueron clasificados en tres dimensiones denominadas: *teórico-metodológica*, *investigativa* y *práctico-pedagógica*.

En la dimensión *teórico-metodológica* se ubicaron 20 de los documentos seleccionados. A partir de su estudio y análisis se pudieron identificar algunos de los *antecedentes históricos* de la Teoría de la Objetivación, así como sus principales componentes y aportes conceptuales en el área *ontológica*, *epistemológica*, *educativa*, *metodológica* y *valorativa*.

En la dimensión *investigativa* se ubicaron 15 de los documentos seleccionados. Todos se caracterizaron por analizar los procesos de objetivación de diversos objetos matemáticos, tales como: patrones de generalización y pensamiento algebraico, número racional, multiplicación, derivada, orientación espacial, resta de vectores, construcciones euclidianas con GeoGebra e interpretación de gráficas cartesianas, entre otros. Esto demuestra la extensión y el alcance que ha tenido la TO hacia otros campos de la educación matemática al explorar procesos de objetivación de diversos objetos matemáticos, para comprender la toma de conciencia que realizan los estudiantes, más allá de los estudios iniciales centrados en el pensamiento algebraico y la generalización de patrones.

En la dimensión *práctico-pedagógica* se ubicaron 10 documentos caracterizados por presentar propuestas para explorar el pensamiento multiplicativo en estudiantes de educación inicial, la formación de docentes y profesionales de la salud, la enseñanza-aprendizaje de temas ambientales, de cinemática, geográficos y cartográficos, así como aportes para un método que permita analizar aspectos éticos en el aula de matemáticas y la constitución de la labor conjunta entre estudiantes y docentes. Estos hallazgos evidencian parte del desarrollo que ha tenido la TO más allá del campo de la educación matemática, durante el periodo 2006-2021. Esto significa que ya no sólo se investiga sobre diversos objetos matemáticos, sino que, además, en los últimos años se han empezado a estudiar otros contenidos (ambientales, geográficos, de física) y aspectos educativos (éticos y labor conjunta), a plantear propuestas que trascienden a otras áreas del conocimiento (ciencias, geografía), así como a la formación de futuros maestros de matemáticas y profesionales de la salud.

ABSTRACT

This paper presents a state of the art on the theoretical-methodological contributions and the investigative productions of the Theory of Objectification in the field of study of Mathematics Education during the period 2006-2021.

Within the framework of the socio-critical paradigm, a documentary-type investigation was carried out with a qualitative approach, at a descriptive-analytical level. A methodological procedure typical of the state of the art was adopted, conceived as a modality of documentary qualitative research. At a general level, two investigative actions related to the generation of new knowledge were carried out: one heuristic, referring to the search, collection and selection of information, and another hermeneutics, which consisted of reading, analysis, interpretation, comprehension. critical and objective documentary information.

The search, location and selection of documents, such as academic articles, bachelor's, master's and doctoral theses, was carried out in databases such as Dialnet, DOAJ, EBSCO, Google Scholar, Latindex, Redalyc, Scopus, Scielo and Web of Science, to which both Mathematics Education Research Journals and Institutional Repositories are indexed. The general search and selection criteria were: the name of "the Objectification Theory" included in the title of the documentary sources, the keywords "objectification", "joint work" and "community ethics" (with its respective translation into English), as well as the period temporary "2006-2021". Regarding the data collection and analysis instruments, a bibliographic matrix (prepared using Excel software) and an analytical content matrix (adapted to the tools offered by the MAXQDA software) were used.

Regarding the results obtained from the search, 180 publications were located, which made up the definitive documentary universe, registered in a bibliographic matrix prepared in Excel software. From there, 45 documents were selected through intentional sampling that met the following inclusion and exclusion criteria: being academic articles that addressed the historical background and conceptual components of OT, as well as research reports carried out during the period 2006-2021; leaving out of the selection works such as theses, books, book chapters, video-conferences and interviews. Due to their content, such documents were classified into three dimensions called: theoretical-methodological, investigative, and practical-pedagogical.

In the theoretical-methodological dimension, 20 of the selected documents were located. From its study and analysis it was possible to identify some of the historical background of the Theory of Objectification, as well as its main components and conceptual contributions in the ontological, epistemological, educational, methodological and evaluative areas.

In the investigative dimension, 15 of the selected documents were located. All were characterized by analyzing the processes of objectification of various mathematical objects, such as: patterns of generalization and algebraic thought, rational number, multiplication, derivative, spatial orientation, vector subtraction, Euclidean constructions with GeoGebra and interpretation of Cartesian graphs, among others. This demonstrates the extension and scope that OT has had towards other fields of mathematics education by exploring processes of objectification of various mathematical objects, to understand the awareness made by students, beyond the initial studies focused on thinking. algebraic and pattern generalization.

In the practical-pedagogical dimension, 10 documents were located, characterized by presenting proposals to explore multiplicative thinking in initial education students, the training of teachers and health professionals, the teaching-learning of environmental, kinematics, geographic and cartographic issues, as well as contributions for a method that allows to analyze ethical aspects in the mathematics classroom and the constitution of the joint work between students and teachers. These findings show part of the development that OT has had beyond the field of mathematics education, during the period 2006-2021. This means that not only is research being carried out on various mathematical objects, but also, in recent years, other contents (environmental, geographic, physics) and educational aspects (ethical and joint work) have begun to be studied, to propose proposals that transcend to other areas of knowledge (science, geography), as well as to the training of future mathematics teachers and health professionals.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de investigación fue realizado mientras se cursaba la Maestría en Educación Matemática durante el periodo 2021-2022. Dicha maestría es de carácter profesionalizante, se encuentra adscrita a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla y pertenece al Padrón Nacional de Posgrados de Calidad (PNPC) del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT).

El documento está estructurado en cinco capítulos. En el primero se exponen el planteamiento y formulación del problema, con su correspondiente pregunta general de investigación y objetivos (general y específicos) que delimitaron el estudio. Además, se hace mención del valor teórico, las implicaciones prácticas y la utilidad metodológica, como razones que justificaron realizar este trabajo.

En el segundo capítulo se expone el marco conceptual de referencia que incluye algunos conceptos sensibilizadores relativos a la conceptualización, los objetivos, la finalidad y la postura epistemológica sobre el *Estado del Arte*, concebido en este trabajo como una modalidad de investigación cualitativa documental.

En el tercer capítulo se describe el método de investigación, mencionando el tipo de estudio que se realizó y el paradigma sociocrítico en el cual se enmarcó. Se describe, también, el procedimiento seguido en la *fase de planeación y diseño*, así como en la *fase de gestión y análisis* que se ejecutó, poniendo énfasis en la técnica de *análisis de contenido cualitativo* y las categorías deductivas utilizadas.

En el cuarto capítulo se presentan los resultados de la búsqueda, localización y selección de la información recopilada y que integró el universo documental. Igualmente, se describe el análisis de contenido cualitativo que se realizó de las 45 unidades de muestreo (documentos) seleccionadas; 20 de las cuales permitieron identificar los antecedentes y componentes conceptuales de la Teoría de la Objetivación en sus áreas ontológica, epistemológica, educativa, metodológica y valorativa; el resto de los documentos analizados permitió caracterizar, en cuanto a su objeto de estudio, método y conclusiones, las producciones investigativas fundamentadas en dicha teoría.

Finalmente, en el quinto capítulo, se incluyen las principales conclusiones obtenidas del estudio realizado y con las cuales se da respuesta a la pregunta general que orientó y delimitó este trabajo de investigación.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Las causas de los problemas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas están relacionadas con múltiples factores que afectan tanto a estudiantes como a docentes (Jimeno, 2002). Algunos de ellos tienen que ver, por ejemplo, con aspectos del dominio afectivo de los estudiantes que incluye sus creencias, emociones y actitudes; éstas últimas involucran, además, lo cognitivo y lo conductual (Sánchez y Ursini, 2010; Rocha et al., 2020). Pero otras razones que también explican el fracaso académico de los estudiantes en el área de matemáticas están asociadas con su contexto social, cultural, político y educativo (las interacciones sociales en el aula y la institución escolar).

Lo anterior evidencia que el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas es sumamente complejo. Analizar y comprender dicha complejidad es justamente el objeto de estudio particular de la Educación Matemática, una disciplina científica relativamente joven (Godino, 2000; Hernández y Juárez, 2015), cuyo reconocimiento dentro del campo disciplinar de las ciencias sociales se basa, también, en contar con diversos enfoques teórico-metodológicos que se han venido desarrollando y consolidando durante las últimas cuatro décadas. Algunos de estos enfoques identificados por Pochulu y Rodríguez (2016) son el cognitivista (Dubinsky, Vergnaud, Tall Vinner), la escuela francesa (Brousseau, Chevallard, Artigue), la escuela anglosajona (Polya, Schoenfeld), la epistemología genética (Ortiz Hurtado), el constructivismo radical (Von Glaserslfeld), la etnomatemática (D'Ambrosio), el socio-constructivismo (Ernest), el enfoque ontosemiótico (Godino, Batanero, Font), el realista (Freudenthal), el crítico (Skovsmose) y la socioepistemología (Cantoral y Farfán).

Las características que diferencian a tales enfoques han llevado a distinguir entre las teorías que asumen una posición más psicológica y cognitiva, concibiendo al conocimiento matemático como un producto mental e individual del estudiante, y las teorías que lo conciben como un proceso social, cultural e histórico (Planas, 2010; Blanco, 2011). Entre estas últimas se ubica la *Teoría de la Objetivación*, cuyos elementos conceptuales fueron esbozados por primera vez en el año 2006 por su creador Luis Radford, pero desde entonces y hasta ahora no se ha hecho un análisis de su desarrollo histórico que permita dimensionar sus alcances investigativos y valorar su contribución teórico-metodológica para la comprensión del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

1.1. Pregunta general de investigación

El planteamiento del problema anterior derivó en la siguiente pregunta general de investigación: *¿Cuáles han sido los aportes teórico-metodológicos y las producciones investigativas de la Teoría de la Objetivación en el campo de estudio de la Educación Matemática durante el periodo 2006-2021?*

Por *aportes teórico-metodológicos* se entienden los componentes conceptuales de la Teoría de la Objetivación en sus áreas: ontológica, epistemológica, educativa, valorativa y metodológica. En tanto que las *producciones investigativas* se refieren a los reportes de experiencias y propuestas de enseñanza-aprendizaje que han sido resultado de investigaciones realizadas desde la perspectiva de dicha teoría.

1.2. Objetivos de investigación

Para responder a la pregunta general de investigación se definieron los siguientes objetivos (general y específicos) que guiaron y delimitaron el estudio.

1.2.1. Objetivo General

- *Elaborar un Estado del Arte sobre los aportes teórico-metodológicos y las producciones investigativas de la Teoría de la Objetivación en el campo de estudio de la Educación Matemática durante el periodo 2006-2021.*

1.2.2. Objetivos Específicos

- Describir los antecedentes históricos y componentes conceptuales de la Teoría de la Objetivación en sus áreas ontológica, epistemológica, educativa, valorativa y metodológica.
- Describir las características, en relación con el objeto de estudio, el método y conclusiones, de las producciones investigativas realizadas desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación.

1.3. Justificación

Si bien es cierto que la elaboración de *estados del arte* no es una práctica investigativa común en el campo de estudio de la Educación Matemática, en la revisión de literatura realizada se encontraron al menos 14 producciones publicadas durante el periodo 2016-2021. Tales trabajos

han sido sobre la didáctica de la matemática (Chamorro, 2020), la metodología de la enseñanza de las matemáticas (Mera et al, 2016), la Etnomatemática (Avendaño et al, 2016; Blanco-Álvarez et al, 2017; Gómez, 2019; Rosa y Orey, 2018; Tabares, 2016) y la teoría de Registros de Representación Semiótica (De Souza et al, 2017). Igualmente, se hallaron estudios sobre el aprendizaje de objetos matemáticos como el teorema fundamental del cálculo (Valenzuela y Vigo, 2018), la función exponencial (Flores y Vigo, 2019), los conceptos de función (Manrique et al, 2017) y de límite (Trujillo et al, 2017); así como de la resolución de problemas matemáticos en contexto (Díaz y Careaga, 2021) y de la planeación y diseño de actividades didácticas (Ibarra y Grijalva, 2017). Así, pues, este trabajo de investigación no es completamente inédito en el campo de la Educación Matemática y aun con sus limitaciones, ratifica la relevancia y aporte de este tipo de estudios en esta área de conocimiento (Palanch y Freitas, 2015).

Respecto al *valor teórico* de esta investigación, por ejemplo, brinda la posibilidad de conocer los antecedentes históricos y los elementos conceptuales (ontológicos, epistemológicos, educativos, metodológicos y valorativos) que distinguen a la Teoría de la Objetivación de otras teorías que le han dado un carácter científico a la Educación Matemática.

En cuanto a sus *implicaciones prácticas,* esta investigación permite identificar las áreas de oportunidad por estudiar e investigar aún, a partir de una perspectiva teórica sociocultural, pues al considerar los aspectos sociales y culturales, la Teoría de la Objetivación contribuye a mejorar la práctica docente en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Y referente a su *utilidad metodológica*, a partir de una mirada disruptiva, este trabajo pretende contribuir a superar la visión estrecha que concibe al *Estado del Arte* como la fase inicial de toda investigación, limitada a elaborar simplemente un inventario documental (Guevara, 2016; George, 2019). Así que, contrario a esta visión reduccionista, en este estudio se considera al *Estado del Arte* como un *método de investigación cualitativa documental* (Galeano y Vélez, 2002; Galeano, 2012; Galeano y Jaramillo, 2015; Gómez et al., 2015; Londoño et al., 2016), como una estrategia de formación en la investigación (Jiménez, 2004; Rojas, 2007; Guevara, 2016) y como un producto de investigación educativa, esencial en la generación de conocimiento científico en el campo disciplinar de las ciencias sociales en general (Galeano y Jaramillo, 2015; Guevara, 2016; George, 2019) y de la Educación Matemática en particular.

CAPÍTULO 2

MARCO CONCEPTUAL

En la investigación cualitativa se considera necesario "adoptar una *actitud y postura inicial fenomenológica*", es decir, "*prescindir* de teorías o marcos teóricos" (Martínez, 2004, p. 78) que restrinjan la *comprensión* de las relaciones y contradicciones internas del proceso a estudiar. No obstante, todo diseño de investigación es ya una construcción teórica, pues la teoría, entendida en un sentido amplio, está presente a lo largo de todo el proceso investigativo. En este sentido, no se puede pensar una investigación sin recurrir, como punto de partida, a algunos "conceptos sensibilizadores" que permitan enmarcar el estudio a realizar (Dalle et al., 2005; Sautu, 2009; Freidin y Najmias, 2011; Pedraz et al., 2014). Por tal razón, a continuación, se desarrolla un "marco referencial" en el que, a partir de la revisión de la literatura realizada, se exponen la conceptualización, los objetivos, la finalidad y la postura epistemológica sobre el *Estado del Arte* asumidos en este trabajo.

2.1. Conceptualización de *Estado del Arte*

En la literatura se ha identificado la existencia de dos concepciones generales de lo que es el Estado del Arte: una que se puede denominar *tradicional* y otra *disruptiva e innovadora*. La primera, concibe al Estado del Arte como una de las primeras etapas de toda investigación, que permite describir y establecer, a través de la revisión documental, el estado del conocimiento o los antecedentes del tema por investigar (Rojas, 2007; Palanch y Freitas, 2015; Guevara, 2016; Londoño et al., 2016). La segunda, considera al Estado del Arte como una *modalidad de investigación documental cualitativa*, es decir, como una *meta-investigación* que, de manera analítica y crítica, permite estudiar el conocimiento acumulado acerca de un determinado tema, generando nuevas construcciones de sentido (Galeano y Vélez, 2002; Galeano, 2012; Galeano y Jaramillo, 2015; Gómez et al., 2015; Palanch y Freitas, 2015; Londoño et al., 2016; George, 2019).

Galeano y Jaramillo (2015) identifican tres tendencias diferentes en cuanto a la definición del Estado del Arte: 1) recuperar para describir, 2) recuperar para comprender, y 3) recuperar para trascender reflexivamente. A partir de ellas, construyen una definición más abarcadora, que concibe al Estado del Arte como "una metodología de investigación cualitativo-documental de

carácter crítico-interpretativa que revisa los estados producidos por las personas en su representación bibliográfica" (p. 102).

Guevara (2016), por su parte, distingue tres aproximaciones conceptuales del Estado del Arte: 1) investigación documental como construcción y apropiación del conocimiento, 2) revisión de las propuestas de investigación y sus productos, así como el desarrollo teórico, investigativo y social de un fenómeno, y 3) investigación documental con un desarrollo propio. De estas conceptualizaciones, concluye que el Estado del Arte es "una indagación de nuevos sentidos, que trasciende el nivel descriptivo de los datos para establecer nuevas relaciones de interpretación entre las categorías del objeto de estudio en las distintas producciones investigativas y crear nuevas miradas de investigación y formación" (p. 165).

En este trabajo se concibe al estado del arte como como una modalidad de investigación cualitativa documental con un desarrollo propio, que permite estudiar la evolución y describir el desarrollo alcanzado de un problema, área o tema de investigación. Igualmente, proporciona los elementos para conocer las tendencias investigativas dominantes e identificar las emergentes, así como los vacíos en el campo del saber objeto de estudio, en este caso, de la Teoría de la Objetivación (Rojas, 2007; Palanch y Freitas, 2015); Londoño et al., 2016; George, 2019).

2.2. Carácter formativo y producto de investigación

Por su carácter formativo, la construcción de un Estado del Arte, permite al estudiante desarrollar sus competencias y destrezas investigativas (Guevara, 2016), pues como proceso de investigación social: primero, se debe empezar por *contextualizar* y definir el problema objeto de estudio, a través de una o varias preguntas de investigación, las cuales serán como un "pequeño bisturí" que delimitará y guiará la búsqueda de información pertinente en bases de datos y centros documentales; en segundo lugar, se debe *clasificar*, es decir, determinar los criterios de análisis y sistematización de la información; y, en tercer lugar, *categorizar* la información para fundamentar la interpretación del trabajo en general (Jiménez, 2004).

Al ser una investigación documental, también debe considerarse al Estado del Arte como un resultado de dicho proceso (Jiménez, 2004), es decir, "un producto de investigación científica de carácter analítico-interpretativo" (George, 2019, p. 2), así como una estrategia de formación en la

investigación (Rojas, 2007), pues como afirma Vargas (1999), implica "la formación y el desarrollo de destrezas como la documentación, el análisis, la comparación de métodos y de resultados", por lo que, "la producción de estos dispositivos de saber configuran una formación crítica, en el orden del conocimiento disciplinar, temático y metodológico" (citado en Jiménez, 2004, p.32).

2.3. Postura epistemológica

A partir de la concepción sobre la realidad, el objeto a estudiar, los principios de construcción del conocimiento, así como las técnicas e instrumentos para recolectar y analizar la información, se pueden distinguir tres posturas epistemológicas del estado del arte: *positivista, constructivista* y *crítica* (Guevara, 2016). La primera, concibe una realidad objetiva independiente del individuo, susceptible de ser observable y medible; al enmarcarse en el enfoque cuantitativo, considera a los documentos como unidades de análisis y se apoya en la estadística descriptiva. La segunda, considera la realidad como resultado de múltiples construcciones mentales, por lo que propone recurrir al análisis hermenéutico de la información documental. La tercera, considera que "la producción científica surge a partir de la situación histórica-cultural de la sociedad, lo que conlleva a que existan múltiples entendimientos para distintas realidades acotadas, diversos momentos y avances del conocimiento" (George, 2019, pp. 6-7), por lo cual aspira a explicar y comprender las contradicciones para la transformación crítica de la realidad. La construcción del Estado del Arte que se propone elaborar a través de este proyecto de investigación se inscribe en la tercera *postura epistemológica crítica*.

CAPÍTULO 3

MÉTODO DE INVESTIGACIÓN

3.1. Paradigma de investigación

Este trabajo está enmarcado en el *paradigma sociocrítico*, el cual, *ontológicamente* considera la realidad como una construcción intersubjetiva, dinámica, social y experiencial; *epistemológicamente*, sostiene que el conocimiento no es neutral, ya que implica asumir una posición axiológica, crítica y de transformación de la realidad social; y, *metodológicamente* es dialógico y dialéctico, pues supone la generación del conocimiento a partir de la práctica transformadora del investigador (Rodríguez, 2003; Elías, 2019).

3.2. Tipo de investigación

En el marco del paradigma sociocrítico, la estrategia general que se decidió adoptar para responder al problema planteado fue realizar una investigación de tipo *documental* con *enfoque cualitativo*, a un nivel *descriptivo-analítico*. Tal perspectiva no cancela la inclusión de algunos datos estadísticos que complementan los resultados del estudio, aun cuando principalmente se basó en la búsqueda, recuperación, análisis, comprensión, interpretación y crítica de la información obtenida y registrada en fuentes documentales escritas y audiovisuales (Rodríguez, 2003; Deslauriers, 2004; Gómez, 2011; Arias, 2012).

3.3. Procedimiento

Teniendo en cuenta lo anterior, para lograr el objetivo general de esta investigación se adoptó un procedimiento metodológico propio del *Estado del Arte* concebido como una *modalidad de investigación cualitativa documental* (Galeano y Vélez, 2002; Galeano, 2012; Galeano y Jaramillo, 2015; Gómez et al., 2015), "de carácter crítico-interpretativa que revisa los estados producidos por las personas en su representación bibliográfica" (Gómez et al., 2015, p. 423).

A un nivel general, la construcción o elaboración del *Estado del Arte* implicó la realización de dos acciones investigativas relacionadas con la generación de nuevo conocimiento: una *heurística*, referida a la búsqueda, recolección y selección de la información, y otra *hermenéutica*, que consistió en la lectura, análisis, interpretación, comprensión crítica y objetiva de la información documental (Barbosa et al., 2013; Londoño et al., 2016; Rojas, 2007). De manera más específica, se avanzó por tres fases propuestas por Gómez et al. (2015), a saber: 1) planeación y diseño, 2)

gestión y análisis, y 3) formalización y elaboración del *Estado del Arte* como producto investigativo.

3.3.1. Primera Fase: planeación y diseño

Durante la fase inicial se elaboró el protocolo de investigación. Ello implicó establecer el tema a estudiar, realizar una primera revisión de la literatura para lograr plantear y formular el problema de investigación, mediante una pregunta y objetivo (generales); además, se enunciaron las razones que justificaban llevar a cabo este estudio.

Por cuanto al *diseño* se refiere, se definieron los criterios y el procedimiento de búsqueda, así como los lugares de localización de las fuentes documentales de información (escritas y audiovisuales) que integrarían el *universo documental*, lo mismo que para el *muestreo intencional* a través del cual se van seleccionando las *unidades de análisis* que se consideran indispensables para lograr los objetivos de investigación planeados (Fernández, 2002; Galeano, 2012).

Tales criterios fueron que la selección de fuentes documentales se llevaría a cabo mediante la búsqueda y localización de materiales escritos (artículos académicos y libros) y audiovisuales en la página web *http://luisradford.ca/*, sitio en el cual se encuentran más de 250 publicaciones de Luis Radford y colaboradores, desde 1982 hasta el presente. Dada tal cantidad considerable de documentos, se definieron los siguientes criterios de búsqueda y selección generales: la denominación de la *Teoría de la Objetivación* incluida en el título de las fuentes documentales, las *palabras clave* de *objetivación, labor conjunta y ética comunitaria* (con sus respectivas traducciones al inglés), así como el *periodo temporal 2006-2021*. Esta delimitación temporal se justificó porque no existe un estudio que haga un balance de dicha teoría desde el momento en que fue esbozada por primera vez y hasta su desarrollo más reciente.

Considerando los mismos criterios anteriores, se decidió ampliar la búsqueda, localización y selección de documentos, como artículos académicos, tesis de licenciatura, maestría y doctorado, en bases de datos tales como Dialnet, DOAJ, EBSCO, Google Académico, Latindex, Redalyc, Scopus, Scielo y Web of Science, a las cuales se encuentran indexadas tanto *Revistas de Investigación en Educación Matemática* como *Repositorios Institucionales*.

En cuanto a los *instrumentos de recolección y análisis de la información*, se consideró pertinente utilizar una *matriz bibliográfica* (elaborada mediante el software de Excel) y una *matriz analítica de contenido* (adaptada a las herramientas que ofrece el software MAXQDA), ambas

recomendadas por Gómez et al. (2015), con algunas adecuaciones necesarias de acuerdo con el tema investigado.

3.3.2. Segunda Fase: gestión y análisis

Para profundizar en el análisis de la información documental y lograr responder a la pregunta general de investigación, se optó por recurrir a la *técnica* de *análisis de contenido,* entendida como "un conjunto de procedimientos que tienen como objetivo la producción de un *meta-texto* analítico en el que se representa el corpus textual de manera transformada" (Díaz y Navarro, 2007, p. 181). Esta técnica, cuyo elemento fundamental de generación de datos es la lectura de la información documental, permite condensar o reducir grandes cantidades de texto; es un procedimiento sistemático y objetivo, pues está sujeto a reglas explícitas para analizar el contenido manifiesto y latente (oculto) de los documentos. Además, puede ser replicable y verificable por otros analistas que comparen los hallazgos y evalúen la confiabilidad del estudio, ya que la información se encuentra disponible permanentemente en los documentos (Andréu, 2002; Cohen et al., 2007; Mayring, 2015).

La técnica de análisis de contenido puede ser cuantitativa, cualitativa o mixta. Mayring (2015), por ejemplo, considera que el análisis de contenido cualitativo tiene un enfoque híbrido de métodos mixtos, pues combina un paso cualitativo-interpretativo, al crear categorías, y un paso cuantitativo, al cuantificar la frecuencia de dichas categorías presentes en los documentos. Asimismo, Andréu (2002) sugiere que se pueden hacer análisis de contenido mixtos triangulando métodos de estadística multivariante con técnicas cualitativas. Igualmente, Weber (1990, citado por Cohen et al., 2007) señala que las investigaciones analíticas de contenido de "alta calidad" deben combinar análisis tanto cuantitativos como cualitativos.

En cualquiera de sus modalidades (cuantitativa, cualitativa o mixta) el análisis de contenido implica, de manera general, codificar, establecer categorías de análisis, comparar dichas categorías (estableciendo relaciones entre ellas) y extraer conclusiones teóricas de los documentos estudiados. Siguiendo las recomendaciones de Abréu (2002), Cohen et al. (2007) y Mayring (2014, 2015), a continuación, se puntualizan los pasos del proceso de análisis de contenido cualitativo que se está llevando a cabo para lograr el objetivo general de investigación.

1. Determinación del objetivo o tema de análisis

El tema se concretó en la siguiente pregunta-problema general de investigación que fue delimitando y guiando el análisis: *¿Cuáles han sido los aportes teórico-metodológicos y las producciones investigativas de la Teoría de la Objetivación en el campo de estudio de la Educación Matemática durante el periodo 2006-2021?*

2. Determinación de las reglas de codificación y el sistema de códigos

Para responder a la pregunta general de investigación se consideró necesario analizar las *unidades de muestreo* (documentos escritos y audiovisuales) que se fueeon seleccionando del *universo documental* mediante un *muestreo no probabilístico de tipo intencional y teórico*, por lo cual el tamaño de la muestra quedó definido por la saturación y calidad (riqueza) de la información (Abréu, 2002; Cohen et al., 2007). Las *unidades de registro (códigos)* contenidas dentro de las unidades de muestreo, son *palabras o conceptos clave* relativas a la Teoría de la Objetivación. Por su parte, las *unidades de contexto* son los *párrafos o fragmentos* de las unidades de muestreo que contienen las unidades de registro.

Un código es entendido como una palabra o abreviatura que asigna un significado a la información que se está analizando, por lo que codificar no es algo simplemente técnico, sino que implica un proceso mental de reflexión, análisis e interpretación (Cohen et al., 2007; Miles et al., 2014). Es así como existen tres formas básicas de *codificación* en el análisis de contenido cualitativo, a saber: 1) *inductiva*, en la que los códigos emergen de los datos; 2) *deductiva*, en la que los códigos se derivan de la teoría, y 3) *mixta*, en la que se combinan las dos estrategias anteriores (Abréu, 2002, Miles et al., 2014; Rädiker y Kuckartz, 2020). Esta última es la que se adoptó en el proceso investigativo, asumiendo que el sistema de códigos nunca puede ser establecido como algo definitivo, sino como algo provisional, pues tales códigos se fueron revisando, modificando e incrementando conforme avanzaba el análisis; de tal manera que permitieron organizar y sistematizar la información para responder la pregunta general de investigación (Miles et al., 2014; Rädiker y Kuckartz, 2020).

3. Determinación del sistema de categorías

Las *categorías de análisis*, entendidas como "las principales agrupaciones de constructos o características clave del texto, que muestran vínculos entre unidades de análisis" (Cohen et al., 2007, p. 478), inicialmente fueron de *carácter provisional*, por lo que algunas pudieron

confirmarse, modificarse y agregarse otras que emergieron conforme avanzaba el proceso de recolección y análisis de la información (Martínez, 2004).

Por lo anterior, tal como sugieren Abréu (2002) y Mayring (2015), se combinaron dos orientaciones fundamentales para el establecimiento de categorías, a saber: la aplicación de un sistema de categorías deductivas, basadas en conceptos, y el desarrollo de categorías inductivas, basadas en los datos (Rädiker y Kuckartz, 2020). Pues se entiende que todo análisis de datos, en tanto es un proceso mental, implica un pensamiento tanto deductivo como inductivo (Wolcott, 1995; LeCompte y Schensul, 1999, citados por Hatch, 2002), ambos relacionados dialécticamente (Miles et al., 2014).

En la Tabla 1 se puede observar el sistema de categorías deductivas, basadas en conceptos (Rädiker y Kuckartz, 2020), con las cuales se analizaron los documentos relativos a la Teoría de la Objetivación, desde cuatro áreas constitutivas de una ***posición teórica***, definida como un "conjunto de supuestos valorativos, ontológicos, epistemológicos y metodológicos que orientan el trabajo de una comunidad académica para la construcción de teorías sustantivas" (Gándara, 2007, p. 71), y un área educativa, en tanto se trata de una teoría de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Tabla 1

Categorías de análisis deductivas para estudiar los aportes teórico-metodológicos de la TO.

Categoría	Descripción
Área Ontológica	Se refiere al "tipo de entidades y procesos constitutivos de la realidad y las propiedades que los caracterizan" (Gándara, 2007, p. 90), en particular la naturaleza del *saber*, los *objetos matemáticos* y el *ser*.
Área Epistemológica	Se refiere a la cuestión del *conocimiento* y cómo se puede llegar a conocer la realidad, en particular los objetos matemáticos.
Área Educativa	Se refiere a la educación en general y al proceso de *enseñanza-aprendizaje* de las matemáticas en particular.
Área Valorativa	Se refiere al *proyecto social-educativo* y a los *aspectos éticos* promovidos durante el proceso de enseñanza-aprendizaje en general y de las matemáticas en particular.
Área Metodológica	Se refiere al proceso de *diseño metodológico* y al uso de *técnicas de análisis* para desarrollar un *conocimiento científico* sobre el *proceso de enseñanza-aprendizaje* en general y de las matemáticas en particular.

Fuente: elaboración propia

En la Tabla 2 se muestra el sistema de categorías deductivas que guiaron el análisis de las producciones investigativas.

Tabla 2

Categorías de análisis deductivas para estudiar las producciones investigativas y práctico-pedagógicas realizadas desde la perspectiva de la TO.

Categoría	Descripción
Problema de investigación	Se refiere la formulación del problema de investigación mediante *preguntas* y *objetivos* que delimitaron y guiaron el estudio.
Método	Se refiere al *enfoque* de investigación, *informantes*, *técnica* e *instrumentos* utilizados para la recolección y análisis de información.
Conclusiones	Se refiere a las principales *conclusiones* y *reflexiones finales*, así como a las *líneas de investigación abiertas* desde la perspectiva de la TO.

Fuente: elaboración propia

4. Proceso inferencial

Luego del paso anterior y de que se concluyó la codificación y categorización, es decir, la atribución real de códigos y categorías a las unidades de muestreo se procedió a completar el análisis de la información y se pasó, finalmente, a extraer las inferencias y conclusiones. Para llevar a cabo este proceso inferencial se consideraron tres elementos básicos sugeridos por Bardin (1996, citado por Andréu, 2002), a saber: las variables (en este caso se tomaron en cuenta los códigos y categorías), el material analizado (documentos) y la explicación analítica (inferencia).

CAPÍTULO 4

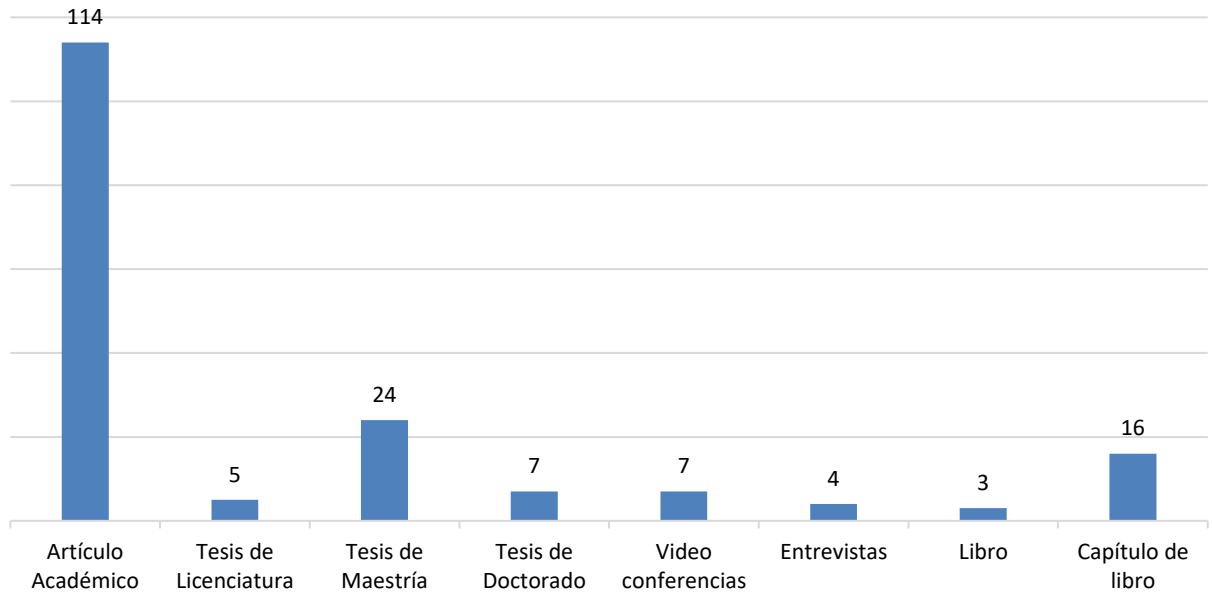
RESULTADOS Y ANÁLISIS

A partir de los criterios generales definidos en la primera y segunda fase de la investigación, aquí se presentan los resultados en cuanto a la búsqueda, localización y análisis documental (externo e interno) de la información recopilada.

En total, fueron localizadas 180 publicaciones, las cuales integran el universo documental definitivo, registrado en una matriz bibliográfica elaborada en el software de Excel. Por su tipología, tal como se observa en la Figura 1, las fuentes documentales localizadas se clasificaron en artículos académicos (63%), tesis de licenciatura (3%), tesis de maestría (13%), tesis de doctorado (4%), video-conferencias (4%), entrevistas (2%), libros (2%) y capítulos de libro (9%).

Figura 1

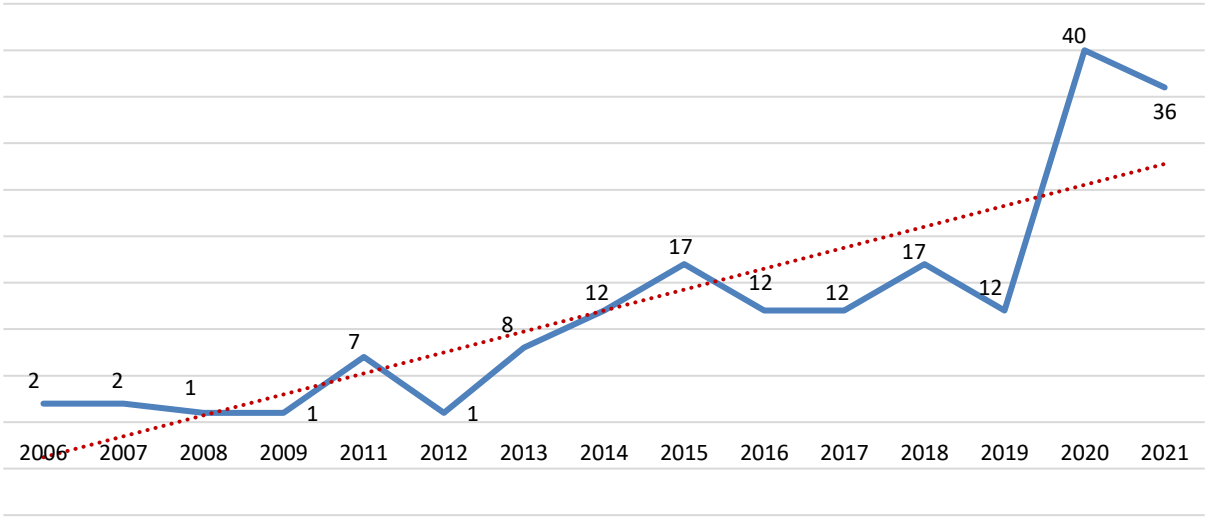
Documentos por tipo de publicación



Por su fecha de publicación, en la Figura 2 se puede observar una lenta, pero creciente tendencia general en las producciones totales durante los años 2006-2021, registrándose un crecimiento mayor en los últimos dos años (2020 y 2021) del periodo estudiado.

Figura 2

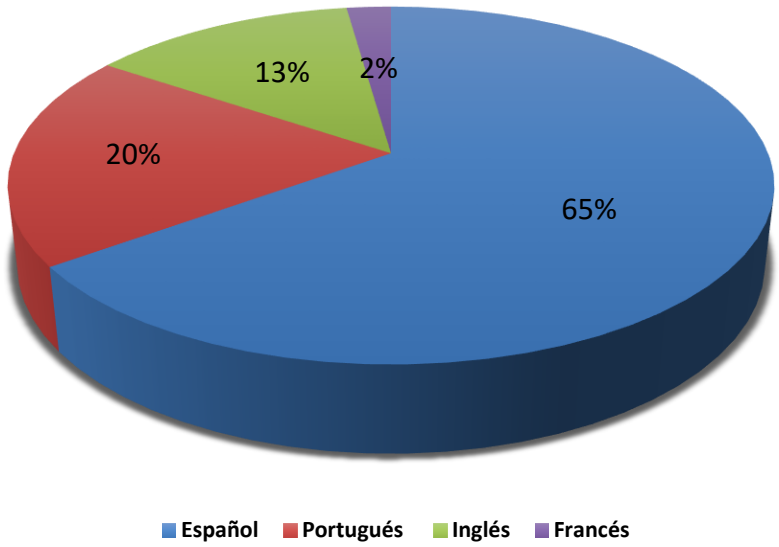
Documentos por su fecha de publicación



En cuanto a su idioma, tal como se muestra en la Figura 3, el total de las fuentes localizadas se divide en: español (65%), portugués (20%), inglés (13%) y francés (2%).

Figura 3

Documentos por su idioma de publicación



4.1. DIMENSIONES DE ANÁLISIS

A partir del universo documental integrado por 180 fuentes, se seleccionaron, mediante un muestreo intencional, 45 documentos que por su contenido se clasificaron en tres dimensiones que fueron denominadas: *teórico-metodológica*, *investigativa* y *práctico-pedagógica*, mismas que se describen en la Tabla 3.

Tabla 3

Dimensiones de Análisis de las Unidades de Muestreo

Dimensión	Descripción
Teórico-metodológica	Documentos que presentan los antecedentes históricos y componentes conceptuales de la Teoría de la Objetivación en sus áreas constitutivas: ontológica, epistemológica, educativa, valorativa y metodológica.
Investigativa	Documentos que reportan resultados de investigaciones realizadas desde la perspectiva de la TO en el campo de la educación matemática.
Práctico-pedagógica	Documentos que describen propuestas y/o experiencias de cursos y talleres de formación de profesores, así como sobre el estudio de otros contenidos y aspectos educativos desde la perspectiva de la TO.

Fuente: elaboración propia.

Las Unidades de Muestreo (documentos) seleccionadas se descodificaron y codificaron (deductiva e inductivamente) mediante el programa MAXQDA 2020, el cual es un Software de Análisis de Datos Cualitativos Asistido por Computadora (CAQDAS por sus siglas en inglés) recomendado para la investigación cualitativa (Rädiker y Kuckartz, 2020). En la Tabla 4 se presentan los materiales seleccionados y clasificados de acuerdo con cada una de las dimensiones mencionadas anteriormente y que cumplieron con los siguientes criterios de inclusión y exclusión: ser artículos académicos que abordaran los antecedentes históricos y componentes conceptuales de la TO, así como reportes de investigaciones realizadas durante el periodo 2006-2021; dejando fuera de la selección: tesis, libros, capítulos de libro, video-conferencias y entrevistas.

Tabla 4

Unidades de Muestreo clasificadas por dimensión

Dimensión	Unidades de muestreo (documentos)
Teórico-metodológica	Radford (2006, 2007, 2008, 2014, 2015a, 2015b, 2016, 2017a, 2017b, 2017c, 2018a, 2018b, 2018c, 2019, 2020a, 2020b, 2020c, 2020d, 2021a, 2021b).
Investigativa	Cisneros y Cadavid (2013), Cisneros y Castro (2017), Gómez y Mojica (2014), Gustin y Pontón (2020), Lasprilla y Camelo (2012), Miranda et al. (2007), Mojica (2015), Moreno (2015), Paiva et al. (2020), Prieto y Arredondo (2021), Salinas y Miranda (2021), Sánchez y Prieto (2019), Sánchez et al. (2020), Vergel (2015), Vergel et al. (2020)
Práctico-pedagógica	Camilotti y Gobara (2021), Castilho y Moretti, (2021), Costa y Santos (2020), Gobara et al. (2020), Gómez y Mojica (2015), Lasprilla y León (2020), Pantano (2020), Radford y Lasprilla (2020), Silva y Carrasco (2021), Vargas-Plaça y Radford (2021).

Fuente: elaboración propia. Nota: Los datos completos de las unidades de muestreo seleccionadas se encuentran en Anexos.

4.1.1. ANÁLISIS DE LA DIMENSIÓN *TEÓRICO-METODOLÓGICA*

En esta dimensión se clasificaron 20 documentos de la muestra intencional seleccionada y cuyos autores fueron indicados en la Tabla 4. Así que a continuación se presenta el resultado del análisis realizado de dichos materiales, centrando la atención en las categorías deductivas mostradas anteriormente en la Tabla 1 y en las categorías inductivas que emergieron durante el proceso de descodificación y codificación.

4.1.1.1. Categoría inductiva de análisis: Antecedentes Históricos

Esta categoría, referida a las *concepciones o paradigmas predominantes en la educación en general y en la educación matemática en particular durante el siglo XX*, emergió luego de haber realizado la lectura de las unidades de muestreo seleccionadas, junto con dos subcategorías denominadas: *contexto educativo* y *fuentes teórico-filosóficas* de la Teoría de la Objetivación, cada una, también, con sus respectivas subcategorías, tal como se describen a continuación.

Subcategoría: Contexto educativo

Partiendo de que las teorías educativas se diferencian entre sí por la concepción particular que tienen sobre el contenido a aprender, el rol del estudiante y el aprendizaje (Radford, 2008), la Teoría de la Objetivación se distingue de la *enseñanza tradicional*, de las *pedagogías centradas en el alumno* y de la *Teoría de Situaciones Didácticas*, por las siguientes razones:

a) Enseñanza tradicional

La pedagogía tradicional, inspirada en el conductismo, considera que la educación debe centrarse en desarrollar en los estudiantes las competencias requeridas por la economía de mercado capitalista. En esta pedagogía el proceso de enseñanza-aprendizaje se basa en la clase magistral, es decir, un modelo alienante en el que hay una relación de sumisión en la cual el poder se encuentra en manos del profesor quien posee el conocimiento y lo transmite al estudiante que pasivamente se somete y simplemente lo reproduce, mediante la repetición y la memorización. Se trata, pues, de la concepción bancaria de la educación, sustentada en una ética de la autoridad y la obediencia (Radford, 2014, 2016, 2018b, 2018c, 2019, 2020a, 2020c, 2020d, 2021b).

b) Pedagogía centrada en el alumno

A diferencia de la enseñanza tradicional, en la pedagogía individualista el poder se traslada al alumno quien se hace responsable de la producción y construcción de su propio saber y conocimiento. El profesor ocupa un papel secundario, pues el aprendizaje es resultado de las acciones individuales del estudiante alienado del mundo histórico-cultural (Radford, 2014, 2018a, 2019, 2020c, 2020d, 2021a).

- **Constructivismo**

Se trata de una teoría individualista del *saber*, del *ser* y del *aprendizaje*, tanto del profesor que enseña como del estudiante que aprende. Inspirada en los trabajos de Piaget y de von Glasersfeld, encuentra su versión más acabada en los Estados Unidos con Paul Cobb y sus colaboradores (Radford, 2007, 2015b, 2016, 2020a, 2020b, 2020c). Tal perspectiva concibe al *saber* y el *aprendizaje* como algo subjetivo, a-histórico y a-cultural, pues considera que el sujeto es quien construye su propio conocimiento, alienado del mundo histórico-cultural (Radford, 2015b, 2018b,

2018c, 2019, 2020b, 2021a). Cuando, para responder a sus detractores, ha tenido que incorporar la dimensión social, lo hace a través de la idea de la interacción y "participación reflexiva en las prácticas del aula", pero las asume sólo como un medio de apoyo para que el "sujeto-yo" logre alcanzar sus propios fines (Radford, 2018c, 2020b). En cuanto a la educación matemática, sostiene que tiene por objetivos: construir estructuras conceptuales y el desarrollo de la autonomía intelectual de los estudiantes, en la que se basa su ética (Radford, 2018c, 2020b, 2020d, 2021b).

- **Teoría de Situaciones Didácticas**

La Teoría de Situaciones Didácticas, inspirada en la psicología genética de Piaget, ha puesto énfasis en el saber matemático y la gestión adecuada del ambiente o entorno (milieu) para la emergencia de un razonamiento matemático preciso y su consiguiente aprendizaje (Radford, 2006, 2007, 2020b, 2020d). Para esta teoría, el objetivo de la educación matemática es la difusión del conocimiento matemático requerido por la sociedad europea industrializada, por lo que se espera que los estudiantes logren adquirir un conocimiento dado (Radford, 2015a, 2018c, 2020b, 2020d, 2021b).

Subcategoría: Fuentes teórico-filosóficas

- **Teorías Socioculturales**

Ante el predominio de la concepción eurocéntrica de las matemáticas y del enfoque individualista del aprendizaje en el campo de la educación matemática, en las últimas dos décadas del siglo pasado algunos investigadores interesados en ofrecer una alternativa distinta centraron sus estudios en comprender el papel de la cultura, la historia y la sociedad en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. De ahí surgió el llamado movimiento opositor "sociocultural" con los trabajos realizados por Ubiratàn D'Ambrosio y Alan Bishop, en los años 80. Después, en los años 90, aparecieron las propuestas de Bartolini Busi y Mariotti, quienes investigaron el rol de la interacción y los artefactos en el aprendizaje; Arzarello, Bazzini y Chiappini, se interesaron en los signos matemáticos y su evolución; Lerman, por su parte, investigó el papel del lenguaje en la constitución de la intersubjetividad; Paolo Boero, Pedemonte y Robotti, estudiaron la historicidad del discurso (Radford, 2014, 2016, 2018c, 2020a, 2020c).

Es así como, a mediados de la primera década del presente siglo, surgió la Teoría de la Objetivación como una alternativa no individualista de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Dicha teoría se inscribe en las denominadas teorías educativas socioculturales contemporáneas, las cuales consideran que el saber y el conocimiento no son producto de estructuras mentales epistémicas individuales, ajenas a la cultura, sino una forma histórico-cultural de prácticas sociales realizadas por sujetos mediante la interacción, el lenguaje, el uso de signos y la creación de artefactos (Radford, 2006, 2007, 2008, 2014, 2015b, 2016, 2021a).

- **Materialismo Dialéctico**

La Teoría de la Objetivación se fundamenta teórica y filosóficamente en la dialéctica de Georg Wilhelm Friedrich Hegel, de Evald Ilyenkov, Theodor Adorno, Felix Mikhailov, Fischbach; en el pensamiento histórico-cultural de Lev Vygotsky y la teoría de la actividad de Alexei N. Leóntiev; así como en las ideas de Paulo Freire y el materialismo dialéctico desarrollado por Carlos Marx (Radford, 2015a, 2015b, 2016, 2017b, 2018b, 2018c, 2019, 2020a, 2020c, 2020d, 2021a).

4.1.1.2. Categoría deductiva de análisis: Área Ontológica

Esta se refiere al "tipo de entidades y procesos constitutivos de la realidad y las propiedades que los caracterizan" (Gándara, 2007, p. 90), en particular la naturaleza del *saber*, de los *objetos matemáticos* y del *ser*. Así que a continuación se presenta la caracterización que la Teoría de la Objetivación hace sobre dichas subcategorías que emergieron durante el proceso de análisis.

Subcategoría: Saber (es)

En la Teoría de la Objetivación el "saber" no es algo que se pueda "poseer", "adquirir" o "construir" individualmente, tiene que ver más bien con "potencialidad", "capacidad", "habilidad" o "posibilidad" de algo que nos encontramos en la cultura y nos objeta (se nos opone). Se trata de algo abstracto, general e indeterminado, imposible de sentir y percibir, pues tiene que ver con "formas culturales de hacer y de pensar" en continua transformación (Radford, 2015b, 2017a, 2017b, 2018c, 2019, 2020b, 2020d, 2021a).

Desde el materialismo dialéctico el "saber" (matemático, artístico, etc.) es entendido como una entidad cultural e histórica y no como algo psicológico o subjetivo como lo plantea el

constructivismo. Se trata de formas de acción y reflexión humana (corpórea, sensible y material), codificadas y sintetizadas histórica y culturalmente, que evolucionan a partir de las contradicciones sociales de donde surgen. Como sistema de pensamiento y acción, el "saber" es producido por los seres humanos y se transforma de una cultura a otra, a través del tiempo (Radford, 2016, 2017a, 2018a, 2018c, 2020a, 2020b, 2020c, 2020d, 2021a).

Subcategoría: Objetos matemáticos

Desde la Teoría de la Objetivación, los objetos matemáticos son definidos como "patrones fijos de actividad reflexiva incrustados en el mundo en cambio constante de la práctica social mediatizada por los artefactos" (Radford, 2006). Esto significa que objetos como "círculo", "línea", "plano", etc., no son producto de la abstracción o contemplación intelectual, sino de la actividad práctica y laboral de los seres humanos.

A diferencia de las posiciones ontológicas platónicas y realistas que conciben los objetos matemáticos como algo eterno y anterior a la actividad humana, o de la postura ontológica racionalista que los considera como producto de la mente regida por las leyes de la lógica, la Teoría de la Objetivación los concibe como entidades sociohistórico-culturales, es decir, un producto histórico de la actividad humana (Radford, 2006, 2007, 2008, 2015b).

Subcategoría: Ser

La Teoría de la Objetivación se diferencia de las tendencias racionalistas y empiristas del siglo XVIII, las cuales consideran al individuo como una "entidad sustancial, producida desde adentro", pues con base en el materialismo dialéctico, concibe al ser humano como un "ente histórico-cultural", material y relacional (Radford, 2018a, 2018c, 2020d, 2021a).

En tanto entidad material y relacional en constante transformación, el sujeto se constituye como tal mediante sus acciones y reflexiones enraizadas en formas de acción y relación histórica y culturalmente constituidas (Radford, 2014, 2021a). Esto significa que los seres humanos no existen aislados del mundo y sus culturas, son seres relacionales que "piensan, hacen, sienten, imaginan, esperan y sueñan" a partir de su cultura y momento histórico. Se entiende, entonces, que al

constituirse de formas culturales de concebirse y posicionarse ante otros (del yo y la alteridad), el ser es potencialidad (Radford, 2016, 2017c).

Asimismo, el individuo es considerado como "un ser natural" con necesidades, mismas que satisface a través de la actividad con otros individuos (Radford, 2016, 2020a). De esta manera, se concibe a los individuos como "entidades en flujo", como proyectos de vida inacabados, coproduciéndose constantemente en un contexto cultural e histórico determinado (Radford, 2017c, 2020d).

4.1.1.3. Categoría deductiva de análisis: Área Epistemológica

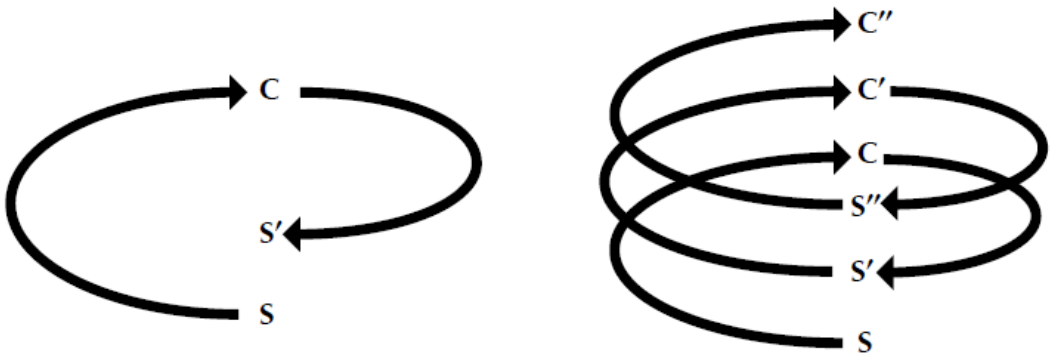
Aquí se analizan la cuestión del *conocimiento* y cómo se puede llegar a conocer la realidad, en particular los objetos matemáticos, así como el *pensamiento*.

Subcategoría: Conocimiento

Para la Teoría de la Objetivación el conocimiento no es una construcción subjetiva ni algo que se transmite, es más bien la actualización o materialización sensible del saber y una entidad histórico-cultural también. En otras palabras, el conocimiento es el "contenido conceptual actualizado o materializado" del saber, entendido éste como formas de hacer y de pensar histórica y culturalmente constituidas. Ahora bien, el conocimiento no es inmediato, sino resultado de la actividad que, como proceso de mediación, moviliza al saber y lo actualiza en una forma singular e incompleta, lo cual permite desarrollar, modificar y ampliar el saber general. En un sentido dialéctico, a través de la actividad, el saber es negado por el conocimiento que, a su vez, es negado por un nuevo saber desarrollado (Radford, 2017a, 2019, 2020a, 2020c, 2021a). Esto se puede observar en la Figura 4.

Figura 4

Dialéctica del saber y el conocimiento



Fuente: Radford, 2017b. Nota: El saber (S) y el conocimiento (C) mediados por la actividad (flechas), para dar lugar a un nuevo saber (S´) y nuevo conocimiento (C´)

Subcategoría: Pensamiento

La Teoría de la Objetivación parte de una concepción no mentalista, sino antropológica del pensamiento, el cual es considerado como una praxis reflexiva ocurrida en el ámbito de lo social y no en la mente de los sujetos (Radford, 2006, 2007, 2008). Dicho con mayor precisión, el pensamiento es "una re-flexión mediatizada del mundo de acuerdo con la forma o modo de la actividad de los individuos" (Radford, 2006).

El carácter reflexivo del pensamiento significa que éste no es una simple asimilación de la realidad externa ni una construcción que surge de la nada, sino un movimiento dialéctico entre una realidad (histórica y culturalmente constituida) y un individuo que la refracta y la transforma. Mientras que su carácter mediatizado tiene que ver con el rol de los artefactos (signos, instrumentos, objetos, etc.) en la realización de la práctica reflexiva; ya que estos no se consideran auxiliares, sino parte constituyente de la actividad mental, es decir, "pensamos con y a través de los artefactos culturales". De hecho, los artefactos son contenedores de saberes históricos y culturales (Radford, 2006, 2007, 2008).

Al igual que los artefactos, las emociones y los afectos con parte constitutiva del pensamiento, por esa razón es que aprender matemáticas no es algo puramente mental, sino también emocional y afectivo (Radford, 2018a).

4.1.1.4. Categoría Inductiva de análisis: Área Educativa

Aquí se analizan la cuestión de la educación en general y el proceso de *enseñanza-aprendizaje* de las matemáticas en particular.

Subcategoría: Escuela

En el marco del modelo económico neoliberal capitalista, las escuelas son vistas como instituciones bancarias donde los estudiantes pueden conseguir créditos y credenciales que les garanticen la movilidad social, o bien, son consideradas como empresas donde se producen sujetos necesarios para la economía de mercado (Radford, 2014, 2017c, 2020b).

Contrario a la visión anterior, la Teoría de la Objetivación considera que en tanto las escuelas "no sólo producen conocimientos sino también subjetividades" (Radford, 2018b), deben ser un "espacio público de debates" (Radford, 2017c) y "un sitio de transformación social" (Radford, 2021a).

Subcategoría: Salón de clase/Aula

Siendo consistente con su visión de la escuela, la Teoría de la Objetivación concibe al salón de clase o aula como "una comunidad de aprendizaje" donde se produce el encuentro entre el sujeto y el objeto de saber; un espacio social donde se aprende a estar y ser con otros, escuchando y respetando otras voces, dando lugar a la reflexión crítica, la subversión y el cambio (Radford, 2006, 2007).

El aula también se entiende como "un espacio ético y político" donde el ser y el saber se transforman continuamente (Radford, 2008); un espacio donde "no sólo se producen saberes, sino también subjetividades" es decir, sujetos (estudiantes y docentes) envueltos en contextos histórico-culturales cambiantes que se transforman al trabajar juntos en una obra común (Radford, 2015a, 2018a, 2018b, 2018c, 2020d, 2021a).

Subcategoría: Profesores y Estudiantes

Respecto a su concepción sobre los profesores y estudiantes, la enseñanza tradicional visualiza al estudiante como un simple receptor de los conocimientos que el docente le transmite; mientras que el constructivismo, asume que el alumno construye su propio conocimiento; y la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), conceptualiza al docente y el estudiante como individuos relacionados mediante un contrato didáctico en el cual se ha establecido implícitamente una clara división del trabajo, en la que el rol del docente consiste en asegurarse de que el estudiante acepte la responsabilidad de resolver los problemas matemáticos (Radford, 2016, 2017c).

A diferencia de los enfoques anteriores, la Teoría de la Objetivación basada en el materialismo dialéctico no concibe a los profesores y estudiantes como seres ya dados, autosuficientes y autónomos, sino como sujetos en formación continua o proyectos de vida inacabados que se realizan y comprometen en una obra común. Esto significa que maestro y alumno son entidades que están en flujo constante, ni el primero es poseedor de conocimientos que transmite, ni el segundo se mantiene como simple receptor pasivo, sino que trabajan y se coproducen juntos (Radford, 2016, 2018a).

Subcategoría: Enseñanza-Aprendizaje

La Teoría de la Objetivación difiere de la concepción que favorece la alienación de los estudiantes al reducir la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas a la simple transmisión y adquisición de técnicas y conceptos matemáticos (Radford, 2008, 2021a). Para la TO, en cambio, la enseñanza y el aprendizaje no son dos actividades separadas una de otra, sino una sola y misma actividad realizada por docentes y estudiantes que implica tanto el *saber* como el *ser*. Así, pues, debe procurarse una comprensión profunda de conceptos matemáticos y, al mismo tiempo, la formación de sujetos reflexivos, solidarios y responsables (Radford, 2008, 2014, 2018a, 2018b, 2019, 2020d).

Subcategoría: Aprendizaje

A diferencia del constructivismo que considera al aprendizaje como un proceso individual y subjetivo en el que el estudiante construye su propio conocimiento, la Teoría de la Objetivación lo concibe como un proceso esencialmente social, histórico y cultural. Esto significa que la

interacción es consustancial al aprendizaje, pues al no ser contemplativo ni pasivo ni intelectual, requiere de la actividad colectiva de los individuos. Esto no significa que la dimensión social sea mediadora del aprendizaje, sino que es parte constitutiva de él (Radford, 2006, 2008, 2015a, 2018a, 2018b, 2020a, 2020c, 2020d).

La Teoría de la Objetivación también se distingue, en cuanto a su concepción sobre el aprendizaje, de las corrientes socioculturales que adoptan el punto de vista de la "enculturación" y la "internalización", pues el aprendizaje no se trata de la adaptación o integración del individuo a su cultura y las prácticas sociales existentes; tampoco se trata de la internalización de la cultura en el sujeto. En ambos casos el aprendizaje queda reducido a la simple reproducción cultural y no toma en cuenta la dimensión crítica, agentica y transformadora de los individuos y su cultura (Radford, 2017a, 2018a, 2021a).

La Teoría de la objetivación, igualmente, se distancia de la tradición racionalista occidental que concibe a las matemáticas como algo puramente intelectual o cognitivo, pues considera que el aprendizaje incluye, además, la dimensión afectiva de las emociones. Dichas emociones no obedecen a algo puramente biológico, sino que se desarrollan socialmente, dado que la manera de sentir de un individuo está cargada culturalmente de concepciones a través de las cuales los individuos se visualizan de una forma u otra (capaz o incapaz, por ejemplo) al estudiar matemáticas (Radford, 2017c, 2018a, 2018c, 2019, 2020d, 2021b).

Para la Teoría de la Objetivación, entonces, el aprendizaje tiene que ver con el *saber* y el *ser*, por lo que no se limita a la cuestión del conocimiento o contenidos disciplinarios, sino que involucra también la dimensión del ser y su devenir. Dicho de otro modo, el aprendizaje es un proceso de objetivación que implica un "encuentro" con saberes (sistemas de pensamiento y acción) culturales y la transformación de los sujetos humanos, en este caso de los docentes y estudiantes involucrados (Radford, 2006, 2008, 2017a, 2017b, 2017c, 2018a, 2018b, 2018c, 2020b, 2020d, 2021a, 2021b). Esto se puede observar en la Figura 5.

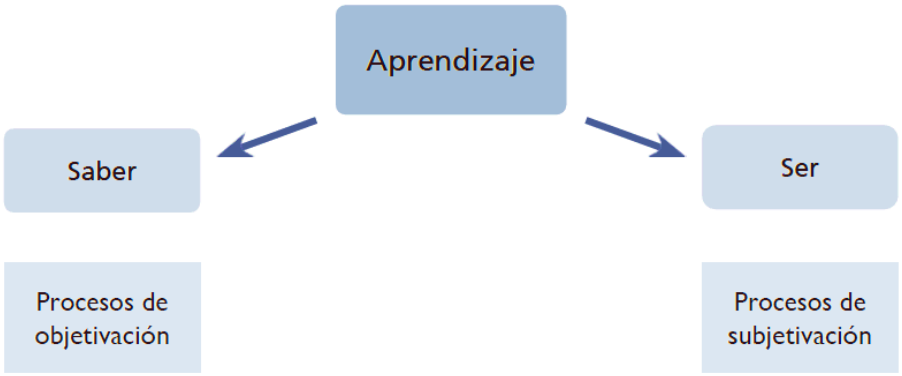
- **Conciencia**

Al concepto de aprendizaje subyace el concepto de "conciencia", entendida como un proceso de reflexión subjetivo, emocional y afectivo sobre el mundo externo, que nos permite comprender, ponderar, disentir, objetar y sentir a otros seres. Por lo cual, la conciencia entendida desde el punto

de vista del materialismo-dialéctico no es el origen, sino el producto de relaciones y mediaciones histórico-culturales que surgen con el desarrollo de la sociedad (Radford, 2017a).

Figura 5

Concepción del Aprendizaje en la Teoría de la Objetivación



Fuente: Radford, 2021b, p. 116

Subcategoría: Objetivación

El concepto "objetivación" es de "naturaleza semiótico-cognitiva" y hace referencia la "conciencia subjetiva del objeto cultural", es decir, un proceso social de toma de conciencia gradual de saberes culturales (sistemas de pensamiento y acción) que anteceden a los sujetos y son encontrados (objetivados) por ellos, dotándolos de sentido y significado, a través de la labor conjunta (Radford, 2006, 2007, 2008, 2018a, 2018b, 2018c, 2019, 2020a, 2020b, 2020c, 2020d, 2021a).

Dicho de manera más precisa, la objetivación "es el proceso social, corpóreo y simbólicamente mediado de toma de conciencia y discernimiento crítico de formas de expresión, acción y reflexión constituidas históricamente y culturalmente" (Radford, 2014). La toma de conciencia y discernimiento crítico significa que la objetivación es un proceso dialéctico en el que sujeto y objeto se transforman mutuamente (Radford, 2015a, 2018b).

El concepto de objetivación más refinado hace referencia a la transformación del saber "en sí" al "para sí" (para la conciencia), es decir, del saber general al saber actualizado en conocimiento,

revelado por la actividad sensible, material y conjunta de profesores y estudiantes durante el proceso de enseñanza-aprendizaje (Radford, 2017a).

- **Procesos de objetivación**

Para estudiar el aprendizaje desde la dimensión del *saber* la Teoría de la Objetivación creo el constructo teórico denominado "procesos de objetivación", a través de los cuales los estudiantes colectivamente toman conciencia gradual de formas de acción y reflexión, así como de significados culturales e históricos. Esto no significa que los estudiantes acepten dichas formas de pensamiento y acción de forma acrítica y que sólo las reproduzcan. Tampoco implica que tomen conciencia de ellas de forma repentina, sino progresivamente, pues los saberes culturales se van revelando parcialmente (Radford, 2015a, 2015b, 2018b, 2018c, 2020a, 2020c).

- **Sistema Semiótico de Significación Cultural**

Se trata de una "superestructura simbólica" que incluye "significados culturales tales como concepciones en torno a los objetos matemáticos (su naturaleza, su modo de existencia, su relación con el mundo concreto, etc.) y patrones sociales de producción de significados" (Radford, 2006, 2007, 2008), tal como se muestra en la Figura 5.

Figura 6

Sistemas Semióticos de Significación Cultural

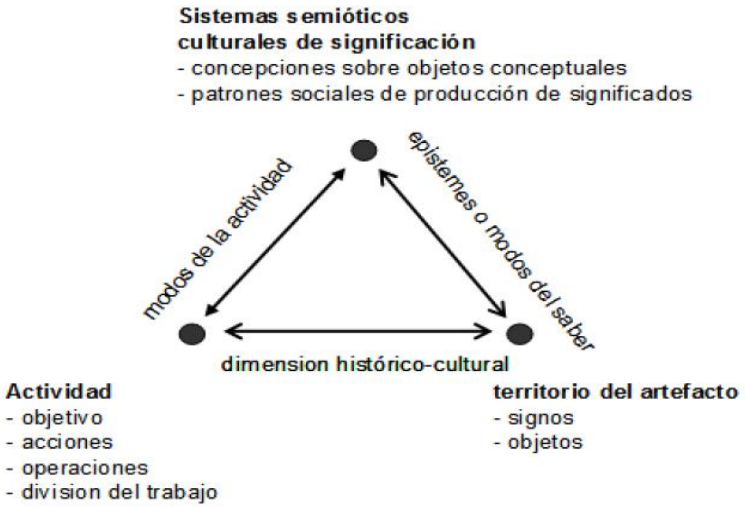


Figura 3. Las flechas muestran la interacción entre los Sistemas Semióticos de Significación Cultural con la actividad y el territorio del artefacto. Dicha interacción general los modos de la actividad y del saber, modos que, en un movimiento dialéctico, vienen a su vez a alimentar a los vértices del triángulo.

Fuente: Radford, 2006, p. 109

- **Medios Semióticos**

La Teoría de la Objetivación llama medios semióticos a todos aquellos signos y artefactos culturales (símbolos matemáticos, gráficos, palabras, gestos, calculadoras, etc.), que son utilizados tanto por los estudiantes como por los profesores durante el proceso de objetivación. Dichos artefactos son considerados partes constitutivas y consustanciales del pensamiento humano, es decir, que se piensa con y a través de tales artefactos depositarios de saberes culturales. Esto ubica a los objetos conceptuales no dentro de la cabeza de los individuos, sino en el plano de lo social (Radford, 2006, 2007, 2008).

Subcategoría: Subjetivación

Se refiere al proceso histórico de formación y creación permanente de sujetos únicos (profesores y estudiantes) cuando, al participar en actividades sociales (matemáticas, por ejemplo) de su cultura, toman una "posición" abierta y crítica. Posicionarse implica encontrarse con otros, hacer valer su "voz" y expresar críticamente su perspectiva, haciéndose así presente en este mundo. De esta manera, entonces, el sujeto llega a ser presencia, se constituye y configura a sí mismo, ocupando un espacio a través de sus propias acciones inmersas en formas de acción histórico-culturales (Radford, 2008, 2014, 2015a, 2018b, 2018c).

- **Procesos de subjetivación**

Para investigar el aprendizaje y la producción de subjetividades la Teoría de la Objetivación creo el constructo teórico denominado "procesos de subjetivación" (Radford, 2018a, 2020b, 2020d). Tales procesos ocurren simultáneamente con los procesos de objetivación durante la actividad de enseñanza-aprendizaje (Radford, 2020b, 2021a). A través de ellos, estudiantes y profesores se coproducen continuamente como sujetos singulares, como proyectos de vida inacabados que llegan a ser presencia cuando llegan a actuar y expresarse críticamente en contextos culturales e históricos determinados (Radford, 2016, 2017c, 2018a, 2018b, 2019, 2020b, 2021a, 2021b).

- **Subjetividad(es)**

De acuerdo con su concepción sobre el *ser*, la Teoría de la Objetivación define la subjetividad como la actualización o materialización continua de dicho *ser* en un sujeto singular reflexivo y sensible, siempre en constante transformación (Radford, 2017c). Una subjetividad es entendida,

entonces, como “un sujeto o individuo único, histórico, cultural y concreto” inacabado (Radford, 2020b). En la Teoría de la Objetivación el interés está en la formación de subjetividades (profesores y estudiantes) críticas y éticas (Radford, 2020d).

Subcategoría: Actividad

La Teoría de la Objetivación concibe la actividad a partir de cuatro dimensiones (Radford, 2021a), a saber:

1) *Constitutiva*: actividad referida a la energía “sensible y sensual, material e ideal, discursiva y gestual” de los individuos que buscan algo en común.
2) *Ontológica*: actividad relativa a una forma de vida que conlleva a la realización de los individuos como seres vivos.
3) *Epistemológica*: actividad a través de la cual “los individuos producen y reproducen los objetos del saber” histórico-cultural.
4) *Relacional*: actividad configurada en torno a una ética comunitaria basada en la responsabilidad, el compromiso y el cuidado del otro.

Además de lo anterior, la Teoría de la Objetivación distingue entre actividad como Aktivität/aktivnost’ y actividad como Tätigkeit/deyatel’nost’. En el primer caso se trata simplemente de “estar ocupado con algo”. En el segundo se trata de un “esfuerzo conjunto” entre individuos para satisfacer sus necesidades colectivas (al producir sus medios materiales de vida) y al mismo tiempo producirse a sí mismos. Para no confundirla con otro tipo de actividad, se le denomina labor conjunta (Radford, 2018a, 2018c, 2020a, 2020d).

Subcategoría: Labor conjunta

El concepto de labor o trabajo conjunto es central en la Teoría de la Objetivación. Sostiene que dicha labor implica modos y relaciones sociales de producción, por lo que no sólo se refiere a la satisfacción de necesidades, sino también a la acción conjunta en la que los sujetos se expresan, desarrollan y transforman constantemente (Radford, 2014, 2016, 2020a).

Dicho concepto permite concebir el proceso de enseñanza-aprendizaje como una única actividad en la que profesores y estudiantes trabajan juntos en la misma “obra común” en la que aparece el

saber actualizado o materializado. Esto se da bajo formas comunitarias de producción de saberes y formas colectivas de colaboración (éticas y no alienantes), que no están exentas de tensiones y diferencias entre los sujetos involucrados (Radford, 2016, 2017a, 2017c, 2018a, 2018c, 2019, 2020a, 2020c, 2020d, 2021a).

- **Modos de producción**

Se refieren a todos aquellos procedimientos, maneras o formas colectivas y culturales de producción de saberes que constituyen el primero de los dos ejes en torno a los cuales se organiza la actividad en el aula o espacio de enseñanza-aprendizaje (Radford, 2014, 2018b, 2020d, 2021a).

- **Relaciones de producción**

Se refieren a las formas de relacionarse e interactuar los sujetos, es decir, a las formas de colaboración humana que constituyen el segundo de los dos ejes en torno a los cuales se organiza la actividad en el aula (Radford, 2014, 2020d). Las formas de cooperación promovidas por la Teoría de la Objetivación se basan en una ética comunitaria, por lo que difieren de las formas alienantes de la enseñanza tradicional donde las relaciones son transmisor-receptor y de la pedagogía individualista centrada en el estudiante donde la relación es instrumental (Radford, 2018b, 2020d, 2021a).

4.1.1.5. Categoría deductiva de análisis: Área Valorativa

Aquí se analizan el *proyecto social-educativo* y los *aspectos éticos* promovidos por la Teoría de la Objetivación en el proceso de enseñanza-aprendizaje en general y de las matemáticas en particular.

Subcategoría: Proyecto social

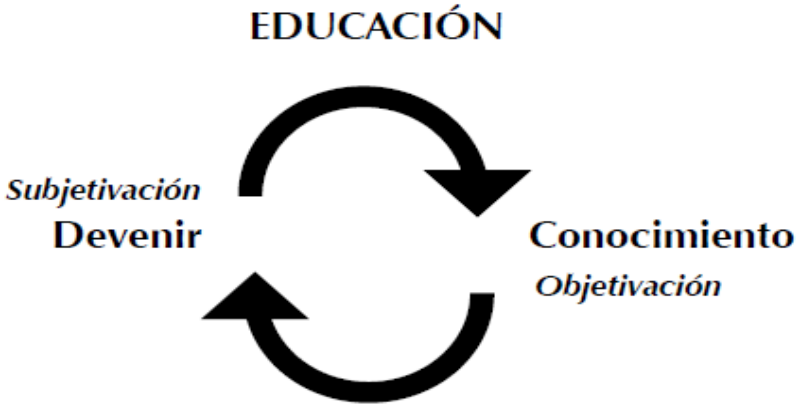
De manera explícita, en dos de los artículos analizados, se menciona que la Teoría de la Objetivación está cimentada en un proyecto de transformación social que aspira a superar el actual modelo neoliberal capitalista alienante, mediante la creación de sujetos sociales, reflexivos y éticos, que sean capaces de construir una sociedad justa, inclusiva y digna (Radford, 2017c, 2020b).

Subcategoría: Educación

En el marco del proyecto transformador que promueve la Teoría de la Objetivación, se inscribe un proyecto educativo que atribuye a la educación un potencial muy importante para el cambio social (Radford, 2017c), pues es concebida como un proyecto que implica no sólo la dimensión del conocimiento sino, también, la del devenir del sujeto (Radford, 2018b).

Figura 7

Educación como un proyecto de conocimiento y devenir



Fuente: Radford, 2017c, p. 160

En ese sentido, la Teoría de Objetivación concibe la educación como "un evento ético y estético inevitablemente inmerso en un espacio político". El aspecto estético de la educación se refiere a la transformación constante de los individuos mediante su actividad social e individual. Mientras que el aspecto ético tiene que ver con que dicha transformación histórico-cultural siempre está basada en la relación con el Otro (Radford, 2021a).

Lo anterior explica que, desde la Teoría de la Objetivación, los conceptos educativos de *saber*, *aprendizaje* y *estudiante*, sean vistos siempre en relación con el contexto político, económico y social del cual surgen (Radford, 2018b). Esto la hace distinguirse de otras teorías actuales en educación matemática (la Teoría de Situaciones Didácticas y el socio constructivismo, por ejemplo) que justifican la educación en la medida que garantiza la formación de un sujeto

autónomo, independiente y libre (Radford, 2007), que despliega su potencial cognitivo y se autorrealiza al aprender (Radford, 2021a).

Subcategoría: Educación Matemática

Como parte del proyecto social y educativo descritos anteriormente, la Teoría de la Objetivación invita a repensar la finalidad de la Educación Matemática y va más allá de la difusión de saberes como lo plantea la Teoría de Situaciones Didácticas o la construcción y desarrollo de estructuras mentales que sugiere el constructivismo norteamericano (Radford, 2014, 2015a, 2018a).

La Teoría de la Objetivación trasciende el contenido disciplinario y concibe a la Educación Matemática como "un esfuerzo político, social, histórico y cultural cuyo fin es la creación individuos éticos y reflexivos que se posicionan de manera crítica en prácticas matemáticas constituidas histórica y culturalmente" (Radford, 2014, p. 135-136), deliberando sobre "nuevas posibilidades de acción y de pensamiento" (Radford, 2016, 2018a, 2018b, 2020b, 2020d, 2021a) e imaginando "nuevas formas de vida colectiva, justa y solidaria" (Radford, 2021b).

Desde el punto de vista histórico-cultural de la Teoría de la Objetivación, la educación matemática deja de ser considerada como un apéndice de las matemáticas que sólo busca técnicas y métodos pedagógicos para transmitir eficientemente el saber matemático a los estudiantes; se le asocia más bien con la dimensión ética y transformadora de los estudiantes, quienes dejan de ser vistos como simples resolutores de problemas matemáticos (Radford, 2017c, 2018b).

Subcategoría: Ética comunitaria

En todo modelo pedagógico donde se involucran un profesor y al menos un estudiante existe una componente ética basada en una relación de obediencia o de solidaridad (Radford, 2020d). La ética que promueve la Teoría de la Objetivación es consistente con el proyecto social y educativo descritos anteriormente y es denominada "ética comunitaria" (Radford, 2015a, 2016, 2017c, 2018a, 2018b, 2018c, 2020a, 2020b, 2020c, 2020d, 2021a, 2021b).

La ética comunitaria promovida por la Teoría de la Objetivación en el aula se compone de tres vectores, a saber:

1) la *responsabilidad*, referida al acto de responder al llamado del otro con el cual se está trabajando conjuntamente;
2) el *compromiso hacia los demás* es la promesa y su cumplimiento de hacer todo lo posible en la realización de la "obra común" durante la labor conjunta; y
3) el *cuidado del otro* que implica la atención, preocupación e interés al reconocer su vulnerabilidad, sufrimientos, necesidades y esperanzas al trabajar con él (Radford, 2017c, 2018b, 2020a, 2020b, 2020c, 2020d, 2021b).

4.1.1.6. Categoría deductiva de análisis: Área Metodológica

Aquí se estudian el proceso de *diseño metodológico* y el uso de *técnicas de análisis* para desarrollar un *conocimiento científico* sobre el *proceso de enseñanza-aprendizaje* en general y de las matemáticas en particular.

No fue sino hasta casi una década después de haber sido presentados sus lineamientos generales, cuando apareció un artículo centrado en los aspectos metodológicos de la Teoría de la Objetivación articulados dialécticamente con sus principios y preguntas de investigación (Radford, 2006, 2015). En cuanto a la metodología, se describen cuatro componentes esenciales: la *unidad de análisis*, el *diseño e implementación de las tareas-actividades*, la *recolección* y el *análisis de los datos* (Radford, 2015).

Subcategoría: Unidad de análisis

En tanto el objetivo es estudiar el proceso de toma de conciencia de saberes matemáticos constituidos histórica y culturalmente, la actividad desarrollada en el aula por estudiantes y docentes juntos es la unidad de análisis (Radford, 2015a, 2016, 2017a, 2018a, 2019).

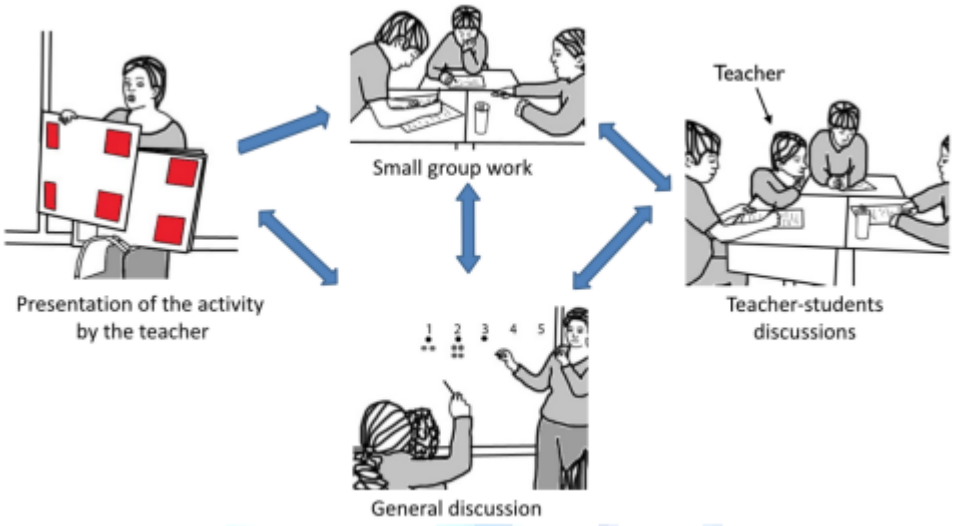
Subcategoría: Diseño e implementación de las tareas-actividades

Al momento de diseñar las tareas el docente debe tomar en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes y que los problemas sean interesantes para estos; debe propiciar la discusión en pequeños grupos, entre grupos y de manera general (ver ejemplo en la Figura 6); debe considerar

niveles conceptuales cada vez más profundos; ofrecer la oportunidad de que los estudiantes reflexionen matemáticamente de diferentes maneras a las matemáticas dominantes y debe proponer problemas con un nivel de complejidad matemática creciente (Radford, 2006, 2015a).

Figura 8

La actividad como sistema emergente en el aula



Fuente: Radford, 2015a, p. 556.

Subcategoría: Recolección de datos

Se propone la recopilación de datos a través de la grabación de video y audio de la actividad conjunta de docentes y estudiantes, las hojas de trabajo de los estudiantes y notas de campo creadas con grabadoras de voz después de cada clase (Radford, 2015a).

Subcategoría: Análisis de los datos

El interés está en analizar los procesos de objetivación y subjetivación de los estudiantes. Así que se procede a transcribir y seleccionar los "segmentos sobresalientes" (evidencia de aprendizaje) de las videograbaciones realizadas, a partir de los principios de la Teoría de la Objetivación y las preguntas de investigación (Radford, 2015a).

Se recomienda poner atención en los medios semióticos de objetivación que utilizan los estudiantes durante el proceso de toma de conciencia de los saberes matemáticos constituidos histórica y culturalmente (Radford, 2006). La toma de conciencia es analizada a partir de la actividad multimodal (perceptiva, auditiva, corporal, lingüística y simbólica) de estudiantes y docente (Radford, 2015a). Para analizar los procesos de objetivación se rastrean elementos discursivos, semióticos y corporales; mientras que para el análisis de los procesos de subjetivación se identifican las posturas (voces) críticas y éticas a través de las cuales se co-posicionan tanto los estudiantes como el docente (Radford, 2020b).

4.1.2. ANÁLISIS DE LA DIMENSIÓN *INVESTIGATIVA*

En esta dimensión se clasificaron 15 documentos de la muestra intencional seleccionada y cuyos autores fueron indicados en la Tabla 4. Así que a continuación se presenta el resultado del análisis realizado de dichos materiales, centrando la atención en las categorías deductivas mostradas anteriormente en la Tabla 2.

4.1.2.1. Categoría deductiva de análisis: Problema de investigación

Aquí se analizó *la formulación del problema de investigación mediante las preguntas y objetivos que delimitaron y guiaron el trabajo* reportado en cada documento analizado. Esto con la finalidad de identificar algunos de los objetos matemáticos o problemas de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas que han sido estudiados desde la perspectiva de la TO durante el periodo 2006-2021. Entre los objetos o problemas abordados por diversos investigadores se encontraron los siguientes:

- Procesos de objetivación del número racional, como razón y relación parte-todo, mediante actividades de medición (Cisneros y Cadavid, 2013; Cisneros y Castro, 2017).
- Desarrollo del pensamiento algebraico a partir de una tarea sobre generalización de patrones de una secuencia figural (Gómez y Mojica, 2014).
- Emergencia de medios semióticos de objetivación al desarrollar tareas de generalización de patrones (Gustin y Pontón, 2020; Lasprilla y Camelo, 2012).

- Proceso de aprendizaje relacionado con la interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento lineal de objetos (Miranda et al., 2007).
- Formas de pensamiento multiplicativo (Mojica, 2015).
- Procesos de objetivación y emergencia de medios semióticos al resolver tareas relacionadas con la derivada (Moreno, 2015).
- La articulación multimodal de los medios semióticos movilizados en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la orientación espacial (Paiva y Noronha, 2020).
- Procesos de objetivación en construcciones euclidianas (un triángulo rectángulo) con GeoGebra (Prieto y Arredondo, 2021).
- Proceso de producción de significados y toma de conciencia de la "resta de vectores por medios gráficos" (Salinas y Miranda, 2021)
- Procesos de objetivación en torno a los saberes geométricos que se revelan en los sujetos en una situación de Elaboración de Simuladores con GeoGebra (Sánchez y Prieto, 2019).
- Procesos de objetivación de la noción geométrica del sector circular trabajando con GeoGebra (Sánchez et al., 2020).
- Generalización de patrones y emergencia de formas de pensamiento algebraico temprano (Vergel, 2015).
- Procesos de generalización asociados a la relación de dependencia entre variables (Vergel et al., 2020).

4.1.2.2. Categoría deductiva de análisis: Método de investigación

Aquí se describen el *enfoque*, *informantes*, *técnica e instrumentos* de investigación utilizados para la recolección de información en la muestra de documentos analizados, tal como se muestra en la Tabla 5.

Tabla 5

Características metodológicas de las producciones investigativas

CÓDIGO DOCUMENTO	ENFOQUE	PARTICIPANTES O INFORMANTES	TÉCNICA E INSTRUMENTOS
(Cisneros y Cadavid, 2013)	Cualitativo	Estudiantes de grado séptimo, municipio Bello, Antioquia, Colombia.	Estudio de casos instrumental. Actividades matemáticas Video grabación (selección y transcripción de los episodios). Análisis multimodal
(Cisneros y Castro, 2017)	Cualitativo interpretativo	Estudiantes de grado séptimo (11 y 12 años), municipio de Bello, Antioquia, Colombia.	Estudio de caso. Soluciones escritas por los niños, instrumentos usados por ellos, entrevistas y videos.
(Gómez y Mojica, 2014)	Cualitativo interpretativo	Estudiantes de grado décimo de educación media, Colombia.	Análisis multimodal Hojas de trabajo de los estudiantes al resolver una tarea de patrones de una secuencia figural. Transcripciones de diálogos y análisis de fotografías.
(Gustin y Pontón, 2020)	Cualitativo	Estudiantes de grado séptimo (11 y 12 años) de Colombia	Tareas sobre secuencias figurales y numéricas, registros visuales (videos y audios), hojas de trabajo de los estudiantes, notas de campo (notas de voz, apuntes y registros). Análisis multimodal.
(Lasprilla y Camelo, 2012)	Cualitativo	Estudiantes de grado tercero (8-9 años) de Bogotá, Colombia	Tareas o actividades Videograbaciones Hojas de trabajo de los estudiantes Notas teóricas y personales del docente Transcripciones del video Análisis multimodal
(Miranda et al., 2007)	Cualitativo	Estudiantes de 15 y 16 años (grado 10) Ontario, Canadá.	1) grabación de la actividad, 2) hojas de trabajo de cada estudiante, 3) trascripción del discurso de los estudiantes, 4) análisis de videos

			de la interacción social y procesos de resolución de problemas. Análisis multimodal.
(Mojica, 2015)	Cualitativo, exploratorio, descriptivo y explicativo	Estudiantes de grado sexto de educación básica, Colombia.	Análisis multimodal
(Moreno, 2015)	Cualitativo, descriptivo e interpretativo	Estudiantes para profesor (Colombia)	Videograbación Hojas de trabajo de los estudiantes Transcripción de los videos Análisis multimodal
(Paiva y Noronha, 2020)	Cualitativo	Estudiantes de 11 y 13 años de sexto grado de Educación Básica en Brasil.	Videograbación Transcripción de episodios Análisis multimodal
(Prieto y Arredondo, 2021)	Cualitativo	El formador y futuros profesores chilenos	Tareas de construcción con características similares a las clásicas tareas de producción de Cabri-dibujos
(Salinas y Miranda, 2021)	Cualitativo	Profesor experto de física Estudiantes de bachillerato (México)	Videograbación de clase Grabadora de voz Transcripciones e imágenes
(Sánchez y Prieto, 2019)	Cualitativo, descriptivo e interpretativo	Profesores de matemáticas y alumnos de educación media (15-16 años) en Venezuela	Videograbación Transcripción Análisis multisemiótico
(Sánchez et al., 2020)	Cualitativo, descriptivo y de campo	Estudiantes de pregrado (Colombia)	Videograbación Análisis multisemiótico
(Vergel, 2015)	Cualitativo, descriptivo	Estudiantes colombianos de 9 y 10 años.	Tareas de generalización de patrones Grabaciones de video Hojas de trabajo de los estudiantes Transcripción de videos Análisis de videos y hojas de trabajo Entrevistas videograbadas
(Vergel et al., 2020)	Cualitativo descriptivo e interpretativo	Estudiantes colombianos de grado décimo (15-16 años)	Adaptación de tareas Instrumento físico “Punticos” Video grabación (selección y transcripción de los episodios),

	entrevistas (basadas en la tarea de secuencia figural) Análisis multimodal de datos

Fuente: elaboración propia

Como se puede observar en la Tabla 5, un artículo fue publicado en el periodo 2007-2011, seis entre 2012-2016 y ocho en los últimos cinco años, de 2017 a 2021. Igualmente, se evidencia que todas las producciones investigativas siguieron un enfoque cualitativo, a un nivel descriptivo e interpretativo. Respecto a los participantes o informantes, en su mayoría fueron estudiantes del nivel educativo básico. En cuanto al lugar donde se realizaron los estudios, 10 de ellos fueron realizados en Colombia, uno en Brasil, uno en Chile, uno en Venezuela, uno en México y uno en Canadá. Con relación al diseño metodológico, la técnica e instrumentos de investigación, todos los trabajos implementaron el procedimiento recomendado desde la TO, centrado en la *labor conjunta* de estudiantes y docentes, así como en el *análisis multimodal* o *multisemiótico*, a través de videograbaciones, transcripciones y hojas de trabajo de los participantes (Radford, 2015), por lo que constituyen ejemplos de investigaciones que validan los aportes metodológicos de dicha teoría.

4.1.2.3. Categoría deductiva de análisis: Conclusiones

Con base en los resultados obtenidos en las producciones investigativas analizadas, aquí se enuncian las principales *conclusiones* y algunas de las *líneas de investigación abiertas* identificadas dentro de la perspectiva de la TO.

- A través del uso de situaciones y tareas sobre medición que impliquen la colaboración e interacción social, los estudiantes pueden llegar a objetivar un objeto matemático, es decir, dotarlo de significado, en este caso el "número racional" en sus dos acepciones, como razón y como relación parte-todo (Cisneros y Castro, 2017). Es así como en la emergencia del conocimiento "la relación sujeto-objeto está 'mediada' no sólo por los artefactos, sino también por la presencia del otro" (Cisneros y Cadavid, 2013, p. 8).
- Desde un enfoque semiótico cultural se logra reconocer que el desarrollo del pensamiento algebraico no se puede reducir al lenguaje alfanumérico, pues al resolver una tarea sobre

generalización de patrones de una secuencia figural los estudiantes evidencian formas de pensamiento algebraico factual y contextual (Gómez y Mojica, 2014).

- En la solución de tareas relativas a la generalización de patrones, los estudiantes tienden a recurrir a diversos medios semióticos, tales como gestos, señales, deícticos espaciales, dibujos e inscripciones, entre otros, configurando nodos semióticos que les permiten tomar conciencia y objetivar diferentes formas de generalización (factual, contextual y simbólica) evidenciando así el desarrollo del pensamiento algebraico en ellos desde una edad temprana (Gustin y Pontón, 2020; Lasprilla y Camelo, 2012).
- La objetivación de significados matemáticos, entendida como toma de conciencia, no es resultado del quehacer individual, sino de la participación en prácticas sociales complejas en las que "nuestra voz y nuestros gestos se enredan en las voces y gestos de los otros". Esto implica que los procesos de objetivación estén mediatizados socialmente por la interacción con otros e instrumentalmente por los medios semióticos (Miranda et al., 2007).
- Mediante el uso de recursos semióticos como “el conteo dactilar, la inscripción de grupos iguales, el uso de términos lingüísticos, el ritmo y el tono en la pronunciación de palabras, los dibujos y las correspondencias entre ellos” se manifiestan formas prototípicas de pensamiento multiplicativo (Mojica, 2015).
- Durante el trabajo conjunto de dos futuros profesores de matemáticas y el formador en la construcción con GeoGebra de un triángulo rectángulo con ciertas propiedades, se observó la toma de conciencia (objetivación) de "la conceptualización de la herramienta Polígono", mediante la movilización de diversos medios semióticos de objetivación, tales como palabras, gestos y símbolos geométricos. Sin embargo, es necesario realizar más investigaciones sobre los procesos de objetivación y subjetivación del Saber Acerca de las Construcciones Euclidianas con GeoGebra-SACEG (Prieto y Arredondo, 2021).
- En la actividad conjunta sobre "resta" de vectores geométricos por métodos gráficos, estudiantes y un profesor experimentado de física producen significados, a partir de movilizar diversos medios semióticos de objetivación (gestos, lenguaje, signos y artefactos), y evidencian el inicio de la toma de consciencia sobre dicho objeto matemático. Con base en estos resultados, se considera "necesario profundizar en el análisis de las prácticas educativas en matemáticas y ciencias", con la finalidad de identificar la manera

en que diferentes perfiles de profesores (novatos y expertos) influyen en la producción de significados y la movilización de los medios semióticos de objetivación durante el proceso de enseñanza-aprendizaje. Además, se sugiere “impulsar el diálogo de la TO con otros enfoques teóricos que analizan la práctica de los docentes” (Salinas y Miranda, 2021).

- Se destaca la importancia de la articulación multimodal de diversos medios semióticos, tales como representaciones gráficas, gestos, expresiones faciales, miradas y discursos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la orientación espacial (Paiva y Noronha, 2020).
- En actividades de Elaboración de Simuladores con GeoGebra (ESG) los estudiantes logran tomar conciencia (objetivación) de la noción geométrica del sector circular en GeoGebra, recurriendo a diversos medios semióticos de objetivación tales como palabras, gestos y dibujos, cigüeñal, lápiz, papel, pizarra y GeoGebra. Sin embargo, es necesario investigar más sobre los procesos de objetivación que tienen lugar cuando se trabaja en la ESG (Sánchez et al., 2020). A esta misma conclusión llegan Sánchez y Prieto (2019), luego de haber analizado los procesos de objetivación de saberes geométricos que emergieron durante la actividad (labor conjunta entre un estudiante y dos profesores) de construcción de un semicírculo con GeoGebra.
- A través de medios semióticos gestuales, de movimiento, ritmo y perceptuales, los estudiantes logran evidenciar el desarrollo del pensamiento algebraico temprano factual y contextual (Vergel, 2015).
- Al resolver una tarea relacionada con una secuencia figural, se identificó la emergencia de medios semióticos de objetivación que revelan dos formas de generalización algebraica por parte de los estudiantes, una contextual y otra simbólica. Esto evidencia que los estudiantes encontraron la relación de dependencia entre las variables involucradas. No obstante, hace falta analizar los procesos de subjetivación, a través de los cuales los estudiantes se van transformando. Igualmente queda abierta la discusión respecto a la manera de evaluar la actividad matemática relacionada con este tipo de tareas, la evaluación entendida como "una reflexión crítica y retrospectiva de la labor conjunta" relacionada con la ética comunitaria entre estudiantes y profesor (Vergel et al., 2020).

4.1.3. ANÁLISIS DE LA DIMENSIÓN *PRÁCTICO-PEDAGÓGICA*

En esta dimensión se clasificaron 10 documentos de la muestra intencional seleccionada y cuyos autores fueron indicados en la Tabla 4. Así que a continuación se presenta el resultado del análisis realizado, centrando la atención en el *problema de investigación* y las *conclusiones*, categorías deductivas mostradas anteriormente en la Tabla 2.

4.1.3.1. Categoría deductiva de análisis: Problema de investigación

Aquí se analiza *la formulación del problema de investigación mediante la identificación de las preguntas y objetivos que delimitaron y guiaron el estudio* reportado en cada documento seleccionado.

- Propuesta de formación continua y permanente de docentes de educación inicial, para la enseñanza de las ciencias, la formación de sujetos críticos y éticos, y la emancipación colectiva de prácticas pedagógicas alienantes reproductoras del sistema capitalista (Camilotti y Gobara, 2021).
- Desarrollo de un experimento didáctico-formativo sobre el mapa y algunos elementos cartográficos (como la escala y la proporción) en la asignatura de Geografía, con estudiantes de sexto año de enseñanza básica en Brasil (Castilho y Moretti, 2021).
- Propuesta de formación docente en la enseñanza de las matemáticas fundamentada en los principios desalienantes de la TO y la metodología de la Secuencia Fedathi (Costa y Santos, 2020).
- Propuesta de enseñanza-aprendizaje sobre temas ambientales para formar estudiantes "éticos y reflexivos que se posicionen críticamente frente a las prácticas ambientales histórica y culturalmente constituidas" (Gobara et al., 2020).
- Propuesta de Taller dirigido a docentes de educación básica, para explorar formas de significación cultural de la multiplicación con estudiantes de educación escolar inicial (Gómez y Mojica, 2015).

- Aportes al desarrollo de un método para el estudio de los aspectos éticos en el aula de matemáticas, basado en el análisis multimodal de los modos de producción del saber y las formas de interacción social (Lasprilla y León, 2020).
- Constitución de la labor conjunta en el salón de clases, a partir de relaciones de colaboración y modos de producción de saberes, establecidos por la TO (Pantano, 2020).
- Estudio exploratorio sobre la ética como elemento ineludible en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (Radford y Lasprilla, 2020).
- Propuesta de un modelo pedagógico de matemáticas para la formación de profesionales de la salud basado en la TO (Silva y Carrasco, 2021).
- Propuesta de formación docente para la enseñanza-aprendizaje de la Cinemática que trascienda al modelo tradicional de enseñanza de la Física (Vargas-Plaça y Radford, 2021).

4.1.3.2. Categoría deductiva de análisis: Conclusiones

Con base en las consideraciones finales presentadas en los documentos que describen propuestas y/o experiencias de cursos y talleres de formación de profesores, así como sobre el estudio de otros contenidos y aspectos educativos desde la perspectiva de la TO, aquí se enuncian las principales *conclusiones* y *reflexiones* mencionadas en ellos.

- Mediante actividades realizadas a través del trabajo conjunto y una ética comunitaria (basada en relaciones de solidaridad, respecto y cuidado del otro), se logró que los docentes de educación inicial en formación reflexionaran y superaran sus prácticas pedagógicas individualistas y alienantes, desarrollando así una concepción de la enseñanza de las ciencias basada en la idea de la educación para la emancipación colectiva (Camilotti y Gobara, 2021).
- A través de actividades realizadas mediante el trabajo conjunto, entre los estudiantes y el docente, se favoreció la toma de conciencia de formas de pensar geográficas y cartográficas (constituidas histórica y culturalmente) en estudiantes brasileños de sexto año de educación básica (Castilho y Moretti, 2021).

- La propuesta de formación docente en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, basada en los fundamentos de la TO y la metodología de la Secuencia Fedathi, consta de tres momentos: 1) elaboración de la sesión didáctica, 2) desarrollo de las sesiones didácticas en el aula, y 3) análisis y evaluación de todo el proceso por parte de los sujetos implicados, es decir, el profesor/formador y alumno y el profesor de curso (Costa y Santos, 2020).
- Por medio de la labor conjunta (basada en la ética comunitaria), entre estudiantes y docente, fue posible que un grupo de estudiantes brasileños de cuarto grado de educación primaria, tomaran conciencia de temas ambientales relacionados con el alcantarillado urbano, las aguas residuales, la contaminación del suelo y las enfermedades asociadas a ello (Gobara et al., 2020).
- La perspectiva semiótico cultural de la TO permite a los docentes, durante el proceso de enseñanza-aprendizaje, reconocer otras formas de significación cultural de la multiplicación, tomando en cuenta aspectos históricos, culturales, semióticos y epistemológicos (Gómez y Mojica, 2015).
- Entendiendo la ética como "forma de alteridad" o la manera de relacionarse con el otro, la actividad de docente y estudiantes se constituye en la unidad básica de análisis de los aspectos éticos en el aula de matemáticas. Dicha actividad está soportada en dos ejes fundamentales: las formas de circulación de saberes y las formas de colaboración humana, las cuales deben ser estudiadas mediante un análisis multimodal (Lasprilla y León, 2020).
- Las relaciones de producción y formas de producción de saberes, basadas en la solidaridad, la responsabilidad y el cuidado del otro (ética comunitaria), llegan a constituir la labor conjunta en el aula de matemáticas entre estudiantes y docente. Esto fue evidenciado a través de los medios semióticos de objetivación observados durante la actividad realizada por un grupo de estudiantes colombianos de educación básica primaria (Pantano, 2020).
- La ética ha sido un tema poco estudiado en la educación matemática, pero resulta ineludible considerarla si se concibe a las matemáticas como una actividad humana en la que profesores y estudiantes están implicados. El estudio exploratorio realizado evidenció que no basta con organizar a los estudiantes en pequeños grupos de trabajo para la producción de saberes, pues predomina en ellos una ética del individualismo y la obediencia, y no una

ética de la solidaridad y la labor conjunta entre estudiantes y profesor (Radford y Lasprilla, 2020).

- La propuesta de un modelo pedagógico de matemáticas para la formación de profesionales de la salud, basado en la TO, "busca formar sujetos éticos y reflexivos, que sean capaces de posicionarse de manera crítica en prácticas matemáticas establecidas histórica y culturalmente" (Silva y Carrasco, 2021, p. 181).
- La formación de profesores en servicio y futuros profesores de ciencias debe considerar no sólo la dimensión del conocimiento, sino también la dimensión del ser. Esto implica superar la visión del profesor como un técnico del currículum y simple reproductor de la sociedad. Se trata, en cambio, de formar docentes reflexivos, éticos y críticos. Para lograrlo, los formadores de docentes, los futuros docentes y docentes en servicio deben trabajar de manera conjunta, estudiar los conceptos básicos de la TO, reflexionar críticamente sobre el sistema educativo, sobre los contenidos de enseñanza y sus prácticas escolares, así como planificar actividades que promuevan una ética comunitaria basada en la responsabilidad, el cuidado del otro y la solidaridad (Vargas-Plaça y Radford, 2021).

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

A partir de un análisis de contenido cualitativo, se estudió una muestra intencional de 45 documentos clasificados en tres dimensiones denominadas: *teórico-metodológica, investigativa* y *práctico-pedagógica*. A continuación, se enuncian las principales conclusiones por cada una de las dimensiones mencionadas que permitieron dar respuesta a la pregunta general de investigación y de la cual se originó este trabajo, a saber: *¿Cuáles han sido los aportes teórico-metodológicos y las producciones investigativas de la Teoría de la Objetivación en el campo de estudio de la Educación Matemática durante el periodo 2006-2021?*

Dimensión teórico-metodológica

En la *dimensión teórico-metodológica* se ubicaron 20 de los documentos seleccionados. A partir de su estudio y análisis se pudieron identificar algunos de los antecedentes históricos de la Teoría de la Objetivación, así como sus principales componentes y aportes conceptuales en el área ontológica, epistemológica, educativa, metodológica y valorativa.

En cuanto a los antecedentes históricos de la Teoría de la Objetivación, se describieron sus diferencias con respecto a las concepciones o paradigmas predominantes en el contexto educativo general y en la educación matemática en particular, durante el siglo XX, tales como la enseñanza tradicional, el constructivismo y la TSD. Igualmente, se identificaron las teorías socioculturales y el materialismo dialéctico como sus fuentes teórico-filosóficas.

En cuanto a las principales categorías conceptuales de la Teoría de la Objetivación, en su *área ontológica* se identificó una reformulación, desde el punto de vista del materialismo dialéctico, sobre los conceptos de *saber*, *objetos matemáticos* y *ser*, entendidos como entidades histórico-culturales en constante transformación.

Respecto a su *área epistemológica,* se identificó una concepción histórico-cultural y dialéctica tanto de lo que se entiende por *conocimiento* y la forma de llegar a conocer la realidad mediante la actividad colectiva, así como del *pensamiento*. En este último, se encontró que los artefactos culturales, las emociones y los afectos son parte constitutiva de él, por lo que aprender matemáticas es algo emocional y afectivo, también.

Por lo que se refiere a su *área educativa*, se analizó la cuestión de la educación en general y de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en particular. Se identificó que tanto la *escuela* como el *salón de clases* o *aula* son vistos como espacios de transformación social, pues en ellos no sólo se producen saberes, sino también subjetividades. En ese sentido los *profesores* y *estudiantes* son concebidos como entidades inacabadas y en evolución constante; ya que realizan una sola y misma actividad durante el proceso de *enseñanza-aprendizaje* donde están implicados tanto el *saber* y como el *ser*. También se identificó que el *aprendizaje* es concebido como un proceso social, histórico y cultural, que implica tanto el encuentro (objetivación) con saberes culturales como la transformación de los sujetos (profesores y estudiantes). En relación con esta concepción del aprendizaje, los conceptos de *objetivación* y *subjetivación* hacen referencia tanto a la toma de conciencia de saberes culturales como a la formación de seres únicos y en continua evolución; de ahí que se habla también de *procesos de objetivación* y *procesos de subjetivación*. Por último, en esta área se encontró la categoría denominada *labor conjunta* que es central en la Teoría de la Objetivación; esta hace referencia a un tipo de *actividad* en la que los individuos involucrados realizan un esfuerzo conjunto para satisfacer sus necesidades sociales, en el caso del proceso de enseñanza-aprendizaje se trata de profesores y estudiantes que trabajan en la misma "obra común", mediante determinados *modos* y *relaciones de producción*.

En su *área valorativa* se encontró que la Teoría de la Objetivación parte de un *proyecto social-educativo* que aspira a la transformación social. En este sentido, invita a repensar el objetivo de la educación matemática más allá de la difusión de saberes o la construcción de estructuras cognitivas y la concibe en términos políticos, sociales, históricos y culturales, pues pretende formar sujetos reflexivos y críticos, a partir de una *ética comunitaria* basada en la responsabilidad, el compromiso hacia los demás y el cuidado del otro.

Finalmente, en su *área metodológica* se describieron la *unidad de análisis* (labor conjunta de profesores y estudiantes), el *diseño e implementación de tareas-actividades* (discusión en pequeños grupos, nivel conceptual de complejidad creciente, etc.), la *recolección* y el *análisis de los datos* (multimodal), para desarrollar un conocimiento científico sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje en general y de las matemáticas en particular.

Dimensión investigativa

En la *dimensión investigativa* se ubicaron 15 de los documentos seleccionados. Todos se caracterizaron por analizar los procesos de objetivación de diversos objetos matemáticos, tales como: patrones de generalización y pensamiento algebraico, número racional, multiplicación, derivada, orientación espacial, resta de vectores, construcciones euclidianas con GeoGebra e interpretación de gráficas cartesianas, entre otros. Esto demuestra la extensión y el alcance que ha tenido la TO hacia otros campos de la educación matemática al explorar procesos de objetivación de diversos objetos matemáticos, para comprender la toma de conciencia que realizan los estudiantes, más allá de los estudios iniciales centrados en el pensamiento algebraico y la generalización de patrones.

Con relación al lugar donde se realizaron las investigaciones, todas se ubicaron en el continente americano (mayoritariamente en Colombia) con estudiantes de educación básica, por lo que sería necesario llevar a cabo más estudios en los niveles medio superior y superior. En cuanto al diseño metodológico, la técnica e instrumentos de investigación, todos los trabajos efectuaron un análisis multimodal o multisemiótico de la *labor conjunta* de estudiantes y docentes, a través de videograbaciones, transcripciones y hojas de trabajo de los participantes. Todo esto está en consonancia con la naturaleza del procedimiento metodológico de la TO centrado en el análisis de los procesos de objetivación, por lo que constituyen ejemplos de investigaciones que validan los aportes metodológicos de dicha teoría.

Respecto de las principales conclusiones expuestas en los estudios analizados, todas coinciden en que al resolver actividades orientadas desde un enfoque sociocultural y mediante la labor conjunta entre estudiantes y profesores, los estudiantes logran tomar conciencia del objeto matemático, usando diversos medios semióticos de objetivación. Igualmente, dejan abiertas líneas de investigación referentes al estudio de los procesos de subjetivación que van transformando a los estudiantes, así como las prácticas educativas de los docentes que permitan conocer su influencia en la movilización de los medios semióticos de objetivación durante el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Dimensión práctico-pedagógica

En la *dimensión práctico-pedagógica* se ubicaron 10 documentos caracterizados por presentar propuestas para explorar el pensamiento multiplicativo en estudiantes de educación inicial, la

formación de docentes y profesionales de la salud, la enseñanza-aprendizaje de temas ambientales, de cinemática, geográficos y cartográficos, así como aportes para un método que permita analizar aspectos éticos en el aula de matemáticas y la constitución de la labor conjunta entre estudiantes y docente.

La mayoría de los trabajos que presentan propuestas y/o experiencias de cursos de formación se ubican en el nivel básico de educación, por lo que hace falta realizar más estudios en los niveles medio superior y superior. No obstante, evidencian parte del desarrollo que ha tenido la TO más allá del campo de la educación matemática, durante el periodo 2006-2021. Esto significa que ya no sólo se investigan los procesos de objetivación y subjetivación de los estudiantes sobre diversos objetos matemáticos, sino que, además, en los últimos años se han empezado a estudiar otros contenidos (ambientales, geográficos, de física) y aspectos educativos (éticos y labor conjunta), a plantear propuestas que trascienden a otras áreas del conocimiento (ciencias, geografía), así como a la formación de futuros maestros de matemáticas y profesionales de la salud.

Así, pues, se han podido *analizar y describir algunos de los principales aportes teórico-metodológicos de la Teoría de la Objetivación*. Igualmente, se han *caracterizado e identificado las tendencias de algunas producciones investigativas realizadas desde dicha perspectiva teórica dentro y fuera del campo de estudio de la Educación Matemática durante el periodo 2006-2021*.

Finalmente, cabe destacar la importancia de continuar realizando este tipo de trabajos que, a partir de una mirada disruptiva, consideren al *estado del arte* como un *método de investigación cualitativo-documental* (Gómez et al., 2015), útil para indagar "nuevos sentidos" y "establecer nuevas relaciones de interpretación entre las categorías del objeto de estudio en las distintas producciones investigativas", creando "nuevas miradas de investigación y formación" (Guevara, 2016, p. 165). Pues al estudiar la evolución y desarrollo alcanzado de un área o tema de investigación se pueden identificar las tendencias investigativas dominantes y emergentes, así como los vacíos dentro del campo de la Educación Matemática. Esto, porque al revisar el Catálogo de Tesis de la Maestría en Educación Matemática alojado en la página web de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP, no se encontró un estudio con estas características ni temática, por lo cual, se espera que el presente trabajo sea pionero de futuros estados del arte y de investigaciones que estudien el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas desde la perspectiva sociocultural e histórica de la Teoría de la Objetivación.

BIBLIOGRAFÍA

Andréu, J. (2002). *Las técnicas de análisis de contenido: una revisión actualizada*. Fundación Centro de Estudios Andaluces.

Arias, F. G. (2012). *El proyecto de investigación. Introducción a la metodología científica.* Episteme.

Avendaño-Tobón, E-L., Díaz-Gaviria, L-M., Herrera-Ospina, A, Higuita-Ramírez, C., Montoya-Osorio, D., Quiceno-Restrepo, A-M. (2016). La Etnomatemática y la Educación Matemática: un recorrido epistemológico, curricular y metodológico en las investigaciones de la Universidad de Antioquia. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática 9*(1), 84-103.

Barbosa, J. W., Barbosa, J. C., y Rodríguez, M. (2013). Revisión y análisis documental para estado del arte: una propuesta metodológica desde el contexto de la sistematización de experiencias educativas. *BIBLIOTECOLÓGICA, 27*(61), 83-105.

Blanco, H. (2011). La postura sociocultural de la educación matemática y sus implicaciones en la escuela. *Revista Educación y Pedagogía, 23*(59), 59-66.

Blanco-Álvarez, H., Fernández-Oliveras, A. y Oliveras, M. (2017). Formación de Profesores de Matemáticas desde la Etnomatemática: estado de desarrollo. *Bolema, Rio Claro 31*(58), 564-589

Chamorro, S. (2020). *Estado del arte: Didáctica de la matemática en segundo ciclo de educación inicial en Iberoamérica durante los últimos 10 años.* [Tesis de grado. Universidad Peruana Cayetano Heredia].

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education*. Routledge.

Corral, Y. (2009). Validez y confiabilidad de los instrumentos de investigación para la recolección de datos. *Revista Ciencias de la Educación 19*(33), 228-247.

Dalle, P., Boniolo, P., Sautu, R., y Elbert, R. (2005). *Manual de metodología. Construcción del marco teórico, formulación de los objetivos y elección de la metodología*. CLACSO. http://bibliotecavirtual.clacso.org.ar/clacso/formacion-virtual/20100719035021/sautu.pdf

De Moura, M. O. & Dias, V. (2014). Entevista con Luis Radford sobre la teoría de la objetivación. *Revista Ruta Maestra, 9,* pp. 33-37. Santillana.

De Souza, H., Brandt, C. y Ruschel, A. (2017). O estado da arte da teoria dos registros de representação semiótica na educação matemática. *Educ. Matem. Pesq.* 19(1), 297-325.

Deslauriers, J. P. (2004). *Investigación cualitativa. Guía práctica.* Papiro.

Díaz, C. y Navarro, P. (2007). Análisis de contenido. En J. M. Delgado y J. Gutiérrez. (Eds.) *Métodos y técnicas cualitativas de investigación en ciencias sociales*. (pp. 177-224). Síntesis.

Díaz, L. y Carega, M. (2021). Análisis acerca de la resolución de problemas matemáticos en contexto: estado del arte y reflexiones prospectivas. *Revista Espacios 42*(1), 131-145.

Elías, J. A. (2019). El paradigma en investigación educativa: construyendo consciencia sobre lo que se hace. En D.M. Arzola Franco (Coord.). *Procesos formativos en la investigación educativa. Diálogos, reflexiones, convergencias y divergencias*. (pp. 59-74). Red de Investigadores Educativos Chihuahua.

Fernández, F. (2002). El análisis de contenido como ayuda metodológica para la investigación. *Revista de Ciencias Sociales (Cr), II*(96), 35-53. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=15309604

Freidin, B. y Najmias, C. (2011). Flexibilidad e interactividad en la construcción del marco teórico de dos investigaciones cualitativas. *Espacio abierto. 20*(1), pp. 51-70. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=12218314003

Flores, R. y Vigo, K. (2019). La función exponencial en la enseñanza media: Un Estado del Arte. *Rev. Prod. Disc. Educ. Matem 8*(2), pp. 27-47. http://dx.doi.org/10.23925/2238-8044.2019v8i2p27-47

Galeano, C. y Jaramillo, D. A. (2015). *El estado del arte: una revisión documental.* [Tesis de grado, Universidad de Antioquia]

Galeano, M. E. (2012). *Estrategias de investigación social cualitativa. El giro en la mirada.* La carreta editores E.U.

Galeano, M. E. y Vélez, O. L. (2002). *Estado del arte sobre fuentes documentales en investigación cualitativa*. Centro de Investigaciones Sociales y Humanas, Universidad de Antioquia.

Gándara, M. (2007). *El análisis teórico en ciencias sociales: Aplicación a una teoría del origen del estado en Mesoamérica*. [Tesis de Doctorado, Escuela Nacional de Antropología e Historia].

George, C. E. (2019). Estrategia metodológica para elaborar el estado del arte como un producto de investigación educativa. *Praxis educativa, 23*(3), 1-17. https://dx.doi.org/10.19137/praxiseducativa-2019-230307

Godino, J. D. (2000). La consolidación de la educación matemática como disciplina científica. En, A. Martinón. *Las matemáticas del siglo XX. Una mirada en 101 artículos* (pp. 347-350). Nívola.

Gómez, J. (2019). *Estado del arte de la etnomatemática en el Perú*. [Monografía para optar el grado de Bachiller en Educación. Universidad Nacional Mayor de San Marcos].

Gómez, L. E. (2011). Un espacio para la investigación documental. *Revista Vanguardia Psicológica, 1*(2), 226-233.

Gómez, M., Galeano, C., y Jaramillo, D. A. (2015). El estado del arte: una metodología de investigación. *Revista Colombiana de Ciencias Sociales, 6*(2), 423-442.

Guevara, R. (2016). El estado del arte en la investigación: ¿análisis de los conocimientos acumulados o indagación por nuevos sentidos? *Revista Folios,* núm. 44, 165-179. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=345945922011

Hatch, J. A. (2002). *Doing Qualitative Research in Education Settings.* State University of New York Press.

Hernández, L. A. y Juárez, J. A. (2 de noviembre de 2015). La educación matemática como ciencia. *Saberes y Ciencias. Suplemento de La Jornada de Oriente.* No. 045. https://saberesyciencias.com.mx/2015/11/02/la-educacion-matematica-como-ciencia/

Ibarra, S. y Grijalva, A. (2017). La planeación y el diseño de actividades didácticas en matemáticas: una aproximación al estado del arte. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, pp. 756-763

Jimeno, M. (2002). *Al otro lado de las fronteras de las matemáticas escolares. Problemas y dificultades en el aprendizaje matemático de los niños y niñas de tercer ciclo de Primaria* [Tesis de Doctorado, Universidad de Málaga].

Jiménez, A. (2004). El estado del arte en la investigación en las ciencias sociales. En *La práctica investigativa en ciencias sociales* (pp. 28-42). Universidad Pedagógica Nacional.

Londoño, O. L., Maldonado, L. F., y Calderón, L. C. (2016). *Guía para construir estados del arte*. International Corporation of Network of Knowledge, ICONK.

Manrique, J., Gallo, A. y Gallardo, H. (2017). Estado del arte alrededor del concepto de función. *II Encuentro Internacional en Educación Matemática.* Universidad Francisco de Paula Santander.

Martínez, M. (2004). *Ciencia y arte en la metodología cualitativa*. Trillas.

Mayring, P. (2014). *Qualitative content analysis: theoretical foundation, basic procedures and software solution*. Klagenfurt.

Mayring, P. (2015). Qualitative Content Analysis: Theoretical Background and Procedures. En Bikner-Ahsbahs, A., Knipping, C., & Presmeg, N. (Eds.). *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods* (pp. 365-380). Springer.

Mera, M., Ordoñez, C. y Ibarra, O. (2016). Metodología de enseñanza de las matemáticas. Estado del arte sobre el tema. *Revista Publicando, 3*(7), 45-56.

Miles, M. B., Huberman, A. M., & Saldaña, J. (2014). *Qualitative Data Analysis. A Methods Sourcebook.* SAGE.

Pedraz, A., Zarco, J., Ramasco, M. y Palmar, A. M. (2014). *Investigación Cualitativa*. Elsevier

Planas, N. (2010). Las teorías socioculturales en la investigación en educación matemática: reflexiones y datos bibliométricos. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 163-195). Lleida: SEIEM

Palanch, W. y Freitas, A. (2015). Estado da Arte como método de trabalho científico na área de Educação Matemática: possibilidades e limitações. *Perspectivas da Educação Matemática, 8*(18), 784-802.

Pochulu, M. D. y Rodríguez, M. A. (2016). Introducción. En M. D. Pochulu, y M. A. Rodríguez. (Comps.). *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Editorial Universitaria Villa María.

Rädiker, S. y Kuckartz, U. (2020). *Análisis de Datos Cualitativos con MAXQDA. Texto, Audio, Video.* MAXQDA PRESS.

Rodríguez, J. A. (2003). Paradigmas, enfoques y métodos en la investigación educativa. *Investigación Educativa. Revista del Instituto de Investigaciones Educativas*, *7*(12), 23-40.

Rocha, G., Juárez, J. A., y Fuchs, O. L. (2020*)*. Importancia del estudio de las actitudes para el aprendizaje de las matemáticas. *RD*, *6*(19), 148-157.

Rojas, S. P. (2007). El estado del arte como estrategia de formación en la investigación. *Studiositas*, *2*(3), 5-10.

Rosa, M. y Oray, D. C. (2018). Estado da arte da produção científica dos congressos brasileiros em Etnomatemática. *Ensino Em Re-Vista*, *25*(3), 543-564. http://dx.doi.org/10.14393ER-v25n3a2018-2

Sánchez, J. G. y Ursini, S. (2010). Actitudes hacia las matemáticas y matemáticas con tecnología: estudios de género con estudiantes de secundaria. *Revista de Investigación Latinoamericana en Matemática Educativa, 13*(4-II), 303-318. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33558827005

Sautu, R. (2009). El marco teórico en la investigación cualitativa. *Controversias y concurrencias Latinoamericanas*, *1*(1), 155-177. https://ojs.sociologia-alas.org/index.php/CyC/article/view/26

Tabares, J. (2016). *Estado del Arte de la Etnomatemática en Colombia.* [Tesis de grado. Universidad Nacional Abierta y a Distancia].

Trujillo, J., Vera, C. y Prada, R. (2017). Estado del arte sobre el concepto de límite. *II Encuentro Internacional en Educación Matemática.* Universidad Francisco de Paula Santander.

Valenzuela, B. y Vigo, K. (2018). Dificultades presentes en la enseñanza y aprendizaje del teorema fundamental del cálculo: un estado del arte. En Gaita, C., Flores, J., Ugarte, F. y Quintanilla, C. (Eds.), IX *Congreso Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 616-626). Huancavelica: Universidad Nacional de Huancavelica.

ANEXOS

Camilotti, D. C. y Gobara, S. T. (2021). Formação Continuada e Permanente de Professores: Emancipação Coletiva das Práticas Pedagógicas Alienantes. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC, 16*(39), 01-18. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n39.p01-18.id493

Castilho, R. C. y Moretti, V. D. (2021). O ensino e a aprendizagem do mapa a partir das contribuições da Teoria da Objetivação. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC, 16*(39), 39-59. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n39.p39-59.id495

Cisneros, J. W. y Cadavid, S. Y. (2013, del 6 al 8 de noviembre). La objetivación del número racional desde los procesos de medición [comunicación]. *II Encuentro Internacional de Matemáticas, Estadística y Educación Matemática*, Santo Domingo, República Dominicana.

Cisneros, J., y Castro Walter, F. (2017). Procesos de objetivación relacionados con la razón y la relación parte-todo mediante la medición: un estudio con niños de séptimo grado. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 10(1),* 23-45.

Costa, F. C. y Santos, M. J. (2020). Proposta de formação docente crítico-reflexiva a partir da Teoria da Objetivação e da Metodologia Sequência Fedathi. En S. Takeco Gobara & L. Radford (Eds.), *Teoria da Objetivação: Fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática* (pp. 247-264). Livraria da Física.

Gobara, S.T., Radford, L., & De Oliveira Monteiro. (2020). Contribuições da teoria da objetivação para o ensino e aprendizagem de temáticas ambientais para os anos iniciais do ensino fundamental. *Ciência Geográfica – Bauru, XXIV*(4), 1705-1726.

Gómez, J. y Mojica, J. (2014). Una mirada sociocultural del pensamiento algebraico desde la teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7*(2), 81-99.

Gómez, J. y Mojica, J. (2015). Formas de significación cultural de la multiplicación desde la Teoría de la Objetivación. *RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa, 1*(1), 781-787.

Gustin, J. D., y Pontón, T. (2020). Emergencia de medios semióticos en estudiantes de grado séptimo al desarrollar tareas de generalización de patrones. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 16*(60), 38-56.

Lasprilla, A. y Camelo, F. J. (2012). Generalizando patrones figurales con estudiantes de 8 y 9 años: una interpretación de los medios semióticos de objetivación movilizados. *Colombian Applied Linguistics Journal, 14*(2), 35-50.

Lasprilla, A. y León, O. (2020). Elementos de un método para el estudio de aspectos éticos en la educación matemática escolar inicial. *RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa, 5*(2), 129-139.

Miranda, I., Radford, L. y Guzmán, J. (2007). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. *Educación Matemática*. *19*(3), 5-30.

Mojica, A. (2015). Formas de pensamiento multiplicativo en alumnos de sexto grado: un estudio exploratorio desde la teoría cultural de la objetivación. *RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa, 1*(1), 466-471.

Moreno, J. E. (2015). Objetivación de la derivada en una situación de Pensamiento Variacional. *RECME - Revista Colombiana de Matemática Educativa, 1*(1), 508-512.

Paiva, J. P. A. A., & Noronha, C. de A. (2020). A articulação de meios semióticos no ensino-aprendizagem da orientação espacial. *RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa, 5*(2), 107-116. Recuperado a partir de http://ojs.asocolme.org/index.php/RECME/article/view/355

Pantano, O. L. (2020). Constitución de una labor conjunta: trabajando hombro con hombro para alcanzar un mismo propósito. *RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa, 5*(2), 117-128.

Prieto, J. L. y Arredondo, E. H. (2021). Construcciones euclidianas con GeoGebra y procesos de objetivación: Un estudio con futuros profesores de matemáticas. *REMATEC - Revista de Matemática, Ensino e Cultura, 16*(39), 77-100. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n39.p77-100.id496

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*, pp. 103-129., http://relime.org/index.php/repositorio/volumen-9/numero-especial-9-4/0904p/270-pdf-elementos-de-una-teoria-cultural-de-la-objetivacion/file

Radford, L. (2007). Towards a cultural theory of learning. In Pitta-Pantazi, D. & Philippou, G. (Eds.). *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME – 5), pp. 1782-1797.

Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. In L. Radford, G. Schubring & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: epistemology, history, classroom, and culture* (pp. 215-234). Sense Publishers.

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7* (2), pp. 132-150. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=274031870010

Radford, L. (2015a). Methodological Aspects of the Theory of Objectification. *Perspectivas da Educação Matemática*, *8* (18), pp. 547-567.

Radford, L. (2015b). The Epistemological Foundations of the Theory of Objectification. In L. Branchetti (Ed.), *Teaching and Learning Mathematics. Some Past and Current Approaches to Mathematics Education* (pp. 127-149). Isonomia.

Radford, L. (2016). The theory of objectification and its place among sociocultural research in mathematics education. *Revista Internacional de Pesquisa Em Educação Matemática, 6*(2), 187-206.

Radford, L. (2017a). Aprendizaje desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación. En B. D'Amore & L. Radford (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos* (pp. 115-136). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Radford, L. (2017b). Saber y conocimiento desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación. En B. D'Amore & L. Radford (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos* (pp. 97-114). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Radford, L. (2017c). Ser, subjetividad y alienación. En B. D'Amore & L. Radford (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos* (pp. 97-114). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Radford, L. (2018a). A cultural-historical approach to teaching and learning: The theory of objectification. In: Hsieh, F.-J. (Ed.), *Proceedings of the 8th ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematics Education* (Vol 1, pp. 137-147). EARCOME.

Radford, L. (2018b). Algunos desafíos encontrados en la elaboración de la Teoría de la Objetivación. *PNA. Revista de investigación en Didáctica de la Matemática, 12*(2), pp. 61-80. https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/view/6965

Radford, L. (2018c). Saber, aprendizaje y subjetivación en la Teoría de la Objetivación. En I. Abreu Mendes (Ed.), *Anais do 5o Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – 5º SIPEMAT* (pp. 1-22).

Radford, L. (2019). On the Epistemology of the Theory of Objectification. In U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME11, February 6 – 10, 2019) (pp. 3062-3069). Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Radford, L. (2020a). ¿Cómo sería una actividad de enseñanza-aprendizaje que busca ser emancipadora? La labor conjunta en la teoría de la objetivación. *Revista Colombiana de Matemática Educativa, RECME, Número especial de la Teoría de la Objetivación, 5*(2), pp. 15-31. http://ojs.asocolme.org/index.php/RECME/article/view/379

Radford, L. (2020b). El aprendizaje visto como saber y devenir: una mirada desde la teoría de la objetivación. *REMATEC: Revista de Matemática, Ensino e Cultura, 15*(36), 27-42.

Radford, L. (2020c). Le concept de travail conjoint dans la théorie de l'objectivation. In M. Flores González, A. Kuzniak, A. Nechache, & L. Vivier (Eds.), *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz* n°21 (pp. 19-41). IREM de Paris.

Radford, L. (2020d). Un recorrido a través de la teoría de la objetivación. En S. Takeco Gobara & L. Radford (Eds.), *Teoria da Objetivação: Fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática* (pp. 15-42). Livraria da Física.

Radford, L. y Lasprilla, A. (2020). De por qué la ética es ineludible de considerar en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *La matematica e la sua didattica, 28*(1), 107–128.

Radford, L. (2021a). Aspectos conceituais e práticos da teoria da objetivação. In V. Moretti & L. Radford (Eds.), *Pensamento algébrico nos anos iniciais: Diálogos e complementaridades entre a teoria da objetivação e a teoria histórico-cultural* (pp. 35-56). Livraria da Física.

Radford, L. (2021b). La ética en la teoría de la objetivación. In L. Radford & M. Silva Acuña (Eds.), *Ética: Entre educación y filosofía* (pp. 107-141). Universidad de los Andes.

Salinas-Hernández, U., & Miranda, I. (2021). Un análisis de los inicios de toma de consciencia de la "resta" de vectores a través de la labor conjunta. *REMATEC - Revista de Matemática, Ensino e Cultura, 16*(39), 60-76. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n39.p60-76.id497

Sánchez, I. C. y Prieto, J. L. (2019). Procesos de objetivación alrededor de las ideas geométricas en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *PNA. Revista de investigación en Didáctica de la Matemática, 14*(1), 55-83.

Sánchez, I. C., Brandemberg, J. C. y Castillo, L. A. (2020). La objetivación de la noción de sector circular en el trabajo matemático con GeoGebra. *Revista Paradigma, 41*(2), 448-475. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.0.p448-475.id924

Silva, M. y Carrasco, E. (2021). Propuesta metodológica de construcción de un Modelo Pedagógico Matemático en el marco de la Teoría de la Objetivación. *REMATEC - Revista de Matemática, Ensino e Cultura, 16*(39), 167-188. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n39.p167-184.id488

Vargas-Plaça, J. S. y Radford, L. (2021). A formação de professores para o ensino de ciências na perspectiva na teoria da objetivação. *Interfaces da Educação, 12*(36), 308-328.

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA, 9*(3), 193-215.

Vergel, R., González, L. M., & Miranda, I. (2020). La relación de dependencia entre variables: Un análisis desde la teoría de la objetivación. *RECME - Revista Colombiana de Matemática Educativa, 5*(2), 67-81.

Ximenes, F. A. y Gobara, S. T. (2020). Teoria da Objetivação Ressignificando a educação continuada de professores de ciências. En S. Takeco Gobara & L. Radford (Eds.), *Teoria da Objetivação: Fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática* (pp. 201-224). Livraria da Física.